Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Material Didáctico para un curso preuniversitario de matemáticas y análisis estadístico de su calidad

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:
Laura Mariela Sotelo Puga

Dirigido por:
M en C Patricia Spíndola Yáñez

M.D.M Patricia Isabel Spíndola Yáñez
Director de Tesis
Firma

Dr. Víctor Larios Osorio
Sinodal
Firma

M.D.M Cecilia Hernández Garciadiego
Sinodal
Firma

M.D.M Carmen Sosa Garza
Sinodal
Firma

Dr. Manuel Toledano Ayala
Director de la Facultad de Ingeniería

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Febrero, 2019
México

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Material Didáctico para un curso preuniversitario de matemáticas y análisis estadístico de su calidad

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Laura Mariela Sotelo Puga

Dirigida por:

M.C Patricia Isabel Spíndola Yáñez

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Febrero 2019
México

AGRADECIMIENTOS

Agradezco el apoyo a mi directora de tesis,
la Maestra Patricia Spíndola por todo el apoyo y
paciencia brindada, a mis padres, hermanos,
amigos, compañeros de clase
y en especial a mi hija por estar a mi lado.
Nada de esto hubiera sido
posible sin ellos.

RESUMEN

Este trabajo de tesis surgió como proyecto del servicio social en el periodo julio-diciembre del 2016, la idea era incrementar el material de apoyo de la materia de matemáticas disponible para los alumnos que tomarían el curso propedéutico del periodo julio-diciembre del 2017, en principio ese era el objetivo, pero sin duda puede ser utilizado por alumnos que realizarían examen equivalente, o semestre cero o incluso los de primer semestre.
Posteriormente surgió la idea de sacarle más provecho a las herramientas con las que se contaba, la plataforma Moodle, y se pensó en un análisis de la calidad del material realizado.
El objetivo de este trabajo era diseñar y desarrollar la guía de matemáticas del curso Propedéutico de la Facultad de Ingeniería y evaluarla a través de un análisis estadístico después de haberla utilizado en el curso.
Para evaluar la guía se realizará un análisis de tipo descriptivo. La población evaluada serán los alumnos aspirantes a las diferentes carreras de la Facultad de Ingeniería de la UAQ. Los datos para las estadísticas se tomarán de la plataforma Moodle del curso propedéutico del año 2017. Los alumnos iniciaron el curso en el mes de febrero y concluyó en el mes de mayo. En total fueron 2076 aspirantes.
Para “medir” el nivel de dificultad de las preguntas hechas en el campus virtual se revisarán las estadísticas arrojadas y así poder realizar el análisis pertinente.
Se tomaron cuestionarios de años anteriores y se agregó nuevo material, según se fuera requiriendo, siempre basándonos en el material de apoyo escrito. Moodle nos permite obtener información sobre las preguntas utilizadas en cada una de las tareas y exámenes. El curso propedéutico se impartió en la facultad de ingeniería y como ya se había mencionado se realizó de manera semipresencial, es decir, un sábado los alumnos tomaron clases en los salones de la facultad y el otro sábado fue por medio del campus virtual.
Las estadísticas que se revisarán son: índice de dificultad, índice de discriminación y coeficiente de discriminación.

INDICE GENERAL

CAPÍTULO I
INTRODUCCIÓN

La Universidad Autónoma de Querétaro semestralmente publica la convocatoria para el proceso de selección y admisión para los interesados en cursar una de las distintas licenciaturas que la casa de estudios ofrece en sus diferentes campus. En esta convocatoria se presentan las facultades de cada uno de los campus junto con las carreras que oferta, los lugares disponibles, los prerrequisitos e información general de cómo realizar el procedimiento.
Nuestro caso de interés es la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, y más específicamente el curso propedéutico que se realiza anualmente. En la Facultad de Ingeniería en el año 2006 se incorporó el curso propedéutico con la Mtra. Carmen Sosa Garza y el Dr. Gilberto Herrera Ruiz como director de la Facultad de Ingeniería. A partir del año 2012 y hasta la fecha ha estado en la coordinación M.C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez, coordinadora también de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

Actualmente se ofertan las siguientes carreras en la Facultad de Ingeniería:

-Licenciatura en Arquitectura
-Licenciatura en Diseño Industrial
-Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
-Ingeniería Física
-Ingeniería Agroindustrial
-Ingeniería Biomédica
-Ingeniería Civil
-Ingeniería Electromecánica
-Ingeniería en Nanotecnología
-Ingeniería en Mecánica y Automotriz
-Ingeniería Industrial y Manufactura
-Ingeniería en Automatización

La convocatoria para los aspirantes a estas carreras se publica aproximadamente en el periodo diciembre-enero, para realizar el curso propedéutico en febrero y los alumnos que cumplan con la calificación requerida inicien clases en el mes de julio.
El curso propedéutico en años anteriores todas las sesiones habían sido de manera presencial, en este año debido a la falta de espacios la situación cambió y se implementó la forma semipresencial, es decir, un sábado se tomaron clases en los salones y otro sábado fue de manera virtual, todas las sesiones presenciales se llevaron a cabo en las instalaciones la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro.
En el curso propedéutico de la Facultad de Ingeniería todos los alumnos llevan las materias de matemáticas, física y habilidades del pensamiento. Adicionalmente, los alumnos aspirantes a matemáticas llevan lógica matemática; los alumnos de diseño y arquitectura llevan taller de diseño, los alumnos de ingeniería llevan química. El curso propedéutico tiene un peso del 30%; el 70% restante corresponde al examen EXHCOBA (Examen de Conocimientos y Habilidades Básicos).
Lo que se intenta en el curso propedéutico es estandarizar los conocimientos básicos en los aspirantes y estar lo mejor preparados para iniciar la carrera de elección.

Dado que el curso propedéutico se realiza cada año, es una gran área de oportunidad hacer mejoras en tareas, exámenes, ejercicios, etc. o implementar nuevo material de apoyo.
El año 2017 fue el primer año en el que se introdujo una guía para la materia de matemáticas, y veremos más adelante el apoyo que les dio a los alumnos y profesores en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
La guía facilitó y ayudó a complementar los temas tratados en el curso con definiciones, ejemplos y ejercicios.
Otro propósito también fue provechar al máximo las herramientas con las que se cuentan para la evaluación de los alumnos, exámenes, tareas y la plataforma Moodle. Esta última permite crear cuestionarios con diferentes tipos de preguntas, de acuerdo con las necesidades del entorno (se verá una explicación más completa en el Capítulo III). Los cuestionarios Moodle son una herramienta de control y diagnóstico del aprendizaje, el cual es una alternativa para cursos presenciales, virtuales o semipresenciales, como fue nuestro caso de estudio. Esta herramienta devuelve información rápida y automática, además de que ofrece métodos estadísticos para medir la fiabilidad de las preguntas.
La sección de la plataforma Moodle donde se diseñan los cuestionarios representa una alternativa frente a las metodologías tradicionales, como las tareas, ejercicios o exámenes escritos. Así que era conveniente analizar y revisar la fiabilidad de tareas y exámenes de la plataforma, de esta manera adecuarlos para evaluar las actividades de aprendizaje.
Otra ventaja de la plataforma Moodle es que permite ahorrar tiempo porque inmediatamente califica la pregunta. Además de que se desperdicia menos papel.
Es por eso que es muy útil contar con una guía para que el alumno encuentre los temas tratados en el curso en un solo lugar, además de que no solamente es de gran utilidad para los alumnos del curso propedéutico, sino también para los alumnos que optaron por el examen equivalente como camino en el proceso de admisión.

-DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA-

El proceso de admisión en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro es semestral. Este proceso se lleva a cabo de la siguiente manera y hay varias opciones:
-Realizar el curso propedéutico y el examen EXHCOBA. El curso es anual con una duración de 12 sábados, en el que se toman 4 materias. Para obtener la calificación final únicamente sumamos las calificaciones obtenidas en el curso y el EXHCOBA, que corresponden al 30% y 70%, respectivamente.
-Realizar el examen equivalente y el examen EXHCOBA. En esta opción las calificaciones tienen el mismo peso que la opción anterior, 30% el examen equivalente y 70% el examen EXHCOBA. La calificación final es la suma de las calificaciones obtenidas en cada examen.
Si la calificación final es mayor a 7, el alumno es aceptado e ingresa a la carrera de elección.
Si la calificación final se encuentra entre 6 y 7, el alumno cuenta con la opción de ingresar el semestre cero y también se realiza el examen EXHCOBA para completar el proceso. El semestre cero es en el periodo julio-diciembre en el cual los alumnos cursan 7 materias, en las cuales deben de mantener un promedio mayor o igual a 7 para seguir teniendo derecho al curso. Ahora la calificación de este curso equivale al 70% de la calificación final y la calificación del examen EXHCOBA ahora equivale al 30% de la calificación final. La calificación final, como ya se había mencionado, es sumando ambas calificaciones. Para ingresar se debe contar con una calificación mayor a 7. De esta manera los alumnos admitidos ingresan a primer semestre en enero.
Si la calificación final es menor a 6 y el alumno está interesado, puede acudir a una entrevista condicionada.

El curso propedéutico utiliza tareas y exámenes como herramienta para evaluar el aprendizaje del alumno y prepararlo para cursos futuros. El proceso de enseñanza aprendizaje y evaluación llevan una planeación, revisión, aplicación, corrección, etc. Cada vez que se aplica una tarea, cuestionario o examen a los alumnos, las respuestas de proporcionadas algunas veces pueden ser analizadas, esto para ayudarnos a poner, quitar o redactar de otra manera algunas preguntas, y finalmente nos ayuda a poder identificar a los alumnos que cumplan con el perfil de la carrera de elección.
Revisando la literatura, encontramos usos sobre los indicadores psicométricos aplicados a instrumentos de evaluación objetiva. Las propiedades más importantes de los atributos psicométricos propuestos son: (Carlos et al 2009, p.25):

- La dificultad de las preguntas no debe ser tan elevado que casi todos los estudiantes no puedan responderlo correctamente, o tan fácil que la mayoría acierte su respuesta, es decir, la dificultad debe ser media.
- Los reactivos deben tener la capacidad de discriminar entre los estudiantes de mayor puntuación obtenida en el examen contra los de menor puntuación.
- Los distractores empleados en las opciones de las respuestas deben ser adecuados a sus finalidades, como distractores se refiere a las opciones en las preguntas de opción múltiple.

Dada la importancia del curso propedéutico, y para nuestro caso la materia de matemáticas, el objetivo de este trabajo es diseñar y desarrollar la guía de matemáticas del curso Propedéutico de la Facultad de Ingeniería y evaluarla a través de un análisis estadístico después de haberla utilizado en el curso. Para evaluar la guía se realizará un análisis de tipo descriptivo.
La elaboración de este material didáctico es para que el alumno tenga a su alcancé y en un solo sitio los temas tratados en la materia de matemáticas y los pueda repasar en cualquier momento.

CAPITULO II
MATERIAL DIDÁCTICO

GUÍA

DE

MATEMÁTICAS

PARA

PROPEDÉUTICO

AGRADECIMIENTOS ESPECIALES

Este material de apoyo para el curso preuniversitario
tuvo la colaboración de los siguientes matemáticos
Berenice, Wilfrido, Marco Rojas,
M.C Carmen Sosa Garza y Luisa Granados
quienes colaboraron con la revisión y
material adicional.

NÚMEROS REALES

1.1 Números reales

Los números reales son aquellos que hemos usado toda la vida, para cuantificar la edad, la estatura, dinero, entre muchas otras cosas. Dentro del conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, se pueden distinguir diferentes tipos de números, los cuales fueron surgiendo para resolver necesidades que se iban presentando.

Los **números naturales**, denotados por N**,** surgen por la necesidad de contar, históricamente fueron los primeros en surgir, por lo que este conjunto está conformado por $\{1,2,3,\ldots\}$.

Los **números enteros**, denotados por $\mathbb{Z}$, surgen ante la necesidad de representar pérdidas, es decir son los naturales agregando sus inversos aditivos y el cero $\mathrm{Z}=\{K\ ,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$; $\mathrm{N}\subset \mathrm{Z}$ (los naturales están contenidos en los enteros).

Los **números racionales,** denotados por Q, surgen ante la necesidad de "tomar pedazos" de una unidad; por ejemplo, medio litro de jugo o un tercio de pan, etc. Matemáticamente decimos que son todos aquellos números que pueden escribirse como el cociente de dos números enteros, donde el denominador no es cero.

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\middle|\, p,q \text{ son enteros} \quad y\ q\neq 0\right\}.$$

Ejemplos:

$$\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}; \qquad 3.33=\frac{333}{100}; \qquad 0.2113113113\ldots=\frac{2111}{9990}; \qquad 5=\frac{5}{1}$$

Notas:

a) La expresión decimal de un número racional es finita o periódica.

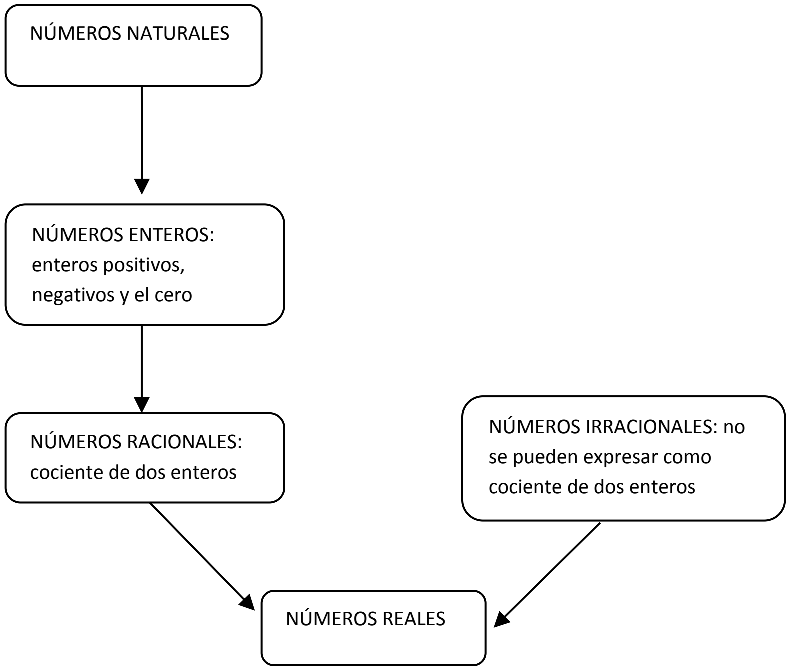
b) Todo número entero se puede escribir como el cociente de él mismo entre uno, $n=\frac{n}{1}$, así todo número entero es un racional, $Z\subset Q$.

El conjunto de **números irracionales,** denotados por $\mathbb{Q}$' o $\mathbb{I}$, está compuesto por los números que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros. Estos no cuentan con una expresión decimal periódica.

Ejemplos:

π ; $\sqrt{2}$; 5.2310100100010000... ; e; $\sqrt{5}$; $\frac{3}{\pi^2}$

Los racionales e irracionales, son conjuntos ajenos, es decir, que un elemento a en los racionales no puede ser al mismo tiempo un irracional y viceversa.
La relación de estos conjuntos y los números reales se muestra en el siguiente diagrama.



1.1.1 Operaciones en los números reales

Las operaciones principales en los números reales son la suma y la multiplicación.

SUMA: A cada par de números reales a y b se le asigna el número real $a+b$. Esta operación cumple con cuatro propiedades:

$\boldsymbol{P1}$ $\boldsymbol{Propiedad\ asociativa\ para\ la\ suma}.$ $Si\ a, b\ y\ c\ números\ reales\ cualesquiera, entonces$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$\boldsymbol{P2}.$ $\boldsymbol{Existencia\ de\ un\ neutro\ para\ la\ suma}.$ $Existe\ un\ número\ real, 0, que\ tiene\ la\ propiedad$

$$a+0=0+a=a, para\ cualquier\ número\ real\ a.$$

$\boldsymbol{P3}.$ $\boldsymbol{Existencia\ de\ inversos\ para\ la\ suma}.$ $Para\ todo\ número\ real\ a\ existe\ un\ número$

$$-a\ tal\ que\ a+(-a)=(-a)+a=0$$

$\boldsymbol{P4}.$ $\boldsymbol{Propiedad\ conmutativa\ para\ la\ suma}.$ $Si\ a\ y\ b\ son\ dos\ números\ reales\ cualesquiera, entonces$
$a+b=b+a$

NOTA:

La resta entre dos números reales a, b se define como
$a-b=a+(-b)$

Ejemplos para propiedad asociativa.

1) $3+(5+2)=(3+5)+2=10$
2) $a+(4b+3c)=(a+4b)+3c$ con a,b,c números reales.

Ejemplos para existencia de neutro en la suma.

1) $3+0=0+3=3$
2) $10a+50b+0=10a+50b$

Ejemplo para existencia de inverso aditivo.

1) -5 *es el inverso aditivo de* 5 *porque* $5+(-5)=(-5)+5=0$

2) *El inverso aditivo de* $4ab$ *es* $-4ab$ *porque* $4ab+(-4ab)=(-4ab)+4ab=0$

con a,b cualesquiera números reales.

Ejemplos para la ley conmutativa.

1) $5+10=15=10+5$

2) $23ab+5c=5c+23ab$ con a,b cualesquiera números reales.

EJEMPLOS:

1) Sonia tenía \$999. Tuvo que pagar una cuenta de \$79, una de \$43 y una de \$6 y Juan le pagó \$102 que le debía. ¿Cuánto dinero tiene Sonia?

Solución: $999-79-43-6+102=973$

Ahora Sonia tiene \$973

2) Una señora tenía 8 tazas de leche en un recipiente, utilizó $2\frac{2}{3}$ tazas para hacer un pastel y $3\frac{1}{4}$ tazas para hacer un flan. ¿Cuántas tazas de leche utilizó? ¿Cuántas tazas de leche quedan?

Solución:

Para saber cuántas tazas de leche se utilizaron hay que sumar las tazas de leche que se utilizaron para el pastel y para el flan, recordemos que $2\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}$ y que $3\frac{1}{4}=3+\frac{1}{4}$

$$2\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}=5+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=5\frac{8+3}{12}=5\frac{11}{12}$$

Las tazas utilizadas fueron $5\frac{11}{12}$.

Ahora para saber cuántas quedan, al total de tazas le restamos el resultado anterior

$$8-5\frac{11}{12}=3-\frac{11}{12}=\frac{36-11}{12}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$$

Así que las tazas sobrantes son $2\frac{1}{12}$

MULTIPLICACIÓN: Para cada par de números reales $a\ y\ b$, se le asigna el número real ab. La multiplicación cumple con 4 propiedades muy parecidas a las de la suma.

$\boldsymbol{P5}$. $\boldsymbol{Propiedad\ asociativa\ para\ la\ multiplicación}$. $Si\ a, b\ y\ c\ números\ reales\ cualesquiera, entonces$

$$a(bc)=(ab)c$$

$\boldsymbol{P6}$. $\boldsymbol{Existencia\ de\ una\ identidad\ para\ la\ multiplicación}$. $Existe\ un\ número\ real, 1, que$

$$tiene\ la\ propiedad$$

$$a1=1a=a, para\ cualquier\ número\ real\ a.$$

$\boldsymbol{P7}$. $\boldsymbol{Existencia\ de\ inversos\ para\ la\ multiplicación}$. $Para\ todo\ número\ real$

$$a\neq 0\ existe\ un\ número\ a^{-1}\ tal\ que\ aa^{-1}=a^{-1}a=1$$

Veamos qué pasa con la división entre cero:

Tomemos como $b=0$, lo que dice la nota de abajo se traduciría en $\frac{a}{0}=a\div 0=a*0^{-1}$

Lo que nos lleva a la P7, la existencia del inverso multiplicativo, pero el inverso multiplicativo del cero no existe, y es que suponiendo que existiera sería $\frac{1}{0}$, esto nos llevaría a que 0*(1/0)=1(por propiedad anterior) pero sabemos que cualquier número multiplicado por 0 es 0, y estaríamos diciendo que 1=0, así que concluimos que la división entre cero no está definida.

$\boldsymbol{P8}$. $\boldsymbol{Propiedad\ conmutativa\ para\ la\ multiplicación}$. $Si\ a\ y\ b\ son\ dos\ números\ reales\ cualesquiera,$

$$entonces\ ab = ba$$

$\boldsymbol{P9}$. $\boldsymbol{Propiedad\ distributiva}$. $Si\ a, b\ y\ c\ son\ números\ reales\ cualesquiera, entonces$

$$a(b + c) = ab + ac$$

Ejemplos para la propiedad asociativa.

1) $3(5(6)) = (3(5))(6) = 90$
2) $5ab(cd) = 5abcd$ con a, b, c, d números reales.

Ejemplos para la existencia de identidad en la multiplicación.

1) $(1)(3) = (3)(1) = 3$
2) $(1)(5a) = (5a)(1) = 5a$ con a número real.

NOTA:

La división entre dos números reales a, b se define como

$$\frac{a}{b} = a \div b = ab^{-1}$$

Ejemplos para existencia de inverso multiplicativo.

1) $El\ \ inverso\ \ multiplicativo\ \ de\ 5\ es\ (5)^{-1} = \frac{1}{5}\ \ porque\ \ (5)\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)(5) = 1$
2) $3a\ es\ \ el\ \ inverso\ \ multiplicativo\ \ de\ \ (3a)^{-1} = \frac{1}{3a}\ \ porque\ (3a)\left(\frac{1}{3a}\right) = \left(\frac{1}{3a}\right)(3a) = 1$

con cualquier número real a.

Ejemplos para la propiedad conmutativa.

1) $(5)(6) = (6)(5) = 30$
2) $4x5y = 4(5x)y = [(4)(5)](xy) = 20xy$ con x, y cualesquiera números reales.

Ejemplos para la propiedad distributiva.

1) $(2)(5+4) = (2)(5) + (2)(4) = 18$
2) $7a(5b + 2c) = 7a5b + 7a2c = 35ab + 14ac$ con a, b cualesquiera números reales.

EJEMPLO:

Hagamos la multiplicación de 13*4 utilizando las propiedades mencionadas arriba

$$\begin{aligned} 13 * 4 &= (10+3) * 4 \\ &= 10 * 4 + 3 * 4\ distributiva \\ &= 4 * 10 + 12 \end{aligned}$$

$$= 4 * 10 + (10 + 2)$$
$$= 4 * 10 + 1 * 10 + 2$$
$$= (4 + 1) * 10 + 2$$
$$= 5 * 10 + 2 = 50 + 2 = 52$$

Es necesario recordar que las propiedades de suma y multiplicación que se enunciaron para los números reales se cumplen también para los números racionales, ya que los racionales son un subconjunto de los números reales, por lo que a modo de repaso se muestran ejemplos de estas operaciones con fracciones.
En los números racionales puede haber varias representaciones para el mismo número. Por ejemplo $\frac{1}{2}$ también está representado por $\frac{2}{4}$, ¿cómo saber que dos representaciones describen al mismo número? Decimos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cuando $ad = bc$. Generalmente se trabaja con las expresiones más simples, sin embargo, se puede trabajar con cualquiera. Los resultados finales en cualquier operación deberán estar expresados en la forma más simple, es decir $\frac{a}{b}$ con a, b números enteros sin divisores en común.

Ejemplos:

1) $\frac{12}{4} = \frac{3}{1} = 3$

2) $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

- **Suma en los racionales:**

  Para sumar dos fracciones que tienen el **mismo denominador**, simplemente se suman los numeradores y se pone el mismo denominador.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Ejemplos:

1) $Calcular\ \frac{4}{5} + \frac{10}{5}$

$Solución: \quad \frac{4}{5} + \frac{10}{5} = \frac{4 + 10}{5} = \frac{14}{5}$

2) $Calcular\ \frac{5x}{2c} + \frac{3y}{2c}$ con c, x, y números reales

$Solución: \quad \frac{5x}{2c} + \frac{3y}{2c} = \frac{5x + 3y}{2c}$

3) $Calcular\ \frac{2}{3} - \frac{4}{3}$

$$Solución: \ \frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$$

4) $Calcular \ \frac{6x}{6}-\frac{8x}{6}$ con x números reales

$$Solución: \ \frac{6x}{6}-\frac{8x}{6}=\frac{6x-8x}{6}=-\frac{2x}{6}=-\frac{x}{3}$$

Para sumar dos fracciones con **denominadores distintos** lo que se debe hacer es ponerlos con el mismo denominador, y se puede realizar de la manera siguiente:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

La justificación de este algoritmo se desarrolla a continuación

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}(1)+\frac{c}{d}(1)=\frac{a}{b}\left(\frac{d}{d}\right)+\frac{c}{d}\left(\frac{b}{b}\right)=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Ejemplo:

1) $Calcular \ \frac{4}{5}+\frac{6}{10}$

$$Solución: \ \frac{4}{5}+\frac{6}{10}=\frac{(4)(10)+(6)(5)}{(5)(10)}=\frac{40+30}{50}=\frac{70}{50}=\frac{7}{5}$$

2) $Calcular \ \frac{5x}{2c}+\frac{3a}{d}$ con a,c,d,x números reales

$$Solución: \ \frac{5x}{2c}+\frac{3a}{d}=\frac{5xd+3a2c}{2cd}=\frac{5xd+6ac}{2cd}$$

3) $Calcular \ \frac{2}{9}-\frac{1}{5}$

$$Solución: \ \frac{2}{9}-\frac{1}{5}=\frac{(2)(5)-(1)(9)}{(9)(5)}=\frac{10-9}{45}=\frac{1}{45}$$

4) $Calcular \ \frac{5a}{2b}-\frac{6c}{d}$ con a,b,c,d números reales

$$Solución: \ \frac{5a}{2b}-\frac{6c}{d}=\frac{5ad-6c2b}{2bd}=\frac{5ad-12cb}{2bd}$$

- **Multiplicación y división en los racionales:**

Para multiplicar dos fracciones, se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador, los resultados se colocan como numerador y denominador respectivamente.

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplo:

1) $Calcular \quad \frac{2}{9}\frac{1}{5}$

$$Solución: \quad \frac{2}{9}\frac{1}{5}=\frac{(2)(1)}{(9)(5)}=\frac{2}{45}$$

2) $Calcular \quad \frac{3c}{2x}\frac{y}{4d}$ con c,d,x,y números reales.

$$Solución: \quad \frac{3c}{2x}\frac{y}{4d}=\frac{3cy}{2x4d}=\frac{3cy}{8xd}$$

3) $Calcular \quad \frac{4}{3x}\frac{-y}{5a}$ con a,x,y números reales

$$Solución: \quad \frac{4}{3x}\frac{-y}{5a}=\frac{(4)(-y)}{3x5a}=\frac{-4y}{15xa}.$$

Definimos el **cociente** $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ con $\frac{c}{d}\neq 0$ como $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

También se puede escribir como $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

Por ejemplo:

1) $Calcular \quad \frac{3}{4}\div\frac{5}{7}$

$$Solución: \quad \frac{3}{4}\div\frac{5}{7}=\frac{3}{4}\frac{7}{5}=\frac{(3)(7)}{(4)(5)}=\frac{21}{20}$$

2) $Calcular \quad \frac{2a}{c}\div\frac{5b}{3d}$ con a,b,c,d números reales

$$Solución: \quad \frac{2a}{c}\div\frac{5b}{3d}=\frac{2a}{c}\frac{3d}{5b}=\frac{2a3d}{c5b}=\frac{6ad}{5cb}$$

3) *Calcular* $\dfrac{5x}{7} \div \dfrac{6y}{4}$ con x, y números reales.

Solución : $\dfrac{5x}{7} \div \dfrac{6y}{4} = \dfrac{5x}{7}\dfrac{4}{6y} = \dfrac{5x(4)}{(7)6y} = \dfrac{20x}{42y} = \dfrac{10x}{21y}$

1.1.2 Orden en los números reales

Para fines prácticos vamos a considerar al conjunto de los números reales como la unión de tres subconjuntos $R = R^+ \cup R^- \cup \{0\}$, donde $R^+ es\ el\ conjunto\ de\ números\ reales\ positivos$; $R^- es\ el\ conjunto\ de\ números\ reales\ negativos$ y $\{0\}$ el conjunto que tiene a 0 como único elemento. Cabe mencionar que la intersección de cualquier par de ellos es el vacío, es decir $R^+ \cap R^- = \emptyset$, $R^+ \cap \{0\} = \emptyset$ y $R^- \cap \{0\} = \emptyset$

En particular R^+ tiene las siguientes propiedades:

$\boldsymbol{P10}$. ($\boldsymbol{La\ suma\ es\ cerrada}$) $Si\ a\ y\ b\ pertenecen\ a\ R^+, entonces\ a + b\ pertenece\ a\ R^+$

$\boldsymbol{P11}$. ($\boldsymbol{La\ multiplicación\ es\ cerrada}$) $Si\ a\ y\ b\ pertenecen\ a\ R^+, entonces\ ab\ pertenece\ a\ R^+$

NOTA: "a pertenece a B" significa que a es un elemento de B y se denota como $a \in B$

Relación de orden en los números reales

Dados dos números reales $a\ y\ b$ definimos la relación $a < b$ (a menor que b) si $b - a \in R^+$. Notemos que $a < b$ (a menor que b) es lo mismo que $b > a$ (b mayor que a).

Dada la partición que hicimos con el conjunto de los números reales, si elegimos un número real a tendremos que a puede ser positivo, negativo o cero, esto queda enunciado como sigue:

$\boldsymbol{P12}$. $\boldsymbol{Ley\ de\ tricotomía}$. $Para\ todo\ número\ a\ se\ cumple\ una\ y\ sólo\ una\ de\ los\ siguientes\ enunciados$:

$i)\ a = 0$

$ii)\ a\ pertenece\ a\ R^+$

$iii)\ a\ pertenece\ a\ R^-$

Observaciones:

- Que $a \in R^+$ quiere decir que $a = a - 0 \in R^+$ por lo que $0 < a$.
- Análogamente que $a \in R^-$ quiere decir que $a = a - 0 \in R^-$ por lo que $a < 0$, es decir que $0 - a = -a \in R^+$

Se observa que la **ley de tricotomía** es equivalente a decir que si $a\ y\ b$ son dos números reales cualesquiera, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$i)\quad a = b$

$ii)\quad a > b$

$iii)\quad a < b$

Observación:
Tenemos también la relación $a \leq b$ (menor o igual) lo cual indica que $a < b$ o bien $a = b$; y $b \geq a$ (mayor o igual) indica $b > a$ ó $b = a$.

Las desigualdades cumplen las siguientes **propiedades**:

1. **Si** $a < b$ **y** $b < c$ **entonces** $a < c$

Demostración:
Supongamos que $a < b$ *y* $b < c$
Por definición $a < b$ *significa* $b - a \in R^+$ *y que* $b < c$ *significa* $c - b \in R^+$
entonces
$b - a + c - b \in R^+$ *ya que la suma es cerrada en* R^+
$b - b + c - a \in R^+$ *utilizando propiedad asociativa y conmutativa*
$c - a \in R^+$ *ya que* $b - b = b + (-b) = 0$
Esto es $a < c$ *y queda demostrada la propiedad.*

2. **Si** $a < b$ **entonces** $a + c < b + c$

Demostración:
Supongamos que $a < b$
Por definición $a < b$ *significa* $b - a \in R^+$*, como*
$b - a = b - a + 0 \in R^+$*ya que la suma es cerrada en* R^+
$b - a + c + (-c) \in R^+$*ya que* $0 = c + (-c)$
$b + c - (a + c) \in R^+$ *utilizando propiedad asociativa y conmutativa*
Esto es $a + c < b + c$ *y queda demostrada la propiedad.*

3. **Si** $a < b$ **y** $c > 0$ **entonces** $ac < bc$

Demostración:
Supongamos que $a < b$ *y* $c > 0$
Por definición $a < b$ *significa* $b - a \in R^+$ *y* $c > 0$ *significa* $c - 0 = c \in R^+$
Tenemos que
$(b - a)c \in R^+$*ya que la multiplicación es cerrada en* R^+
$bc - ac \in R^+$ *utilizando propiedad distributiva*
Esto es $ac < bc$ *y queda demostrada la propiedad.*

4. **Si** $a < b$ **y** $c < 0$ **entonces** $ac > bc$

Demostración:
Supongamos que $a < b$
Por definición $a < b$ *significa* $b - a \in R^+$ *y* $c < 0$ *significa que* $-c \in R^+$

Entonces

$(b-a)(-c) \in R^+$ *ya que la multiplicación es cerrada* R^+
$b(-c) - a(-c) \in R^+$ *utilizando la propiedad distributiva*
Es decir $ac - bc \in R^+$
Esto es $ac > bc$ *y queda demostrada la propiedad.*

De estas primeras cuatro propiedades podemos deducir las siguientes:

5. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $ab > 0$

6. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $ab > 0$

7. Si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $ab < 0$

8. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $ab < 0$

9. Si $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$

10. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $\frac{a}{b} > 0$

> NOTA:
>
> Las propiedades 5,6,7 y 8 son equivalentes a la
> **Ley de los signos:**
>
> $$ab = ab$$
> $$(-a)(-b) = ab$$
> $$(-a)b = -(ab)$$
> $$a(-b) = -(ab)$$

Demostración:

Supongamos que $a > 0$ *y* $b > 0$, *y por propiedad* 9 *tenemos que* $\frac{1}{b} > 0$, *luego utilizando propiedad 5,* $a\frac{1}{b} = \frac{a}{b} > 0$, *y queda demostrada la propiedad.*

11. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $\frac{a}{b} > 0$

Demostración: *(ejercicio)*

12. Si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $\frac{a}{b} < 0$

Demostración: *(ejercicio)*

13. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $\frac{a}{b} < 0$

Demostración: *(ejercicio)*

> NOTA:
>
> Las propiedades 9, 10, 11, 12 y 13 son equivalentes a la
> **Ley de los cocientes:**
>
> $$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$
> $$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

14. Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

Demostración: *(ejercicio)*

15. Si $a < b$ entonces $-b < -a$

Demostración: *(ejercicio)*

16. Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$

Demostración:

$$Supongamos\ que\ a > 1, utilizando\ propiedad\ 4\ tenemos\ que\ aa > 1a\ que\ es\ a^2 > a,$$
$$por\ lo\ que\ queda\ demosrada\ la\ propiedad$$

17. Si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$

Demostración: *(ejercicio)*

18. Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$

Demostración: *(ejercicio)*

19. Si $a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ con $a \neq 0 \neq b$ ambos negativos o positivos.

Demostración: *(ejercicio)*

20. Si $a > b$ entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ con $a \neq 0 \neq b$ ambos positivos o negativos.

