



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ingeniería Matemática

SIMULACIÓN DEL PROCESO ESTOCÁSTICO
ASOCIADO AL KERNEL DEL CALOR EN \mathbb{Q}_p

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Ingeniería Matemática)

Presenta

L.M.A. Juan Mario Hernández Hernández

Dirigido por

Dr. Samuel Estala Arias

Dr. Samuel Estala Arias
Presidente

M. en C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga
Secretario

M.M.A. Iván González García
Vocal

Dr. Edilberto Arroyo Ortiz
Suplente

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Noviembre de 2019
México

Resumen

Los números p -ádicos, denotados por \mathbb{Q}_p , son la completación de los números racionales respecto al valor absoluto p -ádico, el análisis p -ádico consiste en la generalización de los conceptos clásicos del análisis matemático a este campo. En este contexto, la función *kernel* del calor $Z(x, t)$ donde x es una variable p -ádica y t es variable real, induce un proceso estocástico en \mathbb{Q}_p .

En este trabajo se presenta una simulación de este proceso proponiendo una discretización del espacio \mathbb{Q}_p y una interpretación gráfica del mismo basada en la representación de \mathbb{Q}_p en forma de árbol.

Palabras clave: *Kernel* del calor, proceso estocástico, números p -ádicos, simulación.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Abstract

p -adic numbers, denoted by \mathbb{Q}_p , are the completion of rational numbers respect to the p -adic absolute value, p -adic analysis is the generalization of classical concepts of mathematical analysis. In this context, the function heat *kernel* $Z(x, t)$ where x is a p -adic variable and t is a real variable, induces an stochastic process on \mathbb{Q}_p .

In this work it is presented a simulation of this process proposing a discretization of the space \mathbb{Q}_p and a graphic interpretation of the process based on the representation of \mathbb{Q}_p in tree form.

Key words: Heat *kernel*, stochastic process, p -adic numbers, simulation.

Dirección General de Bibliotecas UNQ

A mi madre

Quien a pesar de sus propias adversidades,
supo entenderme y guiarme,
celebrar mis triunfos y consolarme en mis fracasos.

Mi apoyo en mis momentos más oscuros,
a quien le debo la gracia de ser quien soy.

Dirección General de Bibliotecas UNQ

Agradecimientos

Hay pruebas en la vida que te cambian para siempre, de cada experiencia se aprende, pero lo realmente duro de asimilar es que en la vida, así como hay momentos buenos, también hay momentos malos y que no siempre hay una gran razón para ellos, simplemente existen como parte del todo.

Agradezco:

A mi familia, mis padres Juan e Isabel, mis hermanas Ivette y Annette, mi cuñado Moisés y mis tres sobrinas Itzel, Yarette y Xiromy, por todo lo que me han dado y por estar ahí durante todos estos años.

Al Dr. Samuel Estala Arias y al M.C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga por su gran apoyo y paciencia durante la realización del presente trabajo de tesis y demás derivados. A mis sinodales M.M.A. Iván González García, Dr. Edilberto Arroyo Ortiz y Dr. Francisco Gerardo López Jiménez por sus aportaciones y su tiempo.

A mis amigos del COBAQ: Julio, Gerardo, Hermelinda, Lucía y Rosa; con quienes viví una de las etapas más intensas de mi vida, llena de recuerdos memorables, con quienes logré forjar una amistad que ha perdurado a lo largo de estos años.

A mis amigos de licenciatura: David, Mariana y Lili con quienes tuve la fortuna de vivir la difícil, pero reconfortante experiencia de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. En quienes encontré una verdadera amistad y han sido un gran apoyo en momentos difíciles de mi vida, muchas veces sin saberlo.

A mis amigos y compañeros de maestría: Adrián, Wendoline, Ricardo, Clara, Maite, Lucía, Diego e Iliana, quienes fueron una compañía reparadora en cada momento de estrés y ansiedad en las diferentes facetas de este posgrado; con mención especial a Villeda por todo su invaluable apoyo, especialmente en mi primer semestre con varios temas de estadística.

A las hermanas Juana y Carolina Ramírez Pérez, excelentes profesoras de matemáticas de secundaria, con quienes me inicié en el mundo de las matemáticas de olimpiada, a ellas reconozco su dedicación en la enseñanza de esta fascinante ciencia.

A la M.C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez y la M.D.M. Carmen Sosa Garza por todo

el apoyo que me han brindado desde que inicié mis estudios de licenciatura hasta la fecha.

Al CONACYT por la beca que me otorgó para la realización de mis estudios de maestría.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
Agradecimientos	IV
Índice general	VI
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	IX
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Justificación	4
1.4. Hipótesis y objetivos	5
1.4.1. Hipótesis	5
1.4.2. Objetivo general	5
1.4.3. Objetivos particulares	5
1.5. Estructura del documento	5
2. Los números p-ádicos	6
2.1. Valores absolutos	6
2.1.1. Valores absolutos sobre \mathbb{K}	6
2.1.2. Valores absolutos sobre \mathbb{Q}	16
2.2. El campo \mathbb{Q}_p	20
2.2.1. Construcción algebraica	20
2.2.2. Topología de \mathbb{Q}_p	27
3. Análisis p-ádico	36
3.1. Caracteres aditivos y multiplicativos	36
3.2. Integración en \mathbb{Q}_p	41
3.2.1. Descomposición en bolas	41
3.2.2. Medida	42
3.2.3. Integrales elementales	45
3.3. El espacio de Bruhat-Schwarz	46

3.4. La transformada de Fourier	48
4. El <i>kernel</i> del calor	50
4.1. Aspectos básicos	50
4.2. Descripción del problema	53
4.3. Metodología	53
4.4. Análisis del algoritmo	56
4.5. Resultados	59
5. Conclusiones	64
A. Tablas y gráficas	65
Referencias bibliográficas	79
Índice alfabético	82

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Índice de figuras

2.1.	Representación en forma fractal del anillo \mathbb{Z}_5 .	30
2.2.	Representación en forma de árbol del anillo \mathbb{Z}_3 .	34
4.1.	Representación de los resultados.	59
4.2.	10 simulaciones en \mathbb{Q}_5 con $\alpha = 0.1$, $t = 15$.	61
4.3.	10 simulaciones en \mathbb{Q}_5 con $\alpha = 1$, $t = 15$.	61
4.4.	10 simulaciones en \mathbb{Q}_5 con $\alpha = 10$, $t = 15$.	62
4.5.	10 simulaciones en \mathbb{Q}_3 con $\alpha = 2$, $t = 15$.	62
4.6.	10 simulaciones en \mathbb{Q}_7 con $\alpha = 2$, $t = 15$.	63
A.1.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.2.	65
A.1.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.2 (continuación).	66
A.2.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.3.	72
A.2.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.3 (continuación).	73
A.3.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.4.	73
A.3.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.4 (continuación).	74
A.3.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.4 (continuación).	75
A.4.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.5.	75
A.4.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.5 (continuación).	76
A.5.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.6.	77
A.5.	Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.6 (continuación).	78

Índice de tablas

A.1. Probabilidades en \mathbb{Q}_3 con $\alpha = 2, t = 1$	67
A.2. Probabilidades en \mathbb{Q}_5 con $\alpha = 0.1, t = 1$	68
A.3. Probabilidades en \mathbb{Q}_5 con $\alpha = 1, t = 1$	69
A.4. Probabilidades en \mathbb{Q}_5 con $\alpha = 10, t = 1$	70
A.5. Probabilidades en \mathbb{Q}_7 con $\alpha = 2, t = 1$	71

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Introducción

El conjunto de los números p -ádicos, para p un número primo fijo, es una completación de los números racionales \mathbb{Q} inducida por el valor absoluto p -ádico. A partir de la introducción de estos números, por Kurt Hensel (Dragovich *et al.*, 2009), los conceptos clásicos del análisis matemático se extendieron al campo \mathbb{Q}_p , y a su vez estos resultados fueron utilizados en la modelación de diferentes fenómenos en otras ciencias; sin embargo, fue hasta 1987 cuando la interacción de esta área de la matemática con la física moderna desembocó en el surgimiento de la física matemática p -ádica (Dragovich *et al.*, 2017).

La teoría matemática desarrollada alrededor de los números p -ádicos y las interacciones de ésta con otros campos de la ciencia conforman un área de estudio que atrae la atención de investigadores. Por ejemplo, tal como se describe en (Dragovich *et al.*, 2009; Dragovich *et al.*, 2017), algunas de las principales motivaciones para el estudio de la física matemática p -ádica son:

- **Restricción de gravedad cuántica.**

Se ha probado en gravedad cuántica que las principales limitaciones en mediciones de campo surgen del principio de equivalencia. Esto es

$$\Delta x \geq l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-33} \text{ cm} \quad (1.1)$$

donde Δx es la incertidumbre (o error) en la medición de x , l_p es la longitud de Planck, \hbar la constante de Dirac, G la constante de gravitación universal y c es la velocidad de la luz en el vacío. En esta situación la incertidumbre es mayor o igual que la cantidad que se desea medir x , es decir, la longitud de Planck es la distancia más pequeña, que en principio puede ser medida, lo que implica una ruptura del axioma arquimediano y la aplicación de los números reales a esta escala. La relación 1.1 se deriva del supuesto de que la totalidad del espacio-tiempo en teoría y gravedad cuántica puede ser descrita usando sólo números reales y geometría arquimediana.

- **Números racionales como punto de partida.**

Todas las mediciones que realizamos de manera experimental u observacional son números racionales, entonces tiene sentido utilizar este conjunto de números como punto de partida para estudiar los fenómenos físicos, y en general naturales, que nos rodean. Recordemos que el conjunto de los números racionales no es completo, pero sí es denso en \mathbb{Q}_p como lo es en \mathbb{R} . Entonces, recordando el principio de Hasse, el empleo simultáneo del análisis real y p -ádico podría proporcionarnos un mejor entendimiento de la estructura matemática de las leyes físicas.

- **Estructura jerárquica.**

Algunos fenómenos en sistemas complejos involucran una estructura jerárquica, y dado que los números p -ádicos poseen una estructura de este tipo, éstos parecen ser ideales para el análisis y comprensión de este tipo de fenómenos.

Las principales aplicaciones de la teoría matemática p -ádica, y en general de los modelos ultramétricos, se encuentran en la física, más no están restringidas a ésta. Es posible encontrar trabajos en otras áreas en las que se han utilizado satisfactoriamente este tipo de modelos para describir diversos fenómenos, como se ejemplifica a continuación:

- Biología (Ansari *et al.*, 1985; Khrennikov y Kozyrev, 2007; Khrennikov y Kozyrev, 2009; Kozyrev, 2016; Bikulov y Zubarev, 2018)
- Psicología (Iurato y Khrennikov, 2015; Iurato *et al.*, 2016)
- Física (Rammal *et al.*, 1986; Becker y Karplus, 1997; Dragovich, 2003; Kochubei, 2009; Bakken y Digernes, 2015; Aguilar-Arteaga *et al.*, 2017; Saberi, 2018)
- Probabilidad y estadística (Cruz-López y Estala-Arias, 2016; Ilic Stepic *et al.*, 2016; Aguilar-Arteaga y Estala-Arias, 2019)
- Otras aplicaciones (Khrennikov y Yurova, 2016; Megrelishvili y Shlossberg, 2016; Antoniouk *et al.*, 2018)

1.1. Antecedentes

El campo de los números p -ádicos, \mathbb{Q}_p , extiende la aritmética de los números racionales de una manera diferente a como lo hacen los números reales y los complejos. Esta extensión se obtiene de una interpretación diferente del concepto de valor absoluto, $|\cdot|_p$, que permite definir una ultramétrica sobre \mathbb{Q} . De manera intuitiva, dos números enteros están p -ádicamente cerca si su diferencia es divisible por una potencia alta de p , cuánto más grande es la potencia más cerca están los números.

El estudio de los campos p -ádicos adquiere importancia debido al teorema de Ostrowsky, que prueba que cualquier completación no trivial del campo de los números racionales \mathbb{Q} es equivalente a \mathbb{R} (obtenida respecto a la métrica inducida por el valor

absoluto usual) o a \mathbb{Q}_p (obtenida respecto a la métrica inducida por el valor absoluto p -ádico).

En los últimos años el análisis p -ádico ha recibido mucha atención por sus conexiones con la física, esto es, el anillo de los enteros p -ádicos, \mathbb{Z}_p , y el campo de los números p -ádicos, \mathbb{Q}_p , se han utilizado en algunos modelos para la física moderna, dando resultados interesantes y expandiendo las investigaciones de ecuaciones diferenciales al caso n -dimensional \mathbb{Q}_p^n (Chacón-Cortés y Zúñiga-Galindo, 2013; Zúñiga-Galindo, 2016).

Estas investigaciones han sido motivadas principalmente por dos ideas, la primera que viene de la física de partículas se debe a I. Volovich, él conjeturó que a distancias menores a la longitud de Planck el espacio-tiempo tiene una estructura no arquimediana (Volovich, 2010); la segunda idea proviene de la física estadística y sostiene que la naturaleza no exponencial en los procesos de relajación en vidrios, macromoléculas y proteínas, es una consecuencia de la estructura jerárquica del espacio de estados, que a su vez puede ponerse en conexión con estructuras p -ádicas (Ansari *et al.*, 1985; Avetisov *et al.*, 2002; Avetisov *et al.*, 2003).

La teoría de operadores pseudodiferenciales sobre el campo \mathbb{Q}_p ha sido estudiada por diversos autores, muchas de las ecuaciones diferenciales clásicas se han formulado en la versión n -dimensional de espacios no arquimedianos (Albeverio *et al.*, 2010; Chacón-Cortés y Zúñiga-Galindo, 2014; Casas-Sánchez *et al.*, 2015; Khrennikov *et al.*, 2018; Aguilar-Arteaga y Estala-Arias, 2019).

La simulación de casos particulares en los que interviene la ecuación del calor en \mathbb{Q}_p es escasa (Chacón-Cortés y Vargas, 2017), se sabe que la solución fundamental de esta ecuación da lugar a funciones de transición de procesos de Markov sobre \mathbb{Q}_p^n , que es la contraparte no arquimediana al movimiento Browniano clásico.

1.2. Planteamiento del problema

La física matemática p -ádica es una rama de relativamente reciente creación, una gran concentración de los descubrimientos en esta área se encuentra en la física teórica, aportando nuevos modelos y generalizando los ya existentes modelos de la física clásica al caso ultramétrico.

Desafortunadamente la representación geométrica de los campos \mathbb{Q}_p no es trivial como ocurre con el caso de los números reales en la línea recta. Así las representaciones y simulaciones de fenómenos que ocurren dentro del campo \mathbb{Q}_p son escasas y no son suficientes para esclarecer en su totalidad el comportamiento de los modelos ultramétricos encajados en alguna de las geometrías (como la Euclidiana) que son directamente aplicables al modelado de procesos y fenómenos del mundo real.

Específicamente el problema de Cauchy no arquimediano ha sido estudiado de manera teórica como se puede ver en (Aguilar-Arteaga *et al.*, 2017; Khrennikov *et al.*, 2018), en este contexto, la función *kernel* del calor ha sido introducida de manera teórica como una función auxiliar (continua) para la resolución de este problema, sin embargo no existe evidencia hasta la fecha de estudios que aborden computacionalmente el proceso estocástico que ésta induce. Es precisamente este último el problema que se pretende abordar en este trabajo, además, como se mencionó, al no haber evidencia de estudios similares, este podría considerarse un trabajo inédito, lo cual constituiría una contribución notable en esta rama de la ciencia.

1.3. Justificación

Muchos de los fenómenos físicos, ya sea en dinámica de fluidos, electricidad, magnetismo, mecánica, óptica o flujo de calor, pueden ser descritos utilizando ecuaciones diferenciales parciales; podemos entonces argumentar que tales ecuaciones son fundamentales en la teoría de la física matemática. Más aún, su entendimiento y simulación computacional son de fundamental importancia para lograr vincular el modelo teórico con las aplicaciones en diferentes ramas de la ingeniería, lo cual desemboca en el desarrollo de ciencia y tecnología.

Un modelo de la física matemática p -ádica está dado por el problema de Cauchy no arquimediano, el cual describe el proceso de difusión en espacios ultramétricos. La función *kernel* del calor está íntimamente relacionada con la solución de éste problema, sin embargo, ésta ha sido vista hasta ahora como una función auxiliar y no se ha profundizado en el estudio de la misma y sus modelos derivados, tal como el proceso estocástico que ésta describe. El estudio de tal modelo es necesario si se desea entender por completo el proceso de difusión no arquimediano.

El modelo de difusión basado en la ecuación del calor clásica ha mostrado a través de los años ser de amplia utilidad en la modelación de diversos fenómenos físicos y químicos. Entonces el modelo de difusión no arquimediano podría tener diversas aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, sin embargo, éstas no serán alcanzables a menos que se logre vincular el modelo teórico con su descripción directamente aplicable mediante simulaciones; la cual es una de las tareas principales de la ingeniería matemática.

En general existe un déficit en la total comprensión de los nuevos modelos de la física matemática p -ádica, lo que provoca un lento avance en las futuras investigaciones aplicadas que podrían recurrir a este tipo de modelos para lograr una descripción más precisa y adecuada de diversos fenómenos naturales. Es así que este trabajo pretende contribuir en el avance de la vinculación de estos modelos con las diferentes áreas de la ingeniería y la ciencia.

1.4. Hipótesis y objetivos

1.4.1. Hipótesis

El proceso estocástico asociado a $Z(x, t)$ es simulable si se discretiza la variable continua $x \in \mathbb{Q}_p$ considerando $t = 1$.

1.4.2. Objetivo general

Programar simulaciones numérico-gráficas del proceso estocástico asociado al *kernel* del calor en \mathbb{Q}_p .

1.4.3. Objetivos particulares

1. Investigar el problema.
2. Construir algebraicamente el campo \mathbb{Q}_p .
3. Estudiar la topología y análisis de \mathbb{Q}_p .
4. Definir el *kernel* del calor.
5. Elaborar un algoritmo que describa un número en \mathbb{Q}_p como serie infinita.
6. Elaborar un algoritmo que calcule las probabilidades de salto.
7. Escribir los algoritmos en lenguaje de programación.
8. Evaluar corridas de prueba del programa.
9. Presentar resultados y conclusiones.

1.5. Estructura del documento

En el primer capítulo se introducen los números p -ádicos como una completación de \mathbb{Q} , se introduce un estudio de la topología básica de \mathbb{Q}_p y se enuncian algunas de sus propiedades más importantes que serán de utilidad en secciones posteriores.

En el capítulo 2 se estudian los aspectos básicos del análisis p -ádico y se exponen los conceptos teóricos que permiten definir y entender la función Z .

En el capítulo 3 se define el *kernel* del calor y se presenta una descripción detallada del problema para posteriormente definir la metodología y analizar los resultados obtenidos.

En la sección de conclusiones se da un breve resumen de los resultados obtenidos y se expone una perspectiva del trabajo a futuro.

Los números p -ádicos

El objetivo de este capítulo es estudiar la construcción formal del campo de los números p -ádicos denotado \mathbb{Q}_p , así como estudiar algunas de sus propiedades que serán de utilidad en los capítulos posteriores.

A lo largo de este capítulo y en capítulos posteriores \mathbb{K} denotará un campo arbitrario y denotaremos mediante \mathbb{R}_+ al conjunto de los números reales no negativos, de igual manera denotaremos por \mathbb{Z}_+ a los números enteros no negativos; conservando la convención de denotar con \mathbb{R}^+ y \mathbb{Z}^+ a los números reales positivos y enteros positivos respectivamente. También es necesario establecer que los símbolos \subseteq , \subset denotarán contención y contención propia de conjuntos respectivamente.

2.1. Valores absolutos

2.1.1. Valores absolutos sobre \mathbb{K}

Definición 2.1 (Valor absoluto)

Un valor absoluto sobre \mathbb{K} es una función $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

Si además el valor absoluto satisface la desigualdad $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \forall x, y \in \mathbb{K}$, decimos que el valor absoluto es **no arquimediano**; en caso contrario se dice que el valor absoluto es **arquimediano**.

Es claro que la condición $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ implica la parte 3) de la definición de valor absoluto, debido a que $\max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$.

Veamos algunos ejemplos importantes de valores absolutos.

Ejemplo 2.2 (Valor absoluto trivial)

El valor absoluto trivial sobre un campo \mathbb{K} se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Solución

Claramente es un valor absoluto no arquimediano. ■

Ejemplo 2.3 (Valor absoluto usual)

El valor absoluto sobre \mathbb{Q} definido como sigue

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

es llamado el valor absoluto usual sobre \mathbb{Q} y lo denotaremos mediante $|\cdot|_\infty$.

Solución

Es claro que es un valor absoluto y además es arquimediano, pues tomando $x = y = 1$ tenemos $|x + y| = |1 + 1| = 2 > 1 = \max\{|1|, |1|\} = \max\{|x|, |y|\}$. ■

Definición 2.4 (Valuación)

Una función $v : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es llamada una valuación si satisface:

1. $v(a) = \infty$ si y sólo si $a = 0$.
2. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.
3. $v(ab) = v(a) + v(b)$.

Definición 2.5 (Valuación p -ádica)

Dado un número primo fijo p , la valuación p -ádica en \mathbb{Z} es la función $v_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

Para cada número entero $n \neq 0$, $v_p(n)$ es el único número entero positivo que satisface:

$$n = p^{v_p(n)} n' \quad \text{con } p \nmid n'.$$

El dominio de la función $v_p(n)$ se extiende al campo de los números racionales como sigue: Si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b).$$

Con la convención en ambos dominios que $v_p(0) = \infty$.

Véase que la existencia y unicidad de $v_p(x)$ está garantizada por el teorema fundamental de la aritmética. Por otro lado, los siguientes lema y proposición dan la prueba de que la valuación p -ádica sobre \mathbb{Q} está bien definida.

Lema 2.6

Si $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.

Demostración

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, con $m = p^{v_p(m)} m'$ y $n = p^{v_p(n)} n'$, entonces

$$v_p(mn) = v_p(p^{v_p(m)+v_p(n)} m' n') = v_p(m) + v_p(n)$$

Proposición 2.7

$v_p(x)$ está bien definida.

Demostración

Sea $x \in \mathbb{Q}$ con $x = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tenemos que

$$ad = bc$$

$$v_p(ad) = v_p(bc)$$

$$v_p(a) + v_p(d) = v_p(b) + v_p(c)$$

$$v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$$

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p\left(\frac{c}{d}\right)$$

Ahora, considerando un número cualquiera $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, se tiene

$$x = \frac{a}{b} = \frac{p^{v_p(a)} a'}{p^{v_p(b)} b'} = p^{v_p(a)-v_p(b)} \frac{a'}{b'} = p^{v_p(x)} \frac{a'}{b'}$$

Entonces por la proposición anterior la valuación p -ádica de un número racional queda determinada por la fórmula

$$x = p^{v_p(x)} \frac{a'}{b'}$$

donde $p \nmid a'b'$.

Proposición 2.8

La valuación p -ádica definida sobre \mathbb{Q} es una valuación.

Demostración

1) Por definición.

2) Sean $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con $x = p^{v_p(x)} \frac{a'}{b'}$ y $y = p^{v_p(y)} \frac{c'}{d'}$, supongamos s.p.g. que $m \geq n$, entonces

$$v_p(x+y) = v_p\left(p^n \left[p^{m-n} \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}\right]\right) \geq n = \min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

3) Sean x, y como en el inciso anterior, entonces

$$v_p(xy) = v_p\left(p^{m+n} \frac{a'c'}{b'd'}\right) = m+n = v_p(x) + v_p(y)$$

Definición 2.9 (Valor absoluto p-ádico)

El valor absoluto p-ádico de $x \in \mathbb{Q}$ se define como:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Proposición 2.10

La función $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano sobre \mathbb{Q} .

Demostración

1) Por definición.

2) Sean $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces

$$|xy|_p = p^{-v_p(xy)} = p^{-v_p(x) - v_p(y)} = p^{-v_p(x)} p^{-v_p(y)} = |x|_p |y|_p.$$

Si alguno o ambos son cero la propiedad aún se cumple.

*) Sean $x, y \in \mathbb{Q}$.

Supongamos s.p.g. que $\min\{v_p(x), v_p(y)\} = v_p(x)$, entonces por la proposición 2.8 tenemos

$$\begin{aligned} v_p(x) &\leq v_p(y) \\ \implies p^{v_p(x)} &\leq p^{v_p(y)} \\ \implies \frac{1}{p^{v_p(x)}} &\geq \frac{1}{p^{v_p(y)}} \\ \implies |x|_p &\geq |y|_p \\ \implies \max\{|x|_p, |y|_p\} &= |x|_p \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} v_p(x+y) &\geq v_p(x) \\ \implies p^{v_p(x+y)} &\geq p^{v_p(x)} \\ \implies \frac{1}{p^{v_p(x+y)}} &\leq \frac{1}{p^{v_p(x)}} \\ \implies |x+y|_p &\leq |x|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\} \end{aligned}$$

Además sabemos que *) implica la parte 3) de la definición de valor absoluto. ■

Proposición 2.11

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{K} . Entonces para todo $x, y \in \mathbb{K}$ se cumple:

- i) $|1| = |-1| = 1$.
- ii) $|x| = |-x|$.
- iii) $||x| - |y||_{\mathbb{R}} \leq |x \pm y|$.
- iv) $|x - y| \leq |x| + |y|$.
- v) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ con $y \neq 0$.

Donde $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ es el valor absoluto usual en los números reales¹.

Demostración

$$i) |1| = |(1)(1)| = |1||1| \implies |1| = 1.$$

$$1 = |1| = |(-1)(-1)| = |-1||-1| = |-1|^2 \implies |-1| = 1.$$

$$ii) |-x| = |(-1)x| = |-1||x| = |x|.$$

iii) Tenemos que

$$\begin{aligned} |y| &= |y + (x - x)| = |(y + x) + (-x)| \leq |y + x| + |-x| = |y + x| + |x| \\ &\implies -|y + x| \leq |x| - |y|. \quad (1) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} |x| &= |x + (y - y)| = |(x + y) + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| \\ &\implies |x| - |y| \leq |x + y|. \quad (2) \end{aligned}$$

Y de (1) y (2) tenemos

$$\begin{aligned} -|y + x| &\leq |x| - |y| \leq |x + y| \\ &\implies ||x| - |y||_{\mathbb{R}} \leq |x + y|. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$||x| - |y||_{\mathbb{R}} \leq |x + (-y)| = |x - y|.$$

$$iv) |x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

v) Como $y \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} |x| &= \left| \left(x\right) \frac{y}{y} \right| = \left| y \left(\frac{x}{y}\right) \right| = |y| \left| \frac{x}{y} \right| \\ &\implies \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.12

Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ definida como sigue

$$f(n) = \begin{cases} \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}} & , \text{ si } n > 0 \\ 0 & , \text{ si } n = 0 \\ -\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{-n \text{ veces}} & , \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

y sea $A \subseteq \mathbb{K}$ la imagen de \mathbb{Z} bajo la función f . Un valor absoluto $|\cdot|$ sobre \mathbb{K} es no arquimediano si y sólo si $|a| \leq 1$ para todo $a \in A$.

Demostración

\Rightarrow) Sea $|\cdot|$ un valor absoluto no arquimediano sobre \mathbb{K} . Como $|\cdot|$ es no arquimediano tenemos que $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \forall x, y \in \mathbb{K}$. Probaremos por inducción que $|f(n)| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, tenemos que $|f(1)| = |1| = 1$.

¹La definición de valor absoluto usual sobre \mathbb{R} es análoga a la definición del valor absoluto usual sobre \mathbb{Q}

Supongamos cierto para n , es decir $|f(n)| \leq 1$, así para $n + 1$ tenemos

$$|f(n + 1)| = \left| \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}} + 1 \right| \leq \max\{|f(n)|, 1\} = 1.$$

Así $|f(n)| \leq 1 \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Por otro lado sabemos que $|x| = |-x|$. Así, si $n \in \mathbb{Z}^-$ tenemos que

$$|f(n)| = \left| - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{-n \text{ veces}} \right| = \left| \underbrace{1 + \dots + 1}_{-n \text{ veces}} \right| \leq 1.$$

Y como $|f(0)| = 0 \leq 1$, entonces $|f(n)| \leq 1 \forall n \in \mathbb{Z}$.

