



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología

El dinero como recurso didáctico para favorecer el
conteo y el agrupamiento decimal en preescolar

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el
Grado de

Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Presenta

Daniela Martínez Aldape

Dirigido por:

Diana Violeta Solares Pineda

Co directora: Laura Bonilla Ramírez

Querétaro, Qro. A enero 2020



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

El dinero como recurso didáctico para favorecer el conteo y el agrupamiento
decimal en preescolar

Opción de titulación
Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestra en la Lengua y las
Matemáticas

Daniela Martínez Aldape

Dirigido por:

Diana Violeta Solares Pineda

Co directora: Laura Bonilla Ramírez

Dra. Diana Violeta Solares Pineda
Presidente

Mtra. Laura Bonilla Ramírez
Secretario

Dra. Erika García Torres
Vocal

Dra. Norma Fernández Ortega
Suplente

Mtra. Ligia Beatriz Ramírez Moguel
Suplente

Centro Universitario
Querétaro, Qro
Enero, 2020

RESUMEN

La presente investigación tuvo como objetivo diseñar e implementar una secuencia didáctica utilizando el dinero como un recurso para favorecer el conteo, el agrupamiento decimal y la equivalencia, en niños de tercero de preescolar en un contexto de compra venta. La finalidad fue evaluar dicha secuencia así como identificar los conocimientos y dificultades que mostraban los preescolares ante las situaciones planteadas. Para ello, se realizó un análisis de los procedimientos de resolución de los alumnos considerando el tipo de situación y las variables didácticas utilizadas: “La Tiendita” usando solo monedas de \$1 y usando monedas de distintas denominaciones (\$1, \$2, \$5 y \$10) y el juego “El cajero”. Asimismo, se analizaron y destacaron las intervenciones didácticas que contribuyeron a la generación de nuevos aprendizajes en los alumnos.

El diseño metodológico se basó en los aportes de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) y de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). Los resultados de esta investigación demostraron que la mayoría de los alumnos preescolares lograron resolver problemas matemáticos usando monedas de distintos valores, utilizando recursos didácticos como las tarjetas de validación y la tira numérica. También se observó que el juego de “El cajero” utilizando monedas de distintos valores puede contribuir a que los alumnos comprendan una regla normativa de cambio, por ejemplo, cambiar 10 de monedas de \$1 por una de \$10 o 5 monedas de \$1 por una moneda de \$5.

(Palabras clave: conteo, equivalencia, preescolar, intervención docente, secuencia didáctica)

SUMMARY

The objective of this research was to design and implement a didactic sequence using money as a resource to favor counting, decimal grouping and equivalence, in preschool third-party children in a buying and selling context. The purpose was to evaluate this sequence as well as to identify the knowledge and difficulties that preschoolers showed in the situations presented. For this, an analysis of the resolution procedures of the students was carried out considering the type of situation and the didactic variables used: "La Tiendita" using only \$ 1 coins and using coins of different denominations (\$ 1, \$ 2, \$ 5 and \$ 10) and the game "The cashier". Likewise, the didactic interventions that contributed to the generation of new learning in the students were analyzed and highlighted.

The methodological design was based on the contributions of the Theory of Didactic Situations (Brousseau, 2007) and Didactic Engineering (Artigue, 1995). The results of this research showed that the majority of preschool students managed to solve mathematical problems using coins of different values, using didactic resources such as validation cards and the number strip. It was also observed that the game of "The cashier" using coins of different values can help students understand a rule of exchange rules, for example, exchange 10 of \$ 1 coins for one of \$ 10 or 5 \$ 1 coins for one currency of \$ 5.

(Keywords: counting, equivalence, preschool, teacher intervention, didactic sequence)

Para la elaboración de esta tesis, se contó con el apoyo de una beca
Del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi madre que, con su ejemplo, me enseñó el significado de la dedicación y perseverancia para lograr mis objetivos.

A mi padre, por su apoyo y tolerancia; por esperarme pacientemente cada noche mientras trabajaba para cumplir con este proyecto.

A mi hermana, mi apoyo y compañía incondicional en cada una de las etapas de la realización de esta maestría. Por compartir confidencias, miedos, triunfos, decepciones e incertidumbre a lo largo de este trabajo.

A mi novio, Eduardo, por estar en las buenas y en las malas para dar impulso y ayudarme a no perder el equilibrio.

Agradezco a mi directora de tesis, Dra. Diana Violeta Solares Pineda, por su apoyo y compromiso constantes. Gracias, Diana, por el intercambio de ideas, por tus comentarios crítico-constructivos, por tu paciencia y tolerancia.

A mi co-directora Laura Bonilla, por su paciencia y apoyo constante, por los comentarios tan valiosos que ayudaron a hacer de este trabajo lo que es.

Y a mis lectores Ligia Ramírez, Erika García y Norma Fernández por dedicar su tiempo a la revisión de este documento y por aportar sus opiniones para perfeccionarlo.

A la profesora Myrna Torres por su apoyo incondicional, atención y disposición. Sin ella, este trabajo de investigación no hubiera sido posible.

A los alumnos que fueron las estrellas en esta investigación, así como a sus padres que dieron el consentimiento para la participación.

Contenido

Índice de figuras	VIII
Índice de tablas.....	IX
CAPÍTULO 1- PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	1
1.1 Justificación.....	4
1.2 Antecedentes	6
1.3 Preguntas y objetivos de investigación.....	8
CAPITULO 2- MARCO TEÓRICO.....	9
2.1 Funciones del número.....	10
2.2 El conteo	11
2.3 Sistema de Numeración Decimal.....	13
2.4 Equivalencia.....	16
2.5 Desarrollo de nociones económicas en los niños	20
CAPÍTULO 3.- METODOLOGÍA	23
3.1 Características generales y éticas de la investigación.....	23
3.2 Teoría de las Situaciones didácticas	24
3.3 Ingeniería didáctica.....	26
3.4 Diseño, implementación de la secuencia didáctica para indagar saberes previos .	28
3.4.1 Descripción general de la secuencia.	29
3.4.2 Análisis de la secuencia.....	31

3. 5 Diseño e implementación de la secuencia didáctica final.....	33
3.5.1 Descripción general de la secuencia didáctica	34
3.5.2 Materiales y recursos didácticos utilizados	38
3.5.3 Descripción y análisis a priori de las situaciones	39
3. 6 Recolección y análisis de la información.....	47
CAPÍTULO 4.- ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN, PROCEDIMIENTOS	
IDENTIFICADOS EN LOS ALUMNOS.....	49
4.1 SITUACIONES DE LA TIENDITA COMPRANDO CON MONEDAS DE \$1	
(S1 y S2).....	50
4.1.1 Tareas y procedimientos de los compradores.....	52
4.1.2 Tareas de los vendedores.....	58
4.2 SITUACIONES DE LA TIENDITA: COMPRANDO CON MONEDAS DE	
DISTINTAS DENOMINACIONES (S. 5 Y S.6).....	68
4.2.1 Tareas de los compradores	70
4.2.2 Tareas de los vendedores.....	86
4. 3 SITUACIÓN DIDÁCTICA “EL CAJERO”.....	94
4.3.1Tareas del Cajero	96
4.4 Conocimiento sobre el Sistema de Numeración Decimal.....	109
CAPITULO 5.- ANÁLISIS DE LA IMPLENTACIÓN, INTERVENCIÓN	
DOCENTE	112

5.1 Ayudas directas	114
5.2 Ayudas indirectas	116
CAPITULO 6.- CONCLUSIONES	121
Conteo.....	121
Equivalencia.....	123
Agrupamiento.....	125
6.1 Conclusiones sobre la metodología y la implementación.....	126
6.2 Conclusiones sobre el efecto de la secuencia didáctica	128
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Índice de figuras

<i>Figura 1- Lámina de Compras en la Juguetería.</i>	2
<i>Figura 2 Lámina ¿Con qué monedas pagamos?</i>	3
<i>Figura 3 Representa la organización de las situaciones didácticas</i>	37
<i>Figura 4 Ejemplo de tarjeta de validación</i>	38
<i>Figura 5 Tira numérica</i>	38
<i>Figura 6 Organización de la presentación del análisis de la Situación 1 y 2.</i>	51
<i>Figura 7 Representación escrita de Salvador</i>	65
<i>Figura 8 Organización de las Situaciones 5 y 6</i>	68
<i>Figura 9 Jorge utilizando sus dedos para representar el valor de cada moneda.</i>	75
<i>Figura 10 Representación gráfica de Salvador</i>	84
<i>Figura 11 Tarjeta de validación del número 4 con monedas de distintas denominaciones</i>	89
<i>Figura 12 Línea del tiempo que muestra un avance significativo en los procedimientos usados comprando con monedas de distintas denominaciones.</i>	94
<i>Figura 13 Organización de la Situación del cajero S3 y S4</i>	95
<i>Figura 14 Organización del análisis de las intervenciones docentes.</i>	113

Índice de tablas

<i>Tabla 1 Descripción general de la Secuencia didáctica para indagar saberes previos.</i>	30
<i>Tabla 2 Variables didácticas utilizadas en la secuencia</i>	35
<i>Tabla 3 Procedimientos utilizados por los vendedores para verificar el pago en la Situación 5</i>	88

Dirección General de Bibliotecas UAO

INTRODUCCIÓN

El currículo oficial para preescolar considera el uso del dinero como recurso didáctico para favorecer el conteo y las relaciones de equivalencia entre monedas de \$1, \$2, \$5 y \$10 en situaciones reales o ficticias de compra y venta (Secretaría de Educación Pública 2017). Favorecer este aprendizaje en niños preescolares conlleva comprender y enfrentar las dificultades cognitivas propias del desarrollo de las nociones económicas de los niños, mismas que son descritas en investigaciones como Delahanty (1989), Delval (2013), Faigenbaum (2011); así como dificultades y retos de orden didáctico identificados por docentes como Bonilla (2014), Rebolledo (2016) y Muñoz (2017).

En lo que se refiere a los retos cognitivos al trabajar con el dinero y la equivalencia en preescolar, autores como Delval (2013) y Kammi (2009) relacionan la edad con la adquisición de la equivalencia: a medida que los niños crecen, su desempeño con la equivalencia mejora. La adquisición de ese concepto, además de estar vinculado con el desarrollo evolutivo, está relacionado con la capacidad del niño para contar diferentes conjuntos y comparar sus numerosidades; esto se describe en investigaciones como las de Kieran (1981) y Gelman & Gallistel (1978).

En lo que se refiere al conteo, es uno de los principales contenidos alrededor del cual se desarrolla el trabajo en preescolar. Según Chamorro (2005), el conteo puede ser considerado un índice de la riqueza de conocimientos matemáticos en las primeras edades, así como un factor potencial del desarrollo de las conceptualizaciones numéricas.

Uno de los contextos a los que más se suele recurrir para trabajar contenidos como el conteo, la equivalencia y el Sistema de Numeración Decimal es el que tiene que ver con la compra-venta y el uso del dinero. (Delahanty 1989, Delval 2013, Faigenbaum 2005).

El dinero es un instrumento social al que tienen acceso los niños desde edades muy tempranas cuando van a la tienda por sí mismos o acompañados de un adulto, llevando un poco de monedas en sus manos. Utilizar el contexto de compra-venta en el aula como un recurso para que los niños puedan resolver problemas matemáticos relacionados con su realidad social, puede ser una situación motivante e interesante para ellos. Por ejemplo, los niños tienen oportunidades de contar colecciones grandes donde se pueden intercambiar diez

unidades por algo que represente diez, lo cual puede compararse con el intercambio de diez monedas de un peso por una moneda de diez, aspecto que está relacionado con la equivalencia de las monedas.

Sin embargo, recientes investigaciones realizadas por educadoras sobre las prácticas pedagógicas en preescolar, han encontrado dificultades para favorecer estos aprendizajes en los niños (Bonilla, 2014; Rebolledo, 2016 y Muñoz, 2017).

Por ejemplo, Rebolledo (2016) advierte que, cuando los niños tenían monedas de distintas denominaciones, recurrían al conteo de las monedas sin advertir su valor, por lo que solo las contaban como unidad. Es el caso de una alumna que debía pagar unas uvas que costaban ocho pesos con monedas de diferente valor; toma las monedas que necesita y solo cuenta ocho monedas sin importar el color ni el valor de las mismas.

Otro ejemplo de las dificultades detectadas son las que señala Muñoz (2017) cuando encuentra que los niños no pueden comprar si no hay una moneda con la denominación que corresponda a la cantidad del precio. Los niños estaban comprando juguetes y debían responder al cuestionamiento “¿puedo comprar dos barcos si tengo 5 pesos?” (Cada barco cuesta 3 pesos). A continuación, se presenta un fragmento de la situación reportada por Muñoz (2017).

Niña 11: Sí

M: ¿Por qué?

Niña 11: porque tres es poquito, y cinco es mucho y podrías tener tres monedas

Niño 3: no, porque no tenemos de a tres pesos.

A través de mi experiencia como docente frente a grupo, he identificado esas mismas dificultades, tal vez por esa causa las docentes tratamos de recurrir al apoyo de situaciones didácticas que están a nuestro alcance en los libros de texto impartidos por la SEP, como lo es el Libro de la Educadora, de educación preescolar. Aunque este libro brinda algunas sugerencias sobre cómo trabajar con dinero, en ocasiones no son suficientes para guiar nuestra práctica docente.

Esta investigación busca aportar ideas y sugerencias a las educadoras para abordar contenidos matemáticos como el conteo, la equivalencia y el agrupamiento decimal en niños preescolares a través del diseño de una secuencia didáctica.

En el Capítulo 1 se expone la problemática y la justificación que dan origen al proyecto de investigación. En este capítulo se plantean las necesidades de las educadoras al trabajar conceptos matemáticos usando dinero, se da cuenta de investigaciones didácticas realizadas por docentes que muestran las dificultades que han encontrado al trabajar con dinero y se dan a conocer las preguntas y objetivos de investigación.

En el Capítulo 2 se fundamenta teóricamente esta investigación mostrando algunos de los estudios más relevantes en torno a los procesos de construcción infantil del concepto de número, a la equivalencia y al sistema de numeración decimal. También se citan las aportaciones de estudios psicogenéticos sobre la construcción infantil de nociones económicas y la compra-venta.

En el Capítulo 3 se presentan las decisiones metodológicas tomadas para esta investigación. Se establecen, desde la Teoría de Situaciones Didácticas, las características que definen un problema matemático y se describen las fases realizadas para la elaboración de la secuencia didáctica basadas en la Ingeniería Didáctica. Se describe la secuencia didáctica realizada para indagar los saberes previos de los alumnos, así como los resultados que sirvieron de base para crear las situaciones didácticas propuestas y, por último, se detalla la secuencia didáctica implementada en esta investigación.

En el Capítulo 4 se desarrolla el análisis de los procedimientos de los alumnos. El análisis se divide en tres partes, considerando el tipo de situación y las monedas utilizadas: la simulación de “La Tiendita” usando monedas de \$1, usando monedas de varias denominaciones y el juego de “El cajero”.

En el Capítulo 5 se presenta un análisis sobre el impacto de las intervenciones didácticas docentes en los aprendizajes matemáticos de los alumnos.

Por último, se presentan las conclusiones dando respuesta a las preguntas de investigación, y se dan algunas sugerencias para trabajar situaciones didácticas usando dinero.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el programa de Educación Preescolar 2011 (PEP, 2011) se presenta una competencia que describe que los alumnos deben ser capaces de resolver problemas en situaciones que les sean familiares y que impliquen agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos. En esa misma competencia se describe un aprendizaje esperado relacionado con el uso del dinero: “Reconoce el valor real de las monedas; las utiliza en situaciones de juego” (PEP 2011 p. 58). Este programa recién dejó de estar en vigor y fue sustituido por el programa Aprendizajes Clave 2017. En él se describe, dentro del campo de formación de pensamiento matemático, el siguiente aprendizaje esperado: identifica algunas relaciones de equivalencia entre monedas de \$1, \$2, \$5 y \$10 en situaciones reales o ficticias de compra y venta.

El que los alumnos identifiquen relaciones de equivalencia entre las monedas trae consigo grandes dificultades para los niños, las cuales han sido presentadas en investigaciones psicológicas y didácticas (Bonilla 2014, Delahanty 1989, Delval 2013, Faigenbaum 2005, Rebolledo 2016 y Muñoz 2017)

Cabe mencionar que en preescolar se trabaja con un libro que distribuye la Secretaría de Educación Pública (SEP), llamado: “Mi álbum. Preescolar. Tercer grado”, en el que se presentan dos láminas que involucran el trabajo con dinero.

La primera lámina se llama “De Compras en la juguetería”, donde los niños deben decidir qué juguetes pueden comprar con una moneda de diez pesos y cuánto deberían darles de cambio, en caso de que sobre dinero. En la figura 1 se observa una juguetería que ofrece juguetes con un precio no mayor a 10 pesos.



Figura 1- Lámina de Compras en la Juguetería.

Para resolver esta actividad los alumnos deben poner en práctica los siguientes conocimientos:

- Identificación de la serie escrita del 1 al 10.
- Identificación del número como cardinal
- Comprensión del concepto de “cambio”
- Resolución de problemas aditivos

Sin embargo, en mi experiencia como profesora de preescolar he observado las dificultades que tienen muchos niños para resolver con éxito esta actividad, debido a la complejidad que implica.

La segunda lámina se llama “¿Con qué monedas pagamos?” En ésta se le pide al niño que resuelva el problema de cuánto dinero se va gastar si va a comprar dos alimentos del menú que ahí se muestra; además, debe elegir las monedas con las que tendrá que pagar, las cuales son de distintas denominaciones: \$1, \$2, \$5, \$10 (Figura 2 Lámina ¿Con qué monedas pagamos?).

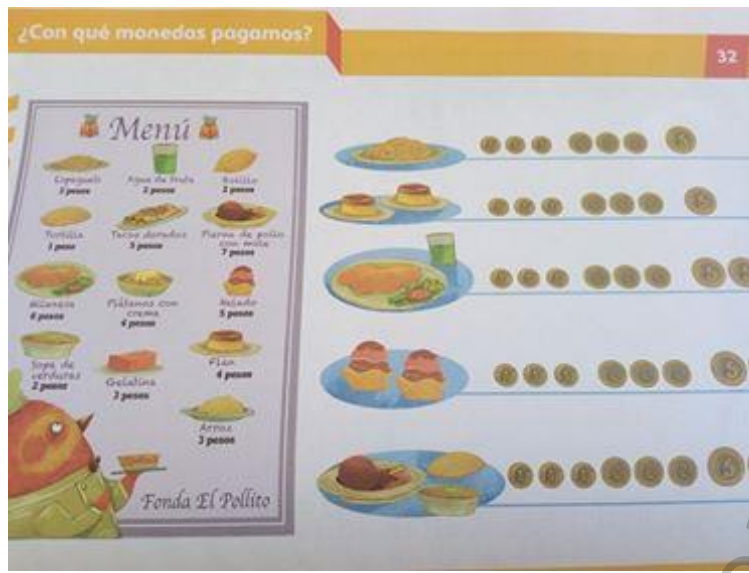


Figura 2 Lámina ¿Con qué monedas pagamos?

Resolver esta lámina implica que los niños:

- Identifiquen la serie escrita del 1 al 10
- Hayan adquirido el concepto de cardinal
- Identifiquen el valor de las monedas
- Resuelvan problemas aditivos (agregar)

La Secretaria de Educación Pública otorga a las educadoras un libro con orientaciones para trabajar con estas láminas. Sin embargo, Muñoz (2017) demostró que estas orientaciones no son suficientes para que las docentes puedan diseñar una secuencia didáctica que le permita al alumno resolver este tipo de actividades.

La tarea que los profesores tienen que hacer al diseñar o adaptar una secuencia didáctica que les permita a los alumnos generar nuevos retos cognitivos se vuelve complicada. Galaburri (2000) menciona que ésta no es una tarea exclusiva del profesor debido a que “es una responsabilidad que comparte con las autoridades que, a través de documentos o circulares, instituyen cómo debe trabajarse sin instrumentar la capacitación requerida” (p.118). Es decir, las autoridades tendrían la obligación de capacitar a los profesores para poder diseñar o adaptar situaciones didácticas que sean adecuadas para el conocimiento que se desea enseñar, debido a que se trata de una tarea compleja que implica conocer teorías y

fundamentos que sustenten las actividades elegidas. Sin embargo, los docentes planifican de acuerdo con sus saberes y experiencia, sin recibir un acompañamiento real durante su práctica docente.

A través de la experiencia que he tenido como docente de preescolar, he observado que se aplican múltiples actividades y situaciones donde se usa el dinero como recurso didáctico, tales como la “tiendita” y el “supermercado” para resolver problemas matemáticos, principalmente aditivos. Sin embargo, he notado que a pesar de que el contexto de compra-venta es interesante para los alumnos, a veces estas situaciones se quedan lejos de generar nuevos conocimientos en ellos. Como señala Bonilla (2014) respecto al trabajo docente con ese tipo de recursos y de contextos: “Fue interesante descubrir que la mayor parte de las dificultades que manifiestan los alumnos están relacionadas con la falta de análisis y planeación de las actividades de enseñanza que se implementan en el aula” (p.118).

Debido a las limitaciones a las que nos enfrentamos los profesores en nuestro quehacer docente, me propuse diseñar una secuencia didáctica que favoreciera el conteo, la equivalencia y el agrupamiento decimal en los alumnos de tercer grado de preescolar. Asimismo, me propuse que dicha secuencia pudiera servir como base para que otras educadoras implementen y/o adapten situaciones didácticas similares.

1.1 Justificación

La planificación de situaciones didácticas es un proceso complejo que un profesor debe hacer para organizar su clase, y para que en ella se generen nuevos saberes. Chamorro (2003) menciona que “Es necesario que el futuro profesor disponga, como profesional de la enseñanza, de herramientas y técnicas profesionales que le permitan abordar la enseñanza de las matemáticas con cierta garantía, alejándole de la visión ingenua que muchos sectores de nuestra sociedad tienen de su enseñanza” (p.118).

Desde mi propia experiencia como docente de preescolar, puedo decir que, en general, las educadoras requerimos de más herramientas y técnicas profesionales que nos permitan desempeñar nuestro trabajo docente de una mejor manera.

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2013) muestra una investigación donde da cuenta de la dificultad que mostramos las educadoras para el diseño de situaciones didácticas en términos de resolución de problemas.

En ese estudio, el INEE (2014) reporta que una tercera parte de las educadoras en servicio sigue llevando a cabo prácticas pedagógicas donde no se ofrece a los alumnos la oportunidad de reflexionar y descubrir diferentes procesos relacionados con el Pensamiento Matemático.

Este tipo de prácticas pedagógicas da como resultado un elevado fracaso que se constata en el aprendizaje de las matemáticas de los alumnos. Esto se puso en evidencia al realizar una prueba de evaluación en el campo formativo de Pensamiento Matemático que se aplicó a niños de tercero de preescolar en México (INEE, 2014). Tal prueba dio como resultado que 91% de los niños lograron el nivel Básico, el 9 % restante se encontraba por debajo del básico, lo cual implica que al término del preescolar 9 de cada 10 tenían un dominio básico de los conocimientos y habilidades establecidos en el currículo, en relación con el uso de los números y con los aspectos de forma, espacio y medida, en esa se esperaba que los alumnos tuvieran un nivel medio o avanzado donde se observará la consolidación de los aprendizajes aprendidos durante el periodo de preescolar.

Además, este estudio muestra mayor avance en el campo formativo de Lenguaje y Comunicación que en Pensamiento Matemático. En 2011 los estudiantes del último grado de preescolar alcanzaron un puntaje promedio en Lenguaje y comunicación (513 puntos) superior al registrado en 2007 (500 puntos); la media nacional se ubicó en el nivel de logro medio. Algunos datos que pudieran estar relacionados con esta mejora son:

Las educadoras dedican más del doble de tiempo a actividades del campo formativo de Lenguaje y comunicación en comparación con el tiempo dedicado a Pensamiento matemático; 2) que los padres suelen dar mayor importancia a que sus hijos aprendan a conocer las letras, leer y escribir, que a conocer los números, contar y adquirir nociones sobre espacio y forma; y, 3) que existe un menor porcentaje de materiales disponibles sobre nociones matemáticas en comparación con los que pueden emplearse para fortalecer la lengua oral y escrita (INEE, 2010b; 2013c).

1.2 Antecedentes

El uso del dinero como recurso didáctico para favorecer el aprendizaje de algunos aspectos del número como el conteo, la equivalencia y el agrupamiento decimal ha sido tema de investigación, tanto en preescolar, educación primaria e incluso con adultos. En este apartado describiré algunas de las investigaciones que al respecto se han llevado a cabo en México por parte de profesoras de preescolar, y que constituyen los antecedentes inmediatos de mi propia investigación.

En el marco de la Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro, Bonilla (2014) indagó los alcances y límites del uso el dinero como medio para el aprendizaje del sistema de numeración decimal en preescolar. Apoyándose en estudios sobre el desarrollo de nociones de dinero y de compra-venta (Berti y Bombi, 2008; Delahanty, 1989), Bonilla ratifica que el dinero y la compra-venta no son conceptos “transparentes” para los preescolares, pues aunque los niños han podido presenciar e incluso participar en situaciones en las que se usa el dinero, no se puede considerar que ya sean expertos en su uso. Como se mostrará enseguida, en el uso del dinero están implicadas diversas operaciones conceptuales que los alumnos de preescolar aún desconocen.

Bonilla destaca la complejidad que implica el dinero al tener simultáneamente una cardinalidad (por ejemplo, un conjunto de tres monedas) y un valor (por ejemplo, que cada una de esas monedas sea \$5), por lo que recomienda que esa dualidad sea abordada de manera específica dentro de la escuela.

Aun cuando la autora reconoce que existen varios aspectos relacionados con la compra-venta que no son transparentes para los alumnos de preescolar, considera que ese contexto es adecuado para el planteamiento de situaciones didácticas relacionadas con el concepto de número, pues los niños tienen conocimientos previos para aproximarse a resolver los problemas que se les plantean, además el hecho de participar en una operación de compra-venta despierta su interés y motivación. Por otra parte, considera necesario reconocer los elementos de la compra-venta que no son tan visibles o transparentes para los niños, en el momento del diseño de situaciones didácticas en las que se utilice el dinero como contexto.

Respecto a la enseñanza y el aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal en preescolar, Bonilla coincide con los planteamientos de investigaciones previas (Broitman,

Grimaldi, & Ponce, 2011; Lerner & Sadovsky, 1994), las cuales señalan que los preescolares son sensibles a las regularidades del SND, y que en la interacción cotidiana con los números grandes, tanto en el contexto escolar como extraescolar, los niños van construyendo hipótesis sobre el funcionamiento de ese sistema. Por lo tanto, considera que la inclusión del SND en preescolar es pertinente pero en el siguiente sentido: la tarea del docente en esta etapa será la de proponer y acompañar la exploración de portadores numéricos, favorecer la producción de hipótesis en relación a las regularidades del SND y brindar oportunidades de poner a prueba esas hipótesis mediante situaciones didácticas que colaboren con el descubrimiento de las reglas del sistema, sin pretender formalizarlas. Por medio de ese acercamiento a las regularidades del SND, se está abonando a la comprensión de las reglas que rigen este sistema, las cuales se abordarán, de manera formal, en un momento posterior de la escolaridad (Bonilla, 2014).

Otra referencia importante es la tesis de Licenciatura de Rebolledo (2016), quien indagó cómo alumnos de preescolar resuelven problemas que implican el uso de monedas. Rebolledo afirma que para que los alumnos de este nivel educativo puedan operar con ellas, es necesario haber construido la noción del número como cardinal.

Esta autora identifica las dificultades que tienen los niños al resolver problemas utilizando las monedas, cuando observa que repiten el mismo error al enfrentarse a problemas como el siguiente: en una simulación de compra-venta una alumna estaba jugando a la tiendita en el aula y tenía varias monedas de distintos valores (\$1, \$2, \$5), debía pagar unas uvas que costaban ocho pesos; toma las monedas que necesita y solo cuenta ocho monedas sin importar el valor de las mismas. La niña observa el precio de las uvas y dice que valen ocho pesos. Rebolledo identifica que los niños recurrían al conteo de las monedas, sin fijarse en el valor de las mismas, solo las cuentan como unidad. Esta observación coincide con Bonilla (2014) y Delval y Echeita (1991).

Por su parte Muñoz (2017), en su tesis de licenciatura, consideró pertinente el análisis, a partir de la puesta en práctica de una de las láminas del material destinado de manera oficial para la Educación Preescolar: “Mi álbum. Preescolar. Tercer grado”, bajo las orientaciones del “Libro de la Educadora”, que ofrece propuestas didácticas para su implementación. La lámina seleccionada tiene una finalidad educativa estrechamente relacionada con el

“aprendizaje esperado” que marca el Programa de Estudios 2011 (en la Guía para la educadora): “reconoce el valor real de las monedas; las utiliza en situaciones de juego”.

Durante la implementación, Muñoz observó ciertas dificultades que mostraron los niños al trabajar con monedas. Por ejemplo, en una situación donde los niños estaban comprando juguetes se plantea el siguiente problema: “¿Puedo comprar dos barcos si tengo 5 pesos? (Cada barco cuesta 3 pesos). Algunos alumnos dieron respuestas como las siguientes:

- Niña 11: Sí
- M: ¿Por qué?
- Niña 11: Porque tres es poquito, y cinco es mucho
- Niño 3: No, porque no tenemos de a tres pesos

Muñoz identifica que si no hay moneda con la denominación que corresponda a la cantidad del precio, entonces para los niños este artículo no se puede adquirir. Gracias a estas dificultades, la autora concluye que se deben considerar las ideas que tienen los niños acerca del dinero como punto de partida para el diseño de situaciones de aprendizaje, cuidando la gradualidad y pertinencia de las mismas.

1.3 Preguntas y objetivos de investigación

Pregunta de investigación

¿Cómo favorecer el conteo, la equivalencia y el agrupamiento mediante el uso del dinero para resolver ciertos problemas de compra-venta en alumnos de tercero de preescolar?

Objetivos

General

Adaptar, implementar y evaluar una secuencia didáctica que favorezca los aprendizajes de los niños acerca del conteo, la equivalencia y el agrupamiento.

Aportar conocimientos a las docentes sobre el diseño y/o adaptación de situaciones didácticas que favorecerán el conteo, la equivalencia y el agrupamiento en un contexto de dinero.

Específicos

Identificar conocimientos y dificultades en niños de tercero de preescolar usando dinero respecto al conteo, la equivalencia y el agrupamiento en contextos de compra- venta.

CAPITULO 2- MARCO TEÒRICO

Esta investigación comenzó cuando estaba vigente el Programa de Educación Preescolar 2011 (SEP, 2011), en donde se hacía referencia a que los niños preescolares adquirieran las suficientes herramientas para desarrollar un razonamiento matemático y pudieran resolver problemas de la vida cotidiana (p.31). De acuerdo con ese programa, al término de este periodo (tercero de preescolar), se espera que los estudiantes utilicen los números naturales hasta de dos cifras para interpretar o comunicar cantidades, y que resuelvan problemas aditivos simples, mediante representaciones gráficas o el cálculo mental. Asimismo, según el PEP (2011) y con base en la metodología didáctica que se propone para el desarrollo de las actividades, se espera que los alumnos desarrollen, además de los conocimientos y habilidades matemáticos, actitudes y valores que les permitan transitar hacia la construcción de la competencia matemática.

En el año 2017 hubo una reforma curricular, en la cual se establecen para la educación preescolar “Aprendizajes Clave para la Educación Integral” (SEP, 2017), donde se plantea como propósito que los niños usen el razonamiento matemático en situaciones diversas que demanden utilizar el conteo y los primeros números, además de que deben comprender las relaciones entre los datos de un problema y usar procedimientos propios para resolverlos. Este programa afirma que el niño debe desarrollar el pensamiento matemático mediante diversas actividades y resolver numerosas situaciones que les representen un problema o reto. Esta perspectiva se basa en el planteamiento y la resolución de problemas también conocido como “aprender resolviendo” (p. 217).

Si comparamos los propósitos educativos relacionados con el pensamiento matemático de los programas citados, ambos coinciden en que la resolución de problemas es importante para el desarrollo matemático y, por lo tanto, debe ser incluida como un propósito educativo. El marco teórico que aquí se presenta aborda perspectivas teóricas relacionadas con la resolución de problemas y conceptos relacionados con el número en su función cardinal. El propósito de esta investigación es exponer y analizar la complejidad de los conceptos implicados, así como los procesos de aprendizaje que siguen los alumnos para adquirirlos.

2.1 Funciones del número

Los niños en educación preescolar deben enfrentarse a situaciones que les permitan conocer las diversas funciones del número y aprender mediante la resolución de problemas. González & Weinstein (2010) mencionan que “el abordaje de los contenidos numéricos en el Nivel Inicial debe enfatizar la enseñanza de las funciones del número, donde se trata de lograr que los niños sean capaces de utilizar los números para contar, comparar, ordenar y calcular”. (p. 39).

Las autoras afirman que las funciones del número son las siguientes: como memoria de la cantidad, para comparar, como memoria de la posición y para calcular. Ahora describiré cada una de estas funciones según González & Weinstein (p. 39- 40, 2010):

- El número como memoria de la cantidad

Hace referencia a la posibilidad que dan los números de evocar una cantidad sin que esta se encuentre presente. Alude al aspecto cardinal del número, implica cardinalizar un conjunto de elementos. El número como memoria de la cantidad es la primera función de la cual el niño se apropia.

- Los números para comparar

Dentro de esta función encontramos, también, situaciones de comparación entre el cardinal de dos o más conjuntos. Al comparar podemos obtener relaciones de igualdad o desigualdad.

- El número como memoria de la posición

Es la función que permite recordar el lugar ocupado por un objeto en una lista ordenada, sin tener que memorizar la lista. Se relaciona con el aspecto ordinal del número, que indica el lugar que ocupa en la serie.

- El número para calcular

También es llamada para anticipar resultados, es la posibilidad que dan los números de anticiparse al resultado de una transformación cuantitativa en situaciones no visibles, pero sobre las cuales se posee cierta información.

Esta función implica comprender que una cantidad puede resultar de la composición de varias cantidades y que se puede operar sobre los números para prever el resultado de una transformación de la cardinalidad. Las transformaciones pueden producirse al juntar, reunir, agregar, quitar, sacar, partir, repartir cardinales de distintos conjuntos

En esta investigación se favoreció el número como memoria de la cantidad y el número para calcular. Como se describió anteriormente, “cuando los alumnos usan el número para calcular comprenden que una cantidad puede resultar de la composición de varias cantidades y que se puede operar sobre los números para prever el resultado de una transformación de la cardinalidad” (González y Weinstein, 2010, p. 39) Esto implica que el alumno utilice el contexto cardinal.

Para hallar el cardinal de un conjunto los alumnos pueden proceder de distintas formas como la subitización y el conteo. Cuando hablamos de subitización, según Chamorro (20015), nos referimos “a la operación que realizamos cuando en un golpe de vista, y sin necesidad de realizar un conteo, al menos de forma consciente, podemos decir con exactitud la cantidad de objetos de una colección, y todo ello en un tiempo muy corto, casi de manera instantánea.” (p. 167).

2.2 El conteo

Existen diversas investigaciones sobre la apropiación del número en los niños; varias de ellas mencionan la importancia del conteo como parte del proceso de adquisición del número. Investigadores como Gelman y Gallistel (1978), Baroody (1988), Casas, Fortes del Valle, & Gil (1999), Chamorro (2005) exponen la complejidad implicada en que el niño logre adquirir los principios necesarios para contar.