Demostración: *(ejercicio)*

21. Si $a < b$ entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ con $a \neq 0 \neq b$ ambos con signo distinto.

Demostración: *(ejercicio)*

22. Si $a > b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ con $a \neq 0 \neq b$ ambos con signo distinto.

Demostración: *(ejercicio)*

Utilicemos las propiedades anteriores para los siguientes ejemplos.

NOTA**:** A lo largo de este tema hemos visto que aparece la palabra ***demostración***, esta se utiliza para comprobar que un enunciado es coherente con las reglas de la lógica, es decir, una prueba de que lo que se dice se cumple.

EJEMPLOS:

1). ¿Cómo es -5 respecto de -4?

Para poder responder a esta pregunta nos fijamos que $4 < 5$, y utilizando la propiedad 15, tenemos que $-5 < -4$.

2). ¿Qué pasa con la desigualdad $-3 < 5$ si la multiplicamos por 4?

Para resolver este problema utilizaremos la propiedad 3, entonces $(-3)(4) < (5)(4)$ que nos da como resultado $-12 < 20$.

3). Tenemos que $0 < 5a < 3b$ ¿cómo será $(5a)^2\ respecto\ de\ (3b)^2$?

Para su solución solo utilizaremos la propiedad 10, así que $(5a)^2\ será\ menor\ que\ (3b)^2$, $(5a)^2 < (3b)^2$.

4). ¿Qué signo tendrá a^4, si $a \neq 0$?
Para encontrar el signo que tendrá, utilizaremos la propiedad 5 o 6 de acuerdo a si $a > 0$ o si $a < 0$, en ambos casos $aa = a^2 > 0$, utilizamos nuevamente la propiedad 5, tenemos que $a^2a^2 > 0$, de esta manera $a^4 > 0$, por lo tanto a^4 es mayor a cero.

5) Si $ab > 0$ ¿Qué signo tendrá $(-2a)(-25b)$?
Por la ley de los signos tenemos que $(-2a)(-25b) = 50ab$ y como $ab > 0$ tenemos entonces que $50ab > 0$.

6). Si $ab > 0$¿Qué signo tendrá $\frac{a}{-b}$?
Como $ab > 0$ por las propiedades de arriba tenemos que pueden pasar dos casos:
i) Cuando $a > 0\ y\ b > 0$
ii) Cuando $a < 0\ y\ b < 0$
Es decir, cuando ambos cuentan con el mismo signo, entonces utilizando propiedades de cocientes $\frac{a}{-b} < 0$.

6) Si Mónica es mayor que su hermano Juan, ¿Qué pasará dentro de cinco años? ¿Quién será más grande?
Solución: Primero definamos M = edad de Mónica, J = edad de Juan; por lo que el enunciado anterior queda como M > J, dentro de 5 años, es sumar 5 en ambos lados, así que utilizando la primera propiedad se sigue conservando la desigualdad M+5 > J+5, así que Mónica seguirá siendo mayor que su hermano Juan.

7) ¿Qué pasa con la desigualdad $-5 < 5$ si la multiplicamos por 4?
Solución: Al multiplicar la desigualdad por un número positivo, la desigualdad no se altera, esto es utilizando la propiedad 3, así que

$$-5 < 5$$

$-5(4) < 5(4)$

$$-20 < 20$$

1.2 Valor absoluto

Otro concepto que es muy importante es el valor absoluto de un número real. Se define el valor absoluto de a, $|a|$, como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$|3| = 3\ ya\ que\ 3 > 0$$
$$|-5| = -(-5) = 5\ ya\ que - 5 < 0$$

Algunas propiedades del valor absoluto son:
1. $|a| \geq 0$

Demostración:

$$\textit{Esta demostración se realizará por casos:}$$
$$Supongamos\ que\ a \geq 0, tenemos\ que\ por\ definición\ de\ valor\ absoluto\ |a| = a \geq 0.$$
$$Supongamos\ que\ a < 0, tenemos\ que\ por\ definición\ de\ valor\ absoluto\ |a| = -a \geq 0.$$
$$Por\ lo\ que\ queda\ demostrada\ la\ propiedad.$$

2. $|a| = 0\ si\ y\ sólo\ si\ a = 0$

3. $|ab| = |a||b|$

Demostración:

$$Esta\ demostración\ se\ realizará\ por\ casos:$$
$$Supongamos\ que\ a \geq 0\ y\ b \geq 0, entonces\ ab \geq 0\ \ por\ lo\ que\ |ab| = ab;\ |a| = a\ y\ \ |b| = b,$$
$$entonces\ |ab| = ab = |a||b|$$
$Supongamos\ que\ a < 0\ y\ b < 0, entonces\ ab > 0\ por\ lo\ que\ |ab| = ab; |a| = -a\ y\ |b| = -b$
$entonces\ |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$
$Supongamos\ que\ a \geq 0\ y\ b < 0, entonces\ ab \leq 0\ por\ lo\ que\ |ab| = -ab; |a| = a\ y$
$|b| = -b\ \ entonces\ |ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$
$Supongamos\ que\ a < 0\ y\ b \geq 0, entoces\ ab \leq 0\ por\ lo\ que\ |ab| = -ab;\ |a| = -a;\ |b| = b,$
$entonces\ |ab| = -(ab) = (-a)b = |a||b|$

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ si\ b \neq 0$

Demostración:

$$Tenemos\ que\ \left|\frac{a}{b}\right| = \left|a\frac{1}{b}\right|, utilizando\ la\ propiedad\ anterior\ \left|a\frac{1}{b}\right| = |a|\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *llamada desigualdad del triángulo.*

Dado que la demostración de esta propiedad utiliza conocimientos que no se verán en estas notas, la demostración quedará pendiente.

EJEMPLOS:

1. $Calcular\ el\ siguiente\ valor\ absoluto\ |-11|$
$Solución$: $|-11| = 11$

2. $Calcular\ el\ siguiente\ valor\ absoluto$
$Solución$: $|5| = 5$

3. $Calcular\ el\ siguiente\ valor\ absoluto— |-(-29 + 53)|$
$Solución$: $— |-(-29 + 53)| = -|-(24)| = -[-(-24)] = -24$

4. $Si\ a \leq 0, b > 0.$ $\left|\frac{a}{b}\right| =?,$

Solución: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$

5. *Calcula el valor de*

$a)$ $|x-5|$ si $x>5$

Como $x>5$, entonces $x-5>0$. Así que $|x-5| = x-5$

$b)$ $|6-2\pi|$

Como $6<2\pi$, entonces $6-2\pi<0$. Así que $|6-2\pi| = -(6-2\pi) = -6+2\pi$

$c)$ $-|y+3|$ si $y<-3$

Como $y<-3$, entonces $y+3<0$. Así que $-|y+3| = -\big(-(y+3)\big) = y+3$

d) $|y+8|$ si $y<-8$

Como $y<-8$, entonces $y+8<0$. Así que $|y+8| = -(y+8) = -y-8$

1.2.1 Valor absoluto y desigualdades.

Si $b>0$

$$|a| < b \text{ si y solo si } -b<a<b$$

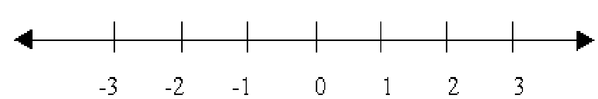
ó $|a| > b$ *si y solo si* $a<-b$ *o bien* $b<a$

OBSEVACIONES: Otra definición equivalente del valor absoluto es $|a| = \sqrt{a^2}$

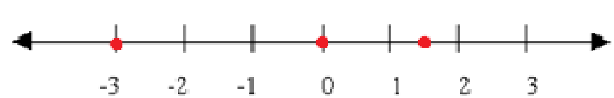
1.3 Recta real

Una de las ventajas de los números reales es que pueden ser representados por puntos en la recta real. Para esta representación de los números reales generalmente se escoge una recta horizontal y un punto en ella para representar al cero y otro para representar al uno, que normalmente se coloca a la derecha del cero. Estos puntos determinan la escala y la colocación de los demás enteros. Los naturales se van colocando a la derecha del cero en forma ordenada, dejando entre cada uno de ellos el mismo espacio que hay entre cero y uno, una unidad. Ahora hacia la izquierda se van colocando los -1,-2,-3, …

Por ejemplo, tenemos la recta:



Localizar los puntos $-3, 0, \frac{1}{2}$



Para visualizar de una manera interactiva la representación de números en la recta real se incluye el siguiente link de GeoGebra:

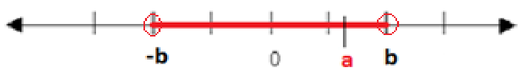
https://www.geogebra.org/m/jQ5VFHnU

https://www.geogebra.org/m/xvqtfqcc

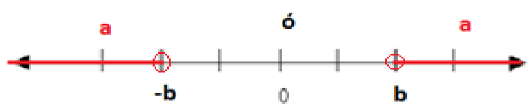
En la recta numérica, el valor absoluto de un número o una expresión es la distancia entre el valor y cero. Cuando usamos la recta numérica para explorar el valor absoluto, éste siempre estará en cero o a la derecha del cero.

Veamos cómo se visualiza el valor absoluto en la recta:

- $|a| < b \text{ si y solo si } -b < a < b$

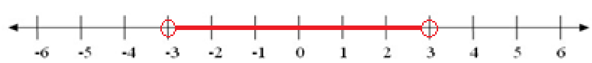


- $|a| > b \text{ si y solo si } \ a < -b \text{ o bien } b < a$



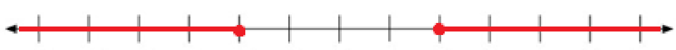
Ejemplos:

1. Tomemos una recta y grafiquemos un número x tal que $|x| < 3$,



Lo que quiere decir que son todos los números reales x entre -3 y 3, son los que satisfacen $|x| < 3$, sin incluir los extremos.

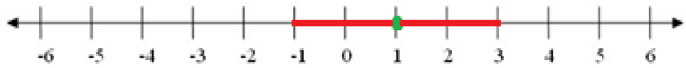
2. Tomemos una recta y grafiquemos un número x tal que $|x| \geq 2$



Lo que quiere decir que son los números reales x menores o iguales a -2 y mayores o iguales a2, son los que satisfacen $|x| \geq 2$.

3. Veamos cómo se visualiza $|x-1| \leq 2$ en la recta real.

Tomamos una recta y debemos localizar a todos los números reales x que cumplen lo siguiente: la distancia del número real x al 1 sea menor o igual a 2, por lo que se ve como sigue:

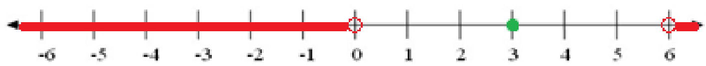


Que como podemos ver, son todos los x entre -1 y 3.

4. ¿Cómo se visualiza $|x-3| > 3$ en la recta real.

Tomamos una recta y debemos localizar a todos los números reales x que cumplen lo siguiente: la distancia del número real x al 3 sea mayor a 3.

En la recta se ve como sigue:

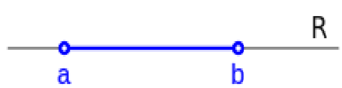


Donde podemos ver que los números que satisfacen $|x-3| > 3$ son todos los números reales x menores a 0 y mayores a 6.

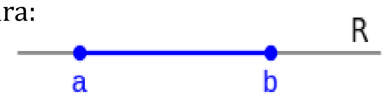
1.3.1 Intervalos

Ahora definiremos los intervalos en la recta real:

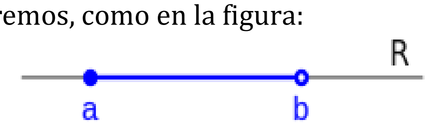
- Si $a < b$ el conjunto $(a,b) = \{x\epsilon R | a < x < b\}$ se llama ***intervalo abierto*** y se representa geométricamente como un segmento que no incluye sus extremos. Veamos la figura:



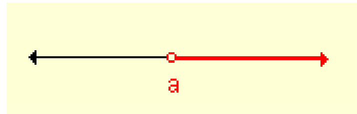
- Si $a < b$, y a, b están en el conjunto, $[a,b] = \{x\epsilon R | a \leq x \leq b\}$ se llama ***intervalo cerrado*** y se representa geométricamente como un segmento que incluye sus extremos. Veamos la figura:



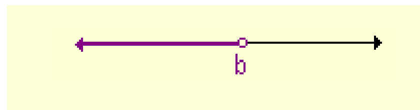
- Si $a < b$ y sólo contiene a uno de sus extremos, se llama ***intervalo semi-abierto,*** $(a,b] = \{x\epsilon R | a < x \leq b\}$ o $[a,b) = \{x\epsilon R | a \leq x < b\}$ y se representa geométricamente como un segmento que incluye solo uno de los extremos, como en la figura:



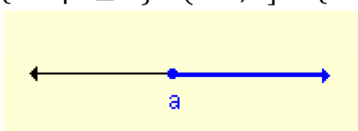
- Si $a \in R$, el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $x > a$ se denota por $(a, \infty) = \{x \epsilon R | x > a\}$ y se denota geométricamente como el rayo de parte de a y se extiende hacia la derecha.

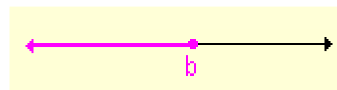


- Si $b \in R$, el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $x < b$ se denota por $(-\infty, a) = \{x \epsilon R | x < b\}$ y se denota geométricamente como el rayo de parte de b y se extiende hacia la izquierda.



- De igual manera si se quiere que esté incluido el punto a, escribimos $[a, \infty) = \{x \epsilon R | x \geq a\}$ o $(-\infty, b] = \{x \epsilon R | x \leq b\}$. Que se representan geométricamente como:





EJEMPLOS:

1. Escribir en notación de intervalos:

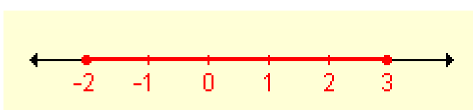
a) $\{x \epsilon R | -2 < x < 5\}$

Lo anterior en notación de intervalo, siguiendo la definición queda como: $(-2,5)$

b)$\{x \epsilon R | x > -1\}$

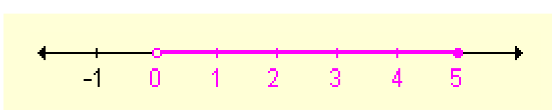
Lo anterior en notación de intervalo, siguiendo la definición queda como: $(-2, \infty)$

c)



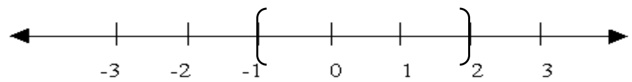
Observando la parte marcada en rojo, notamos que incluye los extremos, por lo que es un intervalo cerrado, que contiene los números mayores que -2 pero menores a 3, que en notación intervalo $[-2,3]$

d)



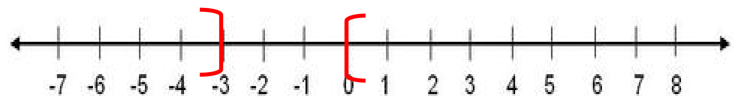
Observando la parte marcada en rosa, notamos que no contiene los dos extremos, es decir, no contiene a 0 pero si contiene a 5, por lo que es un intervalo semi-abierto que contiene los números mayores a 0 y menores a 5, que en notación intervalo queda: $(0,5]$

2. Ahora localicemos en la recta todos los números que sean mayores a -1 y menores a 2



Es decir, son todos los $x \in (-1,2)$

3. Ahora localicemos en la recta todos los números menores a -3 y mayores a 0



Es decir, son todo los $x \in (-\infty, -3)$ *ó* $x \in (0, \infty)$, lo cuál se denota como $x \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$.

APÉNDICE
CONJUNTOS

Un conjunto es una colección o grupo de elementos, los elementos tienen características comunes, por ejemplo: conjunto de libros, colección de monedas, conjunto de problemas, etc.…

Definiciones y notaciones

Conjunto: Colección de objetos.
Elementos del conjunto: Son los objetos del conjunto.
En general se usan letras mayúsculas para denotar a los conjuntos $A, B, C, .., Z$ y letras minúsculas para denotar los objetos $a, b, c, \dots, z$.
Escribimos $x \in A$para indicar que el elemento x pertenece al conjunto A; y escribimos $x \notin A$ si x no pertenece a A.
Hay algunos conjuntos particulares que tienen asignada una letra especial. Tal es el caso de los números naturales N, el conjunto de los números enteros Z, el conjunto de los números racionales Q, el conjunto de los números irracionales I y el conjunto de los números reales R.
Las {} pueden leerse como "*conjunto formado por*" y lo que está dentro de ellas son los elementos del conjunto.

Para referirnos a un conjunto hay dos maneras de hacerlo:
1) escribir la lista de todos los elementos entre llaves. Por ejemplo: $B = \{2,4,6,8,10\}$ ó
2) escribir entre llaves las propiedades que caracterizan a los elementos del conjunto. Por ejemplo:
$B = \{n \in \mathbb{N} | n \; es \; par \; y \; n \leq 10\}$
$(B \; es \; el \; conjunto \; de \; los \; números \; naturales \; tales (\quad | \quad) que \; n \; es \; par \; y \; n \; es \; menor \; o \; igual \; a 10$
$)$

EJEMPLOS:
1) Llamemos C al conjunto de los enteros impares mayores que -7 y menores que 9.
Una solución es enlistar todos los elementos que cumplen con la propiedad
$$C = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$$
Otra solución es:
$$C = \{x \in \mathbb{Z} | -7 < z < 9 \; y \; x \; impar\}$$

2) Sea $B = \{x \in \mathbb{R} | \pi < x < 4\}$. Encontrar un elemento que esté en B y otro elemento que no esté en B.
Solución:
Para encontrar un elemento x que esté en B debe cumplir 3 propiedades:

$x \in \mathbb{R}, \pi < x\ y\ \ x < 4$, así que $3.5 \in B$. Para encontrar un elemento que no esté, basta con que no cumpla una de las propiedades, así que $5 \notin B$

Conjunto vacío: Conjunto que no tiene elementos y es denotado Ø.

EJEMPLO:
$D = \{x \in \mathbb{Z} | 3 < x < 4\}$=Ø ya que no hay ningún entero que cumpla estas propiedades.

Cardinalidad de un conjunto
Si hay un entero $n \geq 0$ tal que el conjunto A tiene n elementos, entonces de dice que A es un conjunto *finito* y tiene cardinalidad n. En caso contrario, es decir no existe tal n, se dice que A en un conjunto *infinito*.

POR EJEMPLO:
1) Tomando $C = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$ del ejemplo anterior, C es finito y su cardinalidad es 7.

2) N, Z, Q, R son conjuntos infinitos, cada uno de ellos.

3) Ø es finito y tiene cardinalidad 0.

4) ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto E que consta de los números enteros mayores o iguales que 1 y menores que 15?
Solución:
Tenemos que $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$ con cardinalidad 14.

Subconjuntos
Un conjunto B es un subconjunto del conjunto A, o que B está contenido en A si todo elemento de B es un elemento del conjunto A, lo que se escribe como: $B \subset A$ó $A \supset B$.
Para decir que B no está contenido en A escribimos $B \not\subset A$, lo que significa que hay un elemento de B que no está en A.
EJEMPLOS:
1) Sean $A = \{2,4,6,8,10\}\ y\ B = \{2,4\}$ donde podemos ver que $B \subset A$.

2) Sean $C = \{0.5,1,3,5,8\}\ y\ Z$, donde tenemos que $C \not\subset Z$ ya que $0.5 \notin Z$.

Subconjunto propio: Si $B \subset A$y $B \neq A$.

Diferencia de conjuntos. Complemento
La *diferencia* para dos conjuntos $A\ y\ B$ definimos la diferencia $A - B\ o\ A \backslash B$ como el conjunto formado por los elementos en A que no están en B, es decir $A - B = \{x \in A | x \notin \mathrm{B}\}$

EJEMPLOS:
1) Encontrar $A - B$ si $A = \{-3, -1, 1, 3, 5\}\ y\ B\{3,5,7,9\}$
Solución:
Tenemos que $A - B = \{-3, -1, 1\}$

2) Encontrar $A - B$ si $A = \{-5, -4, -3, -2\}\ y\ B\{-3,1,5\}$
Solución:
Tenemos que $A - B = \{-5, -4, -2\}$

Si fijamos un conjunto universal U, el complemento de cualquier conjunto B con respecto a U se denota como B^c, es decir $B^c = \{x \in U | x \notin \mathrm{B}\}$

EJEMPLOS:
1) Tomemos el universo $U = \{-5, -2, -1, 7, 8, 10\}$ y $B = \{8, 10\}$. Encontrar B^c.
Solución:
Tenemos que $B^c = \{-5, -2, -1, 7\}$

2) Tomemos a Z como el conjunto universo y sea $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Encontrar A^c.
Solución:
Tenemos que $A^c = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Unión de conjuntos
La unión de los conjuntos $A\ y\ B$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen por lo menos a uno de esos dos conjuntos, el cual se denota por $A \cup B (se\ lee: A\ unión\ B)$, es decir $A \cup B = \{x | x \in A\ o\ x \in B\}$.
De donde puede ocurrir cualquiera de estas tres situaciones: $x \in A$ y $x \notin B$ o bien $x \notin A$ y $x \in B$ o bien $x \in A$ y $x \in B$.

EJEMPLOS:
1) Sean $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}\ y\ B = \{10, 20, 30, 40\}$. Encontrar $A \cup B$.
Solución:
$$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 10, 20, 30, 40\}$$
2) Sean $A = \{a, c, d, e, f\}\ y\ B = \{a, x, y, z\}$. Encontrar $A \cup B$.
Solución:
$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, x, y, z\}$$

Intersección de conjuntos
La intersección de los conjuntos $A\ y\ B$ es el conjunto formado por los elementos que están en A y que están en B. El cual es denotado por $A \cap B (se\ lee: "A\ intersección\ B)$, es decir $A \cap B = \{x | x \in A\ y\ x \in B\}$.
Cuando no hay elementos en la intersección se dice que son conjuntos *ajenos* o *disjuntos* o *mutuamente excluyentes*.

EJEMPLOS:
1) Sean $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}\ y\ B = \{a, b, c, x, y, z\}$. Encontrar $A \cap B$.
Solución:
Se tiene que $A \cap B = \{a, b, c\}$ ya que a, b, c están tanto en A como en B.

2) Sean $A = \{1,2,3\}\ y\ B = \{4,5,6\}$. Encontrar $A \cap B$.
Solución:
Se tiene que $A \cap B = \emptyset$ ya que no hay algún elemento que se encuentre en A y B, de donde podemos decir que $A\ y\ B$ son ajenos.

Propiedades distributivas

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

EJEMPLOS:
Sean $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{-1,0,1,2,3\}\ y\ C = \{0,2,4,6,8\}$
1) Verificar que se cumple $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
Solución:
Por un lado, tenemos que $A \cup B = \{-1,0,1,2,3,4,5\}\ por\ lo\ que\ (A \cup B) \cap C = \{0,2,4\}$
Por otro lado $A \cap C = \{2,4\}\ y\ B \cap C = \{0,2\}$ por lo que $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{0,2,4\}$ comprobando el resultado.

2) Verifiquemos si se cumple $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Solución:
Por un lado, tenemos que $A \cap B = \{1,2,3\}\ por\ lo\ que\ \ (A \cap B) \cup C = \{0,1,2,3,4,6,8\}$
Por otro lado, tenemos $A \cup C = \{0,1,2,3,4,5,6,8\}\ y\ B \cup C = \{-1,0,1,2,3,4,6,8\}\ por\ lo\ que$
$(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{0,1,2,3,4,6,8\}$ que es lo que habíamos obtenido.

Leyes de Morgan
Las siguientes dos igualdades se conocen como las leyes de Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Lo anterior lo podemos leer, el complemento de una unión es la intersección de los complementos y el complemento de una intersección es la unión de los complementos.
Por ejemplo:
Tomemos $X = \{1,2,3,4,5,6\}\ como\ el\ conjunto\ universo, y\ sean\ A = \{1,6\}\ y\ B = \{1,4\}$ y verifiquemos las leyes de Morgan
a) Tenemos $A \cup B = \{1,4,6\}\ entonces\ (A \cup B)^c = \{2,3,5\}$
Por otro lado $A^c = \{2,3,4,5\}\ y\ B^c = \{2,3,5,6\} entonces\ A^c \cap B^c = \{2,3,5\}$ lo que teníamos como resultado anterior.

b) Tenemos que $A \cap B = \{1\}\ entonces\ (A \cap B)^c = \{2,3,4,5,6\}$

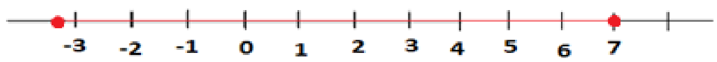
Del inciso anterior $A^c = \{2,3,4,5\}$ y $B^c = \{2,3,5,6\}$, $entonces$ $A^c \cup B^c = \{2,3,4,5,6\}$ lo que teníamos como resultado anterior.

Conjuntos, intervalos y recta real

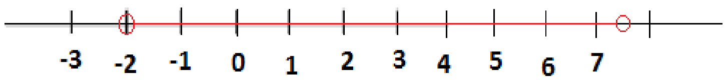
EJEMPLOS:

1). Encontrar $A \cup B$ si $A = \{x \in \mathbb{R} | -\pi \leq x \leq 7\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 7.5\}$

Tenemos que A se visualiza:



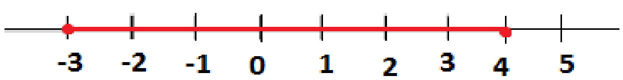
B se visualiza:



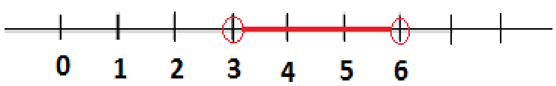
Así que $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | -\pi \leq x < 7.5\}$

2). Encontrar $A \cap B$ si $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 4\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 6\}$

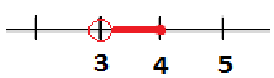
Tenemos que A se visualiza:



B se visualiza:



Así que $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x \leq 4\}$



ÁLGEBRA

2.1 Lenguaje algebraico

El desarrollo del álgebra le ha llevado a la humanidad cientos de años. Álgebra es la rama de las matemáticas que estudia la relación entre números, letras y signos. Lo cual es muy útil a la hora de plantear algún problema de la vida cotidiana. El álgebra simplifica aún más el enunciado o la regla empleando una sola letra en lugar de cada palabra. Por ejemplo, para hallar el área de un rectángulo, multiplíquese la base por la altura; lo anterior lo podemos expresar como $A = bh$ donde A denota el área del rectángulo, b la longitud de la base del rectángulo y h la altura del rectángulo. Otros ejemplos:

Frase	Expresión
Un número aumentado en 1	$x + 1$
Un número disminuido en 9	$\mathrm{y} - 9$
El cuadrado de un número	r^2
El doble de un número entre 5	$\frac{2x}{5}$
Tres cuartas partes de un número	$\frac{3\mathrm{z}}{4}$
La longitud de la salamandra gigante, S, es de 1487.5 mm mayor que la de la rana venenosa, R.	$S = R + 1487.5$
El costo, C, de x kilos de tortillas es de $15	C = 15x

Una expresión donde se suman, restan, multiplican, dividen o se elevan a potencias o se extraen raíces a números reales o a variables entre sí se llama una expresión algebraica. Las variables son letras que representan cantidades desconocidas o un conjunto de números reales.

Por ejemplo $3z\sqrt{x}$, $(xy)^2 + 4xy^2$, $\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}+1}y^3 + 4(y-1)^2 + 1$

Para que quede más claro lo anterior, escribamos una expresión algebraica en cada problema:

1. x *más* 32. *Solución*: $x + 32$

2. *Dos veces t menos* 9. *Solución*: $2t - 9$

3. *El cociente de dos números es* 100. *Solución*: $\frac{a}{b} = 100$

4. $\frac{1}{6}$ *del número z de asistentes a un concierto eran niños*. *Solución*: $\frac{1}{6}z$

5. *Dos tercios de y menos seis séptimos de z*. *Solución*: $\frac{2}{3}y - \frac{6}{7}z$

6. *Un quinto de los libros de la biblioteca son de historia*.

$Solución$:

Denotamos como $x = libros\ de\ la\ biblioteca$, por lo que el enunciado es $\frac{1}{5}x$

7. $Toño\ es\ 5\ años\ mayor\ que\ Roberto$

$Solución$:

Denotamos como $T = edad\ de\ Toño$ y como $R = edad\ de\ Roberto$, por lo que enunciado es $T = R + 5$

8. $El\ volumen\ de\ una\ esfera\ es\ cuatro\ tercios\ del\ producto\ de\ \pi\ por\ el\ radio\ al\ cubo$.

$Solución$:

Denotamos como $V = volumen\ de\ la\ esfera$ y como $r = radio\ de\ la\ esfera$, por lo que el enunciado es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

DEFINICIONES IMPORTANTES

Constante: Un símbolo que sólo puede tomar un valor, por lo general se utilizan las primeras letras del alfabeto a, b, c.

Variable: Un símbolo que puede tomar más de un valor de un conjunto de valores permitidos, por lo general se utilizan las últimas letras del abecedario x, y, z.

Conjunto: Es una colección de objetos de algún tipo; a dichos objetos se les denomina elementos del conjunto.

Expresión algebraica: Es una expresión donde se suman, restan, multiplican, dividen o se elevan a potencias o se extraen raíces a números reales, constantes o a variables entre sí.

Factor: Llámese factor de un producto a cada uno de los números que se multiplican entre sí para obtener el producto. Por ejemplo: $a\ y\ b$ son factores de ab

Fórmula: Es la expresión algebraica, por medio de letras, de una regla o principio.

Monomio**:** Consiste en un número o el producto de un número por una o más variables elevadas a exponentes naturales. En un monomio distinguimos dos partes, la numérica, que llamaremos coeficiente y la compuesta por las potencias de las variables. Por ejemplo: $2n, a, x^2$ son monomios.

Polinomio: Toda expresión algebraica que consta de suma o resta de varios monomios. Por ejemplo: $2n + a, 3x + x^3$

Coeficiente: Es la parte numérica de un monomio.

Antes de continuar practiquemos las definiciones mencionadas con la siguiente tabla:

	Monomio	Coeficiente	Variables		Monomio	Coeficiente	Variables
1.	x^3y	1	x, y	**2.**	$p^2q^5r^4s^6$	1	p, q, r, s
3.	$-58w^3z$	-58	w, z	**4.**	$\frac{8}{10}a$	$\frac{8}{10}$	a
5.	a^5b^2cd	1	a, b, c, d	**6.**	dp^3	1	d, p
7.	$5xyz$	5	x, y, z	**8.**	$-12s^3t$	-12	s, t
9.	$\frac{x^3}{2}$	$\frac{1}{2}$	x	**10.**	$5x^2y^{12}$	5	x, y
11.	$-x^3y^{11}$	-1	x, y	**12.**	$-3a^2d^3$	-3	a, d

Grado y términos semejantes

Grado de una variables: Es el exponente al que está elevada la variable en el monomio o en la expresión algebraica.