⇐) Sea $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{K} , tal que $|a| \leq 1 \forall a \in A$. Si $y = 0$, se cumple que $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \forall x \in \mathbb{K}$. Si $y \neq 0$, se cumple entonces

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \iff \left| \frac{x}{y} + 1 \right| \leq \max\left\{ \left| \frac{x}{y} \right|, 1 \right\}.$$

Así basta probar que $|x + 1| \leq \max\{|x|, 1\} \forall x \in \mathbb{K}$. Sean $x \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces tenemos que

$$|x + 1|^m = \left| \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k \right| \leq \sum_{k=0}^m \left| \binom{m}{k} \right| |x^k|.$$

Como $\binom{m}{k} \in A$, entonces $\left| \binom{m}{k} \right| \leq 1$. Así se sigue que

$$|x + 1|^m \leq \sum_{k=0}^m \left| \binom{m}{k} \right| |x^k| \leq \sum_{k=0}^m |x^k| \leq (m + 1) \max\{1, |x|^m\}.$$

Y así llegamos a que $|x + 1| \leq \max\{1, |x|\} \sqrt[m]{m + 1} \forall m \in \mathbb{N}$. Ahora, haciendo $m \rightarrow \infty$ y dado que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m + 1} = 1$, obtenemos

$$|x + 1| \leq \max\{|x|, 1\}.$$

■

Corolario 2.13

Un valor absoluto $|\cdot|$ sobre \mathbb{Q} es no arquimediano si y sólo si $|n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Propiedad Arquimediana

Un valor absoluto es arquimediano si tiene la siguiente propiedad: dados $x, y \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, existe un entero positivo n tal que $|nx| > |y|$.

Es claro que la propiedad arquimediana de un valor absoluto es equivalente a decir que existen enteros cuyo valor absoluto es arbitrariamente "grande".

Corolario 2.14

Un valor absoluto $|\cdot|$ es no arquimediano si y sólo si $\sup\{|n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = 1$.

Demostración

⇒) Del teorema anterior sabemos que $|a| \leq 1 \forall a \in A$, y como $f(1) = 1$, se sigue que $\sup\{|n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = 1$.

⇔) Si $\sup\{|n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = 1$, entonces $|n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, y por el teorema anterior, el valor absoluto no es arquimediano. ■

Proposición 2.15

Si $\sup\{|n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = C < \infty$, entonces $|\cdot|$ no es arquimediano y $C = 1$.

Demostración

Como $|1| = 1$, $\sup\{|n| \mid n \in \mathbb{Z}\} \geq 1$. Si $\sup\{|n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = C > 1$, entonces $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $|m| > 1$, además $|m^k| = |m|^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$, así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |m|^k = \infty.$$

Entonces existe $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|m^r| > C$, lo que es una contradicción, por lo tanto $C = 1$. Y por el corolario anterior se obtiene que $|\cdot|$ es no arquimediano. ■

En lo que resta de esta sección estudiaremos la métrica inducida por un valor absoluto y algunas de las propiedades topológicas del campo dotado de esta métrica.

Definición 2.16 (Métrica inducida por un valor absoluto)

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{K} , se define la distancia entre dos elementos $x, y \in \mathbb{K}$ como

$$d(x, y) = |x - y|.$$

La función d es llamada la métrica inducida por el valor absoluto $|\cdot|$.

Proposición 2.17

La métrica inducida por un valor absoluto es una métrica.

Demostración

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{K} y sea $d(x, y)$ la métrica inducida por $|\cdot|$.

•) $d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$, así $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Ahora, si $d(x, y) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} |x - y| &= 0 \\ \iff x - y &= 0 \\ \iff x &= y. \end{aligned}$$

•) $d(x, y) = |x - y| = |-1(x - y)| = |-x + y| = |y - x| = d(y, x)$.

•) $d(x, y) = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$. ■

Lema 2.18

La función valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es continua.

Demostración

Sea $x_0 \in \mathbb{K}$ y sea $\epsilon > 0$. Tomando $\delta = \epsilon$, tenemos que $|x - x_0| < \delta = \epsilon$. Así

$$||x| - |x_0||_{\mathbb{R}} \leq |x - x_0| < \epsilon$$

Entonces $|\cdot|$ es continua en x_0 , y como x_0 se eligió de manera arbitraria, $|\cdot|$ es continua. ■

Proposición 2.19

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto definido sobre \mathbb{K} . Las operaciones de suma, producto y tomar inversos aditivo y multiplicativo son continuas.

Demostración

- Sean $x_0, y_0 \in \mathbb{K}$ fijos. Para cualquier $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ se tiene que si $|x - x_0| < \delta$ y $|y - y_0| < \delta$, entonces

$$|(x_0 + y_0) - (x + y)| \leq |x_0 - x| + |y_0 - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Así la suma es una función continua.

- Sean $x_0, y_0 \in \mathbb{K}$. Para cualquier $\epsilon > 0$, si elegimos $\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)}, \frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}, 1 \right\}$ se tiene que si $|x - x_0| < \delta$ y $|y - y_0| < \delta$, entonces

$$|y| = |y - y_0 + y_0| \leq |y - y_0| + |y_0| < 1 + |y_0|.$$

Además

$$\begin{aligned} |x_0 y_0 - xy| &= |x_0 y_0 - x_0 y + x_0 y - xy| \\ &\leq |x_0| |y_0 - y| + |y| |x_0 - x| \\ &< |x_0| \left(\frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)} \right) + (1 + |y_0|) \left(\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{|x_0|}{|x_0|+1} \right) + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto el producto es una función continua.

- Sea $x_0 \in \mathbb{K}$. Para cualquier $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ se tiene que

$$|x - x_0| < \delta \implies | -x - (-x_0) | = |x_0 - x| < \delta = \epsilon.$$

Así la operación de tomar inverso aditivo es continua.

- Sea $x_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Para cualquier $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{\epsilon|x_0|^2}{2} \right\}$ tenemos que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} ||x| - |x_0||_{\mathbb{R}} &\leq |x - x_0| < \frac{|x_0|}{2} \\ \implies -\frac{|x_0|}{2} &< |x| - |x_0| < \frac{|x_0|}{2} \\ &\implies \frac{|x_0|}{2} < |x| \\ &\implies \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|x_0|}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\left| \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|} < \left(\frac{2}{|x_0|} \right) \left(\frac{1}{|x_0|} \right) \left(\frac{\epsilon|x_0|^2}{2} \right) = \epsilon.$$

Por lo tanto la operación de tomar inverso multiplicativo es continua. ■

Definición 2.20 (Espacio ultramétrico)

Un espacio métrico $\langle X, d \rangle$ que satisface $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ para todo $x, y, z \in X$ se llama espacio ultramétrico.

Proposición 2.21

Sean $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{K} y $d : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ la métrica inducida por $|\cdot|$. El valor absoluto $|\cdot|$ es no arquimediano si y sólo si el espacio es ultramétrico.

Demostración

\Rightarrow) Para $x, y, z \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| = |(x + z) - (z + y)| \\ &= |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq \max\{|x - z|, |z - y|\} \\ &\Rightarrow d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}. \end{aligned}$$

\Leftarrow) Sean $x, y \in \mathbb{K}$. Tenemos $d(x, -y) \leq \max\{d(x, 0), d(0, -y)\}$

$$\Rightarrow |x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Proposición 2.22

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto no arquimediano sobre \mathbb{K} . Si $x, y \in \mathbb{K}$ y $|x| \neq |y|$, entonces $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

Demostración

Sin pérdida de generalidad sea $|x| > |y|$. Tenemos que

$$|x + y| \leq |x| = \max\{|x|, |y|\} \quad (i).$$

Por otro lado $x = (x + y) + (-y)$, entonces $|x| \leq \max\{|x + y|, |y|\}$. Como sabemos que $|x| > |y|$, tenemos que $\max\{|x + y|, |y|\} = |x + y|$, y así

$$\max\{|x|, |y|\} = |x| \leq |x + y| \quad (ii).$$

De (i) y (ii) tenemos que $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$. ■

Corolario 2.23

En un espacio ultramétrico $\langle X, d \rangle$ todos los triángulos son isósceles.

Demostración

Sean $x, y, z \in X$. Las longitudes de los lados de un triángulo son $d(x, y)$, $d(y, z)$, $d(z, x)$ y podemos expresar $x - y = (x - z) + (z - y)$. Consideremos dos casos:

- Si $d(x, z) = |x - z| = |z - y| = d(y, z)$ entonces el triángulo es isósceles.
- Si $d(x, z) = |x - z| \neq |z - y| = d(y, z)$ entonces $d(x, y) = \max\{d(x, z), d(z, y)\}$. ■

Definición 2.24 (Bola abierta, bola cerrada)

Sean $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{K} y d la métrica inducida por este valor absoluto. Sean $a \in \mathbb{K}$ y $r \in \mathbb{R}_+$. La bola abierta con radio $r \neq 0$ y centro en a es el conjunto

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{K} \mid d(x, a) < r\}.$$

La bola cerrada con centro en a y radio r es el conjunto

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{K} \mid d(x, a) \leq r\}.$$

Proposición 2.25

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto no arquimediano sobre \mathbb{K} y sean $a, b \in \mathbb{K}$, $r, s \in \mathbb{R}^+$. Entonces:

- i) Si $b \in B_r(a)$ entonces $B_r(a) = B_r(b)$.
- ii) Si $b \in \overline{B}_r(a)$ entonces $\overline{B}_r(a) = \overline{B}_r(b)$.
- iii) $B_r(a)$ es abierto y cerrado.
- iv) $\overline{B}_r(a)$ es abierto y cerrado.
- v) $B_r(a) \cap B_s(b) \neq \emptyset$ si y sólo si $B_r(a) \subseteq B_s(b)$ ó $B_s(b) \subseteq B_r(a)$.
- vi) $\overline{B}_r(a) \cap \overline{B}_s(b) \neq \emptyset$ si y sólo si $\overline{B}_r(a) \subseteq \overline{B}_s(b)$ ó $\overline{B}_s(b) \subseteq \overline{B}_r(a)$.

Demostración

- i) Sea $b \in B_r(a)$ y $x \in B_r(a)$ entonces $|b - a| < r$ y $|x - a| < r$. Por otro lado

$$|x - b| = |(x - a) + (a - b)| \leq \max\{|x - a|, |a - b|\} < r.$$

Así $x \in B_r(b)$ y $B_r(a) \subseteq B_r(b)$; análogamente $B_r(b) \subseteq B_r(a)$. Por lo tanto $B_r(a) = B_r(b)$.

- ii) Análogamente como en el inciso anterior.

- iii) $B_r(a)$ es abierto por definición. Probaremos que $B_r(a)$ es cerrado.

•) Si $B_r(a)' = \emptyset$ entonces $B_r(a)' \subseteq B_r(a)$.

•) Si $B_r(a)' \neq \emptyset$, sea $x \in B_r(a)'$ entonces $B_s(x) \cap [B_r(a) \setminus \{x\}] \neq \emptyset \forall s \in \mathbb{R}^+$. Sea $y \in B_s(x)$ con $s \leq r$, entonces $|x - y|_p < s$ y $|a - y|_p < r$, así

$$|x - a|_p = |x - y + y - a|_p \leq |x - y|_p + |y - a|_p \leq \max\{|x - y|_p, |y - a|_p\} < r$$

entonces $x \in B_r(a)$.

Así $B_r(a)' \subseteq B_r(a)$ y $B_r(a)$ es cerrado.

- iv) Sabemos que $\overline{B}_r(a)$ es cerrado, entonces tenemos

$$\overline{B}_r(a) = B_r(a)' \cup B_r(a) = B_r(a)$$

Así $\overline{B}_r(a)$ es abierto.

- v) \Rightarrow) Como $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$, entonces $\exists c \in B(a, r) \cap B(b, s)$.
 Por 1) tenemos que $B(a, r) = B(c, r)$ y $B(b, s) = B(c, s)$.
 Si $r \leq s$ entonces $B(c, r) \subseteq B(c, s)$ y $B(a, r) \subseteq B(b, s)$
 Si $s \leq r$ entonces $B(c, s) \subseteq B(c, r)$ y $B(b, s) \subseteq B(a, r)$.
 \Leftarrow) Como forzosamente un conjunto es subconjunto del otro, entonces es claro que la intersección es no vacía.
 vi) La prueba es análoga a la demostración del inciso anterior. ■

2.1.2. Valores absolutos sobre \mathbb{Q}

En esta parte estudiaremos todos los valores absolutos que se pueden definir sobre el campo de los números racionales. Comenzaremos haciendo mención de los valores absolutos sobre \mathbb{Q} que hemos definido hasta el momento: El valor absoluto trivial, el valor absoluto usual y el valor absoluto p-ádico. Probaremos entonces que en determinada forma, los anteriores son todos los tipos de valores absolutos que se pueden definir sobre \mathbb{Q} .

Definición 2.26 (Valores absolutos equivalentes)

Dos valores absolutos $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ sobre un campo \mathbb{K} se dicen equivalentes si definen la misma topología sobre \mathbb{K} .

Lema 2.27

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto (arquimedaino) definido sobre \mathbb{K} . Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ si y sólo si $|x| < 1$.

Demostración

\Rightarrow) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, entonces para $\epsilon = 1 \exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < 1 \quad \text{para } n > N.$$

Luego $|x|^{N+1} < 1$ por lo tanto $|x| < 1$.

\Leftarrow) Si $x = 0$ la implicación se cumple.

Si $x \neq 0$ entonces $\frac{1}{|x|} > 1$, así $\exists h > 0$ tal que $\frac{1}{|x|} = 1 + h$. Por la desigualdad de Bernoulli, tenemos que

$$\left(\frac{1}{|x|}\right)^k = (1 + h)^k \geq 1 + kh \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Sea $\epsilon > 0$ por la propiedad arquimediana sabemos que $\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+$ tal que $Nh > \frac{1}{\epsilon} - 1$, luego $1 + Nh > \frac{1}{\epsilon}$, de lo que se sigue $\frac{1}{|x|^N} > \frac{1}{\epsilon}$ y entonces $|x|^N < \epsilon$.

Para $n \geq N$ se cumple que $|x|^n < \epsilon$ y así $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$. ■

Lema 2.28

Sean $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ dos valores absolutos definidos sobre \mathbb{K} . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son valores absolutos equivalentes.

ii) Para todo $x \in \mathbb{K}$ se tiene que $|x|_1 < 1$ si y sólo si $|x|_2 < 1$.

iii) Existe un número real positivo α tal que $|x|_1 = |x|_2^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

Demostración

i) \implies ii)

Sea $x \in \mathbb{K}$ tal que $|x|_1 < 1$, entonces, por el lema anterior, tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ con $|\cdot|_1$.

Como $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son equivalentes, todo abierto de $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|_1})$ es abierto en $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|_2})$, donde $d_{|\cdot|_1}, d_{|\cdot|_2}$ son las métricas inducidas por los valores absolutos $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ respectivamente.

Así $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ con $|\cdot|_2$, y por el lema anterior $|x|_2 < 1$. Análogamente, si $|x|_2 < 1$ entonces $|x|_1 < 1$.

ii) \implies iii)

Sea $x \in \mathbb{K}$, distinguiremos dos casos:

Si $|\cdot|_1$ es el valor absoluto trivial, para $x \neq 0, 1$ tenemos que si $|x|_1 = 1$ entonces $|x|_2 = 1$ pues, de lo contrario, tendríamos que $|x|_1 \neq 1$, lo que es una contradicción.

Si $|\cdot|_1$ no es el valor absoluto trivial, entonces existe $x_0 \neq 0, 1$ tal que $|x_0|_1 < 1$, lo que a su vez implica que $|x_0|_2 < 1$. Sea $\alpha = \log_{|x_0|_2} |x_0|_1$, de esta manera $|x_0|_2^\alpha = |x_0|_1$. Además $\alpha > 0$, pues de lo contrario sucedería que $|x_0|_1 \geq 1$, lo que es una contradicción.

Ahora, si $|x|_1 = 1$ entonces $|x|_2 = 1$, pues de lo contrario tendríamos que $|x|_1 \neq 1$, lo que es una contradicción. Así $|x|_1 = |x|_2^\alpha$.

Por otro lado, si $|x|_1 = |x_0|_1$, entonces $|x|_2 = |x_0|_2$, porque si $|x|_2 < |x_0|_2$ entonces $|\frac{x}{x_0}|_2 < 1$, lo que implica que $|\frac{x}{x_0}|_1 < 1$ y así $|x|_1 < |x_0|_1$, lo que es una contradicción. Análogamente se obtiene una contradicción al suponer que $|x|_2 > |x_0|_2$. Así $|x|_1 = |x_0|_1 = |x_0|_2^\alpha = |x|_2^\alpha$.

Por último, si $|x|_1 \neq 1$ y $|x|_1 \neq |x_0|_1$, sea entonces

$$S = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, |x|_1^{\frac{m}{n}} < |x_0|_1 \right\}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} \in S &\iff |x|_1^{\frac{m}{n}} < |x_0|_1, \iff |x|_1^m = |x_0|_1^n \iff \left| \frac{x^m}{x_0^n} \right|_1 < 1 \\ &\iff \left| \frac{x^m}{x_0^n} \right|_2 < 1 \iff |x|_2^m = |x_0|_2^n \iff |x|_2^{\frac{m}{n}} < |x_0|_2. \end{aligned}$$

Así, se sigue que

$$S = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, |x|_2^{\frac{m}{n}} < |x_0|_2 \right\} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, |x|_1^{\frac{m}{n}} < |x_0|_1 \right\}.$$

Esto implica

$$S = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, |x|_2 < |x_0|_2^{\frac{n}{m}} \right\} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, |x|_1 < |x_0|_1^{\frac{n}{m}} \right\}.$$

Ahora, sean $s = \log_{|x_0|_1} |x|_1$ y $t = \log_{|x_0|_2} |x|_2$. Obtenemos así que

$$S = \left\{ r = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, s < \frac{1}{r} \right\} = \left\{ r = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, t < \frac{1}{r} \right\}.$$

Si $s \neq t$ se tiene que $s < t$ o $t < s$. Supongamos $s < t$, entonces $\exists p \in \mathbb{Q}$ tal que $s < p < t$, luego se sigue que $\frac{1}{p} \in S$, pues $s < \frac{1}{p} = p$. Por otro lado, $\frac{1}{p} \notin S$ pues

$\frac{1}{p} = p < t$. Y así llegamos a una contradicción, pues $\frac{1}{p} \in S$ y $\frac{1}{p} \notin S$. Análogamente se obtiene una contradicción al suponer $t < s$. Por lo tanto $s = t$ y podemos concluir que

$$|x|_1 = |x_0|_1^s = (|x_0|_2^s)^s = (|x_0|_2^s)^\alpha = |x|_2^\alpha$$

iii) \implies i)

Sea $B_r^{|\cdot|_1}(x)$ una bola abierta en $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|_1})$. Sabemos que $\forall z \in \mathbb{K}, |z|_1 = |z|_2^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Luego

$$\begin{aligned} y \in B_r^{|\cdot|_1}(x) &\iff |x - y|_1 < r \iff |x - y|_2^\alpha < r \iff |x - y| < \sqrt[\alpha]{r} \\ &\iff y \in B_{\sqrt[\alpha]{r}}^{|\cdot|_2}(x). \end{aligned}$$

Así toda bola abierta en $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|_1})$ es bola abierta en $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|_2})$. Análogamente toda bola abierta en $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|_2})$ es bola abierta en $(\mathbb{K}, d_{|\cdot|_1})$. Por lo tanto $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son equivalentes. ■

Corolario 2.29

Sean p, q dos números primos distintos. Entonces $|\cdot|_p$ y $|\cdot|_q$ no son equivalentes.

Demostración

Tenemos que $|p|_p = \frac{1}{p}$, mientras que $|p|_q = 1$; entonces, por el lema anterior $|\cdot|_p$ y $|\cdot|_q$ no son equivalentes. ■

Lema 2.30

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{Q} . Si se conoce $|n|$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces se puede determinar $|x|$ para toda $x \in \mathbb{Q}$.

Demostración

En primer lugar $|0| = 0$ por definición. Ahora, para $n \in \mathbb{Z}^-$ se tiene que $-n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $|n| = |-n|$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tenemos que $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{|n|}$. Así podemos decir que para cualquier $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ se tiene que $|\frac{a}{b}| = |a| |\frac{1}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$. ■

Teorema 2.31 (Ostrowsky)

Cada valor absoluto no trivial sobre \mathbb{Q} es equivalente a uno de los valores absolutos $|\cdot|_p$ para p un número primo fijo o $p = \infty$.

Demostración

Dado un valor absoluto $|\cdot|$ no trivial sobre \mathbb{Q} distinguiremos dos casos:

•) $|\cdot|$ es un valor absoluto arquimediano.

Probaremos que $|\cdot|$ es equivalente al valor absoluto usual $|\cdot|_\infty$. Sea n_0 el menor entero positivo tal que $|n_0| > 1$ (podemos asegurar la existencia de tal entero por la propiedad arquimediana) y $\alpha = \log_{n_0} |n_0|$, así tenemos, por la definición de α , que $|n_0| = n_0^\alpha$. Probaremos que $|x| = |x|_\infty^\alpha \forall x \in \mathbb{Z}^+$. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y escribiendo n en base n_0 tenemos

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \dots + a_k n_0^k$$

con $0 \leq a_i < n_0$ para $i = 0, 1, \dots, k$ y $a_k \neq 0$. Además sabemos que k queda determinada por $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$. Ahora, tomando valores absolutos obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |n| &= |a_0 + a_1 n_0 + \cdots + a_k n_0^k| \leq |a_0| + |a_1| |n_0| + \cdots + |a_k| |n_0|^k \\ &= |a_0| + |a_1| n_0^\alpha + \cdots + |a_k| n_0^{k\alpha}. \end{aligned}$$

Como n es el entero más pequeño para el que su valor absoluto es mayor que 1, decimos que $|a_i| \leq 1$, para $i = 1, \dots, k$. Así,

$$\begin{aligned} |n| &\leq 1 + n_0^\alpha + \cdots + n_0^{k\alpha} = n_0^{k\alpha} (1 + n_0^{-\alpha} + \cdots + n_0^{-k\alpha}) \\ &\leq n_0^{k\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} n_0^{-i\alpha} = n_0^{k\alpha} \left(\frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1} \right). \end{aligned}$$

Tomando $C = \frac{n_0^\alpha}{n_0^\alpha - 1}$ tenemos que $C > 0$ y $|n| \leq C n_0^{k\alpha} \leq C n^\alpha \forall n \in \mathbb{Z}^+$, pues $n_0^k \leq n$. Si aplicamos la desigualdad anterior a n^N obtenemos $|n^N| \leq C n^{N\alpha}$. Si sacamos la raíz N -ésima tenemos que $|n| \leq \sqrt[N]{C} n^\alpha$. Haciendo $N \rightarrow \infty$ tenemos que $\sqrt[N]{C} \rightarrow 1$, y así $|n| \leq n^\alpha$.

Por otro lado $n = a_0 + a_1 n_0 + \cdots + a_k n_0^k$, y como $n_0^k \leq n < n_0^{k+1}$, tenemos

$$n_0^{(k+1)\alpha} = |n_0^{k+1}| = |n + n_0^{k+1} - n| \leq |n| + |n_0^{k+1} - n|.$$

Por lo que

$$|n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - |n_0^{k+1} - n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n)^\alpha.$$

De lo anterior obtenemos que

$$|n| \geq n_0^{(k+1)\alpha} - (n_0^{k+1} - n_0^k)^\alpha = n_0^{(k+1)\alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n_0} \right)^\alpha \right] = C' n_0^{(k+1)\alpha} \geq C' n^\alpha.$$

Haciendo $C' = 1 - (1 - \frac{1}{n_0})^\alpha$; de esta forma $C' > 0$ y no depende de n . Ahora, aplicando la desigualdad obtenida al entero n^N tenemos $|n^N| \geq C' n^{N\alpha}$, lo que implica que $|n| \geq \sqrt[N]{C'} n^\alpha$. Haciendo $N \rightarrow \infty$ tenemos $|n| \geq n^\alpha$ pues $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{C'} = 1$. Así $|n| = n^\alpha$, por lo tanto $|n| = |n|_\infty^\alpha \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Y por el lema anterior, $|\cdot|$ y $|\cdot|_\infty$ son equivalentes.

- $|\cdot|$ es un valor absoluto no arquimediano.

Dado que $|\cdot|$ es no arquimediano, se cumple que $|n| \leq 1 \forall n \in \mathbb{Z}$; además, como $|\cdot|$ es no trivial, existe al menos un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $|n| < 1$. Sea n_0 el menor número natural para el que $|n_0| < 1$, entonces n_0 debe ser primo, pues de lo contrario tendríamos, por el teorema fundamental de la aritmética, que $n_0 = ab$ con $a, b < n_0$, y por nuestra elección de n_0 , $|a| = |b| = 1$, pero $|a||b| = 1 = |n_0| < 1$, lo que es una contradicción. Así $n_0 = p$ para algún p primo.

Ahora, sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\alpha = \log_{\frac{1}{p}} |p|$. Si $p \nmid n$, entonces $|n|_p = 1$ y $n = pq + r$ con $0 < r < p$; por la elección que hicimos de p , se cumple que $|r| = 1$, además como $|p| < 1$ y $|q| \leq 1$, también tenemos que $|pq| < 1$, así $|n| = |pq + r| = \max\{|pq|, |r|\} = 1$, y esto implica que $|n| = |n|_p^\alpha = 1$. Por otro lado, si $p \mid n$, podemos escribir a n de la forma $n = p^\nu n'$ con $p \nmid n'$. Así $|n| = |p|^\nu |n'| = |p|^\nu = (\frac{1}{p})^{\alpha\nu} = (\frac{1}{p^\nu})^\alpha = |n|_p^\alpha$.

Entonces por los lemas 2.30 y 2.28, $|\cdot|$ es equivalente a $|\cdot|_p$. ■

2.2. El campo \mathbb{Q}_p

2.2.1. Construcción algebraica

En esta parte se construirá el campo de los números p -ádicos como una completación del campo de los números racionales respecto al valor absoluto $|\cdot|_p$. Comenzaremos por las definiciones básicas necesarias para comprender la teoría de esta sección, después procederemos a obtener la construcción deseada y finalmente se probará de que el campo de los números p -ádicos es completo.

Definición 2.32 (Sucesión de Cauchy)

Sea $|\cdot|$ un valor absoluto sobre \mathbb{K} . Una sucesión de elementos de \mathbb{K} , $\{x_n\}$ es llamada un sucesión de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ siempre que $m, n > M$.

Definición 2.33 (Campo completo)

Un campo \mathbb{K} es completo respecto a $|\cdot|$ si toda sucesión de Cauchy de elementos de \mathbb{K} es convergente.

Lema 2.34

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de \mathbb{K} es de Cauchy respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$.

Demostración

\Rightarrow) Sea $\epsilon > 0$, como $\{x_n\}$ es de Cauchy, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon \forall m, n \geq N$. En particular si $n > N$, tenemos que $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, así $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$.
 \Leftarrow) Sea $\epsilon > 0$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n > N$, entonces $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Sean $m, n > N$ distintos, s.p.g. sea $m > n$ con $m = n + r$, entonces

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_{n+r} - x_n| = |x_{n+r} - x_{n+r-1} + x_{n+r-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \max\{|x_{n+r} - x_{n+r-1}|, \dots, |x_{n+1} - x_n|\} < \epsilon. \end{aligned}$$

Así $\{x_n\}$ es de Cauchy. ■

Teorema 2.35

\mathbb{Q} no es completo respecto a cualquiera de los valores absolutos no triviales.