Por ejemplo, Chamorro (2005) afirma que “el conteo... es un índice de la riqueza de conocimientos matemáticos en las primeras edades así como un factor potencial del desarrollo de las conceptualizaciones numéricas” (p. 154). Mientras que Casas, Fortes del Valle, & Gil (1999) señalan que el conteo es una tarea compleja a nivel cognitivo y perceptivo-motor, pero es minimizada por su familiaridad. Estas autoras afirman que los

niños usan diversas estrategias para contar cuando “Los ítems a contar deben ser alineados y distinguirse de los ítems que no van a ser contados o ya han sido contados. Los ítems se cuentan mediante el emparejamiento con algún tipo de representación simbólica (convencionalmente un conjunto de nombres de números)” (p. 73).

Según Gelman y Gallistel (citado en Chamorro, p. 53, 2005), el conteo es el medio por el cual el niño se representa el número de elementos de un conjunto dado y razona sobre las cantidades y las transformaciones aditivas y sustractivas. Estos autores afirman que las competencias que posee un individuo cuando tiene que hacer frente a la tarea de contar, son las siguientes:

- Correspondencia biunívoca

“Cada elemento de la colección que se va a contar debe corresponderse, de manera unívoca, con una y sólo una, palabra- número de la cantinela.” (p. 155)”

- Principio de orden estable.

“La cantinela que escojamos para contar debe ser recitada siempre de la misma forma, siguiendo un orden estable. Este principio tiene por objeto etiquetar una colección de manera que pueda ser diferenciada de otras, razón por la cual las palabras-número de la cantinela deben ser necesariamente distintas, sin que una misma palabra pueda ser reutilizada.” (p. 156)

- Principio de abstracción.

“Contar una colección supone interesarse solo por el aspecto cuantitativo de la misma, dejando de lado las características físicas de los objetos contados.” (p. 157)

- Principio de no pertinencia del orden.

“El número obtenido al contar una colección no depende del orden en el que se enumeran sus elementos. Los elementos de una colección pueden ser contados en el orden en que se

desea, puede empezarse por donde se desee, el orden no es pertinente, siempre se obtendrá el mismo resultado.” (p. 157)

- Principio de cardinalidad

“El número enunciado en último lugar no representa únicamente al elemento correspondiente, sino también al total de la colección. La adquisición del principio de cardinalidad supone dar significación cardinal a los símbolos numéricos, y se produce entre los 4 y 5 años, dependiendo del nivel de estructuración de la cantinela.” (p. 54)

Todos estos principios se favorecen en el conteo, para que los niños puedan otorgarle un sentido cardinal al número. La construcción del número como cardinal será objeto de estudio en esta tesis.

2.3 Sistema de Numeración Decimal

Otro de los conocimientos matemáticos que se abordará en esta investigación es el acercamiento a las hipótesis que tengan los niños acerca de una característica del Sistema de Numeración Decimal, que es el agrupamiento.

González & Weinstein (2010) sintetizan las características del Sistema de Numeración Decimal –el cual es un sistema posicional– de la siguiente manera:

- Sistema de base de diez. La palabra decimal indica que la base es 10 y, por lo tanto, el sistema está conformado por 10 signos diferentes. Estos son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
- Valor de cada signo. Cada uno de los signos que conforman nuestro sistema de numeración posee a la vez un valor absoluto y uno relativo.
 - El valor absoluto es el valor que indica cada signo, independientemente del lugar que ocupa.
 - El valor relativo hace referencia al valor de cada signo en relación con el lugar que ocupa en el número.
- Agrupamientos de 10 en 10.

Los términos decena, centena, unidad de mil, etc. Indican agrupamientos de 10 elementos.

- El cero

El cero es el signo que, a diferencia de los demás, no representa existencia sino ausencia, dado que indica ausencia de agrupamiento de un determinado orden. Representa una cantidad nula y representa una ausencia de unidades de orden. (p. 58-59)

Como mencioné anteriormente, de todas las características que posee el Sistema de Numeración Decimal únicamente nos centraremos en el agrupamiento.

De acuerdo con Ifrah (1987), el Sistema Decimal ha recorrido un largo camino en la búsqueda de sistemas de numeración que nos permitan comunicarnos y operar de una forma económica. Él hace mención a algunos de los logros de ese recorrido:

- La utilización de agrupamientos permitió superar la mera notación por correspondencia uno-a-uno, que es solo la traducción de una enumeración que anuncia un grupo de objetos, sin implicar para ello el desarrollo de la noción de cuantificación. La idea de agrupar las cantidades constituyó un primer paso en la economía de la representación.

- La utilización del principio de la base, el cual convirtió los agrupamientos en regulares. Este principio permitió superar la dificultad de tener que recordar, para comprender cada nivel de agrupamiento, el principio de agrupamiento utilizado. Los sistemas de base son sistemas de agrupamientos regulares, donde el número de elementos que se agrupa es igual al número de símbolos utilizados en la escritura.

(Pág. 66)

Desde la posición de Martí (2005), el agrupamiento sirvió como una estrategia para solucionar el problema de conteo en grandes cantidades.

Con el aumento de la complejidad de las situaciones numéricas se desarrolló una solución que disminuyó la necesidad del conteo exhaustivo: la agrupación de elementos. Esta agrupación, que utilizamos ante situaciones cotidianas en las que tenemos que contar colecciones grandes de objetos o marcas, puede realizarse de diferentes maneras: reunir las marcas mediante un trazo, separarlas espacialmente, o,

naturalmente, crear un signo especial para un grupo de marcas. Todas estas soluciones aparecieron en cierto momento evolutivo en la mayoría de los sistemas numéricos de notación (. 63)

Con esta secuencia didáctica pretendíamos promover que los niños comprendieran la necesidad y las ventajas de agrupar los objetos en una colección.

2.3.1 Adquisición del Sistema decimal.

Existen numerosas investigaciones que indagan la manera en que los niños se apropian del Sistema de Numeración Decimal; en este apartado nos centraremos en las de Terigi & Wolman (2007), Martí (2005), Lerner & Savodsky (2003). Estos autores coinciden en que los niños tienen acercamientos al Sistema de Numeración Decimal desde edades tempranas y comienzan a pensar y a encontrar regularidades mediante la interacción cotidiana con el mismo.

De acuerdo con Terigi & Wolman (2007), el Sistema de Numeración Decimal tiene un impacto importante en el mundo social de los niños, ya que ofrece numerosas oportunidades de interacción en las actividades cotidianas en los que aparecen numerales como: en el dinero, en los precios, en los camiones, en los teléfonos, etc. Coinciden con este planteamiento las autoras Lerner & Savodsky (2003), quienes aclaran que la adquisición de este sistema no va iniciar ni a terminar en un nivel preescolar. En su opinión, es a partir del contacto que tienen los niños con el Sistema de Numeración Decimal, que los niños van creando hipótesis, las cuales irán modificando en su recorrido para entender su funcionamiento.

Por otra parte, Martí (2005) nos dice que la apropiación del Sistema de Numeración Decimal es un proceso complejo y costoso para los alumnos.

La Adquisición del Sistema de Numeración Decimal es un proceso lento y costoso, cognitivamente complejo, que empieza mucho antes de que las prácticas escolares orienten las actividades de los niños. La naturaleza compacta y hermética de las notaciones numéricas, producto de una larga evolución histórica, hace necesario un proceso reconstructivo en el que los niños habrán de afrontar muchos de los obstáculos que estuvieron en la base de su construcción histórica (p. 66).

Considerando estas dificultades, no se pretende contribuir a la formalización del Sistema de Numeración Decimal en preescolar; en cambio, se espera que los niños tengan un acercamiento a él y vayan generando algunas hipótesis.

2.4 Equivalencia

Otro de los conocimientos que se busca favorecer con el diseño de la secuencia didáctica es la equivalencia entre monedas de distintas denominaciones.

Según el Diccionario de la Real Academia Española, la equivalencia es una palabra que proviene del latín medieval “Aequivalentia” y se define como la igualdad en el valor, estimación, potencia o eficacia de dos o más cosas o personas. Se puede observar que equivalencia es una palabra que puede abarcar varios contextos. Al respecto, Schliemann, Linss Lessa, Brito Lima, & Siqueira, (2011) comentan que es a través del contexto donde los niños pueden desempeñarse de manera diferente en su razonamiento. Dichos autores realizaron una investigación con niños de 5 a 12 años para saber si los niños comprendían que el equilibrio de una balanza de dos platillos se preserva si uno quita objetos del mismo peso de cada platillo, les pedían a cada niño que predijera si la balanza permanecería en equilibrio si bolsas equivalentes con pesos no identificados se sacaban de cada platillo, y que explicaran sus predicciones. Encontraron que los niños pequeños fracasaron al intentar proporcionar justificaciones lógicas a sus acciones. Sin embargo, los autores mencionan que esto podría ser un resultado puntual en las comparaciones con la balanza y no a una inhabilidad general para comprender la situación en términos lógicos. Debido a esto sugieren realizar comparaciones utilizando otros contextos donde se comparen el número de objetos o bien utilizando problemas verbales que refieren a cantidades físicas.

Schliemann, Linss Lessa, Brito Lima, & Siqueira, (2011) hicieron más exploraciones con niños de 7 a 11 años donde trabajaron con otros contextos relacionados con la equivalencia como:

- Equivalencia entre cantidades discretas de objetos concretos
- Equivalencia entre cantidades incluidas en problemas verbales
- Equivalencia entre los dos lados de ecuaciones escritas

En el contexto de equivalencia entre cantidades discretas de objetos concretos (utilizaron cajas y canicas, se acordaba con el niño que un par de cajas contenían el mismo número de canicas, después se le preguntaba al niño que sucedería si quitaban un número determinado de canicas de cada lado). Para el contexto de equivalencia entre cantidades incluidas en problemas verbales (se planteaba un problema verbal donde se incluía dos personas que tuvieran el mismo número de objetos en la historia, como resultado de nuevos eventos narrados, se agregaban o quitaban objetos a las cantidades iniciales equivalentes y se les preguntaba a los niños si los protagonistas de la historia aún tenían la misma cantidad de objetos. Finalmente en el contexto de equivalencia entre los dos lados de ecuaciones escritas, los investigadores entregaban una hoja con ecuaciones escritas, les explicaban a los niños que las mismas letras indicaban cantidades equivalentes. Para cada ecuación le preguntaban al niño si las cantidades a un lado del signo de igualdad son iguales a la cantidad al otro lado.

El contexto que se utilizó para realizar la secuencia didáctica planteada en esta investigación es el contexto de compra- venta, el cual no aparece en los contextos que desarrollaron esos autores. Consideramos que el contexto de compra- venta está relacionado con los contextos de cantidades discretas de objetos concretos y entre cantidades incluidas en problemas verbales. Sin embargo, creemos que trabajar con monedas en un contexto de compra- venta agrega una complejidad extra, ya que el dinero presenta características específicas, pues tiene una dualidad relacionada con el valor y la cardinalidad de la moneda.

Al respecto, Block y Ramírez (2013) afirman que las dos características del dinero son la expresión de la cantidad de monedas que hay en la colección (la cantidad discreta) y que la otra característica (cantidad continua) se refiere a la expresión de una cantidad de dinero, si se toma en cuenta el valor de cada una de las monedas.

Considerando la doble magnitud que se trabaja al utilizar el dinero, podríamos decir que al abordar la equivalencia en ese contexto podrían obtenerse resultados distintos a los que Schliemann y otros (2011) mencionan, acercándose al concepto de la equivalencia .

2.4.1 Adquisición de la equivalencia.

El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM), en su documento del año 2000 sobre los Principios y Estándares para la Matemática Escolar (*Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, 2000), llegó a respaldar la idea de que el razonamiento algebraico debería ser incentivado a partir del jardín de infantes. El concepto de equivalencia se relaciona con el razonamiento algebraico, pues se vincula con la comprensión de las relaciones lógico- matemáticas que los alumnos puedan realizar.

Según Kieran (1981), para que el niño adquiera el concepto de equivalencia es necesario que etiquete objetos con palabras numéricas de manera sistemática y consistente, para después ser capaz de determinar la igualdad numérica de dos conjuntos. Gelman & Gallistel (1978) han encontrado evidencia de que el juicio del niño en edad preescolar, al comparar dos conjuntos equivalentes, se basa en si producen el mismo número cardinal cuando los cuentan.

Kieran (1981) señala que se pueden distinguir dos significados intuitivos de igualdad entre los preescolares: uno que implica una comparación entre dos conjuntos donde el niño cuenta cada elemento de los dos conjuntos diferentes y, sobre la base de la cardinalidad, establece su igualdad; el otro implica la suma de dos conjuntos donde el niño combina los dos conjuntos y luego cuenta los elementos en el conjunto resultante (pueden o no contar los elementos en los conjuntos individuales). Es esta última, la operación de igualdad, a la que se recurre cuando se introduce el signo de igual en la escuela.

En esta investigación se explora cómo es que los alumnos proceden cuando tienen que utilizar la equivalencia de las monedas en pesos, considerando la igualdad entre el numeral identificado en la moneda y el precio. Por ejemplo, saben que pueden comprar con una moneda de \$5 pesos un dulce que cuesta \$5.

2.4.2 Equivalencia del valor de las monedas.

Kammi (2009) descubrió que, “para muchos niños pequeños, una moneda de diez centavos era algo diferente de 10 centavos, aunque podían decir con confianza que una

moneda de diez centavos valía 10 centavos “(p. 97).¹ Como se menciona en el capítulo de antecedentes, existen docentes que coinciden con este planteamiento ya que han encontrado las mismas dificultades en su práctica docente.

Por su parte, Delval (2003) realizó una investigación a través de entrevistas clínicas con 50 niños cuyas edades comprendían entre los 4 y 8 años, para conocer la familiaridad y capacidad de reconocimiento de monedas y billetes de los niños. La investigación se hizo en un colegio público de clase de media de Madrid. Los resultados obtenidos muestran que hasta los 6 años no predomina la idea de que hay la misma cantidad en una moneda de \$5 que cinco monedas de \$1, mientras que en el caso de los niños de 7 y 8 años los problemas de equivalencia y reconocimiento de monedas ya no plantean dificultad.

Delval (2013) menciona que no le sorprenden estos resultados con los niños pequeños, ya que para utilizar las equivalencias correctamente los niños deben tener un dominio de las operaciones aritméticas, aspecto que los niños dominan en su etapa escolar.

Respecto al dinero, Delval (2013) dice que los niños de 4 y 5 años tienen una idea de que el dinero sirve “para comprar”, pero realmente no comprenden su función como unidad de intercambio. El niño tiene que adquirir la noción de “Unidad de Valor” para poder comprender que diez monedas de \$1 es igual a una moneda de \$10. Antes de que el niño llegue a aplicar las operaciones aritméticas necesarias, los criterios que utiliza para resolver la tarea de equivalencia son perceptivos: “hay más en diez monedas de \$1 que en una moneda de \$10 porque hay más monedas”, la relación que establecen es simple y directa: a mayor número de monedas mayor número de objetos que puedan comprarse. Otras veces, incluso dentro de las respuestas del mismo niño, se cambia de criterio: por ejemplo, puede decir que la moneda de 10 es más que 5 monedas de \$1, y acertar casualmente por que 10 es más grande, siendo en este caso el tamaño de la moneda el criterio predominante.

Coinciden con este planteamiento Berti y Bombi (1988 citadas en Bonilla, p. 66, 2014) al afirmar que “reconocen que aunque los infantes han tenido contacto con el dinero de maneras distintas en su vida cotidiana, la apropiación de su uso es algo que no se llega a dar de manera “natural”, sino que se trata de una noción compleja que requiere de un desarrollo paulatino;

¹ Traducción propia del inglés al español

ese desarrollo depende tanto de la evolución del pensamiento matemático de los niños, como de las distintas oportunidades que tienen de participar en actividades que impliquen el uso del dinero.”

Coincido con estos autores en el aspecto que la adquisición de la equivalencia está asociada con la adquisición del número como cardinal; sin embargo, lo que buscamos con esta investigación es que el niño participe en actividades que impliquen el uso del dinero donde pueda favorecer la adquisición del número como cardinal a través de un contexto interesante para ellos como la compra- venta, y que esto contribuya a la comprensión de la equivalencia.

2.5 Desarrollo de nociones económicas en los niños

En esta investigación se utilizará el dinero como un recurso didáctico para favorecer el conteo, la equivalencia y el agrupamiento decimal.

El dinero es un instrumento social al que tienen acceso los niños desde edades muy tempranas. Delval (2013) plantea que las nociones económicas constituyen un eje de la organización social y además el niño está en contacto con ellas desde muy pronto. Los niños están utilizando mercancías constantemente en su vida cotidiana, y pronto empiezan a reclamarlas a los adultos. Descubren que hay objetos apetecibles que se pueden obtener mediante un procedimiento que los adultos denominan “compra” y solicitan a los mayores que les compren cosas que desean.

Delval (2013) afirma que las ideas que tienen los niños sobre las concepciones económicas difieren mucho de las que poseen los adultos, por lo cual resulta difícil sostener que son producto de una transmisión directa o que no constituyen más que la apropiación de representaciones sociales existentes en la sociedad que los niños tendrían que aprender.

Faigenbaum (2011) comparte esta idea sobre la complejidad que implica para un niño comprender las nociones económicas, ya que están relacionadas con las dimensiones normativas, económicas y matemáticas. Ahora explicaré de manera breve estas tres dimensiones.

Dimensión normativa de las transacciones monetarias. Faigenbaum (2011) “Las personas que participan en una compra deben estar familiarizadas con los medios de intercambio convencionales, por ejemplo, las notas en papel, cheques, tarjetas de crédito, efectivo, son todas las formas de pago que exigen el cumplimiento de ciertas normas y procedimientos para su uso adecuado. Los rituales involucrados en una compra (las formas apropiadas que todos respetamos) no se transmiten mediante la educación formal, sino que cada individuo debe aprenderlos mediante la participación en actividades de intercambio.” (p. 28)

Dimensión económica. Faigenbaum (2011) menciona que “las personas que participan en una compra deben determinar el valor de cada artículo intercambiado y determinar un precio justo” (p. 28). Esta dimensión está relacionada con una interacción en donde las personas intercambian mercancía por dinero, por lo que se convierte en una relación económica. Al respecto Delval (2013) hace una distinción entre las relaciones económicas y las relaciones normativas. Aclara que los fenómenos económicos tienen también unas características peculiares respecto a otros fenómenos sociales. Implican relaciones entre personas, pero están mediadas por objetos. En eso se diferencian de las relaciones sociales. Las relaciones económicas son relaciones entre individuos que producen bienes, los intercambian o compiten por ellos. Por esa razón la dimensión normativa y económica están tan ligadas entre sí, e incluso algunas acciones pudieran encontrarse dentro de las dos dimensiones mencionadas.

En esta investigación se buscó tomar ventaja de la experiencia que los niños tienen en las actividades de intercambio que pudieran tener.

Dimensión matemática de las transacciones monetarias. La dimensión matemática implica los conocimientos matemáticos que ponen en juego los alumnos para resolver las situaciones didácticas planteadas. Cuando el alumno participa en una transacción comercial ya sea como vendedor o comprador pone en práctica conocimientos matemáticos para resolver el problema presentado. Incluso la compra más simple implica una serie de operaciones aritméticas.

Por su parte, Delahanty (1989) comenta que uno de los aspectos relacionados con las nociones económicas que se comprende con mayor dificultad es la relación entre el precio

de una mercancía y su representación como una cantidad de dinero. Se puede deducir que la complejidad para los niños puede encontrarse en que conceptos como el valor de las monedas y billetes, el “cambio” como la diferencia que hay entre la cantidad que se debe pagar y el dinero entregado al vendedor, o las ideas sobre “caro” y “barato”, las cuales son poco transparentes y algunos de los preescolares no las han comprendido en su totalidad. Estos conocimientos están relacionados con la experiencia que tienen los niños en operaciones de compra y venta.

Delahanty (1989) realizó una investigación que le permitió descubrir el proceso de la construcción del conocimiento del dinero en el niño. Utilizó el método clínico para realizar la experimentación donde abarcó las actividades del sujeto, la coordinación de los esquemas las etapas de evolución y las propiedades del dinero.

Delahanty menciona que para comprender la noción del dinero es necesario explicar las operaciones de clasificación, la seriación y la equivalencia de monedas y mercancías, el valor de uso (mercancía) y el valor de cambio (dinero).

Para llevar a cabo esta investigación se considera la idea de que los niños están en contacto con el dinero desde muy temprana edad y que es necesario que atraviesen por múltiples experiencias donde puedan utilizar sus hipótesis e ideas acerca del dinero. Atendiendo a los saberes previos de los niños, decidí considerar las dimensiones propuestas por Faigenbaum (2011) (económica, normativa y matemática), de manera que la adquisición de las nociones económicas se vea como un proceso integral y no exclusivo de la adquisición del número como algunos autores lo sugieren (Delahanty 1989, Berty y Bombi, 1988).

CAPÍTULO 3 METODOLOGÍA

3. 1 Características generales y éticas de la investigación

La presente investigación se plantea como un estudio cualitativo. Hernández, Fernández, & Baptista, (2014) señalan que la investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa, centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones. En este trabajo buscamos interpretar los procedimientos que siguen los alumnos para resolver las situaciones planteadas.

El diseño de la secuencia didáctica fue de elaboración propia; para realizarlo fue necesario hacer una fase previa de diseño y de experimentación y, con base en ella, se diseñó e implementó la fase final.

Esta secuencia didáctica se implementó con un grupo de preescolar de un Jardín de Niños público, ubicado en la comunidad de Alfajayucan, el Marqués, Querétaro. Todos los niños provenían de un contexto económico medio- bajo.

La participación en el estudio fue completamente voluntaria y no representó ningún riesgo para la salud de los participantes. Se obtuvo el consentimiento de las autoridades de la institución en la que se realizó el estudio, además del consentimiento de los padres de familia de manera verbal, donde autorizaron que sus hijos participaran en esta investigación. La decisión de solicitar dicha autorización se dio con base en el código de ética de la American Educational Research Association (AERA, 2011), el cual menciona que un consentimiento por parte de la institución es suficiente cuando la investigación no implica ningún riesgo para los participantes. De manera adicional, en el reporte de los resultados se respetó estrictamente el anonimato de los participantes, por lo que usaron seudónimos en los nombres citados en este trabajo.

Se hizo la indagación de saberes previos con un grupo de segundo grado de preescolar que se componía de 28 alumnos: 15 niños y 13 niñas de entre 3 y 4 años de edad. Esa indagación se hizo durante el segundo semestre del ciclo escolar 2017- 2018, cuando yo era la educadora titular de este grupo, y se hizo con esa anticipación previniendo el tiempo que se necesitaría para diseñar e implementar la secuencia didáctica definitiva.

La implementación de la secuencia final se realizó con los mismos alumnos de la fase previa durante el ciclo escolar 2018- 2019, cuando ya estaban en tercer grado de preescolar y tenían entre 5 y 6 años de edad.

En esta implementación utilicé dos roles: el de investigadora y el de maestra, ya que yo dirigí la secuencia didáctica con los alumnos.

Para el diseño de la secuencia didáctica se tuvo dos referentes fundamentales: la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) desarrollada por Guy Brousseau (2007), y la Ingeniería Didáctica, propuesta por Michèle Artigue, (1995).

Los resultados que se presentan en esta tesis corresponden a la implementación de la secuencia definitiva y a los procedimientos que 9 alumnos dieron a la misma. Si bien la implementación se hizo con todo el grupo, se consideraron únicamente a los alumnos que estuvieron presentes durante todas las sesiones que conformaron la secuencia.

3. 2 Teoría de las Situaciones didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas (en adelante TSD) caracteriza a los conocimientos matemáticos a partir de las situaciones en las que éstos se usan; y considera las interacciones entre profesor, alumnos y saberes matemáticos. Según Brousseau (2007), “Cuando un sujeto intenta controlar su entorno, no todas sus acciones manifiestan sus conocimientos de la misma manera.” (p.50) Las relaciones de un alumno con el medio son distintas de acuerdo a las situaciones que el profesor propone, no solamente en las "situaciones de uso didactico" (ejercicios o problemas) que plantea. Crea, entonces, ficticia o efectivamente, otro "medio" donde el alumno actúa de forma autónoma.

De la TSD tomamos algunos aspectos que consideramos pertinentes para realizar el diseño de la secuencia didáctica: situación didáctica, situación a- didáctica, medio, el error y su papel en aprendizaje, y variable didáctica.

El alumno interactúa con las situaciones que el profesor propone, las cuales son parte importante del *medio*. Al respecto, Reséndiz, Block y Carrillo (2017, p.104) señalan que “el medio está concebido para producir una confrontación con el alumno y que resista a sus primeras interacciones (...) es la colección de objetos, problemas, textos, en suma los recursos que provee el profesor.”

La noción de *situación didáctica* permite analizar aquellas situaciones que son propuestas por el profesor y que son parte importante del *medio*. Chamorro (2005) afirma que la noción de situación didáctica va más allá de la idea de mera actividad práctica, pues una situación busca que el alumno construya con sentido un conocimiento matemático.

El planteamiento anterior da elementos para establecer las características ideales de la situación a la que se aspira: la *situación a-didáctica*. Fregona & Orús (2011) señalan que “aunque en la enseñanza todas las situaciones son didácticas ya que tienen la finalidad de enseñar algo a alguien, se busca que el conocimiento al que recurra o que produzca el alumno se justifique por su interacción con el medio, sin la indicación implícita o explícita del docente. A esto le llaman situaciones a-didácticas y constituyen un sistema ideal”. (p. 26) Brousseau (2007) afirma:

Como el alumno no puede resolver de entrada cualquier situación adidáctica, el maestro le procura aquellas que están a su alcance. Las situaciones adidácticas preparadas con fines didácticos determinan el conocimiento enseñado en un momento dado y el sentido particular que este conocimiento va a tomar por efecto de las restricciones y deformaciones aportadas a la situación fundamental. (p.32)

En esta investigación se diseñaron 6 situaciones didácticas, con las cuales se buscaba que los alumnos validaran sus procedimientos y respuestas gracias a la interacción con el medio; para ello se utilizaron tarjetas de validación en la situación denominada “La tiendita”, donde los alumnos vendedores verificaban si el comprador había pagado correctamente; mientras que en el caso del juego “El cajero” el alumno que tomaba el rol de cajero era el encargado de validar si los jugadores entregaban las monedas correctas.

González & Weinstein (2010) señalan que el aprendizaje requiere de aproximaciones sucesivas para lograr un progreso y la evolución de los conocimientos, y para ello se hacen ciertas modificaciones a las situaciones didácticas para, a su vez, modificar los procedimientos de los alumnos y así generar nuevos aprendizajes. Al respecto, González & Weinstein (2010) citan a ERMEL (Equipo de Didáctica de la Matemática, 1990) para definir el concepto de variable didáctica como “una variable de la situación sobre la cual el docente puede actuar y que modifica las relaciones de los alumnos con las nociones de juego, provocando la utilización de distintas estrategias de resolución” (p. 31).

En la presente tesis se consideraron ciertas variables didácticas que se modificaban en cada situación didáctica para lograr la evolución los conocimientos matemáticos de los alumnos; algunas de ellas son el rango numérico, la cantidad de dulces que podían comprar y las monedas con las que se trabajaban.

Se esperaba que mientras los alumnos participaban en las situaciones didácticas cometieran ciertos errores, los cuales se consideran como una muestra de conocimiento del alumno. Al respecto, Brousseau (1998) dice sobre el error:

El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en la teorías empiristas o conductista del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado (p. 119).

3.3 Ingeniería didáctica

Según Artigue (1995), se denomina con el término “ingeniería didáctica” a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto, se basa en los conocimientos científicos de su dominio.

De acuerdo con Chamorro (2005), “El diseño de las situaciones didácticas y la organización de las mismas en una progresión articulada, con vistas a enseñar un cierto concepto a una clase alumnos de un determinado nivel, es el objeto de lo que se denomina ingeniería didáctica”. (p.50)

Para realizar una articulación de las situaciones didácticas que se diseñaron para esta investigación, se consideraron diferentes fases de la ingeniería didáctica, mismas que procuramos llevar a cabo en el diseño, implementación y análisis de la secuencia didáctica propuesta en esta investigación.

- Fase 1 de análisis preliminar
- Fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería
- Fase 3 de experimentación
- Fase 4 de análisis a posteriori y evaluación

Fase 1- Análisis preliminar

Artigue (1995) afirma que esta metodología se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes tocan el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva, y, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación. La autora comenta que se deben tener en cuenta los objetivos específicos de la investigación para realizar los análisis preliminares.

Atendiendo a nuestro objetivo específico de identificar conocimientos y dificultades en niños de tercero preescolar usando dinero respecto al conteo, la equivalencia y el agrupamiento en contextos de compra- venta, en el análisis preliminar se presentan las investigaciones previas de tipo didáctico escritas en los antecedentes de este trabajo y en el marco teórico se presenta la TSD y la descripción de conceptos como el conteo, la equivalencia y el agrupamiento.

Fase 2- La concepción y el análisis a priori

De acuerdo con Artigue (1995), “en esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado.” (p. 42)

Para realizar el análisis a priori del diseño de la secuencia, se consideró el objetivo de cada situación didáctica, la consigna problematizadora, los materiales y recursos necesarios, los posibles procedimientos y dificultades que podrían tener los alumnos al resolver el problema y las posibles intervenciones didácticas que se podrían utilizar.

Para el diseño de esta secuencia se hizo un análisis a priori mediante el desarrollo de dos fases:

1-Identificación de conocimientos previos de los alumnos (conformado por cinco situaciones didácticas)

2- Diseño, implementación y análisis de la secuencia didáctica.

La primera fase fue considerada el punto de partida para el diseño de la secuencia didáctica, ya que consistió en identificar los aprendizajes previos de los alumnos referentes a las concepciones y experiencias que tienen acerca del dinero, así como de los aprendizajes que tienen acerca del número, específicamente los relacionados al conteo y sus saberes sobre la serie oral y escrita.

La segunda fase que corresponde al diseño, implementación y análisis de la secuencia didáctica definitiva se realizó considerando los resultados de la indagación de saberes previos y haciendo las adaptaciones necesarias.

Fase 3 y 4- Experimentación y validación

Durante la experimentación los alumnos responden a las situaciones planteadas, ahí se recogen los datos para poder realizar el análisis a posteriori.

Artigue (1995) dice que “el análisis a posteriori se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase. Y que en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.” (p. 48).

3. 4 Diseño, implementación de la secuencia didáctica para indagar saberes previos

La identificación de saberes previos se llevó a cabo mediante la implementación de una secuencia didáctica que consistió en cinco situaciones didácticas, las cuales se desarrollaron con todo el grupo de alumnos. Se hicieron video grabaciones de todas las sesiones y posteriormente se analizaron los procedimientos de resolución identificados.

3.4.1 Descripción general de la secuencia. La secuencia didáctica estuvo conformada por cinco situaciones didácticas, que se llevaron a cabo durante los meses de enero y febrero del 2018. Las situaciones planteadas se desarrollaron en un contexto de compra-venta, donde los niños tuvieron la oportunidad de tener la experiencia de adoptar un rol de compradores, además, pudieron resolver problemas aditivos a través del conteo.

En un primer momento se realizó el análisis a-priori de cada una de las situaciones didácticas que se les aplicaron a los alumnos, para después llevar a cabo el análisis posteriori de las situaciones, concluyendo con los conocimientos que se identificaron en los alumnos.

Esta secuencia didáctica comenzó con una introducción que consistió en una serie de preguntas que se plantearon al grupo en general; esperábamos conocer las nociones que tenían acerca del origen del dinero, las experiencias que tenían acerca del acto de compra-venta, la relación existente entre el trabajo y la obtención del dinero. Estas preguntas se basaron en la investigación que realizó Delahanty (1989) en su estudio “Génesis de la noción del dinero”: ¿Para qué sirve el dinero? ¿Qué monedas conocen? ¿Quién paga cuando compran algo en tu casa? ¿Quién le da dinero a (tu papá o tu mamá) para que pueda comprar? ¿Por qué se lo dan? ¿A ti te dan dinero para que compres o gastes en lo que quieras?

A continuación se muestra una tabla que explica de manera general las cinco situaciones didácticas aplicadas.

Tabla 1 Descripción general de la Secuencia didáctica para indagar saberes previos.

Situación	Objetivo del alumno	Objetivo del maestro	Material didáctico	Consigna Problematicadora	Posibles procedimientos
1.- Organicemos el cajón del dinero	Clasificar las monedas	Identificar los criterios que utilizan los alumnos para clasificar las monedas.	Monedas de juguete de distintas denominaciones. Contenedor de plástico con separaciones.	Antes de jugar a la tiendita, necesitamos organizar estas monedas, por eso te voy a prestar esta caja para que me ayudes a hacerlo.	Clasificar de acuerdo con las características físicas. Clasificación según el valor monetario.
2.- ¡Pongamos precios a los productos!	Escribir los precios de los productos.	Identificar las estrategias que utilizan para contar y la manera en que representan las cantidades.	Listas de precios con el logotipo de cada producto y el precio escrito con número, y representando la cantidad con dibujos de monedas de un peso.	Aquí tienen una lista de los productos que venderemos, pero aún no tienen precios, ¿me pueden ayudar a ponerle el precio que le corresponde a cada uno?	Contarlas monedas. Escribir los precios en la lista al azar.
3.- Compremos por equipos	Interpretar y tomar la cantidad de monedas necesarias.	Identificar los procedimientos que utilizan los niños para resolver el problema.	Seis dulces distintos por equipo con sus respectivos precios Las tarjetas de los precios tendrán las monedas de un peso dibujadas por un lado y el número por delante.	A cada equipo le voy a entregar un producto de la tiendita, un niño deberá ir al banco y tomar la cantidad de dinero que requiera para poder pagar el producto que quiere	Tomar las monedas al azar Conteo con monedas de \$1
4.- ¡Vamos a comprar!	Interpretar el número escrito y formar la colección.	Observar los procedimientos que utilizan para comprar dulces.	10 Monedas de \$1 por niño. Dulces distintos con su respectivo precio.	Ustedes van a comprar, elijan un producto y me dan las monedas que necesitan.	Al azar Conteo
5.- ¿Qué cosas puedo comprar?	Interpretar el número escrito y resolver el problema aditivo.	Identificar los procedimientos que utilizan los niños para resolver los problemas aditivos.	10 monedas de un peso por niño, varios dulces con su precio correspondiente, etiquetas con el precio por la parte delantera y en la parte de atrás las monedas equivalentes.	Con estas monedas ustedes van a elegir dos cosas que se pueden comprar con ese dinero, pero tienen que pagar todo de una sola vez.	Conteo Sobre- conteo Cálculo mental

Nota. En todas las situaciones didácticas se organizaron a los alumnos en cinco equipos de 5 o 6 integrantes.

En la Situación 1 se utilizaron monedas de distintos valores para que los alumnos las clasificaran. En las siguientes situaciones se optó por utilizar únicamente monedas de \$1.

Esto se decidió debido a lo que muestran algunos estudios sobre las dificultades que tienen los niños para comprender el valor de las monedas, como se ha mostrado en el marco teórico y en los antecedentes.

Al terminar la implementación de las situaciones se hizo un análisis de las mismas para tomar decisiones en torno a la secuencia definitiva. Dichas decisiones impactaron en las variables didácticas que se incluyeron, así como en la duración de la secuencia.

3.4.2 Análisis de la secuencia. El análisis que aquí presentamos procura justificar las decisiones metodológicas que se consideraron para el diseño de la secuencia didáctica final, las variables didácticas que se utilizaron, el rango numérico, los recursos didácticos y la organización de cada una de las situaciones.