Grado de un término: Es la suma de los grados de todas sus variables. Por ejemplo: a^2 es de segundo grado, a^m es del grado m y x^2y^3 es de quinto grado ya que $x^2y^3 = xxyyy$

Grado de un polinomio: Es el del término de mayor grado. Por ejemplo: $x^2y^3 + z + 2$ es de quinto grado. En caso de que el grado sea el mismo en todos los términos, se dice que es un polinomio homogéneo.

Diremos que un par de términos son *semejantes* si los grados de cada variable que componen a un término son iguales respectivamente a cada variable del otro término, independientemente del coeficiente que tengan los términos.

Por ejemplo:

		Son o no semejantes
$\boldsymbol{-x^3y^{11}}$	$11x^3y^{11}$	Son semejantes
$\boldsymbol{-a^3b^2c}$	$\frac{1}{3}a^3b^2c$	Son semejantes
$\boldsymbol{10w^3v^2z}$	$10wv^2z^3$	No son semejantes
$\boldsymbol{5xyz}$	$-x^2yz$	No son semejantes
$\boldsymbol{25s^3tw}$	$3s^3tw$	Son semejantes

Símbolos de agrupación: Son los símbolos empleados para indicar que un polinomio se considera como un término. Los más comunes son: ( ) paréntesis ordinario, [ ] corchetes y { } llaves.

Ejemplos:

$1. Encontrar\ elgrado\ de\ x^5y^3z^6$
$Solución$:
$El\ grado\ de\ x\ es\ 5$
$El\ grado\ de\ y\ es\ 3$
$El\ grado\ de\ z\ es\ 6$
$Así\ que\ el\ grado\ es\ 5+3+6=14$

$2. Encontrar\ el\ grado\ de\ 20^5$
$Solución$:
$Como\ 20^5\ es\ un\ número, el\ grado\ es\ 0$

$3. Encontrar\ el\ grado\ de\ 5a^5b^3c+12a^2b^2c+2a+12$

$Solución$:
$Elgrado\ de\ 5a^5b^3c\ es\ 8$
$El\ grado\ de\ 12a^2b^2c\ es\ 4$
$Elgrado\ de\ 2a\ es\ 1$
$Elgrado\ de\ 12\ es\ 0$
$Así\ que\ el\ grado\ del\ polinomio\ es\ 8$

Simplificación de expresiones algebraicas

Para eliminar los símbolos de agrupamiento se comienza por la expresión más interior, realizando las operaciones indicadas en el orden correcto. Por orden correcto, se refiere a respetar la jerarquía de operaciones.

Orden de las operaciones:

1) *Potencias y raíces*.

2) *Multiplicación y división (se efectúan en el orden que se indican)*

3) *Sumas y restas (pueden*

EJEMPLO:

1). Simplificar $2a-\{3b+[c^2-a-(4b-a)]\}$
$2a-\{3b+[c^2-a-(4b-a)]\}$ primero quitamos el paréntesis del término interior $(4b-a)$

y efectuamos las operaciones que quedaron dentro del corchete

$$2a-\{3b+[c^2-a-(4b-a)]\}=2a-\{3b+[c^2-a-4b+a]\}$$

Ahora se elimina el corchete y se realizan las operaciones dentro de las llaves

$= 2a - \{3b + [c^2 - 4b]\}$

$= 2a - \{3b + c^2 - 4b\} = 2a - \{c^2 - b\}$

$= 2a - c^2 + b$

por último, se eliminan las llaves, se realizan las operaciones y se simplifica

2). Simplificar

$$25x\{-2y + [3x(2a)]\}$$

se elimina primero el paréntesis y se realizan las operaciones

$$25x\{-2y + [3x(2a)]\} = 25x\{-2y + [6ax]\}$$

se eliminan los corchetes

$$,25x\{-2y + [6ax]\} = 25x\{-2y + 6ax\}$$

finalmente se quitan las llaves y como no hay términos semejantes, el resultado de simplificar es

$$25x\{-2y + 6ax\} = -50xy + 15ax^2$$

2.2 Leyes de los exponentes:

Una potencia es una expresión del tipo a^n donde a es la base y n es el exponente. Así la expresión a^n significa que a debe multiplicarse $n-1$ veces a sí misma, cuando n es un número natural. a puede ser un número o una expresión algebraica.
Consideramos como base $a y b$ que son números o expresiones algebraicas, números racionales, se cumplen las siguientes igualdades:

1)$a^0 = 1$ 2)$a^p a^q = a^{p+q}$ 3)$a^p b^p = (ab)^p$ 4)$(a^p)^q = a^{pq}$ 5)$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

EJEMPLOS:

1) $Calcular\ 100^0$ $Solución: 100^0 = 1$	2) $Calcular\ 6^3$ $Solución: 6^3 = 6^2(6) = 36(6) = 216$	3) $Calcular\ 5^{-2}$ $Solución: 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
4) $Calcular\ \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ $Solución: \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{1}\right)^2 = 5^2 = 25$		5)$Calcular \left(\frac{5^3}{5^2}\right)$ $Solución: \left(\frac{5^3}{5^2}\right) = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

6) $Calcular\ (10^2)^3$ $Solución: (10^2)^3 = 10^{2(3)}$ $= 10^6$	7) $Calcular\ 6^4(6^2)$ $Solución: 6^4(6^2) = 6^6 = 6^5(6) = (6^4)(6)6$ $= (6^3)(6)(6)6$ $= 6^2(6)(6)(6)(6) = 6(6)(6)(6)(6)(6) = 46656$

2.2.1 Exponentes racionales:

Cuando se eleva un número a una potencia fraccionaria, lo que se está haciendo es la operación inversa de la potencia, que es hallar la raíz.

$a^{\frac{1}{2}}$ esto significa sacar raíz cuadrada

$a^{\frac{1}{3}}$ esto significa sacar raíz cúbica

2.2.2 Leyes de los radicales:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

EJEMPLOS:

1) $Calcular\ \sqrt[3]{16}$ $Solución: \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2(8)} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{2}$	2) $Calcular\ \sqrt{\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}$ $Solución: \sqrt{\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3\pi}}{2}$
3) $Calcular\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}$ $Solución: \sqrt[3]{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[12]{10}$	4). $Calcular\ \left(\sqrt[3]{64}\right)^3$ $Solución: \left(\sqrt[3]{64}\right)^3 = 64$

2.3 Suma y resta de polinomios

Suma algebraica: Operación de sumar varios números según las reglas que se han establecido para sumar números positivos y negativos. Por ejemplo: la suma de -2 y 3 es 1.

Suma de monomios: Se suman algebraicamente los coeficientes del factor común y se escribe el resultado junto con el factor común. Por ejemplo: $5x + 3x = 8x$

Suma/Resta de polinomios: Agrupar los monomios que tengan términos semejantes y realizar la operación de suma o resta, según sea el caso. Por ejemplo: $(5x-3y-2)+(2x+y+1)=(5x+2x)+(-3y+y)+(-2+1)=7x+(-2y)+(-1)=7x-2y-1$

Ejemplos:

1.*Simplificar* $a^2b^2+m^2n^2-x^2y^2-3m^2n^2+4x^2y^2-5a^2b^2$
Solución :
$a^2b^2+m^2n^2-x^2y^2-3m^2n^2+4x^2y^2-5a^2b^2=-4a^2b^2-2m^2n^2+34x^2y^2$

2.*Simplificar* $a^2-b^2+c^2-a^2+b^2-c^2$
Solución :
$a^2-b^2+c^2-a^2+b^2-c^2=0$

3.*Simplificar* $25a+4ab-6(6ab-18b)-7[ab+5a-11]$
Solución :
$25a+4ab-6(6ab-18b)-7[ab+5a-11]=25a+4ab-36ab+108b-7ab-35a+77$
$=-10a-39ab+108b+77$

4.*Simplificar* $3a-\{b-2[c-3b+2(c-a)+b]+2a\}$
Solución :
$3a-\{b-2[c-3b+2(c-a)+b]+2a\}=3a-\{b-2[c-3b+2c-2a+b]+2a\}$
$=3a-\{b-[-2a-2b+3c]+2a\}=3a-\{b+2a+2b-3c+2a\}=3a-\{4a+3b-3c\}$
$=3a-4a-3b+3c=-a-3b+3c$

Grado de una variables: Es el exponente al que está elevada la variable en el monomio.

Grado de un término: Es la suma de los grados de todas sus variables. Por ejemplo: a^2 es de segundo grado, a^m es del grado m y x^2y^3 es de quinto grado ya que $x^2y^3=xxyyy$

Grado de un polinomio: Es el del término de mayor grado. Por ejemplo: x^2y^3+z+2 es de quinto grado. En caso de que el grado sea el mismo en todos los términos, se dice que es un polinomio homogéneo.

Ejemplos:

1. *Encontrar el grado de* $x^5y^3z^6$
Solución:
El grado de x es 5
El grado de y es 3
El grado de z es 6
Así que el grado es $5+3+6=14$

$2. \, Encontrar\ el\ grado\ de\ 20^5$
$Solución$:
$Como\ 20^5\ es\ un\ número, el\ grado\ es\ 0$

$3. \, Encontrar\ el\ grado\ de\ 5a^5b^3c + 12a^2b^2c + 2a + 12$
$Solución$:
$El\ grado\ de\ 5a^5b^3c es 8$
$El\ grado\ de\ 12a^2b^2c es 4$
$El\ grado\ de\ 2a\ es\ 1$
$El\ grado\ de\ 12\ es\ 0$
$Así\ que\ el\ grado\ del\ polinomio\ es\ 8$

MÁS DEFINICIONES…

MCD (Máximo común divisor): es el máximo de sus factores comunes. Una manera de encontrarlo es enlistar todos los factores de cada número, fijarse en los que tengan en común y elegir el mayor de ellos.

Por ejemplo:

Encontrar el MCD de 45 y 25

Los factores de 45 son: 45,9,5

Los factores de 25 son: 25,5

Dado que el 5 es el único factor de ambos números, tenemos que 5 es el MCD.

Evaluación de un polinomio

Los polinomios son expresiones algebraicas y por lo tanto podemos avaluarlos. Por ejemplo, decimos que evaluamos el monomio $6x^2$ en 2 cuando sustituimos x por el valor 2, es decir $6x^2 = 6(2)^2 = 6(4) = 24$

Si el monomio es en dos o más variables, podemos evaluarlo en las variables que contenga, por ejemplo, si evaluamos $2ab$ en $a = 1\, y\, b = 2$ tenemos $2ab = 2(1)(2) = 2$.

Más general, para evaluar un polinomio evaluamos en cada uno de sus términos y realizar la suma.

Ejemplo:

$1. \, Evaluar\ 5x^7 - x^4 + 2x + 6\ en\ x = 1$
$Solución$:
$5x^7 - x^4 + 2x + 6 = 5(1)^7 - (1)^4 + 2(1) + 6 = 5 - 1 + 2 + 6 = 12$

$2. Evaluar\ x^6y^5 - 4x^5y^3 + 2x^4y^2 + x\ en\ x = -1, y = 2$
$Solución$:
$x^6y^5 - 4x^5y^3 + 2x^4y^2 + x = (-1)^6(2)^5 - 4(-1)^5(2)^3 + 2(-1)^4(2)^2 + (-1)$
$= 1(32) - 4(-1)(8) + 2(1)(4) + (-1) = 32 + 32 + 8 - 1 = 71$

2.4 Producto de expresiones algebraicas.

Las expresiones algebraicas son números reales o variables que representan a su vez números reales por lo que al multiplicarse siguen las propiedades de la suma, multiplicación distribución que tienen los números reales.

Es decir, si a, b, c son números reales entonces se tiene que $a(b + c) = ab + ac$

Suponiendo ahora que se tiene otro número real d, entonces se puede desarrollar el siguiente producto $(a + b)(c + d)$.

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd \qquad (1)$$

Cuando hacemos variar estos cuatro números reales obtenemos los productos notables.

Multiplicación de polinomios: Realizar la multiplicación de polinomios es muy sencillo, es aplicando la propiedad distributiva, que se ha estudiado anteriormente, se utilizan leyes de los exponentes y reducción de términos semejantes. Para que quede más claro veamos unos ejemplos:

$1. Multiplicar\ (6y)(7z)$
$Solución$:
Se multiplican los coeficientes y se suman las potencias de las variables que aparecen en ambos monomios
$(6y)(7z) = (6)(7)yz = 42yz$

$2. Multiplicar\ (4c^3d)(-5c^2d^7)$
$Solución$:
Se multiplican los coeficientes y se suman las potencias de las variables que aparecen en ambos monomios
$(4c^3d)(-5c^2d^7) = (4)(-5)(c^3c^2)(dd^7) = -20c^5d^8$

$3. Multiplicar - 7a(3a^2 - 5a + 6)$
$Solución$:

Utilizaremos primero la propiedad distributiva de los números reales
$-7a(3a^2-5a+6)=-7a(3a^2)-7a(-5a)-7a(6)$
multiplicamos los coeficientes con los coeficientes y las variables con las variables
$=-7(3)(a)(a^2)-7(-5)(a)(a)-7a(6)$
ahora utilizamos las leyes de los exponentes
$=-21a^3+35a^2-42a$

4. *Multiplicar* $8x^2y(5x^2-4xy+y^2-3)$
Solución:
Como en el ejemplo anterior, utilizaremos la propiedad distributiva
$8x^2y(5x^2-4xy+y^2-3)=8x^2y(5x^2)+8x^2y(-4xy)+8x^2y(y^2)+8x^2y(-3)$
$=8(5)(x^2)(y)(x^2)+8(-4)(x^2)(y)(xy)+8(x^2)(y)(y^2)+8(-3)(x^2)(y)$
y por último las leyes de los exponentes
$=40x^4y-32x^3y^2+8x^2y^3-24x^2y$

5. *Multiplicar* $(3a^2-b)(a^2+b)$
Solución:
$(3a^2-b)(a^2+b)=3a^2a^2+3a^2b+(-b)a^2+(-b)b=3a^4+3a^2b-a^2b-b^2$
$\qquad\qquad=3a^4+2a^2b-b^2$

6. *Multiplicar* $(5x^3-9x)(4x+6)$
Solución:
$(5x^3-9x)(4x+6)=5x^3(4x)+5x^3(6)-9x(4x)-9x(6)$
$\qquad\qquad=20x^4+30x^3-36x^2-34x+30$

2.5 Productos notables

Sabemos que un producto es el resultado de la multiplicación de dos o más factores; sin embargo, existen ciertos productos que se pueden calcular usando fórmulas establecidas. De tal forma que los productos notables son polinomios que se obtienen de la multiplicación de dos o más polinomios que cumplen ciertas características.
Asimismo, cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización, que es un procedimiento por el cual se desarrolla la multiplicación.

Binomio al cuadrado.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ y } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

En la prueba de estas dos igualdades usa (1) y las propiedades de la suma y del producto de números reales:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = aa - ab - ba + bb = a^2 - 2ab + b^2$$

2.5.1. CUADRADO DE UNA SUMA: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Lo anterior lo podemos leer como: el cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Por ejemplo:

1. *Desarrollemos el siguiente cuadrado* $(2x+7)^2$

Solución: $(2x+7)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(7) + (7)^2 = 4x^2 + 28x + 49$

2. *Desarrollemos el siguiente cuadrado* $(n+1)^2$

Solución: $(n+1)^2 = (n)^2 + 2(n)(1) + (1)^2 = n^2 + 2n + 1$

3. *Desarrollemos el siguiente cuadrado* $(3a+4)^2$.

Solución :

$$(3a+4)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(4) + 4^2 = 9a^2 + 24a + 16$$

4. *Desarrollemos el siguiente cuadrado* $(2xy^3 + 3x^2)^2$

Solución :

$$(2xy^3 + 3x^2)^2 = (2xy^3)^2 + 2(2xy^3)(3x^2) + (3x^2)^2 = 4x^2y^6 + 12x^3y^3 + 9x^4$$

5. *Resolver la ecuación* $(x+5)^2 = (x+3)^2$

Solución :

$$(x+5)^2 = (x+3)^2$$

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 6x + 9$$

$$10x - 6x = 9 - 25$$

$$4x = -16$$

$$x = -4$$

Comprobación:

$$(x+5)^2 = (-4+5)^2 = 1 \quad \text{y} \quad (x+3)^2 = (-4+3)^2 = 1$$

2.5.2 CUADRADO DE UNA DIFERENCIA: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{2}$

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

Por ejemplo:

1. *Desarrollemos el siguiente cuadrado* $(5a-9)^2$

Solución: $(5a-9)^2=(5a)^2-2(5a)(9)+(9)^2=25a^2-90a+81$

2. *Desarrollemos el siguiente cuadrado* $(6ab^2-5a^2)^2$

Solución: $(6ab^2-5a^2)^2=(6ab^2)^2-2(6ab^2)(5a^2)+(5a^2)^2$

$=36a^2b^4-60a^3b^2+25a^4$

3. *Desarrollar* $(7a-5)^2$.

Solución :

$$(7a-5)^2=(7a)^2-2(7a)(5)+5^2=49a^2-70a+25$$

4. *Desarrollar* $(3xy^2-5x^3)^2$.

Solución :

$$(3xy^2-5x^3)^2=(3xy^2)^2-2(3xy^2)(5x^3)+(5x^3)^2=9x^2y^4-30x^4y^2+25x^6$$

5. *Resuelve la ecuación* $(x-9)^2-(y+7)^2=0$

Solución :

$$\begin{aligned}(x-9)^2-(x+7)^2&=0\\ x^2-2(x9)+9^2-[x^2+2(x7)+7^2]&=0\\ x^2-18x+81-x^2-14x-49&=0\\ -32x+32&=0\\ x&=\frac{-32}{32}\\ x&=-1\end{aligned}$$

2.5.3 BINOMIO CONJUGADO: $(a+b)(a-b)$

Diferencia de cuadrados.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

La justificación de la igualdad anterior utiliza (1) y las propiedades de la suma y del producto de números reales:

$$(a+b)(a-b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - b^2.$$

Por ejemplo:

1. *Desarrollemos el siguiente producto* $\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

Solución: $\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right) = (x)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{9}{16}$

2. *Desarrollemos el siguiente producto* $(x-10)(x+10)$

Solución: $(x-10)(x+10) = (x)^2 - (10)^2 = x^2 - 100$

2.5.4 BINOMIOS QUE TIENEN UN TÉRMINO COMÚN

$$(x+b)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

Probar la anterior requiere de (1)

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b) = x^2 + xb + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Por ejemplo:

1. *Desarrollemos el siguiente producto* $(x+7)(x-3)$

Solución: $(x+7)(x-3) = x^2 + (7-3)x + (7)(-3) = x^2 + 4x - 21$

2. *Desarrollemos el siguiente producto* $(x-9)(x-6)$

Solución: $(x-9)(x-6) = x^2 + (-9-6)x + (-9)(-6) = x^2 - 15x + 54$

2.5.5 BINOMIO AL CUBO

Otros productos notables que aparecen con frecuencia son el cubo de una suma y el cubo de una diferencia

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ y}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

La justificación de la primera igualdad es la siguiente

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2 = \\
&= a\left(a^2 + 2ab + b^2\right) + b\left(a^2 + 2ab + b^2\right) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

De manera análoga se prueba la segunda desigualdad.

Otra manera de expresar los binomios al cubo es la siguiente:

$(a+b)^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$(a-b)^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Por ejemplo:

1. *Desarrollemos el siguiente binomio al cubo* $(6a+8b)^3$

Solución : $(6a+8b)^3 = (6a)^3 + 3(6a)^2(8b) + 3(6a)(8b)^2 + (8b)^3$

$= 216a^3 + 864a^2b + 1152ab^2 + 512b^3$

2. *Desarrollemos el siguiente binomio al cubo* $(w-z)^3$

Solución : $(w-z)^3 = w^3 - 3w^2z + 3wz^2 - z^3$

2.6 Factorización y división

Factor: Llámese factor de un producto a cada uno de los números que multiplicados entre sí dan el producto.

Descomposición de un polinomio en factores: es el producto de polinomios más sencillos y de grado menor o igual que el polinomio original.

2.6.1 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS: $x^2 + bx + c$

En general, para factorizar $x^2 + bx + c$ buscamos dos números r y s tales que $b = r + s$ y $c = rs$. Si tales números existen, entonces $x^2 + bx + c = (x+r)(x+s)$, lo que se puede leer como buscar dos números que multiplicados den c y sumados den b.

Por ejemplo:

1). Factorizar $x^2 - 11x + 30$

Solución: Queremos factorizar el trinomio como el producto de dos binomios $x^2 - 11x + 30 = (x+r)(x+s)$ debemos encontrar dos números tales que el producto de ambos sea 30($rs = 30$) y sumados den -11($r + s = -11$), por lo que los números buscados son -5 y -6. Así la factorización queda como sigue: $x^2 - 11x + 30 = (x-5)(x-6)$

2). Factorizar $x^2 - 3x - 28$

Solución: Queremos factorizar el trinomio como el producto de dos binomios

$x^2 - 3x - 28 = (x+r)(x+s)$ debemos encontrar dos números tales que el producto de ambos sea -28 $(rs = 30)$ y sumados sea -3 $(r+s) = -3$, por lo que los números buscados son -7 y 4. Así la factorización queda como sigue: $x^2 - 3x - 28 = (x-7)(x+4)$

3). Factorizar $x^2 + 14x + 24$

Solución: Queremos factorizar el trinomio como el producto de dos binomios $x^2 + 14x + 24 = (x+r)(x+s)$ debemos encontrar dos números tales que el producto de ambos sea 24($rs = 24$) y sumados den 14($r + s = 14$), por lo que los números buscados son 12 y 2. Así la factorización queda como sigue: $x^2 + 14x + 24 = (x+12)(x+2)$

2.6.2 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:

Hay trinomios que pueden factorizarse directamente usando el producto notable: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ o $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ esto sucede cuando el trinomio es el cuadrado de un binomio. Estos trinomios se llaman trinomios cuadrados perfectos.

Por ejemplo:

1). Factorizar $x^2 + 18x + 81$ utilizando la fórmula de producto notable mencionada arriba. *Solución*: $x^2 + 18x + 81 = x^2 + 2bx + b^2$ donde podemos ver que $2b = 18$ y $b^2 = 81$ así tenemos que $b = 9$. Por lo que la factorización queda: $x^2 + 18x + 81 = (x+9)^2$

Nota: también se hubiera podido resolver utilizando el método anterior, ya que se buscan don números que multiplicados den 81y sumados den 18, así que los dos números son r=9 y s=9.

2.) Factorizar $x^2 - 24x + 144$ utilizando la fórmula de producto notable anterior.

Solución : $x^2 - 24x + 144 = x^2 + 2bx + b^2$ donde podemos ver que $2b = -24$ y $b^2 = 144$ así tenemos que $b = 12$. Por lo que la factorización queda: $x^2 + -24x + 144 = (x + 12)^2$

3). Determinar si el trinomio $x^2 + 10x + 16$ es un cuadrado perfecto, en caso de que lo sea factorizarlo.

Solución : Notamos que $2b = 10$, un posible candidato sería $b = 5$, pero $b^2 \neq 16$, por lo que $x^2 + 10x + 16$ no es un cuadrado perfecto.

2.6.3 FACTORIZACIÓN DE DIFERENCIA DE CUADRADOS

Hay trinomios que pueden factorizarse directamente usando el producto notable: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1). Factorizar $x^2 - 25$

Solución : Observamos que el polinomio no tiene término en x, y además el término independiente es un cuadrado, así que el polinomio es de la forma $x^2 - 25 = x^2 - b^2$ donde $b = 5$, de acuerdo a la fórmula de producto notable tenemos que la factorización queda: $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Nota: También se puede factorizar el polinomio utilizando la regla general vista anteriormente, por lo que podemos escribir el polinomio:
$x^2 - 25 = x^2 + 0x - 25 = (x + b)(x + c)$, buscamos dos números que multiplicados den 25 y sumados den 0. Dichos números son $b = 5$ y $c = -5$. Así que $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

2). Factorizar $w^2 - 121$

Solución : Observamos que el polinomio no tiene término en w, y además el término independiente es un cuadrado, así que el polinomio es de la forma $w^2 - 121 = w^2 - b^2$

donde $b = 11$, de acuerdo a la fórmula de producto notable tenemos que la factorización queda: $x^2 - 121 = (x+11)(x-11)$

2.6.4 FACTORIZACIÓN POR AGRUPAMIENTO:

La clave de la factorización por agrupación es la ley distributiva $(a+b)c = ac + bc$ teniendo en cuenta que a, b, c pueden ser cualquier expresión algebraica. Para poder ilustrar mejor como se realiza, veamos los siguientes ejemplos:

1) Factorizar $3z^2 + 10z + 3$

Solución : Para resolver el ejercicio, optaremos por escribir 10z como 9z+z, así

$$3z^2 + 10z + 3 = 3z^2 + (9z + z) + 3 = (3z^2 + 9z) + (z+3) = 3z(z+3) + (z+3) = (3z+1)(z+3)$$

2). Factorizar $8xz - 4xy - 14z + 7y$

Solución : $8xz - 4xy - 14z + 7y = (8xz - 4xy) + (-14z + 7y) = 4x(2z - y) - 7(2z - y)$
$= (4x - 7)(2z - y)$

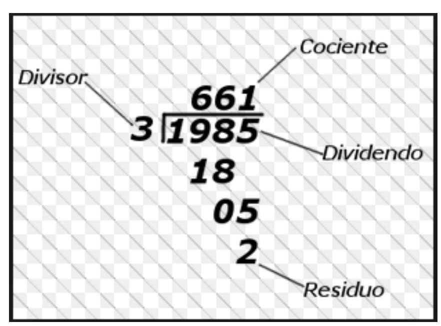
2.7 DIVISIÓN

Recordemos que cuando tenemos una fracción, podemos simplificarla cancelando los factores comunes en el numerador y en denominador.

Propiedad de la cancelación en la división:

Para cualesquiera números reales a, b, c tales que $b \neq 0, c \neq 0$ $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$. Podemos dividir monomios utilizando esta misma propiedad.

NOTA:



2.7.1 División de monomios:

Ejemplos:

1. $Dividir\ x^3\ entre\ x^2$

$Solución: \frac{x^3}{x^2} = \frac{x^2 x}{x^2} = x$

$2. Dividir\ a^2b^2\ entre\ ab$

$Solución: \dfrac{a^2b^2}{ab} = ab$

$3. Dividir\ -119m^7n^5\ entre\ 7m^5n^5$

$Solución: \dfrac{-119m^7n^5}{7m^5n^5} = \dfrac{-119}{7}m^2$

$4. Dividir\ -425p^8q^7r^6\ entre\ 5p^6q^7r$

$Solución: \dfrac{-425p^8q^7r^6}{5p^6q^7r} = -85p^2qr^5$

$5. Dividir\ 25a^mb^mc^m\ entre\ -5abc$

$Solución: \dfrac{25a^mb^mc^m}{-5abc} = -5a^{m-1}b^{m-1}c^{m-1}$

2.7.2 División de un polinomio por un monomio:

$1. Dividir\ 35p^4m + 75p^2m^3\ entre\ 5p^2m$

$Solución: \dfrac{35p^4m + 75p^2m^3}{5p^2m} = \dfrac{35p^4m}{5p^2m} + \dfrac{75p^2m^3}{5p^2m} = 7p^2 + 15m^2$

$2. Dividir\ -9mnx^3 + 15m^2n^2x^2 - 3mn\ entre\ -3mn$

$Solución: \dfrac{-9mnx^3 + 15m^2n^2x^2 - 3mn}{-3mn} = \dfrac{-9mnx^3}{-3mn} + \dfrac{15m^2n^2x^2}{-3mn} + \dfrac{-3mn}{-3mn} = 3x^3 - 5mnx^2 + 1$

2.7.3División de un polinomio por otro polinomio:

Reglas para dividir dos polinomios

1. Se ordenan ambos polinomios en orden descendente.

2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, con lo que se obtiene el primer término del cociente.

3. Al dividendo de le resta el producto del divisor por el primer término de cociente y se obtiene un primer residuo.

4. Se divide el primer término de este residuo entre el primer término del divisor, con lo que se obtiene el segundo término del cociente.

5. Se procede de manera similar hasta obtener el residuo cero o un polinomio de grado menor que el divisor.

6. Comprobar el resultado verificando que: cociente*divisor+residuo=dividendo

Ejemplo:

1. *Dividir* $5x-7x^2+12x^3-9$ *entre* $3x^2-4+5x$

Solución :

Escribimos los polinomios en la caja de la división en orden descendente de acuerdo al grado de x

$$\begin{array}{rll} & 4x & \\ 3x^2+5x-4\,) & 12x^3-7x^2+5x-9 & \leftarrow Calcular\ 12x^3 \div 3x^2 = 4x \\ & 12x^3-20x^2+16x & se\ resta\quad 4x\left(3x^2+5x-4\right) \\ & ------------ & \\ & -27x^2+21x-9 & \leftarrow Primer\ residuo \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & 4x-9 & \\ 3x^2+5x-4\,) & 12x^3-7x^2+5x-9 & \leftarrow Calcular\ -27x^2 \div 3x^2 = -9 \\ & 12x^3-20x^2+16x & \\ & ------------ & \\ & -27x^2+21x-9 & se\ resta\quad 9\left(3x^2+5x-4\right) \\ & 27x^2+45x-36 & \\ & ---------- & \\ & 66x-45 & \leftarrow Como\ el\ grado\ del\ residuo\ es\ de\ menor\ grado\ que\ el\ del \\ & & divisor\ el\ proceso\ termina \end{array}$$

Comprobación :

$$(4x-9)\left(3x^2+5x-4\right)+66x-45=\left(12x^3-7x^2-61x+36\right)+66x-45=12x^3-7x^2+5x-9$$

2. $Dividir\ 4x^3-1\ entre\ 2x+1$

Solución:

Escribimos los polinomios en la caja de la división en orden descendente de acuerdo al grado de x, además de poner ceros para las potencias de x que no aprecen en el dividendo

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad 2x^2 \\
2x+1\overline{\big)\,4x^3+0x^2+0x-1} \quad \leftarrow \textit{Calcular } 4x^3 \div 2x = 2x^2 \\
\quad -4x^3-2x^2 \qquad\qquad \textit{se resta} \quad 2x^2(2x+1) \\
\quad -------------- \\
\qquad\quad -2x^2+0x-1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad 2x^2-x \\
2x+1\overline{\big)\,4x^3+0x^2+0x-1} \quad \leftarrow \textit{Calcular } -2x^2 \div 2x = -x \\
\quad -4x^3-2x^2 \qquad\qquad \textit{se resta} \quad 2x^2(2x+1) \\
\quad -------------- \\
\qquad\quad -2x^2+0x-1 \\
\qquad\qquad 2x^2+x \qquad\qquad \leftarrow \textit{Restar } -x(2x+1) \\
\qquad\quad ---------- \\
\qquad\qquad\qquad x-1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad 2x^2-x+\frac{1}{2} \\
2x+1\overline{\big)\,4x^3+0x^2+0x-1} \quad \leftarrow \textit{Calcular } x \div 2x = 2 \\
\quad -4x^3-2x^2 \\
\quad -------------- \\
\qquad\quad -2x^2+0x-1 \\
\qquad\qquad 2x^2+x \\
\qquad\quad ---------- \\
\qquad\qquad\quad x-1 \\
\qquad\qquad -x-\frac{1}{2} \qquad \leftarrow \textit{Restar } \frac{1}{2}(2x+1) \\
\qquad\qquad -------- \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{3}{2} \qquad\qquad \leftarrow \textit{El residuo } -\frac{3}{2} \textit{ es de grado } 0 \textit{ que es menor que el grado del divisor} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{el proceso termina}
\end{array}
$$

Comprobación:

$$\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)(2x+1)-\frac{3}{2}=\left(4x^3+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}=4x^3-1$$

2.7.4 División sintética:

En el caso de la división de un polinomio entre un divisor de la forma $(x-a)$ existe una manera práctica de obtener el cociente y el residuo, llamada **división sintética**.