Demostración

Por el teorema de Ostrowsky sólo es necesario verificar esto para los valores absolutos $|\cdot|_p$ y $|\cdot|_\infty$, además es bien sabido que \mathbb{Q} no es completo respecto a $|\cdot|_\infty$, por lo que sólo probaremos para $|\cdot|_p$ con p un número primo fijo.

Consideremos la sucesión de números racionales $\{a_n\}$ tal que $a_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n$. $\{a_n\}$ es de Cauchy puesto que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |p^{n+1} - p^n|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |p^n(p-1)|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n} = 0.$$

Además es claro que $\{a_n\}$ converge a $1+p+p^2+\dots+p^n+\dots$. Si $1+p+p^2+\dots+p^n+\dots$ fuese un número racional r , tendríamos entonces que $r = 1+p+p^2+\dots+p^n+\dots = 1+p(1+p+\dots+p^n+\dots) = 1+pr$, lo que es una contradicción. Así r no es un número racional y por lo tanto \mathbb{Q} no es completo. ■

Definición 2.36

Se denotará por \mathcal{C} al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de elementos de \mathbb{Q} con respecto a $|\cdot|_p$ para el primo fijo p .

Lema 2.37

Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de \mathbb{K} y sea $|\cdot|$ un valor absoluto definido sobre \mathbb{K} . Entonces para $\epsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $n, m > N$ entonces $|x_n - x_m| < 1$, en particular $|x_n - x_{N+1}| < 1$, así $||x_n| - |x_{N+1}||_{\mathbb{R}} \leq |x_n - x_{N+1}| < 1$, luego $-1 < |x_n| - |x_{N+1}| < 1$ de lo que se sigue que $|x_n| < |x_{N+1}| + 1$ para $n > N$. Sea $k = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}$, entonces $|x_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. ■

Proposición 2.38

\mathcal{C} es un anillo conmutativo con unidad definiendo las operaciones de suma y producto como $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$ y $\{x_n\}\{y_n\} = \{x_n y_n\}$.

Demostración

•) Cerradura de la suma.

Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}$ y $\epsilon > 0$, entonces existen $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+$ tales que si $n, m > N_1$ entonces $|x_n - x_m|_p < \epsilon$, y si $n, m > N_2$ entonces $|y_n - y_m|_p < \epsilon$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces si $n, m > N$ tenemos que $|x_n + y_n - (x_m + y_m)|_p = |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)|_p \leq \max\{|x_n - x_m|_p, |y_n - y_m|_p\} < \epsilon$. Así $\{x_n + y_n\}$ es de Cauchy.

•) Cerradura de la multiplicación.

Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}$ y sea $\epsilon > 0$, por el lema anterior sabemos que $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que $|x_n|_p < k_1$ y $|y_n|_p < k_2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$; si elegimos $k = \max\{k_1, k_2\}$ entonces, para $\frac{\epsilon}{k} \exists N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+$ tales que, si $n, m > N_1$ entonces $|x_n - x_m|_p < \frac{\epsilon}{k}$ y si $n, m > N_2$ entonces $|y_n - y_m|_p < \frac{\epsilon}{k}$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, ahora, si $n, m \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m|_p &= |x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m|_p \\ &= |y_n(x_n - x_m) + x_m(y_n - y_m)|_p \\ &\leq \max\{|y_n|_p |x_n - x_m|_p, |x_m|_p |y_n - y_m|_p\} \\ &< \max\left\{k \left(\frac{\epsilon}{k}\right), k \left(\frac{\epsilon}{k}\right)\right\} = \epsilon. \end{aligned}$$

Así $\{x_n y_n\} \in \mathcal{C}$.

Por último, notemos que el elemento neutro aditivo es $\{0\}$ y el elemento unidad es $\{1\}$, también es claro que el resto de las propiedades de anillo conmutativo se cumplen. Así \mathcal{C} es un anillo conmutativo con unidad. ■

Lema 2.39

La función $f : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathcal{C}$ definida por $f(x) = \{x\}$ es un encaje de \mathbb{Q} en \mathcal{C} .

Demostración

La función está bien definida y es inyectiva, puesto que

$$f(x) = f(y) \iff \{x\} = \{y\} \iff x = y.$$

Además f es homomorfismo de anillos, pues

- i) $f(1) = \{1\}$.
- ii) $f(x + y) = \{x + y\} = \{x\} + \{y\} = f(x) + f(y)$.
- iii) $f(xy) = \{xy\} = \{x\}\{y\} = f(x)f(y)$.

Definición 2.40

Se define $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ como el conjunto $\mathcal{N} = \{ \{x_n\} \mid x_n \rightarrow 0 \}$, es decir, el conjunto de sucesiones de Cauchy que convergen a cero respecto a $|\cdot|_p$. ■

Proposición 2.41

\mathcal{N} es un ideal maximal en \mathcal{C} .

Demostración

i) $\{0\} \in \mathcal{N}$, puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} |0|_p = 0$.

ii) La suma es cerrada.

Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{N}$, para $\epsilon > 0$ $\exists N_1, N_2$ tales que, si $n > N_1$ y $m > N_2$ entonces $|x_n|_p < \epsilon$ y $|y_m|_p < \epsilon$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, para $n > N$ se tiene $|x_n + y_n|_p \leq \max\{|x_n|_p, |y_n|_p\} < \epsilon$, así $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = 0$, por lo tanto $\{x_n\} + \{y_n\} \in \mathcal{N}$.

iii) Si $x \in \mathcal{C}$ y $y \in \mathcal{N}$ entonces $xy \in \mathcal{N}$.

Sean $\{x_n\} \in \mathcal{C}$ y $\{y_n\} \in \mathcal{N}$. Tenemos que $\{x_n\}\{y_n\} = \{x_n y_n\}$, luego $|x_n y_n|_p = |x_n|_p |y_n|_p$, y como $\{x_n\} \in \mathcal{C}$, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n|_p \leq k \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p |y_n|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k |y_n|_p = 0.$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n|_p = 0$, y así $\{x_n\}\{y_n\} \in \mathcal{N}$.

*) \mathcal{N} es ideal maximal.

Sea \mathcal{I} ideal de \mathcal{C} tal que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{I}$ y $\mathcal{N} \neq \mathcal{I}$.

Como $\mathcal{I} \neq \mathcal{N}$, $\exists \{x_n\} \in \mathcal{I}$ tal que $x_n \not\rightarrow 0$. Así existe $c > 0$ y $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n > N$, entonces $|x_n|_p > c$. Definimos $\{y_n\}$ como

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq N \\ \frac{1}{x_n}, & \text{si } n > N. \end{cases}$$

Así, para $n > N$ se tiene que

$$|y_{n+1} - y_n|_p = \left| \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right|_p = \frac{|x_n - x_{n+1}|_p}{|x_{n+1}|_p |x_n|_p} < \frac{|x_n - x_{n+1}|_p}{c^2}.$$

Como la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{n+1} - y_n|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - x_{n+1}|_p}{c^2} = 0.$$

Por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{n+1} - y_n|_p = 0$. Entonces $\{y_n\}$ es de Cauchy; además $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{I}$ por ser \mathcal{I} ideal. Por otro lado

$$\{x_n y_n\} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \leq N \\ 1, & \text{si } n > N \end{cases}$$

Entonces $\{1\} - \{x_n y_n\} \in \mathcal{N}$. Sea $\{z_n\} = \{1\} - \{x_n y_n\}$, luego $\{1\} = \{x_n y_n\} + \{z_n\} \in \mathcal{I}$ pues, $\{x_n y_n\}, \{z_n\} \in \mathcal{I}$. Así $\mathcal{I} = \mathcal{C}$ y por lo tanto \mathcal{N} es maximal en \mathcal{C} . ■

Definición 2.42 (Campo de los números p-ádicos)

Se define el campo de los números p-ádicos como el campo $\mathbb{Q}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N}$.

Lema 2.43

Sea $\{x_n\} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$. La sucesión de números reales $\{|x_n|_p\}$ es eventualmente estacionaria, es decir, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n|_p = |x_m|_p$ cuando $m, n > N$.

Demostración

Como $x_n \rightarrow 0$, existen $c > 0$ y $N_1 \in \mathbb{Z}$ tales que, si $n > N_1$ entonces $|x_n|_p \geq c > 0$. Por otro lado, al ser $\{x_n\}$ de Cauchy, $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n, m \geq N_2$ entonces $|x_n - x_m|_p < c$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, si $n, m > N$, entonces $|x_n - x_m|_p < c \leq |x_n|_p, |x_m|_p$. Se sigue que si $n, m > N$, entonces $|x_n - x_m|_p < \max\{|x_n|_p, |x_m|_p\}$. Entonces por el corolario 2.23 tenemos que $|x_n|_p = |x_m|_p$ si $m, n > N$. ■

Ahora nos encontramos en condiciones de extender el valor absoluto p-ádico (hasta el momento definido sólo sobre \mathbb{Q}) a todo el campo \mathbb{Q}_p .

Definición 2.44 (Valor absoluto p-ádico)

Si $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ y $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de Cauchy representante de λ , se define $|\lambda|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p$.

Proposición 2.45

El límite de la definición anterior está bien definido.

Demostración

En primer lugar el límite existe, pues, por el lema 2.43, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n|_p = |x_m|_p$

si $n, m > N$. Así $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = |x_{N+1}|_p$.

Por otro lado, el límite no depende de la elección de la sucesión representante de λ , pues si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son ambas representantes de λ , entonces $\{x_n\} - \{y_n\} \in \mathcal{N}$. Sea $\epsilon > 0$, entonces $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $n > N$ entonces $|x_n - y_n|_p < \epsilon$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} & ||x_n|_p - |y_n|_p|_{\mathbb{R}} \leq |x_n - y_n|_p < \epsilon \\ \implies & ||x_n|_p - |y_n|_p|_{\mathbb{R}} < \epsilon \\ \implies & \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_n|_p - |y_n|_p) = 0 \\ \implies & \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_p. \end{aligned}$$

Lema 2.46

La función $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por la definición 2.44 es un valor absoluto no arquimediano.

Demostración

i) Sea $\{x_n\}$ representante de λ . Si $|\lambda|_p = 0$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = 0$, entonces $\{x_n\} \in \mathcal{N}$, i.e. $\lambda = 0$.
Ahora, si $\lambda = 0$, sea $\{x_n\}$ un representante de λ , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = 0$, así $|\lambda|_p = 0$.

ii) Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ representantes de λ, β respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} |\lambda|_p |\beta|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p |y_n|_p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n|_p = |\lambda \beta|_p. \end{aligned}$$

*) $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano.

Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ representantes de λ, β respectivamente. Entonces existen $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{Z}^+$ tales que $|x_n|_p = |x_{N_1+1}|_p$ si $n > N_1$, $|y_n|_p = |y_{N_2+1}|_p$ si $n > N_2$ y $|x_n + y_n|_p = |x_{N_3+1} + y_{N_3+1}|_p$ si $n > N_3$. Sea $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, así

$$\begin{aligned} |\lambda|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = |x_{N+1}|_p, \\ |\beta|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_p = |y_{N+1}|_p, \\ |\lambda + \beta|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n + y_n|_p = |x_{N+1} + y_{N+1}|_p. \end{aligned}$$

Como $|x_{N+1} + y_{N+1}|_p \leq \max\{|x_{N+1}|_p, |y_{N+1}|_p\}$, pues $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano sobre \mathbb{Q} , entonces $|\lambda + \beta|_p \leq \max\{|\lambda|_p, |\beta|_p\}$. ■

Lema 2.47

La imagen de \mathbb{Q} bajo la inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ es un subconjunto denso en \mathbb{Q}_p .

Demostración

Probaremos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}_p$, lo que es equivalente a probar $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. Sean $\epsilon > 0$,

$\lambda \in \mathbb{Q}_p$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy representante de λ . Sea ϵ' con $\epsilon' < \epsilon$, como $\{x_n\}$ es de Cauchy, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n - x_m|_p < \epsilon'$ si $n, m > N$. Sea $y = x_{N+1}$, consideremos entonces la sucesión constante $\{y\}$. Si $\beta \in \mathbb{Q}_p$ es representada por $\{y\}$, entonces β es la imagen de $y \in \mathbb{Q}$ bajo la inclusión. Así $\lambda - \beta$ es representada por $\{x_n - y\}$ y

$$|\lambda - \beta|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y|_p.$$

Como para $n > N$ tenemos que $|x_n - y|_p = |x_n - x_N|_p < \epsilon'$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y|_p \leq \epsilon' < \epsilon.$$

Así $\beta \in B_\epsilon(\lambda)$ y $\lambda \in \mathbb{Q}'$. Luego $\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$, además, claramente $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q}_p$. ■

Lema 2.48

\mathbb{Q}_p es completo respecto a $|\cdot|_p$.

Demostración

Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de \mathbb{Q}_p . Por el lema anterior, para cada $i \in \mathbb{Z}^+ \exists \beta_i \in B(\lambda_i, \frac{1}{i})$ tal que β_i es la clase de equivalencia de una sucesión constante de números racionales $\{y_i\}$ y satisface $|\lambda_i - \beta_i|_p < \frac{1}{i}$. Definamos $z_i = y_i$, así $\{z_i\}$ es una sucesión de números racionales y a continuación se probará que es de Cauchy.

Sea $\epsilon > 0$ entonces $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Por otro lado, como $\{\lambda_n\}$ es de Cauchy $\exists N' \in \mathbb{Z}^+$ tal que, si $n, m > N'$ entonces $|\lambda_n - \lambda_m|_p < \frac{1}{k}$.

Sea $N = \max\{k, N'\}$, tenemos que $\beta_n - \beta_m$ es la clase de equivalencia de la sucesión constante $\{x_t\} = \{z_n - z_m\}$, entonces si $n, m > N$ se sigue que

$$\begin{aligned} |z_n - z_m|_p &= \lim_{t \rightarrow \infty} |x_t|_p \\ &= |\beta_n - \beta_m|_p \\ &= |\beta_n - \lambda_n + \lambda_n - \lambda_m + \lambda_m - \beta_m|_p \\ &\leq \max\{|\beta_n - \lambda_n|_p, |\lambda_n - \lambda_m|_p, |\lambda_m - \beta_m|_p\} \\ &< \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right\} = \frac{1}{k} < \epsilon. \end{aligned}$$

Así $\{z_n\}$ es de Cauchy en \mathbb{Q} . Por último, sea λ la clase de equivalencia de $\{z_n\}$, se probará entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$. Sea $\epsilon > 0$, entonces $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Como

$\{z_n\} = \{y_n\}$ es de Cauchy en \mathbb{Q} , entonces $\exists N' \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|y_n - y_m|_p < \frac{1}{k}$ para $n, m > N'$. Sea $N = \max\{k, N'\}$, si $n > N$ tenemos que

$$|\lambda_n - \lambda|_p = |\lambda_n - \beta_n + \beta_n - \lambda|_p \leq \max\{|\lambda_n - \beta_n|_p, |\beta_n - \lambda|_p\}.$$

Ahora, como $n > k$, se cumple $|\lambda_n - \beta_n|_p < \frac{1}{n} < \frac{1}{k}$, además $|\beta_n - \lambda|_p = \lim_{m \rightarrow \infty} |z_n - z_m|_p \leq \frac{1}{k}$, pues si $m, n > N'$, entonces $|y_m - y_n|_p < \frac{1}{k}$. Entonces $|\lambda_n - \lambda|_p < \frac{1}{k} < \epsilon$, así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda.$$

Por lo tanto \mathbb{Q}_p es completo respecto a $|\cdot|_p$. ■

Teorema 2.49

Para cada primo $p \in \mathbb{Z}^+$ existe un único campo \mathbb{Q}_p (salvo isomorfismos que preservan valores absolutos) con un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_p$ tal que:

1. Existe una inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ y el valor absoluto inducido por $|\cdot|_p$ sobre \mathbb{Q} vía esta inclusión es un valor absoluto p -ádico.
2. La imagen de \mathbb{Q} bajo esta inclusión es densa en \mathbb{Q}_p con respecto a $|\cdot|_p$.
3. \mathbb{Q}_p es completo respecto al valor absoluto $|\cdot|_p$.

Demostración

La demostración de los incisos 1., 2. y 3. está dada por los lemas 2.46, 2.47 y 2.48 respectivamente, probaremos a continuación la unicidad:

Sea $\langle K, |\cdot|_K \rangle$ un campo que satisface 1., 2. y 3., entonces existe $h : \mathbb{Q} \hookrightarrow K$ tal que $h(\mathbb{Q})$ es denso en K respecto a $|\cdot|_K$. Sea $g : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$, construiremos la función $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow K$ como sigue:

Sea $\lambda \in \mathbb{Q}_p$, entonces por la densidad de $g(\mathbb{Q})$ existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \rightarrow \lambda$ y $x_n = g(x'_n)$ con $x'_n \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Como el valor absoluto se mantiene igual en \mathbb{Q} y $g(\mathbb{Q})$ entonces $\{x'_n\}$ es sucesión de Cauchy en \mathbb{Q} y así $\{h(x'_n)\}$ es de Cauchy en K pues el valor absoluto se mantiene igual en \mathbb{Q} y en $h(\mathbb{Q})$. Como K es completo entonces existe $k \in K$ tal que $k = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x'_n)$, y se define $f(\lambda) = k$. Ahora notemos

- f está bien definida y es inyectiva.

Sean $\{y_n\}, \{z_n\} \subseteq g(\mathbb{Q})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Entonces $y_n = g(y'_n)$ y $z_n = g(z'_n)$ con $y'_n, z'_n \in \mathbb{Q}$. Así

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - z_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |g(y'_n) - g(z'_n)|_p = 0 \iff \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |h(y'_n) - h(z'_n)|_K = 0 &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} h(y'_n) - h(z'_n) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} h(y'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(z'_n). \end{aligned}$$

- f es suprayectiva.

Sea $w \in K$ entonces existe $\{w_n\} \subseteq h(\mathbb{Q})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ donde $w_n = h(w'_n) \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{Z}^+$, además $\{w'_n\}$ es sucesión de Cauchy en \mathbb{Q} , entonces $g(w'_n)$ es sucesión de Cauchy en \mathbb{Q}_p . Sea $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(w'_n) = \lambda$, entonces $f(\lambda) = w$.

- f es morfismo.

Por definición $f(1) = 1_K$, donde 1_K es la unidad en K .

Ahora, sean $x, y \in \mathbb{Q}_p$, entonces existen $\{g(x'_n)\}, \{g(y'_n)\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n) = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y'_n) = y$. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(x'_n) = f(x) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h(y'_n) = f(y).$$

Tenemos

$$f(x) + f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} h(y'_n)$$

Por otro lado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n) + g(y'_n) = x + y \implies \lim_{n \rightarrow \infty} h(x'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} h(y'_n) = f(x + y).$$

Así $f(x) + f(y) = f(x + y)$, por lo tanto f es morfismo. Es fácil ver que $f(xy) = f(x)f(y)$, entonces f es isomorfismo.

Ahora, sea $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ entonces existe $\{x_n\}$ tal que $x_n \rightarrow \lambda$ y $x_n = g(x'_n)$, se tiene

$$|\lambda|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |h(x'_n)|_K$$

y como $|\cdot|_K$ es continua, $\lim_{n \rightarrow \infty} |h(x'_n)|_K = |f(\lambda)|_K$. Por lo tanto $|\lambda|_p = |f(\lambda)|_K$. ■

2.2.2. Topología de \mathbb{Q}_p

En esta sección introduciremos las principales propiedades topológicas del campo \mathbb{Q}_p que serán de utilidad en los siguientes capítulos.

Notemos que el conjunto de valores que $|\cdot|_p$ toma está dado por $\{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Además, para cada $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, existe un único entero $v_p(x)$ tal que $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, lo que extiende la valuación p -ádica a \mathbb{Q}_p .

Veamos también que es prácticamente irrelevante hacer la distinción entre la bola abierta y la bola cerrada puesto que el conjunto $B_{p^r}(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x - a|_p < p^r\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x - a|_p \leq p^{r-1}\} = \overline{B_{p^{r-1}}}(a)$, con $r \in \mathbb{Z}$. Esto motiva la siguiente "redefinición":

Definición 2.50 (Bola)

El conjunto $B_r(a) := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x - a|_p \leq p^r\}$ es la bola en \mathbb{Q}_p con centro en a y radio p^r , $r \in \mathbb{Z}$. También se define la notación $B_r := B_r(0)$.

Definición 2.51 (Esfera)

El conjunto $S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x - a|_p = p^r\}$ es la esfera en \mathbb{Q}_p con centro en a y radio p^r , $r \in \mathbb{Z}$. También se define la notación $S_r := S_r(0)$.

Definición 2.52 (Anillo de enteros p -ádicos)

El anillo de enteros p -ádicos es el conjunto $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$.

Proposición 2.53

\mathbb{Z}_p es subanillo local de \mathbb{Q}_p , el conjunto $p\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p < 1\}$ es el único ideal maximal de \mathbb{Z}_p , además los únicos elementos invertibles en \mathbb{Z}_p son los elementos del conjunto S_0 .

Demostración

-) \mathbb{Z}_p es subanillo de \mathbb{Q}_p .
 - i) $1 \in \mathbb{Z}_p$, pues $|1|_p \leq 1$.
 - ii) Sean $x, y \in \mathbb{Z}_p$ entonces $|x - y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} = \max\{|x|_p, |y|_p\} \leq 1$.
 - iii) Sean $x, y \in \mathbb{Z}_p$ entonces $|xy|_p = |x|_p|y|_p \leq 1 \cdot 1 \leq 1$.

-) $p\mathbb{Z}_p$ es ideal de \mathbb{Z}_p .
 - i) $0 \in p\mathbb{Z}_p$ pues $|0|_p = 0 < 1$.
 - ii) Sean $x, y \in p\mathbb{Z}_p$, como $|x|_p < 1$ e $|y|_p < 1$ entonces

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} < 1.$$
 - iii) Sean $r \in \mathbb{Z}_p$ y $x \in p\mathbb{Z}_p$, como $|r|_p \leq 1$ y $|x|_p < 1$ entonces $|rx|_p = |r|_p|x|_p < 1$.
-) $p\mathbb{Z}_p$ es ideal maximal de \mathbb{Z}_p .
 Supongamos que \mathcal{I} es un ideal de \mathbb{Z}_p , entonces $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Si existe $z \in \mathcal{I}$ con $z \notin p\mathbb{Z}_p$ entonces $|z|_p = 1$, luego $|z^{-1}|_p = 1$ porque $|1|_p = |z|_p|z^{-1}|_p$, así $z^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ y por ser \mathcal{I} ideal se tiene $zz^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}_p$. Entonces $x \in \mathcal{I} \forall x \in \mathbb{Z}_p$, así $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathcal{I}$, por lo tanto $\mathbb{Z}_p = \mathcal{I}$.
 Entonces cualquier ideal distinto de \mathbb{Z}_p contiene sólo elementos que no son unidades de \mathbb{Z}_p , es decir, está contenido en $p\mathbb{Z}_p$. Así $p\mathbb{Z}_p$ es el único ideal maximal de \mathbb{Z}_p .
-) Cada elemento de S_0 es invertible en \mathbb{Z}_p .
 Sea $x \in S_0$, entonces $|x|_p = 1$, así $x \neq 0$ y existe x^{-1} , además $|x^{-1}|_p = \frac{1}{|x|_p} = 1$, y así $x^{-1} \in S_0$. Ahora, supongamos que existe un elemento x invertible en \mathbb{Z}_p tal que $x \notin S_0$, entonces $|x|_p < 1$, y como x es invertible $\exists x^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ tal que $|x|_p|x^{-1}|_p = 1$, pero $|x|_p|x^{-1}|_p < 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto los únicos elementos invertibles en \mathbb{Z}_p pertenecen al conjunto S_0 . ■

Definición 2.54

El grupo de unidades de \mathbb{Z}_p es $\mathbb{Z}_p^\times := \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x|_p = 1\}$.

Proposición 2.55

Sean $a \in \mathbb{Q}_p$ y $n \in \mathbb{Z}$. Los conjuntos $a + p^n\mathbb{Z}_p$ son bolas en \mathbb{Q}_p con $a + p^n\mathbb{Z}_p = B_{-n}(a)$.

Demostración

$$x \in a + p^n\mathbb{Z}_p \iff x = a + p^n y \text{ con } y \in \mathbb{Z}_p \iff x - a = p^n y \iff |x - a| \leq p^{-n} \iff x \in B_{-n}(a). \quad \blacksquare$$

Proposición 2.56

Sean $a \in \mathbb{Q}_p$ y $n \in \mathbb{Z}$. Los conjuntos $a + p^n\mathbb{Z}_p^\times$ son esferas en \mathbb{Q}_p de la forma $a + p^n\mathbb{Z}_p^\times = S_{-n}(a)$.

Demostración

$$x \in a + p^n\mathbb{Z}_p^\times \iff x = a + p^n y \text{ con } y \in \mathbb{Z}_p^\times \iff x - a = p^n y \iff |x - a|_p = p^{-n} = S_{-n}(a). \quad \blacksquare$$

Proposición 2.57

\mathbb{Q}_p es un espacio Hausdorff totalmente disconexo.

Demostración

Como todo espacio métrico es Hausdorff entonces \mathbb{Q}_p es Hausdorff.

Sea $A \subseteq \mathbb{Q}_p$ no vacío, si $x, y \in A$ con $x \neq y$ sea $p^r = |x - y|_p$ entonces $B_{r-1}(x)$ es un conjunto abierto y cerrado que contiene a x pero no a y . Luego $\mathbb{Q}_p \setminus B_{r-1}(x)$ es un conjunto abierto que contiene a y e no a x . Entonces existen dos conjuntos abiertos no vacíos disjuntos con

$$A = [A \cap B_{r-1}(x)] \cup [A \cap (\mathbb{Q}_p \setminus B_{r-1}(x))]$$

Así ningún conjunto de 2 ó más elementos puede ser conexo, entonces los únicos conjuntos conexos son de la forma $\{x\}$. Por lo tanto \mathbb{Q}_p es totalmente desconexo. ■

Proposición 2.58

1. La inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ tiene una imagen densa en \mathbb{Z}_p . En particular, dado $x \in \mathbb{Z}_p$ y $n \geq 1$ existe un único $\alpha \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$ tal que $|x - \alpha|_p \leq \frac{1}{p^n}$.
2. Para cualquier $x \in \mathbb{Z}_p$ existe una única sucesión de Cauchy $\{\alpha_n\}$ que converge a x y satisface lo siguiente:
 - i) $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ para cada n y $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$.
 - ii) Para cada n se tiene $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$.

Demostración

1. Por las propiedades de $|\cdot|_p$ basta verificar que cada bola con centro en un entero p -ádico y radio p^{-n} con $n \in \mathbb{Z}^+$ contiene un entero. Sea $x \in \mathbb{Z}_p$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{Q}_p existe $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $|x - \frac{a}{b}|_p \leq \frac{1}{p^n} < 1$. Además $|\frac{a}{b}|_p = |\frac{a}{b} - x + x|_p \leq \max\{|x|_p, |x - \frac{a}{b}|_p\} \leq 1$, entonces $p \nmid b$ (para al menos una representación particular de este número racional), y así $p^n \nmid b$, es decir, $(p^n, b) = 1$, por lo que $\exists b', c \in \mathbb{Z}$ tales que $bb' + cp^n = 1$ y entonces $bb' \equiv 1 \pmod{p^n}$. Por otro lado

$$\left| \frac{a}{b} - ab' \right|_p = \left| \frac{a - abb'}{b} \right|_p = \left| \frac{a(1 - bb')}{b} \right|_p.$$

Y como $p \nmid b$ y $p^n \mid 1 - bb'$, tenemos que $\frac{a(1 - bb')}{b} = p^t \frac{a'}{b}$, para algún $t \geq n$, así

$$\left| \frac{a(1 - bb')}{b} \right|_p \leq \frac{1}{p^n}.$$

Entonces

$$|x - ab'|_p = |x - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - ab'|_p \leq \max\{|x - \frac{a}{b}|_p, |\frac{a}{b} - ab'|_p\} \leq p^{-n}.$$

Así $ab' \in B_{-n}(x)$, por lo tanto la imagen de \mathbb{Z} es densa en \mathbb{Z}_p .