En la actividad introductoria donde se hicieron preguntas a los alumnos se observó que los niños tenían ciertas nociones del dinero, como que el dinero sirve para comprar cosas y que se gana a través del trabajo. Sin embargo, aún desconocen el valor real de las monedas, pues si bien saben que éstas tienen números, dijeron valores que no existen en las monedas mexicanas, como dos mil o mil pesos. Esto coincide con la investigación que realizó Delahanty (1989) en la que concluye que los niños no comprenden el valor real del dinero pero sí la acción de vender y comprar como parte de un juego. Los niños que observa Delahanty nombran 200 pesos a la moneda de 10 pesos, lo que significa que es una respuesta procedente de su medio social.

Durante la Situación 1 donde los alumnos tenían que clasificar las monedas de distintos valores, se observó que veinticinco de veintiocho alumnos prestaron mayor atención a los rasgos físicos de las monedas; de esos veinticinco alumnos, trece hicieron la clasificación de sus monedas por colores, mientras que doce las clasificaron de acuerdo con su tamaño (grandes y chicas) y los tres niños restantes clasificaron las monedas tomando en cuenta su valor.

Estas respuestas nos ayudaron a advertir las dificultades que tienen los alumnos para identificar el valor de las monedas, por lo que se decidió utilizar monedas de \$1 en las primeras situaciones didácticas de la secuencia.

En esta de indagación de saberes previos se utilizaron monedas de juguete pero que no se parecían a las reales; creemos que esto pudo haber influido en las clasificaciones que hicieron los niños. Debido a esto se consideró utilizar monedas reales para la secuencia definitiva.

En la Situación 2 se llevó a cabo una actividad relacionada con la escritura de cantidades, donde los alumnos tenían que poner el precio a los dulces. En esta actividad observamos distintas formas en las que los niños representaron las cantidades: once de veintiocho niños dieron respuestas idiosincrásicas usando garabatos y letras, siete de veintiocho niños usaron respuestas pictográficas dibujando monedas o círculos, y diez de veintiocho niños dieron respuestas simbólicas escribiendo un número para representar la cantidad.

En esta situación también se identificaron las dificultades que tenían los niños para contar, ya que algunos omitían objetos. Chamorro (2005) subraya que el conteo está estrechamente ligado al desarrollo cognitivo, y que saber contar puede conducir al descubrimiento del esquema que permite generar la serie de palabras-número. Debido a la importancia que tiene el conteo para el desarrollo cognitivo de los niños preescolares, se decidió darle prioridad a este conocimiento, esperando subsanar las dificultades para contar que mostraron los alumnos en esta situación; se espera en un futuro diseñar situaciones didácticas que favorezcan la representación de cantidades.

Durante la Situación 3 los alumnos compraron un dulce utilizando monedas de \$1. El grupo estaba organizado por equipos y en cada mesa tenían los dulces que podían comprar, así como la tarjeta de validación que indicaba el precio y la cantidad de monedas que necesitaban. Todos los niños pudieron comprar un dulce utilizando varios recursos y procedimientos. Se identificó que la mayoría de los niños utilizaban las tarjetas de validación como medio para resolver el problema, por lo que se decidió limitar el uso de estas tarjetas para verificar el pago y así favorecer la aparición de otros procedimientos relacionados con el conteo.

El análisis de esta situación fue complicado debido a las dificultades que se tuvieron para observar de manera detallada los procedimientos que usaron los alumnos, dado que se trabajó con todo el grupo al mismo tiempo. Por ello, se decidió implementar la secuencia didáctica final con un equipo a la vez, subsanando así esta dificultad.

En la Situación 4 los niños tenían una determinada cantidad de monedas de \$1 y debían terminarse ese dinero comprando los dulces que quisieran, pero solo podían comprar un dulce a la vez. Se observaron dos procedimientos: 1) hacer una correspondencia entre las monedas dibujadas en las tarjetas y las monedas reales con las que podían comprar; 2) comprar un dulce que les gustara mucho y pagarlo; con las monedas que les quedaban elegir otro dulce que coincidiera con ese precio. Por ejemplo, si tenían \$5 para gastar, compraban una paleta que costaba \$3, la pagaban y en otra ronda elegían otro dulce que costara \$2.

Creemos que la restricción de comprar solo un dulce en cada ronda hasta que se terminaran su dinero, limita la aparición de procedimientos relacionados con la descomposición de cantidades. Por ello, para la secuencia final se diseñó una situación donde se omitió esta restricción, de manera tal que los alumnos tuvieran libertad de comprar los dulces que querían hasta terminarse su dinero.

En la Situación 4 también se observaron dificultades para identificar los numerales indicados en los precios, por lo que se usó una tira numérica que ayudara a subsanar esas dificultades.

Finalmente, en la Situación 2 los alumnos tenían que comprar dos dulces pagándolos en una sola exhibición, con el propósito de que los alumnos resolvieran un problema aditivo. Los precios de los dulces iban de \$1 a \$10, por lo que el rango numérico se elevaba a 20. Esto trajo muchas dificultades para resolver el problema, pues algunos niños no tenían un orden estable hasta ese número. Debido a ello, para la secuencia definitiva se decidió modificar el rango numérico de esta actividad (de \$1 a \$5), de manera que los alumnos pudieran operar con los primeros diez números.

3. 5 Diseño e implementación de la secuencia didáctica final

La secuencia definitiva se implementó con el mismo grupo en el que se exploraron los saberes previos, pero la implementación se llevó a cabo durante el ciclo escolar 2018- 2019, cuando el grupo ya estaba en 3er grado de preescolar. El grupo se componía de 29 alumnos: 15 niños y 14 niñas de 5 a 6 años de edad.

Las sesiones fueron desarrolladas durante el horario habitual de clases durante el mes de septiembre del 2018, y se implementaron con cada uno de los equipos por separado. Las sesiones tuvieron una duración de aproximadamente 25 minutos por equipo.

Es importante aclarar que la maestra titular del grupo no estuvo presente durante la ejecución de la secuencia didáctica, pero se contó con su consentimiento para realizarla. Cada una de las situaciones fueron conducidas por la investigadora; sin embargo, al haber sido maestra titular del grupo durante el ciclo anterior 2017- 2018, los alumnos se refieren a ella como “maestra”.

Las actividades se llevaron a cabo en una bodega ubicada dentro de la escuela, misma que se adaptó con el mobiliario y material necesarios para trabajar cada una de las actividades planeadas.

Se dividió a todo el grupo en seis equipos elegidos de manera aleatoria: cinco equipos de cinco alumnos cada uno y un equipo de cuatro alumnos. Si bien las situaciones se llevaron a cabo con cada uno de los equipos, se decidió hacer el análisis únicamente de la participación de aquellos equipos cuyos integrantes asistieron a todas las sesiones que conforman la secuencia didáctica; solamente dos cumplieron con esa condición: un equipo integrado por cinco alumnos y otro conformado por cuatro (nueve alumnos en total.) Dado que el propósito fue analizar la pertinencia de la secuencia didáctica, se consideró necesario evaluar el desempeño de cada uno de los nueve alumnos en todas las situaciones implementadas.

3.5.1 Descripción general de la secuencia didáctica

Para implementar la secuencia se buscó crear las condiciones didácticas necesarias para que los alumnos tuvieran una experiencia matemática inmersa en un contexto de compra-venta y esto resultara interesante y motivante para ellos.







Se diseñaron seis situaciones didácticas, las cuales se pueden agrupar en dos tipos: “La Tiendita” y el juego “El cajero”. Cuatro situaciones didácticas corresponden al juego de “La Tiendita” y, dado que en las situaciones de compra-venta siempre hay dos agentes involucrados (un comprador y un vendedor), cada alumno cumplió el rol de comprador y vendedor al menos dos veces en cada situación.

Las cuatro situaciones de “La Tiendita” no se desarrollaron de manera continua pues, después de las dos primeras, se incluyó dos situaciones del juego “El cajero”, buscando favorecer la comprensión de la equivalencia con monedas de \$1, \$5, \$10.

A continuación se muestra la Tabla 2 que ilustra las seis situaciones diseñadas, así como las variables didácticas que se eligieron para cada situación. En el caso de la simulación de

“La Tiendita” se muestran los dulces que podían comprar, las monedas con las que podían pagar y el rango numérico de los precios. En las situaciones de “El cajero” se muestran las monedas que se usaron en cada juego.

Tabla 2 Variables didácticas utilizadas en la secuencia

Situación 1 “Tiendita”	Situación 2 “Tiendita”	Situación 3 “El cajero”	Situación 4 “El cajero”	Situación 5 “Tiendita”	Situación 6 “Tiendita”
					
Precio \$1 a \$10	Precio \$1 a \$5			Precio \$2 a \$10	

La tabla ilustra de manera gráfica las monedas y tipos de dulces en cada situación.

- Las características de cada situación fueron: en la Situación 1 (S1) los niños compraban un dulce y lo pagaban con monedas de \$1; el precio estaba en un rango numérico de 1 a 10.
- En la Situación 2 (S2) los niños compraban dos dulces y lo pagaban con monedas de \$1; el precio estaba en un rango numérico de 1 a 5.
- En la Situación 3 (S3) los niños jugaban al cajero con monedas de \$1 y de \$10.

- En la Situación 4 (S4) los niños jugaban al cajero con monedas de \$1 y de \$5.
- En la Situación 5 (S5) los niños compraban un dulce con monedas de \$1, \$2 y \$5. Los precios estaban en un rango numérico de 2 a 10.
- En la Situación 6 (S6) los niños elegían los dulces que les alcanzara para pagar con una moneda de \$10 sin que les sobrara dinero.

La Figura 3 que representa las seis situaciones didácticas diseñadas, las cuales se dividieron en dos subgrupos: “La Tiendita” donde se incluyen las Situaciones 1, 2, 5 y 6, y “El cajero” que incluye las Situaciones 3 y 4. Las situaciones de “La Tiendita” se dividen, a su vez, en dos subgrupos: las situaciones en las que se trabajaron con monedas de \$1 (S1 y S2) y las situaciones en las que se trabajaron con monedas de diversas denominaciones (S5 y S6). En cada subgrupo se muestran los roles que desempeñaron los alumnos durante las situaciones y las tareas matemáticas que llevaron a cabo en cada rol.

Es necesario precisar que en esta tesis usaremos el término identificar en situaciones donde se nombre un número, por ejemplo, cuando el vendedor exprese oralmente el número colocado en los precios de los dulces y el término interpretar cuando se represente el número indicado, por ejemplo, cuando el comprador entregue la cantidad de monedas necesarias que el vendedor expreso.

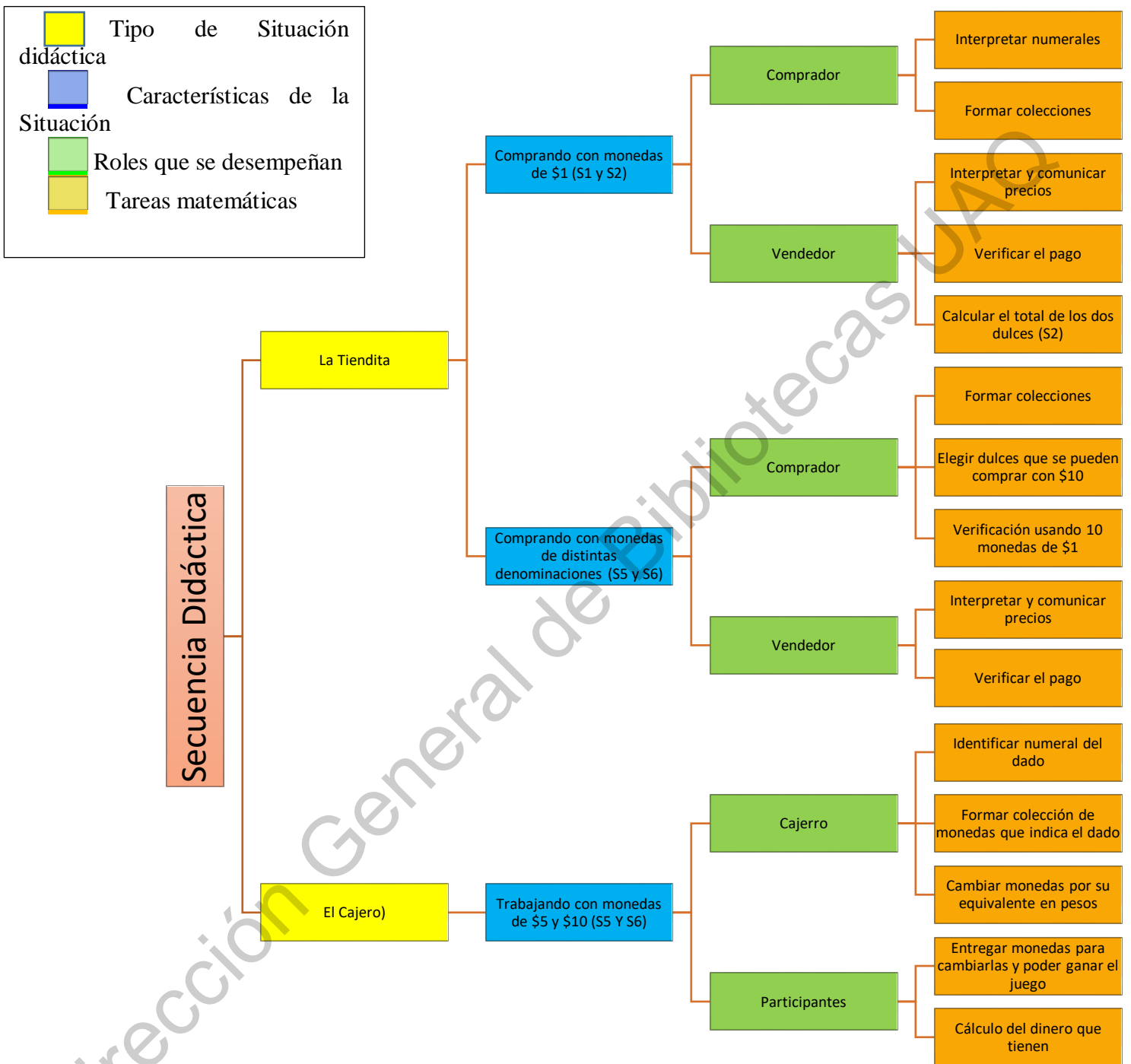


Figura 3 Representa la organización de las situaciones didácticas que componen la secuencia; muestra las variables didácticas que se utilizan y las tareas matemáticas de cada rol

3.5.2 Materiales y recursos didácticos utilizados

Durante todas las situaciones didácticas se utilizaron monedas reales. En la S5 y S6 se usaron monedas de distintas denominaciones (\$1, \$2, \$5 y \$10).

Los materiales que se emplearon en todas las situaciones de “La Tiendita” fueron:

- Dulces reales
- Tarjetas de validación para el vendedor. Consistían en tarjetas con el número escrito por una cara, y dibujos de monedas de \$1 por la otra, como se muestra en la Figura 4. Se diseñó una tarjeta para cada precio distinto, por lo que eran diez tarjetas con los números del 1 al 10. En adelante, se hará referencia a estas tarjetas nombrándolas como “tarjetas de validación”.

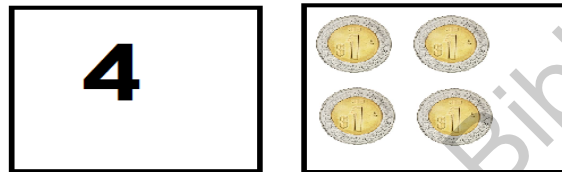


Figura 4 Ejemplo de tarjeta de validación

- Un juego de tarjetas con los números del 1 al 5, para designar los turnos para vender y comprar en la tiendita.
- Seis tiras numéricas del 1 al 10, como se muestra en la siguiente figura 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Figura 5 Tira numérica

En la siguiente descripción se especifican los materiales o recursos que se utilizaron para cada situación. También se muestran las posibles dificultades y procedimientos que podrían presentarse para cada situación didáctica; primero se mencionan las dificultades y después los procedimientos correctos.

3.5.3 Descripción y análisis a priori de las situaciones

Situación 1 Comprando con monedas de un peso. Se trata de una simulación de “La Tiendita”. La situación tenía como objetivo que los alumnos interpretaran la escritura numérica y que utilizaran el conteo para formar colecciones menores a 10.

Como se mencionó en el apartado de metodología, todos los alumnos desempeñaron el rol de compradores y vendedores en dos ocasiones.

Los compradores tenían un monedero con veinte monedas de \$1 para poder comprar en la tiendita.

Durante el rol de comprador, cada alumno tenía dos oportunidades para comprar un dulce usando únicamente monedas de \$1 y pagando el valor exacto del dulce. En lo que se refiere al vendedor, éste debía verificar que el pago fuera correcto; de no ser así, el comprador no podía llevarse el dulce.

La consigna que se planeó decir a los compradores fue: “Vas a comprar dos veces, en cada ronda debes elegir un dulce diferente y pagarlo con las monedas exactas.”

La consigna que se planeó decir a los vendedores fue: “Tienes que decirle al niño que quiera comprar cuánto dinero te debe pagar. Cuando te pague el dulce revisa si te están pagando correctamente; para hacerlo tendrás una tarjeta con las monedas de un peso dibujadas, si te dieron las mismas monedas podrás darle el dulce”.

Posibles dificultades y/o procedimientos

- Consideramos que los niños podían realizar una correspondencia entre los dulces y las monedas; es decir, que un dulce se pagaba con una moneda, dos dulces se pagaban con dos monedas, tres dulces con tres monedas, etc.
- El interés de los niños podía estar centrado en el juego simbólico implícito en la simulación de compra-venta. Por ejemplo, podían no prestar atención a la cantidad de monedas y entregar monedas al azar solo como un gesto de intercambio.
 - Los niños podrían tener dificultades al contar las monedas, como omitir alguna, contar más de una vez, no tener un orden estable en la serie oral, entre otras.
 - Podrían contar cada una de las monedas de \$1 que tenían hasta reunir la cantidad que necesitaban.

Situación 2 Comprando dos dulces con monedas de un peso

La situación tenía como objetivo que los alumnos adquirieran dos dulces en una sola compra, lo que implicaba que utilizaran sus conocimientos matemáticos relacionados con la interpretación del valor de la escritura numérica y la resolución de problemas aditivos de “agregar”.

Los compradores tenían 20 monedas de \$1 para gastar en “La Tiendita”. En el rol de comprador, cada alumno tenía dos oportunidades para comprar dos dulces usando únicamente monedas de \$1 y pagando en una sola exhibición el valor de los dos dulces; ese pago tenía que ser exacto. Ahora el vendedor sería quién calcularía el monto a pagar del comprador, por lo que la carga cognitiva mayor recaía en este rol. Además de verificar que el pago del comprador fuera correcto.

La consigna para los compradores fue:

“Elige dos dulces, fíjate cuánto cuestan y toma las monedas que necesitas para pagar los dos dulces de una sola vez.”.

La consigna para los vendedores fue: “Deberás decirle al niño que te compre cuánto dinero te tiene que pagar. Cuando te paguen los dulces revisa si te están pagando correctamente; para hacerlo tendrás estas tarjetas, busca la tarjeta que corresponda al precio del dulce que quiere comprar y verifica. Si te dieron la misma cantidad de monedas les darás el dulce”.

Posibles dificultades y/o procedimientos:

Compradores

- Consideramos que los niños podían hacer una correspondencia entre los dulces y las monedas; es decir, que un dulce se pagaba con una moneda, dos dulces se pagaban con dos monedas, tres dulces con tres monedas, etc.
- Podrían tener dificultades para identificar la representación del número y entregar las monedas equivocadas; por ejemplo, creer que un dulce que costaba \$9 costaba \$6, por lo que podían entregar una cantidad de monedas equivocadas.
- Podrían contar cada una de las monedas de \$1 que tenían hasta reunir la cantidad que necesitaban.

- Podrían representar las colecciones de cada uno de los precios con las monedas por separado y, al final, juntar las dos cantidades sin contarlas.

Vendedores

- Podrían usar sus dedos como apoyo para representar las cantidades.
- Podrían representar con monedas el precio de cada uno de los dulces y al final contar todas las monedas para conocer el total.
- Sobre conteo: que el niño partiera de un número cardinal y continuara con la numeración de la otra colección; es decir, si el niño quería comprar un dulce de \$4 y otro de \$3, podría partir del número 4 y contar 5, 6, 7 usando sus dedos o la serie oral para representar la colección del dulce de \$3.
- Resultado memorizado: algunos niños podrían memorizar algunas combinaciones básicas de sumar (por ejemplo, todas las combinaciones que dan 5), de tal manera que pueden dar un resultado de manera rápida.

Situación 3- El cajero con monedas de \$1 y de \$10

El objetivo de esta situación fue que el alumno hiciera agrupamientos decimales y que tuviera un acercamiento a la equivalencia entre diez monedas de \$1 y una moneda de \$10.

El material que se utilizó fue un dado con cardinales del 1 al 3, 70 monedas de \$1 y 15 monedas de \$10.

En este juego se trabajaron dos roles: el cajero y los participantes. El cajero tenía todas las monedas de \$1 y de \$10 y los participantes, por turnos, tiraban el dado para que el cajero les diera las monedas indicadas por el dado. Cuando los participantes juntaban 10 monedas de \$1 debían cambiarlas por una moneda de \$10; ganaba el juego el primer niño que juntará tres monedas de \$10.

La consigna que se les dijo a los niños fue la siguiente: “Vas a tirar los dados cuando te toque tu turno, le vas a pedir al cajero tantas monedas como indica el numeral del dado. Cuando juntes 10 monedas de \$1 cambiarás tus monedas por una moneda de \$10. Gana el primer niño que tenga tres monedas de \$10”.

Posibles dificultades y/o procedimientos

Cajero

- Podrían tener dificultades para identificar el numeral del dado y, por lo tanto, entregar monedas que no correspondían con la cantidad que indicaba el dado.
 - Podrían reconocer el numeral y entregar la colección correcta de monedas.
 - Los niños podrían subitizar las monedas para formar la colección correspondiente.

Participantes

- Podrían tener dificultades para contar las monedas como saltarse monedas o contarlas más de una vez, lo que los hacía perder el juego, cuando quisieran cambiar las monedas,
 - Olvidar canjear las 10 monedas de \$1 por la moneda de \$10, o prestar más atención en tener más monedas de \$1 y omitir cambiarlas en el banco.

Los siguientes procedimientos podrían aparecer en caso de que la educadora detuviera momentáneamente la actividad para preguntarles cuántas monedas tenían o quien iba ganando.

- **Sobre-conteo:** implica determinar el valor total a partir de la percepción global de una de las monedas, y luego continuar contando el valor de la otra moneda. Por ejemplo, durante la exploración de conocimientos previos una niña dijo “diez” mirando la moneda de \$10, y luego; señalando cada una de las monedas de \$1 dijo “once, doce, trece”.
- **Resultado memorizado:** algunos niños podrían memorizar algunas combinaciones básicas de sumar (por ejemplo, mirar sus dos monedas de \$10 y decir “diez y diez son veinte”), de tal manera que pueden dar un resultado de manera rápida.

Situación 4. El cajero con monedas de \$1 y de \$5

El objetivo de la situación era que el alumno hiciera agrupamientos de 5 contribuyendo a la comprensión de la equivalencia de 5 monedas de \$1 es igual a una moneda de \$5.

El material que se utilizó fue un dado con numerales del 1 al 3 y 50 monedas de \$1 y 15 de \$5.

La consigna que se les dijo a los alumnos fue: “Cuando te toque tu turno vas a tirar el dado y le vas a pedir al cajero tantas monedas como indica el numeral. Si juntas 5 monedas de \$1 las cambiarás por una moneda de \$5. Gana el primer niño que tenga tres monedas de \$5”.

Posibles dificultades y/o procedimientos

Cajero

- Podrían tener dificultades para contar las monedas como omitir algunas de ellas o contarlas más de una vez, cuando quieran validar las monedas dadas por los participantes.
- Podrían reconocer el numeral y entregar la colección correcta de monedas.
- Los niños podrían subitizar las monedas para formar la colección correspondiente.

Participantes

- Podrían tener dificultades para contar las monedas como omitir algunas de ellas o contarlas más de una vez, lo que los haría perder el juego.
- Olvidar canjear las 5 monedas de \$1 por la moneda de \$5. O prestar más atención en tener más monedas de \$1 y omitir cambiarlas en el banco.

Situación 5- Comprando con monedas de \$1, \$2 y \$5

El objetivo de la situación era que los alumnos se aproximaran al establecimiento de equivalencia de cantidades formadas con monedas de distinto valor.

En esta situación se usó el siguiente material: 20 pesos en monedas reales (dos monedas de \$5, cuatro de \$2 y dos de \$1) lápiz y papel, 8 dulces distintos, precios: \$2 a \$10. Las tarjetas de validación que se usaron fueron distintas, ya que estas tarjetas tenían todas las combinaciones posibles para formar los números del 2 al 10 con monedas de \$1, \$2 y \$5. Por ejemplo, si un niño quería comprar un dulce que costaba \$6, en las tarjetas podía encontrar las siguientes combinaciones: una moneda de \$5 y una de \$1, dos monedas de \$2 y dos de \$1 o tres monedas de \$2, como se muestra en la Figura 6.



Figura 6 Ejemplo de tarjetas para validar \$6.

Las consignas que se utilizaron fueron las siguientes:

Para el comprador: “puedes comprar un dulce en cada turno con estas monedas, pero no te debe sobrar ni faltar dinero al momento de pagarlo. Si no tienes las monedas exactas para pagar el dulce, puedes cambiarlas por monedas de \$1 en el banco”.

Para los vendedores: “deberás decirle al niño que te compre cuánto dinero te tiene que pagar; cuando te paguen los dulces revisa que esté correcto; para hacerlo puedes usar estas tarjetas, busca la tarjeta que corresponda al precio del dulce que quiere comprar y verifica, si te dieron la misma cantidad de monedas les darás el dulce”.

Posibles dificultades y/o procedimientos

Compradores

- Consideramos que los niños podrían contar las monedas como unidades físicas sin atender al valor nominal de cada una de ellas.
- Los niños podrían hacer coincidir el número impreso en la moneda con los números de la serie oral que nombraba; por ejemplo, como sucedió con un alumno durante la exploración de conocimientos previos: para pagar un dulce de \$6, el alumno buscó entre las monedas al tiempo que decía: “aquí está el uno (entregaba la moneda de \$1), aquí está el dos (entregaba una moneda de \$2), tres no tengo, cuatro tampoco, aquí está el cinco (entregaba una moneda de \$5) y no hay seis.”
- También creímos que los niños podían sentirse imposibilitados para comprar al no tener la moneda del precio que querían comprar; por ejemplo, si un niño quería comprar una paleta de \$7, al no tener una moneda de \$7 podría no comprar ningún dulce.
- Podría pasar que los niños quisieran hacer coincidir el número impreso en la moneda con los números del precio del dulce que querían comprar; por ejemplo: al solicitar un producto que costara \$5, un niño podría buscar entre las monedas y pagarlo con una moneda de \$5.

- Representaciones con los dedos. En este caso podían usar sus dedos para representar las colecciones indicadas en el valor de las monedas y así calcular el total; por ejemplo, si querían pagar un dulce que costaba \$4 y tenían monedas de \$2, podrían levantar dos dedos representando una moneda en una mano, otros dos dedos representando la otra moneda en la otra mano y al final contar el total de sus dedos.
- Sobre-conteo: implicaba determinar el valor total a partir de la percepción global de uno de los valores de la moneda, y luego continuar contando el otro valor. Por ejemplo, partir de moneda de \$5 y, señalando alternadamente dos monedas de \$1, decir “seis, siete”
- Resultado memorizado: algunos niños podrían memorizar algunas combinaciones básicas de sumar (por ejemplo, todas las combinaciones que dan 5), de tal manera que pueden dar un resultado de manera rápida.

Vendedores

Los vendedores podrían verificar el pago de los compradores usando las tarjetas de validación o utilizando algunos de los procedimientos citados anteriormente.

Situación 6- Comprando con una moneda de \$10

El objetivo era que el alumno hiciera distintas descomposiciones del número diez mientras elegía los dulces que podía comprar con una moneda de \$10.

El material que se utilizó fue una moneda de \$10, papel y lápiz por niño. Nueve dulces distintos entre sí con precios de \$1 a \$9, varias monedas de \$1 para verificar el pago –las cuales tenía la maestra– y las tarjetas de verificación.

La organización de esta situación fue distinta a las demás, ya que los niños únicamente fungieron el rol de compradores y la maestra participó realizando el rol de vendedora. Esto se decidió para evitar que los niños tuvieran que resolver problemas relacionados con el “cambio” o “vuelto”, ya que como se expuso en el marco teórico, este tipo de problemas pueden ser sumamente complejos para alumnos de preescolar.

Se pidió a los alumnos que antes de pasar a comprar hicieran una “lista” de los dulces que podrían comprar con una moneda de \$10; esta lista se haría dibujando los dulces, esperando que la representación pudiera ayudarles a resolver el problema planteado.

Para que los niños comprobaran si su pago era correcto, la maestra les cambiaba la moneda de \$10 por monedas de \$1. Los alumnos podían usar las tarjetas de verificación para comprobar su pago o realizarlo mediante el conteo de las monedas de \$1.

La consigna que se les dio a los niños fue: “tienes una moneda de \$10 para comprar los dulces que quieras, pero tienes que gastarte todo el dinero; antes, debes dibujar los dulces que puedes comprar y escribir cuánto cuesta cada dulce. Solo podrás venir una vez a la tiendita.”

Posibles dificultades y/o procedimientos

Compradores

- Pensamos que los niños podrían querer comprar un producto con el precio exacto de la moneda, tratando de hacer coincidir ambos, teniendo la idea de que una moneda de \$5 o de \$10 solamente “sirve” para pagar algo de ese precio. Como en la tienda no había dulces que costaran \$10, un niño podría retirarse sin hacer ninguna compra, entendiendo el \$10 de la moneda como una “etiqueta” y no por su cardinalidad, por lo que le sería sumamente difícil hacer equivalencias o descomposición del valor de la moneda.
- También consideramos que los niños podrían tomar cualquier dulce en relación al número de monedas; en este caso solo podía comprar un dulce pues solo tenía una moneda.
- Representaciones con los dedos. Podrían usar sus dedos para calcular el total que iban a pagar; por ejemplo, si querían comprar un dulce que costaba \$4, y otro que costaba \$5, podrían levantar cuatro dedos representando esa cantidad y luego cinco dedos representando la otra cantidad, y al final contar el total de sus dedos.
- Sobre conteo. Implica determinar el valor total a partir de la percepción global de uno de los precios y luego continuar contando el valor del otro precio. Por ejemplo, si una niña observa el precio de un dulce de \$5 y luego continúa contando con sus dedos el precio de otro dulce que cuesta \$4, y señalando cada dedo dice “seis, siete, ocho, nueve”.
- Resultado memorizado: algunos niños podrían memorizar algunas combinaciones básicas de sumar (por ejemplo, todas las combinaciones que dan 10), de tal manera que pueden dar un resultado de manera rápida.

3. 6 Recolección y análisis de la información

Los datos cualitativos que se utilizaron fue información verbal y audiovisual por medio de grabaciones, acompañados de imágenes o textos que produjeron los alumnos. Se video-grabaron todas las sesiones como apoyo para realizar el análisis. Al terminar cada una de ellas se hizo un reporte escrito, incluyendo observaciones relevantes. Además, se transcribieron cada una de las grabaciones de las sesiones implementadas.

Posteriormente, y para facilitar el análisis de los datos, recurrimos a la propuesta metodológica de Kalman & Rendón (2016), quienes sugieren el uso de la hoja de cálculo (Excel) para analizar datos cualitativos. Ellos realizan este análisis para un estudio de lenguaje, por lo que deciden organizar sus datos en líneas para hacer un análisis más fino de las acciones que se realizaban. También mencionan que esta propuesta no puede ser genérica, ya que cada estudio requiere un trabajo específico con la hoja de cálculo para determinar cómo usarlo y examinar nuestros datos.

En la presente investigación se hizo un análisis considerando las intervenciones verbales de los alumnos y de la maestra.

Para la preparación de cada hoja de cálculo, nos basamos en los elementos usados por Stauffer (2018) para analizar una secuencia didáctica de cálculo estimativo, de los cuales se retomaron los siguientes: datos generales, N° Intervención, transcripción, acciones, procedimiento y errores. Se creó una hoja de Excel para cada situación didáctica.

Posteriormente se fueron identificando las acciones que realizaban los participantes de cada equipo, resaltando aquellas que estuvieran directamente relacionadas con los conocimientos matemáticos. Dentro de estas acciones se fueron identificando regularidades en los procedimientos y las dificultades de los alumnos. Por ejemplo, se identificaron a los alumnos que utilizaban el conteo como un procedimiento para resolver el problema de la situación donde compraban un dulce usando monedas de \$1 y después se fueron identificando las distintas formas en que realizaban el conteo; esto último se resaltó por medio de colores.

Respecto a las intervenciones docentes, se agruparon los datos en dos categorías: ayudas directas y ayudas indirectas. Primero se resaltaron con colores distintos cada tipo de intervención y después se identificaron las regularidades para cada categoría. Por ejemplo,

se identificó que las ayudas indirectas se hscían con dos propósitos principales: para resolver la tarea del alumno o para reconstruir un procedimiento.

A continuación se presentan los resultados obtenidos durante esta investigación.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN

PROCEDIMIENTOS IDENTIFICADOS EN LOS ALUMNOS

Uno de los objetivos de este trabajo de investigación fue evaluar la pertinencia de la secuencia didáctica que aquí se propone. Para ello, procuramos identificar los conocimientos que los alumnos pusieron en juego durante la resolución de las situaciones de esta secuencia. Tal identificación se hizo mediante el análisis de los procedimientos, tanto erróneos como correctos que los alumnos manifestaron al enfrentar los problemas que implicaban el conteo, la equivalencia y el agrupamiento.

Cabe subrayar que analizar los errores es de suma importancia ya que, como se mencionó en el marco teórico, este trabajo parte de una perspectiva en la cual se considera que el error no muestra ausencia de conocimiento, sino que refleja conocimientos anteriores. Por ello nos resulta importante identificar y mostrar qué conocimientos e ideas subyacen a los errores que los alumnos manifiestan.

Es necesario precisar que cuando se habla de “la maestra” estoy haciendo referencia a mi propia intervención docente.

La identificación de procedimientos y errores estuvo sustentada en el análisis previo de la secuencia, pues en él se plasmaron las posibles respuestas, errores y dificultades que los alumnos podrían presentar de acuerdo con las variables didácticas que se determinaron para cada tipo de problema.

El análisis de los procedimientos matemáticos de los niños se organizará considerando los tres grupos de situaciones didácticas que se explicaron en el capítulo de Metodología: “La Tiendita” usando monedas de \$1 (S 1 y S2); usando monedas de distintas denominaciones (S 5 y S6); y el juego “El cajero” (S3 y S4). A su vez, el análisis de los procedimientos de los alumnos se dividirá según los roles que se desempeñaron en cada situación: compradores y vendedores en el caso de “La tiendita” y cajero y participantes para el juego “El cajero” (ver Figura 3 del capítulo de Metodología).

4.1 SITUACIONES DE LA TIENDITA COMPRANDO CON MONEDAS DE \$1 (S1 y S2)

Recordemos que en la Situación 1 (S1) el comprador elegía un dulce y debería pagarlo con las monedas exactas y los precios estaban en un rango numérico de 1 a 10. Para la Situación 2 (S2) los compradores elegían dos dulces y debían pagarlos de una sola vez, dando las monedas exactas; los precios de los dulces estaban en un rango numérico de 1 a 5.