Supongamos que tenemos el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$

El procedimiento es el siguiente:

a) Ordenar los coeficientes del polinomio del dividendo en orden decreciente. A la izquierda o derecha del primer renglón, se coloca el valor de la constante c.

b) El tercer renglón se forma bajando el primer coeficiente de $P(x)$, luego se multiplica sucesivamente cada coeficiente del tercer renglón por c, y se coloca el resultado en el segundo renglón a partir de la segunda posición y este resultado se suma al coeficiente correspondiente en el primer renglón y se coloca el resultado en la siguiente posición del tercer renglón:

$$\begin{array}{l|ccccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & cb_2 & \ldots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-1} & r \end{array} \quad \text{donde } b_1 = a_{n-1} - ca_n$$

Para que quede más claro veamos algunos ejemplos:

1. Hagamos la división de $(2x^2 - 9x - 1) \div (x - 3)$

Observemos como se realiza la división sintética:

$$\begin{array}{l|ccc} 3 & 2 & -9 & -1 \\ & \downarrow & & \\ \hline & 2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{l|ccc} 3 & 2 & -9 & -1 \\ & \downarrow & 6 & \\ \hline & 2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{l|ccc} 3 & 2 & -9 & -1 \\ & \downarrow & 6 & \\ \hline & 2 & -3 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|ccc} 3 & 2 & -9 & -1 \\ & \downarrow & 6 & -9 \\ \hline & 2 & -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ccc} 3 & 2 & -9 & -1 \\ & \downarrow & 6 & -9 \\ \hline & 2 & -3 & -10 \end{array}$$

De los números obtenidos 2 y -3 son los valores de los coeficientes del cociente, el cual tendrá un grado menor que el dividendo; -10 es el residuo de la división. Por lo que la división queda:

$$(2x^2 - 9x - 1) \div (x - 3) = 2x - 3 - \frac{10}{x - 3}$$

2. Calcular $(3x^3 + 17x^2 - 8x - 12) \div (x + 6)$

Solución:

Tenemos que $(x-a)=(x+6)$ así que $a=-6$

$$\begin{array}{r|rrrr} -6 & 3 & 17 & -8 & -12 \\ & \downarrow & -18 & 6 & 12 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

El cociente es $3x^2-x-2$ y el residuo es 0. Es decir $(3x^3+17x^2-8x-12)\div(x+6)=3x^2-x-2$

3. Calcular $(x^4+7x+5)\div(x+2)$

Solución:

Tenemos que $(x-a)=(x+2)$ así que $a=-2$. Como x^4+7x+5 no tiene términos en x^3 ni en x^2 , escribimos 0 en los lugares que ocupan los coeficientes de estos dos términos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ & \downarrow & -2 & 4 & -8 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -1 & 7 \end{array}$$

El cociente es x^3-2x^2+4x-1 y el residuo es 7. Es decir $(x^4+7x+5)\div(x+2)=x^3-2x^2+4x-1+\dfrac{7}{x+2}$.

2.8 Expresiones racionales o fraccionarias.

Una expresión racional es el cociente de dos polinomios en una o más variables en el que el denominador no es el polinomio 0. Por ejemplo:

$$2xy+9x, \frac{x-y}{x+y}, \frac{(2x-1)^2}{(x+3)^3}, \frac{3xz^5+x^3+3y}{5xy-z}$$

Al trabajar con expresiones racionales, frecuentemente es necesario evaluarlas, es decir, sustituir variables por números.

Ejemplos:

1) Evaluar la siguiente expresión cuando $x=-3yx=-2$ en la expresión $\dfrac{8x^2+3x+7}{x^2-4}$

Solución: Para $x=-3$ se tiene $\dfrac{8(-3)^2+3(-3)+7}{(-3)^2-4}=\dfrac{72-9+7}{9-4}=\dfrac{70}{5}=14$,

Para $x=-2$ el denominador x^2-4 se anula, por lo que la expresión no está definida.

2) Evaluar $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}}$ para $x=2yx=3$

Solución 1: $\dfrac{2^{-1}+3^{-1}}{((2)(3))^{-1}}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{3+2}{6}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=5$

Solución 2: Simplificar la expresión algebraica

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}=\frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{1}{xy}}=x+y \quad \text{y evaluar} \quad \frac{2^{-1}+3^{-1}}{((2)(3))^{-1}}=2+3=5.$$

2.8.1 Simplificación de expresiones racionales

Los polinomios se parecen a los números enteros en el sentido de que se pueden sumar, restar y también factorizar. Se sabe que el cociente de números enteros no siempre es un número entero; así mismo, el cociente de polinomios no siempre es un polinomio.

Se sabe que un número racional, cociente de dos enteros, se puede simplificar y escribir en su mínima expresión. En particular, cuando el numerador y el denominador son múltiplos de un mismo entero, se puede cancelar dicho número sin modificar el número racional; por ejemplo,

$$\frac{55}{22}=\frac{(11)(5)}{(11)(2)}=\frac{5}{2}$$

En general, cuando en una expresión racional tanto el numerador como el denominador tienen un factor común un número o un polinomio, se puede cancelar dicho factor sin alterar la expresión racional, salvo en el hecho de que la nueva expresión quizá pueda evaluarse en números en los que la original no estaba definida.

Ejemplos:

1) Simplifica $\dfrac{w-1}{w^2-1}$

Solución: $\dfrac{w-1}{w^2-1}=\dfrac{w-1}{(w-1)(w+1)}=\dfrac{1}{w+1}$

2) Simplifica $\dfrac{w^2+w}{6w^3-2w}$

Solución: $\dfrac{w^2+w}{6w^3-2w}=\dfrac{w(w+1)}{2w(3w^2-1)}=\dfrac{w+1}{2(3w^2-1)}$

2.9 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones. Las expresiones de cada lado de la igualdad se llaman *miembros* de la ecuación; por ejemplo: en la igualdad $2x^2+3x=x^2+2x+6$, $2x^2+3x$ es el primer miembro y x^2+2x+6 es el segundo miembro.

Se llama ecuación de primer grado con respecto a una incógnita si dicha ecuación no contiene potencias de esa incógnita superiores a la primera potencia, también es llamada ecuación lineal.

Resolver una ecuación significa encontrar los valores de la variable que hacen verdadera la ecuación, es decir que hacen que se cumpla la igualdad; estos valores se conocen como *soluciones* o *raíces* de la ecuación.

Tomemos la ecuación del ejemplo anterior, $2x^2+3x=x^2+2x+6$, $x=2$ es una solución:

$$2(2)^2+3(2)=(2)^2+2(2)+6$$
$$8+6=4+4+6$$
$$14=14$$

En este caso $x = 0$ no es una solución:

$$2(0)^2 + 3(0) = (0)^2 + 2(0) + 6$$
$$0 + 0 = 0 + 0 + 6$$
$$0 \neq 6$$

Para encontrar dichas soluciones, se deja sola la variable en un lado de la ecuación. Esto se llama *despejar* la variable en una ecuación.

NOTA: recordemos que las variables o incógnitas obedecen las reglas de operación que cumplen los números reales.

Que se obtiene al transformar la ecuación original en ecuaciones equivalentes (ecuaciones que tienen la misma solución) hasta obtener el valor de la variable x.

El procedimiento ordinario para la resolución de las ecuaciones lineales consiste en trasladar al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen a $\boldsymbol{x}$ como factor, y al segundo miembro todas las constantes. Por lo que se obtendría una ecuación de la forma:

$$ax + b = 0, (a \neq 0)$$

La única solución de la ecuación lineal es:

$$x = \frac{-b}{a}$$

En caso de que $a = 0$ tiene una infinidad de soluciones si $b = 0$, en caso contrario ($b \neq 0$) no tiene solución.

Ejemplos:

1) Resolver la ecuación: $(x+1)(2x+3) = 2x^2 + 8x + 5$

Solución :

Desarrollando el producto del miembro izquierdo, se obtiene:

$$2x^2 + 3x + 2x + 3 = 2x^2 + 8x + 5$$

Siguiendo las recomendaciones para facilitar la solución, trasladar al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen x

$$2x^2 + 3x + 2x - 2x^2 - 8x = 5 - 3$$

Reduciendo los términos semejantes.

$$-3x = 2$$

$$x = \frac{-2}{3}$$

Así, que el conjunto solución de la ecuación es $\left\{\frac{-2}{3}\right\}$

2) Determinar la raíz de la ecuación siguiente:

$$\frac{3}{x-5} = \frac{4}{2-3x}$$

Solución: Primero multiplicamos ambos términos por $(2-3x)(x-5)$ simplificando, se obtiene:

$$3(2-3x) = 4(x-5)$$

$$6-9x = 4x-20$$

Siguiendo las recomendaciones para facilitar la solución, trasladar al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen x

$$-9x-4x = -20-6$$

$$-13x = -26$$

$$x = \frac{-26}{-13} = 2$$

3) Despejar x en la ecuación

$$ay^2x + y^2 - 2ay + 2ax = ayx - 4ay + 2a + ax + 2ay^2 + y - 1$$

Solución: Este problema no nos debe generar confusión, simplemente es seguir las indicaciones, primero trasladaremos al primer miembro todos los términos en x y al segundo todos los que no lo contienen, con lo cual se obtiene:

$$ay^2x + 2ax - ayx - ax = -y^2 + 2ay - 4ay + 2a + 2ay^2 + y - 1$$

Factorizando los términos con x, resulta:

$$(ay^2 + 2a - ay - a)x = -y^2 + 2ay - 4ay + 2a + 2ay^2 + y - 1$$

Después de factorizar el término del lado derecho y simplificar la solución es:

$$x=\frac{y^2(2a-1)-y(2a-1)+2a-1}{a(y^2-y+1)}$$

Podemos observar que en el numerador el término $(2a-1)$ se puede factorizar, esto ayudará a simplificar nuestro resultado.

$$x=\frac{(2a-1)(y^2-y+1)}{a(y^2-y+1)}$$

$$x=\frac{2a-1}{a}$$

Despeje de fórmulas

Una fórmula es una igualdad matemática que tiene como objetivo casi siempre el calcular alguna cantidad. Aquí tenemos una lista de varias fórmulas importantes:

1. $d=V_o t+\frac{1}{2}at^2$
2. $F=G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
3. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ movimiento circular
4. $B=\frac{\mu_0 I}{2R}$ ley de Ampere
5. $\frac{F_N}{mg}=a+g$
6. $\frac{P_1V_1}{m_1T_1}=\frac{P_2V_2}{m_2T_2}$
7. $P_0=\frac{mgh}{t}$
8. $e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}$
9. $PV=\frac{m}{M}RT$

Dada una fórmula, entonces nuestro problema es despejar una de las cantidades participantes dentro de la fórmula. Lo cual nos resultará fácil ya que hemos estado trabajando con el despeje a lo largo de los ejemplos anteriores.

Por ejemplo:

1) De la fórmula $v=\frac{d}{t}$, despejar la distancia d.

Solución :

Como $v=\frac{d}{t}$ multiplicando ambos lados por t tenemos que

$d=vt$, así logramos despejar lo que se pedía.

2) De la fórmula de la aceleración $a=\frac{v-v_0}{t}$ despejar la velocidad v.

Solución :

Primero multiplicamos ambos lados de la igualdad por t de donde obtenemos

$at=v-v_0$

Luego sumamos a ambos lados de la igualdad v_0 de donde obtenemos

$at+v_0=v$

Que era lo que se pedía.

3) De la fórmula de la fuerza gravitacional $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ despejar la masa m_1.

Solución :

Primero multiplicamos ambos lados de la igualdad por r^2, de donde obtenemos

$r^2F=Gm_1m_2$

Luego dividimos ambos lados de la igualdad por G donde

$$\frac{r^2F}{G}=m_1m_2$$

Después dividimos ambos lados de la igualdad por m_2 donde

$$\frac{r^2F}{Gm_2}=m_1$$

De esta manera ha quedado despejada la masa m_1

Continuación de ejemplos:

4) Raúl visitó Atenas en los juegos Olímpicos de 2004. Al llegar al aeropuerto rentó un automóvil compacto por \$750 diarios, más \$5 por kilómetro recorrido. Si Raúl tiene un presupuesto de \$1,800 por día, ¿cuantos kilómetros podrá recorrer cada día?

Solución: El costo de recorrer x kilómetros, considerando la renta del auto, es:

$$C(x) = 750 + 5x$$

Como el presupuesto de Raúl es de \$1800, se tiene:

$$1800 = 750 + 5x$$

$$1800 - 750 = 5x$$

$$x = \frac{1800 - 750}{5}$$

$$x = 210$$

Supongamos que x es la edad de Gerardo; la primera condición indica que Jorge tiene una edad tres veces mayor, es decir, la edad de Jorge es $3x$. El mismo Jorge tenía una edad de $3x - 5$ hace cinco años. La edad de Gerardo dentro de 10 años será $x + 10$. La segunda condición del problema se puede escribir como:

$$3x - 5 = 2(x + 10)$$

Reuniendo los términos con la variable en el lado izquierdo y simplificando, se tiene:

$$3x - 5 = 2x + 20$$

$$3x - 2x = 20 + 5$$

$$x = 25$$

Es decir, Gerardo tiene 25 años y Jorge 75.

Ejercicios y Problemas

1. Considera las ecuaciones $x + 1 = 2; x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$ ¿Tienen el mismo conjunto solución?

Primero resolveremos la ecuación $x + 1 = 2$

Siguiendo las recomendaciones para facilitar la solución, trasladar al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen x

$x = 2 - 1 = 1$

Lo mismo haremos con la ecuación $x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$

Siguiendo las recomendaciones para facilitar la solución, trasladar al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen x

Como observamos el término $\frac{1}{x-1}$ se puede eliminar.

$x = 2 - 1 = 1$

Por lo tanto, tienen el mismo conjunto de soluciones $\{1\}$

2. Encuentra el valor de x que resuelve las siguientes ecuaciones:

$x + 3 = 2x - 5$

Siguiendo las recomendaciones para facilitar la solución, trasladar al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen x

$x - 2x = -5 - 3$

$-x = x - 8; x = 8$

3. Carlos y Juan pueden levantar una barda en seis horas trabajando continuamente. Juan trabaja dos veces más rápido que Carlos. Si solamente trabaja Carlos, ¿En cuánto tiempo terminará de levantar la barda?

$x(Carlos) + y(Juan) = 1(Barba) \quad pero \quad y = 2x, sustituyendo.$

$x + 2x = 1$

$3x = 1$ por lo tanto $x = \frac{1}{3}$

Para construir una barda necesitas seis horas, si en esas seis horas Carlos solo hace $\frac{1}{3}$ de la barda necesitara **18 horas** para poder hacer la barda completa.

4. Un estudiante gasta \$500 en herramientas necesarias para producir velas de diferentes tipos. Si para elaborar cada vela requiere además de \$8 en material y si la puede vender en \$15. ¿Cuántas velas debe producir para obtener una ganancia de \$550?

Para resolver fácilmente este problema, solo es cuestión de plantear la ecuación.

$15x(\textit{por cada vela gana } \$15) - 8x(\textit{material}) - 500(\textit{herramienta}) = 550$

Siguiendo las recomendaciones para facilitar la solución, trasladar al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen x

$15x - 8x = 550 + 500$

$7x = 1050,\ x = \frac{1050}{7} = 150$

Para tener una ganancia de **$550** debe vender **150 velas.**

5. Juan invierte una cantidad al 7% de interés anual, invierte el doble de esa cantidad al 6% anual. Su ingreso total anual por concepto de intereses generados por las dos inversiones es de $44,650. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

Para resolver fácilmente este problema, solo es cuestión de plantear la ecuación.

$x = \textit{Cantidad que invierte Juan al } 7\% \textit{ de interés.}$

$2x = \textit{Segunda cantidad que invierte Juan pero al } 6\% \textit{ de interés.}$

$(0.07)x + (0.06)(2x) = 44650$

$0.07x + 0.12x = 44650$

$0.19x = 44650,\ x = \frac{44650}{0.19} = 235000$

$235000 \textit{ es la cantidad invertida al } 7\%$

$470000 \textit{ es la cantidad invertida al } 6\%$

6. Susana tiene una hermana que es 27 centímetros más alta que ella; si la hermana mide 1.45 metros ¿Qué estatura tiene Susana?

Solución:

Como la estatura de la hermana de Susana está dada en metros, debemos escribir 27cm=0.27m, por lo que el planteamiento quedaría como: $S + 0.27 = 1.45$ donde S representa la estatura de Susana.

Para encontrar el valor de S sumamos el opuesto o inverso aditivo de 0.27 a ambos lados de la ecuación y simplificamos la expresión:

$$S+0.27-0.27=1.45-0.27$$
$$S=1.18$$

Por lo tanto, Susana tiene una estatura de 1.18 metros. Al resolver una ecuación, hay que verificar que la solución obtenida satisfaga la ecuación original, esto para detectar posibles errores.

Comprobación:

Si $S=1.18$

$S+0.27=1.18+0.27=1.45$

7. Resolver $y-\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}$

Solución :

Sumamos $\frac{2}{3}$ (inverso aditivo de $-\frac{2}{3}$) de cada lado de la ecuación

$$y-\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}$$

$$y-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{2}{9}$$

Comprobación : $y-\frac{2}{3}=\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}$

8. Un tanque contiene 560 litros de agua y se está llenando a razón de 45 litros por minuto con agua de otro tanque que contiene 100 litros. ¿En cuánto tiempo tendrán la misma cantidad de agua los dos tanques?

Solución :

Tenemos que el primer tanque en el minuto x tiene $560+45x$ litros, el otro tanque tiene $1100-45x$, hay que igualar las expresiones y encontrar x que cumpla la igualdad:

$560+45x=1100-45x$, empezaremos por pasar las variables a un solo lado de la ecuación y lo demás al otro lado:

$$\begin{aligned} 560+45x &= 1100-45x \\ 45x+45x &= 1100-560 \\ 90x &= 540 \\ x &= \frac{540}{90} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los dos tanques tienen la misma cantidad de agua en 6 minutos.

Comprobación:

Lado izquierdo: $560+45x=560+45(6)=560+270=830$

Lado derecho: $1100-45x=1100-45(6)=1100-270=830$

Para quitar los denominadores de una ecuación, multiplíquese ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\begin{aligned} 560+45x &= 1100-45x \\ 45x+45x &= 1100-560 \\ 90x &= 540 \\ x &= \frac{540}{90} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

2.10 Sistemas de ecuaciones

Ahora deseamos encontrar las soluciones comunes de dos ecuaciones de primer grado, digamos

$\begin{matrix} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{matrix}$ donde a,b,c,d,e,f son números. De donde tenemos una de las siguientes situaciones:

- Hay una sola solución, es decir las rectas se cortan en un punto.
- No hay solución, es decir las rectas son paralelas y distintas.
- Hay infinidad de soluciones, es decir las dos ecuaciones representan la misma recta.

El método para resolver sistemas de ecuaciones consiste en manipular las ecuaciones para obtener una ecuación con una sola incógnita, encontrar su valor y sustituirlo en alguna de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.

Los métodos más comunes para realizar lo anterior son los siguientes:

2.10.1 Método de sustitución

En este método se saca el valor de una de las incógnitas en función de la otra.

Los pasos a seguir son:

1. Despejar de una de las ecuaciones una de las incógnitas.

2. Sustituir este valor en la otra ecuación.

3. Simplificar y despejar la incógnita que quede.

Veamos el ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones

$$3x + 7y = 23 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$x - 5y = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Despejando (2) tenemos: $x = 6 + 5y \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

Sustituyendo (3) en (1): $3(6 + 5y) + 7y = 23$

$$18 + 15y + 7y = 23$$
$$18 + 22y = 23$$
$$22y = 23 - 18$$
$$22y = 5$$
$$y = \frac{5}{22}$$

Sustituyendo en (3): $x = 6 + 5\left(\frac{5}{22}\right) = 6 + \frac{25}{22} = \frac{157}{22}$

Verificamos: $3\left(\frac{157}{22}\right) + 7\left(\frac{5}{22}\right) = \frac{471}{22} + \frac{35}{22} = \frac{506}{22} = 23$

2.10.2 Método de igualación

En este método despejamos una de las incógnitas en ambas ecuaciones, la misma en las dos ecuaciones; para después hacer la igualdad y despejar la otra incógnita.

Veamos el ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + 3y = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$x - 2y = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$x = 7 - 3y$$
$$x = 2 + 2y$$

Igualamos: $$7 - 3y = 2 + 2y$$

Resolviendo:

$$7 - 2 = 2y + 3y$$
$$5 = 5y$$
$$y = 1$$

Sustituyendo en (1): $$x + 3(1) = 7$$

$$x = 7 - 3$$
$$x = 4$$

Verificando: $4 - 2(1) = 2$

2.10.3 Método de suma y resta

Este método como su nombre lo indica, se utilizará la suma y/o resta para encontrar el valor de la incógnita. Los pasos son:

1. Multiplicar ambos miembros de las dos ecuaciones por números tales que los coeficientes de una misma incógnita sean iguales.

2. Si los coeficientes son de signo contrario, hay que sumar las ecuaciones miembro a miembro; si son del mismo signo, hay que restarlos.

3. Resolver la ecuación que resulte.

4. Sustituir el valor encontrado en una de las ecuaciones más sencillas y despejar la otra incógnita.

5. Verificar los valores de las incógnitas sustituyéndolos en ambas ecuaciones.

Para que queden más claros los pasos anteriores veamos un ejemplo:

1. Ejemplo, resolver el sistema:

$$3x+2y=23\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2x+3y=27\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Multiplicando (1) por 3: $9x+6y=69\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

Multiplicando (2) por 2: $\underline{4x+6y=54}\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

Restando (4) de (3): $5x \quad =15$

Dividiendo por 5: $x=3$

Sustituyendo el valor de x en (1) ó (2): $y=7$

2. Ejemplo, resolver el sistema:

$$x+y=17\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$x-y=9\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Sumando (1) y (2): $2x \quad =26\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

Dividiendo por 2: $x=13$

Sustituyendo el valor de x en (1) ó (2): $y=4$

Problemas

1. Cinco veces cierto número es igual a 75.

Solución :

Sea $x=número\ buscado$

$5x=75\ veces\ el\ número$

Entonces tenemos que:

$$5x=75$$
$$x=\frac{75}{5}$$
$$x=15$$

2. La suma de dos números es 39, uno de los números es 3 más 5 veces el otro número. ¿Cuáles son los números?

Sea $x = uno\ de\ los\ números\ buscados$

$3+5x = el\ otro\ número\ buscado$

Entonces

$(3+5x)+x=39$ reduciendo

$$3+6x=39$$
$$6x=36$$
$$x=6$$

Por lo que los números buscados son: $x=6$ y $3+5x=3+5(6)=33$

2.11 Ecuaciones de segundo orden

Se llama ecuación de segundo orden a toda ecuación que, reducida a su más simple expresión, el grado del polinomio es 2. Es decir, es de la forma $ax^2+bx+c=0$ donde $a \neq 0$.

Para determinar la solución (llamadas también raíces o ceros del polinomio) podemos factorizar (productos notables) la ecuación anterior o utilizando la formula general. La cuál es $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

EJEMPLOS:

1). Resolver $x^2-x-20=2x-2$

Solución :

Primero tenemos que pasar todo de un solo lado

$$x^2-x-2x-20+2=0$$

$$x^2-3x-18=0$$

La cuál se puede resolver de dos maneras:

a) FACTORIZANDO

Esto es utilizando las herramientas vistas en productos notables, veamos un ejemplo: $x^2-3x-18=(x-6)(x+3)=0$ esto es $(x-6)=0$ o bien $(x+3)=0$ lo que da como soluciones $x=6$ o $x=-3$

b) FÓRMULA GENERAL

Esta forma es utilizando la fórmula general, identificando $a=1, b=-3\ y\ c=-18$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-18)}}{2(1)}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{3\pm 9}{2}$$

De donde $x=\frac{3+9}{2}=\frac{12}{2}=6$ y $x=\frac{3-9}{2}=-\frac{6}{2}=-3$

Que como pudimos observar ambos procedimientos nos dieron los mismos resultados, lo que nos da la libertad de elegir cualquiera de los dos.

2.12 Desigualdades

Dados los números reales, la relación de orden permite decidir entre dos números diferentes cual es mayor o menor.

notación $>;<;$

$x>y$ x es mayor que y

$x<y$ x es menor que y

$\leq;\geq$ (en este caso se tiene la posibilidad que los números sean iguales)

$x\geq y$ x es mayor o igual que y ($x>y$ o $x=y$)

$x\leq y$ x es menor o igual que y ($x<y$ o $x=y$)

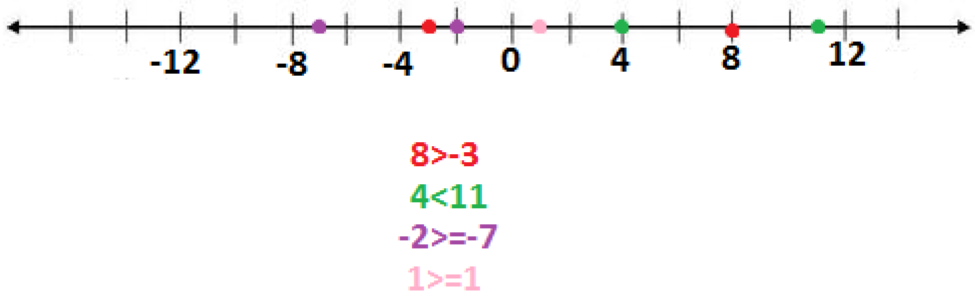
Ejemplo:

$8>-3$ (ocho es mayor que menos tres)

$4<11$ (cuatro es menor que 11)

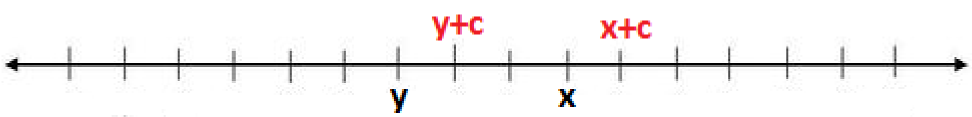
$-2\geq -7$ (menos dos es mayor o igual que menos siete)

$1\geq 1$ (uno es mayor o igual que uno)

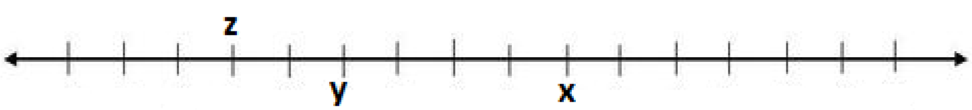


Propiedades

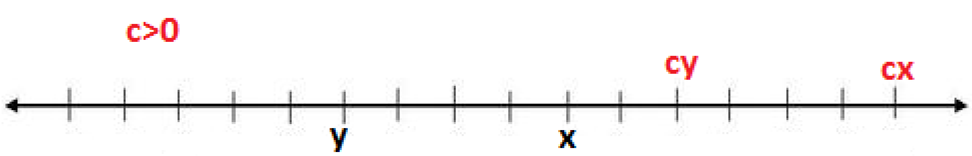
a.) Si $x > y$ entonces $x + c > y + c$ es decir la desigualdad se mantiene al sumar a ambos lados el mismo valor.



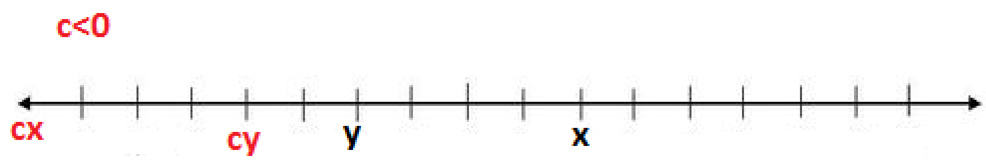
b.) Si $x > y$ y $y > z$ entonces $x > z$ es decir si *x* es mayor que *y* y éste es mayor que *z* se tiene que *x* es mayor que *z*.



c.) Si $x > y$ y $c > 0$ entonces $cx > cy$ es decir si *x* es mayor que *y*, al multiplicar por un número positivo ambos lados, la desigualdad se preseva.



d.) Si $x > y$ y $c < 0$ entonces $cx < cy$ es decir si *x* es mayor que *y*, al multiplicar por un número positivo ambos lados, la desigualdad se invierte.



Ejemplos:

1) $3x > -5$

2) $-x+3<-2x$

3) $\frac{3x-1}{2}+5 \geq -2+\frac{4x}{3}$

Una desigualdad en la que aparecen variables también se conoce como inecuación. Resolver una desigualdad o inecuación algebraica significa encontrar sus soluciones; es decir, los valores numéricos que cuando sustituyen a las variables, se cumple de desigualdad.

Para resolver una inecuación se deja sola la variable en un miembro de la inecuación. Esto se llama despejar la variable de la inecuación. Para esto se utilizan las propiedades de orden mencionadas anteriormente (teniendo atención sobre todo en la propiedad d)

EJEMPLOS:

1) Resolver la desigualdad $5z-9<-12$

Solución :

Sumamos 9 a ambos miembros de la desigualdad

$5z-9<-12$

$5z-9+9<-12+9$

$5z<-3$

Ahora multiplicamos ambos miembros de la desigualdad resultante por $\frac{1}{5}$ que por ser positivo no altera el sentido de la desigualdad

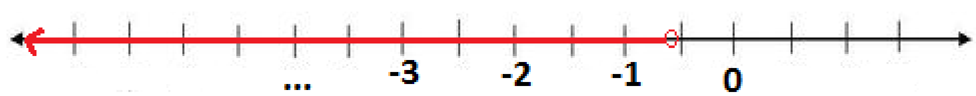
$5z<-3$

$$\frac{1}{5}(5z) < \frac{1}{5}(-3)$$

$$z < -\frac{3}{5}$$

Por lo tanto las soluciones de la desigualdad son todos los números menores que $-\frac{3}{5}$;

es decir, los números $z \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right)$



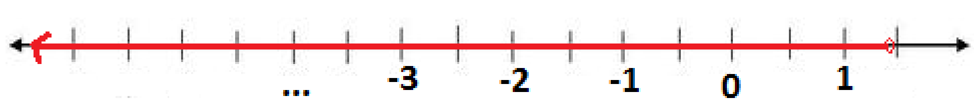
2) Resolver $5x - 2 < -2x + 8$

Solución:

$$5x - 2 < -2x + 8$$
$$5x + 2x < 2 + 8$$
$$7x < 10$$
$$x < \frac{10}{7}$$

El conjunto solución es:

$$\left(-\infty, \frac{10}{7}\right)$$



2) Resolver

Solución :

Sumamos 5 a ambos miembros de la desigualdad

$$\frac{7}{9}x-5+5>-2+5$$

$$\frac{7}{9}x>3$$

Ahora multiplicamos ambos miembros de la desigualdad resultante por $\frac{9}{7}$ que por ser positivo no altera el sentido de la desigualdad

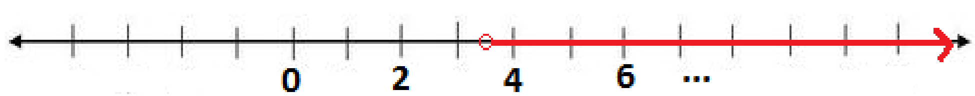
$$\frac{7}{9}x>3$$

$$\frac{9}{7}\left(\frac{7}{9}x\right)>\frac{9}{7}(3)$$

$$x>\frac{27}{7}$$

Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad son todos los números mayores que $\frac{27}{7}$;

es decir, los números



3) Resolver $\frac{3x-1}{2}+5\geq -2+\frac{4x}{3}$

Solución :

$$\frac{3x-1}{2}+5\geq -2+\frac{4x}{3}$$

$$6\left(\frac{3x-1}{2}-4\right)\geq 6\left(-2+\frac{4x}{3}\right)$$

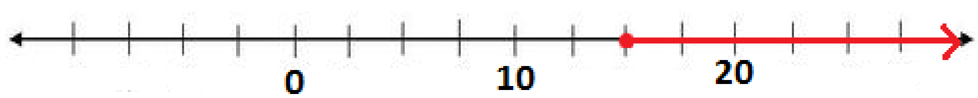
$$9x-3-24\geq -12+8x$$

$$9x-8x\geq 27-12$$

$$x\geq 15$$

El conjunto solución :

$$[15,¥)$$



4) Resolver $8+5x\leq 3x-7\leq x+1$

Solución :

Hay que resolver dos ecuaciones simultáneamente $8+5x\leq 3x-7$ y $3x-7\leq x+1$

$$8+5x\leq 3x-7 \qquad \text{y} \qquad 3x-7\leq x+1$$

$$5x-3x\leq -7-8 \qquad\qquad 3x-x\leq 1+7$$

$$2x\leq -15 \qquad\qquad 2x\leq 8$$

$$x\leq \frac{-15}{2} \qquad\qquad x\leq \frac{8}{2}=4$$

Así que hemos encontrado $z\in\left(-\infty,\frac{-15}{2}\right)\cap\left(-\infty,4\right]$, es decir, la solución $z\in\left(-\infty,\frac{-15}{2}\right)$

5) Resolver

$$-2<4-\frac{2}{3}x\leq 5$$

Solución:

$$-2-4<4-\frac{2}{3}x-4\leq 5-4$$

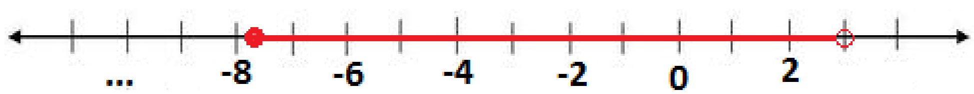
$$-6<-\frac{2}{3}x\leq 1$$

$$-2\left(-\frac{3}{2}\right)>-\frac{2}{3}x\left(-\frac{3}{2}\right)\geq 5\left(-\frac{3}{2}\right)\quad nota\text{: } las\ desigualdades\ se\ invierten$$

$$3>x\geq -\frac{15}{2}$$

El conjunto solución :

$$\left[-\frac{15}{2},3\right)$$



6) Resolver $\frac{2}{3x}<5$

Solución :

$$\frac{2}{3x}>5$$

cuidado! para multiplicar por $3x$ *es necesario checar el signo*

1*er caso* $3x>0$(*en este caso* $x>0$)

$$\frac{2}{3x}(3x)>5(3x)$$

$$2>5(3x)$$

$$2>15x$$

$$\frac{15}{2}>x$$

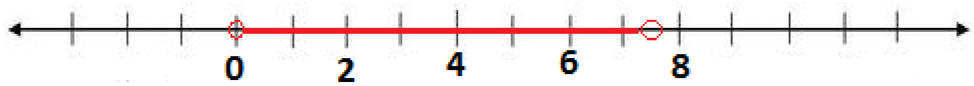
$luego\ x > 0 \quad y \quad x < \frac{15}{2}\ conjunto\ solución\ \left(0, \frac{15}{2}\right)$

$2^o caso: 3x < 0\ (en\ este\ caso\ x < 0)$

$Si\ x < 0,\ \frac{2}{3x} < 0\ por\ lo\ que\ \frac{2}{3x}\ no\ puede\ ser\ mayor\ que\ 5$

$Por\ lo\ que\ el\ conjunto\ solución\ es\ \left(0, \frac{15}{2}\right)$

$nota: x \neq 0$



7) Resolver $\frac{-12}{x-5} < 4$

$Solución:$

$\frac{-12}{x-5} < 4\ pasar\ todos\ los\ elementos\ al\ lado\ izquierdo\ de\ la\ desigualdad$

$\frac{-12}{x-5} - 4 < 0$

$\frac{-12-4(x-5)}{x-5} < 0$

$\frac{-12-4x+20}{x-5} < 0$

$\frac{8-4x}{x-5} < 0$

Dicha razón será negativa si numerador y denominador tienen signos diferentes:

1er caso: $8-4x > 0 \quad y \quad x-5 < 0$

$8-4x > 0 y x-5 < 0$

$por\ lo\ que\ x\ debe\ de\ satisfacer\ 2 > x\ y\ x < 5$

$conjunto\ solución: x < 2\ (-\infty, 2)$

2 caso: $8-4x < 0 \quad y \quad x-5 > 0$

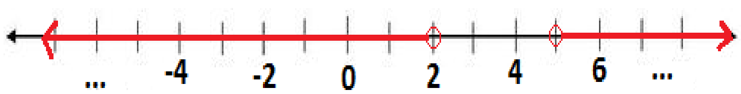
$8-4x<0 \ y \ x-5>0$

por lo que x debe de satisfacer $2<x \ y \ x>5$

conjunto solución : $x>5 \ (5,\infty)$

Conjuntando ambas soluciones 1er caso: $(-\infty,2)\cup(5,\infty)$

Casos	Solución
$8-4x>0 \quad y \quad x-5<0$	$(-\infty,2)$
$8-4x<0 \quad y \quad x-5>0$	$(5,\infty)$



Material electrónico

http://www.i-matematicas.com/recursos0809/1ciclo/algebra/

https://www.youtube.com/watch?v=TDA8iqCB6hk

2.12.1 Desigualdades y valor absoluto

El valor absoluto se utiliza en la resolución de inecuaciones, veamos unos ejemplos.