Ahora, sea α el único entero que satisface $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$ y $\alpha \equiv ab' \pmod{p^n}$, así tenemos que

$$|x - \alpha|_p = |x - ab' + ab' - \alpha|_p \leq \max\{|x - ab'|_p, |ab' - \alpha|_p\} \leq \frac{1}{p^n}.$$

Entonces α cumple las condiciones establecidas.

2. Sea $x \in \mathbb{Z}_p$, por el inciso 1. sabemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+ \exists! \alpha_n$ tal que $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$ y $|x - \alpha_n|_p \leq p^{-n}$. Sea $\{\alpha_n\}$ la sucesión de los α_n descritos, entonces

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n|_p = |\alpha_{n+1} - x + x - \alpha_n|_p \leq \max\{|\alpha_{n+1} - x|_p, |x - \alpha_n|_p\} = p^{-n}.$$

Lo que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n|_p = 0.$$

Entonces por el lema 2.34, $\{\alpha_n\}$ es de Cauchy. Por otro lado $|x - \alpha_n|_p \leq p^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, así $\lim_{n \rightarrow \infty} |x - \alpha_n|_p = 0$, por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x$. Así $\{\alpha_n\}$ satisface i) por construcción, además

$$|\alpha_n - \alpha_{n-1}|_p = |\alpha_n - x + x - \alpha_{n-1}|_p \leq \max\{|\alpha_n - x|_p, |x - \alpha_{n-1}|_p\} = p^{-(n-1)}.$$

entonces $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$. Además, la unicidad en 1) garantiza la unicidad de la sucesión. ■

Definición 2.59 (Congruencia)

Decimos que $a, b \in \mathbb{Z}_p$ son congruentes módulo p^n , denotado $a \equiv b \pmod{p^n}$, si se cumple $|a - b|_p \leq p^{-n}$.

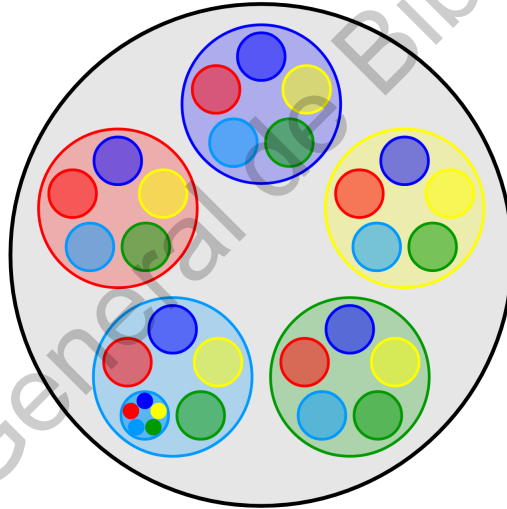


Figura 2.1: Representación en forma fractal del anillo \mathbb{Z}_5 . Cada división del conjunto inicial en subconjuntos (disjuntos) obedece a una congruencia módulo 5^n , donde la potencia n inicia en 1 e incrementa una unidad por cada iteración.

Corolario 2.60

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces $\frac{\mathbb{Z}_p}{p^n \mathbb{Z}_p} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p^n \mathbb{Z}}$.

Demostración

Para $x \in \mathbb{Z}_p$ sea α_x el único entero que satisface $|x - \alpha_x|_p \leq p^{-n}$ y $0 \leq \alpha_x \leq p^n - 1$. Se define

$$f : \frac{\mathbb{Z}_p}{p^n \mathbb{Z}_p} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p^n \mathbb{Z}}$$

como $f(x + p^n\mathbb{Z}_p) = \alpha_x + p^n\mathbb{Z}$. Probaremos que f es un isomorfismo.

•) f está bien definida.

Si $x + p^n\mathbb{Z}_p = y + p^n\mathbb{Z}_p$ entonces $x - y \in p^n\mathbb{Z}_p$, es decir, $|x - y|_p \leq p^{-n}$. Por otro lado se tiene

$$|\alpha_x - \alpha_y|_p = |\alpha_x - x + y - \alpha_y + x - y|_p \leq \max\{|\alpha_x - x|_p, |y - \alpha_y|_p, |x - y|_p\} = p^{-n}.$$

Así $\alpha_x \equiv \alpha_y \pmod{p^n}$ entonces $\alpha_x + p^n\mathbb{Z}_p \equiv \alpha_y + p^n\mathbb{Z}_p$ y por lo tanto

$$f(\alpha_x + p^n\mathbb{Z}_p) = f(\alpha_y + p^n\mathbb{Z}_p).$$

•) f es inyectiva.

En primer lugar tenemos que

$$f(x + p^n\mathbb{Z}_p) = f(y + p^n\mathbb{Z}_p) \implies \alpha_x + p^n\mathbb{Z}_p = \alpha_y + p^n\mathbb{Z}_p \implies \alpha_x \equiv \alpha_y \pmod{p^n}.$$

Por otro lado

$$|x - y|_p = |x - \alpha_x + \alpha_x - \alpha_y + \alpha_y - y|_p \leq \max\{|x - \alpha_x|_p, |\alpha_x - \alpha_y|_p, |\alpha_y - y|_p\} \leq p^{-n}.$$

Así $x - y \in p^n\mathbb{Z}_p$ por lo que $x + p^n\mathbb{Z}_p = y + p^n\mathbb{Z}_p$.

•) f es sobreyectiva.

Para $h + p^n\mathbb{Z} \in \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$ se tiene que $f(h + p^n\mathbb{Z}_p) = h + p^n\mathbb{Z}$.

•) f es homomorfismo.

i) $f(1 + p^n\mathbb{Z}_p) = 1 + p^n\mathbb{Z}$.

ii) $f(x + p^n\mathbb{Z}_p + y + p^n\mathbb{Z}_p) = f(x + p^n\mathbb{Z}_p) + f(y + p^n\mathbb{Z}_p)$.

En efecto, en primer lugar notemos que

$$\begin{aligned} |\alpha_x + \alpha_y - \alpha_{x+y}|_p &= |\alpha_x - x + \alpha_y - y + x + y - \alpha_{x+y}|_p \\ &\leq \max\{|\alpha_x - x|_p, |\alpha_y - y|_p, |x + y - \alpha_{x+y}|_p\} \\ &\leq p^{-n}. \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_x + \alpha_y \equiv \alpha_{x+y} \pmod{p^n}$ y $\alpha_x + \alpha_y + p^n\mathbb{Z} = \alpha_{x+y} + p^n\mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$f(x + p^n\mathbb{Z}_p + y + p^n\mathbb{Z}_p) = f(x + y + p^n\mathbb{Z}_p) = \alpha_{x+y} + p^n\mathbb{Z} = \alpha_x + \alpha_y + p^n\mathbb{Z} = f(x + p^n\mathbb{Z}_p) + f(y + p^n\mathbb{Z}_p).$$

iii) $f([x + p^n\mathbb{Z}_p][y + p^n\mathbb{Z}_p]) = f(x + p^n\mathbb{Z}_p)f(y + p^n\mathbb{Z}_p)$.

Para probar este hecho notemos

$$\begin{aligned} |\alpha_{xy} - \alpha_x\alpha_y|_p &= |\alpha_{xy} - xy + xy - y\alpha_x + y\alpha_x - \alpha_x\alpha_y|_p \\ &\leq \max\{|\alpha_{xy} - xy|_p, |xy - y\alpha_x|_p, |y\alpha_x - \alpha_x\alpha_y|_p\} \\ &\leq \max\{|\alpha_{xy} - xy|_p, |y|_p|x - \alpha_x|_p, |\alpha_x|_p|y - \alpha_y|_p\} \\ &\leq p^{-n}. \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_{xy} \equiv \alpha_x\alpha_y$ y así $\alpha_{xy} + p^n\mathbb{Z} = \alpha_x\alpha_y + p^n\mathbb{Z}$. Por lo tanto $f([x + p^n\mathbb{Z}_p][y + p^n\mathbb{Z}_p]) = f(x + p^n\mathbb{Z}_p)f(y + p^n\mathbb{Z}_p) = \alpha_{xy} + p^n\mathbb{Z} = \alpha_x\alpha_y + p^n\mathbb{Z} = f(x + p^n\mathbb{Z}_p)f(y + p^n\mathbb{Z}_p)$. ■

Proposición 2.61

Las esferas son conjuntos abiertos y cerrados.

Demostración

Por el corolario 2.60 $\frac{\mathbb{Z}_p}{p\mathbb{Z}_p} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$, entonces los números $0, 1, \dots, p-1$ son representantes de

las clases residuales $\frac{\mathbb{Z}_p}{p\mathbb{Z}_p}$, además por la proposición 2.53 sabemos que $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$, entonces

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p-1} i + p\mathbb{Z}_p \implies \mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{i=1}^{p-1} i + p\mathbb{Z}_p.$$

Por la proposición 2.56 tenemos

$$S_n(a) = a + p^{-n}\mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{i=1}^{p-1} a + ip^{-n} + p^{-(n-1)}\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=1}^{p-1} B_{-(n-1)}a + ip^{-n}.$$

Por lo tanto $S_n(a)$ es un conjunto abierto y cerrado $\forall a \in \mathbb{Z}_p, \forall n \in \mathbb{Z}$ pues las bolas son conjuntos abiertos y cerrados. ■

Teorema 2.62

\mathbb{Z}_p es compacto.

Demostración

Como $\mathbb{Z}_p = B_0$ es un conjunto cerrado y \mathbb{Q}_p es completo, entonces \mathbb{Z}_p es completo. Por otro lado, por el 2.60 $\frac{\mathbb{Z}_p}{p^n\mathbb{Z}_p} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, así $0, 1, \dots, p^n - 1$ son representantes de las clases de $\frac{\mathbb{Z}_p}{p^n\mathbb{Z}_p}$, entonces

$$\bigsqcup_{i=0}^{p^n-1} i + p^n\mathbb{Z}_p \implies \mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p^n-1} B_n(i)$$

por la proposición 2.55. Ahora sea $\epsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p^{-n} < \epsilon$, así

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p^n-1} B_n(i) \subseteq \bigcup_{i=0}^{p^n-1} \tilde{B}_\epsilon(i).$$

donde $\tilde{B}_\epsilon(i)$ es la bola con centro en i y radio ϵ ; así \mathbb{Z}_p es totalmente acotado. Por lo tanto \mathbb{Z}_p es compacto. ■

Proposición 2.63

Las bolas y las esferas son conjuntos compactos en \mathbb{Q}_p .

Demostración

Sabemos que $B_n(a) = a + p^{-n}\mathbb{Z}_p$. Definamos la función $f : \{p^{-n}\} \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ como $h(x, y) = xy$, entonces f es la operación producto restringida al conjunto $\{p^{-n}\} \times \mathbb{Z}_p$, y como la operación producto es continua, f es continua. Luego $B_n = f(\{p^{-n}\} \times \mathbb{Z}_p)$, entonces B_n es compacto pues es la imagen continua de un compacto.

Sea $g : \{a\} \times p^{-n}\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ definida como $h(x + y) = x + y$, entonces g es la operación suma restringida al conjunto $\{a\} \times p^{-n}\mathbb{Z}_p$ y como la operación suma es continua, g es continua. Luego $B_n(a) = g(\{a\} \times p^{-n}\mathbb{Z}_p)$, entonces $B_n(a)$ es compacto pues es la imagen continua de un compacto. Por lo tanto las bolas son conjuntos compactos.

La demostración de que las esferas son conjuntos compactos es análoga. ■

Corolario 2.64

\mathbb{Q}_p es localmente compacto.

Demostración

Sea $x \in \mathbb{Q}_p$ entonces $B_n(x)$ es un conjunto compacto para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Proposición 2.65

Si una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en \mathbb{Q}_p está formada por números enteros, entonces su límite está en \mathbb{Z}_p .

Demostración

Sea $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, entonces existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n - x|_p < 1$ si $n > N$. Se sigue que $|x|_p = |x - x_{N+1} + x_{N+1}|_p \leq \max\{|x - x_{N+1}|_p, |x_{N+1}|_p\} \leq 1$. Por lo tanto $x \in \mathbb{Z}_p$. ■

Proposición 2.66

Cada $x \in \mathbb{Z}_p$ puede escribirse en la forma $x = b_0 + b_1p + \dots + b_np^n + \dots$ con $0 \leq b_i \leq p - 1$, además esta representación es única.

Demostración

Sea $x \in \mathbb{Z}_p$, por la proposición 2.58 existe una única sucesión de Cauchy $\{\alpha_n\}$ que converge a x y satisface:

- i) $\alpha_n \in \mathbb{Z} \forall n$ con $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$.
- ii) $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$.

Escribiendo cada α_n en base p se obtiene una serie de la siguiente forma:

- i) $\alpha_1 = b_0$ con $0 \leq b_0 \leq p - 1$.
- ii) $\alpha_2 = b'_0 + b_1p$ con $0 \leq b'_0, b_1 \leq p - 1$ y $0 \leq \alpha_2 \leq p^2 - 1$. Ahora, como $\alpha_2 \equiv \alpha_1 \pmod{p}$ tenemos que $b'_0 + b_1p \equiv b_0 \pmod{p}$, luego $b'_0 \equiv b_0 \pmod{p}$ y $b'_0 = b_0$, así $\alpha_2 = b_0 + b_1p$.
- iii) En general, si $\alpha_{n+1} = b'_0 + b'_1p + \dots + b'_np^n$ con $0 \leq b'_i \leq p - 1$ y $0 \leq \alpha_{n+1} \leq p^{n+1} - 1$; y $\alpha_n = b_0 + b_1p + \dots + b_{n-1}p^{n-1}$ con $0 \leq b_i \leq p - 1$ y $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$. Dado que $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{p^n}$ tenemos

$$b'_0 + b'_1p + \dots + b'_np^n \equiv b_0 + b_1p + \dots + b_{n-1}p^{n-1} \pmod{p^n}$$

entonces

$$b'_0 + b'_1p + \dots + b'_{n-1}p^{n-1} = b_0 + b_1p + \dots + b_{n-1}p^{n-1}$$

Así $b'_i = b_i$ para cada i . Entonces

$$\alpha_1 = b_0$$

$$\alpha_2 = b_0 + b_1p$$

⋮

$$\alpha_{n+1} = b_0 + b_1p + \dots + b_np^n$$

⋮

Como las sumas parciales son las α_n que convergen a x , esto implica que la serie construida converge a x . Por lo tanto $x = b_0 + b_1p + \dots + b_np^n + \dots$ con $0 \leq b_i \leq p-1$ y la unicidad se garantiza por la unicidad de la sucesión $\{\alpha_n\}$. ■

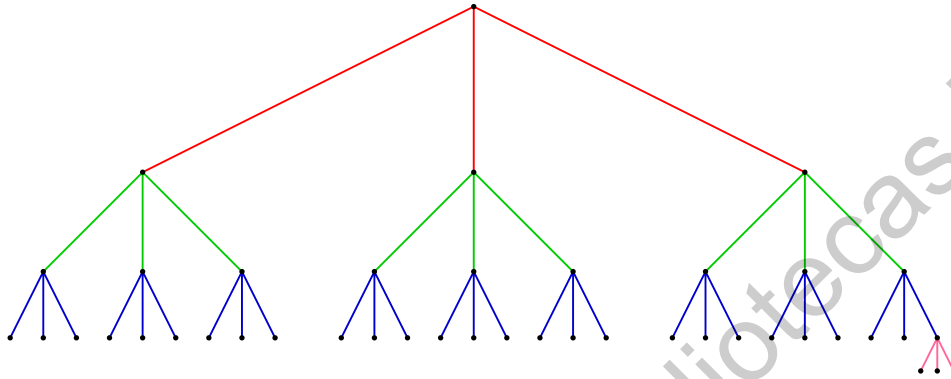


Figura 2.2: Representación en forma de árbol del anillo \mathbb{Z}_3 . Cada nivel de ramificación está asociado al n -ésimo coeficiente de la representación de un número escrito en la forma: $b_0 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3 + \dots$, donde $0 \leq b_i \leq p-1$.

Corolario 2.67

Cada $x \in \mathbb{Q}_p$ puede ser escrito de manera única en la forma

$$x = b_{-n_0}p^{-n_0} + b_{-n_0+1}p^{-n_0+1} + \dots + b_0 + \dots + b_np^n + \dots = \sum_{n \geq -n_0} b_np^n$$

con $0 \leq b_i \leq p-1$ y $b_{-n_0} \neq 0$. Además $v_p(x) = -n_0$.

Demostración

Sea $x \in \mathbb{Q}_p$, distinguiamos dos casos:

i) $x \in \mathbb{Z}_p$.

Sabemos que x se puede representar de manera única como $x = b_0 + b_1p + \dots + b_np^n + \dots$ con $0 \leq b_i \leq p-1$. Ahora sea n_k el menor entero positivo tal que $b_{n_k} \neq 0$, así

$$x = \sum_{n \geq n_k} b_np^n = b_{n_k}p^{n_k} + \sum_{n \geq n_k+1} b_np^n$$

$$\implies |x|_p = \left| \sum_{n \geq n_k} b_np^n \right|_p \leq \max \left\{ |b_{n_k}p^{n_k}|_p, \left| \sum_{n \geq n_k+1} b_np^n \right|_p \right\}.$$

Por la proposición 2.22 tenemos

$$|x|_p = \max \left\{ p^{-n_k}, \left| \sum_{n \geq n_k+1} b_np^n \right|_p \right\}.$$

Como $\left| \sum_{n \geq n_k+1} b_n p^n \right|_p \leq p^{-n_k-1}$ entonces $|x|_p = p^{-n_k}$ y $v_p(x) = n_k$.

ii) $x \notin \mathbb{Z}_p$.

Sea $n_0 = -v_p(x)$, se tiene que $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, además $x p^{n_0} \in \mathbb{Z}_p$ por lo que

$$x p^{n_0} = \sum_{n \geq 0} b_n p^n, \quad b_0 \neq 0.$$

Entonces

$$x = p^{-n_0} \sum_{n \geq 0} b_n p^n = \sum_{n \geq -n_0} b_n p^n.$$

La unicidad se da por la unicidad de $x p^{n_0}$ y, análogamente al inciso anterior, es claro que $v_p(x) = -n_0$. ■

Ejemplo 2.68

$$-1 = (p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^n + \cdots.$$

Solución

Es cierto debido a que, tomando sumas parciales, tenemos

$$s_n = (p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^n = (p-1) \frac{p^{n+1} - 1}{p-1} = p^{n+1} - 1.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = -1.$$

Esto porque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p^{n+1} - 0|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |p^{n+1}|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{n+1}} = 0.$$

Además, como hemos concluido que

$$-1 = (p-1) \sum_{i=1}^{\infty} p^i,$$

también podemos decir que

$$\frac{1}{1-p} = \sum_{i=1}^{\infty} p^i. ■$$

Análisis p -ádico

En este capítulo y en los siguientes denotaremos por \mathbb{Q}_p^\times al grupo multiplicativo en el anillo $\langle \mathbb{Q}_p, +, \cdot \rangle$.

3.1. Caracteres aditivos y multiplicativos

Definición 3.1

Sea $x \in \mathbb{Q}_p$ con $x = \sum_{i=n}^{\infty} x_i p^i$. Se define la **parte fraccionaria** de x como:

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, & \text{si } n \geq 0 \text{ ó } x = 0 \\ \sum_{i=n}^{-1} x_i p^i, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Y la **parte entera** de x como:

$$[x]_p = \begin{cases} x, & \text{si } n \geq 0 \text{ ó } x = 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Notemos que la definición implica $x = \{x\}_p + [x]_p$.

Proposición 3.2

Sean $x, y \in \mathbb{Q}_p$. Entonces $\{x + y\}_p = \{x\}_p + \{y\}_p$.

Demostración

Sabemos que $x + y = \{x\}_p + \{y\}_p + [x]_p + [y]_p$ pero $[x]_p + [y]_p \in \mathbb{Z}_p$, así $\{x + y\}_p$ depende sólo de $\{x\}_p$ y $\{y\}_p$. Consideremos tres casos (sin pérdida de generalidad):

-) $x, y \in \mathbb{Z}_p$
 $\{x + y\}_p = 0 + 0 = 0 = 0 + 0.$
-) $x \in \mathbb{Z}_p, y \notin \mathbb{Z}_p$
 $\{x + y\}_p = 0 + \{y\}_p = \{y\}_p = \{y\}_p + 0.$
-) $x, y \notin \mathbb{Z}_p$

Sean $x = \sum_{n=v_p(x)}^{\infty} x_n p^n$, $y = \sum_{n=v_p(y)}^{\infty} y_n p^n$, entonces $\{x\}_p + \{y\}_p = \sum_{n=v_p(x)}^{-1} x_n p^n + \sum_{n=v_p(y)}^{-1} y_n p^n = \sum_{n=\min\{v_p(x), v_p(y)\}}^0 a_n p^n = \sum_{n=\min\{v_p(x), v_p(y)\}}^{-1} a_n p^n + a_0 = \{x + y\}_p + n$, donde $0 \leq a_n \leq p - 1$. ■

Definición 3.3 (Caracter aditivo)

Un caracter aditivo es una función $\chi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ que cumple:

- i) $|\chi(x)| = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}_p$.
- ii) $\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}_p$.
- iii) χ es continua.

Denotamos por $Char(\mathbb{Q}_p)$ al conjunto de caracteres aditivos.

Proposición 3.4

Sean χ un caracter aditivo sobre \mathbb{Q}_p y $x \in \mathbb{Q}_p^*$. Entonces:

1. $\chi(0) = 1$.
2. $\chi(-x) = \overline{\chi(x)} = \chi(x)^{-1}$.
3. $\chi(nx) = \chi(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración

1. $\chi(x) = \chi(0 + x) = \chi(0)\chi(x) \implies 1 = \chi(0)$, puesto que $\chi(x) \neq 0$.
2. Tenemos que $1 = \chi(0) = \chi(x - x) = \chi(x)\chi(-x)$ entonces $\chi(-x) = \chi(x)^{-1}$. Por otro lado $\chi(x)\chi(x)^{-1} = 1 = |\chi(x)| = \chi(x)\chi(x)$ y así $\chi(x)^{-1} = \overline{\chi(x)}$.
3. Para $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos

$$\chi(nx) = \chi(\underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-veces}}) = \chi(x)^n.$$

Por otro lado $\chi(-nx) = (\chi(nx))^{-1} = (\chi(x)^n)^{-1} = \chi(x)^{-n}$. Además $\chi(0 \cdot x) = 1 = \chi(x)^0$. ■

Ejemplo 3.5

Sea $\xi \in \mathbb{Q}_p$ y definamos $\chi_p(x) = \chi_p(\xi x) = e^{2\pi i \{x\xi\}_p}$. Entonces χ_p es un caracter aditivo.

Demostración

- i) $|\chi_p(x)| = 1$ por definición.
- ii) $\chi_p(x + y) = \chi_p(x) + \chi_p(y)$ por la proposición 3.2.
- iii) χ_p es continua.

Sea $a \in \mathbb{Q}_p$, para probar que χ_p es continua en a distinguiremos dos casos:

-) $a\xi \in \mathbb{Z}_p$.

Sea $\epsilon > 0$, consideremos $\delta = p^{v_p(a)-1}$, entonces $|x - a|_p < \delta \implies x \in B_{p^{v_p(a)-1}}(a) \implies |x|_p = |a|_p \implies |x\xi|_p = |a\xi|_p \leq 1 \implies \{x\xi\}_p = \{a\xi\}_p = 0 \implies \chi_p(x) = \chi_p(a) \implies |\chi_p(x) - \chi_p(a)| = 0 < \epsilon$.

-) $a\xi \notin \mathbb{Z}_p$.

Sean $\epsilon > 0$ y $a = \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i$, $\xi = \sum_{i=m}^{\infty} \xi_i p^i$, con $m + n < 0$. Notemos que $\{a\xi\}_p$ depende a lo más de los primeros $-m - n$ términos de a , entonces sea $\delta = p^{m+n-1}$ entonces $|x - a| < \delta \implies x \in B_{m+n-1}(a) \implies x$ y a coinciden en los primeros $-m - n$ términos $\implies \{x\xi\}_p = \{a\xi\}_p \implies \chi_p(x) = \chi_p(a) \implies |\chi_p(x) - \chi_p(a)| = 0 < \epsilon$. ■

Notemos que por la demostración dada en el ejemplo anterior se sigue que χ_p es localmente constante.

Proposición 3.6

Sea $\chi \neq 1$ un caracter aditivo. Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\chi(x) = 1$ para todo $x \in B_k(0)$.

Demostración

Procedemos por contradicción. Por la continuidad de χ sabemos que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $|\chi(x) - \chi(0)| = |\chi(x) - 1| < 1 \forall x \in B_k$, sea $x \in B_k$ con $\chi(x) \neq 1$, entonces por definición $\chi(x) \in S^1$ (esfera compleja), $i \neq \text{chi}(x) \neq -1$ y además $\chi(x) \in C_I \cup C_{IV}$, donde C_I, C_{IV} son el primer y cuarto cuadrante respectivamente. Sabemos que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\chi(nx) \notin C_I \cup C_{IV}$ y entonces $|\chi(nx) - 1| \geq 1$ lo que es una contradicción puesto que $nx \in B_k$. Por lo tanto $\chi(x) = 1 \forall x \in B_k$. ■

Definición 3.7 (Rango de un caracter aditivo)

Sea $\chi \neq 1$ un caracter aditivo. La bola cerrada más grande donde $\chi(x) = 1$ se denomina rango del caracter.

A continuación probaremos que todo caracter aditivo es igual a $\chi_p(\xi x)$ para algún $\xi \in \mathbb{Q}_p$, para esto, sea χ un caracter aditivo fijo y sea B_k el rango de tal caracter. Para $t > k$, si $x \in B_t \setminus B_k$ entonces $x = x_t p^t + \dots + x_{k-1} p^{k-1} + x'$ con $x' \in B_k$, así $\chi(x) = \chi(x_t p^t) \cdots \chi(x_{k-1} p^{k-1}) \chi(x') = \chi(p^t)^{x_t} \cdots \chi(p^{k-1})^{x_{k-1}}$, entonces es suficiente probar que para $k < s \leq t$, $\chi(p^s)$ es de la forma $\chi_p(\xi p^s)$ para algún $\xi(t) \in \mathbb{Q}_p$.

Lema 3.8

Sean χ un caracter aditivo y B_k el rango del caracter. Entonces existe $\xi = \xi(t) \in \mathbb{Q}_p$ tal que para todo $k < s \leq t$ se cumple $\chi(p^{-s}) = \chi_p(p^{-s} \xi)$ y $p^{-t} < |\xi|_p \leq p^{-k}$.

Demostración

•) Caso $s = t$.

Notemos que $1 = \chi(p^{-k}) = \chi(p^{t-k} p^{-t}) = \chi(p^{-t})^{p^{t-k}}$, así $\chi(p^{-t})$ es una p^{t-k} -ésima raíz de la unidad, por lo tanto $\chi(p^{-t}) = e^{\frac{2\pi i m}{p^{t-k}}}$, donde $m = 0, \dots, p^{t-k} - 1$. Tomemos $\xi = p^k(m + p^{t-k} m')$, con $m' \in S_0$. Notemos que $p^{-t} \xi = p^{-(t-k)} m + m'$, luego $\{p^{-t} \xi\}_p = p^{-(t-k)} m$, puesto que m puede ser escrito como $m = m_0 + \dots + m_{t-k-1} p^{t-k-1}$. Por lo tanto $\chi(p^{-t}) = e^{\frac{2\pi i m}{p^{t-k}}} = e^{2\pi i \{p^{-t} \xi\}_p} = \chi_p(\xi p^{-t})$.

•) Caso $k < s < t$.