Como se mencionó anteriormente, cada niño alternó los dos roles que se involucran en la situación de compra-venta. Cada rol tenía tareas matemáticas a desempeñar y cada tarea fue resuelta de distintas maneras, las cuales se muestran en la Figura 7.

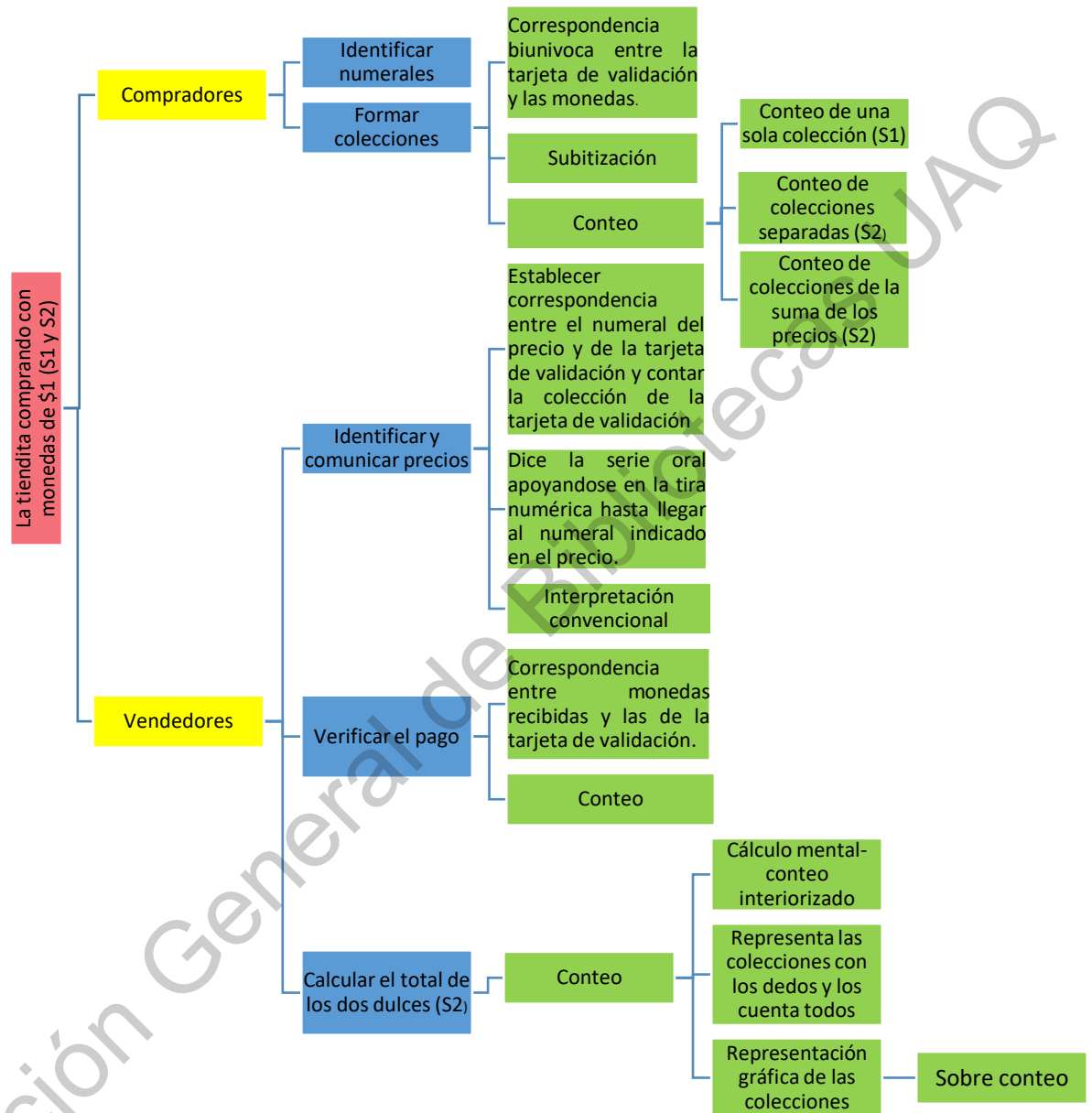


Figura 6 Organización de la presentación del análisis de la Situación 1 y 2.

Dirección General de Protección Civil y Bomberos

Las tareas de los compradores fueron:

- A. Identificar² el numeral en los precios de los dulces.
- B. Formar la colección correspondiente utilizando monedas de \$1

Las tareas de los vendedores fueron:

- A. Identificar y comunicar precios.
- B. Calcular el costo total de los dos dulces (\$2)
- C. Verificar el pago.

Ahora explicaré como resolvieron los alumnos cada tarea matemática.

4.1.1 Tareas y procedimientos de los compradores

A. Identificar el numeral escrito en los precios de los dulces

Para interpretar el numeral escrito en los precios de los dulces, los compradores tenían la opción de esperar a que los vendedores les dijeran el precio y con esta información formar la colección de monedas, o bien, anticiparse interpretando ellos mismos el numeral. Siete de nueve alumnos desde la primera situación anticipaban el precio del dulce que querían comprar, ya que conocían la serie numérica del uno al diez, lo que no presentaba un reto mayor para ellos por el rango numérico con el que se trabajó (menor a diez). Dos alumnos preferían esperarse a que el vendedor les comunicara el precio del dulce que querían comprar.

B. Formar la colección correspondiente utilizando monedas.

Los alumnos utilizaron diversos procedimientos para formar las colecciones. Asimismo, se manifestaron diversas dificultades al momento de llevar a cabo esa tarea. Enseguida se presentarán las dificultades y, posteriormente, los distintos procedimientos de resolución.

Dificultades presentadas para formar las colecciones

Cuando debían comprar un dulce con monedas de \$1 (\$1), dos compradores daban todas sus monedas como pago al vendedor; estos niños no prestaban atención a la cantidad de monedas sino al intercambio normativo “te cambio mis monedas por un dulce”. Parece que estos alumnos no comprenden el valor real del dinero pero sí la acción de vender y comprar como parte de un juego.

² En esta tesis se utilizará el término identificar en situaciones donde se nombra el número.

Un ejemplo de esto se puede observar cuando Gael era el comprador y Juan José era el vendedor. Emma estaba como espectadora, e interviene para ayudarlo a comprar un dulce de \$3 a Gael, ayudándole a contar su dinero.

- Emma: “¡No! deja que él lo busque (le dice a Juan José refiriéndose a que Gael busque el dinero con el que va a pagar dentro de su monedero)
- Gael: /saca monedas pero sin poner atención en las monedas que va sacando/
- Emma: “¿Le ayudo a buscar tres? “/le pregunta a la maestra/
- Ma: “si quieres ayúdale”
- Emma: /se acerca a Gael, cuenta tres monedas y se las da en la mano/ “uno, dos, tres, ten, guarda éste” (las otras monedas que Gael tenía en la mano)

- **Formar la colección de monedas al azar.** Dos alumnos (Marlen y Gael) utilizaron este procedimiento en su primera oportunidad de compra en la Situación 2. Estos niños no entregaron todas las monedas que tenían como pago, como sucedió en el error anterior, lo que nos permite observar que están considerando un criterio para seleccionar esas monedas; desconocemos ese criterio debido a la dificultad que tienen los niños pequeños para verbalizar las razones por las que deciden usar esas monedas, y como no apreciamos alguna regularidad que indique un criterio claro, es por eso que lo nombramos como “al azar”. Un ejemplo de esto es cuando Gael quiere comprar una paleta de \$5 y un chocolate de \$4; el vendedor le indica que debe pagar nueve pesos, Gael hace lo siguiente cuando intenta formar esta colección:

- Gael: /Saca monedas del monedero y las pone en su mano, se las enseña a la maestra/ “¿Así?”
- Ma: /No responde/
- Gael: /Toma otra moneda y se las enseña a la maestra/.
- Ma: “Dale los nueve pesos, Gael.”
- Gael: /Le da las monedas a Juan José /.
- Juan José: /Sobrepone las monedas en la tarjeta de validación. Falta una moneda para completar la colección/ “¡Ah! le faltó un peso, maestra.”

Los procedimientos están ordenados de menor a mayor a complejidad.

B1. Correspondencia biunívoca entre la tarjeta de validación y las monedas.

B2. Subitización.

B3. Conteo.

B3.1. Conteo de una sola colección (S1)

B3.2- Conteo de colecciones separadas (S2)

B3.3.- Conteo de colecciones de la suma de los precios (S2)

B1.- Correspondencia biunívoca entre la tarjeta de validación y las monedas. Cuando hablamos de correspondencia biunívoca nos referimos a que cada elemento de la colección que se va a contar debe corresponderse, de manera unívoca, con una y solo una palabra-número de la cantinela (Gelman y Gallistel, p.153, citado en Chamorro 2005). En la situación S1 donde tenían que comprar un dulce con monedas de \$1, un alumno (Ernesto) hacía corresponder cada imagen de las monedas de la tarjeta de validación con cada una de las monedas que el alumno iba poniendo.

Otro procedimiento que utilizó Juan José con la tarjeta de validación fue no dar todas las monedas necesarias en una sola exhibición, sino que esperaba a que el vendedor sobrepusiera las monedas que él le iba dando en la tarjeta de verificación para entonces observar cuántas monedas le faltaban y así completar la colección. Juan José hacía una correspondencia entre las monedas dibujadas en la tarjeta de validación y las monedas que le iba entregando al vendedor. Por ejemplo, cuando tenía que pagar \$9, le pidió a la vendedora poner inmediatamente las monedas entregadas en la tarjeta de verificación, como se muestra a continuación:

- Juan José: (quería comprar un dulce de \$9 y pagó con dos monedas de \$1 al vendedor) “aquí están”/señala las monedas que había dejado en la mesa/.
- Emma: /toma las monedas y las junta/.
- Juan José: /saca otras dos monedas de \$1 y las deja en la mesa/ “pues ve poniéndolos” (se refiere a colocar las monedas en la tarjeta de verificación).
- Emma: /pone una moneda en la tarjeta de verificación/.
- Ma: “las va a poner hasta que acabes de darle lo que te falta ¿Ya acabaste?”

- Juan José: “no, todavía me falta” /muestra que en su monedero todavía hay monedas/
- Ma: “pero, ¿ya acabaste de darle los nueve pesos?”
- Emma: “no son nueve Juan José, ¿cuántos me tienes que dar?” /le enseña las monedas que le acababa de entregar/.
- Ma: “¿Lo quieres revisar?”
- Emma: “me tienes que dar nueve”.

Se observa que el niño pedía colocar las monedas en la tarjeta de validación, la vendedora acepta esta propuesta; sin embargo, la docente interviene para aclarar que el dinero se paga en una sola exhibición haciendo cumplir la consigna. También se observa la ayuda de la vendedora, quien contribuye repitiéndole la cantidad de dinero que debía entregar para poder comprar el dulce.

B2.- Subitización. Cuando hablamos de subitizar nos referimos a un procedimiento que el niño utiliza para hallar el cardinal de un conjunto. Si el tamaño se puede percibir “de una ojeada”, el número aparece en nuestra mente de forma instantánea. (Castro 1995, p. 3). En la Situación 1 dos alumnos (Marlen y Emma) utilizaron la subitización para formar colecciones de monedas para pagar; esas colecciones eran de cantidades pequeñas (menores a tres). Es necesario aclarar que las monedas dibujadas en las tarjetas de verificación estaban acomodadas de manera lineal; consideramos que esto pudo haber contribuido a que los alumnos realizaran este procedimiento.

B3.- Conteo. Como se mencionó en el marco teórico de esta investigación, contar implica los principios de conteo que mencionan Gelman y Gallisten (1978): principio de correspondencia término a término, principio de orden estable, principio de abstracción, principio de no pertinencia del orden, principio de cardinalidad o cardinalización. A lo largo de estas situaciones didácticas se observaron en los alumnos diversas formas de contar, como se mostrará enseguida. Primero se presentan los procedimientos y dificultades para la S1 (compra de un dulce con monedas de \$1) y luego los que corresponden a la S2 (compra de dos dulces con monedas de \$1).

Dificultades para contar

Fueron dos alumnos los que presentaron errores en el conteo durante las situaciones (Gael y Juan José). Los errores que cometían eran distintos; por ejemplo, en el caso de Juan José cuando quería comprar un dulce de \$4 y otro de \$3, el vendedor le dijo que eran \$7. Juan José presentó problemas en su serie oral pues solo tenía un orden estable del uno al tres, ya que después del tres se “saltaba” hasta el número ocho:

Juan José: /Toma una por una cada moneda mientras dice un número/ “Uno, dos, tres, ocho, nueve, diez”

Juan José realiza una correspondencia entre la moneda y la etiqueta que le asigna cumpliendo con el principio de correspondencia biunívoca; sin embargo, al no tener aún una serie oral estable hasta el número siete, no puede cumplir exitosamente con la tarea.

Gael también tuvo dificultades cuando intentaba contar, pero hacía una aproximación para pagar dando muchas o pocas monedas dependiendo si interpretaba que el numeral era grande o pequeño. En una ocasión donde debía pagar un dulce de \$5 y un dulce de \$4, entregó ocho monedas al comprador; su aproximación fue muy cercana al pago que tenía que realizar. No se observó que el niño utilizara alguna estrategia de conteo, por lo que consideramos que el niño no llevaba un control de las monedas y que esto pudo haber sido casualidad.

B3.1.- Conteo de una sola colección (S1)

En la situación donde compraron un dulce con monedas de \$1 (S1), siete de nueve alumnos contaban sus monedas utilizando estrategias como señalar las monedas o separar las monedas contadas de las no contadas. Estos niños utilizaron los principios de correspondencia biunívoca, orden estable, abstracción, cardinalidad y el principio de no pertinencia del orden para poder contar convencionalmente.

B3.2.- Conteo de colecciones separadas (S2)

Este procedimiento lo utilizaron tres alumnos (Carlos, Jorge y Salvador) durante la situación donde compraban dos dulces a la vez pagando con monedas de \$1 (S2). Los alumnos contaban y separaban las colecciones correspondientes a cada dulce que querían comprar: por un lado colocaban las monedas que correspondían a la colección del precio del primer

dulce, y en otro lado, contaban la colección de monedas que correspondía al segundo dulce; al pagar entregaban todas las monedas al vendedor.

Por ejemplo, cuando Jorge quería pagar un dulce de \$3 y otro de \$2, tomaba dos monedas con una mano, y con la otra mano tomaban tres monedas; juntaba las monedas en el momento de entregarlas al vendedor pero no las contaba todas juntas. Jorge es un alumno que ha mostrado cierta habilidad para contar cantidades mayores a diez; sin embargo, para resolver un problema aditivo con cantidades pequeñas (menores a cinco) prefiere utilizar el conteo de colecciones separadas.

B3.3.- Conteo de colecciones de la suma de los precios (\$2). Siete alumnos de nueve (Carlos, Emma, Jorge, Juan José, Mónica, Ernesto, Marlen) contaban todas las monedas que les comunicaba el vendedor, sin separarlas en colecciones que correspondieran a los precios de los dos dulces que querían comprar. Por ejemplo, cuando Mónica quería comprar un dulce de \$3 y otro de \$1, el vendedor le comunicaba el precio y ella intentaba formar la colección correspondiente por medio del conteo; en este caso ella cuenta cuatro monedas de \$1 juntas, sin separar las que corresponden al dulce de \$3 y las que corresponden al dulce de \$1.

Comentarios del apartado procedimientos de los compradores

Varios de los procedimientos descritos estaban previstos en el análisis a-priori, como subitizar y contar, pero no se anticipó que los alumnos utilizaran recursos como la tarjeta de validación como un medio para formar la colección.

Se tenía previsto que algunos niños presentaran dificultades al contar, como omitir objetos o no tener una serie numérica estable. Ante estos casos se planeó que la maestra intervendría de manera directa “modelando” el conteo, o bien, haciendo preguntas que ayudaran a reflexionar al alumno sobre el procedimiento que estaba utilizando; pero no se previó que habría ayudas de parte de sus mismos compañeros, lo que es una aportación sumamente valiosa para el aprendizaje de los niños.

Otro procedimiento que se contempló fue que los alumnos no prestaran atención a la cantidad de monedas, sino que solo entregaran monedas al azar como un gesto de intercambio. Este procedimiento efectivamente se presentó en un alumno (Gael), ya que

entregaba monedas sin utilizar un criterio aparente; sin embargo, modificó su procedimiento en la segunda oportunidad que tuvo para comprar. Este cambio se dio gracias a los alumnos “espectadores”, ya que constantemente estaban dispuestos ayudar a sus compañeros diciéndoles que tenían que contar y mostrándoles cómo debían hacerlo. Cabe mencionar que se presentaron casos donde “las ayudas” de algunos alumnos consistían en resolver prácticamente todo el problema. Un ejemplo claro de esto es el caso de la compra de Gael descrito anteriormente, donde el niño presenta dificultades para contar y es Emma quien le cuenta las monedas para que pueda comprar el dulce, resolviéndole prácticamente todo el problema. La niña ayuda modelando cómo se cuenta y se espera que el niño aprenda de esta observación para que en un futuro pueda hacerlo por sí mismo.

4.1.2 Tareas de los vendedores

A. Identificar y comunicar precios

La mayoría de los alumnos (siete alumnos de nueve) lograron identificar y comunicar los numerales convencionalmente. Los dos niños restantes usaron la tarjeta de validación y uno de ellos también usó la tira numérica cuando tenían dificultades para interpretar el numeral, las cuales podían utilizar en el momento que creyeran necesario. Tales recursos se usaron de las siguientes maneras:

- dos alumnos de nueve alumnos utilizaron la tarjeta de verificación cuando no sabían cuál era el nombre del numeral marcado en la etiqueta del precio del dulce: buscaban la tarjeta de verificación que tenía el mismo numeral y contaban las monedas de la tarjeta para identificar el número y así poder comunicarlo al comprador.
- un alumno de nueve usó la tira numérica para ir diciendo la serie numérica oral a partir del uno y hasta el numeral deseado, identificando así el nombre del número.

Cuando los vendedores manifestaron dificultades para identificar el numeral, los demás alumnos trataban de ayudarles de diversas maneras; por ejemplo, ayudaban comunicando el precio del dulce o incluso, el alumno comprador ayudaba buscando la tarjeta de validación correcta. La maestra permitió este tipo de ayudas directas en los primeros momentos de la actividad, y más adelante las fue regulando para evitar que el alumno no asumiera la tarea que le correspondía como vendedor.

Dos alumnos no lograban identificar el numeral. En el caso de Gael, en ocasiones no respondía cuando se le preguntaba por el precio de los productos; por ejemplo, cuando se le preguntó por el precio de un dulce de \$5 esperaba a que otro compañero más experto le dijera la respuesta. La maestra le ayudó mostrándole las tarjetas de validación y Gael observó el numeral del precio e identificó un numeral igual escrito en las tarjetas de validación. Cuando sí respondía al comprador sobre el precio de los productos, lo hacía incorrectamente, por lo que sus compañeros no desaprovechaban la oportunidad para corregirlo. Esto se observa en la siguiente transcripción donde Gael es el vendedor y Jorge el comprador, quien eligió un dulce de \$5 y un dulce de \$1. Emma es una niña que es espectadora de la compra, sin embargo, ayuda a Gael diciéndole el precio de los dulces.

- Jorge: “Yo voy a querer un deste” (Se refiere a “uno de estos”) /toma un dulce de \$1/ “y este” /toma un dulce de \$5/
- Emma: “Esos cuestan cinco” / no señala ningún dulce/ (se refiere a los dulces de \$5 que eligió Jorge)
- Ma: “¿Éste cuánto cuesta, Gael?” /señala un dulce de \$5/
- Gael: /No responde/
- Emma: “A cinco”
- Ma: “¿Y éste, Gael?” /señala el precio de \$1/
- Gael: “Siete”
- Emma: “No”
- Ma: “¿Cuál te sirve?” /le acomoda todas las tarjetas de validación para que elija las que corresponden al precio de los dulces que quería comprar Jorge (\$1 y \$5)/
- Gael: /Toma la tarjeta de siete/
- Ma: “No, mira este es el siete, fíjate que está más larguito” /le enseña el número siete en la tarjeta/
- Ma: “Busca este” /señala el uno en el precio del dulce/ “el uno”
- Gael: /Toma la tarjeta de uno/
- Ma: “Ahora vamos a buscar. ¿Cuál era el otro dulce que compró? Éste, ¿cuál es?” /señala el precio de 5/
- Gael: /No se entiende lo que dice/

- Ma: “Ese es el cinco”
- Gael: /Se queda pensando y después toma la tarjeta de cinco/

En este ejemplo la maestra también interviene ayudando al niño a identificar los numerales de las tarjetas de validación, las ayudas que proporciona la maestra son muy directas, ya que no se dio oportunidad para que realizara una intervención distinta de una manera indirecta o bien que esperara para ver si el resto de los alumnos ayudaban a corregir a Gael. El niño confunde el siete con el uno; cuando la maestra le muestra la tarjeta de validación del siete y del uno, puede observar que son diferentes y elige la del uno, que era el número que estaba buscando.

En una venta que realizó Juan José fue cuando utilizó la tira numérica como recurso para identificar el numeral. En este ejemplo Juan José es el vendedor y Gael es el comprador. Este procedimiento fue propuesto por la maestra. A continuación se muestra un ejemplo:

- Juan José: /Señala el precio de \$3/ “¿A cuánto cuestan?” /le pregunta a la maestra/
- Ma: “Si no sabes qué número es puedes usar ésta” /le da la tira numérica/ “¿Dónde está éste?” /señala el precio de \$3/
- Juan José: /Señala el tres en la tira numérica/
- Ma: “Cuenta de aquí hasta acá” /señala el uno y el tres/ “cuenta: uno...
- Juan José: /Señala cada número y los va contando/ “uno, dos, tres”
- Ma: “Ajá, ¿cuánto cuesta?”
- Juan José: “A tres, a tres Gael, a tres.”

La tira numérica le ayudó a Juan José a identificar el numeral, aunque la maestra le señaló hasta dónde tenía que contar, lo cual influyó en su respuesta.

El recurso que se tenía planeado utilizar en caso de dificultades para interpretar el numeral era la tira numérica, ya que ayuda a que los niños puedan contar las casillas con los numerales hasta encontrar el numeral que buscan. La tarjeta de validación solo se planeó para ser utilizada en la verificación del pago; sin embargo, se observó que sirvió de gran ayuda para identificar el numeral, ya que muestra la colección de monedas que corresponden al numeral y esto ayuda a que el alumno pueda identificar el numeral contándolas, por lo que no descartaría su uso en situaciones posteriores.

B. Calcular el total de los dulces (S 2)

Esta tarea fue ejecutada por los vendedores durante la S. 2, cuando debían calcular el total de los precios de dos dulces, enfrentando así un problema aditivo. Para resolverlo todos los alumnos recurrieron al conteo, pero lo hicieron de diversas maneras: conteo interiorizado, representando las colecciones con los dedos y contándolos todos, haciendo representaciones gráficas y contándolas, o haciendo sobre conteo.

B1. Conteo.

B1.1. Conteo interiorizado. Tres alumnos usaron este procedimiento (Ernesto, Marlen y Mónica). Un ejemplo es el caso de Marlen cuando intenta calcular el total de un dulce de \$3 y un dulce de \$5.

- Ernesto: “¡Ah!, este y estos” /señala un dulce de \$3 y un dulce de \$5/
- Salvador: “Dile el barquillo y el duvalin” /le dice a Ernesto/
- Marlen: “A tres y a cinco”
- Ma: “¿Cuánto es, Marlen?”
- Marlen: / Se queda pensando/
- Ma: “Marlen”
- Marlen: “Siete”
- Ma: “¿Cómo sabes que siete?”
- Marlen: “Porque le conté porque mi mamá me enseñó”
- Ma “A ver, cuéntale porque yo no escuché”
- Marlen: “Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete”

Se puede observar que la niña comunicó un número muy cercano al que indicaba el total de la compra; cuando la maestra le pide justificar su resultado, la niña recurre a un procedimiento que podría ayudarle a comprar el dulce, que es el conteo interiorizado; sin embargo, no logró calcular el total exacto de la compra de los dos dulces. En ese momento no fue posible ahondar más sobre cómo llegó la niña a obtener ese resultado, pues cuando se le solicitó una explicación la niña dijo que había contado, aunque no se observó de qué manera.

B2.2. Representa las colecciones con los dedos y los cuenta todos. Cuatro de nueve alumnos (Emma, Carlos, Jorge, Ernesto) utilizaron este procedimiento para calcular el total de la compra; usaron sus dedos como intermediarios para representar las colecciones y, después, contarlos todos.

Cuando empezaban a utilizar este procedimiento los alumnos se enfrentaron a ciertas dificultades para dominarlo. Por ejemplo, Ernesto no separaba en diferentes manos los dedos que representaban cada colección; esto le creó confusión sobre dónde empezaba una colección y dónde terminaba la otra, lo que lo llevó a un resultado erróneo. En el siguiente ejemplo Ernesto tenía que calcular el total de un dulce de \$3 y un dulce de \$5:

- Ernesto: “Tres” /levanta tres dedos y los pone cerca del dulce de \$3/ “y cinco” /levanta otros dos dedos para que sean cinco/ “cuatro, cinco, seis” /levanta un dedo de su otra mano/
- Ma: “A ver, el duvalin son cinco” /toma la mano de Ernesto con sus cinco dedos levantados/ “ahora pon los tres del barquillo”
- Ernesto: /Levanta tres dedos con su otra mano/ /cuenta cada uno de sus dedos acercándolos a su boca, pero omite uno de sus dedos/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete”
- Ma: “A ver cuéntalos otra vez”
- Ernesto: /Cuenta sus dedos pero esta vez sigue con la mirada los dedos que va contando/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.”

Como puede observarse, al principio el niño representó la primera colección con tres de sus dedos, al querer formar la colección del otro dulce que costaba cinco hace un sobre conteo, completando los dedos que le faltaban para tener cinco. Ernesto no separó las colecciones, parece haber olvidado que los primeros tres dedos los había puesto para el dulce que costaba tres.

Ante esta dificultad, la maestra intervino para explicarle otra forma de representar las colecciones apoyándose en sus dedos; Ernesto la comprende y resuelve este problema y el siguiente utilizando correctamente los dedos.

B3. Representación gráfica de las colecciones. Dos de nueve alumnos (Salvador y Marlen) representaron las colecciones gráficamente y usaron esas representaciones para calcular el total, aunque lo hicieron de maneras distintas: Salvador representó las colecciones a través de números convencionales y lo resolvió usando el sobre conteo, mientras que Marlen realiza el procedimiento que la maestra dirigió, la niña elige dibujar círculos que simulaban las monedas para formar cada una de las colecciones y después contarlas para conocer el total de un dulce de \$3 y un dulce de \$5. La maestra decide dirigir el procedimiento al observar la dificultad de la alumna para resolver el problema utilizando otras estrategias.

- Ma: “A ver, fíjate, vas a poner las cinco moneditas” /señala el precio de \$5/
- Marlen: /Dibuja cinco círculos/
- Ma: “Y ahora vas a dibujar ¿cuántas?” /señala el precio de \$3/
- Marlen: “Tres”
- Ma: “Ajá”
- Marlen: /Dibuja tres círculos/
- Ma: “¿Cuántos son?”
- Marlen: /Cuenta cada moneda señalando con su lápiz pero omite un círculo/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete”
- Ma: “¿Y ésta?” /Señala el círculo que no contó/ “¿Cuánto es?”
- Marlen: “Siete”
- Ma: “A ver, otra vez”
- Marlen: /Cuenta otra vez cada círculo, pero la maestra va señalando cada círculo/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho”
- Ma: “¿Cuánto es?”
- Marlen: “Ocho”

Marlen no tuvo dificultades para representar gráficamente las cantidades dibujando un círculo por cada moneda, quizás porque se trata de cantidades pequeñas que representó por separado. Sin embargo, cuando la maestra le pide que cuente todas las monedas que dibujó, la niña omitió algunas, por lo que la maestra decide señalarle cada moneda para ayudarla a contar sin omitir ningún objeto.

B4. Sobre conteo. Según Chamorro (2005), sobre contar es cuando se adjunta a una colección otra colección (o a un número otro número); la estrategia del “sobre conteo” supone conocer y saber enunciar la serie de los números a partir de uno dado (por ejemplo: nueve más tres: diez, once, doce).

Salvador usa este procedimiento apoyándose de las representaciones gráficas que hace de las colecciones. En la S2 la maestra le propone dibujar las monedas de cada colección para calcular el total de un dulce de \$5 y otro de \$4; sin embargo, el alumno escribió los números del 1 al 9:

- Ma: “Si pudieras dibujar, ¿qué dibujarías?”
- Ernesto: “El ocho”
- Salvador: “Sí, el ocho”
- Ma: “Pero a ver, dibuja las monedas de cada una” (Se refiere a dibujar las colecciones de las monedas que corresponden a los dulces que quería comprar Ernesto \$5 y \$4)
- Salvador: /Empieza a escribir los números en orden ascendente empezando del uno y hasta el tres/ “tres” /Luego escribe el número cuatro/
- Ma: “Ahí van los cuatro de la paleta y te faltan los cinco del”... /señala el Duvalin/
- Salvador: /Escribe los números cinco, seis, siete, ocho y nueve, pero no se escucha que diga el nombre de los números/
- Ma: “¿Cuánto es, Salvador?”
- Salvador: “Nueve”

La figura 7 muestra las representaciones gráficas que hizo Salvador.

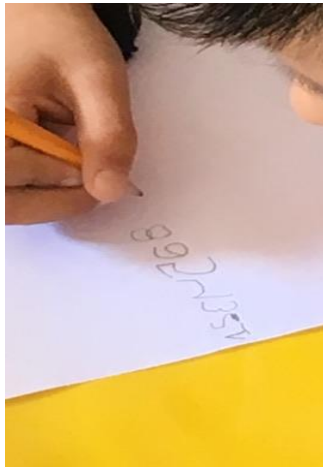


Figura 7 Representación escrita de Salvador

En este ejemplo el niño utiliza el sobre conteo cuando pasa de los números de la primera colección (del uno al cuatro) a formar la siguiente colección (del cinco al nueve), ya que en lugar de volver a poner el número uno, dos, tres, cuatro y cinco, continúa con la numeración ascendente. Una vez escrita esta serie numérica fue capaz de comprender que el último número escrito, en este caso el nueve, representaba el total de las dos colecciones, lo cual parece indicar que Salvador está apropiándose del número como cardinal.

Dificultades presentadas para calcular el total de la compra.

Una dificultad coexistió en considerar datos que no calculan el total de la compra. Por ejemplo, para calcular el total de un dulce de \$1 y otro de \$5, únicamente Gael contó las canastas donde estaban guardados cada uno de los dulces de la tiendita, lo cual no ayudó a resolver el problema. El niño sabe que debe contar “algo” para decirle cuánto es al comprador, sin embargo, no considera los precios de los dulces específicos que el niño quería comprar. Este error pudiera estar relacionado con la dimensión normativa, lo que implica que el niño no comprenda que lo que se cobra es el precio de lo que se compra.

Identificar regularidades de la serie numérica escrita. Juan José quiso utilizar la tira numérica como apoyo para calcular el total de la compra. Sin embargo, no lo hizo de manera correcta. El niño conoce la serie numérica oral pero aún le falta dominar la serie numérica escrita, de manera que pueda utilizarla para resolver problemas como lo hizo Salvador cuando usó la serie numérica escrita para resolver el problema, acudiendo al sobre conteo.

Esto lo podemos observar en el siguiente ejemplo, donde quiere calcular el total de la compra de un dulce de \$5 y un dulce de \$3:

- Gael: /Señala los dulces de \$3 y \$1/
- Juan José: /Toma el dulce de \$3/ “¡Ah!”/toma la tira numérica y cuenta el uno y el dos/ “dos, dos, Gael”
- Ma: “No, te faltó aquí” /señala el número tres/
- Juan José: “Ya le conté” /señala cada número y lo cuenta/ “uno, dos, tres, tres, Gael” /levanta la voz/
- Ma: “¿Querías éste, verdad, también?” /señala el dulce de \$1/
- Gael: /señala el dulce de \$3/
- Ma: “¿Ese y cuál más?”
- Gael: /Empezó señalando un dulce de \$3 y después lo cambio por un dulce de \$5/
- Juan José: “A cinco” /toma el dulce de \$5/ “cinco”
- Ma: “¿Cuánto es de los dos?”
- Juan José: “Cinco”
- Ma: “No, éste cuesta cinco y ¿ésta cuesta?” /señala el dulce de \$3/
- Juan José: “¡Ah!” /toma la tira numérica y cuenta del uno al cuatro/ “uno, dos, tres, cuatro”
- Ma: /Señala los números del 1- 3 de la tira numérica y cuenta con el niño/ “uno, dos, tres”
- Juan José: /Cuenta con la maestra/ “uno, dos, tres”
- Ma: “¿Entonces cuánto es de los dos?”
- Juan José: “¡Gael!”(el niño no dice una cantidad que indique el total de la compra).

El niño cuenta las casillas de la tira numérica como apoyo para interpretar el numeral, pero también quiere utilizarlo para calcular el total de la compra. Esto podría considerarse una dificultad ya que el niño requiere comprender para qué le sirve la serie numérica escrita en la tira numérica y en qué momentos puede ayudarle a resolver el problema.

C.Verificar el pago.

Para verificar el pago del comprador los alumnos siguieron dos procedimientos usando la tarjeta de validación: a) haciendo una correspondencia entre las monedas recibidas y las monedas dibujadas en la tarjeta; b) contando las monedas que recibían de los compradores.

C1. Correspondencia entre monedas recibidas y las de la tarjeta de validación. En la Situación 1 todos los alumnos utilizaron la tarjeta de validación como recurso para verificar el pago de los compradores, esto lo hacían sobreponiendo cada una de las monedas que le daba el comprador sobre las monedas dibujadas; si sobraban o faltaban monedas el pago no era correcto.

C2. Conteo. Durante la situación donde compraban dos dulces, tres alumnos (Carlos, Jorge y Emma) se negaron a utilizar la tarjeta argumentando que ellos no la necesitaban puesto que ya “sabían contar”. Efectivamente estos niños ya no necesitaron de este recurso, pues mostraban habilidad al contar las colecciones.

Esto se ejemplifica cuando Emma es la vendedora y la maestra le pregunta sobre la tarjeta que le sirve para verificar el pago del comprador.

Ma: “A ver, ¿cuál tarjeta te sirve, Emma?”

Emma: “¡No!, ya no”

Ma: “¡Ah! bueno, está bien”

Juan José: “¿Ya no vamos a usar las tarjetas?” /le pregunta a la maestra/

Ma: “Si las quieres usar, es que dice Emma que ya no las necesita”

Juan José: “¿No?” /le pregunta a Emma/

Emma: /Niega con la cabeza/

Carlos: “Porque ya sabe contarlo. ¿Verdad?”

Emma: “Sí, ya”

El caso de Emma es interesante ya que la alumna pone de manifiesto que no solo sabe contar, sino que también sabe para qué sirve el conteo.

4.2 SITUACIONES DE LA TIENDITA: COMPRANDO CON MONEDAS DE DISTINTAS DENOMINACIONES (S. 5 Y S.6)

Ahora se explicarán las situaciones que implicaron trabajar con monedas de distintas denominaciones (Situaciones 5 y 6). Igual que en las situaciones donde se trabajó únicamente con monedas de \$1, los alumnos desempeñaron roles de vendedores y compradores, y cada rol tenía tareas matemáticas a realizar. Los alumnos resolvieron cada tarea matemática de diversas formas. La estructuración de cómo se presentará el análisis para estas situaciones se muestra en la siguiente figura.