EJEMPLOS:

1. Resolver $|x-3|\leq 9$, utilizaremos una de las definiciones equivalentes: $-9\leq x-3\leq 9$ entonces sumando 3 en ambos lados de la desigualdad y aplicando las propiedades de los números reales $-9+3\leq x-3+3\leq 9+3$ tenemos $-6\leq x\leq 12$

2. Resolver $|5x-2|<5$, utilizando definición equivalente

$$-5<5x-2<5$$
$$-5+2<5x-2+2<5+2$$
$$-3<5x<7$$
$$\frac{-3}{5}<x<\frac{7}{5}$$

Es decir $x\in\left(\frac{-3}{5},\frac{7}{5}\right)$

3. Resolver $|3y + 2| \leq y + 4$

Hay que verificar dos casos:

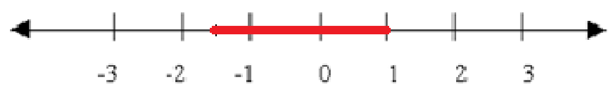
Si $y + 4 < 0$, no hay solución.

Si $y + 4 \geq 0$, entonces $y > -4$, es decir $y \in [-4,\infty)$ y utilizando definición equivalente

$$\begin{array}{rcl} -(y+4) \leq 3y+2 & & 3y+2 \leq y+4 \\ -y-4 \leq 3y+2 & & 3y-y \leq 4-2 \\ -4-2 \leq 3y+y & \text{y} & 2y \leq 2 \\ -6 \leq 4y & & y \leq 1 \\ \frac{-6}{4} \leq y & & \end{array}$$

Así que la solución y tiene que cumplir: $y > -4$, $\frac{-6}{4} \leq y \leq 1$. Notemos que si $\frac{-6}{4} \leq y \leq 1$, también satisface $y > -4$, es decir $y \in \left[\frac{-6}{4}, 1\right]$

4. Anteriormente encontramos que la solución de $|3y + 2| \leq y + 4$ es $y \in \left[\frac{-6}{4}, 1\right]$ veámoslo en la recta



GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1 PLANO CARTESIANO:

"[...] y pensé que, para considerarlas mejor en particular, debía suponerlas en líneas, porque no encontraba nada más simple y que más distintamente pudiera yo representar a mi imaginación y mis sentidos; pero que, para retener o comprender varias juntas, era necesario que las explicase en algunas cifras, las más cortas que fuera posible; y que, por este medio, tomaba lo mejor que hay en el análisis geométrico y en el álgebra, y corregía así todos los defectos de una por el otro."

En 1632 se publica *El discurso del Método,* texto de René Descartes. Es en este texto donde usualmente se atribuye el origen de la geometría analítica. El extracto citado muestra la motivación del autor de *combinar* la geometría y el álgebra. Vemos que atribuye a la geometría y su representación la manifestación más simple y clara para la imaginación y los sentidos, pero, él dice, que hacía falta el uso de cifras para poder explicarlas.

El juego, alguna vez denominado, *Submarinos* consiste, primero en acomodar una flota de submarinos en el plano; después uno procede a adivinar la posición de los submarinos del oponente.
¿Cómo indicarle al oponente la posición exacta en que creemos tiene colocado alguno de sus submarinos? Para esto se recurre a "cuadricular" el plano, de este modo dotamos a ciertos puntos del tablero con una "dirección" unívoca determinada por una letra y un número.
En la geometría analítica se tiene el mismo objetivo: Dotar de una

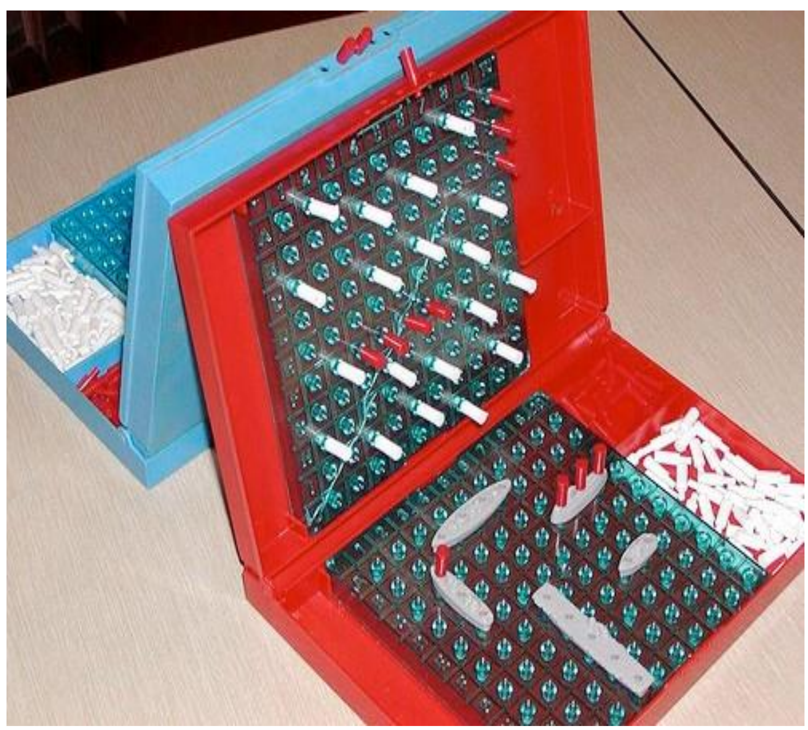


Figura 1

descripción algebraica unívoca a nuestros objetos matemáticos. A los puntos, de coordenadas; a las curvas, de ecuaciones; a las regiones, de desigualdades, etc.

Construcción del Plano

Se puede pensar en un plano como la abstracción de una superficie plana, como una hoja de papel o un pizarrón. Dentro de las propiedades deseables de esta abstracción esta que contenga más de un lugar en el espacio, es decir más de un punto; poder "realizar" medidas dimensionales longitudinales arbitrariamente grandes; entre otras.

Esta abstracción es el objeto matemático en el cual se satisfacen los 5 *postulados* de Euclides. Con los 5 postulados obtenemos propiedades deseables para trabajar y la seguridad de que estamos trabajando en la abstracción de una hoja de papel o el pizarrón.

Informalmente los primeros 4 nos dicen que:

Dados dos puntos siempre podemos trazar una línea *recta*. Todo segmento de recta se puede extender arbitrariamente. Se puede trazar una circunferencia sin importar su centro y magnitud del radio. Al interceptarse dos líneas rectas cualesquiera, existe una única medida que haga congruentes a los 4 ángulos que se forman.

El quinto postulado, un poco más complicado, es usualmente expresado como: Dada una línea recta y un punto que no yace en ella, se puede trazar una única línea recta que pase por este punto y que, sin importar cuánto se prolonguen las dos líneas rectas en cuestión, jamás se interceptarán.

El plano cartesiano, también llamado plano de coordenadas rectangulares, es el plano usual que toma como referencia dos rectas reales perpendiculares; usualmente se considera una recta horizontal, llamada eje x o eje de las abscisas, y otra vertical, llamada eje y o eje de las ordenadas. Ambas rectas se interceptan en un punto llamado origen, por lo que el plano queda dividido en cuatro regiones llamadas cuadrantes, los cuales se enumeran I, II, III y IV; en la figura los podemos visualizar.

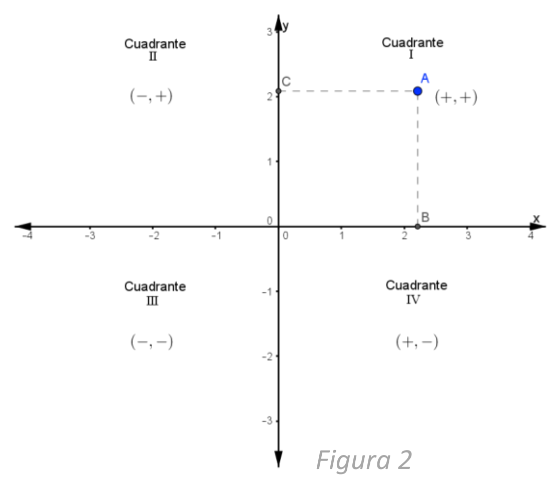


Figura 2

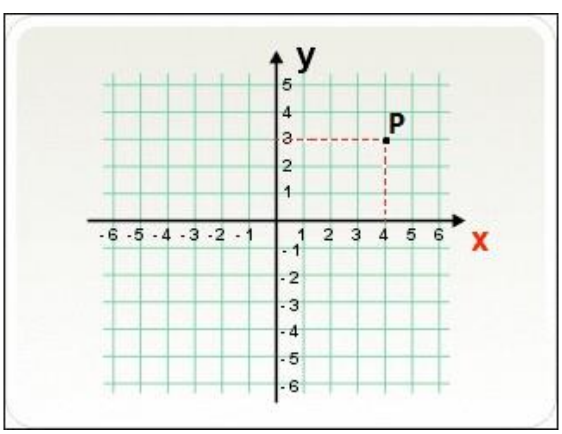


Figura 3

Como ya mencionamos arriba, el eje x es horizontal y su dirección positiva es hacia la derecha, es decir, los números positivos quedan a la derecha del origen y los negativos a la izquierda; mientras que el eje y es vertical y su dirección positiva es hacia arriba, es decir, los números positivos quedan hacia arriba del origen y los negativos hacia abajo.

Lo que procede, es identificar a cada punto de nuestro plano con un elemento del ***Producto Cartesiano*** *®×®*. Recordemos que este conjunto es

$$R \times R = \{(a,b) : a \in R \ y \ b \in R\}$$

Es decir, el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados de números reales.

Se considera un punto del plano, digamos *A*, se traza una recta paralela, recta punteada, al eje *y.* Por construcción ésta habrá de intersectarse con el eje *x* en un punto *B*. (Figura 4)

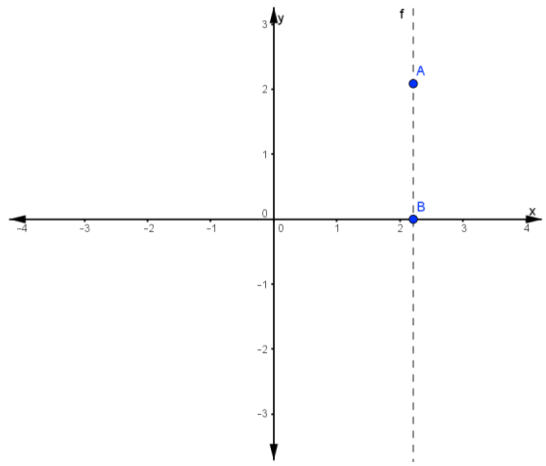


Figura 4

Es necesario recordar que nuestros ejes fueron originalmente identificados con el conjunto de los números reales, así que el punto *B* tiene asociado un número real *a*. Este valor es la *primera entrada* del par coordenado asociado a *A*, también se le nombra a este valor como ***abscisa****.* (Figura 5)

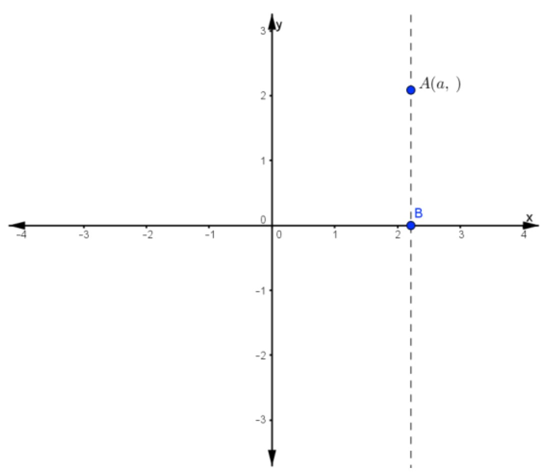


Figura 5

Se repite un proceso similar, ahora con una recta paralela al Eje *x.* (Figura 6)

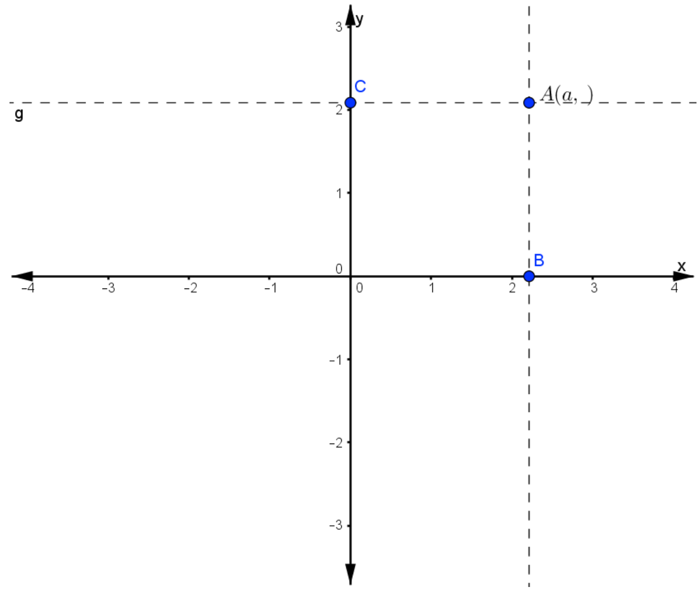


Figura 6

Se usa ahora el número real asociado al punto *C* y este es el valor, *b*, será la *segunda entrada* del par ordenado asociado a A, también se le nombra a este valor como ***ordenada.*** (Figura 7)

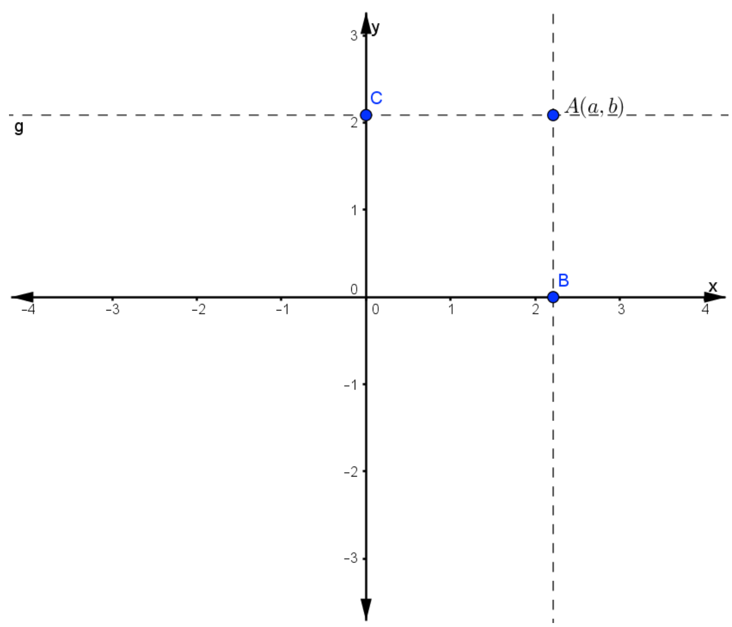


Figura 7

Ahora se asigna a cada pareja de números reales, (a,b), un punto A del plano, de la siguiente manera: en el eje x localizamos el número real a y por él trazamos una recta paralela al eje *y*;

después en el eje y, localizamos el número real b y trazamos por él una recta paralela al eje x; por último, identificamos a la pareja (a, b) con el punto A en el que las dos rectas se cortan.

EJEMPLOS:

1. Localizar en el plano al punto $Q(-2, -5)$.

$Solución$: Localizamos al número -2 en el eje x, el punto en dicho eje que está 2 unidades a la izquierda del origen, y por él trazamos una recta vertical. Después localizamos al número -5 en el eje y, es decir, el punto que está 5 unidades abajo del origen, y por él trazamos una recta horizontal. El punto donde se cortan las dos rectas que trazamos corresponde al punto Q:

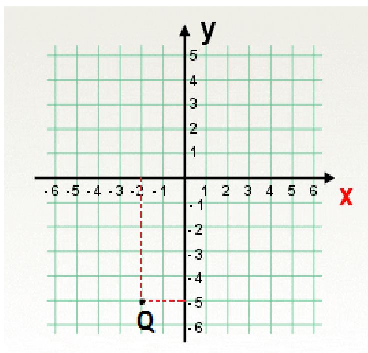


Figura 8

NOTA:

Las parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales sólo en caso de que $a = c$ y $b = d$. Por lo que si $a \neq b$, entonces las parejas (a, b) y (b, a) son distinto puntos en el plano (Veamos el ejemplo 3).

2. Localizar en el plano los puntos $A(5,2), B(-4,2)$ y $C(3, -3)$.

$Solución$:

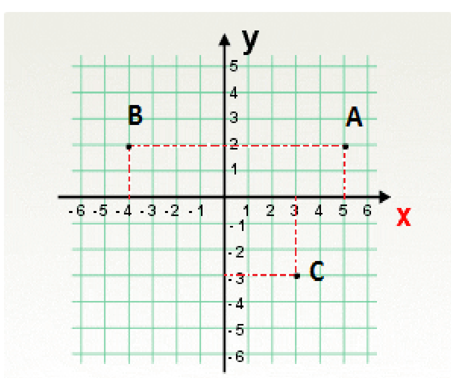


Figura 9

3. Localizar en el plano los puntos $P(2,-3)\ y\ Q(-3,2)$.

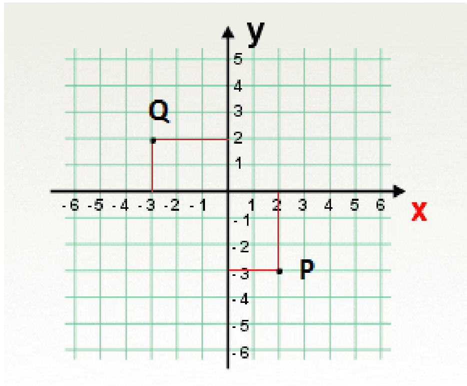
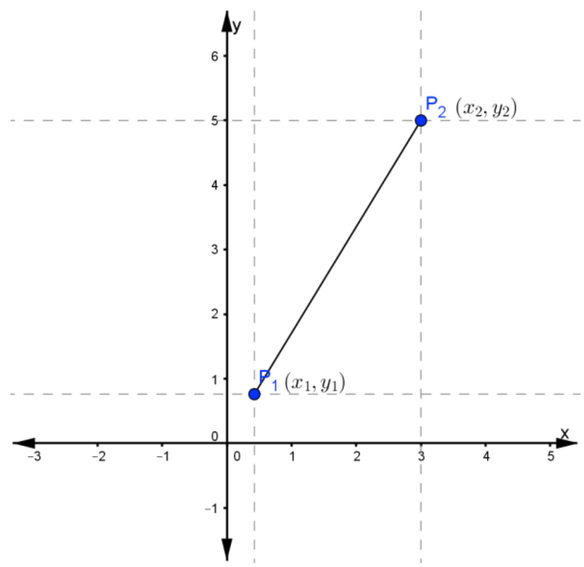


Figura 10

3.2 Distancia entre dos puntos

Trabajar con el plano cartesiano nos permite generar información de nuestros objetos matemáticos de una forma distinta al plano euclidiano no coordenado. Por ejemplo, el plano cartesiano nos permite, a través de operaciones aritméticas y algebraicas obtener conocimiento sobre la distancia de dos puntos sin recurrir a mecanismos físicos sobre el plano, como lo es la regla y el compás.

Se entenderá por distancia entre dos puntos la longitud del segmento de recta que une a dichos puntos.



Sean $P_1(x_1, y_1)\ y\ P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera en el plano, para obtener la **distancia entre dos puntos** utilizaremos la siguiente fórmula:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLOS:

1. Encontrar la distancia entre los puntos $P(3,5)\ y\ Q(-1,6)$.

$Solución$:

Tenemos que $x_1 = 3, x_2 = -1, y_1 = 5\ y\ y_2 = 6$. Utilizamos la fórmula anterior y sustituimos las coordenadas de los puntos y obtenemos:

$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left((-1) - 3\right)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{16 + 2} = \sqrt{17}$

Por lo que la distancia de $P\ a\ Q$ es $\sqrt{17} \approx 4.12$

2. Encontrar la distancia entre los puntos $A(-2,4)\ y\ Q(1,-7)$

Tenemos que $x_1 = -2, x_2 = 1, y_1 = 4\ y\ y_2 = -7$. Utilizando la fórmula para la distancia obtenemos:

$$d(A,B) = \sqrt{(1-(-2))^2 + ((-7)-4)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-11)^2} = \sqrt{9+121} = \sqrt{130}$$

Por lo que la distancia de $A\ a\ B$ es $\sqrt{130} \approx 11.40$

3.3 División de un segmento a una razón dada.

En esta discusión nuestros segmentos tendrán dirección, esto es, serán ***segmentos dirigidos***. El segmento $\overline{P_1P_2}$ es el segmento que tiene por punto inicial a P_1 y por punto final a P_2; mientras que $\overline{P_2P_1}$ es el segmento que tiene por punto inicial a P_2 y punto final P_1. Es importante tener cuidado con este detalle porque no es lo mismo que P divida el segmento $\overline{P_1P_2}$ en razón 1/3 como en la Figura 12.

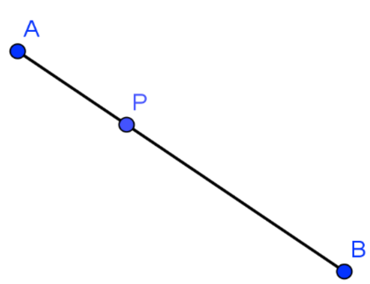


Figura 12

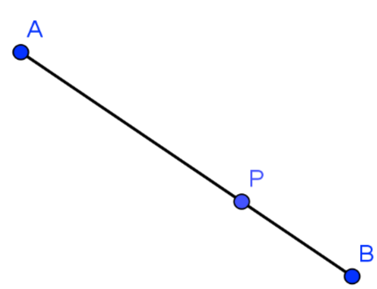


Figura 13

Que divida el segmento $\overline{P_2P_1}$ en razón 1/3 como en la Figura 13.

Antes de proseguir, dediquemos un momento a entender que significa que *P* divida al segmento $\overline{P_1P_2}$ en razón *r*; hecho también expresado como

$\overline{P_1P}:\overline{PP_2} = r$

o

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

Supongamos que tenemos el segmento $\overline{AB}$ (Figura 14):

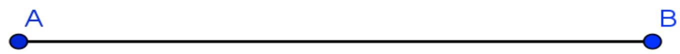


Figura 14

Si se afirma que el punto *P* divide al segmento $\overline{AB}$ en razón $\frac{1}{4}$, esto **NO** significa que $\overline{AP}$ sea un cuarto del segmento como se muestra en la Figura 15.

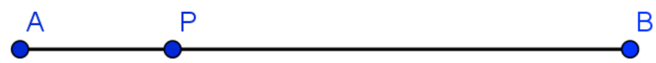


Figura 15: Interpretación Errónea

$r = \frac{1}{4}$ significa que $\overline{AB}$ es 4 veces el tamaño de $\overline{AP}$ como se muestra en la Figura 16:

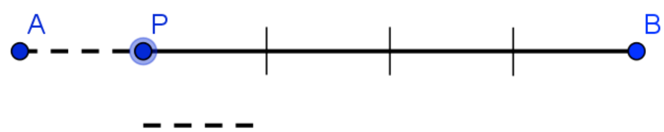
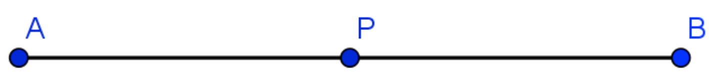


Figura 16

Un caso particular es cuando la razón $r = 1$ ¿Cómo interpretamos esto? Significa que la proporción entre $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ es uno, esto es, $\overline{AP}$ cabe *exactamente* una vez en $\overline{PB}$ (Figura 17):



$\overline{AB}$

Ahora se verá cómo en nuestro plano coordenado, podemos encontrar el punto que divide a un segmento en una razón dada.

Primero, veamos cual es la aproximación de la geometría clásica a este problema a partir de la situación de la figura 18:

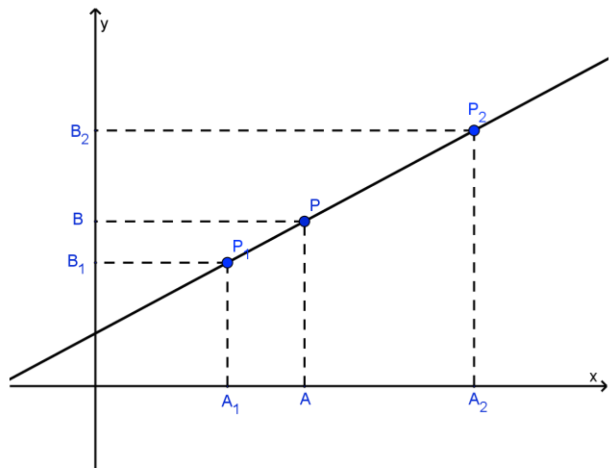


Figura 18

Donde se tiene que los ejes, las rectas *x* y *y* son perpendiculares. La geometría clásica nos asegura que:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

Y análogamente que:

$$\frac{\overline{B_1B}}{\overline{BB_2}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

Adecuando este resultado a las herramientas de la geometría analítica, podemos asignarle coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) a los puntos P_1 y P_2, respectivamente y (x, y) al punto. P Con esto sabemos que la medida de $\overline{A_1A}$ está dada por $|x - x_1|$; y la de $\overline{A_1A}$ por $|x_2 - x|$. Pero como deseamos dotar de dirección nuestro segmento usaremos las expresiones sin valores absolutos, esto es, $x - x_1$ y $x_2 - x$. Con esto obtenemos lo siguiente:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad (1)$$

Un análisis análogo se puede hacer para B_1, B y B_2, lo que nos produciría la siguiente ecuación:

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \qquad (2)$$

Con estas ecuaciones obtenemos el siguiente

Teorema: *Sean* $P_1(x_1, y_1)$ *y* $P_2(x_2, y_2)$ *puntos en el plano y* r *un número real distinto de -1. Entonces el punto* $P(x, y)$*, determinado por las ecuaciones:*

$$x = \frac{x_1 - r x_2}{1+r},$$

$$y = \frac{y_1 - r y_2}{1+r}.$$

Divide al segmento $\overline{P_1 P_2}$ *en la razón r.*

Las ecuaciones del teorema se obtienen de manipular las ecuaciones (1) y (2).

Si lo que se tiene son los tres puntos colineales y se desea saber en qué razón divide uno al segmento de los otros dos, se usan las ecuaciones (1) y (2) directamente, esto es:

Corolario. *Sean* $P_1(x_1, y_1)$ *,* $P_2(x_2, y_2)$ *y* $P(x, y)$ *tres puntos colineales en el plano. Entonces el punto* p *divide al segmento* $\overline{P_1 P_2}$ *en la razón* r *de terminada por cualquiera de las ecuaciones (1) o (2).*

Obsérvese que la razón r puede tomar valores negativos, y esto sucede cuando el punto P **no** pertenece al segmento, esto es una situación como en la figura 19:

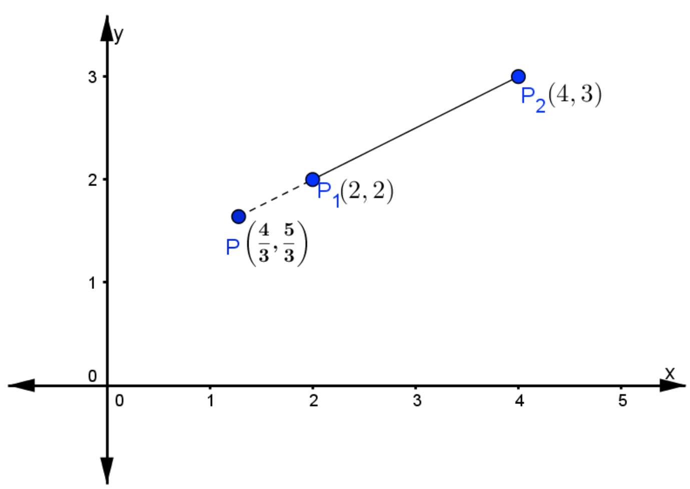


Figura 19

En donde el Punto P está dividiendo en una razón $r = -\frac{1}{4}$ al segmento $\overline{P_1 P_2}$.
Comprobemos este hecho:

$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{\frac{4}{3}-2}{4-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{4}$$

Es muy importante subrayar que estamos suponiendo que los tres puntos son colineales, lo que se puede verificar calculando la razón para las ordenadas:

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{\frac{5}{3}-2}{3-\frac{5}{3}}=-\frac{1}{4}$$

Si ambos valores no coincidieran, entonces estaríamos trabajando con una terna de puntos **no** colineales.

EJEMPLOS:

1). Encontrar las coordenadas del punto R que divide al segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, con extremos $P(6,-2)$ y $Q(7,5)$ en la razón $\frac{5}{7}$.

$Solución$:

Tenemos que

$$R\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r},\frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)=R\left(\frac{6+\left(\frac{5}{7}\right)7}{1+\frac{5}{7}},\frac{-2+\left(\frac{5}{7}\right)5}{1+\frac{5}{7}}\right)$$

$$\frac{6+\left(\frac{5}{7}\right)7}{1+\frac{5}{7}}=\frac{6+5}{\frac{12}{7}}=\frac{11}{\frac{12}{7}}=\frac{77}{12}$$

y

$$\frac{-2+\left(\frac{5}{7}\right)5}{1+\frac{5}{7}}=\frac{-2+\frac{25}{7}}{\frac{12}{7}}=\frac{\frac{11}{7}}{\frac{12}{7}}=\frac{11}{12}$$

2). Encontrar las coordenadas del punto R que divide al segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, con extremos $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$y $Q(2,5)$ en la razón $\frac{7}{4}$.