Tenemos que $\chi(p^{-s}) = \chi(p^{t-s} p^{-t}) = \chi(p^{-t})^{p^{t-s}} = \left(e^{\frac{2\pi i m}{p^{t-k}}} \right)^{p^{t-s}} = e^{2\pi i m p^{k-s}}$. Por otro lado, sea ξ como en el inciso anterior, entonces $p^{-s} \xi = p^{k-s} m + p^{t-s} m'$, donde $p^{t-s} m' \in \mathbb{Z}_p$, por lo tanto $\{p^{-s} \xi\}_p + n = m p^{k-s}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, así $\chi(p^{-s}) = \chi_p(p^{-s} \xi)$.

Por último, $|\xi|_p = p^{-k}|m + p^{t-k}m'|_p$, pero $p^{k-t} < |m|_p \leq 1$ y $|p^{t-k}m'|_p = p^{k-t}$, entonces por la proposición 2.22 se sigue que $p^{-t} < |\xi|_p = p^{-k}|m|_p \leq p^{-k}$. ■

Teorema 3.9

Para todo caracter aditivo χ sobre \mathbb{Q}_p existe $\xi \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\chi(x) = \chi_p(\xi x)$.

Demostración

Si $\chi = 1$ tomando $\xi = 0$ se tiene $\chi(x) = \chi_p(\xi x) \forall x \in \mathbb{Q}_p$.

Si $\chi \neq 1$, por el lema 3.8 existe $\xi_0 \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\chi(x) = \chi_p(\xi_0 x) \forall x \in B_t \setminus B_k$. Además si $x \in B_k$ se tiene $|x\xi_0|_p \leq p^k|\xi_0|_p \leq p^k p^{-k} = 1$, así

$$\chi(x) = 1 = \chi_p(\xi_0 x) \quad \forall x \in B_t.$$

Ahora consideremos la esfera S_{t+1} . Sea $x \in S_{t+1}$, entonces $x = x_* p^{-t-1} + x'$ con $x' \in B_t$ y $x_* = 0, \dots, p-1$. Entonces

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \chi(x_* p^{-t-1} + x') \\ &= \chi(x_* p^{-t-1}) \chi(x') \\ &= \chi(x_* p^{-t-1})^{\frac{1}{p}} \chi_p(\xi x') \\ &= \chi(x_* p^{-t-1} p) \chi_p(\xi x') \\ &= \chi_p(\xi x_* p^{-t})^{\frac{1}{p}} \chi_p(\xi x') \end{aligned}$$

así buscamos que se cumpla la igualdad $\chi_p(\xi x_* p^{-t})^{\frac{1}{p}} = \chi_p(\xi x_* p^{-t-1})$. Sea $\xi = \sum_{i=r}^{\infty} \xi_i p^i$ con $\xi_r \neq 0$, entonces tenemos

$$\xi x_* p^{-t-1} = x_* \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1} + x_* \sum_{i=t+1}^{\infty} \xi_i p^{i-t-1}$$

pero el segundo sumando es un elemento de \mathbb{Z}_p , luego $\{\xi x_* p^{-t-1}\}_p = \{x_* \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1}\}$. Análogamente $\{\xi x_* p^{-t}\}_p = \{x_* \sum_{i=r}^{t-1} \xi_i p^{i-t}\}$. Ahora

$$\left\{ x_* \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1} \right\}_p = \left\{ \underbrace{\sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1} + \dots + \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1}}_{x_* \text{-veces}} \right\}_p$$

además $\{\xi_i p^{i-t-1}\}_p = \xi_i p^{i-t-1}$ para $r \leq i \leq t$, entonces por la proposición 3.2 tenemos que $\{x_* \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1}\}_p = x_* \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1} + n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Análogamente $\{x_* \sum_{i=r}^{t-1} \xi_i p^{i-t}\}_p = x_* \sum_{i=r}^{t-1} \xi_i p^{i-t} + n'$ con $n' \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned} \chi_p(\xi x_* p^{-t-1}) &= e^{2\pi i \{x_* \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1}\}_p} = e^{2\pi i (x_* \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t-1} + n)} \\ &= e^{2\pi i x_* p^{-1} \sum_{i=r}^t \xi_i p^{i-t}} \\ &= \left[e^{2\pi i (x_* \xi_t + x_* \sum_{i=r}^{t-1} \xi_i p^{i-t})} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[e^{2\pi i \{x_* \sum_{i=r}^{t-1} \xi_i p^{i-t}\}_p} \right]^{\frac{1}{p}} = \chi_p(\xi x_* p^{-t})^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\chi(x) = \chi_p(\xi x_* p^{-t})^{\frac{1}{p}} \chi_p(\xi x') = \chi_p(\xi x_* p^{-t-1}) \chi_p(\xi x') = \xi_p(\xi x)$. ■

Definición 3.10 (Caracter multiplicativo)

Sea $\pi : A \subseteq \mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función y A un subgrupo multiplicativo. Se dice que π es un caracter multiplicativo si:

- i) π es continua.
- ii) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ para todo $x, y \in A$.

si además $\pi(1) = 1$ y $|\pi(x)| = 1$ para todo $x \in S_0$ éste se llama normalizado.

Lema 3.11

Sea π un caracter multiplicativo sobre S_0 tal que $\pi(1) = 1$. Entonces π es normalizado.

Demostración

Sea $x \in S_0$ entonces $1 = \pi(1) = \pi(xx^{-1}) = \pi(x)\pi(x)^{-1}$ entonces $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1})$ y $\pi(x) \neq 0$. Ahora, supongamos que existe $x \in S_0$ tal que $|\pi(x)| \neq 1$, lo que implica $\pi(x) < 1$ (en caso contrario podemos tomar x^{-1}), construimos entonces la sucesión $\{x_n\} \subseteq S_0$ donde $x_n = x^n$. Por la proposición 2.63 S_0 es compacto, así tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_i}\}$ a $z \in S_0$, pero $\pi(x_{n_i}) = \pi(x)^{n_i} < 1$, luego $\lim_{i \rightarrow \infty} \pi(x_{n_i}) = \pi(z)$, entonces $|\pi(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\pi(x_{n_i})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\pi(x)^{n_i}| = 0$, es decir, $\pi(z) = 0$ lo que es una contradicción. ■

Teorema 3.12

Sea $\pi \neq 0$ un caracter multiplicativo sobre \mathbb{Q}_p^* . Entonces existe un caracter multiplicativo π_1 normalizado en S_0 y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x|x|_p)$ para todo $x \in \mathbb{Q}_p^*$. Además dado π_1 un caracter multiplicativo en S_0 y $\alpha \in \mathbb{C}$ la función $\pi(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x|x|_p)$ es un caracter multiplicativo en \mathbb{Q}_p^* .

Demostración

Notemos que $|x|x|_p = |x|_p |x|_p^{-1} = 1 \forall x \in \mathbb{Q}_p^*$ así $x|x|_p \in S_0$, entonces π_1 está bien definido.

- I) Sea $\pi_1(x) := \pi(x) \forall x \in S_0$, luego π_1 es caracter multiplicativo en S_0 . Ahora, para todo $x \in \mathbb{Q}_p^*$ se tiene

$$\pi(x) = \pi(|x|_p |x|_p^{-1} x) = \pi(|x|_p^{-1}) \pi(x|x|_p) = \pi(|x|_p)^{-1} \pi_1(x|x|_p)$$

entonces es suficiente probar que $\pi(p) = p^{-\alpha+1}$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ puesto que $|x|_p = p^t$, pero de hecho para cada $z \in \mathbb{C}^*$ existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $z = p^{-t+1}$, en particular para $z = \pi(p)$.

- II) Tenemos que $|\cdot|_p^{\alpha-1}$ es una función continua de \mathbb{Q}_p en \mathbb{C} , π_1 es continua de \mathbb{Q}_p^* en \mathbb{C} y $x|x|_p$ es continua de \mathbb{Q}_p en \mathbb{Q}_p , así

$$\pi(x) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x|x|_p)$$

es continua de \mathbb{Q}_p en \mathbb{C} , además

$$\pi(xy) = |xy|_p^{\alpha-1} \pi_1(xy|x|_p) = |x|_p^{\alpha-1} \pi_1(x|x|_p) |y|_p^{\alpha-1} \pi_1(y|y|_p) = \pi(x)\pi(y),$$

por lo tanto π es caracter multiplicativo en \mathbb{Q}_p .



Nota

Dado un caracter multiplicativo π_1 sobre S_0 se extiende $\pi_1 := \pi(x|x|_p) \forall x \in \mathbb{Q}_p$.

Proposición 3.13

Sean $A_0 := S_0$, $A_k := B_{-k}(1)$ y $\pi \neq 1$ un caracter multiplicativo normalizado en S_0 . Entonces existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\pi(x) = 1$ para todo $x \in A_k$.

Demostración

Como $\{A_i \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$ es un sistema fundamental de vecindades de 1 en S_0 , por la continuidad de π existe $x \in A_k$ tal que $|\pi(x) - 1|_p < \sqrt{2}$. Como A_k es un grupo multiplicativo $x^r \in A_k \forall r \in \mathbb{Z}^+$, además $\pi(x^r) = \pi(x)^r$, así debería cumplirse que $|\pi(x)^r - 1| < \sqrt{2}$, lo cual sólo es posible si $\pi(x) = 1$.



Definición 3.14 (Rango de un caracter multiplicativo)

Sean $\pi \neq 1$ un caracter multiplicativo normalizado y $k \in \mathbb{Z}_+$ el número más pequeño para el cual se satisface la proposición anterior. Entonces k es llamado el rango de π .

3.2. Integración en \mathbb{Q}_p

3.2.1. Descomposición en bolas

Definimos¹ $\mathfrak{p}^n := p^n \mathbb{Z}_p$ para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces la familia de subgrupos $\mathfrak{Q}_p = \{\mathfrak{p}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ determina una filtración por subgrupos de \mathbb{Q}_p :

$$\{0\} \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}^m \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Z}_p \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}^n \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Q}_p, \quad n < 0 < m.$$

Si $x \in \mathbb{Q}_p$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces $d_p(0, x) = |x|_p \leq p^{-n}$ si y sólo si $v_p(x) \geq n$, es decir,

$$d_p(0, x) \leq p^{-n} \iff x \in \mathfrak{p}^n \iff x \equiv 0 \pmod{p^n}.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{Z}$, la bola B_{-n} coincide con el subgrupo \mathfrak{p}^n , lo que escribimos como $B_{-n} = \mathfrak{p}^n$.

Ahora, si $x, y \in \mathbb{Q}_p$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$d_p(x, y) \leq p^{-n} \iff x - y \in \mathfrak{p}^n \iff x \equiv y \pmod{p^n}$$

Si tomamos $n \leq m$ números enteros y consideramos el cociente $p^n \mathbb{Z}_p / p^m \mathbb{Z}_p$, tenemos que el subgrupo \mathfrak{p}^n se descompone como unión disjunta de p^{m-n} clases laterales del subgrupo \mathfrak{p}^m en la forma

¹Esta subsección está basada en las notas "Introducción al análisis p -ádico" de la autoría del Dr. Samuel Estala Arias y el Dr. Manuel Cruz López.

$$\mathfrak{p}^n = \bigsqcup_{j=0}^{p^{m-n}-1} j + \mathfrak{p}^m.$$

Además, como $B_{-n} = \mathfrak{p}^n$, la bola B_{-n} se puede descomponer como una unión disjunta de p^{m-n} bolas de radio p^{-m} , esto es

$$B_{-n} = \bigsqcup_{j=0}^{p^{m-n}-1} B_{-m}(x_j)$$

donde x_j es un representante de cada una de las distintas clases de equivalencia módulo p^{m-n} de tal forma que $x_j \in B_{-n}$.

Particularmente si $n < 0$, la bola B_{-n} se puede descomponer como unión disjunta de p^{-n} bolas de radio 1:

$$B_{-n} = \bigsqcup_{j=0}^{p^{-n}-1} x_j + \mathbb{Z}_p \quad (3.1)$$

De manera similar si $n > 0$, $B_0 = \mathbb{Z}_p$ se descompone como una unión disjunta de p^n bolas de radio p^{-n} :

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{j=0}^{p^n-1} B_{-n}(x_j). \quad (3.2)$$

3.2.2. Medida

El teorema de Haar en \mathbb{Q}_p establece:

Teorema 3.15 (Teorema de Haar)

El grupo topológico abeliano localmente compacto \mathbb{Q}_p admite una medida de Haar dx izquierda, la cual es única salvo multiplicación por escalares.

En adelante todas las alusiones a medida en \mathbb{Q}_p harán referencia a la medida de Haar en \mathbb{Q}_p (denotada por μ , $\mu(x)$, $d\mu$, $d\mu(x)$ o dx), la cual se normalizará de manera que

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1.$$

Lo anterior implica que la medida de toda bola de radio 1 es 1. Además si $n < 0$, por la ecuación 3.1

$$\mu(B_{-n}) = \sum_{j=0}^{p^{-n}-1} \mu(B_0(x_j)) = p^n.$$

Similarmente si $n > 0$, por la ecuación 3.2

$$\mu(\mathbb{Z}_p) = \sum_{j=0}^{p^n-1} \mu(B_{-n}(x_j)) = 1.$$

Como cada bola en la expresión anterior tiene la misma medida, se sigue que $p^n d(B_{-n}(x_j)) = 1$ y por lo tanto $\mu(B_{-n}(x_j)) = p^{-n}$, es decir, el área de cualquier bola coincide con su radio.

Proposición 3.16

Sea $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. Entonces $d(xa) = |a|_p dx$.

Demostración

Para cada $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, $d(xa)$ es una medida de Haar en \mathbb{Q}_p . Por la unicidad de la medida de Haar, la medida $d(xa)$ difiere de dx por un factor $C(a) > 0$, es decir, $d(xa) = C(a)dx$. Si elegimos $b \in \mathbb{Q}_p^\times$, entonces $d[x(ab)] = C(ab)dx$, pero también $d[(xa)b] = C(b)d(xa) = C(a)C(b)dx$ lo que implica $C(ab) = C(a)C(b)$, además C es continua, por lo tanto C es un caracter multiplicativo, y por el teorema 3.12 se puede escribir de la forma

$$C(a) = |a|_p^{\alpha-1} \pi_1(a|_p), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Como $C(a) > 0$, $\pi_1(a|_p) = 1$ así $C(a) = |a|_p^{\alpha-1}$, entonces basta con encontrar el valor de α . Como $B_0 = \mathbb{Z}_p$ se puede escribir como unión de bolas disjuntas $B_{-1}(k) + pB_0$, $k = 0, \dots, p-1$, que tienen misma medida, entonces $\mu(B_0) = p\mu(pB_0) \implies d(px) = \frac{1}{p} dx \implies C(p) = \frac{1}{p} = |p|_p^{\alpha-1} \implies \alpha = 2 \implies C(a) = |a|_p$. ■

También existe una medida de Haar $d^\times x$ en el grupo multiplicativo \mathbb{Q}_p^\times , que es invariante bajo traslaciones izquierdas y derechas: $d^\times(xa) = d^\times x$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. Multiplicando por $|x|_p^{-1}$ en la ecuación de la proposición 3.16 obtenemos:

$$\frac{d(xa)}{|xa|_p} = \frac{dx}{|x|_p}, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times$$

por lo que la medida $\frac{dx}{|x|_p}$ es una medida de Haar en \mathbb{Q}_p^\times , y por la unicidad de la misma concluimos:

$$d^\times x = \frac{dx}{|x|_p}.$$

La medida normalizada $d^\times x$ tiene la forma:

$$d^\times x = \frac{p}{p-1} \frac{dx}{|x|_p}.$$

A continuación se exponen conceptos de teoría de la medida para el caso particular \mathbb{Q}_p , al ser un caso particular de resultados clásicos no se expondrán los detalles de las demostraciones y éstos se abordarán de manera breve y concisa.

Definición 3.17

Sea A un subconjunto medible en \mathbb{Q}_p . Denotamos por $\mathcal{L}^\rho(A)$ al conjunto de todas las funciones medibles $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{Q}_p$ tales que

$$\int_A |f(x)|^\rho dx < \infty, \quad \rho \geq 1.$$

Para $f \in \mathcal{L}^\rho(A)$ se define la norma como

$$\|f\|_\rho = \left(\int_A |f(x)|^\rho dx \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Proposición 3.18

Sea \mathcal{O} un subconjunto abierto en \mathbb{Q}_p y sea $C_0(\mathcal{O})$ el espacio de las funciones continuas ϕ con soporte compacto en \mathcal{O} . Entonces $C_0(\mathcal{O})$ es denso en $\mathcal{L}^\rho(\mathcal{O})$, $1 \leq \rho < \infty$.²

Definición 3.19

Sea $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{Q}_p$ un subconjunto abierto. Definimos $\mathcal{L}_{loc}^\rho(\mathcal{O})$ como el conjunto de las funciones $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f \in \mathcal{L}^\rho(K)$ para algún compacto $K \subseteq \mathcal{O}$.

Nótese que $\mathcal{L}^\rho(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{L}_{loc}^\rho(\mathcal{O})$.

Definición 3.20

Una función $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ es integrable en sentido impropio si existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{s}^{-n}} f(x) dx.$$

Este límite es llamado integral impropia y se denota por

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x) dx.$$

Además, si $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable, entonces

$$\int_{\mathfrak{s}^{-n}} f(x) dx = \sum_{k=-\infty}^n \int_{\mathfrak{s}^{-k}} f(x) dx.$$

y como $\mathbb{Q}_p = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}^n$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x) dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathfrak{s}^n} f(x) dx.$$

Si f es una función integrable en \mathbb{Q}_p entonces:

$$\int_{B_n} f(x) dx = \sum_{r=-\infty}^n \int_{S_r} f(x) dx \quad (3.3)$$

$$\int_{S_r} f(x) dx = \int_{B_n} f(x) dx - \int_{B_{n-1}} f(x) dx. \quad (3.4)$$

²Para consultar los detalles de la demostración ver (Albeverio et al., 2010).

3.2.3. Integrales elementales

Proposición 3.21

1. $\int_{B_n} d\mu = p^n$
2. $\int_{S_n} d\mu = p^n \left(1 - \frac{1}{p}\right)$
3. $\int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^{\alpha-1} = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0$
4. $\int_{B_n} \chi_p(x\xi) d\xi = \begin{cases} p^n, & |x|_p \leq p^{-n} \\ 0, & |x|_p \geq p^{-n+1} \end{cases}$
5. $\int_{S_n} \chi_p(x\xi) d\xi = \begin{cases} p^n(1 - p^{-1}), & |x|_p \leq p^{-n} \\ -p^{n-1}, & |x|_p = p^{-n+1} \\ 0, & |x|_p \geq p^{-n+2} \end{cases}$

Demostración

1. Como $B_n = p^{-n}\mathbb{Z}_p$ tenemos

$$\int_{B_n} dx = \int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} dx = |p^{-n}|_p \int_{\mathbb{Z}_p} dx = p^n.$$

2. Por el inciso anterior deducimos

$$\int_{S_n} dx = \int_{B_n} dx - \int_{B_{n-1}} dx = p^n - p^{n-1} = p^n \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

3. Como $\mathbb{Z}_p = B_0$ y el integrando es una función radial se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^{\alpha-1} dx &= \int_{B_0} |x|_p^{\alpha-1} dx \\ &= \sum_{r=-\infty}^0 \int_{S_r} |x|_p^{\alpha-1} dx \\ &= \sum_{r=-\infty}^0 (p^r)^{\alpha-1} \int_{S_r} dx \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{r=-\infty}^0 p^{r\alpha} \\ &= \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

4. Primero, si $|x|_p \leq p^{-n}$ entonces $|x\xi|_p \leq 1$, entonces

$$\int_{B_n} \chi(x\xi) dx = \int_{B_n} dx = p^n.$$

Por otro lado, si $|x|_p \geq p^{-n+1}$, entonces existe $\xi' \in S_n$ tal que $|x\xi'|_p \geq p$, así $\chi_p(x\xi') \neq 1$. Ahora, haciendo el cambio de variable $\xi = \eta - \xi'$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{B_n} \chi_p(x\xi) d\xi &= \int_{B_n(\xi')} \chi_p(x(\eta - \xi')) d\eta = \chi_p(-x\xi') \int_{B_n} \chi_p(x\eta) d\eta \\ &\implies \int_{B_n} \chi_p(x\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

5. Es consecuencia directa de la ecuación 3.4 y el inciso anterior. ■

3.3. El espacio de Bruhat-Schwarz

En esta sección se desarrolla la teoría necesaria para construir la transformada de Fourier en \mathbb{Q}_p , misma que será útil en el siguiente capítulo. Al no ser nuestro objetivo el estudio de esta teoría clásica no se expondrán la demostraciones.

Definición 3.22 (Función localmente constante)

Una función $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ es localmente constante si para todo $x \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{Q}_p$ existe un entero $l(x) \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(x + x') = \varphi(x)$, con $x' \in B_{l(x)}$.

Los caracteres aditivos son ejemplos de funciones localmente constantes, así como la función característica de la bola B_n definida como sigue:

$$\mathbf{1}_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin B_n \\ 1, & \text{si } x \in B_n. \end{cases}$$

De manera análoga se define la función indicadora $\mathbf{1}_{B_n(a)}$ correspondiente a la bola $B_n(a)$, sin embargo, notemos que $\mathbf{1}_{B_n(a)} = \mathbf{1}_n(x - a)$.

Denotamos por $\varepsilon(\mathbb{Q}_p)$ al espacio de las funciones complejo valuadas localmente constantes en \mathbb{Q}_p . Nótese que cualquier función de $\varepsilon(\mathbb{Q}_p)$ es continua en \mathbb{Q}_p , además $\varepsilon(\mathbb{Q}_p)$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares complejos.

Lema 3.23

Sea $\varphi \in \varepsilon(\mathbb{Q}_p)$ y sea K un compacto en \mathbb{Q}_p . Entonces existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(x + x') = \varphi(x)$, con $x' \in B_l$, $x \in K$.

La convergencia en $\varepsilon(\mathbb{Q}_p)$ se define como sigue:

³Para consultar la demostración ver (Albeverio et al., 2010)

$$\psi_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

en $\varepsilon(\mathbb{Q}_p)$ si para cualquier compacto $K \subseteq \mathbb{Q}_p$

$$\psi_k \xrightarrow[\text{unif}]{x \in K} 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Si $\varphi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, el **soporte** de φ es la cerradura del conjunto $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid \varphi(x) \neq 0\}$.

Definición 3.24 (Espacio de Bruhat-Schwartz)

El espacio de funciones $\varphi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ localmente constantes de soporte compacto en \mathbb{Q}_p es llamado espacio de Bruhat-Schwartz (o de funciones de prueba) y se denota por $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

El espacio $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ es subespacio vectorial de $\varepsilon(\mathbb{Q}_p)$.

Definición 3.25 (Parámetro de constancia)

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, por el lema 3.23 existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(x + x') = \varphi(x)$ para $x' \in B_l$, $x \in \mathbb{Q}_p$. El mayor de los l que satisfacen esta propiedad es llamado parámetro de constancia de φ y se denota por $l = l(\varphi)$.

La función característica $\mathbf{1}_n(x)$ pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ con soporte B_n y su parámetro de constancia $l = n$.

Lema 3.26

Si $\varphi \in \varepsilon(\mathbb{Q}_p)$, entonces φ se representa en cada bola B_{-n} en la forma

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{p^{l-n}-1} \varphi(j) \mathbf{1}_n(x - j), \quad x \in B_{-n}.$$

El lema anterior nos dice que φ toma sólo un número finito de valores.

Dados dos enteros $n \leq l$, la colección de funciones localmente constantes con soporte en B_{-n} y parámetro de constancia menor o igual a l se denotará por $\mathcal{D}_n^l(\mathbb{Q}_p)$.

Proposición 3.27

El espacio $\mathcal{D}_n^l(\mathbb{Q}_p)$ tiene una única topología que lo convierte en un espacio vectorial topológico complejo localmente convexo y completo de dimensión finita p^{l-n} (tal topología es la topología de la convergencia uniforme).

3.4. La transformada de Fourier

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{Q}_p)$, el producto convolución de f, g es la función

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{Q}_p} f(x - y)g(y)dy$$

siempre que $\int_{\mathbb{Q}_p} |f(x - y)g(y)dy| < \infty$.

Teorema 3.28

$L^1(\mathbb{Q}_p)$ es un espacio vectorial complejo y la operación producto convolución $*$: $L^1(\mathbb{Q}_p) \times L^1(\mathbb{Q}_p) \rightarrow L^1(\mathbb{Q}_p)$ satisface las propiedades:

- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- $f * g = g * f$,
- $f * (g + h) = f * g + f * h$,
- $\alpha(f * g) = \alpha f * g$,
- $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$,

para todo $f, g, h \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Definición 3.29 (Transformada de Fourier)

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. La transformada de Fourier de φ se define como:

$$\hat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)\chi_p(x\xi)dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Ejemplo 3.30

$$\hat{\mathbf{1}}_n = p^n \mathbf{1}_{-n}.$$

Solución

Por la proposición 3.21 se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_n(\xi) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{1}_n(x)\chi_p(x\xi)dx \\ &= \int_{B_n} \chi_p(x\xi)dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } \xi \notin B_{-n} \\ p^n, & \text{si } \xi \in B_{-n}. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Teorema 3.31

La transformada de Fourier es un isomorfismo lineal y continuo del espacio $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ sobre sí mismo y satisface la fórmula de inversión:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \hat{\varphi}(\xi) \chi_p(-x\xi) d\xi$$

para todo $x \in \mathbb{Q}_p$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

Definición 3.32

Se define la transformada inversa de Fourier como

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi](x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\xi) \chi_p(-x\xi) d\xi$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

Nótese que la fórmula de inversión implica

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{I}.$$

Dirección General de Bibliotecas UAQ

El *kernel* del calor

4.1. Aspectos básicos

Definición 4.1

El *kernel* (núcleo) del calor se define como:

$$Z(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(\exp(-t|\xi|_p^\alpha)) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-x\xi) \exp(-t|\xi|_p^\alpha) d\xi.$$

En el siguiente lema se hace uso de la función Gamma $\Gamma(z)$ compleja en la forma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds$$

con $\operatorname{Re}(z) > 0$. Además esta función satisface $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, por lo que

$$\Gamma(z+1) = z \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds = \int_0^\infty e^{-s^{\frac{1}{z}}} ds$$

que es convergente en el semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Lema 4.2

Para cada $t > 0$ y $\alpha > 0$, la función $\xi \rightarrow \exp(-t|\xi|_p^\alpha)$ es integrable sobre \mathbb{Q}_p y consecuentemente $Z(x, t)$ está bien definida para toda $t > 0$ y $x \in \mathbb{Q}_p$. Además para cada $t > 0$ y $\alpha > 0$ se cumple:

$$|Z(x, t)| \leq C(t^{\frac{1}{\alpha}})$$

donde C es una constante que depende de α .

Demostración

Usando el criterio de la integral clásico se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p} \exp(-t|\xi|_p^\alpha) d\xi &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{S_n} \exp(-t|\xi|_p^\alpha) d\xi \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(-t|\xi|_p^\alpha) (p^n - p^{n-1}) \\ &< \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right). \end{aligned}$$

Por último, como $Z(x, t) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-x\xi) \exp(-t|\xi|_p^\alpha) d\xi$, se satisface la desigualdad con $C = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$. ■

Proposición 4.3

El kernel del calor $Z(x, t)$ es una función positiva para toda x y $t > 0$. Además

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ p^n \leq |x|_p^{-1}}} p^n [\exp(-tp^{\alpha n}) - \exp(-tp^{\alpha(n+1)})].$$

Demostración

Sea $|x|_p = p^{-m}$, entonces

$$\begin{aligned} Z(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{S_n} \chi_p(-x\xi) \exp(-t|\xi|_p^\alpha) d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-tp^{n\alpha}) \int_{S_n} \chi_p(-x\xi) d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{m+1} \exp(-tp^{n\alpha}) \int_{S_n} \chi_p(-x\xi) d\xi \\ &= -\exp(-tp^{\alpha(m+1)}) p^m + \sum_{n=-\infty}^m \exp(-tp^{n\alpha}) (p^n - p^{n-1}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^m p^n [\exp(-tp^{n\alpha}) - \exp(-tp^{\alpha(n+1)})] \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ p^n \leq |x|_p^{-1}}} p^n [\exp(-tp^{n\alpha}) - \exp(-tp^{\alpha(n+1)})]. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $Z(x, t)$ es positiva para toda $x \in \mathbb{Q}_p$ y $t > 0$. ■

Lema 4.4

Para cualesquiera $t > 0$, $\alpha > 0$ y $x \in \mathbb{Q}_p$, el kernel del calor $Z(x, t)$ es positivo y satisface la desigualdad $Z(x, t) \leq Ct|x|_p^{-\alpha-1}$ donde $C = C(\alpha)$ es una constante.