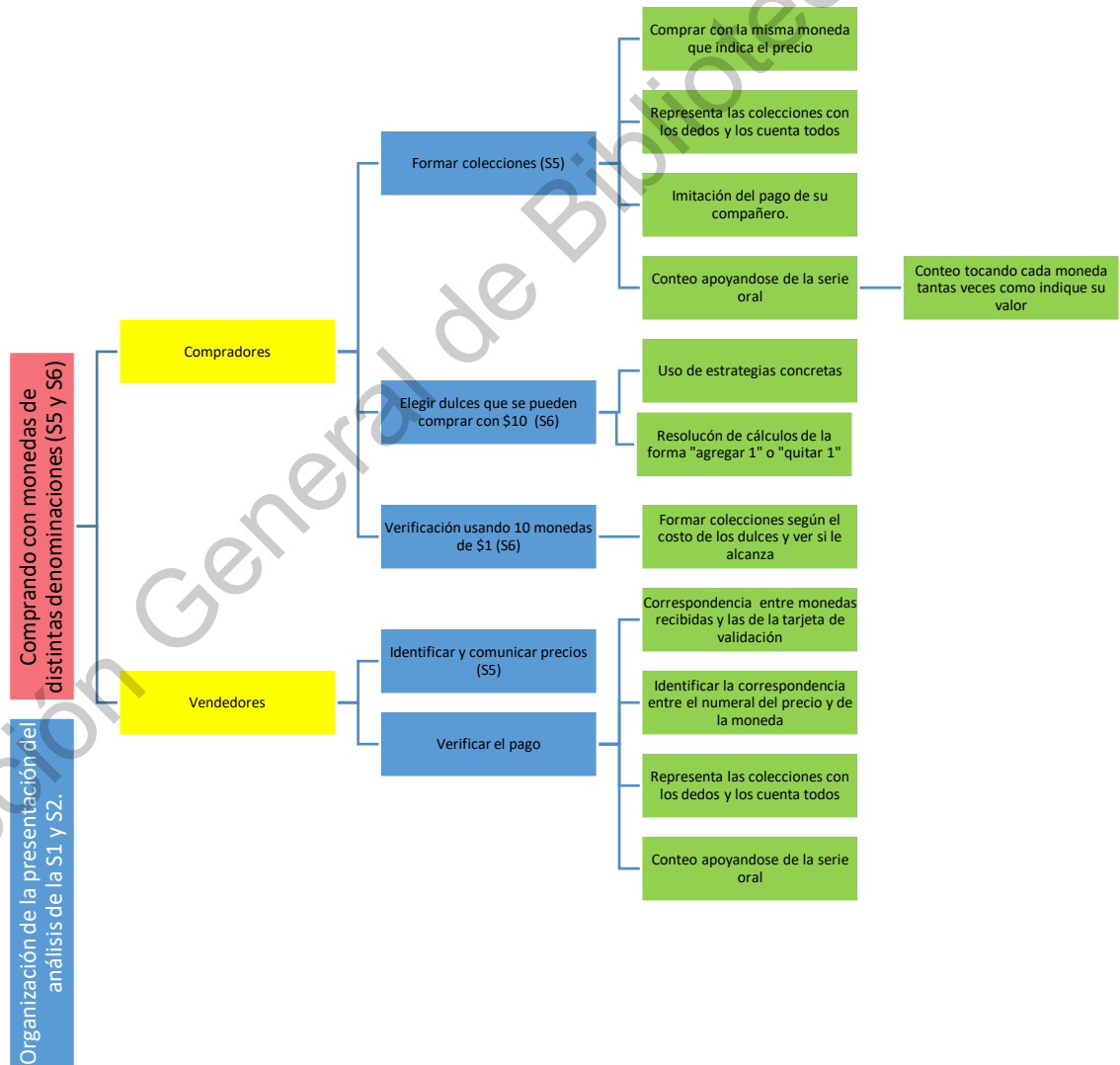


Figura 8 Organización de las Situaciones 5 y 6

Recordemos que en la Situación 5 los niños compraban un dulce con monedas de \$1, \$2 y \$5, y debían utilizar la equivalencia y el valor de las monedas para dar un pago exacto. El pago podían verificarlo mediante tarjetas que tenían todas las combinaciones posibles para formar los números del 2 al 10 con monedas de \$1, \$2 y \$5. Por ejemplo, si un niño quería comprar un dulce que costaba \$6, en las tarjetas podía encontrar las siguientes combinaciones: una moneda de \$5 y una de \$1, dos monedas de \$2 y dos de \$1 o tres monedas de \$2.

En la Situación 6 la maestra era la vendedora y los niños los compradores. Cada alumno tenía una moneda de \$10 con la que podrían comprar los dulces que quisieran siempre y cuando se terminaran los \$10. Antes de pasar a la tiendita debían dibujar los dulces que querían comprar y resolver el problema aditivo involucrado.

Para que los niños pudieran comprobar si habían gastado sus \$10 sin que les sobrara o faltara dinero, la vendedora les cambiaba la moneda de \$10 por monedas de \$1. Si tenían el pago correcto podían llevarse los dulces que dibujaron, de no ser así podían corregirlo apoyándose con las monedas de \$1, con la tira numérica o con la tarjeta de validación.

Como se mencionó, cada rol tenía tareas matemáticas a desempeñar para resolver el problema matemático.

Las tareas de los compradores fueron:

- A. Formar la colección correspondiente al precio utilizando monedas de distintos valores. (S5)
- B. Elegir dulces que se pueden comprar con \$10. (S6)
- C. Verificación usando 10 monedas de \$1. (S6)

Las tareas de los vendedores fueron:

- A. Identificar y comunicar el numeral representado en los precios. (S5)
- B. Verificar el pago.

Ahora se describirán los procedimientos que realizaron los compradores y los vendedores para resolver las tareas matemáticas a desempeñar.

4.2.1 Tareas de los compradores

A. Formar la colección correspondiente utilizando monedas de distintos valores.

A1. Entregar las monedas sin contarlas y sin importar su valor. Cuando Gael quiere comprar un dulce que cuesta \$6 saca cuatro monedas sin observar su valor y sin contarlas para poder comprar el dulce. Toma, aparentemente al azar, dos de \$2 y dos de \$5. Sin embargo, el niño espera la aprobación de la maestra para decidir si está bien o está mal el dinero que tomó. La maestra solo responde “dale seis pesos” por lo que el niño decide entregar las monedas que tomó al vendedor.

Me quedan dudas sobre las razones por las que Gael decidió tomar esas monedas y no otras; sin embargo, me queda claro que aún no diferencia los valores de las monedas ya que las toma sin ninguna distinción y no logra interpretar el número 6. Además de que aún no identifica los distintos valores de las monedas, parece que todavía no considera que el conteo puede ayudarlo a pagar, ya que no lo ha utilizado de manera autónoma para resolver los problemas de las situaciones anteriores. Me pregunto si a Gael le ayudaría trabajar en otras ocasiones y con más tiempo las situaciones donde se compran dulces con monedas de \$1, de manera que pueda seguir practicando el conteo antes de intentar comprender las relaciones de la equivalencia de las monedas; incluso sería prudente decir que para comprender la equivalencia es necesario que el niño tenga cierto dominio del conteo tal vez hasta el rango de 10.

A2. Asignar el valor de una unidad a todas las monedas. Al principio de la secuencia didáctica ocho alumnos asignaron el valor de una unidad a todas las monedas; contaron sus monedas sin percatarse del valor que tenía cada una de ellas. Sin embargo, 7 alumnos fueron modificando sus procedimientos conforme avanzaba la situación, con la intervención de la maestra y la ayuda de los compañeros. Es el caso de Emma, quien pasó de contar todas las monedas como unidad sin importar su valor, a comprar con la moneda cuyo valor coincidía con el que indicaba el precio; esto gracias a que logró diferenciar las monedas según el número que portaban.

Otro ejemplo de la evolución de este procedimiento fue Carlos, quien pasó de contar las monedas indiscriminadamente a representar el valor de cada moneda con sus dedos, para después contar todos los dedos que utilizó para representar las colecciones.

Un ejemplo más fue el caso de Salvador, un niño que quería comprar un dulce de \$6 y que entregó seis monedas sin importar su valor; incluso las contó sin ver las monedas que iba contando. Ernesto, quien actuaba como vendedor, verificó el pago interpretando el valor de cada moneda con ayuda de sus dedos y contándolos todos. Al percatarse de que Salvador le dio dinero de más, Ernesto comentó que debía haber entregado pesos, refiriéndose probablemente a monedas de \$1.

Salvador: /Cuenta las monedas dentro de su monedero sin poner atención en su valor/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis” /entrega las siguientes monedas a Ernesto: \$1, \$1, \$2, \$2, \$2, \$5 /

Ernesto: /Verifica el pago interpretando el valor de cada moneda con ayuda de sus dedos/ “me diste trece pesos”

Ma: “Le diste trece pesos, y ¿cuánto dinero querías pagar?”

Salvador: “Seis”

Ernesto: “Tenía que ser pesos”

A3. Imitación del pago de un compañero. Mónica, quien no había podido comprar en su primera oportunidad ya que contaba todas las monedas como si tuvieran el mismo valor, después observó a su compañero Ernesto comprando un dulce de \$4 y pagando con tres monedas (\$1, \$1, \$2). Cuando Mónica tuvo otra oportunidad para comprar quiso imitar a Ernesto eligiendo el mismo dulce que él y entregando la misma cantidad de monedas (tres). Sin embargo, no advirtió que el valor de las monedas con las que Ernesto había pagado eran de valores distintos, por lo que no le sirvió esta observación para poder comprar el dulce que quería, pero sí le ayudó a observar que no es necesario pagar con cuatro monedas un dulce que vale \$4. Vigotsky (2009) dice que “los niños, al imitar a sus mayores en actividades culturales aprendidas, crean oportunidades para el desarrollo intelectual. En principio sus juegos son una pura repetición y resumen de situaciones reales; sin embargo, a través de la dinámica de su imaginación y del reconocimiento de las leyes implícitas que gobiernan

dichas actividades que los niños reproducen en sus juegos, alcanzan un primer dominio del pensamiento abstracto”. (P. 194).

Esto me lleva a pensar que Mónica resolvió el problema planteado mediante la imitación, que en este caso fue una repetición de las acciones que había hecho su compañero. Al decidir imitar a un compañero Mónica tuvo que considerar a qué alumno imitar, observar qué dulce eligió y con qué monedas lo pagó, por lo que no fue decisión que tomara al azar, como se ejemplifica en la siguiente transcripción, donde Mónica estaba como espectadora durante la interacción entre Ernesto y Marlen:

Ernesto: “¿A cuánto cuestan los heladitos?” /cuestan \$4/

Marlen: “Cuatro”

Ernesto: /Toma una moneda de \$2/ “dos” /toma una de \$1/ “tres” /toma una moneda de \$1/ “cuatro” /entrega las monedas a Marlen/...

Marlen: /Toma las monedas, las observa/ “son tres pesos”

Ma: “¿Segura que son tres pesos?”

Ernesto: “Yo creo que sí, porque las conté”

Ma: “Puede pagarte como este” /entrega una tarjeta de validación de \$4 conformada por dos monedas de \$1 y una moneda de \$2 / “o como este” /entrega una tarjeta de \$4 conformada con dos monedas de \$2 / “fijate si te pagó como alguno de los dos”

Marlen: /Observa un tiempo breve ambas tarjetas y señala la tarjeta que tiene tres monedas dibujadas (dos monedas de \$1 y una moneda de \$2)/

Ma: “Como ese, dice que pagaste como este” /le dice a Ernesto/ “¿entonces sí pagó bien o no?”

Marlen: “Sí”

Ma: “Sí, sí pagaste bien”

Ernesto: /toma el helado que quería comprar/

Ma: “Te va Mónica”

Mónica: “¿A cuánto cuestan estos?” /señala otro dulce de \$4/

Marlen: “Cuatro”

Mónica: /Saca todas sus monedas del monedero y toma tres de \$2, se las da a Marlen/

Ma: /Le da las dos tarjetas de validación de cuatro a Marlen/

Marlen: /Observa las monedas que le dio Mónica y las tarjetas, niega con la cabeza/

Ma: “¿Se parece a uno?” (Se refiere a que si se parecen las monedas que entregó Mónica a las monedas dibujadas en alguna de las tarjetas de validación)

Marlen: /Niega con la cabeza/

Ahora me pregunto: ¿qué habrá pensado Mónica al observar que su imitación no tuvo el mismo efecto que con su compañero?, ¿se habrá preguntado las razones por las que no pudo comprar?, ¿qué habría pasado si la maestra le hubiera preguntado por qué había tenido efectos diferentes esta acción?, ¿esa observación habría ayudado a Mónica a poner atención en el valor de las monedas? Estas preguntas quedarán en incertidumbre ya que la maestra no le dio la importancia necesaria a este procedimiento y no indagó al respecto. Sin embargo, gracias a esta investigación he aprendido a valorar los procedimientos que llevan a cabo los alumnos y a preguntarme la razón por la que deciden hacerlo antes de hacer un juicio de valor; me ha llevado a ver sus errores como parte de un proceso de aprendizaje y como una oportunidad para mejorar.

A4. Identificar la correspondencia entre el numeral del precio y de la moneda.

Cinco de nueve alumnos utilizaron este procedimiento para comprar un dulce en la tiendita: entregaban una moneda de \$2 o de \$5 para comprar un dulce que tuviera el mismo numeral escrito en el precio (2 o 5). Sin embargo, no fue sencillo para los alumnos advertir este procedimiento.

En el caso de Marlen, una niña que desde su primera oportunidad quería comprar una paleta de \$5 y lo hizo pagando con cinco monedas sin importar su denominación, el niño vendedor le expresó que estaba mal el pago; posteriormente la maestra le comentó a Marlen que habría podido comprar pagando solo con la moneda de \$5. En su segunda oportunidad Marlen paga con una moneda de \$5 el dulce que cuesta \$5. Si bien este procedimiento pudo ser consecuencia de la intervención de la maestra, a Marlen le funcionó también para comprar un dulce de \$2 pagando con una moneda de \$2, lo que permite advertir que ha comprendido que si relaciona el numeral del precio del dulce con el de la moneda podrá comprar un dulce.

A continuación muestro la transcripción de las dos oportunidades que tuvo Marlen para comprar y cómo modificó su primer procedimiento.

Primera oportunidad

Marlen: “¿A cuánto cuestan las paletas?” /\$5/

Ernesto: “A cinco”

Marlen: /Cuenta cinco monedas sin importar el valor, al final se las entrega a Ernesto/

Ernesto: /Recibe las monedas y toma una moneda de \$2/ “dos” /toma otra moneda de \$2/ “tres, cuatro” /toma una moneda de \$1/ “cinco”

Ma: “Fíjate cómo cuenta” /le dice a Marlen/

Ernesto: /Toma otra moneda de \$2/ “seis, siete” /toma otra moneda de \$5/ “ocho, nueve”

Ma: “¿Te acuerdas cuando jugamos al cajero por cuántas monedas de peso cambiabas ésta?” /levanta una moneda de \$5/ “¿Por cuántas?”

Ernesto: “Por cinco”

Ma: “Por cinco, es como si aquí adentro hubiera cinco pesos, Marlen, solo con esta hubieras podido pagar” /enseña la moneda de \$5/ “entonces se te regresa el dinero”

Segunda oportunidad

Marlen: “¿A cuánto cuestan las paletas?” /\$5/ (La niña pide el mismo dulce que en la compra anterior)

Mónica: “Cinco”

Marlen: /Le da la moneda de \$5 que traía en la mano/

Mónica: /Toma la moneda/ “Sí”

Ma: “¿Sí? ¿Por qué está bien?”

Mónica: “Porque es una moneda de a cinco”

Tercera oportunidad

Marlen: /Señala un dulce de \$2 y le paga a Ernesto con una moneda de \$2/

Se observa que después de la primera oportunidad fallida de la compra de Marlen y como consecuencia de la intervención de la maestra, la alumna pudo comprar dos dulces en su siguiente oportunidad. También es claro que Mónica (vendedora) en la primera oportunidad no tiene la necesidad de verificar el pago, ya que acepta que con esa moneda de \$5 puede comprar un dulce de \$5. Durante su segunda oportunidad, Marlen ya no cree necesario

preguntar cuánto cuesta el dulce que quiere, pues sabe que pagando con la moneda de \$2 podrá comprar un dulce del mismo precio.

A5. Conteo

A5.1. Conteo con ayuda de los dedos para indicar el valor de cada moneda. Tres de nueve alumnos (Jorge, Ernesto y Carlos) utilizaron este procedimiento para formar la colección: indicaban el valor de la moneda con ayuda de sus dedos y al final los contaban para conocer el total. Jorge y Ernesto utilizaron este procedimiento desde su primera compra; estos niños ya habían utilizado un procedimiento similar en la Situación 3 y en la 4. En el caso de Carlos, su procedimiento inicial fue asignar el valor indiscriminado de unidad a todas las monedas; logró modificar ese procedimiento con ayuda de Jorge, quien le explicó cómo usar sus dedos para representar las colecciones.

En la siguiente figura se observa que Jorge señala con una mano la moneda que va a representar, y con la otra mano indica el valor de la moneda con sus dedos. Al final cuenta todos los dedos que levantó.



Figura 9 Jorge utilizando sus dedos para representar el valor de cada moneda.

Para Ernesto no fue un procedimiento sencillo de realizar, ya que cuando quiso comprar un dulce de \$9 pagó con las siguientes monedas: \$5, \$5, \$2, \$1, \$1 y no pudo comprar el dulce que quería.

Ernesto: “Cinco”/ enseña cinco dedos de su mano/“dos” /señala una moneda de \$2 /“cinco” / señala una moneda de \$5 pero ya no levanta los dedos, cuenta oralmente y señala las monedas de \$2, \$1, \$1 que no había contado/ “seis, siete, ocho, nueve, serían nueve”

Ernesto comenzaba a dominar este procedimiento, pero el valor de las monedas que entregó rebasaba sus diez dedos, lo cual dificultó que pudiera realizar esta operación; al parecer su procedimiento tenía una limitación, pues cuando tenía siete dedos levantados ya

no supo cómo representar los cinco dedos que representaban a la otra moneda de \$5, por lo que decidió ayudarse de la serie oral para hacerlo. Sin embargo, esto no fue suficiente para calcular el total de su dinero, pues omitió el valor de las monedas de \$1. Aunque Ernesto no logró comprar el dulce, puso de manifiesto conocimientos matemáticos necesarios para llevar a cabo este procedimiento, como el conteo, el sobre conteo y el conocimiento del valor convencional de las monedas.

Cabe decir que hubo alumnos como Emma y Salvador quienes, a pesar de que sus compañeros les explicaron cómo realizarlo, no pudieron llevar a cabo este procedimiento. Por ejemplo, Salvador intentaba contar de la misma manera como lo hacía Ernesto, quien le explicó su procedimiento. Cuando Salvador lo intentó hacer repitió oralmente el valor de las monedas, pero no lo representó con sus dedos, como se puede ver en el siguiente fragmento:

Ernesto: /Se acerca a Salvador y señala la moneda de \$2/ “esta es de dos, dos” /señala una moneda de \$1/ “tres” /señala una moneda de \$1/ “cuatro” /señala una moneda \$2/ “cinco, seis” /señala la moneda de \$5/” siete, ocho, nueve” /señala la moneda de \$2/ (pero no dice nada)

Ma: “¿Te fijaste cómo?”

Salvador: “Sí”

Ma: “A ver, cuéntalo tú”

Salvador: /Señala la moneda de \$2/ “dos” /señala la moneda de \$1/ “uno” / señala una moneda de \$1/ “uno” /señala una moneda de \$5 / “cinco” /señala una moneda de \$2/ “cuatro” / señala una moneda de \$5/ “cinco”

Ma: “A ver, ahora cuánto es”

Salvador: /No responde/

Parece ser que Salvador aún está en proceso de comprender la equivalencia de las monedas, identifica el numeral que trae la moneda pero aún no puede utilizar el valor convencional de las monedas. Lo que coincide con Kammi (2009) quién descubrió que, “para muchos niños pequeños, una moneda de diez centavos era algo diferente de 10 centavos, aunque podían decir con confianza que una moneda de diez centavos valía 10 centavos “(p. 97).

A5.2. Conteo ayudándose de la serie oral para representar el valor de cada moneda. Solo Ernesto utilizó este procedimiento: parecía apoyarse de la serie oral para conocer el total de su dinero. Considero que este procedimiento es complejo ya que es necesario que el niño haya adquirido el concepto de cardinalidad³, pues reconoce –por ejemplo– que el dos representa dos cosas y que después sigue el tres, por lo que ya no tiene necesidad de representar las colecciones con sus dedos o con otro apoyo; todo lo hace mentalmente y con ayuda de la serie.

Para hallar el cardinal de un conjunto los alumnos pueden proceder de distintas formas, como la subitización y el conteo; en este caso, Ernesto representa el cardinal de los números apoyándose de la serie oral. Incluso está seguro de que su procedimiento es correcto a pesar de que el vendedor le dijo lo contrario.

A5.3. Conteo tocando cada moneda tantas veces como indique su valor. Salvador utilizó este procedimiento para comprar un dulce, esto fue producto de la creatividad y conocimiento del niño, ya que ningún alumno realizó alguna acción similar ni tampoco fue sugerencia de la maestra. El niño “tocaba” las monedas las veces que fuera necesario para indicar el valor de la moneda y al mismo tiempo iba contando los “golpes” que daba a las monedas.

Salvador estaba en proceso de apropiarse de este procedimiento y en ese recorrido tuvo dificultades para ejecutarlo: cuando quería comprar un dulce de \$9 trató de pagarlo con cuatro monedas de \$2 y dos monedas de \$5. Después de contar las cuatro monedas de \$2 tocándolas dos veces cada una, llegó a la moneda de \$5 pero solo la contó hasta el dos; al parecer se dio cuenta que iba a rebasar los \$9 y quitó entonces una de las monedas de \$2.

La mayoría de los procedimientos descritos anteriormente se predijeron en el análisis a priori, excepto entregar las mismas monedas que su compañero anterior y contar tocando las monedas las veces necesarias para indicar su valor. No se esperaba que los alumnos trataran de imitar el pago de otro compañero para poder realizar su compra como una estrategia de

³ Un contexto cardinal es aquel en el que un número natural describe la cantidad de elementos de un conjunto bien definido de objetos discretos (aislados)” (Rico, Castro, & Castro, 1995, p. 3).

solución, aunque sí se esperaba que los alumnos aprendieran de sus compañeros, por lo que se podría considerar a la imitación como un proceso de resolución que tiene sus propias complejidades. Se pensó que los alumnos utilizarían alguna estrategia para representar su valor, pero no imaginamos que el niño tocaría las monedas las veces necesarias para indicar su valor,

Hubo otros procedimientos que no se observaron en estos alumnos pero que se consideraron en nuestro análisis a priori, debido a que los observamos durante secuencia donde se indagaron los saberes previos de los alumnos:

- Que se quiera hacer coincidir el número impreso en la moneda con los números de la serie oral que se nombran, como lo hizo una niña en el pilotaje: al solicitar un producto que tiene un costo de \$6 buscó entre las monedas y dijo: “Aquí está el uno (entrega la moneda de \$1), aquí está el dos (moneda de \$2), tres no tengo, cuatro tampoco, aquí está el cinco (moneda de \$5) y no hay seis.”
- Que se crea imposible la compra al no tener una moneda cuyo valor coincida con el precio de lo que se quiere comprar. Por ejemplo, en el pilotaje una alumna quiso comprar una paleta de \$7, buscó entre sus monedas una del mismo valor. Al no encontrarla prefirió no comprar ningún dulce.

Fue grato observar que durante la implementación definitiva ningún alumno manifestó ese procedimiento, lo cual parece mostrar que reconocen la posibilidad de comprar un producto con monedas de diferente valor, y que para calcular el total deben considerar el valor de todas y cada una de las monedas, aunque a veces no tuvieran los conocimientos necesarios para realizar este problema aditivo.

B) Elegir dulces que se pueden comprar con \$10 (S. 6)

Para elegir los dulces que podían comprar con una moneda de \$10, los niños requerían descomponer ese número y resolver un problema aditivo que implicaba sumar el precio de los dulces que querían comprar hasta que les diera los \$10 exactamente.

Al respecto, Duhalde & González (1996) proponen estrategias que los niños pueden usar para resolver problemas que impliquen acciones de agregar y quitar como el uso de

estrategias concretas, estrategias de conteo interiorizadas, sobre conteosobre conteosobre conteo, calcular mentalmente y los cálculos de la forma “agregar 1” o “quitar 1”.

En esta situación se observó el uso de estrategias concretas y de resolución de cálculos de la forma “agregar 1” o “quitar 1”.

B1. Uso de estrategias concretas

Cuando hablamos de estrategias concretas nos referimos, según Duhalde y González (1996) “ a la representación de colecciones con dedos u otro objetos físicos” (p.65). De este modo los niños pueden ir contando de uno en uno, hasta llegar a formar cada una de las colecciones que representan los sumandos, para después volver a contar empezando desde uno y obtener la suma.

Sin embargo, antes de que aparecieran el uso de estrategias concretas para resolver el problema, siete alumnos no resolvieron el problema aditivo planteado ya que elegían todos los dulces que querían sin importar su costo.

Estos alumnos pudieron percatarse de que habían pasado los \$10 hasta que verificaron usando las monedas de \$1 con las tarjetas de validación; esto fue gracias a la sugerencia de la maestra. Lograron hacer la compra usando las monedas de \$1 a través de ensayo y error: al verificar que se excedían en el monto dejaban los dulces que les gustaban menos y volvían a comprobar su pago; si aún no era correcto dejaban otro dulce, verificaban y así continuaba hasta obtener los \$10 exactos.

Un ejemplo de lo anterior es el siguiente: Carlos había elegido cinco dulces cuyos precios eran \$7, \$2, \$1, \$9 y \$5; no se percató que su elección había rebasado los \$10 hasta que acomodó sus monedas en las tarjetas de validación correspondientes a cada dulce y se dio cuenta que le faltaban muchas monedas para llenar todas las tarjetas. El niño decidió dejar los dulces más baratos – los que valían \$1 y \$2, que eran los que menos le gustaban– y volvió a hacer la verificación utilizando las tarjetas y las monedas de \$1. Tampoco le alcanzó para pagarlos, dejó entonces el dulce más barato (\$5) de los que le quedaban; repitió el proceso y se dio cuenta que el resultado era el mismo.

Lo que decidió entonces fue tomar la tarjeta de los dulces más caros (\$9 y \$7) y comenzar verificando con la tarjeta de nueve. Cuando puso una moneda de \$1 en la tarjeta de validación

de siete, se dio cuenta que solo le faltaba \$1 para completar los \$10, pero no sabe qué hacer con ese resultado. Esto se observa en la siguiente transcripción:

Carlos: /Cuenta las monedas dibujadas en la tarjeta de \$9 y luego cuenta una moneda de la tarjeta de \$7/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, ¡diez!, ¡con uno!, ¡con uno ya es diez! ¡Con uno ya es, ya los conté! y con uno es...”

Ma: “Entonces me dices ahorita, me encierras los que sí te vas a llevar “

La maestra esperaba que con su propio hallazgo Carlos hubiera podido cambiar el dulce de \$7 por un dulce que costara \$1, como lo había hecho Jorge; sin embargo, esto no fue evidente para él, por lo que decidió contar todas las monedas que había en las tarjetas de validación de los dulces que quería comprar y le pidió a la maestra las monedas que le faltaban, olvidando que solo tenía \$10 para comprar. Esto se observa en la siguiente transcripción:

Carlos: “Maestra me faltan estos”

Ma: “¿Cómo que te faltan estos?”

Carlos: “Mira me falta” (tiene las monedas sobrepuestas en las tarjetas de nueve y una moneda en la tarjeta de siete; cuenta los dibujos de monedas en la tarjeta de siete a los que no les puso moneda/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, tengo...” /cuenta todas las monedas dibujadas que tiene en ambas tarjetas de validación/”uno, dos... dieciséis”

El niño se queda en silencio, hasta que Jorge, quien estaba como espectador, le da la respuesta y él la acepta comprando lo que Jorge le dice.

Jorge: “¡Ándale! ¡Ya sé qué te compres! un “dese” y ya” /señala un dulce de \$1/ “y ya se los lleva, los dos igual que yo, porque yo también tenía diez y compre los dos”

Jorge se percató de que Carlos estaba en las mismas condiciones que él cuando quería comprar en la tiendita, por lo que le hace esa sugerencia. Y si bien Carlos aceptó su consejo comprando el dulce que Jorge le indicó y después verificó que esa elección era la correcta cuando sobre puso las diez monedas en las tarjetas de \$9 y \$1, no puedo afirmar que Carlos haya llegado a la misma conclusión a la que parece haber llegado Jorge: “compro un dulce de \$9, me sobra \$1 y puedo elegir un dulce que cuesta esa misma cantidad”.

Como puede advertirse en las descripciones anteriores, comprar con una moneda de \$10 hasta agotarla fue un proceso largo, de ensayos y errores que no parecen haberse concretado

en la construcción de la idea, por parte de los alumnos, de que la moneda de \$10 puede descomponerse en diez monedas de \$1 y que se vuelve a componer al ir sumando los precios de los diferentes dulces; es decir, la composición y descomposición del número 10. Los seis alumnos restantesiguieron procedimientos similares al de Carlos, y de igual manera Jorge intervino diciéndoles qué dulces podrían comprar con el sobrante.

Esas ayudas que Jorge dio a sus compañeros son relevantes porque reflejan los conocimientos que el niño tiene acerca del número; además, él mismo aprende al dar esas ayudas pues lo hacen resolver otros problemas y analizar cómo podría ayudarle a sus compañeros. Considero que estas ayudas impactan de una manera positiva en los niños menos expertos, ya que es su compañero y no la maestra quien brinda el apoyo. Jorge podría seguir resolviendo problemas que le permitieran avanzar en el conocimiento de agrupar y desagrupar cantidades.

Por otra parte, se observa también que hay un cambio en los alumnos en la manera de enfrentar la tarea: con sus acciones los alumnos ponen de manifiesto su comprensión de que una moneda de \$10 vale más que una o varias monedas de \$1, pues no sucedió que compraran solo un dulce al tener solo una moneda; al contrario, eligieron todos los que les gustaban más. Esto podría ser porque los niños comprenden que el número diez es “mucho” dinero y que les alcanza para “muchas” cosas, por lo que ya están tomando en cierta medida el valor de la moneda y no como una unidad física, como lo hacían en las primeras situaciones.

En el análisis a priori se pensó que los niños podrían elegir los dulces al azar, como lo hicieron en este caso; también se pensó que tomarían cualquier mercancía en relación al número de monedas: si tenía muchas monedas, tomarían muchos artículos, y si tenía pocas monedas, tomarían pocos artículos. En ese caso solo comprarían un dulce pues solo tienen una moneda, lo cual no sucedió.

B2. Resolución de cálculos de la forma “agregar 1” o “quitar 1”.

Dos alumnos (Jorge y Ernesto) lograron resolver el problema aditivo logrando agregar un peso y resolviéndolo mentalmente.

Primero eligieron el dulce de \$9. Jorge dibujó este dulce sabiendo que no se terminaban los \$10, pero no sabía cómo resolver el problema. Cuando la maestra le dijo que se acabara su dinero la primera respuesta del niño fue un “no”; sin embargo, después se percató que

cuando compra un dulce de \$9 le falta \$1 para llegar a \$10, como puede advertirse en la siguiente transcripción.

Jorge: “Listo, nueve, maestra ya puse nueve”

Ma: “¿Ya te acabaste los diez pesos?”

Jorge: “No”

Ma: “Acábate los diez pesos”

Jorge: “No es que no” /se queda pensando/ “¡Ah! Ya sé cómo hacerle, me compro un de ese” /señala un dulce de \$9/ “Cuesta a nueve, me sobra uno y entonces mira, ese también porque ese cuesta uno” /señala un dulce de \$1/.

El cálculo que hizo Jorge fue muy rápido; al parecer, lo hizo mentalmente apoyándose en su conocimiento de la serie numérica (después del 9 sigue el 10), lo que probablemente le permitió advertir que le sobraba \$1, y que con ese dinero podía comprar un dulce que costara esa misma cantidad.

En el caso de Ernesto, primero eligió dos dulces sin fijarse en el precio de cada uno, igual que el resto de sus compañeros. Sin embargo, a través de las intervenciones de la maestra, Ernesto logra advertir que se estaba excediendo de los \$10 que tenía para gastar.

Ma: “¿Cuánto es de esos dos dulces, Ernesto? De uno de nueve y otro de siete”

Salvador: “Diez, diez”

Ernesto: /Se queda pensando/ “quince”

Ma: “Entonces se pasa de diez”

Ernesto: “¡Ah! Me faltaba el uno” (se centra en el dulce de \$9 y deja el de \$7)

Ma: “¡Ah! Pues póngalo”

Ernesto: /Escribe el número uno/ “uno”

Ma: “¿Cómo sabes que nada más te falta el uno?”

Ernesto: “Porque después del nueve sigue el diez y es el uno”

Ernesto pudo resolver el problema de cuánto falta para tener diez, partiendo del nueve. No estoy segura de si estos dos niños podrían resolver este tipo de problemas con otro número que no fuera el diez; sin embargo, ponen de manifiesto saber que el 10 se compone con 9 más 1, probablemente han memorizado algunas otras combinaciones básicas.

González y Duhalde (1996) mencionan que los niños pueden resolver este tipo de problemas mentalmente de manera fácil, dependiendo de la familiarización que tengan con la serie numérica, ya que ante este problema con el dulce de \$9 bastaba con recordar que después del 9 seguía el 10, como lo hicieron ambos niños.

Además de los procedimientos que sí se presentaron y que ya fueron descritos en las líneas anteriores, se habían previsto otros procedimientos que no se observaron en esta ocasión:

- **Estimación:** observar los precios y seleccionar el dulce que se quiere comprar sin realizar ningún tipo de conteo. Por ejemplo, calcular que una moneda de 10 pesos alcanza para algo que “cuesta mucho”, como \$8.
- **Representaciones con los dedos.** Usar sus dedos para calcular el total a pagar; por ejemplo: para comprar un dulce que cuesta \$4 y otro que cuesta \$5, levantar cuatro dedos y luego cinco dedos representando la otra cantidad y al final contar todos los dedos levantados.
- **Sobre conteo:** Implica determinar el valor total a partir de la percepción global de uno de los precios, y luego continuar contando el valor del otro precio. Por ejemplo, un niño observa el precio de un dulce de cinco pesos y luego continua contando con sus dedos el precio de otro dulce que cuesta 4 pesos, y señalando cada dedo dice “seis, siete, ocho, nueve”.

Se esperaba que los alumnos hicieran algún tipo de cálculo antes de elegir los dulces que querían comprar, o bien, que utilizaran la representación gráfica como un apoyo para resolver el problema; esto ocurrió en los niños que dibujaron las monedas.

Registros. Ocho de nueve alumnos escribieron el precio del dulce como un recordatorio de lo que costaba, ya que el precio estaba colocado a la vista de los niños. Los niños no operaron con ese número, simplemente lo escribieron, aunque hubo tres alumnos que tuvieron dificultades para escribirlo (Marlen, Gael, Juan José).

Marlen tenía duda sobre cómo escribir el número tres. Le preguntó a la maestra y ella le mostró la tira numérica para que ubicara el número; sin embargo, tal vez esta ayuda limitó las posibilidades de Marlen para representar la cantidad de otra manera. Otra manera de intervenir de la maestra pudo haber sido “Hazlo como puedas”, de manera que la alumna utilizara sus propios recursos.