$Solución$:

Tenemos que

$$R\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r},\frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)=R\left(\frac{0+\left(\frac{7}{4}\right)2}{1+\frac{7}{4}},\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)5}{1+\frac{7}{4}}\right)$$

$$\frac{0+\left(\frac{7}{4}\right)2}{1+\frac{7}{4}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{11}{4}}=\frac{28}{22}=\frac{14}{11}$$

y

$$\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)5}{1+\frac{7}{4}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{35}{4}}{\frac{11}{4}}=\frac{\frac{37}{4}}{\frac{11}{4}}=\frac{37}{11}$$

3). ¿En qué razón divide el punto de coordenadas $(-1,-7)$ al segmento $\overrightarrow{PQ}$ que une a los puntos $P(-3,-15)$y $Q(2,5)$?

$Solución$:

Tenemos que $R\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r},\frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)$, por lo que debemos despejar r para encontrar la razón que cumple lo que se pide, por lo que podemos utilizar

$\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{-3+r2}{1+r}=-1$ o $\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{-15+r5}{1+r}=-7$

Si tomamos $\frac{-3+r2}{1+r}=-1$ tenemos

$-3+2r=-(1+r)$

$$-3+r2=-1-r$$

$$2r+r=-1+3$$

$3r=2$ entonces $r=\frac{2}{3}$

Veamos qué pasa si ahora tomamos $\frac{-15+r5}{1+r}=-7$ tenemos:

$$-15+5r=-7(1+r)$$

$$-15+5r=-7-7r$$

$$5r+7r=-7+15$$

$$12r=8$$

$r=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ que es lo que habíamos obtenido.

Así la razón en la que se divide el segmento es $\frac{2}{3}$

Pendiente de una recta

Seguramente en su haber cotidiano habrá escuchado decir que *"Que pendiente tan pronunciada"* acompañada de una imagen como la Fig. 20.

Fig. 20. Señal tránsito para una pendiente inclinada.

La RAE define pendiente como una cuesta (una subida o un camino inclinado, coloquialmente). Sin embargo, en la vida diaria se reserva la expresión solo si la cuesta es lo suficientemente inclinada de acuerdo a la percepción de cada uno. En geometría analítica es imposible ver monitos imaginarios subiendo una recta; pero las rectas pueden clasificarse en inclinadas y no inclinadas siguiendo algún punto de vista.

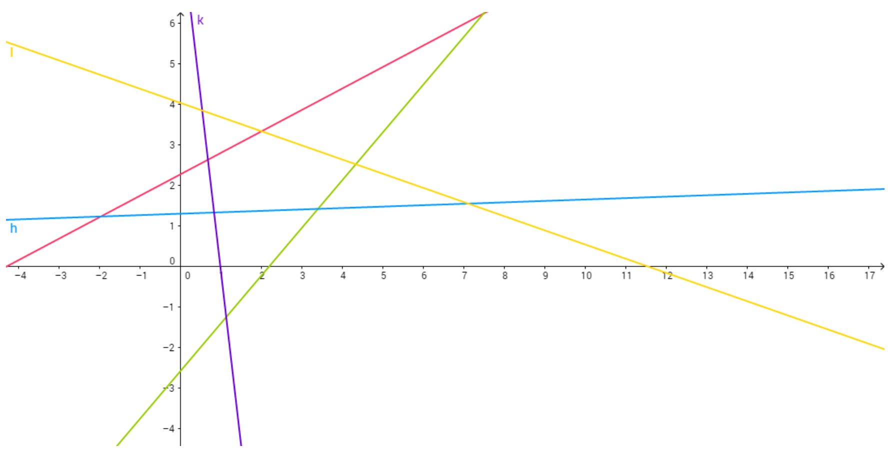


Fig. 11. Colección de rectas.

Si usted observa la Fig. 1, y juzga las rectas. Usted podría decir que la recta roja, morada, amarilla y verde están inclinadas y que la recta azul no lo está (o al menos no mucho). Sin embargo, en matemáticas se quiere ser tan preciso como sea posible. En ese sentido, en matemáticas es necesario dar una idea más general de pendiente.

Idea (Pendiente). La pendiente es una medida del grado de inclinación de la recta respecto al eje *x*.

¿Cuál es esa medida? Esa es la cuestión. Al igual que para la distancia entre dos puntos se empleó la idea de un triángulo rectángulo para aplicar el teorema de Pitágoras. La idea de pendiente puede apoyarse en esa idea. Considere dos puntos como se muestra en la fig3.

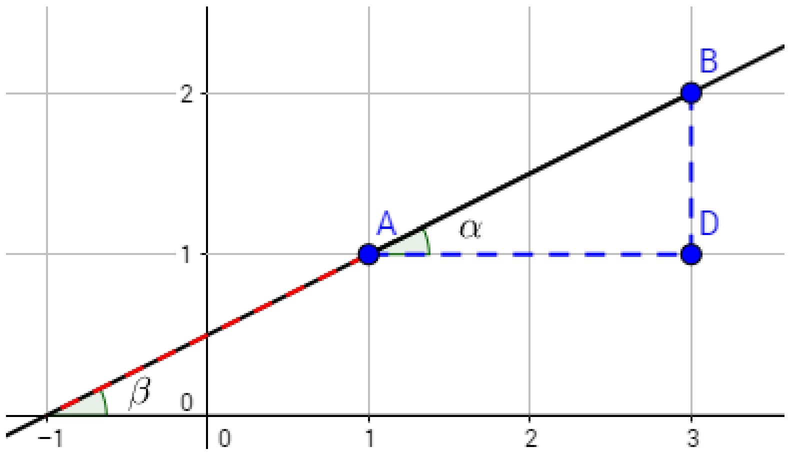


Fig. 22. Pendiente de una recta.

Observe que el grado de inclinación respecto al eje *x* es el mismo que el ángulo del triángulo formado por los puntos *A, B* y *D*. matemáticamente $\angle\alpha = \angle\beta$. ¿Habrá una forma de tener una medida del ángulo de inclinación $\angle\beta$? Mire el triángulo con más detenimiento. Note que puede conocer la longitud de los catetos (la base y la altura del triángulo). ¿Qué función trigonométrica relaciona los catetos con el ángulo? La **tangente**. Entonces se tiene la siguiente igualdad:

$$\tan(\beta) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Como sabrá para cada ángulo (entre $-\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$) hay una tangente, por lo que matemáticamente se puede usar como una medida del grado de inclinación. Si usted cambia por letras los números de los puntos *A* y *B*, es decir, $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ (recuerde que la letra es lo de menos. De hecho, a los autores de libros les gusta más usar la *"x"* y la *"y"*). El desarrollo algebraico terminaría como sigue

$$\tan(\beta) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}$$

El resumen de lo que se acaba de hacer está dado por la siguiente definición.

Definición (Pendiente). Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ dos puntos en el plano no alineados verticalmente. La pendiente de una recta *l*, usualmente denotada por *m*, es el cociente:

$$m = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Ejemplo 1 (Burdo cálculo de una pendiente). Considere los puntos $A\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ y $B\left(\frac{2}{3}, 4\right)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos? Aplicando (1.1) se tiene que:

$$m=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}=\frac{-\frac{1}{3}-4}{2-\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{13}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{13}{4}$$

Ejemplo 2. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(7,2)$ y $B(-2,3)$.

Solución:

Utilizando la expresión (1.1)

$$m=\frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}}=\frac{3-2}{-2-7}=-\frac{1}{9}$$

Ejemplo 3. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(-5,-2)$ y $B(-2,-2)$.

Solución:

Utilizando la expresión (1.1)

$$m=\frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}}=\frac{-2-(-2)}{-2-(-5)}=\frac{0}{3}=0$$

Ejemplo 4 (Ángulos). Considere los puntos $A\left(-1,-\frac{1}{5}\right)$ y $B\left(\sqrt{2},\frac{2}{3}\right)$ como se muestra en la Fig. 23.

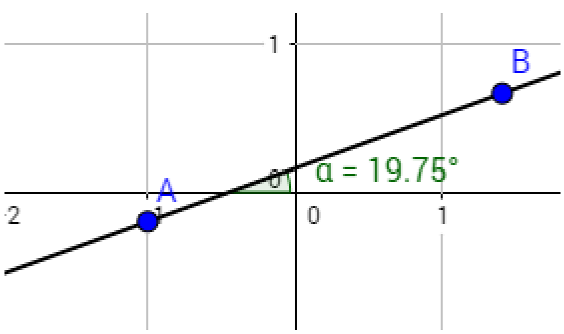


Fig. 23. Planteamiento del ejemplo de ángulos.

Si aplica (1.1) se tiene que:

$$m=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}=\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{-1-\sqrt{2}}=\frac{-\frac{13}{15}}{-1-\sqrt{2}}\approx 0.359$$

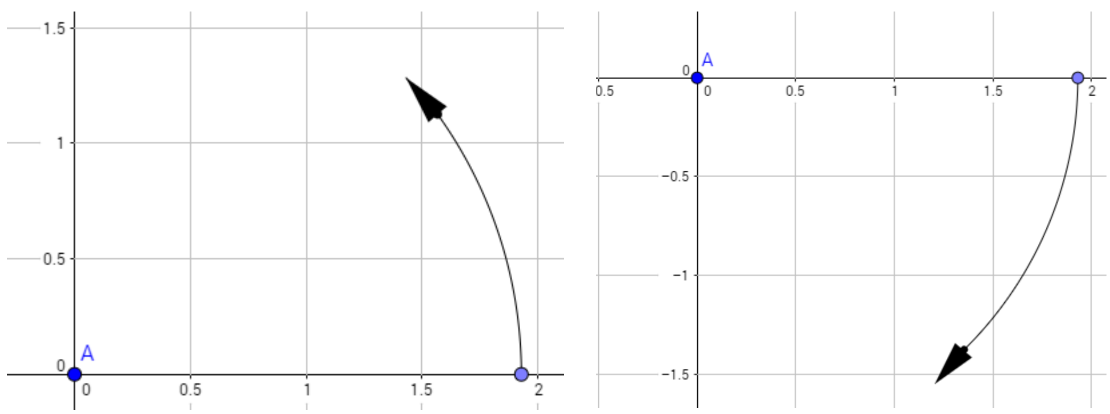
¿Pero cuál será el ángulo (o grado de inclinación) asociado a esa tangente? Para calcularla es necesario usar la función **arco tangente**[1]. La función arco tangente es aquella que devuelve el ángulo asociado (entre $-\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$) a cada tangente. Para el ejemplo se tiene que:

$$\arctan(0.359) \approx 0.345 \text{ radianes}$$

Con eso se tiene ya un grado de inclinación asociado; aunque quizá, usted se sienta más cómodo con grados en lugar de radianes. Basta con que haga la conversión usando una regla de tres[2] como sigue:

$$\frac{0.345 \text{ radianes} \times 180^{\circ}}{\pi \text{ radianes}} \approx 19.748^{\circ}$$

La interpretación del ángulo devuelto por la función arco tangente puede observase en la Fig. .



(b) Arco positivo (a) Arco negativo

Fig. 24.Interpretación del arco tangente. Cuando el arco tangente resulte positivo, el ángulo debe ser entendido en sentido anti-horario desde el eje x; mientras que cuando éste resulte negativo, debe ser entendido en sentido horario desde el eje x.

Ejemplo (El orden de los puntos no altera la pendiente). Quizá se vea en el conflicto de que punto escoger primero, en pensar a cuál punto llamará *A* y a cuál llamará *B*. ¡Este ejemplo le quiere decir "Don't worry! *Doesn't matter*". Considere los puntos $(2,4)$ y $(5,2)$ (no tienen asignado un orden para saber cuál es el punto A y cuál es el B). Suponga que usted elige a los puntos *A* y *B* con coordenadas $(2,4)$ y $(5,2)$, respectivamente. Por (1.1) se tiene:

---

[1] Matemáticamente la notación habitual es $\arctan(x)$; pero en la mayoría de las calculadoras científicas aparece como $\tan^{-1}(x)$ o simplemente como $\tan^{-1}$.

[2] [2]Recuerde que π radianes son 180°.

$$m=\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}=\frac{4-2}{2-5}=-\frac{2}{3}$$

Si se hubiera hecho la selección en el otro orden, se hubiera tenido:

$$m=\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}=\frac{2-4}{5-2}=-\frac{2}{3}$$

Note que se llegó al mismo resultado. En general no importa cuál sea su primer punto y cuál su segundo punto. La prueba general de lo que se acaba de ilustrar, yace en el siguiente hecho:

$$m=\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}=\frac{-\left(a_2-b_2\right)}{-\left(a_1-b_1\right)}=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$$

Ejemplo (¿Por qué no se puede aplicar la definición en puntos alineados verticalmente?). Note que gráficamente se tendría algo como lo que se muestra en la Fig. .

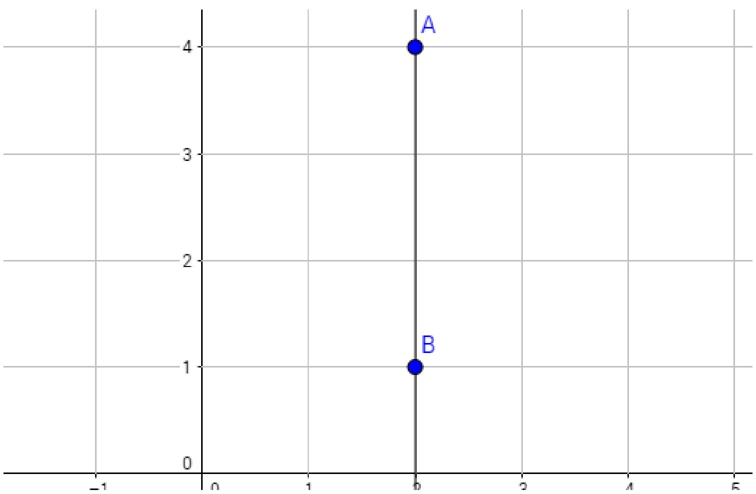


Fig. 25. Puntos alineados verticalmente.

Naturalmente, será imposible construir el triángulo como venía haciendo con anterioridad. Sin embargo, si hay un grado de inclinación. De hecho, el ángulo respecto al eje *x*, obviamente, es $\frac{\pi}{2}$.

¿Cuál es el problema entonces? La tangente es una división entre el cateto opuesto y el adyacente. Desafortunadamente el cateto adyacente desapareció (matemáticamente tiene longitud 0). Por lo que no es posible hacer el cociente:

$$\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}$$

De ahora en adelante, las rectas verticales serán tratadas de manera especial. ¿Por qué? Nos gustaría seguir usando la tangente para la pendiente.

Ejemplo (Colinealidad). A veces nos interesaría saber cuándo tres puntos están sobre la misma recta. Eso se puede saber con la pendiente. Considere los puntos de $A(1,3)$, $B(0,1)$ y $C(-1,2)$ como se muestra en Fig. 26.

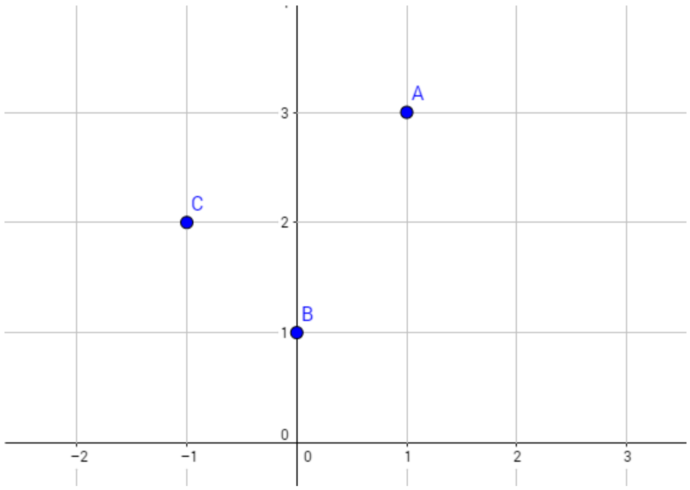


Fig. 26. Ejemplo de puntos no colineales.

Note que no son colineales. Si usted calcula la pendiente entre A y B, y la pendiente entre A y C, obtendrá lo siguiente:

$$m_{AB} = \frac{1-3}{0-1} = 2 \qquad m_{AC} = \frac{2-3}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

Observe que las pendientes resultaron ser distintas. Ahora, considere los puntos: $A(1,3)$, $B(0,1)$ y $C(-0.5,0)$ como se muestra en Fig. 27.

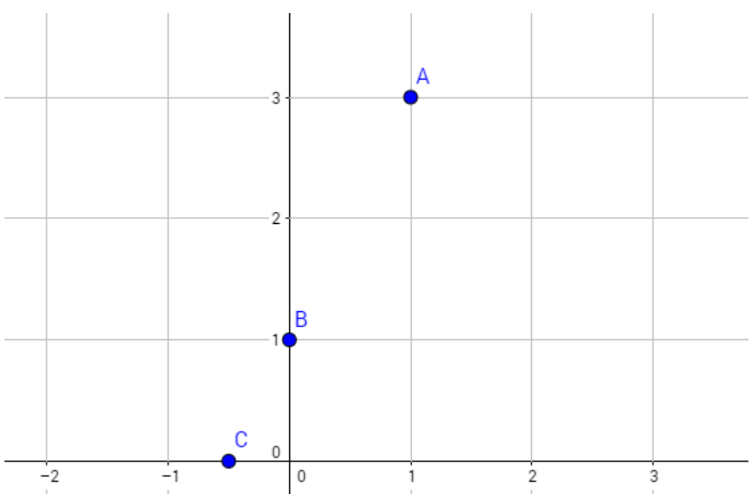


Fig. 27. Ejemplo de puntos colineales.

Gráficamente se puede apreciar que están sobre la misma recta. Numéricamente está observación se refleja en las pendientes. Si calcula la pendiente entre A y B, y la pendiente entre A y C, obtendrá lo siguiente:

$$m_{AB} = \frac{1-3}{0-1} = 2 \qquad m_{AC} = \frac{0-3}{-0.5-1} = 2$$

Dese cuenta que son la misma en ambos casos. En general, se puede concluir que: **tres puntos *A*, *B* y *C* son colineales si y solo si, la pendiente entre *A* y *B* es la misma que, la pendiente entre *A* y *C***.

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Los adjetivos paralelas y perpendiculares sirven para denotar grupos de rectas que tienen ciertas características. Dichas características pueden reflejarse matemáticamente. Pero lo primero consiste en definir qué quiere decir cada adjetivo, para después dar la equivalencia matemática.

Rectas paralelas

Un ejemplo de rectas paralelas puede observarse en la Fig. 28.

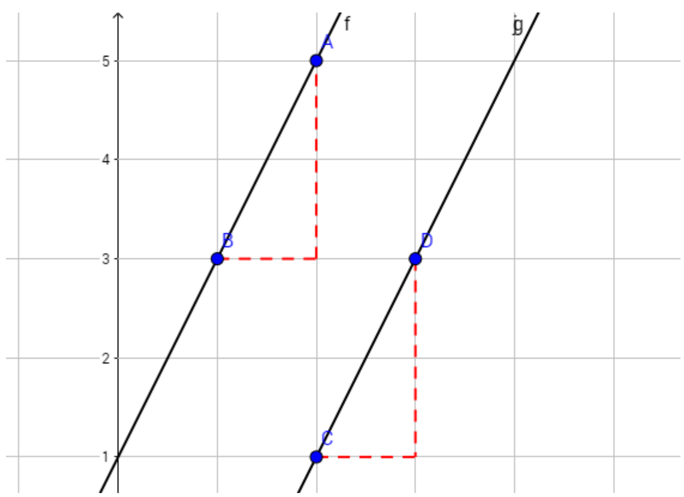


Fig. 28. Ejemplo de rectas paralelas.

Note que si se construyen los triángulos rectángulos que tanto han ayudado en los conceptos anteriores, se obtienen dos triángulos semejantes. Por lo que, el adjetivo de paralelas tiene que ver con que las rectas posean el mismo grado de inclinación. Dado que es un resultado que puede probarse lo condensaremos en el siguiente teorema.

Teorema (Rectas paralelas). Dos rectas l_1 y l_2, no verticales, se dicen paralelas si y solo si, sus pendientes asociadas son la mismas.

Ejemplo (¿Serán mis rectas paralelas?). Considere la recta l_1 que pasa por los puntos $A\left(\frac{3}{5},-\frac{2}{9}\right)$, $B\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{7}\right)$ y la recta l_2 que pasa por puntos $C\left(\frac{8}{5},\frac{7}{9}\right)$, $D\left(\frac{1}{3},\frac{8}{7}\right)$ (Fig.).

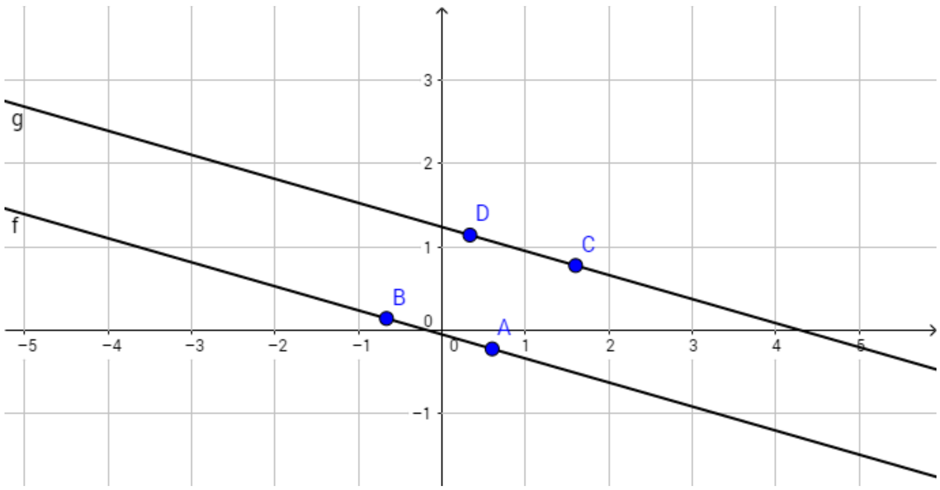


Fig. 29. Otro ejemplo de rectas paralelas.

¿Serán paralelas las rectas l_1 y l_2? Para responder a la pregunta basta con calcular la pendiente entre A y B, y la pendiente entre C y D. Aplicando (1.1) se obtiene:

$$m_{AB}=\frac{\frac{1}{7}-\left(-\frac{2}{9}\right)}{-\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}=-\frac{\frac{23}{63}}{\frac{19}{15}}=\frac{115}{399}\qquad m_{CD}=\frac{\frac{8}{7}-\frac{7}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{8}{5}}=-\frac{\frac{23}{63}}{\frac{19}{15}}=\frac{115}{399}$$

Por lo tanto, por el **Teorema de rectas paralelas,** las rectas son paralelas entre sí.

Ejemplo (A veces no son rectas diferentes). Considere la recta l_1 que pasa por los puntos $A(1,3)$, $B(2,5)$ y la recta l_2 que pasa por puntos $C(0,1)$, $D(1.5,4)$ como se muestra en la Fig. 2.

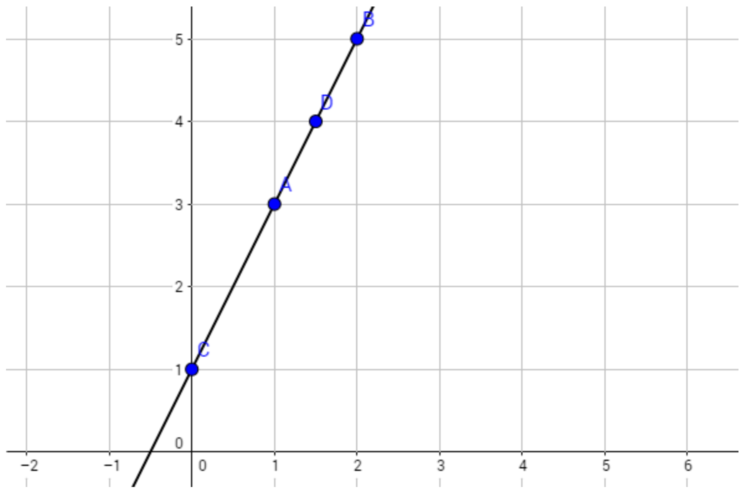


Fig. 2. Dos rectas iguales.

Para verificar si son paralelas se calcula

$$m_{AB} = \frac{5-3}{2-1} = 2 \qquad m_{CD} = \frac{4-1}{1.5-0} = 2$$

Por el **Teorema de rectas paralelas**, se puede afirmar que son paralelas. Sin embargo, en la figura puede observarse que solo hay una recta. Eso se debe a que ambas rectas son la misma. ¿Cómo darse cuenta de ello analíticamente? Una forma es usando la conclusión a la que se llegó en el **Ejemplo de colinealidad**. Por lo tanto, se puede deducir lo siguiente: **Si para cualquier tercia de puntos, tomada de un par de rectas paralelas (dos en una recta y el otro en la recta restante), los puntos que la forman son colineales, entonces las rectas no solo serán paralelas sino la misma''**. En este ejemplo, se tiene que tomando los puntos A, B y C las pendientes entre A y B, y A y C son:

$$m_{AB} = \frac{5-3}{2-1} = 2 \qquad m_{AC} = \frac{3-1}{1-0} = 2$$

Por lo tanto, son la misma recta.

Rectas perpendiculares

El adjetivo de perpendiculares se emplea cuando dos rectas tienen un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ como se muestra en la Fig. .

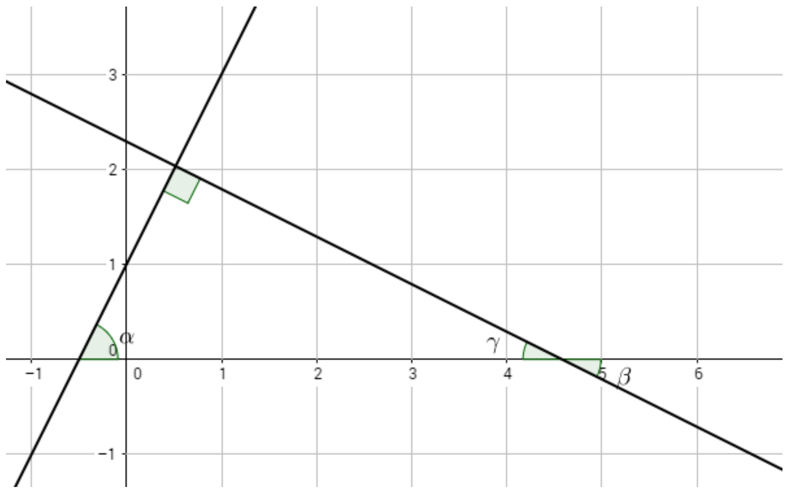


Fig. 31. Ejemplo de rectas perpendiculares.

¿Y cómo reflejo matemática esa característica? Note que cada recta tiene un grado de inclinación reflejado por los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$. Además, el ángulo formado entre ellas es $\frac{\pi}{2}$. Observe que el ángulo sobrante del triángulo ($\angle\gamma$) por propiedades de los triángulos es:

$$\angle\gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \angle\alpha = \frac{\pi}{2} - \angle\alpha$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\angle\gamma = \angle\beta$$

Igualando se tiene:

$$\angle\beta = \frac{\pi}{2} - \angle\alpha$$

Entonces, el ángulo $\frac{\pi}{2}$ entre las rectas ocurrirá si, y solo si, cumple la igualdad anterior. Usando la medida de grado de inclinación y algunas identidades trigonométricas, se puede asegurar el siguiente teorema:

Teorema (Rectas perpendiculares). Dos rectas l_1 y l_2 que no sean paralelas al eje *x* y al eje *y*, respectivamente, se dicen perpendiculares si y solo si, sus pendientes asociadas m_1 y m_2, respectivamente, satisfacen la siguiente igualdad:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad (1.2$$

Ejemplo (¿Serán perpendiculares mis rectas?). Considere la recta l_1 que pasa por los puntos $A(0.74,1.48)$, $B(1.40,2.68)$, y la recta l_2 que pasa por puntos $C(1.74,0.50)$, $D(0,3.26)$ (Fig.).

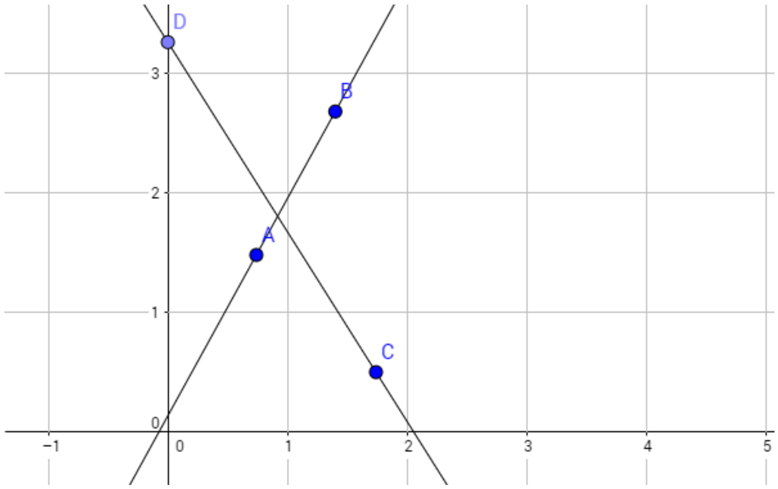


Fig. 32. Ejemplo de rectas no perpendiculares.

¿Serán perpendiculares las rectas l_1 y l_2? Para responder a la pregunta basta con calcular la pendiente entre *A* y *B*, y la pendiente entre *C* y *D*. Aplicando (1.1) se obtiene:

$$m_{AB} = \frac{2.68-1.48}{1.4-0.74} = \frac{20}{11} \qquad m_{CD} = \frac{0.50-3.26}{1.74-0} = -\frac{46}{29}$$

Note que:

$$-\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{11}{20} \neq -\frac{46}{29} = m_{CD}$$

Por lo tanto, por el **Teorema de rectas perpendiculares**, las rectas no son perpendiculares entre sí.

Ejemplo (¿Dónde debo colocar mi punto para que mis rectas sean perpendiculares?). Considere la recta l_1 que pasa por los puntos $A(0.74,1.48)$, $B(1.40,2.68)$ y la recta l_2 que pasa por puntos $C(1.74,0.50)$, $D(x,3.26)$. Es una situación parecida al ejemplo anterior, solo que ahora se desconoce la coordenada *x* del punto D. Una pregunta que surge es: ¿Cuánto debería valer *x* para que las rectas sean perpendiculares entre sí?

Usando el **Teorema de rectas perpendiculares**, por medio de (1.2) se puede plantear lo siguiente:

$$-\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{11}{20} = \frac{0.50-3.26}{1.74-x}$$

Despejando de manera cruzada se tiene:

$$-11(1.74-x) \;=\; 20(-2.76)$$

Despejando *x* se tiene:

$$x = -\frac{36.06}{11} = -\frac{1803}{550} \approx -3.28$$

Por lo que el punto *D* debería tener coordenadas $(-3.28, 3.26)$. La representación gráfica puede verse en la siguiente figura:

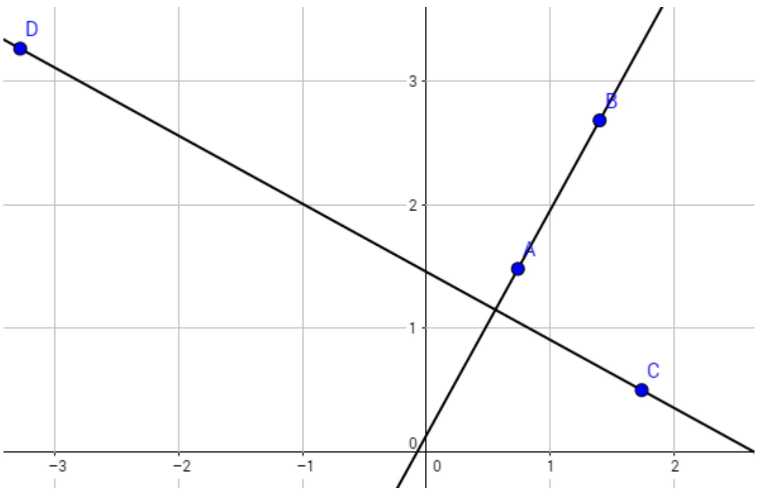


Fig. 33. Solución gráfica.

3.4 Ecuación de la recta

Entendiendo la pendiente

Considere los puntos $A(1,1)$, $B(3,4)$ y la recta que pasa por ellos como se muestra en Fig. .