Demostración

En la proposición anterior se probó que $Z(x, t) > 0$. Ahora, para $s \geq 0$ se cumple $1 - e^{-s} \leq s$, de lo que se sigue la desigualdad

$$\begin{aligned} Z(x, t) &\leq |x|_p^{-1} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ p^n \leq |x|_p^{-1}}} [\exp(-tp^{n\alpha}) - \exp(-tp^{\alpha(n+1)})] \\ &\leq |x|_p^{-1} [1 - \exp(-tp^{\alpha(m+1)})] \\ &\leq t|x|_p^{-1} p^{\alpha(m+1)} \\ &= tp^{\alpha m} p^\alpha p^m \\ &= t p^{(\alpha+1)m} p^\alpha \\ &= t|x|_p^{-1} p^\alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Z(x, t) \leq Ct|x|_p^{-\alpha-1},$$

para $x \in \mathbb{Q}_p$, $t > 0$, donde $C = p^\alpha$. ■

Proposición 4.5

Para toda $\alpha > 0$, $t > 0$ y $x \in \mathbb{Q}_p$ se tiene

$$Z(x, t) \leq Ct \left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}$$

Demostración

Es consecuencia directa de los lemas 4.2 y 4.4. ■

Proposición 4.6

El kernel del calor satisface las siguientes propiedades:

- $Z(x, t) \geq 0$ y

$$\int_{\mathbb{Q}_p} Z(x, t) = 1.$$

para toda $t > 0$. Es decir, $Z(x, t)$ es una función de distribución de una medida de probabilidad en \mathbb{Q}_p .

- $Z(x, t)$ satisface la propiedad de Markov:

$$Z(x, t+s) = \int_{\mathbb{Q}_p} Z(x-y, t)Z(y, s)dy$$

Demostración

Para consultar la demostración ver (Aguilar-Arteaga y Estala-Arias, 2017). ■

Teorema 4.7

$Z(x, t)$ es la densidad de transición de un proceso de Markov homogéneo en espacio y tiempo, el cual es acotado, continuo por la derecha y las únicas discontinuidades que presenta son de tipo salto.

Demostración

Para consultar la demostración ver (Aguilar-Arteaga y Estala-Arias, 2017). ■

4.2. Descripción del problema

El problema que nos planteamos en el capítulo 1 está basado en la proposición 4.6 y en el teorema 4.7, que describe la analogía del movimiento Browniano en el espacio \mathbb{Q}_p . Más específicamente, se analiza el movimiento aleatorio que presenta una "partícula" (elemento de \mathbb{Q}_p) que parte del cero, bajo la distribución de probabilidad inducida por $Z(x, t)$.

Como es sabido, los recursos de una computadora son limitados, por lo que para llevar a cabo la simulación deseada es necesario discretizar el espacio \mathbb{Q}_p .

Se calculan las probabilidades asociadas a $Z(x, 1)$ para cada x en el dominio de discretización \mathfrak{D} y a continuación se calculan las probabilidades de salto (cambio de jerarquía en \mathbb{Q}_p i.e. salto a una esfera en \mathbb{Q}_p) tomando la probabilidad asociada a cada $x_0 \in \mathfrak{D}$ y multiplicándola por la medida (de Haar) de la esfera a la que pertenece.

Sabemos que $Z(x, t)$ satisface la propiedad de Markov, por lo que es posible calcular el estado X_n simulando $X_{\tilde{n}}$ con distribución de probabilidad $Z(x, 1)$ y asignando $X_n = X_{\tilde{n}} + X_{n-1}$, para $n \geq 1$.

4.3. Metodología

A continuación se detalla la forma en que se planteó la simulación a la par que se describe el algoritmo computacional que permitió ejecutar y resolver el problema. El algoritmo se divide en tres partes principales:

Primera parte

Por el corolario 2.67 sabemos que todo número en $x \in \mathbb{Q}_p$ se escribe de la forma:

$$x = \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i p^i \quad (4.1)$$

Para la simulación se consideró al subconjunto

$$\mathfrak{D} = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \sum_{i=-50}^{49} a_i p^i \right\}$$

como el dominio de discretización.

Para la implementación computacional se generó una clase *pAdico* que contiene un arreglo de enteros de tamaño 100. Así cada objeto de la clase *pAdico* representa un número en \mathfrak{D} y en el arreglo de enteros se almacenan cada uno de los coeficientes de la representación del número en la forma de la ecuación 4.1.

Para conocer la distribución de probabilidad $Z(x, 1)$ nos basamos en la proposición 4.3 que establece:

$$Z(x, t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |x|_p^{-1} \leq p^n}} p^n \left[\exp(-tp^{\alpha n}) - \exp(-tp^{\alpha(n+1)}) \right].$$

Haciendo las consideraciones $t = \alpha = 1$ la ecuación anterior se simplifica a

$$Z(x, t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |x|_p^{-1} \leq p^n}} p^n \left[\exp(-p^n) - \exp(-p^{(n+1)}) \right], \quad (4.2)$$

que es la expresión a través de la cual se calculan las probabilidades de interés.

Podemos escribir al dominio de discretización como

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=-49}^{50} S_n.$$

Entonces es necesario calcular las probabilidades de salto a cada una de las esferas en \mathfrak{D} . Para calcular estas probabilidades se consideraron únicamente los términos de la serie 4.2 en el rango $[-50, 50]$ debido a que los términos de la serie se hacen exponencialmente pequeños conforme se alejan del índice cero en ambas direcciones. En el algoritmo se calcula cada uno de los términos de la serie y se almacenan en un arreglo denominado *Vector de términos*.

Ahora, si $x \in S_m$ entonces la función Z se calcula como

$$Z(x, t) = \sum_{n \geq -m} p^n \left[\exp(-p^n) - \exp(-p^{(n+1)}) \right].$$

Así se calcula Z con $x \in S_m$ para cada $-49 \leq m \leq 50$, en la sección del algoritmo denominada *Z por esferas*.

Por último, como Z es una función de distribución de una medida de probabilidad en \mathbb{Q}_p , se cumple que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} Z(p^n, t) [p^{-n} - p^{-n-1}] = 1,$$

i.e., tomando la suma sobre todas las esferas en \mathbb{Q}_p del valor que toma Z para un elemento de una esfera multiplicado por la medida de la misma esfera debe ser 1.

Como la simulación se hace sobre \mathfrak{D} y no sobre \mathbb{Q}_p , es de esperarse que la igualdad no se cumpla, pero sí que el valor de la suma sea muy cercano a 1 para que la simulación refleje el comportamiento real (en la siguiente sección se esclarece cuantitativamente la cercanía a 1 de la suma en el dominio de discretización)

En el algoritmo se calcula cada término de la suma

$$P_s = \sum_{n=-49}^{50} Z(p^n, t) [p^{-n} - p^{-n-1}] \quad (4.3)$$

lo que arroja un total de 100 valores de probabilidad asociados a las 100 esferas en el dominio de discretización, obteniendo un arreglo denominado Z *probabilidad*.

Segunda parte

En la segunda parte del algoritmo se generan las simulaciones del proceso de la siguiente manera:

- Se suman los valores del arreglo Z *probabilidad*, obteniendo el valor P_s (ecuación 4.3).
- Se genera una partición del intervalo $[0, P_s]$ a partir de las sumas parciales de la serie 4.3. Es decir, cada subconjunto de la partición está asociado a una esfera en el dominio de discretización.
- Se genera un número aleatorio con distribución $Uniforme(0, 1)$ y éste se redimensiona bajo la transformación lineal $T : [0, 1] \rightarrow [0, P_s]$ que cumple $T(0) = 0$ y $T(1) = P_s$.
- El número aleatorio redimensionado pertenece a un subconjunto de la partición que se generó en el segundo inciso, éste a su vez está asociado a una esfera, entonces el número aleatorio redimensionado nos indica un salto a una determinada esfera S_m .
- En el instante t , se genera un número $X_{\tilde{t}}$ que viva en el dominio de discretización y que pertenezca a la esfera de radio S_m . Para ello se elige un número aleatorio con distribución $Uniforme(1, p - 1)$ (discreta), el cual será el coeficiente a_{-m} , de esta forma se asegura que $X_{\tilde{t}} \in S_m$. Para los coeficientes $a_{-m+1}, a_{-m+2}, \dots, a_{49}$, se genera cada vez un número aleatorio con distribución $Uniforme(0, p - 1)$ (discreta).

- Para cada instante t se calculan los estados X_t como se mencionó en la descripción del problema.

Así se generan tantos estados como se requiera (el número de estados que se generan en cada simulación es una constante en el programa). Esta colección de estados conforma una simulación.

Para generar otra simulación se repite la segunda parte del algoritmo sin borrar los datos de la simulación anterior. Este proceso se repite tantas simulaciones se deseen (el número de simulaciones a generar es una constante en el programa).

Tercera parte

Esta parte del algoritmo se encarga de generar las gráficas y guardar la información de los cálculos probabilísticos y simulaciones en un archivo `.csv`. Esta parte del algoritmo no constituye un aporte, se trata de trabajo rutinario por lo que no daremos detalles. Por otro lado, la parte interpretativa de la gráficas sí merece especial atención, pero ésta se dará en la sección de resultados.

4.4. Análisis del algoritmo

El programa se escribió en lenguaje *Python 3.7.3* y se ejecutó en un equipo portátil con sistema operativo Windows 10 Home de 64 bits, 12 GB de memoria RAM y un procesador Intel Core i5-7200U con especificaciones que se detallan a continuación:

- Número de procesador: *i5 – 7200U*.
- Cantidad de núcleos: 4.
- Cantidad de subprocesos: 8.
- Frecuencia básica: *2.5 GHz*.
- Frecuencia turbo máxima: *3.1 GHz*.
- Memoria caché: *3 MB*.
- Velocidad del BUS (QPI): *4 GT/s (2 GHz/s)*.
- Máximo de ancho de banda de memoria: *34.1 GB/s*.

Al tratarse de un programa que trabaja con números “muy pequeños”, se optó por usar la biblioteca *mpmath 1.1.0* de *Python*, la cual es utilizada para trabajar aritmética de punto flotante de precisión arbitraria¹.

La versión de *mpmath* utilizada ofrece los tipos de datos:

¹[http : //mpmath.org/doc/current/](http://mpmath.org/doc/current/)

- *mpf*: Flotante real.
- *mpc*: Flotante complejo.
- *mpi*: Intervalo real.
- *matriz*: Matriz.

de los cuales sólo se utilizó el tipo de dato *mpf*, el cual es análogo al tipo *float*, y se puede combinar con los tipos de datos nativos de *Python* con la nomenclatura convencional.

Esta biblioteca utiliza una precisión de trabajo global controlada por el atributo *dps* (número de posiciones decimales) cuyo valor por defecto es 15 y cuyo valor para la ejecución del programa se fijó en 50. Además, no existe restricción para la magnitud de los números definidos en esta biblioteca.

Recordemos que para el trabajo se definió la clase *pAdico*:

```
class pAdico():
    vgraf
    coef[0]*(indiceInferior + indiceSuperior)
```

Cada objeto de la clase representa un número *p*-ádico en el dominio de discretización. La variable *vgraf* es de tipo *mpf* y almacena el valor del número *p*-ádico en el árbol (ver sección de resultados). El arreglo *coef* es de tipo entero y almacena los coeficientes del número *p*-ádico. Ambos valores por default son cero.

A continuación se presenta el pseudocódigo que explica la primera parte del algoritmo. Los límites de cálculo para probabilidades se dejaron expresados como constantes (*indiceInferior*, *indiceSuperior*) a pesar de estar ya definidos los rangos en los que se trabajaría (esto con la finalidad de dar mayor flexibilidad al algoritmo).

```
#vectorTerminos (calcular cada termino de la suma entre -50 y 50)
n = -indiceInferior
while n < indiceSuperior:
    vectorTerminos[n+indiceInferior] = ( p**n ) * ( exp(-tp^{alpha*n})
        - exp(-tp^{alpha(n+1)}) )
    n += 1
```

```
#Vector Z
i = -indiceInferior
while n < indiceSuperior:
    j = -indiceInferior
    while j < i:
        aux += vectorTerminos[j]
        j += 1
    Z[i+indiceInferior] = aux
    i += 1
```

```
#Z por esferas
```

```

n = -indiceInferior
while n < indiceSuperior:
    m = -n
    ZS[n+indiceInferior] = Z[n+indiceInferior] * (p**m - p**(m-1))
    n += 1

```

```

#Limpiar ceros
numCeros = 0
while True:
    if ZS[0] == 0
        borrar(ZS[0])
        numCeros += 1
    else
        break

```

```

#Intervalos
aux = 0
intervalos[0] = aux
i = 0
while i < len(ZS):
    aux += ZS[i]
    intervalos[i+1] = aux

```

Es notorio que el orden de la primera parte del algoritmo es $O(n^2)$. A continuación, en la segunda parte del algoritmo se presenta una justificación más detallada (ya que esta parte es la que define el orden del algoritmo general).

La segunda parte del algoritmo genera las simulaciones y guarda los resultados en arreglos, en esta parte se presenta la mayor carga de trabajo computacional. Analizando el algoritmo por el peor caso encontramos en primer lugar que el número de repeticiones que ejecuta cada ciclo depende de las variables $nSimul$, $tiempoFijo$ e $indiceSuperior$ (que está estrechamente ligada a $indiceInferior$), de las cuales todas son constantes fijas en cada ejecución del programa, pero susceptibles a modificación entre ejecuciones del algoritmo, así tomando $n = \max\{ncorridas, tiempoFijo, indiceSuperior + indiceInferior\}$, es claro que el orden de esta sección del algoritmo es $O(n^3)$.

```

nc = 0
while nc < nSimul:
    numt[0] = post[0] = pAdico(0)
    tiempo = 1
    while tiempo-1 < tiempoFijo:
        aleatorio = random(0,1)
        aleatNorm = normalizar(aleatorio,0,intervalos[len(intervalos)-1])
        indice = saltoJerarquia(aleatNorm)
        padic.coef[indice] = random(1,2,...,p-1)
        i = indice+1
        while i < indiceSuperior:
            padic.coef[i] = random(0,1,...,p-1)

```

```

    indt[tiempo] = padic
    post[tiempo] = post[tiempo-1]+indt[tiempo]
    tiempo += 1
Numeros[rep] = indt
Posiciones[rep] = post
nc += 1

```

La última parte genera las gráficas y guarda los resultados en archivos .csv. Análogamente a la parte anterior, se realizó el análisis de esta sección del algoritmo siendo el orden de ésta menor o igual que el de las secciones anteriores (de hecho es $O(n^3)$)

```

graficaGeneral(Posiciones)
nc = 0
while nc < ncorridas:
    graficasIndividuales(Posiciones[nc])
    nc += 1
generarCSV(Numeros)
generarCSV(Posiciones)

```

Entonces podemos concluir que el orden del algoritmo general es $O(n^3)$.

En la sección de resultados se especifican los tiempos de ejecución del programa.

4.5. Resultados

Como pudimos observar en el capítulo 1, el conjunto de números p -ádicos no es representable (de manera directa) mediante la línea recta como es el caso de \mathbb{R} . También notamos que es posible representar este conjunto de números mediante una estructura fractal o un árbol (como se ve en la figura 2.2).

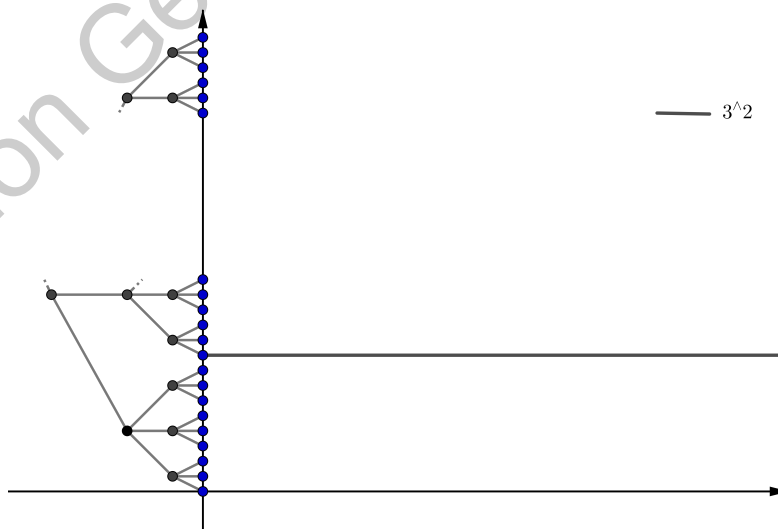


Figura 4.1: Representación de los resultados.

Para obtener una representación gráfica de los resultados numéricos obtenidos en las simulaciones se consideró el plano cartesiano \mathbb{R}^2 tomando al eje horizontal como el tiempo y al eje vertical como las hojas del árbol p -ádico como se ve en la figura 4.1.

Como se observa en la figura 4.1, en el eje vertical positivo se ubican las p^{100} hojas del árbol a distancia uno entre ellas y en cada ramificación del árbol se considera el orden natural de los coeficientes p -ádicos, es decir, a partir de cada nodo padre hacia la izquierda se desprenden p hijos conectados al padre por ramas, donde cada uno corresponde a los dígitos $0, 1, \dots, p - 1$ de abajo hacia arriba. La línea horizontal en negro es una línea guía que indica la altura de las hojas del árbol que se observan en la gráfica (la primera hoja del árbol de abajo hacia arriba tiene altura cero).

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones obtenidas en diferentes espacios, haciendo énfasis en el caso base \mathbb{Q}_5 .

\mathbb{Q}_5

Se realizaron tres ejecuciones del programa, cada una con 10 simulaciones para $t = 15$ variando el parámetro α . Para $\alpha = 0.1$ se registraron los siguientes tiempos durante la ejecución del algoritmo:

- Primera parte: 0.25835442543029785s.
- Segunda parte: 13.87144136428833s.
- Tercera parte: 17.04997944831848s.

Los tiempos fueron medidos con ayuda de la función *time()* de la biblioteca *time* de *Python*. Por otro lado, el error que arrojó el algoritmo con una precisión $mp.dps = 50$ respecto a la probabilidad acumulada de la función Z y 1 fue de

$$0.000319948805460896311726135605203411865452546978782.$$

Las probabilidades inducidas por $Z(x, 1)$ en \mathbb{Q}_5 con estos parámetros se exponen en la tabla A.2 y las gráficas del proceso se muestran en la figura 4.2.

Para $\alpha = 1$ se registraron los siguientes tiempos durante la ejecución del algoritmo:

- Primera parte: 0.6815145015716553s.
- Segunda parte: 12.047478675842285s.
- Tercera parte: 16.259999990463257s.

El error que arrojó el algoritmo con precisión $mp.dps = 50$ fue

$$1.6786541569343176051746618597631258801043237127999 \times 10^{-35}.$$

Las probabilidades se exponen en la tabla A.3 y las gráficas del proceso se muestran en la figura 4.3.

Para $\alpha = 10$ se registraron los siguientes tiempos de ejecución del algoritmo:

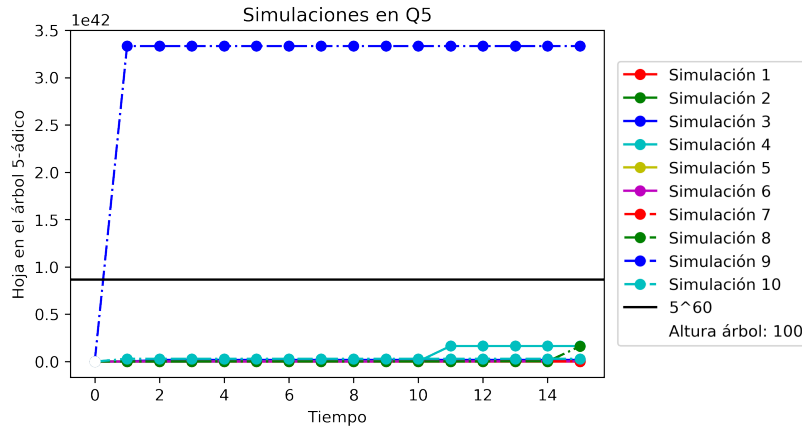


Figura 4.2: 10 simulaciones en Q_5 con $\alpha = 0.1$, $t = 15$.

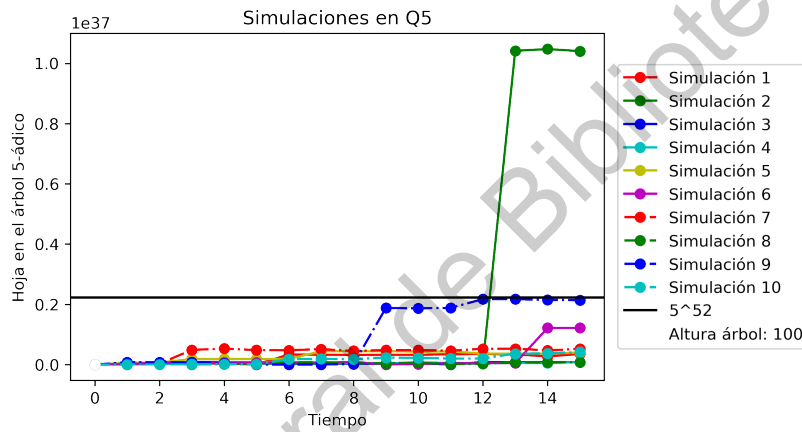


Figura 4.3: 10 simulaciones en Q_5 con $\alpha = 1$, $t = 15$.

- Primera parte: 2.8182313442230225s.
- Segunda parte: 11.825921535491943s.
- Tercera parte: 19.84666919708252s.

El error que arrojó el algoritmo con precisión $mp.dps = 50$ fue

$$5.5653630575717596670653080413802477461397222543083 \times 10^{-36}.$$

Las probabilidades se exponen en la tabla A.4 y las gráficas del proceso se muestran en la figura 4.4.

Q_3

Para este caso se ejecutó el programa una vez, nuevamente generando 10 simulaciones ahora para $t = 30$, $\alpha = 2$, registrándose los siguientes tiempos:

- Primera parte: 0.41568946838378906s.

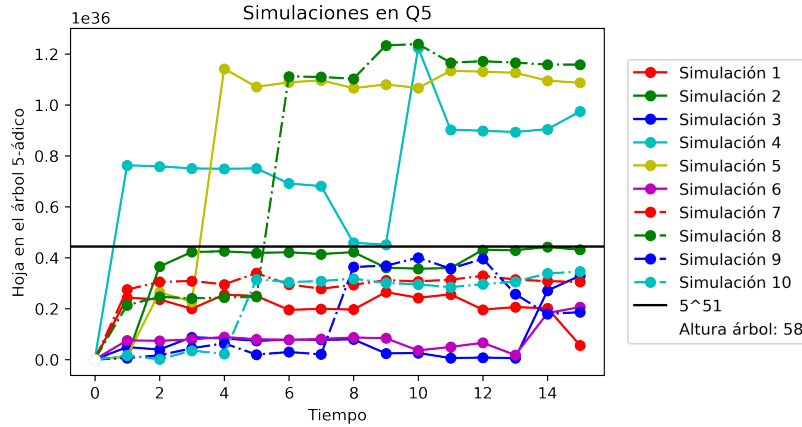


Figura 4.4: 10 simulaciones en \mathbb{Q}_5 con $\alpha = 10$, $t = 15$.

- Segunda parte: 23.569283723831177s.
- Tercera parte: 21.42738938331604s.

El error del algoritmo con precisión $mp.dps = 50$ esta vez fue

$$7.7242179263831392433482758272442695959100085343911 \times 10^{-25}.$$

Las probabilidades se exponen en la tabla A.1 y las gráficas del proceso se muestran en la figura 4.3.

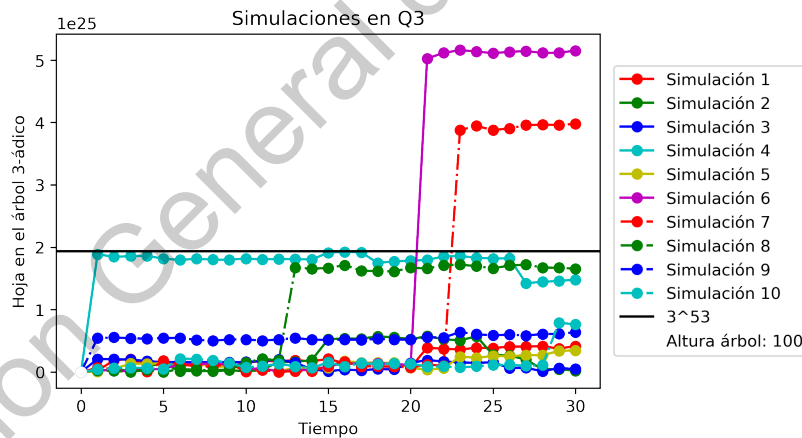


Figura 4.5: 10 simulaciones en \mathbb{Q}_3 con $\alpha = 2$, $t = 15$.

\mathbb{Q}_7

Para este caso se ejecutó el programa una vez, generando 10 simulaciones para $t = 30$, $\alpha = 2$, registrándose los siguientes tiempos:

- Primera parte: 0.8145601749420166s.

- Segunda parte: 15.751509666442871s.
- Tercera parte: 27.005741834640503s.

El error del algoritmo con precisión $mp.dps = 50$ fue

$$2.5338353492930753991836057614793936895304499256721 \times 10^{-43}.$$

Las probabilidades se exponen en la tabla A.5 y las gráficas del proceso se muestran en la figura 4.6.

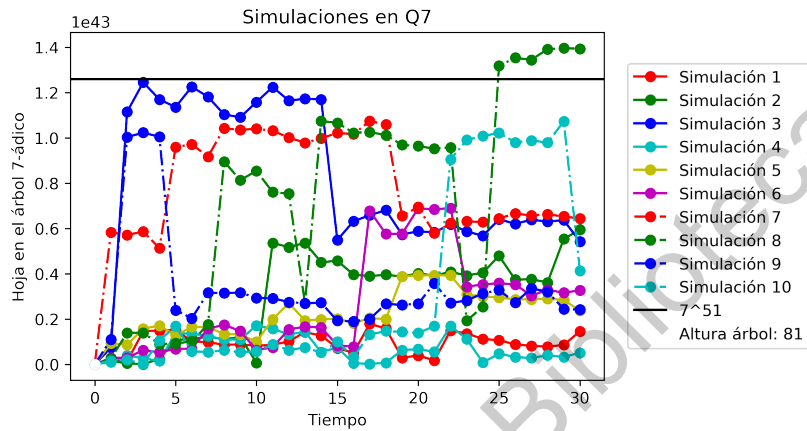


Figura 4.6: 10 simulaciones en \mathbb{Q}_7 con $\alpha = 2$, $t = 15$.

Conclusiones

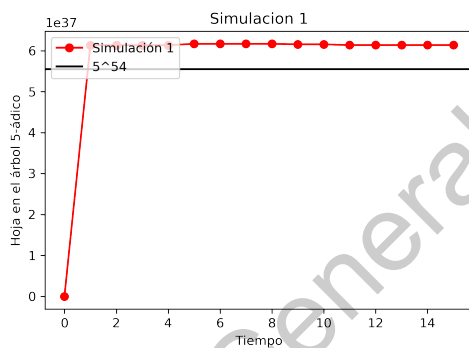
Como se observa en la tabla de probabilidades asociadas a cada esfera en \mathfrak{D} , la mayor concentración de probabilidad se encuentra en las esferas de radio p^0 y de radios cercanos a ésta para todo p . Así, como es de esperarse, se observa en las diferentes simulaciones, que los estados del proceso se mantienen cerca del valor absoluto p -ádico 1 indiferentemente del primo p .