Marlen: “¿Cómo es el tres?”

Ma: “¿El tres? Es así, mira... ¡Ah! Pues ahí lo tienes” /le señala la tira numérica y cuenta del uno al tres/ “uno, dos, tres”

Marlen: /Lo escribe en su hoja/

Es la maestra quien le da la respuesta a Marlen: no solo le muestra la tira numérica, sino que incluso es la maestra quien cuenta utilizando la tira.

Únicamente Salvador logró descomponer el número diez en unidades, dibujando nueve círculos que representaban las monedas para pagar un dulce de \$9 y una moneda para representar el precio de \$1.

El procedimiento que siguió el niño fue elegir el dulce que más le gustaba y después representó ese precio con monedas; posteriormente Ernesto le ayudó diciéndole que le sobraba \$1 y entonces Salvador dibujó un dulce de \$1.

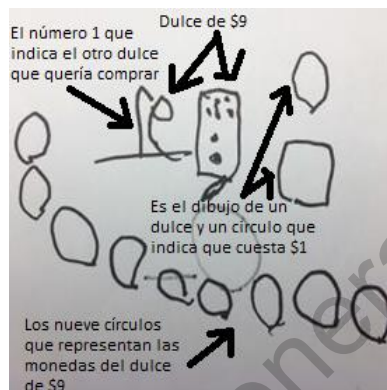


Figura 10 Representación gráfica de Salvador

Un aspecto que pudo haber influido para que la mayoría de los alumnos escribieran respuestas simbólicas, fue la indicación que daba la maestra a lo largo de la situación: “Ponle cuánto cuesta el dulce”, pero la consigna diseñada inicial fue “vas a dibujar las monedas con las que vas a pagar”. Probablemente ese cambio influyó en los alumnos para que escribieran los numerales que estaban en las cajas de cada dulce. La consigna “Ponle cuánto cuesta el dulce” podría ser una mejor opción, ya que no expresa cómo resolver la tarea; solo indica que deben poner el costo del dulce.

Al trabajar solo con una moneda de \$10, la S6 no fue adecuada para trabajar con la representación de cantidades, quizás se podrían observar representaciones distintas de cantidades usando únicamente monedas de \$1.

C. Verificación usando 10 monedas de \$1 (S6)

Aun cuando en la Situación 6 la vendedora era la maestra, se consideró que la verificación fuera hecha por los alumnos en su rol de compradores, y consistía en cambiar la moneda de \$10 por las diez monedas de \$1, para después sobre poner esas monedas en las tarjetas de validación correspondiente a los dulces elegidos, para ver si efectivamente lograban agotar las 10 monedas, sin que les faltara y sin que les sobrara ninguna.

Esto se llevó a cabo con el primer equipo que realizó la actividad: Emma, Jorge, Carlos, Juan José y Gael; sin embargo, la maestra se dio cuenta que entregar las tarjetas de validación desde el principio quitaba la posibilidad de que los niños formaran las colecciones correspondientes a los precios de cada dulce elegido, y que de esta manera pudieran resolver el problema utilizando sus dedos o dibujar las monedas en el papel. Debido a esto, con el segundo equipo (Marlen, Ernesto, Salvador y Mónica) modificó esta forma de verificar el pago, lo que trajo otro tipo de dificultades, como la de formar la colección.

Ahora se muestra las dificultades que implicó para Marlen este cambio en la verificación usando solo monedas de \$1:

Ma: “Te la voy a cambiar por diez pesos y me vas a poner los nueve de la flauta, los seis de...”

Marlen: “¿Cuánto son nueve?”

Ma: “Hasta aquí son nueve” /señala el nueve de la tira numérica/

Marlen: “¿Después del ocho?”

Ma: “Sí”

Considero que este cambio en la manera de verificar fue el correcto, ya que permite que los alumnos usen sus propios procedimientos para resolver el planteado, después de la intervención de la maestra, la niña pudo formar la colección con las nueve monedas de \$1 y se percató que no le alcanzaría para comprar el otro dulce de \$6 que quería, observó que le sobraba \$1 y eligió un dulce de ese precio. Sin embargo, creo que se debe estar atento al tipo de dificultades que presentan los alumnos para decidir cómo llevar a cabo la verificación, pues me pregunto si Gael, quien tenía dificultades para contar, hubiera podido resolver el

problema de esta manera sin apoyarse en las tarjetas de validación como se había previsto inicialmente.

4.2.2 Tareas de los vendedores

A. Interpretar y comunicar el numeral representado en los precios (\$5)

Siete alumnos interpretaron y comunicaron oralmente el numeral representado en los precios sin dificultades, ya que se trataba de números menores a diez, mismos que habían estado trabajando en clases previas a la implementación de la secuencia.

Los dos alumnos que continuaban teniendo problemas para interpretar y comunicar el precio del dulce eran Juan José y Gael. A continuación se describen los procedimientos que siguieron cuando fue su turno de ser vendedores y desconocían el numeral escrito en las tarjetas.

En el caso de Juan José se observa, en el siguiente fragmento, que no comunica oralmente el precio del dulce; él decide hacer una correspondencia entre la grafía de la tarjeta de validación y el precio del dulce que eligió el comprador. Es importante considerar que esta acción la llevó a cabo en situaciones anteriores, ya que cuando buscaba la tarjeta de validación que correspondiera al precio del dulce, podía contar las monedas de \$1 que estaban dibujadas en la tarjeta y esto le ayudaba a conocer el numeral. Sin embargo, en este caso este procedimiento no le fue de gran ayuda, ya que no eran únicamente las monedas de \$1 las que estaban dibujadas sino que había de varios valores, y para conocer el numeral escrito con estas tarjetas tendría que resolver la adición implicada con las monedas de distintos valores, lo cual es más complejo que identificar el numeral. Esto se muestra en la siguiente transcripción, donde Gael es el comprador y Juan José el vendedor:

Gael: “/Señala un dulce de \$5 y otro de \$6/”

Ma: “Solo uno, ¿cuál quieres?”

Gael: /Señala un dulce de \$6/

Juan José: /Busca en las tarjetas de validación la de seis/

Ma: “Juan José, te está hablando Gael” (Gael solo le señalaba los dulces que quería comprar)

Juan José: /Ve la tarjeta de seis/ “Una de a cinco y una de a peso”

Ma: “Pero no le digas, puedes agarrar ésta o puedes agarrar ésta” /le da la otra tarjeta de validación de \$6 con tres monedas de \$2 dibujadas /

Juan José: “Todo esto” /señala las monedas de las tarjetas de validación/

Ma: “Dale seis pesos, Gael”

Cuando Juan José encontró la tarjeta de validación correspondiente, expresó oralmente las monedas que observaba: “una de a cinco y una de a peso”. Identificó el valor de las monedas dibujadas y logró interpretar algunos numerales como el 5 y el 1, pero tuvo problemas para interpretar que esas monedas juntas daban la cantidad de 6. Por ello, la maestra le ayudó directamente diciéndole el precio del dulce al comprador. Considero pude haber intervenido de otra manera mostrándole la tira numérica como herramienta para identificar el numeral, para que fuera Juan José quien encontrara el número del que se trataba y no la maestra; o bien, pude haber esperado a que Gael reaccionara e interpretara lo que estaba comunicándole Juan José.

Esta acción de utilizar la tira numérica como apoyo para identificar el numeral la llevó a cabo Emma como compradora, para apoyar a Gael en su papel de vendedor. La niña preguntó el precio del dulce pero Gael no respondía, por lo que Emma decidió mostrarle la tira numérica, contar las casillas frente a él y, finalmente, expresarle oralmente el precio del dulce. En este fragmento los niños compradores (Emma y Juan José) estaban frente al vendedor (Gael) e interactuaban al mismo tiempo con él.

- Emma: “¿Cuánto cuestan los chocolates?” /\$6/
- Gael: /No responde/
- Juan José: “¿Cuánto cuestan estos?” /señala el mismo dulce que Emma/
- Gael: /No responde/
- Ma: “¿Cuánto valen?”
- Juan José: “¿Cuánto cuesta la ranita?”
- Gael: /No responde/
- Emma: /Toma la tira numérica y se la enseña a Gael/ cuenta aquí, Gael cuenta aquí /la niña cuenta las casillas de la tira partiendo del uno hasta el seis/ uno, dos... seis, cuestan a seis. ¿Verdad que cuestan a seis maestra?
- Ma: /Asiente con la cabeza/

Una vez más se observa la importancia de la ayuda entre compañeros; en este caso, Emma se encarga de mostrarle el procedimiento que podría utilizar Gael para conocer el numeral. Aunque en ese momento Gael no efectuó ninguna acción, considero importante este tipo de ayudas que se dan entre compañeros, ya que muestran al niño de manera puntual cómo podría resolver el problema, esperando que más adelante el niño pueda usar ese recurso de la tira numerada por iniciativa propia.

B. Verificar el pago del comprador. Inicialmente la maestra permitía a los vendedores verificar el pago del comprador utilizando sus propias estrategias; cuando observaba que tenían muchas dificultades para realizar el cálculo del valor del dinero les proporcionaba las tarjetas de validación. Es por ello que algunos alumnos recurrieron a otro tipo de procedimientos para verificar el pago. Es interesante observar que sus estrategias fueron muy similares a las que usaron para formar la colección cuando estuvieron en el rol de compradores.

Tabla 3 Procedimientos utilizados por los vendedores para verificar el pago en la Situación 5

Procedimiento	Alumnos
Correspondencia entre monedas recibidas y las de la tarjeta de validación.	Salvador, Marlen, Mónica, Ernesto, Emma, Juan José, Gael
Identificar la correspondencia entre el numeral del precio y de la moneda.	Mónica, Ernesto, Jorge, Juan José
Representa las colecciones con los dedos y los cuenta todos.	Jorge, Carlos
Conteo apoyándose de la serie oral.	Ernesto

Se puede observar que el total de la cantidad de alumnos rebasa el número de participantes de esta investigación (nueve), esto se debe a que varios alumnos utilizaron más de un procedimiento para verificar la compra.

B1. Correspondencia entre las monedas recibidas y las de la tarjeta de validación.

Ocho alumnos utilizaron la tarjeta de validación para verificar el pago de la compra. A pesar de que las tarjetas de validación indicaban la cantidad y el valor de las monedas con las que debían pagar, se observaron ciertas dificultades para utilizarlas, principalmente al inicio de la situación. Esto podría deberse a que no utilizaron únicamente una tarjeta para cada numeral, pues cada tarjeta tenía combinaciones de monedas con valores distintos con las que podían pagar. Por ejemplo:



Figura 11 Tarjeta de validación del número 4 con monedas de distintas denominaciones

Esa característica del material demandaba que el alumno decidiera cuál era la tarjeta pertinente para verificar el pago: no solo es verificar que el numeral de la tarjeta coincida con el precio del dulce, sino también decidir cuál es la tarjeta que coincide con el pago que se va a verificar. Para tomar esta decisión el alumno debía poner atención en el valor de las monedas, tanto de las dibujadas como de las reales. Un ejemplo de esto observa en el caso de Salvador cuando verifica un pago de \$9: le pagaron con 6 monedas distintas (\$2, \$5, \$1, \$5, \$1, \$2) lo que daba un total de \$16.

Ma: “Fíjate, ahorita te voy a enseñar las tarjetas de nueve, hay muchas maneras de pagar nueve, te puede pagar con estas monedas” /muestra una tarjeta de validación de nueve compuesta por una moneda de \$5, una de \$2 y dos monedas de \$1/ “con estas monedas” /muestra otra tarjeta de nueve compuesta por una moneda de \$5 y dos monedas de \$2/ “o con estas monedas” /muestra otra tarjeta de nueve compuesta por cuatro monedas de \$2 y una de \$1/ “¿Se parece a algo de lo que te dio?”

□ Salvador: /Toma la tarjeta que tiene cinco monedas dibujadas (cuatro monedas de \$2, y una de \$1)/ “con esta”

- Ma: “A ver, revisa si te las dio bien”
- Salvador: /Sobrepone la moneda de \$2 en la de \$2, pone la moneda de \$5 en el lugar de una de \$2/
- Ma: “Nada más que... ¿ésta es de cuánto?” /señala una moneda de \$2 en la tarjeta/
- Salvador: “De dos”
- Ma: “Entonces no puedes poner la de cinco pesos”
- Salvador: /Pone la moneda de \$1 en la moneda dibujada de \$1, toma otra moneda de \$5 y la quiere acomodar en la moneda de \$2/ “¿La puedo poner aquí?”/en el espacio de la moneda de \$2/
- Ma: “No, entonces esa moneda no te sirve”
- Salvador: “Entonces te quedarían dos”/le dice al comprador señalándole las monedas dibujadas que faltaron/

En esta transcripción se observa que las principales dificultades de Salvador están en que no lograba identificar el valor discreto de cada moneda, ya que quería poner monedas en lugares que no le correspondían. En este caso, las ayudas que brindó la maestra hacia Salvador fueron dadas de manera directa, expresándole oralmente los errores que cometía. Habría sido interesante cuestionar al alumno sobre las razones por las que insistió en poner una moneda de \$5 sobre una de \$2.

B2. Identificar la correspondencia entre el numeral del precio y de la moneda.

Cuando los niños compradores pagaban con monedas de \$2 o de \$5 dulces que tuvieran alguno de esos numerales, los niños vendedores interpretaban ese pago como válido de manera inmediata dado que se trataba del mismo numeral (2 o 5); por ejemplo, no esperaban a que se les entregara dos monedas de \$1 por un dulce que vale \$2, como sí sucedía en las Situaciones 1 y 2. Esto ocurrió con cuatro de nueve vendedores.

Un ejemplo de lo anterior es cuando Marlen quiere comprar una paleta de \$5 a Mónica.

- Marlen: /Le da la moneda de \$5 que traía en la mano/
- Mónica: /Toma la moneda/ “Sí”
- Ma: “¿Sí? ¿Por qué está bien?”

- Mónica: “Porque es una moneda de a cinco”
- Ma: “Ok entonces ¿sí se lo puede llevar?”
- Mónica: /Le da la paleta a Marlen/

B3. Representa las colecciones con los dedos y los cuenta todos. Dos alumnos (Jorge y Carlos) utilizaron sus dedos como apoyo para verificar el pago. Jorge utilizó este procedimiento desde la primera venta que realizó. El niño ha mostrado habilidad para contar desde la Situación 1; sin embargo, asignaba el valor indiscriminado de unidad a todas las monedas durante la Situación 3, por lo que se observa un avance considerable en el alumno, ya que ha logrado utilizar el valor convencional y la equivalencia de las monedas, además de resolver problemas realizando cálculos por medio del conteo.

Ahora mostraré un ejemplo de cuando Jorge verificó el pago de Carlos, quien quería comprar un dulce de \$5 y entregó cinco monedas de distintas denominaciones (\$2, \$2, \$2, \$1, \$1).

- Carlos: “Me das una paleta”
- Jorge: “Las paletas cuestan cinco”
- Carlos: /Cuenta cinco monedas sin importar el valor de cada una/
- Jorge: /Toma las monedas de Carlos, las acomoda en la mesa con el valor de la moneda hacia arriba y empieza a levantar sus dedos dependiendo de su valor /
- Jorge: /Señala una moneda de \$2 y levanta dos dedos/ “dos” /señala una moneda de \$1 y levanta un dedo, cuenta los dedos que tiene levantados/ “uno, dos, tres” / señala una moneda de \$1 y levanta cuatro dedos de la otra mano y baja los dedos que tenía levantados de su otra mano/ “cuatro” / señala una moneda de \$2/ se quedada pensando/
- Jorge: “Oye me diste mucho, éste está bien” /señala las otras monedas que había contado/ “pero este ya no” /señala la moneda de \$2/ “porque éste es de a dos y tenías que dar un peso. Ay Carlos, se equivocó, te lo regreso” /le regresa sus monedas a Carlos/

Cuando Jorge está contando el dinero que le dio Carlos llega hasta cuatro y se da cuenta que con otra moneda de \$2 pasa los \$5 que debía pagar, por lo que detiene el conteo y le explica al comprador que se equivocó, porque tendría que haber entregado una moneda de \$1 en lugar de la de \$2 para completar el pago.

B4. Conteo apoyándose en la serie oral. Ernesto fue el único alumno que utilizó este procedimiento: utilizó el conteo apoyándose en la serie oral para representar el valor convencional de las monedas. Sin embargo, este procedimiento no fue sencillo para el niño, ya que sigue considerando el valor discreto de la moneda y debido a esto transitó por ciertas dificultades: desde comenzar contando todas las monedas como si fueran de un peso y contar la moneda de \$5 como si fuera de \$2.

A continuación veremos un ejemplo de cómo superó estas dificultades y pudo verificar el pago de Salvador, quien quería comprar un dulce de \$6 y entregó las siguientes monedas: \$1, \$5, \$1, \$2, \$5, \$2.

- Salvador: /entrega seis monedas a Ernesto/
- Ernesto: /Toma una moneda de \$2/ “una, ¿las pongo aquí maestra?” /señala la tira numérica/
- Ma: “No, tú cuéntalas”
- Ernesto: /Cuenta todas las monedas como si fueran de un peso/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis”
- Ma: “¿Cuánto dinero te dio?”
- Ernesto: “Seis”
- Ma: “No, fíjate cómo lo contaste hace rato ¿cuánto dinero es?” (El niño había representado las colecciones del valor de cada moneda con sus dedos y contado todos sus dedos)
- Ernesto: “¿Las cuento otra vez?”
- Ma: “Sí”
- Ernesto: /Toma una monede \$1/ “una” /toma una moneda de \$5/ “dos”
- Ma: “¿Dos? ¿Cuánto vale ésta?” /señala la moneda de \$5/
- Ernesto: “Cinco”
- Ma: “Entonces, ¿cuánto llevas?”
- Ernesto: “Cinco” /toma la moneda de \$5/
- Salvador: “Yo digo que no se me va a acabar” (se refiere a que no le alcanzaría para pagar exacto con las monedas que entregó)

- Ernesto: /Toma la moneda de \$1/ “seis” /toma otra moneda de \$1/ “siete” /toma una moneda de \$2/ “ocho”
- Ma: “¿Ocho?”
- Ernesto: “Nueve”

Comentarios finales

Se puede observar en la descripción de los procedimientos de verificación que fue más complejo para los niños verificar el pago en esta Situación 5 que en las Situaciones 1 y 2 (donde compraban dulce con monedas de \$1), pues aunque a los vendedores no les correspondía formar la cantidad con las monedas de distintas denominaciones, hubo dos ocasiones donde el pago que dieron los alumnos compradores era correcto, pero cuando los vendedores querían verificar el pago contando las monedas como unidad, tomaban el pago como erróneo, por lo que recurrían a las tarjetas de validación. Incluso, utilizando las tarjetas hubo dos alumnos (Gael y Juan José) que no se habían percatado que las monedas dibujadas eran distintas, y comenzaban a sobreponer las monedas en la tarjeta sin importar su denominación; esta dificultad se superó en ese momento rápidamente gracias a la intervención de la maestra y de los alumnos del equipo.

Cuando los niños eran compradores tenían una tarea matemática que demandaba un mayor reto cognitivo, ya que debían formar la cantidad deseada considerando la equivalencia de las monedas. Ocho alumnos pudieron comprar en “La Tiendita” utilizando diversas estrategias, lo cual muestra que, teniendo cuidado con el diseño de la situación didáctica y con la intervención docente, los alumnos preescolares podrían resolver ciertos problemas relacionados con el uso de monedas de distintos valor.

Cabe aclarar que aun cuando estos niños sí lograron comprar en la tiendita, eso no implica que hayan “adquirido” el concepto de equivalencia, pues se trata de un concepto complejo que los alumnos continuarán construyendo durante su etapa escolar. Sin embargo, se puede afirmar que lograron avances en sus ideas matemáticas y económicas, mismas que se vieron reflejadas en la evolución de sus procedimientos.

Para evaluar la pertinencia de esta situación didáctica se mostrará la evolución de los procedimientos de los alumnos. Para dar un ejemplo de ello recurriremos al caso de Carlos: en su primera compra contó todas las monedas como unidad, pero en su segunda oportunidad

utilizó sus dedos como apoyo para indicar el valor de cada moneda, pagando así de manera exacta el dulce que quería comprar. Esto demuestra que Carlos logró avances en sus ideas respecto al dinero, pues manifestó conocer y utilizar el valor del dinero; además, logró avanzar en su conocimiento matemático, ya que pudo formar y contar colecciones apoyándose en sus dedos. Consideramos que este procedimiento puede ayudarle a resolver otro tipo de problemas matemáticos y en otras situaciones.

Enseguida se muestra una línea del tiempo que da cuenta de los avances más significativos de los procedimientos que realizaron tres alumnos (Carlos, Salvador y Mónica) cuando compraron con monedas de varias denominaciones. En esa línea puede observarse que Mónica utilizó tres procedimientos distintos, cada uno más complejo que el anterior.

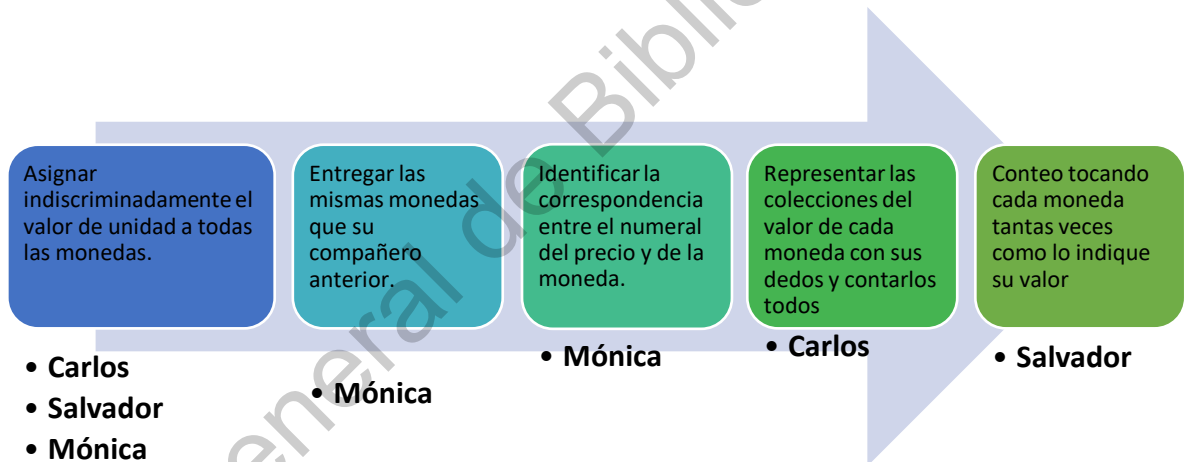


Figura 12 Línea del tiempo que muestra un avance significativo en los procedimientos usados comprando con monedas de distintas denominaciones.

4. 3 SITUACIÓN DIDÁCTICA “EL CAJERO”

Recordemos que la Situación 3 y 4 se refieren al juego, “El Cajero”, donde un niño tenía el rol de cajero y el resto eran participantes que, en su turno, tiraban un dado y el cajero les daba tantas monedas de \$1 como indicaba el dado. Durante la Situación 3 jugaban con monedas de \$10 y de \$1, mientras que en la Situación 4 con monedas de \$5 y de \$1. Cuando un participante juntaba 10 o 5 monedas de \$1 (dependiendo de la situación que se tratara) podía cambiarlas con el cajero por una moneda que fuera equivalente (\$10 o \$5). Ganaba el primer niño que juntara tres monedas de \$10 o de \$5.

En la siguiente figura se muestra cómo se organizó esta sección del análisis: primero se divide en los roles de los jugadores (cajero y participantes); de cada rol se muestran las tareas matemáticas que desempeñaron, y para cada tarea se describen los procedimientos que utilizaron los alumnos.

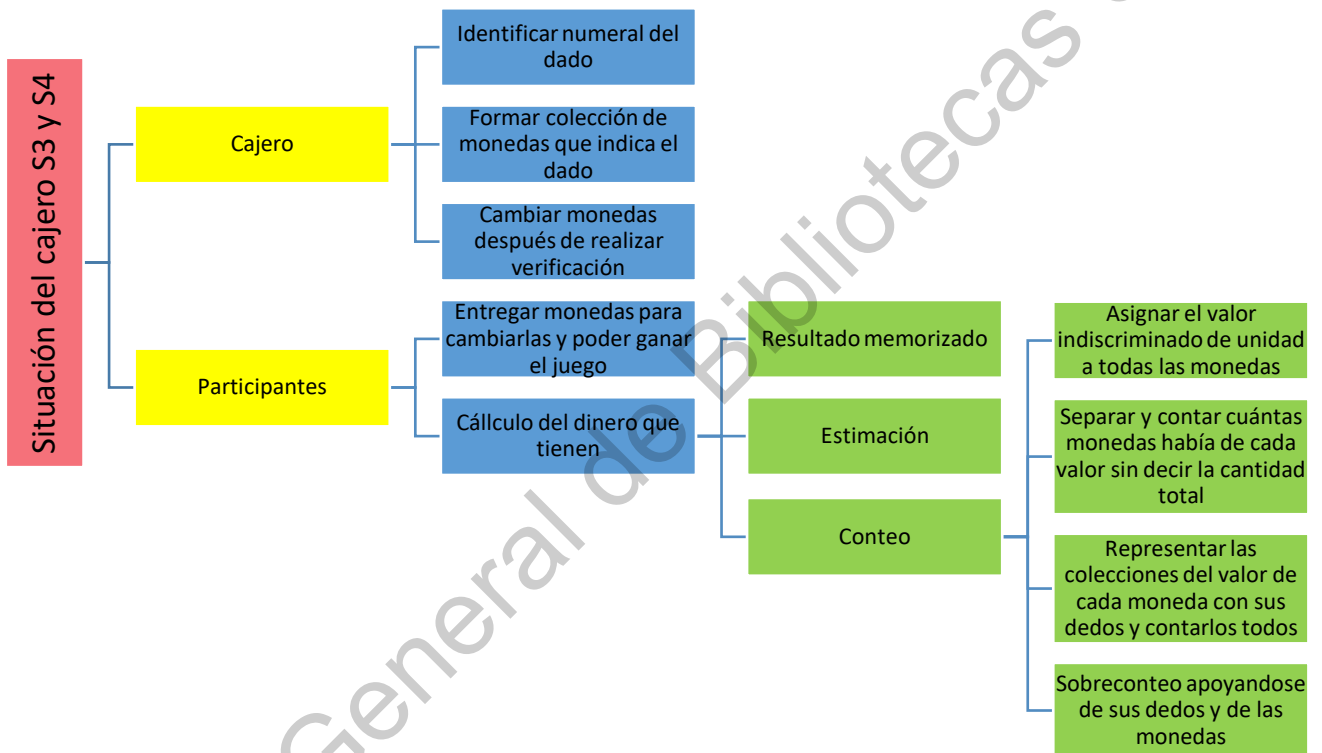


Figura 13 Organización de la Situación del cajero S3 y S4

Enseguida se presentan las tareas matemáticas que desarrollan los alumnos a lo largo de la situación. Como ya se mencionó, estas tareas se dividieron en dos partes para fines analíticos, según los roles que existen en el juego (cajero y participantes); sin embargo, algunas acciones eran realizadas por ambos aunque no les correspondiera. Por ejemplo, una

acción del cajero era identificar el numeral del dado que tiraba cada participante para poder entregar las monedas indicadas, pero había participantes que identificaban el numeral y lo expresaban oralmente, incluso antes de que el cajero se diera cuenta.

Las tareas del cajero fueron:

- A. Identificar el numeral del dado que tiraba cada participante
- B. Formar la colección de monedas indicadas por el dado y entregarla al participante
- C. Cambiar monedas después de realizar la verificación

Las tareas del participante fueron:

- A. Entregar monedas para cambiarlas y poder ganar el juego
- B. Cálculo del dinero que tenían

A continuación se describe cada una de las tareas mencionadas así como los procedimientos que utilizaron los alumnos para resolverlas.

4.3.1 Tareas del Cajero

A. Identificar el numeral del dado que tiraba cada participante. En la situación donde se jugó con monedas de \$10 solo dos alumnos fungieron el rol de cajeros en sus respectivos equipos, Marlen y Carlos. Cuando se jugó con monedas de \$5 cuatro alumnos fungieron el rol de cajeros: Jorge, Juan José, Mónica y Salvador en sus respectivos equipos (se jugaron dos rondas en cada equipo).

Se tenían previstas dificultades para identificar el numeral escrito en el dado; sin embargo, esto no ocurrió, pues se trató de números del uno al tres, con los cuales ya están muy familiarizados. Incluso, como una manera de apoyar a los cajeros, algunos participantes mencionaban oralmente el número que les caía en el dado.

B. Formar la colección de monedas que indica el dado. En el análisis a priori se anticipó que los cajeros podrían contar las monedas para entregarlas a los participantes cada vez que tiraran el dado, o bien subitizar la cantidad ya que se trataba de cantidades muy pequeñas; ambos procedimientos se observaron en todos los alumnos que fungieron el rol de cajeros durante el juego, dependiendo de la cantidad que indicara el dado.

Por ejemplo, si caía 1 en el dado ningún niño “contaba” una moneda, solo la tomaban y ya. Dos niños contaron las monedas cuando les cayó tres en el dado (Juan José y Gael), ellos tenían la necesidad de contarlas mientras que los jugadores restantes no lo hacían.

Juan José es un niño que presentó problemas para contar desde la primera situación. Por ejemplo, en la Situación 1 quería comprar un dulce de \$9 y en su primera oportunidad entregó algunas monedas al vendedor, mientras que en su segunda oportunidad para comprar el mismo dulce contó las monedas pero contó dos veces la misma moneda, por lo que entregó ocho monedas en lugar de nueve. Cuando jugó a El Cajero Juan José tuvo un error al principio del juego, ya que no identificó el numeral que salió en el dado (3) y entregó seis monedas; lo interesante es que contó las seis monedas sin mostrar dificultades, pero ahora solo debía entregar \$3. Cuando sus compañeros observaron esto, inmediatamente le hicieron saber que estaba equivocado:

- Gael: /Tira el dado y le cae tres/
- Jorge: “Tres” /emocionado/
- Jorge: /Tira el dado y le cae uno/
- Juan José: /Le da un peso a Jorge/
- Juan José: /Cuenta las monedas para dárselas a Gael/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis” /le da las monedas a Gael/
- Emma: “¿Seis?”
- Jorge: “Le cayó tres”
- Ma: “Le cayó tres hijo, solo son tres”
- Gael: /Le regresa las monedas a Juan José/
- Emma: “¡Ah! no es tan bueno para contar, ¿verdad?”
- Ma: “Sí, sí es bueno”
- Emma: “Le das dos y otra moneda”
- Juan José: /Cuenta las monedas/ “uno, dos, tres” /le da tres pesos a Gael/

En este ejemplo también se observa que Jorge tiró el dado antes de que Juan José entregara las monedas a Gael, y Juan José entregó primero la moneda a Jorge antes que a Gael, por lo que este error también pudiera atribuirse a que olvidó el número que le había salido a su compañero.

En esta transcripción se observa, además, cómo Emma hace una descomposición del número tres en dos más uno para ayudar a Juan José. Los comentarios de sus compañeros ayudaron a Juan José a modificar su error, quizás solo lo hizo porque sus compañeros se lo indicaron, contando únicamente las tres monedas que debía entregar; sin embargo, estas ayudas le sirvieron para mejorar sus acciones.

C. Cambiar monedas después de realizar la verificación. Los cajeros debían contar las monedas que les entregaban los participantes para asegurarse de que la cantidad de monedas era correcta. Juan José presentó dificultades al contar en dos ocasiones mientras verificaba si le habían entregado cinco monedas; en ambas ocasiones omitió una moneda al contar. Los alumnos se lo hicieron ver y le ayudaron a hacer esa tarea.

Emma: /Cuenta sus monedas/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, ten, cámbiamela por una de a cinco” /Le da las monedas a Juan José/

Juan José: /Toma las monedas y empieza a contarlas, omite una moneda al contar/ “una, dos, tres, cuatro”

Carlos: /Cuenta las monedas que Emma le dio a Juan José/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, sí son cinco”

Juan José: /Le da una moneda de cinco a Emma/

En las siguientes situaciones donde Juan José debía verificar las monedas que le entregaban los jugadores, no las contaba; cambiaba las monedas sin verificar que le hubieran entregado la cantidad correcta.

4.3.2 Tareas de los Participantes

A. Entregar monedas de \$1 al cajero para cambiarlas por una moneda de \$10 o de \$5. En el análisis a priori se había contemplado que los alumnos podrían olvidar canjear las monedas de \$1 por la moneda de \$10 o de \$5, ya que podrían centrar su atención en tener más monedas y omitir así cambiarlas en el banco. Sin embargo, no se consideró que los alumnos podrían tener otras dificultades, como olvidar que diez monedas de \$1 se cambiaban por una moneda de \$10, o que el alumno pensara que teniendo más de diez monedas de \$1

ya no podría cambiarlas, porque se pasaba de la cantidad pedida. Más adelante se explicarán con más detalle cada una de estas dificultades.

Sobre la dificultad que se tenía prevista de no cambiar las monedas de \$1 por querer reunir la mayor cantidad de monedas posibles sin importar su valor, resultó un gran reto para los participantes, ya que implicaba que dejaran de pensar en tener la mayor cantidad de monedas posibles y pensar en la equivalencia de las monedas. Esto se observó principalmente al inicio del juego, donde cuatro alumnos participantes querían reunir la mayor cantidad de monedas posible sin considerar su valor.

Cuando la maestra identificó estas dificultades intervino preguntándoles sobre la cantidad de monedas que tenían y sobre cuántas necesitaban para cambiar sus monedas de \$1; después consideró pertinente disminuir la cantidad de monedas de \$1 que tenía el cajero, de manera que si continuaban sin cambiar sus monedas de \$1, éstas se terminarían en el banco, por lo que los alumnos tendrían la necesidad de cambiar las monedas sin que la docente lo propusiera. Esta decisión ayudó a subsanar la dificultad; además, contribuyó la participación de algunos alumnos, quienes decían a los que no cambiaban sus monedas que lo hicieran o que las contaran, incluso les ayudaban a hacerlo.

Por ejemplo, en una situación donde Carlos era el cajero y Gael el participante, este último no tenía intención de cambiar sus monedas, hasta que Carlos le señaló que ya tenía muchas y que debería cambiarlas; enseguida sus compañeros le ayudaron.

- Carlos: “¡Vamos a contar los de Gael!”
- Jorge: /Cuenta las monedas de Gael/ “Uno, dos, tres... /sigue contando de uno en uno/dieciséis”
- Emma: “Sí, porque él tiene más”
- Ma: “dale diez a Carlos” /le dice a Gael que le dé diez monedas al cajero para que se las cambien por una moneda de \$10/
- Jorge: “Dale diez para que te dé una de diez”
- Gael: “¿Éstos?”/levanta una moneda de \$1/ /separa las monedas que tenía en su mesa/
- Emma:” A ver, deja le ayudo” /se levanta de su silla y se acerca a Gael/ “Ahí te encargo mi dinero” /toma las monedas de Gael y cuenta diez/ “uno, dos, tres... /sigue contando de uno en uno/diez. Ten” /le da las monedas a Carlos/ “dale una de a diez”

- Carlos: /Le da una moneda de \$10 a Gael/.