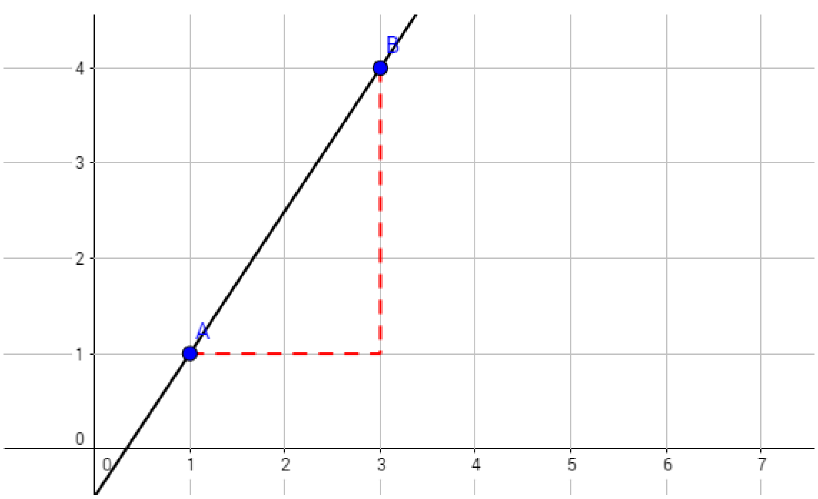


Fig. 34. Pendiente de una recta. Interpretación gráfica como desplazamiento.

Si observa las longitudes de los catetos, le será posible concluir lo siguiente:

Desplazarse 2 unidades a la derecha implica moverse 3 unidades hacia arriba, es decir, por cada par de unidades desplazadas en el eje x se desplaza 3 unidades en el eje y

¿Cuánto se desplazaría hacia arriba si solo se moviera 1 unidad a la derecha? Puede usar una regla de tres para responder a la pregunta. Aplicando la regla de tres se obtiene:

$$y = \frac{3}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = m$$

Tal hecho lleva a la siguiente idea:

Idea. La pendiente *m* es la cantidad de unidades que se desplaza en el eje *y* por cada unidad que se desplaza a la derecha en el eje *x*. Si *m* es positiva, entonces el desplazamiento es hacia arriba; si *m* es negativa el desplazamiento es hacia abajo.

OBSERVACIONES:

- La pendiente es positiva cuando la recta está inclinada hacia la derecha.
- La pendiente es negativa cuando la recta está inclinada hacia la izquierda.
- La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.
- No está definida la tangente del ángulo de 90^o, por lo que no se define la pendiente de una recta vertical.

Ecuación de la recta

Considere los puntos $A(-1,3)$, $B(4,-1)$ y la recta que pasa por ellos como se muestra en Fig. .

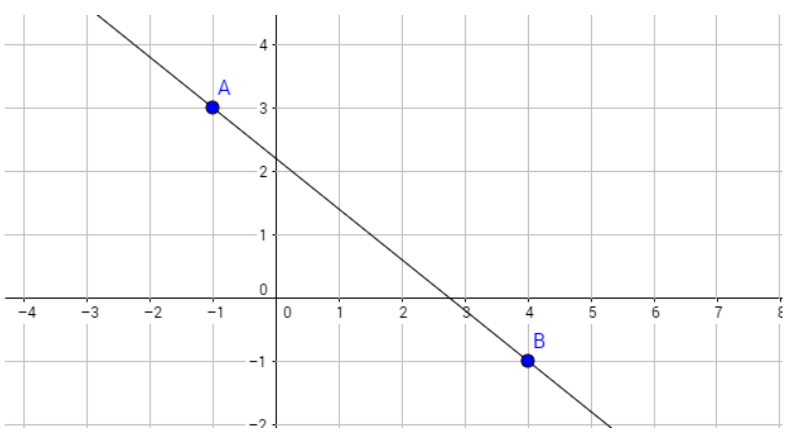


Fig. 35. Planteamiento de la ecuación de la recta.

¿Dónde se estaría si se desplaza 1 unidades a la derecha de -1 en el eje *x*? Usando la idea anterior basta con calcular la pendiente. En este caso se tiene que:

$$m = \frac{3-(-1)}{-1-4} = -\frac{4}{5}$$

Por lo tanto, si se avanza una unidad a la derecha de -1 en el eje *x* habría un desplazamiento hacia abajo de $-\frac{4}{5}$. Dado que se estaba en 3, se ahora se estaría en $3-\frac{4}{5}=\frac{11}{5}$. En otras palabras, el punto $P_1\left(0,\frac{11}{5}\right)$ está sobre la recta. ¿Dónde se estaría si se desplaza 2 unidades a la derecha de -1 en el eje *x*? La idea es la misma, ahora solo hay que multiplicar por 2. Así, si se avanzan 2 unidades a la derecha de -1 en el eje *x*, habría un desplazamiento de $-\frac{8}{5}$ en el eje *y*, dando como resultado que el punto $P_2\left(1,\frac{7}{5}\right)$ esté sobre la recta. En general, para un desplazamiento de *u* unidades en el eje *x* el número de unidades desplazadas (*v*) en el eje *y* es:

$$v=-\frac{4}{5}u$$

Sin embargo, se desea que la expresión quede en términos del punto de referencia común, el origen. Para hacer esto tome un punto que sepa que está sobre la recta. En el ejemplo se tiene que el punto $A(-1,3)$ está -1 unidades a la derecha del origen. Según la igualdad anterior, el número de unidades desplazadas en el eje *y* son $(-1)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}$; pero debería dar 3. Basta con que se complete sumando o restando. En este caso sumando $\frac{11}{5}$ (con eso se obtendría $\frac{15}{5}=3$). Así, la relación está completa y queda reflejada en la siguiente expresión:

$$v=-\frac{4}{5}u+\frac{11}{5}$$

La relación anterior se conoce como **ecuación de la recta**. Para que no quede lugar a dudas, se da la siguiente definición.

Definición (Ecuación de la recta). La ecuación de la recta es una expresión de la forma (las letras son lo de menos, anteriormente se usó *u* y *v* para que no hubiera confusión con los ejes):

$$y = mx + b \tag{1.3}$$

3.4.1 Ecuación de la recta punto-pendiente

Ejemplo 1 (Ecuación de la recta conociendo un punto y la pendiente). Considere que se conoce que la pendiente de la recta es $m=\frac{3}{2}$ y que el punto $A(1,7)$ está sobre la recta. ¿Cuál es la ecuación de la recta? Se inicia diciendo que $y=\frac{3}{2}x+b$ pues por cada unidad que se desplace a la derecha en *x* habrá un movimiento de acuerdo a la pendiente; pero se desconoce la referencia. Dado que el punto $A(1,7)$ está sobre la recta tiene que debería cumplirse:

$$7=\frac{3}{2}(1)+b$$

Despejando *b* se obtiene que, $b=7-\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$y=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$

Una manera sencilla de recordar la ecuación de la recta es utilizando la forma *punto-pendiente*. Sea $P(x_1,y_1)$un punto conocido por donde pasa la recta y sea m su pendiente. Así que la ecuación de la recta es:

$y-y_1=m(x-x_1)$

Ejemplo 2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(4,-1)$ y tiene pendiente igual a -2.

$Solución$:

Tenemos que $x_1=4;\ y_1=-1$ y $m=-2$, entonces utilizando la *forma punto-pendiente* obtenemos:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-1)=(-2)(x-4)$

$y+1=-2(x-4)$

Despejando y obtendremos la forma que se presentó al principio ($y = mx + b$):

$y=-2x+8-1$

$y=-2x+8$

Ejemplo 3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(-5,4)$ y tiene pendiente igual a -7.

$Solución$:

Tenemos que $x_1=-5;\ y_1=4$ y $m=-7$, entonces utilizando la *forma punto-pendiente* obtenemos:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = (-7)(x - (-5))$

$y - 4 = -7(x + 5)$

Despejando y obtendremos la forma que se presentó al principio ($y = mx + b$):

$y = -7x - 35 + 4$

$y = -7x - 31$

Ejemplo (El significado de b). Considere la ecuación de recta $y = \pi x + \sqrt{2}$. En este ejemplo, la pendiente tiene un valor $m = \pi$ y $b = \sqrt{2}$. Pero eso no debería asustarle, siguen siendo números. ¿Qué pasa cuando está en el origen? Para responder simplemente hay que sustituir, entonces se tiene:

$$y = \pi(0) + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Por lo que el punto $P(0, \sqrt{2})$ está sobre la recta. Note que la coordenada en *y* asociada a la coordenada 0 en *x* es *b*. En este sentido, a *b* se le llama **ordenada al origen**[3] porque es el valor en el eje *y* (algunos autores llaman ordena al eje *y*) asociado al origen en el eje *x*.

3.4.2 Ecuación de la recta pendiente-ordenada.

Otra manera de obtener la ecuación de la recta es cuando conocemos la pendiente m y el punto P donde corta al eje y; a la ordenada de este punto, denotado usualmente como b, se le llama *ordenada al origen* de la recta.

Por lo que la ecuación de la recta es

$$y = mx + b$$

Ejemplo 1. Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente igual a 3 y corta al eje y en el punto -1.

$Solución$:

Tenemos que $m = 3$ y $b = -1$, así que utilizando la ecuación anterior y obtenemos:

$$y = mx + b$$

$$y = 3x + (-1)$$

[3] Algunos autores también le llaman **intercepto**.

$$y = 3x - 1$$

Ejemplo 2. Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente igual a $\frac{1}{2}$ y corta al eje y en el punto 3.

$Solución$:

Tenemos que $m = 3$ y $b = -1$, así que utilizando la ecuación anterior y obtenemos:

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

3.4.3 Ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos.

Ejemplo (Ecuación de la recta conociendo dos puntos). Considere que los puntos $A(1,7)$ y $B(2,3)$ están sobre la recta. ¿Cuál es la ecuación de la recta? Conociendo dos puntos es posible calcular la pendiente. En este sentido, se tiene por (1.1):

$$m = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{7-3}{1-2} = -4$$

Luego, se repite lo del ejemplo anterior. Se inicia con $y = -4x + b$, pues por cada unidad que se desplace a la derecha en *x* habrá un movimiento de acuerdo con la pendiente; pero se desconoce la referencia. Dado que el punto $B(2,3)$ está sobre la recta tiene que debería cumplirse:

$$3 = -4(2) + b$$

Despejando *b* se obtiene que, $b = 3 + 8 = 11$. Por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$$y = -4x + 11$$

Una forma de comprobar que lo hizo bien es sustituir el otro punto que no se usó. En este caso, el punto $A(1,7)$ y note que $7 = -4(1) + 11 = 7$. Por lo tanto, la ecuación de la recta pasa por los dos puntos deseados.

Para calcular la ecuación que pasa por dos puntos también tenemos la fórmula, que no es más que el uso de forma punto-pendiente

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo 1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(4,-1)$ y $Q(8,3)$.

$Solución$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Tomemos como punto fijo a P:

$$y - (-1) = \frac{3 - (-1)}{8 - 4}(x - 4)$$

$$y + 1 = \frac{3 + 1}{4}(x - 4)$$

$$y + 1 = (x - 4)$$

$$y = x - 5$$

Tomemos como punto fijo a Q:

$$y - 3 = \frac{3 - (-1)}{8 - 4}(x - 8)$$

$$y - 3 = \frac{3 + 1}{4}(x - 8)$$

$$y - 3 = x - 8$$

$$y = x - 5$$

Que como pudimos ver la ecuación de la recta es la misma sin importar el punto fijo que tomemos.

Ejemplo 2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(5,2)$ y $Q(-3,6)$.

$Solución$:

Para simplificar un poco el procedimiento, calculamos la pendiente aparte

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 2}{-3 - 5} = -\frac{4}{8}$$

Elegimos como punto fijo a Q(recordemos que puede tomarse también P)

Así que la ecuación de la recta queda:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = -\frac{4}{8}(x - (-3))$$

$$y-6=-\frac{4}{8}(x+3)$$

$$y-6=-\frac{4}{8}x-\frac{12}{8}$$

$$y=-\frac{4}{8}x-\frac{12}{8}+6$$

$$y=-\frac{4}{8}x+\frac{36}{8}$$

3.4.4 Forma general de la ecuación de la recta

Ejemplo 1(Ecuación general de la recta). Considere la ecuación de la recta $y=-\frac{6}{5}x+\pi$. ¿Qué pasaría si usted pasa todo al lado izquierdo de la ecuación? Se obtendría lo siguiente:

$$y+\frac{6}{5}x-\pi=0$$

La expresión anterior, algunos autores la llaman la **ecuación general de la recta**. En general la ecuación general de la recta posee la siguiente expresión:

$$py+qx+r=0 \qquad (1.4)$$

donde *p*, *q*, y *r* son constantes[4].

Ejemplo 2. Escribir la ecuación $3y=10x+2$ en la forma general.

$Solución$:

Pasamos todos los términos a un lado de la ecuación, por lo que queda:

$$3y=10x+2$$

$$10x-3y+2=0$$

Esta última es la forma general de la ecuación de la recta.

Ejemplo 3. Escribir la forma general de la ecuación de la recta que pasa por $P(1,3)$ y tiene pendiente igual a 5.

$Solución$:

[4] Muchos autores usan las letras *a*, *b* y *c* en lugar de *p*, *q*, y *r*; pero para el lector no se confunda y piense que la *b* de ejemplos anteriores es la misma que aquí se usaron otras letras.

Utilizamos la forma punto-pendiente

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

$$y - 3 = 5x - 5$$

$$0 = 5x - 5 + 3 - y$$

$$5x - y - 2 = 0$$

En conclusión, sea cual sea la forma que utilicemos para encontrar la ecuación de la recta, podemos llegar a su forma general, y viceversa, si tenemos la forma general de la ecuación podemos llegar a una de sus formas, veamos un ejemplo.

Ejemplo 4. Encontrar la pendiente y algún punto por donde pase la recta con ecuación de la forma general $x + 3y - 5 = 0$

$Solución$:

Como lo que se nos pide es encontrar un punto y la pendiente, tenemos que llegar a la forma *punto-pendiente,* es decir, llegar a una expresión como esta $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$x + 3y - 5 = 0$$

$$3y - 5 = -x$$

$$3y - 3 - 2 = -x$$

$$3(y - 1) = -x + 2$$

$$3(y - 1) = -(x - 2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

Así que la pendiente es $-\frac{1}{3}$ y el punto es $(2,1)$.

Ejemplo 5. Encontrar la pendiente y el punto donde la recta $2x - y - 17 = 0$ corta al eje y.

$Solución$:

Como lo que queremos es la pendiente y la ordenada, tenemos que llegar a la forma *pendiente-ordenada,* es decir, hay que llegar a una expresión con la forma $y = mx + b$

$$2x - y - 17 = 0$$

$$2x - 17 = y$$

Así que la pendiente es 2, y la ordenada es -17, es decir corta al eje y en -17.

3.4.5 Forma simétrica de la ecuación de la recta.

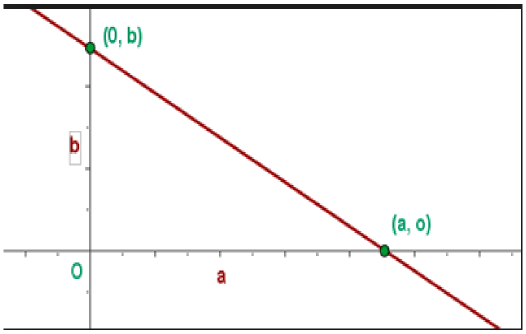


Figura 36

A partir de la ecuación general $Ax + By + C = 0$ podemos obtener la expresión $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ la cuál es la *forma simétrica* de la ecuación de la recta y tiene la ventaja de que en ella podemos ver explícitamente los puntos en los que la recta corta a los dos ejes, $(0, b)\ y\ (a, 0)$.

Ejemplo 1. Encontrar la ecuación de la recta que corta a los ejes en $(5,0)\ y\ (0, -3)$.

$Solución$:

Tenemos que $a = 5, b = -3$, ahora sustituimos en la fórmula de la forma simétrica $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$, que con las operaciones adecuadas llegamos a la expresión $-3x + 5y + 15 = 0$.

Ejemplo 2. Encontrar los puntos en los que la recta $5x + 8y - 6 = 0$ corta a los ejes.

$Solución$:

Tenemos que llegar a la forma simétrica de la ecuación de la recta

$$5x + 8y - 6 = 0$$

$$5x + 8y = 6$$

$$\frac{5}{6}x + \frac{8}{6}y = 1$$

$$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{8}{\frac{6}{8}}y = 1$$

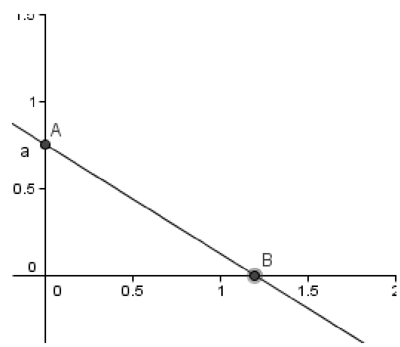


Figura 37

Así la recta corta a los ejes en $A\left(0, \frac{6}{8}\right)\ y\ B\left(\frac{6}{5}, 0\right)$.

Ejemplo (Rectas equivalentes). Considere la ecuación de la recta $y = \frac{3}{2}x - 1$. ¿Cuál es la ecuación general de la recta? Aplicando lo dicho en el ejemplo pasado se tiene:

$$y - \frac{3}{2}x + 1 = 0$$

¿Qué ocurriría si multiplica todo por una constante, piense en la constante 2? Desarrollando se tendría:

$$2y-3x+2=0$$

La expresión anterior sigue siendo la misma recta. Sin embargo, es necesario que lo sepa porque algunos autores prefieren usar expresiones equivalentes para dejar todo en términos enteros.

Ejemplo (Caso de estudio). A finales de 1971 en EEUU, todos los cigarros eran etiquetados con las palabras ``Warning: The Surgeon General Has Determined That Smoking Is Dangerous To Your Health''. Debido a la poca evidencia en laboratorio que había al respecto de este caso, la mayor parte de la evidencia recayó en la estadística. Un gran número de encuestas realizadas a fumadores y no fumadores permitió concluir que la mortalidad por problemas del corazón estaba relacionada linealmente con el consumo anual de cigarrillos por persona adulta. Suponga que cada cigarrillo que consuma aumenta la mortalidad en 0.0601 y que el consumo anual de cigarrillo en EEUU es de 3900 y la mortalidad es de por problemas del corazón es de 256.9 por cada 100,000 habitantes. Si en México el consumo anual en esa época era de 1680 cigarrillos anuales, **¿cuál sería la tasa de mortalidad en México?**

En estos casos lo primero que hay que hacer es encontrar la ecuación de la recta (recuerde que el ejemplo aclara que la relación es lineal). Para ello es necesario identificar los elementos. Note que 0.0601 es el aumento en la mortalidad por cada cigarrillo adicional consumido anualmente, lo cual encaja perfecto con la interpretación de pendiente (el aumento de una unidad de *x* (consumo de cigarrillos anual) produce un aumento de 0.0601 en *y* (mortalidad)). De manera que la ecuación lineal debería tener una expresión quizá como

$$y=0.0601x$$

Por otro lado, se tiene la información completa de EEUU, entonces se conoce un punto. Si se sustituye 3900 en la expresión tentativa, se tiene que

$$y=0.0601(3900)=234.9$$

Dado que 234.9 no concuerda con la mortalidad de 256.9 reportada, es necesario sumar la diferencia (256.9-234.9=22.51). Así, la ecuación de recta buscada es:

$$y=0.0601x+22.51$$

Finalmente, para calcular la mortalidad en México, basta con sustituir:

$$y=0.0601(1680)+22.51=123.478$$

Por lo tanto, la mortalidad por problemas del corazón en México con base en la relación lineal es de 123.478.

Continuación de rectas paralelas y perpendiculares.

Ejemplo 1. Verificar si $2x - y - 3 = 0$ y $8x - 4y + 3 = 0$ son paralelas.

$Solución$:

Para poderlo verificar tenemos que encontrar las pendientes de las rectas, como lo vimos anteriormente, esto se logra al llegar a una de las formas de la recta, pendiente-ordenada o punto-pendiente.

Encontremos la pendiente de la primera

$$2x - y - 3 = 0$$

$$2x - 3 = y$$

La pendiente de esta recta es 2.

Encontremos la pendiente de la segunda

$$8x - 4y + 3 = 0$$

$$8x + 3 = 4y$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)(8x + 3) = y$$

$$\frac{8}{4}x + \frac{3}{4} = y$$

La pendiente de esta recta es $\frac{8}{4} = 2$.

Como las dos pendientes son iguales, las rectas son paralelas.

Ejemplo 2. Verificar si $3x - y + 1 = 0$ y $x + 3y - 15 = 0$ son paralelas

$Solución$:

Como ya vimos, calculamos primero las pendientes.

$3x - y + 1 = 0$ $\qquad$ $x + 3y - 15 = 0$

$3x + 1 = y$ $\qquad$ $3y = x + 15$

La pendiente de esta recta es 3 $\qquad$ $y = \left(\frac{1}{3}\right)(x + 15)$

$$y = \frac{1}{3}x + 5$$

La pendiente de esta recta es $\frac{1}{3}$

Como las pendientes no son iguales, decimos que las rectas no son paralelas.

Ejemplo 3. Determinar si las rectas $4x + 3y - 4 = 0$ y $6x - 8y + 1 = 0$ son perpendiculares.

$Solución$:

Para poderlo verificar tenemos que encontrar las pendientes de las rectas, como lo vimos anteriormente, esto se logra al llegar a una de las formas de la recta, pendiente-ordenada o punto-pendiente.

Encontremos la pendiente de la primera

$$4x + 3y - 4 = 0$$

$$3y = -4x + 4$$

$$y = (-4x + 4)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$y = \frac{-4}{3}x + \frac{4}{3}$$

Así que la pendiente de esta recta es $\frac{-4}{3}$.

Encontremos la pendiente de la segunda

$$6x - 8y + 1 = 0$$

$$6x + 1 = 8y$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)(6x + 1) = y$$

$$\frac{6}{8}x + \frac{1}{8} = y$$

Así la pendiente de esta recta es $\frac{6}{8}$.

Ahora hay que verificar si son perpendiculares, es decir, veamos si se cumple $m_1 m_2 = -1$

Tenemos que $m_1 m_2 = \left(\frac{-4}{3}\right)\left(\frac{6}{8}\right) = \left(\frac{-24}{24}\right) = -1$, entonces concluimos que ambas rectas son perpendiculares.

Ejemplo 4. Determinar si las rectas $6x - 3y + 32 = 0$ y $4x - 2y + 2 = 0$ son perpendiculares.

$Solución$:

Como ya vimos, calculamos primero las pendientes

$6x - 3y + 32 = 0$ $\qquad\qquad$ $4x - 2y + 2 = 0$

$6x + 32 = 3y$ $\qquad\qquad$ $4x + 2 = 2y$

$\left(\frac{1}{3}\right)(6x + 32) = y$ $\qquad\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)(4x + 2) = y$

$2x + \frac{32}{3} = y$ $\qquad\qquad$ $2x + 1 = y$

Como vemos las son iguales, así que $m_1 m_2 = (2)(2) \neq -1$

Por lo que concluimos que las pendientes no son perpendiculares.

3.6 Desigualdades en el plano

En el capítulo anterior se habló de desigualdades como $x+4<3$, donde se despejaba *x* para obtener $x<-1$. Este resultado podía representarse en la recta real como se muestra en la Fig. 383 o mediante un intervalo de la forma $(\infty,-1)$.

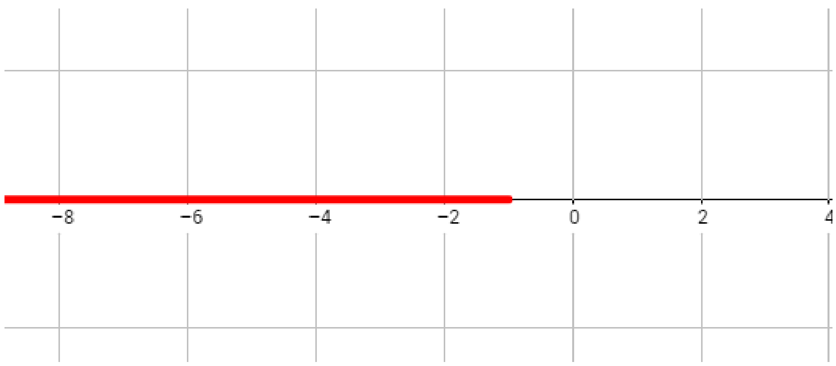


Fig. 383. Ejemplo de desigualdad en la recta real.

En palabras, la solución anterior puede expresarse como:

"Todo aquél número tal que sea menor a -1"

o mediante un conjunto como:

$$\{x: x \in \mathbb{R} \text{ y } x < -1\}$$

En esta sección se abordará como extender esa idea al plano.

Desigualdades simples

La ecuación de la recta puede pensarse como un grupo de puntos que cumplen la relación definida en (1.3). En otras, palabras el conjunto definido como:

$$\{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y = mx + b\}$$

¿Qué quiere decir esto? Bueno, quizá el siguiente ejemplo le aclare un poco más las cosas.

Ejemplo (Conjunto de puntos que representa la recta). Considere el conjunto:

$$\{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y = 3x + 1\}$$

Entonces note que si $x = 0$ entonces $y = 1$, es decir, el punto $(0,1)$ es miembro del conjunto. Pero pudo ser cualquier valor el elegido para *x*. Se pudo elegir $x = 1000$ y entonces el punto $(1000, 3001)$ es parte del conjunto, o se pudo selección $x = 0.00001$ y entonces el punto $(0.00001, 1.00003)$ es parte del conjunto. Son tantos los puntos que se pueden elegir que si se juntan todos en plano cartesiano forman la recta (Fig.).

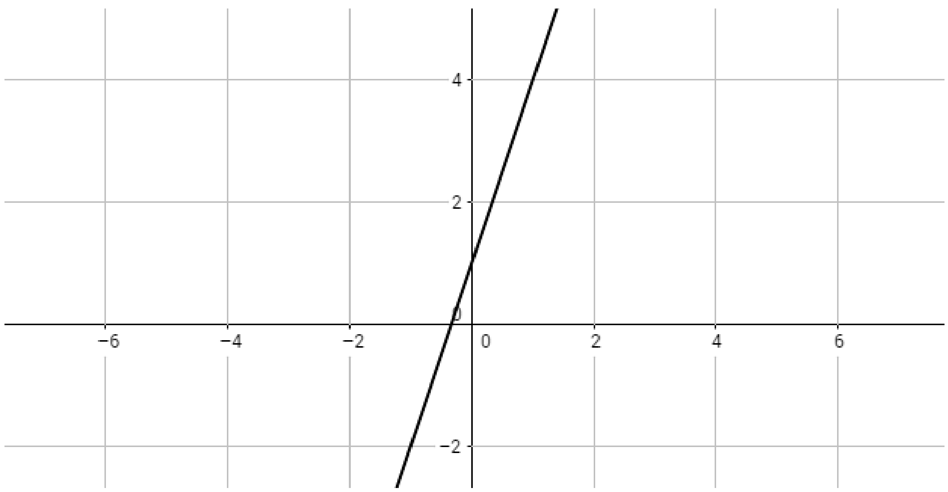


Fig. 39. Conjunto de puntos que satisfacen la relación y=3x+1 visto en el plano.

¿Cómo extender esa ida a conjuntos cómo $\{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y > mx + b\}$? Para ilustrar este hecho considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo (La idea de la desigualdad lineal). Considere que se quiere representar el conjunto:

$$\{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y > 3x + 1\}$$

Por el ejemplo anterior que los puntos sobre la recta $3x+1$ cumplen la igualdad $y = 3x+1$. Por ejemplo, el punto $A(1,4)$ cumple la igualdad y, por lo tanto, se puede decir que está sobre la recta. ¿Qué coordenadas (x, y) cumplirían que $y > 4$ para $x = 1$? Serían muchas, por ejemplo $y = 5$ para obtener el punto $(1,5)$ o $y = 5.2$ para obtener el punto $(1, 5.2)$. En general cualquier punto sobre la recta azul de la Fig. 11.

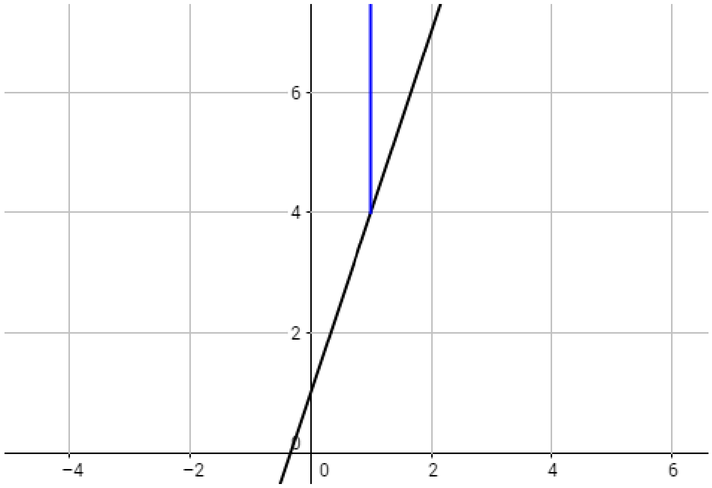


Fig. 40. Inicio del planteamiento de una desigualdad en el plano.

Si se repite el proceso para el resto de los valores de *x* se llegaría a que son todos los puntos por encima de la recta.

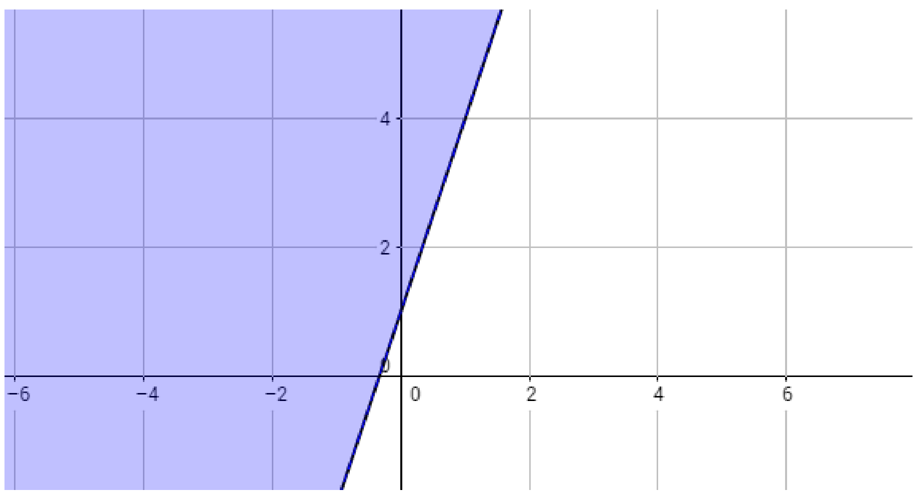


Fig. 41. Solución de la desigualdad y>3x+1.

Por lo tanto, se dice que la región sombreada que satisface la desigualdad $y > 3x + 1$ y esa es la representación del conjunto $\{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y > 3x + 1\}$.

En general, todos los puntos por encima de la recta $y = mx + b$ cumplen la desigualdad $y > mx + b$ Análogamente, todos los puntos por debajo de la recta $y = mx + b$ cumple la desigualdad $y < mx + b$.

Uniones e intersecciones

A veces serán de interés regiones que son resultado de juntar varias regiones obtenidas por desigualdades simples, o regiones que representan la zona común de varias regiones obtenidas por desigualdades simples. A la primera operación se le llama **unión** (denotada por el símbolo ∪) y a la segunda recibe el nombre de **intersección** (denotada por el símbolo ∩).

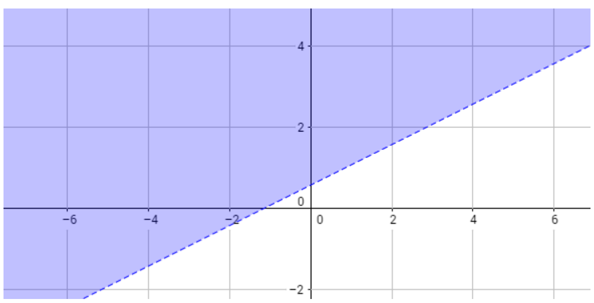
Definición (Unión)[5]. Sean:
$A = \{(x,y)\text{:y cumple una desigualdad lineal}\}$ y $B = \{(x,y)\text{:y cumple otra desigualdad lineal}\}$ entonces, la operación unión se define como:

$$A \cup B = \{(x,y)\text{:y cumple cualquiera de las desigualdades lineales}\} \qquad (1.5)$$

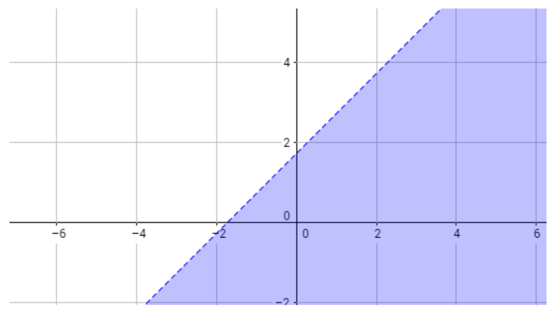
Ejemplo (Un ejemplo sencillo de unión). Considere los conjuntos:

$A = \left\{(x,y): y > \frac{1}{2}x + \frac{11}{19}\right\}$ y $B = \left\{(x,y): y < x + \sqrt{3}\right\}$

¿Cuál es la región que denota$A \cup B$? De manera individual sabe que para A se tiene que son los puntos encima de la recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{19}$ y para el caso de B sabe que son los puntos debajo de la recta $y < x + \sqrt{3}$ (Fig.).