Un fenómeno interesante es que existe un “regreso” cuando el estado se aleja del valor promedio $|x|_p \approx 1$, esto numéricamente debido al acarreo en la suma de términos (estados) conforme avanza el tiempo, lo que hace que eventualmente la valuación p -ádica aumente una unidad (o varias) una vez que se había visto disminuida por la aparición de un estado (X_i) atípico con valor absoluto p -ádico mayor al promedio.

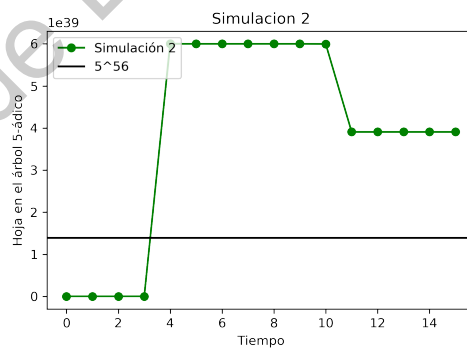
La expresión de la proposición 4.3 que se utilizó para aproximar el *kernel* del calor se puede generalizar al caso adèlico como se ve en (Aguilar-Arteaga y Estala-Arias, 2019). Es así que la simulación de este caso generalizado representa un paso natural en la continuación de este trabajo.

Tablas y gráficas

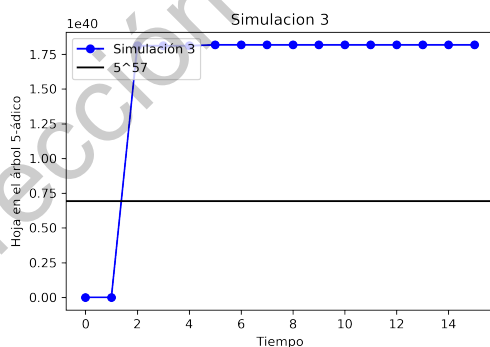
En este apéndice se muestran las tablas de probabilidades asociadas y las gráficas individuales de cada una de las diferentes simulaciones expuestas en la sección de resultados.



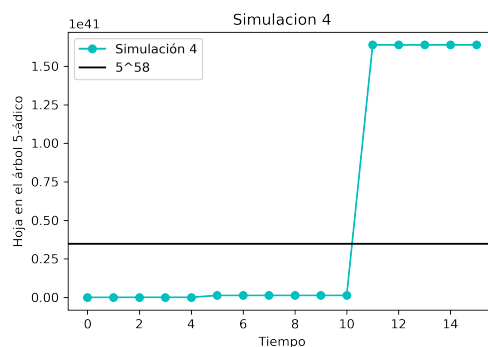
(a) Simulación 1



(b) Simulación 2

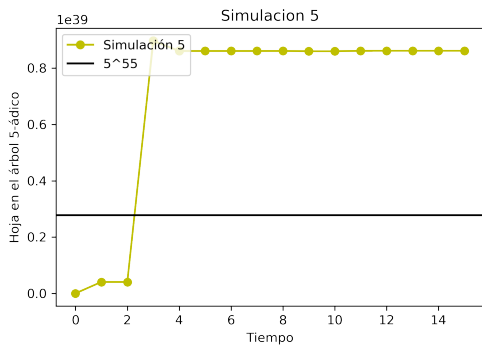


(c) Simulación 3

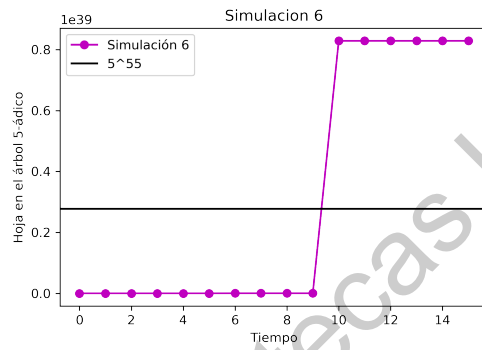


(d) Simulación 4

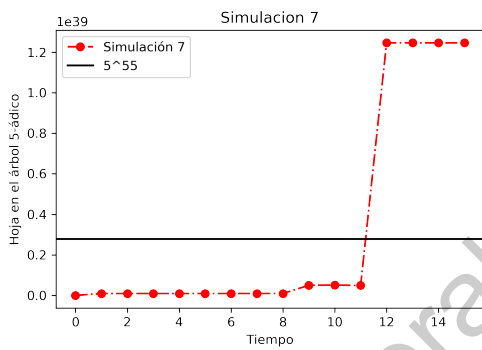
Figura A.1: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.2.



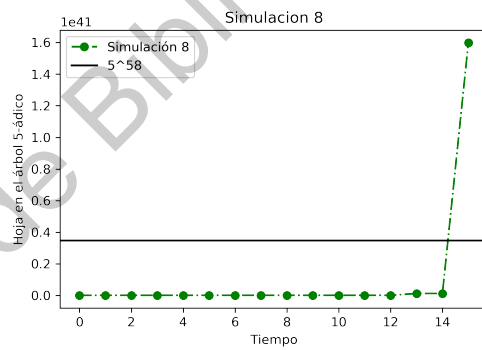
(e) Simulación 5



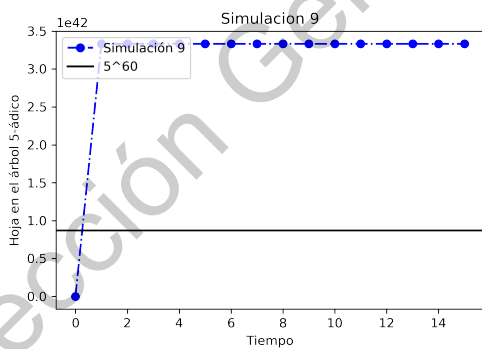
(f) Simulación 6



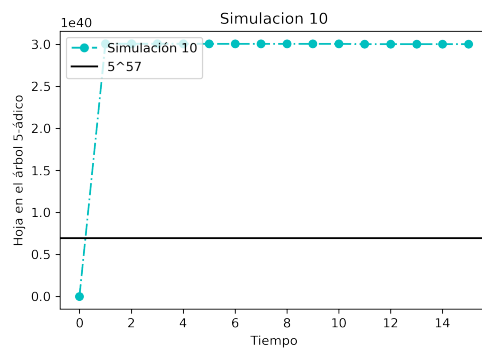
(g) Simulación 7



(h) Simulación 8



(i) Simulación 9



(j) Simulación 10

Figura A.1: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.2 (continuación).

Radio	Z probabilidad	Z por esferas	Radio	Z probabilidad	Z por esferas
-50	2.16E-71	1.03E-47	0	0.554149821	0.369433214
-49	6.05E-70	9.66E-47	1	0.554520051	0.123226678
-48	1.64E-68	8.70E-46	2	0.554520051	0.041075559
-47	4.42E-67	7.83E-45	3	0.554520051	0.013691853
-46	1.19E-65	7.05E-44	4	0.554520051	0.004563951
-45	3.22E-64	6.35E-43	5	0.554520051	0.001521317
-44	8.70E-63	5.71E-42	6	0.554520051	0.000507106
-43	2.35E-61	5.14E-41	7	0.554520051	0.000169035
-42	6.34E-60	4.63E-40	8	0.554520051	5.63451E-05
-41	1.71E-58	4.16E-39	9	0.554520051	1.87817E-05
-40	4.62E-57	3.75E-38	10	0.554520051	6.26056E-06
-39	1.25E-55	3.37E-37	11	0.554520051	2.08685E-06
-38	3.37E-54	3.04E-36	12	0.554520051	6.95618E-07
-37	9.10E-53	2.73E-35	13	0.554520051	2.31873E-07
-36	2.46E-51	2.46E-34	14	0.554520051	7.72909E-08
-35	6.63E-50	2.21E-33	15	0.554520051	2.57636E-08
-34	1.79E-48	1.99E-32	16	0.554520051	8.58788E-09
-33	4.84E-47	1.79E-31	17	0.554520051	2.86263E-09
-32	1.31E-45	1.61E-30	18	0.554520051	9.54209E-10
-31	3.53E-44	1.45E-29	19	0.554520051	3.1807E-10
-30	9.52E-43	1.31E-28	20	0.554520051	1.06023E-10
-29	2.57E-41	1.18E-27	21	0.554520051	3.53411E-11
-28	6.94E-40	1.06E-26	22	0.554520051	1.17804E-11
-27	1.87E-38	9.52E-26	23	0.554520051	3.92679E-12
-26	5.06E-37	8.57E-25	24	0.554520051	1.30893E-12
-25	1.37E-35	7.71E-24	25	0.554520051	4.36309E-13
-24	3.69E-34	6.94E-23	26	0.554520051	1.45436E-13
-23	9.96E-33	6.25E-22	27	0.554520051	4.84788E-14
-22	2.69E-31	5.62E-21	28	0.554520051	1.61596E-14
-21	7.26E-30	5.06E-20	29	0.554520051	5.38654E-15
-20	1.96E-28	4.56E-19	30	0.554520051	1.79551E-15
-19	5.29E-27	4.10E-18	31	0.554520051	5.99E-16
-18	1.43E-25	3.69E-17	32	0.554520051	2.00E-16
-17	3.86E-24	3.32E-16	33	0.554520051	6.65E-17
-16	1.04E-22	2.98888E-15	34	0.554520051	2.22E-17
-15	2.81E-21	2.69E-14	35	0.554520051	7.39E-18
-14	7.59E-20	2.421E-13	36	0.554520051	2.46E-18
-13	2.05E-18	2.1789E-12	37	0.554520051	8.21E-19
-12	5.53E-17	1.96101E-11	38	0.554520051	2.74E-19
-11	1.49444E-15	1.76491E-10	39	0.554520051	9.12E-20
-10	4.03499E-14	1.58842E-09	40	0.554520051	3.04E-20
-9	1.08945E-12	1.42957E-08	41	0.554520051	1.01E-20
-8	2.94151E-11	1.28662E-07	42	0.554520051	3.38E-21
-7	7.94207E-10	1.15795E-06	43	0.554520051	1.13E-21
-6	2.14434E-08	1.04215E-05	44	0.554520051	3.75E-22
-5	5.7893E-07	9.37867E-05	45	0.554520051	1.25E-22
-4	1.56209E-05	0.000843527	46	0.554520051	4.17E-23
-3	0.000419287	0.007547164	47	0.554520051	1.39E-23
-2	0.010740498	0.064442988	48	0.554520051	4.63E-24
-1	0.18639379	0.37278758	49	0.554520051	1.54E-24

Tabla A.1: Probabilidades en Q_3 con $\alpha = 2$, $t = 1$.

Radio	Z probabilidad	Z por esferas	Radio	Z probabilidad	Z por esferas
-50	6.29E-40	4.46869E-05	0	0.073581568	0.058865254
-49	4.32E-39	6.14243E-05	1	0.360032098	0.057605136
-48	2.60E-38	7.39325E-05	2	1.706976386	0.054623244
-47	1.53E-37	8.7193E-05	3	7.800188911	0.049921209
-46	9.01E-37	0.00010248	4	34.14092406	0.043700383
-45	5.29E-36	0.000120376	5	142.1057925	0.036379083
-44	3.11E-35	0.00014138	6	557.8382287	0.028561317
-43	1.83E-34	0.000166043	7	2045.636627	0.020947319
-42	1.07E-33	0.000195002	8	6932.153759	0.014197051
-41	6.29E-33	0.000229004	9	21445.90665	0.008784243
-40	3.70E-32	0.000268924	10	59764.22843	0.004895886
-39	2.17E-31	0.000315791	11	147899.1055	0.002423179
-38	1.27E-30	0.000370805	12	320409.9229	0.001049919
-37	7.48E-30	0.000435378	13	600008.9608	0.000393222
-36	4.39E-29	0.000511159	14	963479.6265	0.000126285
-35	2.58E-28	0.00060008	15	1328657.191	3.483E-05
-34	1.51E-27	0.000704401	16	1600222.968	8.38978E-06
-33	8.88E-27	0.000826762	17	1742363.022	1.827E-06
-32	5.21E-26	0.000970248	18	1791738.835	3.75755E-07
-31	3.06E-25	0.001138454	19	1802366.362	7.55967E-08
-30	1.79E-24	0.001335573	20	1803673.988	1.51303E-08
-29	1.05E-23	0.001566479	21	1803757.649	3.0262E-09
-28	6.16E-23	0.001836834	22	1803760.138	6.05241E-10
-27	3.61E-22	0.002153197	23	1803760.168	1.21048E-10
-26	2.12E-21	0.002523152	24	1803760.168	2.42097E-11
-25	1.24E-20	0.002955438	25	1803760.168	4.84193E-12
-24	7.26E-20	0.003460093	26	1803760.168	9.68386E-13
-23	4.25E-19	0.004048589	27	1803760.168	1.93677E-13
-22	2.48E-18	0.004733978	28	1803760.168	3.87355E-14
-21	1.45E-17	0.005531005	29	1803760.168	7.74709E-15
-20	8.46E-17	0.0064562	30	1803760.168	1.54942E-15
-19	4.93E-16	0.00752791	31	1803760.168	3.10E-16
-18	2.87252E-15	0.00876624	32	1803760.168	6.20E-17
-17	1.67E-14	0.010192868	33	1803760.168	1.24E-17
-16	9.69168E-14	0.011830663	34	1803760.168	2.48E-18
-15	5.61277E-13	0.013703045	35	1803760.168	4.96E-19
-14	3.24259E-12	0.015832978	36	1803760.168	9.92E-20
-13	1.86793E-11	0.018241498	37	1803760.168	1.98E-20
-12	1.07242E-10	0.020945624	38	1803760.168	3.97E-21
-11	6.13262E-10	0.023955529	39	1803760.168	7.93E-22
-10	3.49067E-09	0.027270826	40	1803760.168	1.59E-22
-9	1.97606E-08	0.03087588	41	1803760.168	3.17E-23
-8	1.11149E-07	0.034734126	42	1803760.168	6.35E-24
-7	6.20505E-07	0.038781575	43	1803760.168	1.27E-24
-6	3.43359E-06	0.042919927	44	1803760.168	2.54E-25
-5	1.88041E-05	0.047010132	45	1803760.168	5.08E-26
-4	0.000101736	0.050867796	46	1803760.168	1.02E-26
-3	0.000542625	0.054262462	47	1803760.168	2.03E-27
-2	0.002846172	0.056923438	48	1803760.168	4.06E-28
-1	0.014638806	0.058555225	49	1803760.168	8.12E-29

Tabla A.2: Probabilidades en Q_5 con $\alpha = 0.1$, $t = 1$.

Radio	Z probabilidad	Z por esferas	Radio	Z probabilidad	Z por esferas
-50	5.07E-70	3.60E-35	0	0.457254661	0.365803729
-49	1.32E-68	1.87E-34	1	0.490944396	0.078551103
-48	3.30E-67	9.38E-34	2	0.490944396	0.015710221
-47	8.25E-66	4.69E-33	3	0.490944396	0.003142044
-46	2.06E-64	2.35E-32	4	0.490944396	0.000628409
-45	5.16E-63	1.17E-31	5	0.490944396	0.000125682
-44	1.29E-61	5.86E-31	6	0.490944396	2.51364E-05
-43	3.22E-60	2.93E-30	7	0.490944396	5.02727E-06
-42	8.06E-59	1.47E-29	8	0.490944396	1.00545E-06
-41	2.01E-57	7.33E-29	9	0.490944396	2.01091E-07
-40	5.04E-56	3.67E-28	10	0.490944396	4.02182E-08
-39	1.26E-54	1.83E-27	11	0.490944396	8.04363E-09
-38	3.15E-53	9.16E-27	12	0.490944396	1.60873E-09
-37	7.87E-52	4.58E-26	13	0.490944396	3.21745E-10
-36	1.97E-50	2.29E-25	14	0.490944396	6.43491E-11
-35	4.92E-49	1.15E-24	15	0.490944396	1.28698E-11
-34	1.23E-47	5.73E-24	16	0.490944396	2.57396E-12
-33	3.07E-46	2.86E-23	17	0.490944396	5.14793E-13
-32	7.69E-45	1.43E-22	18	0.490944396	1.02959E-13
-31	1.92E-43	7.16E-22	19	0.490944396	2.05917E-14
-30	4.80E-42	3.58E-21	20	0.490944396	4.11834E-15
-29	1.20E-40	1.79E-20	21	0.490944396	8.24E-16
-28	3.00E-39	8.95E-20	22	0.490944396	1.65E-16
-27	7.51E-38	4.47E-19	23	0.490944396	3.29E-17
-26	1.88E-36	2.24E-18	24	0.490944396	6.59E-18
-25	4.69E-35	1.12E-17	25	0.490944396	1.32E-18
-24	1.17E-33	5.59E-17	26	0.490944396	2.64E-19
-23	2.93E-32	2.80E-16	27	0.490944396	5.27E-20
-22	7.33E-31	1.3981E-15	28	0.490944396	1.05E-20
-21	1.83E-29	6.99051E-15	29	0.490944396	2.11E-21
-20	4.58E-28	3.49525E-14	30	0.490944396	4.22E-22
-19	1.15E-26	1.74763E-13	31	0.490944396	8.43E-23
-18	2.86E-25	8.73813E-13	32	0.490944396	1.69E-23
-17	7.16E-24	4.36907E-12	33	0.490944396	3.37E-24
-16	1.79E-22	2.18453E-11	34	0.490944396	6.75E-25
-15	4.47E-21	1.09227E-10	35	0.490944396	1.35E-25
-14	1.12E-19	5.46133E-10	36	0.490944396	2.70E-26
-13	2.80E-18	2.73067E-09	37	0.490944396	5.40E-27
-12	6.99E-17	1.36533E-08	38	0.490944396	1.08E-27
-11	1.74763E-15	6.82667E-08	39	0.490944396	2.16E-28
-10	4.36907E-14	3.41333E-07	40	0.490944396	4.32E-29
-9	1.09227E-12	1.70666E-06	41	0.490944396	8.64E-30
-8	2.73065E-11	8.53327E-06	42	0.490944396	1.73E-30
-7	6.82641E-10	4.26651E-05	43	0.490944396	3.45E-31
-6	1.70635E-08	0.000213294	44	0.490944396	6.91E-32
-5	4.2627E-07	0.001065676	45	0.490944396	1.38E-32
-4	1.06173E-05	0.005308627	46	0.490944396	2.76E-33
-3	0.000260557	0.026055706	47	0.490944396	5.53E-34
-2	0.005942905	0.11885809	48	0.490944396	1.11E-34
-1	0.096113167	0.384452668	49	0.490944396	2.21E-35

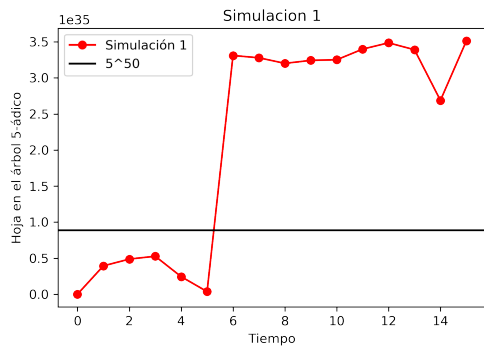
Tabla A.3: Probabilidades en Q_5 con $\alpha = 1$, $t = 1$.

Radio	Z probabilidad	Z por esferas	Radio	Z probabilidad	Z por esferas
-50	0	0	0	0.494303537	0.395442829
-49	0	0	1	0.494303537	0.079088566
-48	0	0	2	0.494303537	0.015817713
-47	0	0	3	0.494303537	0.003163543
-46	0	0	4	0.494303537	0.000632709
-45	0	0	5	0.494303537	0.000126542
-44	0	0	6	0.494303537	2.53083E-05
-43	0	0	7	0.494303537	5.06167E-06
-42	0	0	8	0.494303537	1.01233E-06
-41	0	0	9	0.494303537	2.02467E-07
-40	0	0	10	0.494303537	4.04933E-08
-39	0	0	11	0.494303537	8.09867E-09
-38	0	0	12	0.494303537	1.61973E-09
-37	0	0	13	0.494303537	3.23947E-10
-36	0	0	14	0.494303537	6.47894E-11
-35	0	0	15	0.494303537	1.29579E-11
-34	0	0	16	0.494303537	2.59157E-12
-33	0	0	17	0.494303537	5.18315E-13
-32	0	0	18	0.494303537	1.03663E-13
-31	0	0	19	0.494303537	2.07326E-14
-30	0	0	20	0.494303537	4.14652E-15
-29	0	0	21	0.494303537	8.29E-16
-28	0	0	22	0.494303537	1.66E-16
-27	0	0	23	0.494303537	3.32E-17
-26	0	0	24	0.494303537	6.63E-18
-25	0	0	25	0.494303537	1.33E-18
-24	0	0	26	0.494303537	2.65E-19
-23	0	0	27	0.494303537	5.31E-20
-22	0	0	28	0.494303537	1.06E-20
-21	0	0	29	0.494303537	2.12E-21
-20	0	0	30	0.494303537	4.25E-22
-19	0	0	31	0.494303537	8.49E-23
-18	0	0	32	0.494303537	1.70E-23
-17	0	0	33	0.494303537	3.40E-24
-16	0	0	34	0.494303537	6.79E-25
-15	0	0	35	0.494303537	1.36E-25
-14	0	0	36	0.494303537	2.72E-26
-13	0	0	37	0.494303537	5.43E-27
-12	0	0	38	0.494303537	1.09E-27
-11	0	0	39	0.494303537	2.17E-28
-10	0	0	40	0.494303537	4.35E-29
-9	0	0	41	0.494303537	8.70E-30
-8	3.01E-55	9.41E-50	42	0.494303537	1.74E-30
-7	1.48E-47	9.22E-43	43	0.494303537	3.48E-31
-6	7.21E-40	9.01E-36	44	0.494303537	6.96E-32
-5	3.52E-32	8.80E-29	45	0.494303537	1.39E-32
-4	1.72E-24	8.59E-22	46	0.494303537	2.78E-33
-3	8.39E-17	8.38861E-15	47	0.494303537	5.57E-34
-2	4.096E-09	8.192E-08	48	0.494303537	1.11E-34
-1	0.126424095	0.505696382	49	0.494303537	2.23E-35

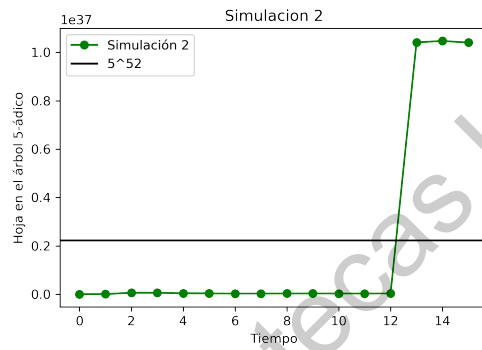
Tabla A.4: Probabilidades en Q_5 con $\alpha = 10$, $t = 1$.

Radio	Z probabilidad	Z por esferas	Radio	Z probabilidad	Z por esferas
-50	0	0	0	0.455701441	0.390601235
-49	0	0	1	0.455701441	0.055800176
-48	0	0	2	0.455701441	0.007971454
-47	0	0	3	0.455701441	0.001138779
-46	0	0	4	0.455701441	0.000162683
-45	0	0	5	0.455701441	2.32404E-05
-44	0	0	6	0.455701441	3.32006E-06
-43	0	0	7	0.455701441	4.74294E-07
-42	0	0	8	0.455701441	6.77562E-08
-41	0	0	9	0.455701441	9.67946E-09
-40	0	0	10	0.455701441	1.38278E-09
-39	0	0	11	0.455701441	1.9754E-10
-38	0	0	12	0.455701441	2.822E-11
-37	0	0	13	0.455701441	4.03143E-12
-36	0	0	14	0.455701441	5.75919E-13
-35	0	0	15	0.455701441	8.22741E-14
-34	0	0	16	0.455701441	1.17534E-14
-33	0	0	17	0.455701441	1.67906E-15
-32	0	0	18	0.455701441	2.40E-16
-31	8.47E-78	1.15E-51	19	0.455701441	3.43E-17
-30	4.22E-75	8.15E-50	20	0.455701441	4.90E-18
-29	1.44E-72	3.98E-48	21	0.455701441	6.99E-19
-28	4.95E-70	1.95E-46	22	0.455701441	9.99E-20
-27	1.70E-67	9.56E-45	23	0.455701441	1.43E-20
-26	5.82E-65	4.68E-43	24	0.455701441	2.04E-21
-25	2.00E-62	2.29E-41	25	0.455701441	2.91E-22
-24	6.85E-60	1.12E-39	26	0.455701441	4.16E-23
-23	2.35E-57	5.51E-38	27	0.455701441	5.94E-24
-22	8.05E-55	2.70E-36	28	0.455701441	8.49E-25
-21	2.76E-52	1.32E-34	29	0.455701441	1.21E-25
-20	9.48E-50	6.48E-33	30	0.455701441	1.73E-26
-19	3.25E-47	3.18E-31	31	0.455701441	2.48E-27
-18	1.11E-44	1.56E-29	32	0.455701441	3.54E-28
-17	3.82E-42	7.62E-28	33	0.455701441	5.05E-29
-16	1.31E-39	3.74E-26	34	0.455701441	7.22E-30
-15	4.50E-37	1.83E-24	35	0.455701441	1.03E-30
-14	1.54E-34	8.97E-23	36	0.455701441	1.47E-31
-13	5.29E-32	4.40E-21	37	0.455701441	2.10E-32
-12	1.82E-29	2.15E-19	38	0.455701441	3.01E-33
-11	6.23E-27	1.06E-17	39	0.455701441	4.29E-34
-10	2.14E-24	5.17E-16	40	0.455701441	6.13E-35
-9	7.33E-22	2.53395E-14	41	0.455701441	8.76E-36
-8	2.51E-19	1.24163E-12	42	0.455701441	1.25E-36
-7	8.62E-17	6.08401E-11	43	0.455701441	1.79E-37
-6	2.95627E-14	2.98116E-09	44	0.455701441	2.56E-38
-5	1.014E-11	1.46077E-07	45	0.455701441	3.65E-39
-4	3.47801E-09	7.15775E-06	46	0.455701441	5.21E-40
-3	1.19271E-06	0.000350657	47	0.455701441	7.45E-41
-2	0.000404967	0.017008596	48	0.455701441	1.06E-41
-1	0.087822	0.526931999	49	0.455701441	1.52E-42

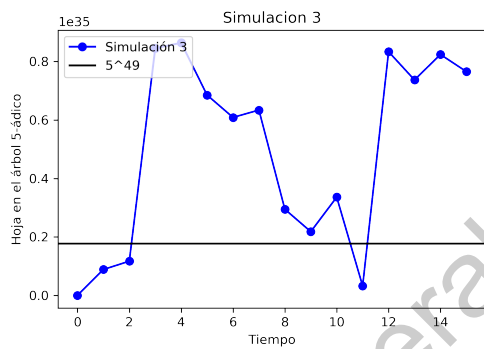
Tabla A.5: Probabilidades en Q_7 con $\alpha = 2$, $t = 1$.