En este fragmento se observa que Gael, además de no tener intenciones de cambiar las monedas para ganar el juego, continúa teniendo problemas al contarlas; parece no interpretar la cantidad de diez cuando se le pide que dé diez monedas de \$1 al cajero, ya que solo levanta una moneda de \$1. Cabe resaltar la importancia de las intervenciones de los compañeros para propiciar que otro comprenda algún aspecto específico; estas intervenciones fueron constantes en varios momentos de la situación. En este caso Emma contribuyó en la comprensión del conteo en Gael, pues se percató de las dificultades de este alumno para contar y decidió ayudarlo contándole sus monedas y entregándoselas al cajero para cambiarlas.

Chamorro (2005) enfatiza las interacciones que tienen los alumnos con sus pares, ya que muchos son capaces de aprender observando la conducta de otros, por lo que el trabajo o juego en grupo debe usarse siempre que se pueda por su potencial para generar conflictos que enfrentan puntos de vista opuestos. En este ejemplo en particular, Gael no resuelve el conflicto cognitivo y no expresa su punto de vista respecto a lo que hace su compañera, pero observa cómo, a través del conteo, Emma resuelve el problema de entregar la cantidad exacta de monedas al cajero, por lo que se espera que Gael continúe practicando el conteo y las estrategias que puede utilizar para ejecutarlo convencionalmente.

Otra dificultad que no se tenía prevista en el análisis a priori, es que los alumnos olvidaran la regla de diez monedas de \$1 se cambia por una moneda de \$10, aspecto que es fundamental para poder jugar. Este puede ser un obstáculo epistemológico, ya que para los alumnos esta equivalencia numérica no es un concepto transparente y fácil de comprender. Sin embargo, en este caso esa equivalencia se utilizó como una regla normativa que debía recordar si querían ganar el juego.

Esto se observó al inicio de la situación cuando la maestra les preguntó cuántas monedas tenían que juntar para poder cambiarlas, a lo que Juan José respondió que cuatro monedas.

- Ma: “¿Alguien ya puede cambiar por la moneda de diez?”
- Niños: “Sí”
- Ma: “¿Cuántas monedas necesitas?”
- Juan José: “Cuatro”

- Ma: “¿Cuántas monedas necesitas para que Carlos te dé esta?” /levanta una moneda de \$10/
- Emma: “Las que tengo yo ¿no?” /muestra sus ocho monedas de \$1/
- Jorge: /Ríe/
- Ma: A ver, “¿Cuánto vale ésta?” /muestra la moneda de \$10/
- Emma: “De a diez, le tienes que dar diez pesos”

La dificultad inicial que los alumnos manifestaron respecto al cambio de diez monedas de \$1 por una moneda de \$10, fue disminuyendo en el transcurso del juego.

Otra de las dificultades que tampoco se tenía prevista en el análisis a priori, es que un alumno se viera imposibilitado a cambiar sus monedas si tenía más de diez monedas de \$1; es decir, no aceptaba que le sobraran monedas de \$1. Considero que esto puede ocurrir porque no ha comprendido que en once monedas hay diez incluidas, y que el hecho de que sobren monedas le ayudará a juntar las otras que necesitaba para ganar. Según Gelman y Gallistel (p.153, citada en Chamorro, 2005) el número enunciado en último lugar no representa únicamente al elemento correspondiente, sino también al total de la colección.

A continuación se muestra un ejemplo de la conversación que se tuvo entre Ernesto, Salvador y la maestra, donde Ernesto no acepta la posibilidad de cambiar sus monedas porque le sobraría una, y Salvador no sabe qué hacer con las monedas que le sobran. El cajero en esta ocasión es Marlen, ella no aparece en esta conversación ya que los otros dos niños están discutiendo entre ellos si pueden o no cambiar sus monedas.

- Ma: “¿Tienes diez monedas para cambiarla por una de diez?”/le pregunta a Ernesto/
- Ernesto: “Mmm” /niega con la cabeza/
- Salvador: “¿Cambio esto?” /toma diez monedas de \$1 en su mano/
- Ma: “Sí, cámbiaselo” (Se refiere a cambiar estas monedas con Marlen)
- Salvador: “¿Y esto?” /señala las monedas que le sobran/
- Ma: “Guárdalos porque lo vas a seguir usando”
- Ernesto: “Maestra, no tengo diez”
- Ma: “¿Cuántas tienes?”
- Ernesto: “mira” /cuenta sus monedas señalándolas/ “una, dos.../sigue contando de uno en uno/ once, tengo once”

- Salvador: /Le da diez monedas a Marlen/
- Ma: Dale una de diez /le dice a Marlen/
- Marlen: /Le da una moneda de diez a Salvador/
- Ma: “Oye, Ernesto tiene once, ¿puede cambiar por una de a diez?” (Pregunta a todos los niños)
- Salvador: “No”
- Ernesto: /Niega con la cabeza/
- Ma: ¿No?, ¿por qué no?
- Salvador: “Porque yo ya tengo tres y luego Ernesto tiene once, yo tengo tres” (no se entiende lo que Salvador quería explicar, al parecer solo hizo una comparación entre las monedas que tenía él y las que tenía Ernesto).

Una vez superadas estas dificultades, y gracias a la ayuda de los compañeros de equipo y a las intervenciones de la maestra, se observó a cuatro alumnos (Jorge, Ernesto, Emma y Carlos) anticipar la cantidad de monedas que les faltaba para reunir diez monedas de \$1 y poder cambiarlas por una moneda de \$10. En el análisis a priori no se había previsto que los alumnos resolvieran este tipo de problemas; sin embargo, se manifestó la necesidad de esos niños por descubrir cuántas monedas necesitaban para poder cambiar las monedas de \$1 por la de \$10.

Es el caso de Jorge, quien tenía ocho monedas de \$1, anticipa que le faltan dos para reunir las diez monedas.

- Jorge: /Cuenta sus ocho monedas de \$1/ “uno, dos, tres... /sigue contando de uno en uno/ocho, ocho. ¡Híjole! Nada más me faltan dos”
- Ma: “¡Nada más te faltan dos!”
- Jorge: “Me tiene que tocar una de dos.” (Se refiere a que debe salirle el número 2 en el dado)

Jorge estaba muy emocionado con el juego y quería ganarlo; para ello, puso en marcha sus conocimientos sobre el número para resolver el problema aditivo. Según Fuson, citado en Chamorro (2005), la construcción por parte de los niños de relaciones de complejidad creciente entre la serie numérica, el conteo y las significaciones cardinales de los nombres de los números, requiere coordinaciones, y éstas van a permitir resolver situaciones de adición

y sustracción. Jorge pudo coordinar estas relaciones para resolver el problema aditivo, logrando anticipar las monedas que le faltan.

Según Chamorro (2005), la única manera de que el niño encuentre sentido a la noción de número, y lo utilice funcionalmente, es partiendo de situaciones que den lugar a comparaciones y transformaciones de colecciones discretas. En esta situación el alumno está comparando la cantidad de monedas que tiene con la cantidad de monedas que debe juntar, para conocer la cantidad de monedas que aún le falta.

B) Cálculo del dinero que tienen

A lo largo de este análisis se han mostrado algunos conocimientos que tenían los alumnos sobre la equivalencia de las monedas, a continuación se muestran los procedimientos que siguieron los alumnos ante la pregunta formulada por la maestra de “¿cuánto dinero tienes?” Esta pregunta fue planteada con el objetivo de identificar las ideas y procedimientos que aplicaban los niños al usar la equivalencia de las monedas, sin esperar que calcularan convencionalmente el dinero que tenían. La pregunta se formuló en varios momentos durante el juego, una vez que todos los alumnos del equipo tuvieran al menos una moneda de \$10 o de \$5, o bien que tuvieran muchas monedas de \$1.

En el análisis a priori se esperaba que los alumnos utilizaran los siguientes procedimientos para calcular la cantidad de dinero que tenían:

- Asignar el valor indiscriminado de unidad a todas las monedas.
- Resultado memorizado: recuperar directamente de la memoria la solución. Por ejemplo, en la exploración de conocimientos previos una niña dijo “diez y diez son veinte”, al tiempo que observaba sus dos monedas de \$10.
- Sobre conteo apoyándose de sus dedos y de las monedas: implica determinar el valor total a partir de la percepción global de una de las monedas, y luego continuar contando. Por ejemplo: Un niño mirando la moneda de \$10 dice “diez”, y luego señalando cada una de sus dos monedas de \$1 dice “once, doce”.

Los alumnos realizaron los tres procedimientos descritos anteriormente. Todos asignaron el valor indiscriminado de unidad a todas las monedas, al menos una vez durante estas situaciones. Cuatro alumnos (Ernesto, Emma, Carlos, Jorge) recurrieron al resultado

memorizado cuando trabajaron con monedas de \$5 y tres alumnos (Mónica, Ernesto y Carlos) hicieron sobre conteo apoyándose de sus dedos y de las monedas.

También se observaron otros procedimientos, los cuales no se tenían contemplados en el análisis a priori:

- Separar y contar cuántas monedas había de cada valor sin decir la cantidad total.
- Representar las colecciones del valor de cada moneda con sus dedos y contar todos sus dedos.
- Aproximación.

B1. Resultado Memorizado. Al contrario de la Situación 3, donde ningún niño utilizó el resultado memorizado como estrategia para calcular el total del dinero que tenían, ahora lo utilizaron cuatro alumnos (Ernesto, Emma, Carlos, Jorge).

Por ejemplo, Carlos tenía dos monedas de \$5 y la maestra le preguntó cuánto dinero tenía. Esta fue su respuesta:

- Carlos: “Cinco más cinco son diez”
- Ma: “Son diez, ¡Wow! ¿Cómo sabes eso?”
- Carlos: “Ya me la sé”

Estas respuestas podrían resultar familiares para los alumnos ya que normalmente utilizan sus dedos para contar y llegan rápidamente a saber que si juntas los dedos de ambas manos tendrán diez dedos.

Otro tipo cálculos memorizados es el de dos más dos, que utilizó Emma cuando su compañero mencionó que tenía dos monedas; ella inmediatamente comentó que dos más dos eran cuatro, aunque en este caso el cálculo memorizado no tuvo ninguna utilidad para la compra específica que estaban haciendo.

B2. Estimación. Este procedimiento fue utilizado por tres alumnos (Carlos, Jorge, Juan José y Gael) al intentar calcular el monto total de su dinero. Es el caso de Jorge, quien ganó el juego al juntar las tres monedas de \$5 antes que sus compañeros y trató de obtener el total de su dinero.

- Ma: “¿Ya tienes tres?” (Las tres monedas de \$5)
- Jorge: “Tres de cinco otra vez” (hace referencia al juego anterior donde también había ganado)

- Ma: “¿En cuánto nos quedamos?, ¿cuánto dinero tienes ahí?”
- Carlos: “Tres, tres cinco”
- Emma: “Dos y una” (se refiere a dos monedas de \$5 y una de \$1)
- Jorge: “Veinticinco”

A diferencia de las otras ocasiones en las que Jorge calculaba ayudándose de sus dedos para representar las cantidades, en este caso dice una cantidad que tiene como característica que se trata de un número grande y que termina en cinco, por lo que se puede inferir que el alumno sabe que al juntar tres monedas de \$5 debe ser un número grande y que debería terminar en cinco. Es solo una inferencia ya que la maestra no indagó con el niño la justificación de esta respuesta.

B3. Conteo

En esta sección se incluyen cuatro procedimientos donde se observó que los alumnos utilizan el conteo de distintas maneras: contando las monedas asignando a todas el valor indiscriminado de unidad; separando y contando cuántas monedas había de cada valor sin decir la cantidad total; representando las colecciones del valor de cada moneda con sus dedos y contándolos todos; y el sobre conteo apoyándose en sus dedos y en las monedas.

B3.1. Asignar el valor indiscriminado de unidad a todas las monedas. Cuando utilizaron monedas de \$10 se observó que todos los alumnos contaron al menos una vez todas sus monedas como si fueran de \$1, esto se modificó cuando usaron monedas de \$5, ya que solo tres alumnos (Gael, Emma, Salvador) continuaron contando sus monedas como unidad, por lo que se observó un avance en los procedimientos usados.

Ahora se mostrará el caso de Emma, una niña que ha mostrado habilidad para contar e incluso anticipar cuántas monedas de \$1 le faltan para llegar a \$5; sin embargo, cuando se le pide calcular cuánto dinero tiene, cuenta todas las monedas como si fueran de \$1. Esto se observa en el siguiente ejemplo: tenía dos monedas de \$5 y tres monedas de \$1, cuando se le pide calcular el total responde “cinco” contando todas sus monedas como si valieran lo mismo.

- Ma: “¿Y tú como contarías entonces tú dinero?”
- Emma: “Con los dedos”
- Ma: “A ver, cuéntalo”

- Emma. /Cuenta sus monedas como si fueran de un peso/ “uno, dos, tres cuatro, cinco”
- Jorge: “¡Ah! ya cámbiala por otra”
- Emma: “¡No!, por eso”

A pesar de contar todas las monedas iguales, cuando Jorge le propone a Emma cambiar sus monedas por una moneda de \$5, ella no acepta este intercambio, por lo que posiblemente comprende que no valen lo mismo esas monedas, pero no sabe cómo calcular el valor total de las mismas.

En el siguiente ejemplo se muestra que, a pesar de que Salvador contó todas las monedas como si fueran de \$1, se advierte cierta noción sobre equivalencia. Salvador había ganado el juego por juntar primero las tres monedas de \$5, cuando le maestra le preguntó cuánto dinero tenía, él respondió considerando el valor de las monedas (“cinco, cinco y cinco”) pero al momento de calcular el total dice que son tres, lo cual coincide con las monedas que tenía en su mesa.

- Ma: “¿Cuántas monedas tienes, Salvador?”
- Salvador: “Tres”
- Ma: “¿Cuánto dinero tienes?”
- Ernesto: “Cinco y cinco son...”
- Salvador: “Cinco, cinco y cinco”
- Ernesto: “Cinco y cinco son diez, y esos cinco, diez y diez”
- Salvador: “Cinco y cinco serían tres”
- Ernesto: “Cinco y cinco son diez”
- Salvador: “Sí”

Estas dificultades para calcular el valor total del dinero podrían deberse al rango numérico que rebasa los diez primeros números, ya que se observa que Ernesto se apoya en la suma memorizada de cinco y cinco son diez, pero no sabe qué resulta al agregar cinco más; tal vez por eso dice después “diez y diez”. Para resolver este problema tendrían que usar el sobre conteo a partir de diez para agregar los otros cinco. Este conflicto sobre el número que sigue después del 10, es interesante, pues da la posibilidad de que los alumnos adviertan que después de ese siguen más números, por el momento los alumnos responden con los recursos

que tienen, pero esto abre la posibilidad de que se planteen preguntas respecto a que sigue en la serie numérica.

B3.2. Separar y contar cuántas monedas hay de cada valor sin decir la cantidad total. Siete de nueve alumnos (Juan José, Salvador, Emma, Marlen, Mónica, Carlos, Jorge) utilizaron este procedimiento para nombrar la cantidad de dinero que tenían en ese momento. Con estas respuestas los niños ponen de manifiesto su conocimiento respecto a que esas monedas son diferentes de acuerdo al número que cada una de ellas porta como etiqueta.

Al respecto, el Libro de la Educadora, Educación preescolar (SEP, 2018) dice que “los niños diferencian las monedas por su tamaño y fundamentalmente por el signo numérico (número) que traen, el cual los niños interpretan como un código porque les permite diferenciarlos e inferir su uso...” (p. 82). Posiblemente los niños están diferenciando las monedas ayudándose de esa interpretación que hacen del número como si fuese un código, y esta diferenciación les ayuda a resolver la tarea matemática solicitada. Sin embargo, el libro ya citado señala que “no es suficiente que los niños diferencien las monedas solamente con el número que cada una tiene. Es necesario, además, que reconozcan el valor nominativo de las monedas; es decir, su equivalencia con un peso; <esta moneda (\$5) es de cinco pesos porque se puede cambiar por cinco monedas de \$1.>” (p. 82). Aun con la afirmación anterior, considero que diferenciar las monedas por el número que portan es un buen avance para los niños, pues como se ha observado en las dificultades que presentaron los niños a lo largo de esta investigación, comprender las relaciones de la equivalencia no es una tarea sencilla. Un ejemplo de ello es Salvador, un alumno que comienza contando todas sus monedas como si fueran de \$1, pero después separa las cantidades dependiendo del valor de cada una.

Ma: “¿Cuánto dinero tienes?”

Salvador: (Tiene tres monedas de \$1 y dos de \$10) /cuenta todas sus monedas/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco”

Ma: “¿Tienes cinco pesos?”

Salvador: /Asiente con la cabeza/

Ma: “¿Te las cambio por las moneditas de ahí?” /señala las monedas de \$1 del banco/

Salvador: “¿Las de diez?”

- Ma: “Tú dices que son cinco pesos, te las cambio por estas” /señala las monedas de \$1/ “¿Si?”
- Salvador: /Se queda pensando/
- Ma: “¿Entonces cuánto dinero tienes?”
- Salvador: “Aquí tengo tres” /señala tres monedas de \$1/ “y acá dos” /señala dos monedas de \$10/

Este niño no acepta cambiar sus monedas de \$10 por monedas de \$1 como le sugiere la maestra, ya que comprende que son diferentes y que no valen lo mismo; sin embargo, le es complicado calcular el total de su dinero considerando ese valor, por lo que decide separar las cantidades para nombrarlas. De esa manera sigue considerando que son monedas con distintos valores, pero no tiene que operar con esas cantidades.

Esto demuestra la complejidad que tiene el resolver este tipo de problemas para los niños preescolares, ya que primero deben comprender la equivalencia de las monedas con las que están trabajando (en este caso, que diez monedas de \$1 es igual a una de \$10), para después proceder a resolver el problema aditivo de cuánto dinero tienen en total, donde el rango numérico sobrepasa los diez primeros números, por lo que deben hacer uso de otros procedimientos de cálculo como el sobre conteo, ya que el conteo de las monedas físicas no es suficiente para resolverlo.

La finalidad de la maestra al formular la pregunta “¿entonces cuánto dinero tienes?” era observar cómo estaban comprendiendo la equivalencia; por ello, el cálculo que hicieron no fue el punto focal, sino identificar si los alumnos hacían tangibles las diferencias de las monedas de \$1 y \$10 al nombrarlas y contarlas por separado. Esto último permite afirmar que se ha logrado abonar elementos a la construcción paulatina de este concepto tan complejo como lo es la equivalencia.

B3.3. Representar las colecciones del valor de cada moneda con sus dedos y contándolos todos. Cuatro alumnos (Jorge, Emma, Ernesto, Carlos) lograron calcular el valor total de su dinero representando el valor de cada moneda utilizando sus dedos y contándolos todos al final. Cuando se trataba de cantidades mayores a diez, un alumno (Jorge), tratando de ayudar a calcular cuánto dinero tenía Emma, solicitó ayuda a sus

compañeros pidiéndoles que levantarán los dedos de sus manos, para que él pudiera contar todos sus dedos y obtener el total del dinero representado.

- Ma: “Tienes diez en una moneda y diez en otra moneda” /señala cada moneda de \$10/ “¿Entonces cuánto es?”
- Emma: “Es que no sé, no me las sé”
- Jorge: “¡Ah! yo ya sé cómo hacerle más perrón, uno va a poner dos manos juntas” /muestra sus dos manos con los dedos estirados/ “y yo las voy a poner para contarlas”
- Emma: /Levanta sus dos manos abiertas/
- Ma: “A ver, vamos a ver”
- Jorge: /Levanta sus manos, empieza a contar cada uno de sus dedos señalándolos y continua la numeración señalando los dedos de Emma/ “uno, dos, tres... veinte, tienes veinte”
- Ma: ¡Wow!
- Emma: Tengo veinte.

B3.4. Sobre conteo apoyándose de sus dedos y de las monedas. Este procedimiento lo llevaron a cabo tres alumnos ((Mónica, Ernesto y Carlos); en este caso utilizaron los dedos como apoyo para representar el valor de cada moneda, pero cuando se trataba de cantidades mayores a diez recurrían al sobre conteo como estrategia para contarlos, es decir, partían de un número conocido como el diez y continuaban contando hasta terminar las monedas contadas.

Por ejemplo, cuando Ernesto quería contar el total de su dinero (tenía una moneda de \$10 y seis de \$1) puso los diez dedos de su mano para indicar la moneda de \$10, partió de diez (sin haber contado cada uno de sus dedos) y continuó el conteo de sus monedas de \$1 diciendo once, doce, trece, catorce, quince y dieciséis.

4.4 Conocimiento sobre el Sistema de Numeración Decimal

Gracias a que se trabajó con números mayores a diez se expresaron algunas hipótesis que tienen los niños sobre la secuencia oral en números grandes. A continuación presento un fragmento de la discusión que surgió entre Ernesto y Salvador mientras resolvían el problema de cómo nombrar a la cantidad que tenían (dos monedas de \$10 y tres de \$1).

- Ma: “¿Entonces cuánto dinero tienes?”
- Salvador: “Aquí tengo tres” /señala tres monedas de a peso/ “y acá dos” /señala dos monedas de a diez/
- Ma: “¿Y cuánto es ahí?” /señala una moneda de diez pesos de Salvador/
- Ernesto: “Diez y diez”
- Ma: “¿Cuánto será?”
- Ernesto: “A ver, hay que pensar, tú Salvador, ya no sé”
- Mónica: “Ni yo tampoco”
- Ma: “¿No? ¿Ya no sabes cuánto es?”
- Salvador: “Yo ya sé, diecidiez”
- Ma: “¿Cuánto?”
- Salvador: “Diecidiez”
- Ma: “¿Y cuánto es diecidiez?”
- Salvador: “Es un diez y otro diez”
- Ernesto: “Yo digo diecinueve”
- Ma: “¿Diecinueve?”
- Ernesto: “O trece, o catorce, o quince, dieciséis, dieciocho, diecinueve, veintiuno ¿Tenemos veintiuno? Sepa”
- Salvador: “Son cinco, mira si las junto aquí con estos serán cinco”/tiene separadas sus tres monedas de \$1 y dos monedas de \$10/ “aquí son dos” /levanta dos dedos de su mano/ “y si se junta con estas tres serian cinco” /levanta tres dedos/

Es interesante observar las hipótesis que tienen los niños sobre cómo nombrar cantidades de números que desconocen. El hecho de que Salvador nombrara “diecidiez” a una cantidad compuesta por dos monedas de \$10, pone de manifiesto su conocimiento sobre la serie numérica oral y el Sistema de Numeración Decimal. Al respecto, Quaranta (2008)) explica que los errores que comenten los niños muestran que el aprendizaje no es solo un proceso de imitación, sino de atribución de significados. Ella compara el aprendizaje de la serie numérica oral con el aprendizaje de verbos irregulares: “así como nadie les enseñó a estos niños a decir poní en lugar de puse, tampoco se les enseñó a decir veintidiez en lugar de treinta ni diecicinco o dieciquince. En lugar de quince...” Por lo que estos errores manifiestan

el análisis que los niños realizan ante el nombre de los números mayores que desconocen. Por su parte Vigotsky (2009) también subraya la importancia de la imitación en los procesos de aprendizaje, pues afirma que cuando los niños imitan a los mayores en actividades culturales aprendidas, están creando oportunidades para el desarrollo intelectual.

Este tipo de reflexiones por parte de los alumnos no se tenían previstos en el análisis a priori, sin embargo, pudiera parecer predecible que los niños generen hipótesis al trabajar con números mayores.

En esta situación de El Cajero se esperaba abonar elementos para que los alumnos se aproximaran a la comprensión del agrupamiento del Sistema de Numeración Decimal, ya que se trataba de formar colecciones de diez en diez; sin embargo, la situación no promovió en los alumnos la necesidad de hacer agrupamientos como estrategia de solución. Queda pendiente diseñar situaciones o hacer modificaciones al juego implementado con la finalidad de que el agrupamiento sea una estrategia de conteo.

CAPITULO 5

ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN

INTERVENCIÓN DOCENTE

González y Weinstein (2010) afirman que el proceso de enseñanza y aprendizaje se lleva a cabo por medio de una interacción equilibrada entre el docente, el alumno y el saber, ubicados dentro de un contexto (medio, institución, aula). El responsable de organizar este medio en el aula es el docente, quien tiene un rol activo, para proponer situaciones que sean significativas para los alumnos.

Block, Ramírez, y Reséndiz (2015) comentan que una parte importante para el proceso de enseñanza y aprendizajes son las interacciones entre pares y con el docente y, en particular, las ayudas. Estos autores definen a las ayudas como un tipo de interacciones mediante las que se apoya o se hacen accesibles las tareas que tienen lugar durante las clases de matemáticas; además, identifican algunas características de las ayudas que da la maestra a los alumnos y las ayudas que se dan entre los mismos alumnos. En este capítulo nos enfocaremos a las ayudas de la maestra hacia los alumnos.

Las ayudas que se dan entre la maestra y los alumnos son diferentes. Block, Ramírez, y Reséndiz (2015) hacen una primera distinción entre dos grandes clases de ayudas: las indirectas, que se expresan mediante preguntas o a través de pistas que permiten a los alumnos continuar la búsqueda, y las directas, entre las que se identifican las que resuelven al menos una parte de la tarea, frecuentemente la más importante, y otras que se convierten en momentos de enseñanza de un procedimiento.

El análisis está organizado de la siguiente manera:

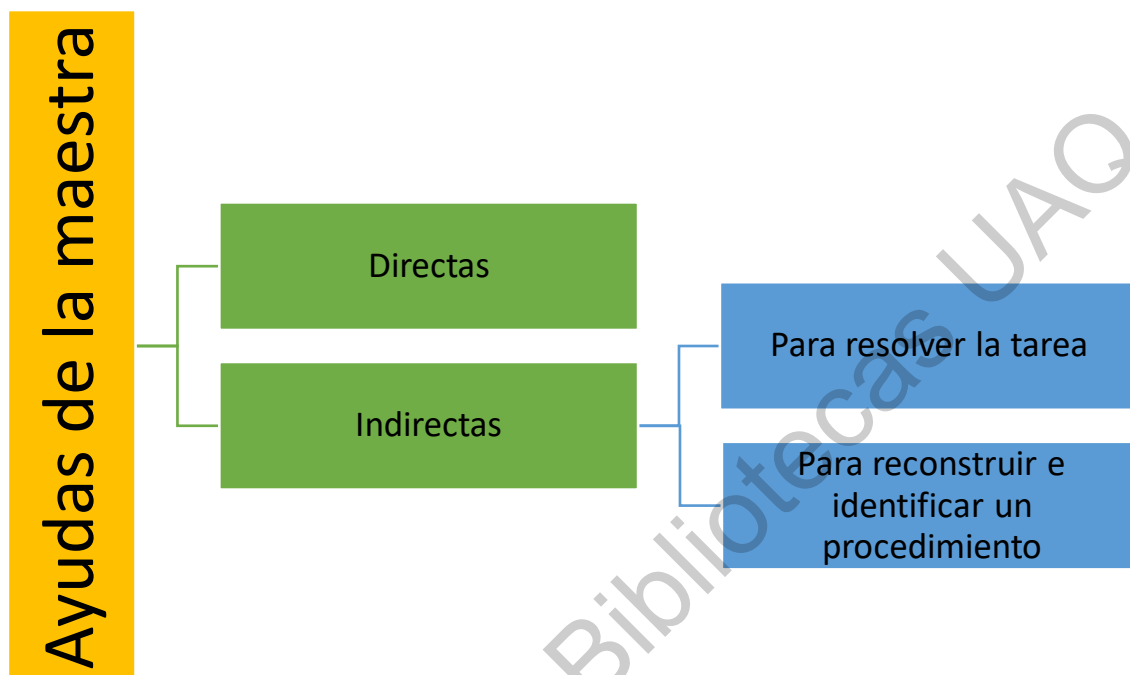


Figura 14 Organización del análisis de las intervenciones docentes.

Como se mencionó en el capítulo de metodología, las situaciones didácticas fueron implementadas por grupos pequeños de 4 y 5 niños. Esta organización contribuyó a que las intervenciones de la maestra fueran individualizadas, y que ella estuviera disponible en todo momento para responder a las inquietudes y dificultades que presentaban los alumnos. Esto pudo haber ocasionado que los alumnos modificaran su comportamiento o procedimientos esperando la aprobación de la maestra. Un ejemplo de esto, es el caso de Gael, siendo comprador tenía que pagar \$8 a Juan José que era el vendedor. Gael toma las monedas con las que va a pagar, se las muestra a la maestra y espera su aprobación.

Juan José: “Son ocho Gael”

Gael: /Saca monedas y las pone en su mano, se las enseña a la maestra/ “¿Así?”

Ma: /No responde/

Gael; /Toma otra moneda y se la enseña a la maestra/

Ma: “Dale los ocho pesos, Gael”

Gael: /Le da las monedas a Juan José/

En este caso, la maestra intentó no responder de manera directa a las preguntas de Gael, esperando que el niño utilizara otro procedimiento para resolver el problema. Sin embargo, cuando la maestra expresó “Dale los ocho pesos, Gael”, el niño atendió a la primera palabra (“dale”), por lo que entregó las monedas sin pensarlo. Aquí se puede ver una limitante en la intervención de la maestra, pues esta disponibilidad pudo haber originado que el alumno limitara su búsqueda hacía nuevas maneras de resolución.

5.1 Ayudas directas

Aun cuando se trata de ayudas donde la docente interviene de manera directa dando la respuesta a alguna duda o error de los alumnos, se observaron casos donde las ayudas contribuían a la enseñanza de procedimientos individualizados trabajados en la secuencia didáctica como el conteo, o bien ayudaban a utilizar un recurso didáctico (como la tira numérica) cuando no lograban identificar un numeral. La maestra recurría a este tipo de ayudas cuando consideraba que el alumno mostraba muchas dificultades para resolver el problema, o bien cuando el tiempo dedicado al alumno era demasiado, ya que el resto de los niños perdían el interés y comenzaban a distraerse jugando entre ellos.

Ahora se muestra un ejemplo donde la intervención individualizada se convierte en la enseñanza de un procedimiento, en este caso, para encontrar un numeral desconocido por el alumno. Como ejemplo está la interacción de la maestra con Emma, quien en su papel de vendedora desconoce el número nueve, y la maestra le ayuda directamente dándole una tira numérica y explicitándole cómo usarla.

Juan José: “¿A cuánto cuestan estos?” /toma un dulce de \$9/

Emma: “A siete”

Ma: “A ver fíjate ahí cuánto es. ¿Qué número es?”

Emma: /Observa el precio del dulce de \$9 y levanta los hombros como diciendo no sé/

Ma: “¿No sabes qué número es?”

Emma: “No”

Ma: /Se acerca la maestra a la mesa y ve el precio de \$9, toma una tira numérica y la pone en la mesa/

Emma: “Quiere un telefonito” /señala el precio de \$9/

Ma: “Aquí, ¿dónde está ese número?” /señala la tira numérica/

Emma: “Aquí” /señala la casilla nueve de la tira numérica/

Ma: “Cuenta de aquí para acá” /señala el uno y el nueve de la tira numérica/

Emma: /Cuenta cada casilla de la tira numérica desde del uno hasta el nueve, señalando cada numeral/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve”

Ma: “¿Entonces cuánto cuesta?”

Emma: “A nueve” /le dice a Juan José/

En este caso la maestra interviene directamente explicitando el procedimiento que le ayudará a resolver su duda utilizando la tira numérica. Este tipo de ayuda también puede ser valiosa en el sentido de que la maestra mostró un uso para un recurso didáctico (la tira numérica) esperando que la niña en situaciones posteriores pueda utilizarla de manera autónoma, cuando se enfrente a problemas similares.

Otro ejemplo de ayudas directas –con un impacto distinto al caso anterior– fue en la situación donde los alumnos tenían que comprar los dulces que se le alcanzaran con \$10. En este caso Carlos eligió muchos dulces, sin pensar en el precio de cada uno, lo cual sobrepasaba los \$10. Ante este error la maestra decidió cambiarle la moneda de \$10 por monedas de \$1 y darle las tarjetas de validación de cada dulce para que el niño pudiera verificar su pago. La maestra fue quien eligió las tarjetas de validación que necesitaban y fue quien tomó las monedas con las que podría verificar el pago. De esta manera ella intervino dándole los recursos que considera necesarios para que el niño resolviera el problema, pero no lo cuestionó sobre cómo podría resolverse el problema, ni esperó a que el alumno pusiera en marcha sus propias estrategias para que él mismo se percatara de las consecuencias de tales estrategias.

Ma: “Ahora fíjate: tú quieres unos churros \$7, un dulce de \$2, un dulce \$1, una flauta \$9 y dulce \$5; te voy a dar las tarjetas, este cuesta uno” /señala el dulce de \$1/ ¿éste cuánto cuesta? /señala un dulce de \$7/

Carlos: “¿Este?” /señala el mismo dulce que la maestra/ “a siete”

Ma: “Siete” /está buscando la tarjeta de validación de siete/ “a siete, te las voy a traer a tu lugar” /pone las tarjetas de validación en la mesa donde estaba sentado el niño/ “me falta la de dos” /le da la tarjeta de validación de \$2/ “fíjate si con los diez pesos que te di, te alcanza para comprarlos”

Carlos: /Se sienta en la silla y empieza a sobreponer las monedas de un peso en las tarjetas/

Jorge: “¿Todos esos te compraste?”

Carlos: “Sí”

Jorge: “¡Wow! Sí se te va a acabar, a ver si se te acaba” /cuenta las monedas dibujadas en todas las tarjetas que tiene Carlos en la mesa/ “uno, dos... dieciocho”

Carlos: /Cuenta las monedas dibujadas en cada una de las tarjetas/ uno, dos... veintiuno, me faltó veintiuno. Esto no iba a comprar, era esto al último” /señala los dulces de \$1 y \$2/

Ma: “Si te quito éste de un peso y éste de dos” /retira las tarjetas de validación de estos precios y los dulces correspondientes/ “¿Aquí ya son diez pesos?” /Señala las tarjetas de validación de siete y de nueve/...

Después de esto la compra se volvió un ensayo y error; la maestra fue quitando las tarjetas de validación de los dulces que el niño decidió dejar. Considero que pudo haber indagado la razón por la que el niño decidió dejar los dos dulces más baratos, y por qué dejarlos le ayudaría a resolver el problema antes de intervenir para verificar con las monedas y las tarjetas. También pudo haber favorecido al desarrollo de la Situación 6, en general, reducir el número de oportunidades que tenían los niños para comprar, evitando así que la verificación se limitara a quitar tarjetas y contar las monedas para ver si ya eran las diez.

Ese tipo de intervención obstaculizó la búsqueda de procedimientos por parte de los niños para resolver el problema, ya que 7/9 resolvieron el problema a través del ensayo y error, de manera similar a lo que hizo Carlos en el ejemplo descrito anteriormente.

5.2 Ayudas indirectas

La maestra también intervenía de manera indirecta con los alumnos, esperando que lograran resolver el problema y así contribuir a su aprendizaje. Las ayudas que proporcionaba tenían en general dos propósitos: para resolver una tarea y para reconstruir un procedimiento.

a) Para resolver una tarea.

La maestra planteaba preguntas que ayudaran a los alumnos a resolver la tarea. En el siguiente ejemplo Emma quería comprar un dulce de \$9, pero se percató que sólo tenía

seis monedas de \$1, por lo que no le alcanzaba para comprarlo. Ante esta dificultad, la maestra decidió plantearle un nuevo problema: si tienes \$6, ¿cuántas monedas de \$1 necesitas para comprar un dulce de \$9? Ante este nuevo reto la niña comenzó dudando sobre cómo resolverlo; la maestra preguntó cuánto dinero le faltaba en reiteradas ocasiones. Esto se puede observar en el siguiente fragmento:

Emma: (Elige un dulce de \$9) /Saca seis monedas de su monedero, las tiene en su mano y va contando las monedas señalando cada una/ “¡Nada más tengo seis!, ¡nada más tengo seis! /le enseña las monedas a la maestra/

Ma: “¿Cuánto te falta?”

Emma: /Levanta una mano, como diciendo no sé/

Ma: “Dime cuánto te falta y te lo presto”

Emma: /Cuenta las monedas que tiene en su mano/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco” /continúa contando con los dedos/ “seis, siete, ocho, nueve, diez” /muestra los cinco dedos de su mano a la maestra/ “o no sé”

Ma: “A ver dime cuánto ¿Cuánto te falta? ya lo habías sacado”

Emma: “Tengo uno, dos, tres, cuatro, cinco” /cuenta sus monedas pasándolas de una mano a otra/ “cinco tengo cinco”

Ma: “¿Y cuánto te falta?”

Emma: “No sé”

Ma. “Es que si no, no te lo puedo prestar si no me dices cuánto, como le hiciste hace ratito. ¿Cómo le hiciste?”

Emma: /Cuenta las monedas que tiene en su mano/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco” /continúa contando con los dedos/ “seis, siete, ocho, nueve, diez” /muestra los cinco dedos de su mano a la maestra/ “cinco me faltan cinco”

En este ejemplo, la niña hizo un conteo apoyándose en las monedas y en sus dedos, pero dudó si eso le ayudaría a encontrar la respuesta al problema. En dos ocasiones la maestra hizo comentarios como “ya lo habías sacado” o “¿cómo le hiciste hace rato?”; estas frases pudieron hacerle ver a Emma que sí podía resolver el problema.

Otro ejemplo de este tipo de ayuda se da en el juego del cajero con monedas de \$10. La maestra preguntó a Emma cuánto dinero tenía en algún momento del juego (tenía dos

monedas de \$10). Carlos y Jorge ayudan a Emma a resolver el problema proponiendo un procedimiento para llegar a la respuesta. La maestra interviene explicitando las monedas que Emma tiene usando palabras diferentes, lo cual ayuda a Jorge a comprender el problema y a encontrar un procedimiento para resolverlo.

Carlos: “Mira tiene cinco” /pone cinco dedos/ estos son dos de diez” / Pone otros cinco dedos en su otra mano/ “son diez”

Ma: “Pero ella tiene dos monedas de a diez”

Jorge: /Pone los diez de sus manos y los cuenta/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. Son diez”

Ma: “Pero ella tiene dos monedas de a diez, ¿Entonces cuánto dinero tiene?”

Emma: “Dos pesos”

Ma: “¿Tienes dos pesos?”

Emma: “No”

Juan José: “Mira” /empieza a contar todas sus monedas/ “uno, dos, tres, cuatro, cinco, siete maestra”

Emma: “Diez”

Ma: “Tienes diez en una moneda y diez en otra moneda” /señala cada moneda/ “¿Entonces cuánto es?”

Emma: “Es que no sé, no me las sé”

Jorge: “¡Ah! yo ya sé cómo hacerle más perrón, uno va a poner dos manos juntas” /muestra sus manos con los dedos estirados/ “y yo las voy a poner para contarlas.”

b) Para identificar un procedimiento.

Este tipo de ayudas se acompañaron de algunas preguntas a los alumnos acerca de cómo resolvieron la tarea y de las dificultades que habían tenido para resolverla; generalmente se hacía al final de la situación y de manera individual. Por ejemplo, al cierre de la Situación 2 la maestra intenta que los niños expliciten las razones por las que sólo pudieron comprar un dulce y no dos. Esperaba que los niños pudieran expresar en qué se equivocaron para que de esta manera aprendieran de ese error. También hace hincapié en que los niños logren identificar el procedimiento idóneo para comprar los

dulces: el conteo. (Aunque, como sabemos, no es suficiente mencionar el procedimiento para que los niños logren aprenderlo).

Ma: “¿Cuántos dulces alcanzaste a comprar?” /le dice a Emma/

Emma: “Dos”

Ma: “Carlos, ¿tú cuántos dulces compraste?”

Carlos: “Uno”

Ma: “¿Por qué tú compraste uno?”

Emma: “Porque tenía dos oportunidades y perdió uno porque le sobro un peso”

Ma: “Le sobró. Carlos, ¿qué tendríamos que hacer para ganar?”

Emma: “Si le faltara un peso me lo daría y yo lo pondría”

Jorge: “Yo nomás para que no me faltara los contaba”

Ma: “Los contabas”

Emma: “Yo también”

Emma menciona otro procedimiento con el que podría comprar, si le faltará dinero el niño podría completar el pago para poder comprar el dulce. A pesar de que esto ocurre en las transacciones comerciales de compra- venta en la vida real, este procedimiento no se tomó como válido en esta secuencia didáctica. La maestra no profundizó en este procedimiento, ni expresó una opinión al respecto, pues Jorge intervino diciendo el procedimiento que la maestra esperaba escuchar.

Considero que la maestra logró que Jorge identificara el procedimiento que utilizó durante la situación, pero no propició una comparación de procedimientos que permitiera a los alumnos analizar sobre cuál sería el “camino” idóneo para resolver los problemas propuestos.

En la secuencia didáctica se presentaron pocos momentos de cierre colectivos, lo que se hizo fue una revisión final con cada alumno principalmente en las situaciones de “La Tiendita”.

Comentarios finales

Las ayudas que la maestra brindó al principio de la secuencia didáctica en su mayoría fueron directas y esto se fue modificando conforme avanzó la secuencia. Esto pudo ser debido a que la maestra observaba que los alumnos estaban más familiarizados con las situaciones y que ya no requerían que se les ejemplificara cómo hacer ciertas actividades.

Aunque fue mediante ayudas individuales que la maestra enseñó el procedimiento del conteo, dando ocasión a que los alumnos lo repitieran, siguiendo sus indicaciones, paso por paso, habría sido interesante observar de qué manera los alumnos abordaban la tarea sin intervenciones tan dirigidas por la maestra; quizás habría más intervenciones por parte de los alumnos y esto habría dado pie a otras reflexiones y aprendizajes.

Durante la aplicación de la secuencia didáctica tuve momentos de tensión e incertidumbre, ya que no tenía certeza de los momentos en los que era necesario intervenir directa o indirectamente; esto me sucedió a pesar de que tenía un análisis a priori que me había hecho pensar en las posibles intervenciones que podría seguir ante las dificultades.

Lo anterior da cuenta de la difícil tarea que se tiene como docente para intervenir de manera tal que se ayude a los alumnos pero sin resolverles todo el problema, que se sepa discernir cuándo un alumno requiere una ayuda directa o cuándo solo se necesita guardar silencio por un momento. Esto coincide con Block, Ramírez, y Reséndiz (2015) mencionan que esta tensión no es privativa de una situación específica y, en esa medida, plantea un reto para la didáctica de las matemáticas y sin duda, un reto para todos los docentes.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

Las conclusiones que presentaré a continuación darán respuesta a la pregunta de investigación que ha motivado este trabajo: ¿cómo favorecer el conteo, la equivalencia y el agrupamiento mediante el uso del dinero para resolver ciertos problemas de compra-venta en alumnos de tercero de preescolar?

Para responder a esa pregunta explicaré cada uno de los conceptos que se pretendieron favorecer con la secuencia didáctica, para después analizar si las situaciones didácticas propuestas lograron favorecer estos aprendizajes en los alumnos.

Conteo

De acuerdo con lo expuesto en el marco teórico de esta investigación, el conteo es relevante en el desarrollo del niño ya que muchos autores coinciden al considerar que está estrechamente ligado al desarrollo cognitivo, y que saber contar puede conducir al descubrimiento del esquema que permite generar la serie de palabra- número (Gelman y Gallistel (1978), Baroody (1988), Chamorro (2005). Entendiendo la importancia del conteo, este diseño buscó que la secuencia didáctica promoviera que los alumnos contaran en todas las situaciones, lo cual se vio reflejado en los procedimientos que se describieron en el análisis de cada situación.

Durante la Situaciones 1, 2, 5 y 6 los alumnos tenían que contar las monedas para formar la colección correspondiente al precio del dulce que querían comprar. Comenzaron contando las monedas, pero también usaron otros recursos para contar como las monedas dibujadas en las tarjetas de validación, las casillas de la tira numérica, sus propios dedos, representaciones gráficas hechas por ellos mismos. Durante el juego “El cajero” (S3 y S4) los alumnos contaban sus monedas para poder cambiarlas por otra moneda equivalente y así poder ganar el juego, dándole un sentido al conteo que realizaban.

Para que el niño pueda contar, según Castro (1995), “requiere hacer un apareamiento término- objeto mediante la acción de señalar. La acción de señalar interiorizada dará lugar al proceso de contar” (p. 7). Las dificultades que presentaron algunos alumnos estuvieron relacionadas con el proceso que siguen para coordinar este apareamiento término- objeto, lo que hacía que alumnos como Gael y Juan José omitieran objetos al contar o contaran un

objeto más de un vez durante las cinco primeras situaciones. Sin embargo, fue grato observar que estos alumnos lograron contar convencionalmente en la Situación 6.

Sobre la pregunta de cómo favorecer el conteo, Brousseau (1991) afirma que los niños deben resolver problemas en los que contar constituya su solución óptima y que pueda resolver alguien que no posee este conocimiento, que no sabe contar. En este caso, los niños podían resolver cada una de las situaciones a pesar de que no supieran contar, como lo hacían Gael y Juan José, utilizando los recursos didácticos como las tarjetas de validación y la tira numérica.

Apoyando esta idea, Wolman (2000) afirma que para enseñar a contar a los niños debemos “Proponerles múltiples situaciones problema en las que sea necesario o importante contar para resolverlas, a contar se aprende contando” (p. 179). Esta secuencia didáctica es una propuesta para que los niños se enfrentan a situaciones problemáticas en las que requieren contar para comprar un dulce o para ganar un juego; cuentan con un sentido específico y no sólo “por contar”.

Lo anterior coincide con lo que describe Brousseau (1991) cuando habla del conteo como una actividad social. Afirma que, socialmente, el contar es algo que se hace, no es algo que se explica. Para construir entonces una situación fundamental, señala el autor, se debe definir una clase de situaciones con un cierto número de variables didácticas que, al tomar distintos valores, permita generar un conjunto de problemas característicos, plantear problemas en los que constituya su solución óptima y que debe resolver alguien que no posee este conocimiento, en este caso, alguien que no sabe contar.

En estas situaciones se planearon recursos como la tarjeta de validación y la tira numérica para que los alumnos que tuvieran dificultades para contar pudieran resolver el problema planteado; además de que las variables didácticas planeadas como el rango numérico, la cantidad de dulces que comprarían y el valor de las monedas con las que trabajaron estuvieron pensadas para generar problemas característicos del conteo. Por lo anterior, se puede concluir que las situaciones didácticas planteadas sí cumplen con las condiciones que requiere una Situación Fundamental diseñada para contar, como lo plantea la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Equivalencia

Para favorecer la equivalencia se diseñaron las Situaciones 3, 4, 5 y 6. Las situaciones 3 y 4 consistieron en el juego de “El cajero”, donde se tenían que cambiar las monedas de \$1 por monedas de \$10 en la primera versión, y por monedas de \$5 en la segunda. En la situación 5 los niños tenían que comprar un dulce usando monedas de distintas denominaciones (\$1, \$2 y \$5) y en la situación 6 tenían que comprar los dulces que les alcanzara con una moneda de \$10.

El cajero es un juego que resulta atractivo e interesante para los alumnos, y les permite centrar su atención en el cambio de las monedas, ya que era un requisito para poder ganar el juego. Esta regla normativa del cambio es la que contribuyó a que los alumnos prestaran atención en los valores de las monedas y no solo se fijaran en sus aspectos físicos. Al momento de realizar el cambio los niños podían recordar cuántas monedas de \$1 tenían antes y observar cuántas monedas tenían ahora en este cambio; esto lo hacían como consecuencia de las preguntas de la maestra.

No pretendo afirmar que los niños hayan comprendido el concepto de equivalencia gracias a este juego, pero sí considero que la regla normativa del juego (cambiar las monedas) contribuye a que empiecen a observar relaciones entre los valores de las monedas.

En el conjunto de Situaciones de “La Tiendita” cuando los niños tenían una tarea matemática que demandaba un mayor reto cognitivo (ya que debían formar la cantidad deseada considerando la equivalencia de las monedas), ocho de nueve alumnos pudieron comprar utilizando diversas estrategias para lograrlo, lo cual demuestra que con un diseño pertinente de la situación didáctica y con una adecuada intervención docente, los alumnos preescolares podrían resolver ciertos problemas relacionados con la equivalencia de las monedas.

Es necesario reiterar que haber logrado comprar en “La Tiendita” no implica haber construido la noción de equivalencia, ya que se trata de un proceso complejo que los alumnos continuarán construyendo durante las posteriores etapas escolares. Sin embargo, se puede afirmar que lograron avances en sus ideas matemáticas y económicas, mismas que se vieron reflejadas en la evolución de sus procedimientos, ya que corrigieron errores que tenían en el

conteo, utilizaron estrategias como el sobreconteo para resolver el problema y algunos alumnos compraron usando el valor convencional de las monedas.

Para que se pueda decir que el niño adquirió el concepto de equivalencia, según Piaget citado en Castro (1995), “los niños deben crear colecciones equivalentes a las dadas y además estar seguros de que el número no cambia, aunque cambie la posición de sus colecciones”. (p. 10). Este aspecto no fue explorado en esta investigación, por lo que no podemos sostener que estos niños puedan afirmar que el número de las colecciones no cambia aunque cambie la posición de sus colecciones, aspecto relacionado con la conservación de la cantidad. Sería interesante explorar en investigaciones futuras la relación entre la conservación de la cantidad y el concepto de equivalencia.

En las situaciones de “La Tiendita”, principalmente en la situación donde tenían que comprar un dulce con monedas de \$1, \$2 y \$5, los niños manifestaron dificultades relacionadas con el concepto de equivalencia, como no usar el valor convencional de las monedas asignando el valor indiscriminado de unidad a todas, y para resolver las operaciones aritméticas cuando querían sumar el valor de cada moneda. Estas dificultades coinciden con las que se han encontrado en otras investigaciones de docentes como Bonilla (2014), Rebolledo (2016) y Muñoz (2017).

En su investigación, Rebolledo (2016) afirma que no se podrá dar por consolidado el reconocimiento del valor real de las monedas en el nivel preescolar, sin importar el número de veces que se repitan situaciones en este contexto. Si bien habrá niños que puedan resolver problemas haciendo uso de ellas, investigaciones realizadas de orden psicológico como la de Delval (2013) dejan ver que no es hasta edades superiores cuando logran una significación del dinero.

Coincidimos con Rebolledo en el aspecto de que es poco probable que los niños en edad preescolar consoliden el concepto de equivalencia; sin embargo, gracias al análisis de esta investigación se han observado avances significativos en los alumnos, ya que no creemos que el avance de los niños dependa de la cantidad de veces que repitan las situaciones en un contexto de compra- venta, sino al diseño, intervenciones, discusiones y reflexiones que puedan generar los alumnos durante el desarrollo de las situaciones didácticas.

En su investigación, Muñoz (2017) concluye que las dificultades que presentan los alumnos están relacionadas a la dualidad que representan las monedas, donde se tiene una cardinalidad y un valor. Esta característica es la principal dificultad, ya que los niños refieren a la cantidad de monedas, más no a su monto, por lo que Muñoz menciona que sería necesario valorar si el acercamiento al dinero necesariamente se tendría que ligar a los contenidos matemáticos abordados en preescolar.

Coincidimos con Muñoz en que las principales dificultades a las que se enfrentan los alumnos están relacionadas con la dualidad que presentan las monedas (cardinalidad- valor), lo cual está documentado también en investigaciones como la de Delval (2013).

Los niños preescolares en un principio se refieren a la cantidad de monedas y no a su monto; sin embargo, en esta investigación se observó cómo los niños pueden ir modificando sus ideas al respecto, al mismo tiempo que van modificando sus procedimientos comprendiendo aspectos relacionados con el valor de las monedas y con la equivalencia, gracias a las características de las situaciones didácticas implementadas y a las intervenciones de los demás alumnos y de la docente. Por ello, contradecimos la idea de Muñoz, ya que consideramos que trabajar con el dinero y con el contexto de compra-venta puede contribuir a que los alumnos desarrollen ciertos conocimientos matemáticos, considerando sus saberes previos al diseñar las situaciones y las variables didácticas que se elijan.

Agrupamiento

Se diseñaron la Situaciones 3 y 4 en las que se aborda el juego de “El cajero”, donde se pretendía que los alumnos utilizaran el agrupamiento para reunir sus monedas y ganar el juego. Los niños hicieron agrupamientos de 5 y de 10 monedas para cambiarlas por monedas de \$5 y de \$10, utilizando los agrupamientos como parte de una norma del juego que les ayudaba a ganarlo.

Durante las situaciones no se observó que los alumnos utilizaran alguna estrategia relacionada con el agrupamiento que les permitiera resolver el problema planteado. Esto puede ser debido al diseño de la misma situación, ya que no provocaba en los niños la necesidad de agrupar, pues no se trabajó con cantidades grandes que lo favoreciera.

Para que los alumnos se vayan apropiando de este concepto, es necesario realizar un trabajo sistemático como el propuesto por Bonilla (2016) en la situación del ahorro en preescolar, donde a través del ahorro los niños tienen la oportunidad de registrar y agrupar sus monedas de 10 en 10, favoreciendo, además, su acercamiento a la propiedad de agrupamiento decimal del Sistema de Numeración Decimal.

Por lo tanto, concluimos que el diseño presentado en esta secuencia didáctica fomentó que los alumnos hicieran agrupamientos de 5 y de 10, y que comunicaran las cantidades de dinero que tenían gracias a las preguntas de la maestra. Sin embargo, hubiera sido interesante que los niños se enfrentaran a situaciones que implicaran comparar cantidades relativamente grandes y que esto les permitiera comprender la necesidad y ventajas de agrupar los objetos en una colección; esto se podría explorar si se incrementara la cantidad de monedas de \$5 o de \$10 que necesitarán para ganar el juego, o bien quitar la variable sobre la cantidad de monedas necesarias y restringir el tiempo de juego, ganando el niño que tuviera más monedas en ese tiempo designado, lo que ayudaría a que compararan las cantidades de monedas de los integrantes del equipo para elegir al ganador.

6.1 Conclusiones sobre la metodología y la implementación

Usar el contexto de compra-venta como base para las situaciones didácticas fue una elección metodológica certera, ya que este contexto permite crear un ambiente adecuado para profundizar en los conocimientos y procedimientos proponiendo a los alumnos actividades en las que se involucran con interés.

Usar el dinero como un recurso didáctico nos parece una elección adecuada, siempre y cuando se respeten las ideas y nociones económicas de los niños. Se han observado, a lo largo de esta investigación, las dificultades a las que se enfrentan los niños preescolares cuando usan este recurso, ya que el dinero presenta una dualidad entre la cantidad de monedas que hay en la colección y la cantidad de dinero que se tienen si se toma en cuenta el valor; sin embargo, también se ha hecho evidente que teniendo un adecuado diseño didáctico los alumnos pueden avanzar en sus hipótesis matemáticas y económicas.

Durante las situaciones de la “La Tiendita” se consideró importante generar un “ambiente” lo más cercano posible a lo real, ya que creemos que estas condiciones influyen en la motivación e interés que el alumno pueda tener en el desarrollo de la situación. Para

lograrlo, se utilizaron monedas y dulces reales que los alumnos podían llevarse si lograban comprarlo, además de que se les entregó un monedero donde podrían guardar su dinero.

Las decisiones metodológicas tomadas para el diseño de “La Tiendita” estuvieron basadas en distintas perspectivas teóricas, cuyos planteamientos resultaron esclarecedores. A grandes rasgos se puede mencionar que la Teoría de las Situaciones Didácticas permitió identificar el tipo de conocimiento que se moviliza en relación con la situación didáctica que se planteaba a los alumnos; además, ayudó a identificar y elegir las variables didácticas en juego. En lo que se refiere a los estudios de corte psicogenético (Delval 2013, Faigenbaum 2014) sobre la construcción de las nociones de dinero y compra-venta, sirvieron para tomar las siguientes decisiones metodológicas: el rango numérico, la cantidad de dulces que podían comprar y las denominaciones de las monedas que utilizaron.

Otra característica de las situaciones que fueron pertinentes, fue que los alumnos participaran activamente en los roles de compradores y vendedores. Considero que fue un acierto, ya que las tareas que desempeña cada uno de los roles son distintas y, por lo tanto, los alumnos se enfrentan a retos cognitivos diferentes. También fue importante que los niños tuvieran dos oportunidades para desempeñar cada uno de los roles, esto permitió que lograran modificar sus procedimientos iniciales.

Asimismo, fue un acierto implementar la secuencia didáctica con pequeños grupos de alumnos, ya que esto nos ayudó a tener una mejor organización respecto a los turnos y participaciones de los alumnos. Esto coincide con González y Weinstein (2010), quienes afirman que el “trabajo en grupos pequeños reduce el tiempo de espera, maximiza el nivel de participación y el contacto directo con el conocimiento, alienta la autonomía y la toma de decisiones compartida y favorece el interés de todos los participantes por observar y seguir el proceso” (p. 25).

Estas autoras afirman, además, que en este tipo de trabajo los niños también aprenden en interacción con sus pares, con independencia de la presencia del docente y que no todos aprenden lo mismo ni lo hacen al mismo tiempo. Esto lo observamos cuando los alumnos ayudaban a sus compañeros de distintas maneras; estas ayudas contribuyeron a que los alumnos “miraran” aspectos de los cuales no se habían percatado, que mejoraran sus estrategias para contar; ayudaron a que corrigieran sus procedimientos iniciales y, en algunos

casos, mostraron de manera puntual cómo podría resolver el problema, esperando que el niño que recibe la ayuda en otro momento pudiera resolverlo por iniciativa propia. Al respecto, Solares y Solares (2018) coinciden en la importancia de recibir este tipo de ayudas entre pares: “Subrayamos también las ayudas que se dieron entre alumnos... para corregir o para complementar los procedimientos de sus compañeros... Son momentos en los que las ayudas son provechosas para todos, sin importar el grado escolar” (p. 18).

Como se mencionó anteriormente, las ayudas son benéficas para los alumnos y es decisión del docente propiciar o permitir que sucedan durante el desarrollo de las clases; es una intervención docente que propicia que los alumnos aprendan entre ellos y no sólo por medio del maestro o maestra.

Algunos aspectos que podrían modificarse para siguientes implementaciones de la secuencia didáctica son:

- Como se mencionó anteriormente, el uso de agrupamientos como estrategia de conteo fue escaso, por lo que se pueden agregar situaciones didácticas donde el agrupamiento aparezca como una estrategia que permita a los alumnos contar y resolver el problema planteado.
- Durante la Situación 6 (cuando los alumnos tenían que comprar los dulces necesarios hasta terminarse la moneda de \$10) se puede fomentar el uso de la representación gráfica como un recurso para resolver el problema, porque esto ayudaría a que los alumnos representaran cantidades y contribuiría a comprender que registrar una cantidad sirve para comunicar información y que este registro puede ayudarlos a resolver situaciones problemáticas.
- Modificar la consigna de esta situación de manera que se comunique la tarea a realizar pero cuidando que no dé “pistas” sobre cómo resolver el problema planteado.

6.2 Conclusiones sobre el efecto de la secuencia didáctica

Para mostrar el efecto que la secuencia didáctica tuvo en los procedimientos de los alumnos, se hará referencia a la evolución de los procedimientos que se observaron a lo largo de la implementación de las situaciones didácticas.

Como se mencionó anteriormente, y como se puede apreciar en el capítulo de análisis, todos los alumnos tuvieron un grado de avance de acuerdo con sus posibilidades durante la secuencia didáctica. Se ejemplificará sólo el caso de un alumno donde se observa explícitamente el desarrollo de sus procedimientos respecto al conteo y a la equivalencia.

El caso que aquí se retoma es el de Ernesto. En la Situación 1, donde tenía que comprar un dulce con monedas de \$1, utilizó la tarjeta de verificación para formar la colección correspondiente en su primera oportunidad; en su segunda oportunidad ya utilizó el conteo para formar la colección, lo cual es una muestra de su avance en los procedimientos empleados.

En la Situación 2, donde tenía que formar la colección de monedas que representará la suma de los precios de dos dulces, Ernesto primero representó cada precio del dulce que quería comprar usando colecciones de monedas y logró resolver el problema aditivo utilizando el conteo; en su segunda oportunidad ya no utilizó un material concreto sino que se ayudó de sus dedos para representar la cantidad de cada dulce. Al principio tuvo dificultades para hacerlo, pues ponía un dedo de más o de menos para representar la cantidad requerida, o no separaba las colecciones en sus dos manos por lo que a veces se confundía y contaba sus dedos más de una vez, teniendo resultados erróneos. A lo largo de esta secuencia se observó el progreso de este procedimiento hasta que logró realizarlo sin dificultades.

En la Situación 3, cuando jugaron al cajero con monedas de \$1 y \$10, Ernesto aceptó rápidamente la norma de cambiar diez monedas de \$1 por una moneda de \$10; incluso calculaba cuántas monedas de \$1 le faltaban para llegar a diez y poderlas cambiar. Esto último lo hacía como una estrategia para ganar, lo cual muestra que se apropió de esta regla normativa relacionada con la equivalencia.

Además, el alumno resolvió problemas aditivos: durante el desarrollo de la situación la maestra les preguntaba cuánto dinero tenían; Ernesto respondió a esta pregunta utilizando tres respuestas diferentes, cada una más compleja que la anterior. Su primera respuesta fue nombrando indiscriminadamente las monedas como unidades; es decir, no se percató de las diferencias del valor de cada moneda. En su segunda respuesta utilizó el conteo utilizando sus dedos como apoyo para representar las cantidades; este procedimiento ya había sido utilizado en la situación anterior, pero ahora el rango numérico fue mayor, ya que se pasaba

de los diez primeros números (se utilizaron monedas de \$10). Durante su tercera respuesta continuó utilizando sus dedos como apoyo para representar las cantidades, pero ahora ya no representaba las monedas de \$10 con sus dedos, sino que partía del número diez y continuaba usando el sobre conteo. Chamorro (2005) señala que este procedimiento aparece cuando los alumnos pueden contar a partir de cualquier número, momento en el que la significación de la serie y del conteo confluyen. Además, la autora afirma que “el sobre conteo constituye un elemento previo y necesario para el desarrollo del cálculo”. (p. 228).

En la Situación 4, durante el juego de “El cajero” con monedas de \$5 y de \$1, cuando se le pregunta al niño cuánto dinero tiene, responde haciendo alusión a un resultado memorizado de 5 y 5 son 10; mientras que en su segunda respuesta utilizó sus dedos como apoyo para representar el valor de cada moneda.

En la Situación 5, donde tenía que comprar un dulce con monedas de \$1, \$2 y \$5, comenzó repitiendo el procedimiento que utilizó anteriormente, utilizar sus dedos para representar el valor de cada moneda y después contarlos todos para conocer el total de su dinero; pero después cambió este procedimiento por otro tipo de conteo donde ya no utilizó sus dedos, sino la serie oral para representar el valor de cada moneda. Esto implica que se encuentra en un nivel numerable de la cadena numérica verbal, lo cual quiere decir, según (Karen Fuson citado Chamorro 2013, p.162) que “cada elemento de la serie tiene una entidad propia, es una cadena unitaria en la que cada palabra tiene una entidad cardinal. Se puede contar en ausencia de los objetos a contar” Esto representa un avance en relación a la estrategia anterior.

En la Situación 6 Ernesto debía comprar los dulces que le alcanzaran con una moneda de \$10. Eligió un dulce, calculó cuánto le faltaba para llegar a diez y eligió otro dulce que costara esa cantidad. El niño resolvió un problema aditivo con la incógnita en la segunda transformación, ya que conocía el dato del primer dulce que eligió y el estado final (\$10).

Chamorro (2013) afirma que la resolución de problemas permitirá a los niños pasar de los procedimientos más costosos y menos fiables, a los más económicos y pertinentes, desarrollando ampliamente la actividad de cardinalización de colecciones.

En el proceso que describimos sobre los procedimientos que realizó Ernesto se observa cómo va pasando de procedimientos más costosos a otros más económicos y pertinentes. La evolución de sus procedimientos da cuenta de la pertinencia de la secuencia didáctica.

Respecto a las ayudas que la docente proporcionó a los alumnos fueron categorizadas en dos: ayudas directas y ayudas indirectas. Ambos tipos de ayudas son necesarias en determinadas situaciones. Las ayudas indirectas que proporcionaba la maestra para resolver una tarea fueron valiosas en el sentido que lograban devolverle al alumno el problema, permitiendo que pensara sobre la manera en que podría resolverlo. Respecto a las ayudas directas dadas a alumnos que presentaron mayores dificultades para resolver las tareas, existieron ocasiones donde la maestra pudo haber indagado con mayor profundidad sobre el error que el alumno cometía y utilizarlo como un apoyo para generar reflexiones en el alumno, en lugar de dar la respuesta directa a las preguntas que planteaban los niños.

Después de dar respuesta a la pregunta de investigación considero importante contribuir a subsanar las dificultades a las que nos enfrentamos las educadoras al diseñar situaciones didácticas que estén relacionadas con el dinero. Los siguientes son elementos básicos que las docentes podemos tomar en cuenta al momento de proponer una situación didáctica a los alumnos:

- Utilizar material lo más cercano posible a lo real. En esta investigación los materiales utilizados fueron reales (monedas y dulces), esto favoreció el interés y motivación para resolver los problemas planteados.
- Cuidar que el rango numérico no rebase los primeros diez números. Esta recomendación coincide con Fuenlabrada (2009 p. 26) cuando dice que los datos numéricos de los problemas que se espera que los niños de preescolar puedan resolver, deben referir a cantidades pequeñas (preferentemente menores a 10), y los resultados estarán alrededor del 20, a fin de que la estrategia de conteo tenga sentido y resulte útil para los niños. Además, cabe aclarar que proponer a los niños resolver problemas con cantidades pequeñas los lleva a encontrarse con los números en diversos contextos y a utilizarlos con sentido; por lo tanto, irán reconociendo para qué sirve contar y en qué tipo de problemas es conveniente hacerlo.
- Utilizar las tarjetas de validación como un medio que permita a los alumnos conocer si su respuesta fue correcta o no. La idea de que las situaciones didácticas deben tener

un medio de evaluación no es algo novedoso; Chamorro (2005) plantea que una condición indispensable es que debe existir un medio de validación de las estrategias y el medio debe permitir retroacciones. El aporte de esta investigación a esta idea basada en la Teoría de las Situaciones Didácticas, es utilizar las tarjetas de validación que se utilizaron en la secuencia como un recurso válido para verificar las respuestas de los alumnos.

- Dar como mínimo dos oportunidades en cada situación para que el niño pueda resolver el problema. Si el alumno tiene la oportunidad de replantear su procedimiento en la segunda oportunidad, podrá poner a prueba sus hipótesis e ir generando nuevos aprendizajes.

Esta investigación surgió de las dificultades de mi propia práctica docente, por lo que me ha dado herramientas para mejorar mi labor como profesora, ayudándome a conocer los procesos de aprendizaje de los alumnos, sobre conceptos complejos como la equivalencia y el agrupamiento decimal y sobre como despertar en ellos el interés por aprender, haciendo uso principalmente de un recurso didáctico socialmente conocido, como es el dinero, esta experiencia me ayudó a comprender las ventajas y desventajas de utilizarlo con niños preescolares.

Aprendí sobre la importancia de trabajar el conteo en la etapa preescolar y entendí la complejidad y lo interesante que puede llegar a ser que un niño te diga cuánto dinero tiene en sus manos.

Gracias a este trabajo, entendí la dificultad y la importancia de planear secuencias didácticas enfocadas a un aprendizaje esperado adecuado al proceso cognitivo de los niños, considerando las capacidades y habilidades de los alumnos, a través de situaciones interesantes y desafiantes para ellos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica .
- Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Aprendizaje Visor.
- Block, D. (1996). Análisis de situaciones didácticas. *Básica*, 7.
- Block, D., Ramirez, M., & Reséndiz, L. (2015). Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 711-735.
- Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras Aritméticas Elementales y su modelización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Chamorro, M. d. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil*. España: PEARSON.
- Constance, K. (2009). Giving change when payment is made with a Dime: The difficulty of tens and ones. *Research in Mathematics Education*, 97-118.
- D. Shiliemann, A., Lins Lessa, M., Brito Lima, A., & Siqueira, A. (2011). La comprensión de equivalencias en niños pequeños. En A. D. Schiliemann, D. W. Carraher, & B. M. Brizuela, *El carácter algebraico de la aritmética* (págs. 47-70). Argentina: Paidós .
- Delahanty, G. (1989). *Génesis de la noción del dinero en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Delval, J. (2013). *El descubrimiento del mundo económico por niños y adolescentes*. Madrid: Morata.
- Duhalde, M. E., & González Cuberes, M. T. (1996). *Encuentros cercanos con la matemática*. Buenos Aires: AIQUE.

- Duhalde, M. E., & González Cuberes, M. T. (1996). *Encuentros Cercanos con la matemática*. Argentina : AIQUE.
- González, A., & Weinstein, E. (2010). *La enseñanza de la matemática en el Jardín de Infantes*. Santa Fe : Homo Sapiens.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. d. (2014). *Metodología de la investigación* . México, DF.: Mc Graw Hill.
- Ifrah, G.. (1987). *Las cifras, historia de una gran invención*. España: Alianza.
- INEE. (2014). *El aprendizaje en preescolar en México, Informe de resultados Excale 00 Aplicación 2011*. México, D.F: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- Kieran, C. (1981). Concepts asociated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 317-326.
- Lerner , D., & Savosky, P. (2003). *El sistema de numeración, un problema didáctico*. Buenos Aires: PAIDÓS.
- Martí, E. (2005). Las primeras funciones de las notaciones numéricas: una mirada evolutiva. En M. Alvarado, & B. Brizuela, *Haciendo números* (págs. 51- 79). México: Paídos Mexicana.
- Miranda, A., Fortes, C., & Gil, M. D. (1999). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Un enfoque evolutivo*. Malaga, España: Aljibe.
- Pérez, M. G. (2010). *La Educación Preescolar en México*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación .
- Quaranta, M. E. (2008). La enseñanza de la matemática en el nivel inicial. *Orientaciones didácticas para el nivel inicial- 1º parte- Serie Desarrollo curricular*. , 11.

- Resendíz, L., Block, D., & Carrillo, J. (2017). Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso. *Educación Matemática*, 99- 123.
- Schliemann, A. D., Linss Lessa, M., Brito Lima, A. P., & Siqueira, A. (2011). La comprensión de equivalencias en niños pequeños. En A. D. Schliemann, D. W. Carraher, & B. M. Brizuela, *El carácter algrebaico de la aritmética* (págs. 47-70). Buenos Aires: Paidós SAICF.
- SEP. (2011). *Programa de Estudio 2011*. México: Secretaría de Educación Pública
- Solares Pineda, D., & Solares Rojas, A. (2018). Retos y alternativas la enseñanza de las matemáticas en telesecundarias multigrado. Un estudio de caso. En A. Cano Ruíz, & E. Ibarra Aguirre, *Vulnerabilidad, innovación y prácticas docentes en escuelas multigrado* (págs. 89-116). México: Nómada.
- Vigotsky, L. S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. España: Planeta.
- Wolman, S., & Terigi, F. (2007). Sistema de numeración: Consideraciones de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, 59- 83.