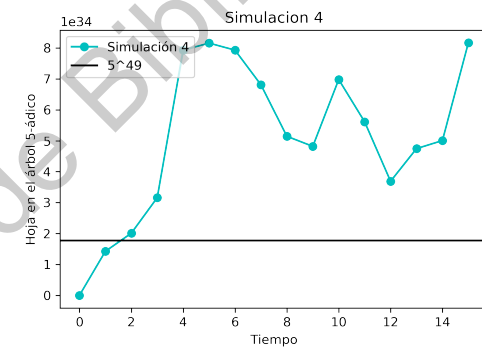
(a) Simulación 1



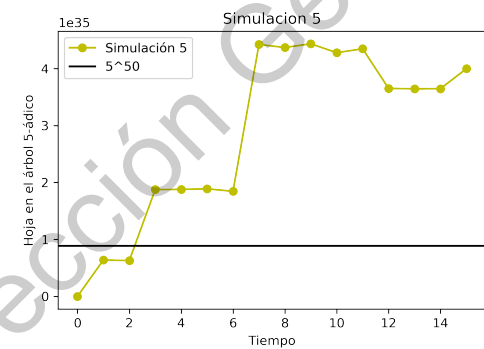
(b) Simulación 2



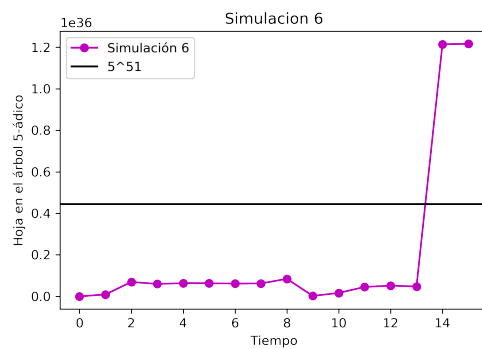
(c) Simulación 3



(d) Simulación 4

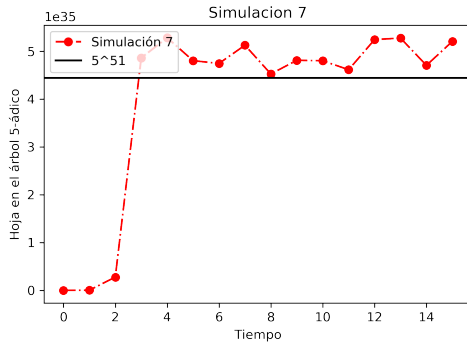


(e) Simulación 5

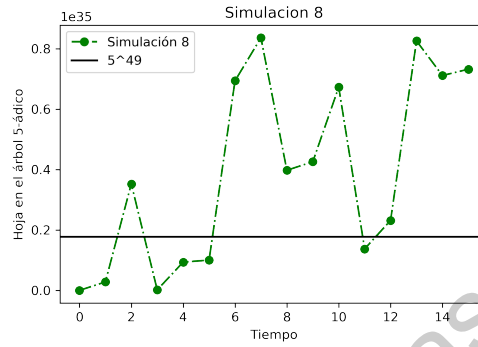


(f) Simulación 6

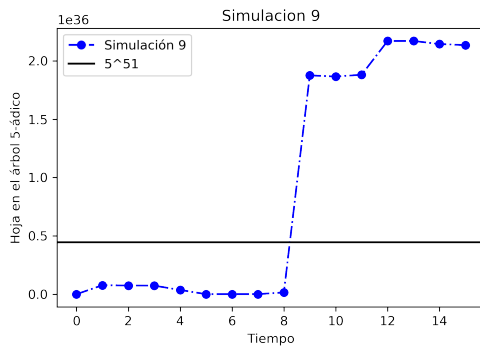
Figura A.2: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.3.



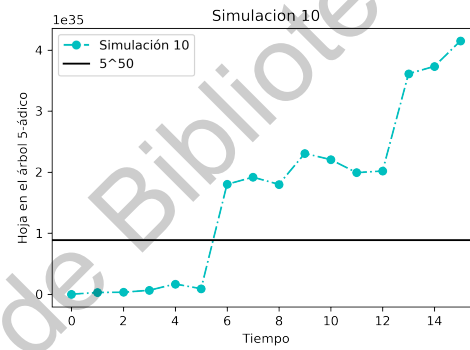
(g) Simulación 7



(h) Simulación 8

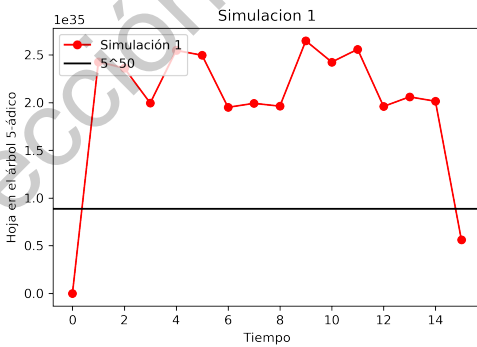


(i) Simulación 9

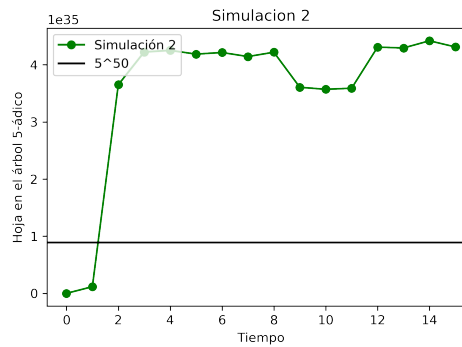


(j) Simulación 10

Figura A.2: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.3 (continuación).

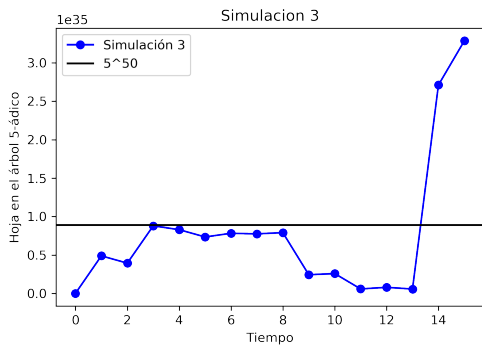


(a) Simulación 1

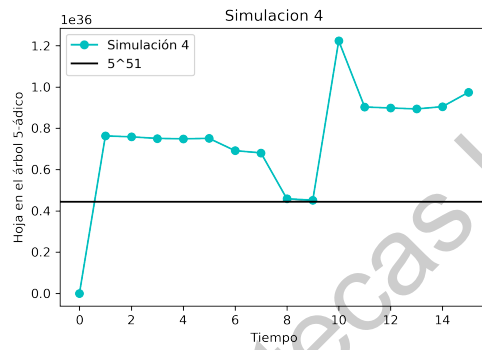


(b) Simulación 2

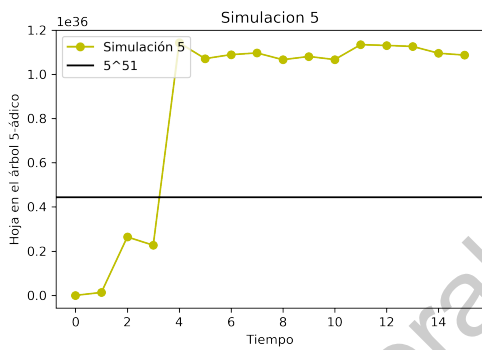
Figura A.3: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.4.



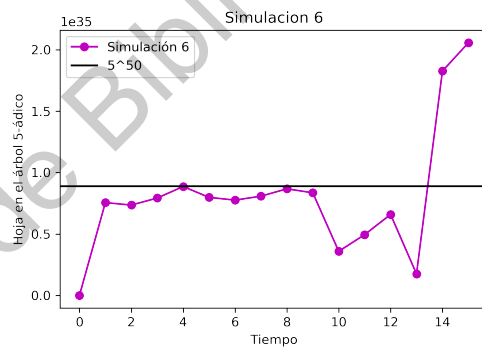
(c) Simulación 3



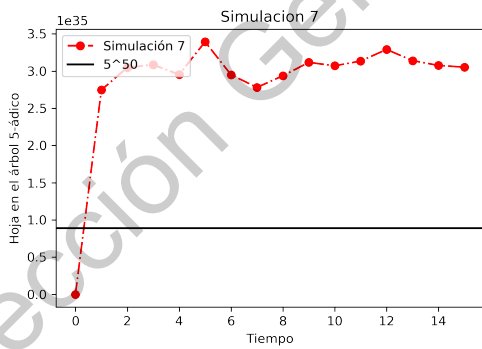
(d) Simulación 4



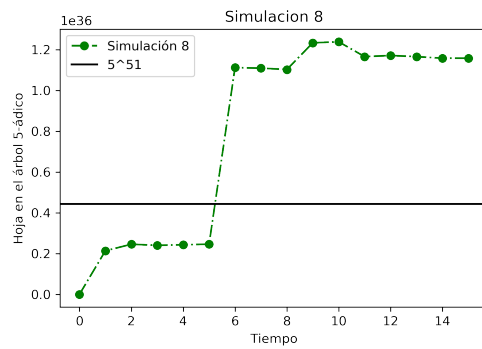
(e) Simulación 5



(f) Simulación 6

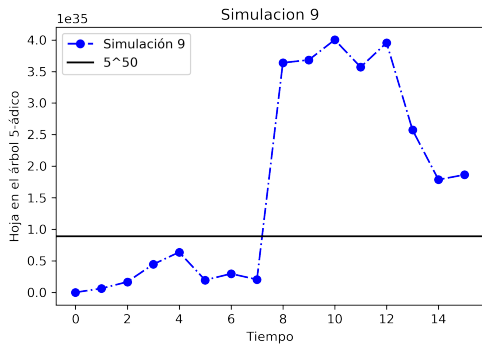


(g) Simulación 7

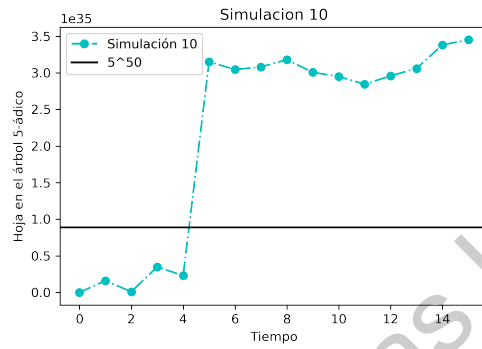


(h) Simulación 8

Figura A.3: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.4 (continuación).

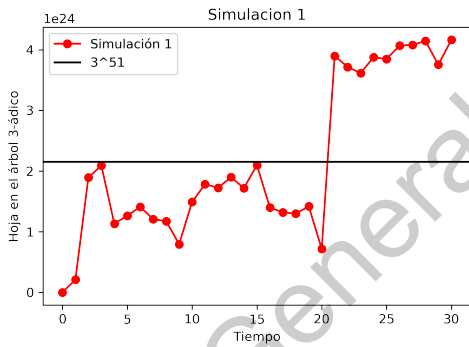


(i) Simulación 9

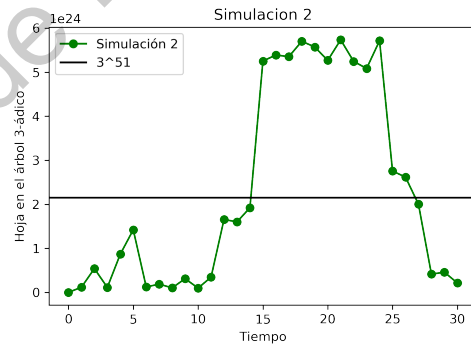


(j) Simulación 10

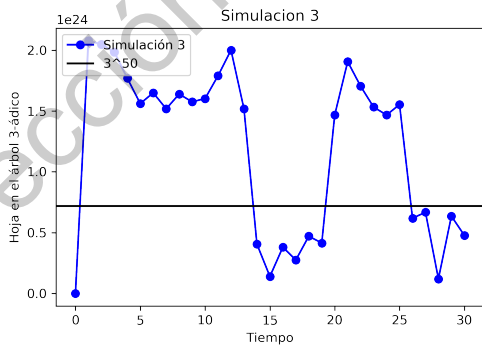
Figura A.3: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.4 (continuación).



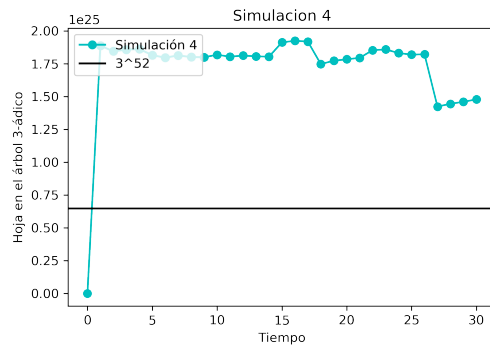
(a) Simulación 1



(b) Simulación 2

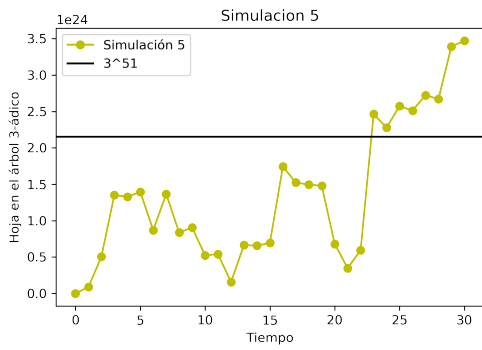


(c) Simulación 3

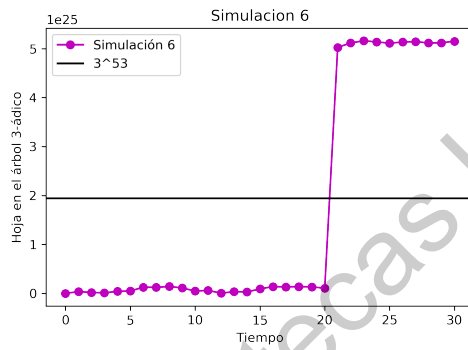


(d) Simulación 4

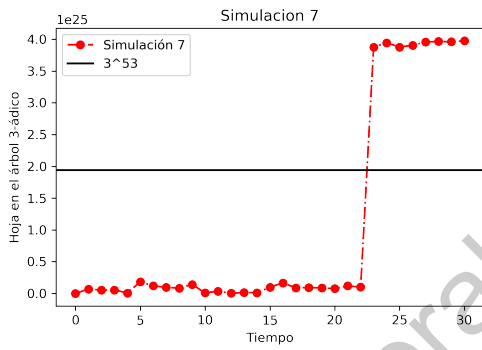
Figura A.4: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.5.



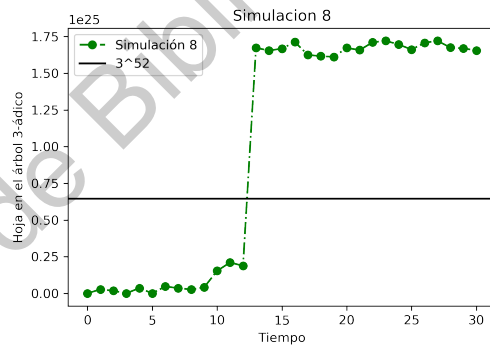
(e) Simulación 5



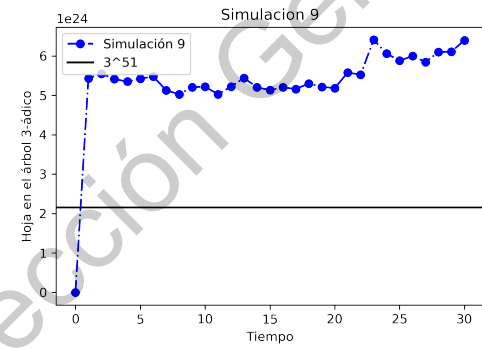
(f) Simulación 6



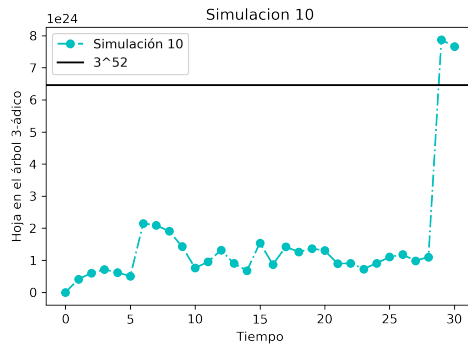
(g) Simulación 7



(h) Simulación 8

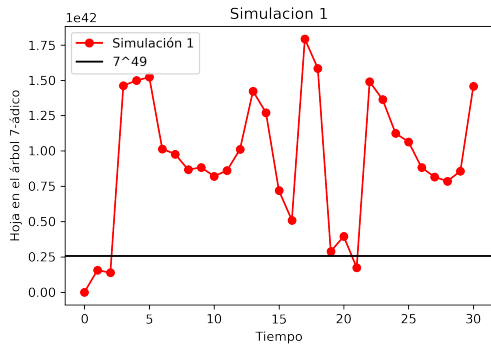


(i) Simulación 9

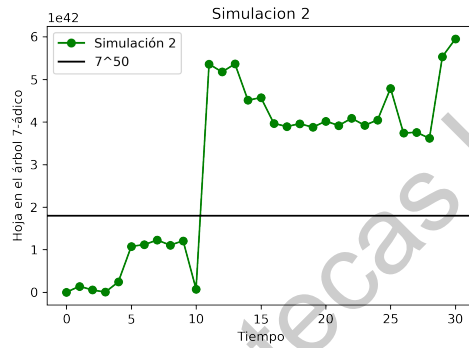


(j) Simulación 10

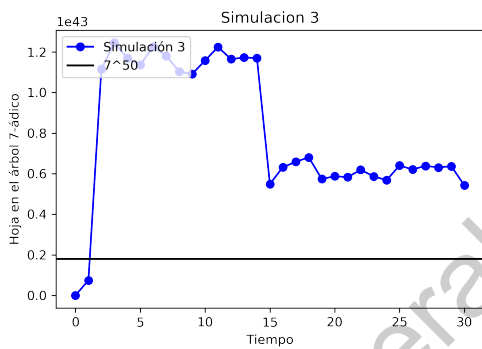
Figura A.4: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.5 (continuación).



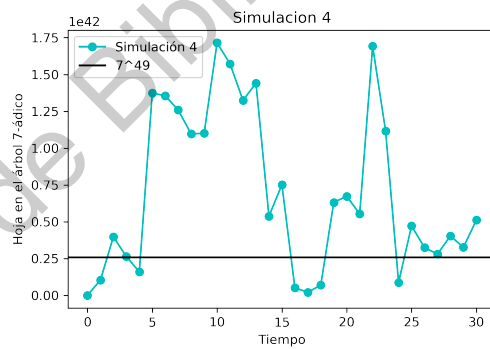
(a) Simulación 1



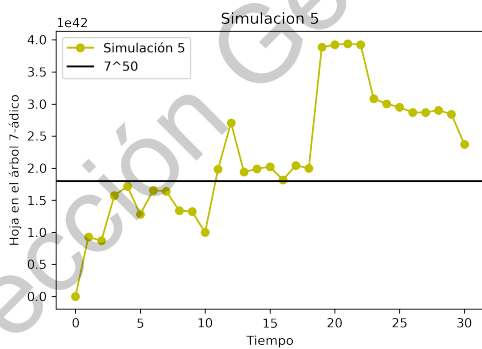
(b) Simulación 2



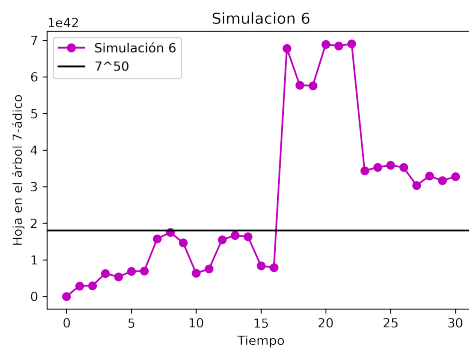
(c) Simulación 3



(d) Simulación 4

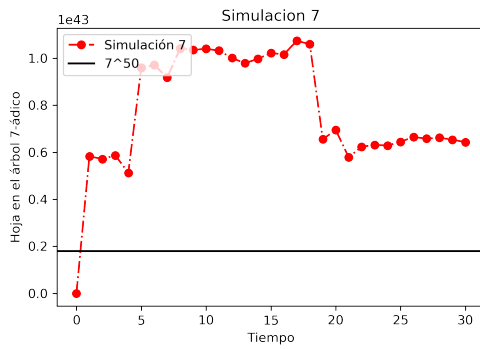


(e) Simulación 5

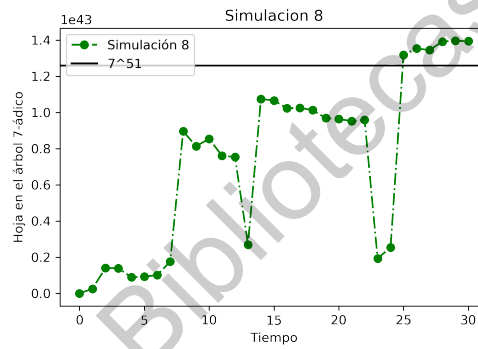


(f) Simulación 6

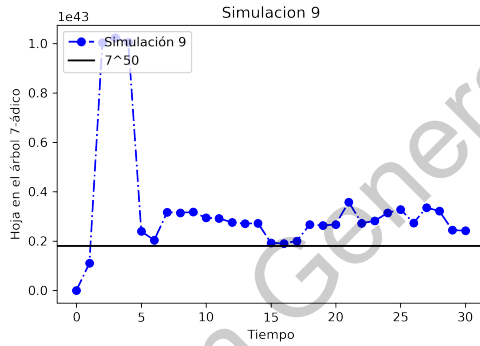
Figura A.5: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.6.



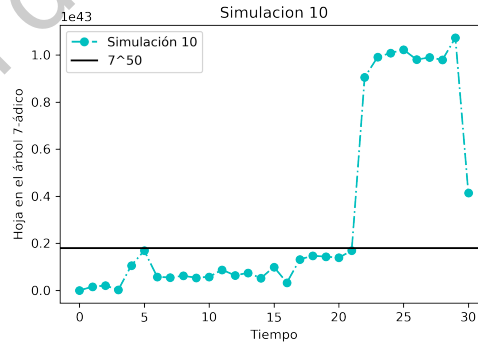
(g) Simulación 7



(h) Simulación 8



(i) Simulación 9



(j) Simulación 10

Figura A.5: Gráficas individuales de las simulaciones de la figura 4.6 (continuación).

Referencias bibliográficas

Aguilar-Arteaga, V. A., M. Cruz-López, y S. Estala-Arias. 2017. A heat equation on some adic completions of \mathbb{Q} and ultrametric analysis. *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 9:165–182. doi:10.1134/s2070046617030013.

Aguilar-Arteaga, V. A., y S. Estala-Arias. 2019. Pseudodifferential Operators and Markov Processes on Adèles. *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 11:89–113. doi:10.1134/s2070046619020018.

Albeverio, S., A. Y. Khrennikov, y V. M. Shelkovich. 2010. *Theory of p-adic Distributions Linear and Nonlinear Models*. 1^o ed. Cambridge University Press, Nueva York.

Ansari, A., J. Berendzen, S. F. Bownet, H. Frauenfeldert, I. E. T. Iben, T. B. Sauke, E. Shyamsunder, y R. D. Young. 1985. States and Proteinquakes. 82:5000–5004.

Antoniouk, A. V., K. Oleschko, A. N. Kochubei, y A. Y. Khrennikov. 2018. A stochastic p-adic model of the capillary flow in porous random medium. *Phys. A Stat. Mech. its Appl.* 505:763–777. doi:10.1016/j.physa.2018.03.049.

Avetisov, V. A., A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, y V. A. Osipov. 2002. P -Adic Models of Ultrametric Diffusion Constrained. *J. Phys. A. Math. Gen.* 35:177–189.

Avetisov, V. A., A. K. Bikulov, y V. A. Osipov. 2003. p-adic description of characteristic relaxation in complex systems. *J. Phys. A. Math. Gen.* 36:4239–4246.

Bakken, E. M., y T. Digernes. 2015. Finite approximations of physical models over local fields. *P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 7:245–258. doi:10.1134/S2070046615040019.

Becker, O. M., y M. Karplus. 1997. The topology of multidimensional potential energy surfaces: Theory and application to peptide structure and kinetics. *J. Chem. Phys.* 106:1495–1517. doi:10.1063/1.473299.

Bikulov, A. K., y A. P. Zubarev. 2018. Model of p-Adic Random Walk in a Potential. *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 10:130–150. doi:10.1134/s2070046618020061.

Casas-Sánchez, O. F., J. Galeano-Peñaloza, y J. J. Rodríguez-Vega. 2015. Parabolic-

type pseudodifferential equations with elliptic symbols in dimension 3 over p -adics. *P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 7:1–16. doi:10.1134/S207004661501001X.

Chacón-Cortés, L. F., y A. Vargas. 2017. Blow-up phenomena for p -adic semilinear heat equations. *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 9:183–196. doi:10.1134/s2070046617030025.

Chacón-Cortés, L. F., y W. A. Zúñiga-Galindo. 2013. Nonlocal operators, parabolic-type equations, and ultrametric random walks. *J. Math. Phys.* 54:1–19. doi:10.1063/1.4828857.

Chacón-Cortés, L. F., y W. A. Zúñiga-Galindo. 2014. Non-local Operators, Non-Archimedean Parabolic-type Equations with Variable Coefficients and Markov Processes. 1–27.

Cruz-López, M., y S. Estala-Arias. 2016. Invariant ultrametrics and Markov processes on the finite adèle ring of \mathbb{Q} . *P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 8:89–114. doi:10.1134/s2070046616020011.

Dragovich, B. 2003. p -Adic and Adelic Quantum Mechanics. 1–5.

Dragovich, B., A. Y. Khrennikov, S. V. Kozyrev, e I. V. Volovich. 2009. On p -adic mathematical physics. *P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 1:1–17. doi:10.1134/s2070046609010014.

Dragovich, B., A. Y. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, y E. I. Zelenov. 2017. p -Adic mathematical physics: the first 30 years. *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 9:87–121. doi:10.1134/s2070046617020017.

Gouvea, F. 1997. p -adic numbers An introduction. 2^o ed. Springer-Verlag, Berlín.

Ilic Stepic, A., Z. Ognjanovic, N. Ikodinovic, y A. Perovic. 2016. p -Adic probability logics. *P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 8:177–203. doi:10.1134/S2070046616030018.

Iurato, G., y A. Khrennikov. 2015. Hysteresis model of unconscious-conscious interconnection: Exploring dynamics on m -adic trees. *P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 7:312–321. doi:10.1134/S2070046615040068.

Iurato, G., A. Khrennikov, y F. Murtagh. 2016. Formal foundations for the origins of human consciousness. *P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 8:249–279. doi:10.1134/S2070046616040014.

Khrennikov, A. Y., and S. V. Kozyrev. 2007. Genetic code on the diadic plane. *Phys. A Stat. Mech. its Appl.* 381:265–272. doi:10.1016/j.physa.2007.03.018.

Khrennikov, A. Y., y S. V. Kozyrev. 2009. 2-Adic clustering of the PAM matrix. *J. Theor.*

Biol. 261:396–406. doi:10.1016/j.jtbi.2009.08.014.

Khrennikov, A. Y., S. V. Kozyrev, y W. A. Zúñiga-Galindo. 2018. Ultrametric Pseudo-differential Equations and Applications. 1º ed. Cambridge University Press, Cambridge.

Khrennikov, A., y E. Yurova. 2016. Secure cloud computations: Description of (fully) homomorphic ciphers within the P-adic model of encryption. 1–25.

Kochubei, A. N. 2009. On a p-adic wave equation. Proc. Steklov Inst. Math. 265:143–147. doi:10.1134/s0081543809020138.

Kozyrev, S. V. 2016. Model of protein fragments and statistical potentials. P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 8:325–337. doi:10.1134/S2070046616040051.

Megrelishvili, M., y M. Shlossberg. 2016. Non-archimedean transportation problems and Kantorovich ultra-norms. P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 8:125–148. doi:10.1134/S2070046616020035.

Rammal, R., G. Toulouse, y M. A. Virasoro. 1986. Ultrametricity for Physicists. Rev. Mod. Phys. 58.

Saberi, I. 2018. Holography y Local Fields. p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 10:151–165. doi:10.1134/s2070046618030019.

Volovich, I. V. 2010. Number theory as the ultimate physical theory. P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2:77–87. doi:10.1134/s2070046610010061.

Zúñiga-Galindo, W. A. 2016. Pseudodifferential equations over non-archimedean spaces. 1º ed. Springer International Publishing, Cham.

« Yo me pondré de pie dentro de mi piel
y en mi propia carne veré a Dios »

Dirección General de Bibliotecas UAQ