(b) $y > \frac{1}{2}x + \frac{11}{19}$



(a) $y < x + \sqrt{3}$

Fig. 42. Soluciones individuales para los conjuntos A y B.

Observando ambas soluciones individuales, basta con ``juntarlas'' y hacer solo una región como se muestra en la siguiente figura:

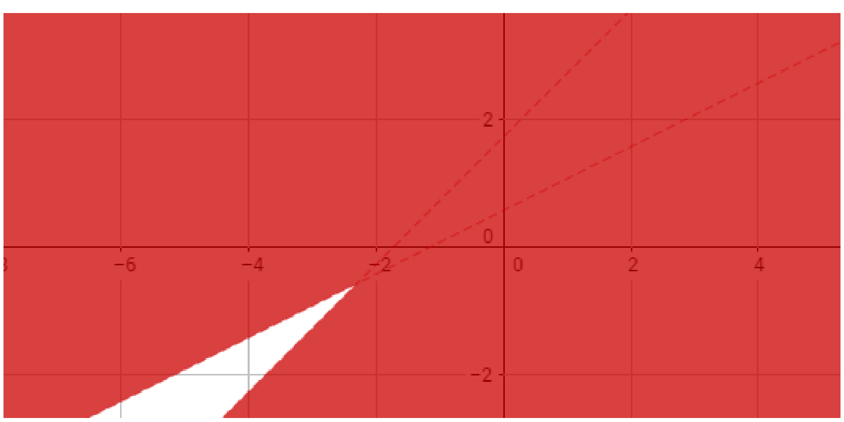


Fig. 43. Solución de la unión.

[5] En ocasiones la unión puede expresarse verbalmente mediante la letra *"o"* para denotar la conjunción disyuntiva.

La región anterior (toda la zona roja) describe la región denotada por la unión $A \cup B$ (algunos autores acostumbran a redactar esto como $y > \frac{1}{2}x + \frac{11}{19}$ o $y < x + \sqrt{3}$).

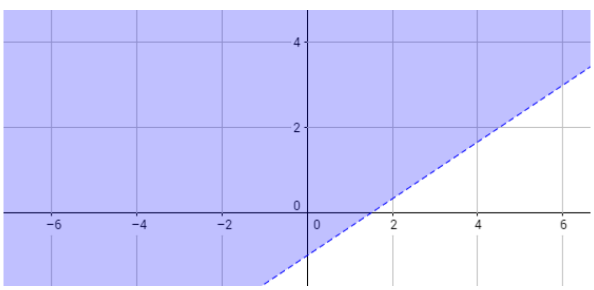
Definición (Intersección)[6]. Sean:
$A = \{(x, y)\text{:y cumple una desigualdad lineal}\}$ y $B = \{(x, y)\text{:y cumple otra desigualdad lineal}\}$
entonces, la operación se define como:

$$A \cap B = \{(x, y)\text{:y cumple ambas desigualdades lineales}\} \tag{1.6}$$

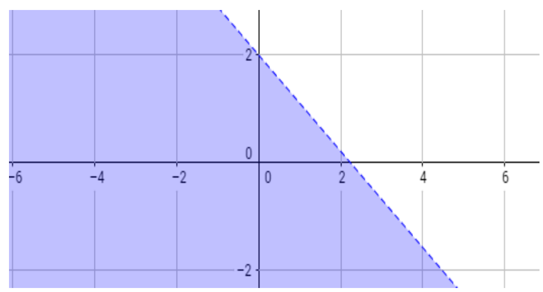
Ejemplo (Un ejemplo sencillo de intersección). Considere los conjuntos:

$A = \left\{(x, y): y > \frac{2}{3}x - 1\right\}$ y $B = \left\{(x, y): y < -\frac{17}{19}x + 2\right\}$

¿Cuál es la región que abarca $A \cap B$? De manera individual sabe que para *A* se tiene que son los puntos encima de la recta $y = \frac{2}{3}x - 1$ y para el caso de *B* se sabe que son los puntos debajo de la recta $y < -\frac{17}{19}x + 2$ ().



(a) $y > \frac{2}{3}x - 1$



(b) $-\frac{17}{19}x + 2$

Fig. 44. Soluciones individuales para los conjuntos A y B.

Observando ambas soluciones individuales, basta con quedarse con las partes que tienen en común y hacer solo una región como se muestra en la siguiente figura:

[6] En ocasiones la unión puede expresarse verbalmente mediante la letra *"y"* para denotar la conjunción copulativa.

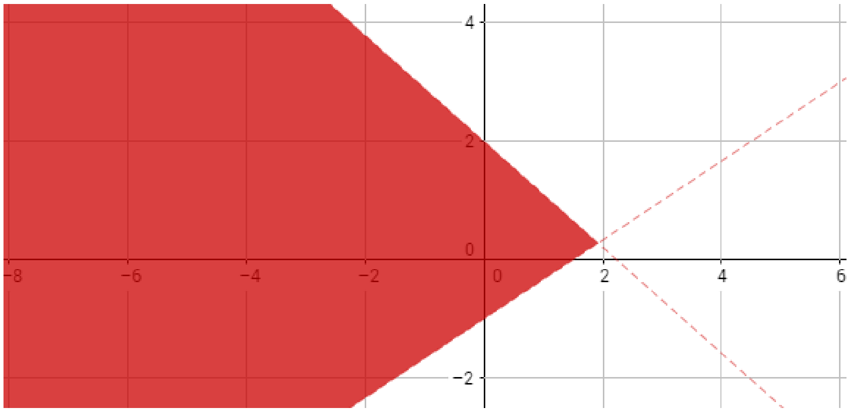


Fig. 45. Solución de la intersección.

La región anterior (toda la zona roja) describe la región denotada por la unión $A \cap B$ (algunos autores acostumbran a redactar esto como $y > \frac{2}{3}x - 1$ o $y < y < -\frac{17}{19}x + 2$).

3.7 PROBLEMAS

1). Un triángulo tiene vértices $A(0,3), B(-1,1)\ y\ C(3,2)$. Calcula las coordenadas del punto medio M del segmento que une los vértices $B\ y\ C$. Calcula la longitud del segmento que une los puntos $A\ y\ M$.

$Solución$:

Tenemos $B(-1,1)\ y\ C(3,2)$ usaremos $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ para encontrar el punto medio, $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ así el punto medio es $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$

Ahora calculemos la distancia de A a M. Utilizaremos la fórmula $d(A, M) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Tenemos que

$d(A, M) = \sqrt{(1-0)^2 + (\frac{3}{2} - 3)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ así la distancia de A a M es $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

2). Una compañía hace una cotización para banquete, de manera que el costo es de 12000 pesos para 100 personas o de 16500 pesos para 150 personas.

a) Encuentra la ecuación de la demanda-precio que determina el costo del banquete para x personas, suponiendo que la ecuación es la de una recta.
b) ¿Cuánto costaría el banquete para 125 personas?

$Solución$:

Con la información proporcionada tenemos el siguiente par de coordenadas $(100,12000)$ y $(150,16500)$. Para encontrar la ecuación demanda-precio basta con utilizar la forma dos puntos de la ecuación de la recta:

$$m = \frac{16500 - 12000}{150 - 100} = \frac{4500}{50} = 90$$

Tenemos que:

$$y - 12000 = 90(x - 100)$$

Así le ecuación demanda-precio es $y = 90x + 3000$.

Ahora queremos ver cuál es el costo por 125 personas, esto lo obtenemos sustituyendo 125 en la ecuación obtenida:

$$y = 90x + 3000$$

$$y = 90(125) - 3000 = 11250 + 3000 = 14250$$

Por lo que el costo por 125 personas es de 14250 pesos.

3). Un viaje con boleto de avión incluido tiene cierto costo por persona. Si se desea permanecer un mayor tiempo en el lugar se debe pagar una cuota adicional por noche. Con permanencia de dos noches adicionales el pago total es de 6400 pesos y con seis noches adicionales el costo es de 8200 pesos. Los alimentos no están incluidos.

a) Encontrar el costo total del viaje con x noches adicionales suponiendo que está dado por la ecuación de una recta.
b) ¿cuál es el costo sin noches adicionales?
c) ¿cuánto cuesta cada noche adicional?

$Solución$:

Con la información proporcionada tenemos el par de coordenadas noche-costo $(2,6400)$ y $(6,8200)$.

Utilizando la forma dos puntos de la ecuación de la recta tenemos:

$m = \frac{8200-6400}{6-2} = \frac{1800}{4} = 450$

$$y - 6400 = 450(x - 2)$$

$$y = 450x - 900 + 6400$$

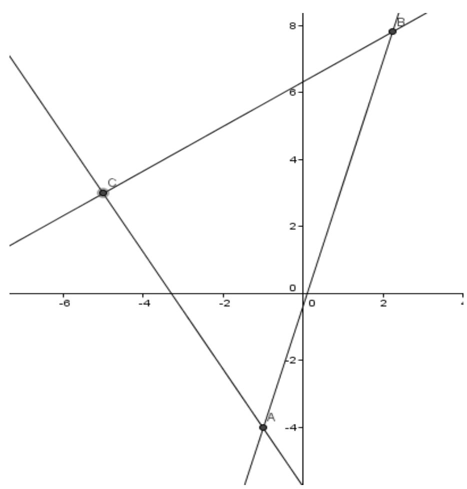
$$y = 450x + 5500$$

De donde tenemos que la ecuación para costo total de x noches adicionales es:
$$y = 450x + 5500$$

De donde podemos observar que el costo sin noches adicionales es de 5500 pesos y que el costo por noche adicional es de 450 pesos.

4). Los lados de un triángulo están sobre las rectas $11x - 3y - 1 = 0, 7x + 4y + 23 = 0$ y

$2x - 3y + 19 = 0$. Encontrar los vértices y la longitud de sus lados.



Solución:

Encontrar los vértices del triángulo equivale a localizar los puntos donde las rectas se intersecan (tema visto anteriormente). Veamos la intersección de $11x - 3y - 1 = 0$ con $7x + 4y + 23 = 0$.

$11x - 3y = 1$…(1)

$7x + 4y = -23$…(2)

Multiplicando (1) por 4 y (2) por 3; y sumar

$$44x - 12y = 4$$

$$21x + 12y = -69$$

$$65x = -65$$

$x = -1$

Sustituimos este valor en (2) para obtener y.

$$7(-1) + 4y = -23$$

$$4y = -23 + 7$$

$$4y = -16$$

$$y = -4$$

Tenemos el primer vértice $A(-1, -4)$

Veamos ahora la intersección de $11x - 3y - 1 = 0$ con $2x - 3y + 19 = 0$.

$11x - 3y = 1$...(1)

$2x - 3y = -19$...(2)

Multiplicamos (2) por -1 y se la sumamos a (1)

$$11x - 3y = 1$$

$$-2x + 3y = 19$$

$$9x = 20$$

$$x = \frac{20}{9}$$

Sustituyendo este valor en (2) para obtener y

$$2\left(\frac{20}{9}\right) - 3y = -19$$

$$\frac{40}{9} + 19 = 3y$$

$$\frac{211}{9} = 3y$$

$$\frac{211}{27} = y$$

Tenemos el otro vértice $B\left(\frac{20}{9}, \frac{211}{27}\right)$

Y por último veamos la intersección de $7x + 4y + 23 = 0$ con $2x - 3y + 19 = 0$

$7x + 4y = -23$...(1)

$2x - 3y = -19$...(2)

Multiplicamos (1) por 3 y (2) por 4; después las sumamos

$$21x + 12y = -69$$

$$8x - 12y = -76$$

$$29x = -145$$

$$x = -\frac{145}{29} = -5$$

Sustituimos este valor en (2) para obtener y

$$2(-5) - 3y = -19$$

$$-10 + 19 = 3y$$

$$9 = 3y$$

$$y = \frac{9}{3} = 3$$

Así tenemos el último vértice $C(-5,3)$.

Ahora que ya conocemos los vértices del triángulo $A(-1,-4)$, $B\left(\frac{20}{9},\frac{211}{27}\right)$ y $C(-5,3)$ nos falta calcular las longitudes de los lados, por lo que usaremos la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\frac{20}{9} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{211}{27} - (-4)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{9} + 1\right)^2 + \left(\frac{211}{27} + 4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{29}{9}\right)^2 + \left(\frac{319}{27}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{841}{81} + \frac{101761}{729}} = \sqrt{\frac{7569 + 101761}{729}} = \sqrt{\frac{109330}{729}} = \sqrt{\frac{841(130)}{729}} = \frac{29}{27}\sqrt{130}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{(-5+1)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

$$d(B,C) = \sqrt{\left(-5 - \frac{20}{9}\right)^2 + \left(3 - \frac{211}{27}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{65}{9}\right)^2 + \left(-\frac{130}{27}\right)^2} = \sqrt{\frac{4225}{81} + \frac{16900}{729}}$$
$$= \sqrt{\frac{38025 + 16900}{729}} = \sqrt{\frac{54925}{729}} = \sqrt{\frac{4225(13)}{729}} = \frac{65}{27}\sqrt{13}$$

Así las longitudes de los lados son $\frac{29}{27}\sqrt{130}$, $\sqrt{65}$ y $\frac{65}{27}\sqrt{13}$.

Ejercicios

1. ¿Gráficamente cómo sería una recta con: **a)** Pendiente positiva **b)** Pendiente negativa **c)** Pendiente nula (0)?
2. Pase a grados los siguientes ángulos en radianes: **a)** 30° **b)** 45° **c)** 90° **d)** 60°.
3. Pase a radianes los siguientes ángulos en grados: **a)** $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{11\pi}{9}$ **c)** $\frac{5\pi}{8}$ **d)** $\frac{2\pi}{3}$.
4. Considere los puntos $P_1(3-2)$ y $P_2(7,-2)$. Encuentre **a)** La pendiente entre los dos puntos. **b)** El ángulo de inclinación asociado a la pendiente.
5. Considere los puntos $P_1(2,-2)$, $P_2(-1,4)$ y $P_3(4,5)$. **a)** Determine gráficamente si forman un triángulo. **b)** Encuentre las 3 pendientes que se pueden calcular. **c)** ¿Será posible concluir con las pendientes que hay un triángulo o no? Explique.
6. ¿Los puntos $M_1(1,1)$, $M_2(5,3)$ y $M_3(6,-4)$ formarán un triángulo isósceles?
7. La suma de los ángulos internos de un paralelogramo es 2π. Use este hecho para probar mediante pendientes que los puntos $H_1(1,1)$, $H_2(5,3)$, $H_3(8,0)$ y $H_4(4,-2)$ forman un paralelogramo.
8. **(Reto)** Use un diagrama similar al planteado en Fig.   para encontrar una forma de calcular el ángulo entre dos rectas.
9. Para cada una de las rectas encontrar aquellas que pasan por el origen: **a)** $x+y=0$ **b)** $2x-3y+4=0$ **c)** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.
10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $X(1,5)$ y tiene pendiente 2.
11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $X(6,-3)$ y tiene un ángulo de inclinación de $\frac{\pi}{4}$.
12. **(Concepto adicional)** Algunos autores llaman ecuación simétrica a la expresión de la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ donde *b* es la ordenada al origen y *a* la abscisa al origen. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $T_1(-3,-1)$ y $T_2(2,-6)$ y exprésela en su forma simétrica.
13. **(Concepto adicional)** La mediatriz de un segmento es la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento. Encuentre la ecuación de la mediatriz del segmento que va $P(-3,2)$ a $Q(1,6)$.
14. Hallar la ecuación de la recta con pendiente -4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $y+2x-8=0$ y $-2y+3x+9=0$.
15. El punto $K(x,10)$ está sobre la recta de pendiente 3 que pasa por el punto $L(7,-2)$. Encuentre el valor de *x*.
16. Considere la recta $x+y+1=0$. **a)** Encuentre la ordenada al origen. **b)** Encuentre la ecuación de la recta paralela a la recta, pero que su ordenada al origen sea la parte negativa de la ordenada al origen de la recta del inciso **a**.
17. Para muchas empresas, el costo de ventas tiene una relación lineal con el ingreso bruto. Esto parece ser el caso Starburcks, ahora convertido en un básico de las cafeterías. Considere que

para el caso particular de Starbucks usted sabe que el año pasado, se obtuvieron un ingreso bruto por 9,411 millones de dólares que significaron un costo de ventas de 3,999 millones de dólares; mientras que el año antepasado se había obtenido un ingreso bruto por 7,787 millones de dólares con un costo de ventas de 3,179 millones de dólares. **a)** Encuentre la pendiente de la relación lineal entre el ingreso bruto y el costo de venta. **b)** De una interpretación para la pendiente en el contexto planteado. **c)** Si el ingreso esperado para este año es de 10,700 millones de dólares, encuentre el costo de ventas esperado.

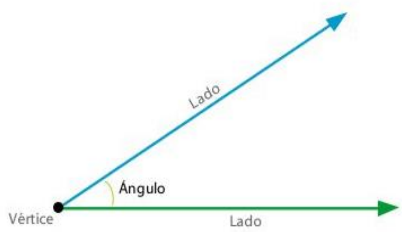
18. Un nuevo y presuntamente más simple proceso de laboratorio ha sido probado para recuperar óxido de calcio (CaO) de las soluciones que contienen magnesio. Se presupone que la cantidad de CaO recuperado es lineal respecto a la cantidad total de CaO en la solución. De acuerdo a las pruebas hechas se ha recuperado 3.7 mg de CaO de soluciones con 4.0 mg de CaO, y en soluciones con 25 mg de CaO se ha recuperado 24.5 mg de CaO. **a)** Encuentre la pendiente de la relación lineal entre el CaO recuperado y el CaO inicial. **b)** De una interpretación para la pendiente en el contexto planteado. **c)** ¿Cuánto CaO se recuperaría de una solución con 40 mg de CaO?
19. La determinación de la edad de un whisky en barrica depende del número de cambios químicos que mejoran su sabor y su tono (oscuro). La creencia es que, a mayor longevidad, el whisky tendrá mejor sabor y será más oscuro. Una prueba que resumen la calidad de sabor y el tono ha arrojado que un whisky de 2 años tiene una puntuación de 105 años y un whisky de 4 años una puntuación de 106.8. **a)** Encuentre la pendiente de la relación lineal que relaciona la longevidad del whisky con su puntuación en la prueba. **b)** De una interpretación para la pendiente en el contexto planteado. **c)** Si un whisky obtuvo una puntuación de 112.4, ¿cuál sería su edad?
20. Considere el conjunto $A = \{(x, y): x + y = 0\}$. **a)** Verifique si los puntos $P_1(2,-2)$, $P_2(2,2)$, $P_3(2,-1)$, $P_4(3,-3)$, $P_5(-5,5)$ y $P_6(3,-2)$ son parte del conjunto *A*. **b)** Trace la representación gráfica del conjunto. **c)** Si la representación resulta ser una recta, encuentre su pendiente, sino no haga nada.
21. Trace la representación gráfica de los siguientes conjuntos: **a)** $A = \{(x, y): x - y = 0\}$ **b)** $A = \{(x, y): x + 3 = 0\}$ **c)** $A = \{(x, y): y - 5 = 0\}$.
22. Representar gráficamente las regiones denotadas por cada conjunto:
    a) $\left\{(x, y): x > \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{(x, y): y < \frac{1}{2}\right\}$
    b) $\left\{(x, y): y > \frac{1}{2}x\right\} \cup \left\{(x, y): y < \frac{1}{2}\right\}$
    c) $\{(x, y): y > x + 4\} \cup \{(x, y): y < 2x - 3\}$
23. Dos amigos deciden encontrarse en cierto lugar, pero olvidad la hora exacta de la cita, únicamente recuerdan que la hora era entre las 12:00 y las 13:00 horas. Cada uno de ellos decide llegar al azar en ese lapso y esperar solamente 10 minutos. Plantee la región que representa *"Los amigos se encuentran"* como unión o intersección de dos desigualdades lineales.

TRIGONOMETRÍA

El estudio de la trigonometría es muy importante por sus aplicaciones en diferentes ámbitos, que van desde la ingeniería, la navegación, hasta las artes como la música y la arquitectura. Parte central de la trigonometría es la resolución de triángulos; es decir, la determinación de las medidas de sus lados y sus ángulos, a partir de otros elementos conocidos.

4.1 Definiciones…

$Ángulo$: Se define como la abertura entre dos semirectas que inician en el mismo punto, este punto es llamado vértice. Se dice que el ángulo es positivo cuando lo recorremos en sentido contrario a las manecillas del reloj; se dice que es negativo cuando lo recorremos en el sentido de las manecillas del reloj.



Los ángulos se miden en grados, los cuales se denotan con el símbolo ^{o} delante del número, los grados a su vez son el resultado de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

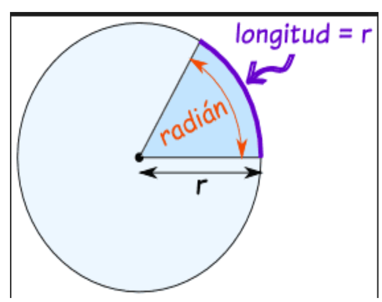
De acuerdo a las medidas de los ángulos reciben un nombre especial:

Ángulo agudo: ángulo que mide menos de 90^{o}.

Ángulo recto: ángulo que mide 90^{o}.

Ángulo obtuso: ángulo que mide más de 90^{o}.

$Radianes$: Se define como la medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia cuyos lados cortan un arco igual en longitud al radio de la circunferencia.



Aunque la forma correcta de medir ángulos es con radianes, acostumbramos a medirlos en grados, por lo que podemos pasar de grados a radianes y viceversa. Este proceso se realiza con una regla de tres con 180^{o} corresponde a πrad

EJEMPLO:

1) Convertir 30^{o} a radianes
$Solución$:
Tenemos la regla de tres:
Grados Radianes
180^{o} ------------ π

30^{o} -------------- x

Resolviendo la regla de tres:

$x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ radianes.

2) Cambiar $\frac{\pi}{3}$ radianes a grados

$Solución$:

Grados Radianes

180° ------------ π

x -------------- $\frac{\pi}{3}$

Resolviendo la regla de tres tenemos $x = \frac{180\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\pi} = 60^o$.

3) Calcular la medida en grados de $\frac{9\pi}{4}$.

$Solución$:

Tenemos la siguiente regla de tres:

Grados Radianes

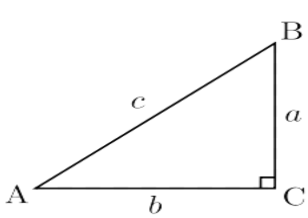
180° ------------ π

x -------------- $\frac{9\pi}{4}$

Resolviéndola $x = \frac{180\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{\pi} = 405^o$

4.2 Funciones trigonométricas

En un triángulo rectángulo ABC, es usual llamar C al ángulo recto, A y B a los ángulos agudos, y denotar con las minúsculas correspondientes a los lados opuestos a dichos ángulos.



Utilizando las razones que existen entre los lados del triángulo, podemos definir el *seno*, *coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante* del ángulo A como sigue:

$$senA = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$cosA = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Observaciones:

$$0 \leq senA \leq 1$$

$$0 \leq cosA \leq 1$$

$$tanA = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$cotA = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

$$secA = \frac{c}{b} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

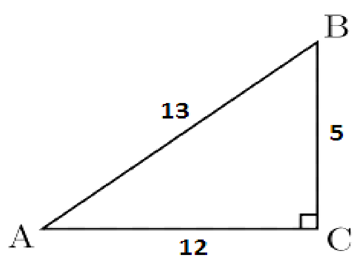
$$cscA = \frac{c}{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

NOTA:

- Una propiedad importante de las funciones trigonométricas es que solo basta conocer los valores de *seno* y *coseno* del ángulo, para obtener el resto de las funciones trigonométricas ya que:
  $tanA = \frac{senA}{cosA}$, $cotA = \frac{cosA}{senA}$, $secA = \frac{1}{cosA}$ y $cscA = \frac{1}{senA}$
  Asimismo $tanA = \frac{1}{cotA}$, $cotA = \frac{1}{tanA}$, $senA = \frac{1}{cscA}$ y $cosA = \frac{1}{secA}$; lo anterior quiere decir que $senA$ y $cscA$; $cosA$ y $secA$; $tanA$ y $cotA$ son recíprocas.
- $-1 \leq senA \leq 1$ y $-1 \leq cosA \leq 1$

EJEMPLOS:

1) Encontrar los valores del seno, coseno y tangente para los ángulos agudos del triángulo rectángulo siguiente:



$Solución$:

Utilizando la definición anterior tenemos que $a = 5, b = 12\ y\ c = 13$, por lo que $senA = \frac{5}{13}$, $cosA = \frac{12}{13}$ y $tanA = \frac{5}{12}$

2) Encontrar los elementos del triángulo rectángulo si se conocen las funciones trigonométricas:

$senA = \frac{2}{\sqrt{20}}$ y $tanA = \frac{2}{4}$

$Solución$:

Por la definición de las funciones trigonométricas

$senA = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ y $tanA = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$ tenemos que el cateto puesto es 2, el cateto adyacente es 4 y la hipotenusa es $\sqrt{20}$.

3) Encontrar las funciones trigonométricas si sus catetos $a = 7$, $b = 3$ y $c = \sqrt{30}$

$Solución$:

Dado que conocemos los elementos del triángulo, tenemos $senA = \frac{7}{\sqrt{30}}$, $cosA = \frac{3}{\sqrt{30}}$, $tanA = \frac{7}{3}$, $cotA = \frac{3}{7}$, $secA = \frac{\sqrt{30}}{3}$ y $cscA = \frac{\sqrt{30}}{7}$

4) Un poste de luz mide 2.5 metros y proyecta una sombra del doble de su altura. ¿Cuánto mide el ángulo que forman los rayos solares con el suelo?

$Solución$:

Llamemos A al ángulo buscado, el poste mide 2.5 metros así que su sombra mide 5 metros; estas son las medidas de los catetos.

Entonces para determinar el ángulo que forman los rayos solares con el suelo, hay que calcular el ángulo A. Dado que conocemos las medidas de los catetos podemos utilizar $\tan A$, es decir $\tan A = \frac{2.5}{5} = 0.5$, usando la calculadora, tenemos que $A \approx 26.56^o$. Por lo que el ángulo que forman los rayos del sol con el suelo es de aproximadamente 26.56^o.

5) En un puente peatonal que cruza una calle se ha colocado una lámpara con el fin de alumbrarla. El puente mide 4.5 metros de altura. El rayo de luz hacia cada una de las aceras forma ángulos que miden 37° y 42°, respectivamente. ¿Cuál es el ancho de la calle?

$Solución$:

Dado que conocemos los ángulos que se forman con el suelo 37°, 42° y la altura. Tenemos dos triángulos rectángulos y podemos utilizar la función trigonométrica tan para encontrar la medida del lado faltante. Por lo que tenemos:

$$\tan 37^o = \frac{4.5}{x} \qquad \tan 42^o = \frac{4.5}{y}$$

$$x = \frac{4.5}{\tan 37^o} \qquad y = \frac{4.5}{\tan 42^o}$$

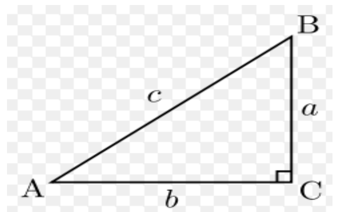
$$x = \frac{4.5}{0.75} \qquad y = \frac{4.5}{0.9}$$

$x = 6$ $y = 5$

Es decir, la calle mide $x + y = 6 + 5 = 11\, metros$

4.3 Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, $c^2 = a^2 + b^2$



Si deseas ver la demostración gráfica del Teorema de Pitágoras, puedes revisar el siguiente link https://www.geogebra.org/m/KzfTqtFc .

EJEMPLOS:

1) ¿Cuál es el valor de la hipotenusa si sabemos que el valor de los catetos son $a = 3$ y $b = 6$?

$Solución$:

Para encontrar el valor de la hipotenusa utilizaremos el Teorema de Pitágoras, ya que conocemos el valor de los catetos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$$

Entonces $c = \sqrt{45}$, es decir, el valor de la hipotenusa es $\sqrt{45}$.

2) Encontrar el valor del cateto a si conocemos que $b = 5$ y $c = 8$.

$Solución$:

Dado que conocemos un cateto y la hipotenusa, utilizaremos el teorema de Pitágoras, despejando ahora el cateto a.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Entonces:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

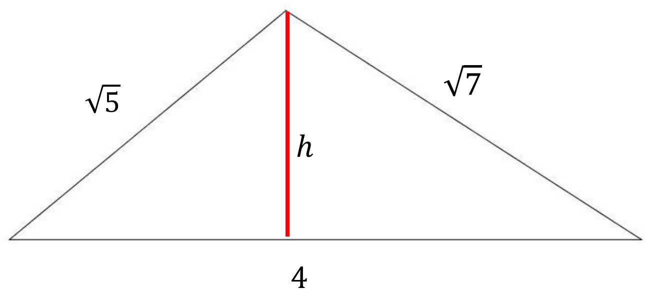
$$a^2 = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$$

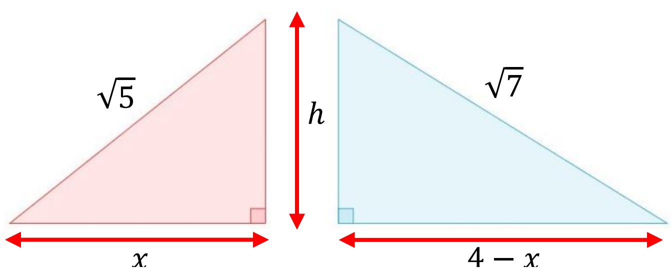
Por lo que

$$a = \sqrt{39}$$

3) Calcula la altura del siguiente triángulo sabiendo que sus lados valen $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ y su base es 4, como se muestra en la siguiente figura:

Se desea encontrar la longitud de la altura h, para esto, se puede dividir el triángulo en dos triángulos rectángulos, recuerda que la altura es perpendicular a la base, la división del triángulo en dos rectángulos quedaría como se muestra en la segunda figura, como se puede ver, la base se dividió en x y $4 - x$.





En cada triángulo se puede usar el teorema de Pitágoras, de donde se tiene que h es un cateto para ambos y una parte de la base es el segundo cateto, obteniendo las ecuaciones:

$h^2 + x^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$ y $h^2 + (4 - x)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2$.

Despejando h^2 de ambas se llega a que

$h^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2$ y $h^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 - (4 - x)^2$,

como el lado derecho de cada ecuación equivale a h^2, se puede igualar ambos y resolver para x:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 - (4 - x)^2$$

$$5 - x^2 = 7 - (16 - 8x + x^2)$$

$$5 - x^2 = 7 - 16 + 8x - x^2$$

$$5 = -9 + 8x$$

$$14 = 8x$$

$x = \frac{7}{4}$.

Dado el valor de x, sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones iniciales se obtiene el valor de h,

$h = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{31}{16}} = \frac{\sqrt{31}}{4} \approx 1.39.$

4) Encontrar el valor del cateto b si conocemos que $a = 6$ y $c = 11$.

$Solución$:

Dado que conocemos un cateto y la hipotenusa, utilizaremos el teorema de Pitágoras, despejando ahora el cateto b.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Entonces:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 11^2 - 6^2 = 121 - 36 = 85$$

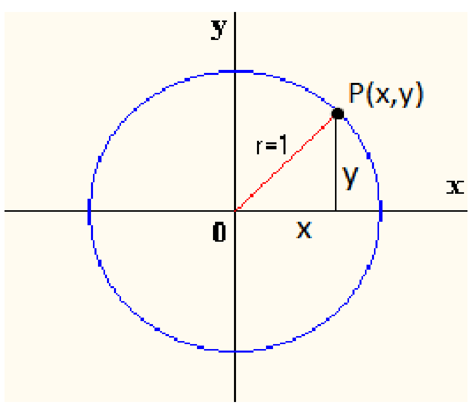
Por lo que

$$b = \sqrt{85}$$

Como pudimos ver en los ejemplos anteriores, el Teorema de Pitágoras es muy útil para encontrar un tercer lado del triángulo rectángulo conociendo dos de ellos.

4.4 Funciones trigonométricas y el círculo unitario

El conjunto de puntos a una distancia 1 del origen es una circunferencia de radio 1, a esta circunferencia se le llama circunferencia unitaria, cuya ecuación es:



$x^2 + y^2 = 1$.

Consideremos un círculo de radio 1 con el centro en el origen del sistema XY y un radio que forme un ángulo agudo de θ^o con el eje X. Llamemos $P(x, y)$ al extremo de este radio, veamos la figura.

Se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos miden x y y, y de hipotenusa 1.

El caso más sencillo de las funciones trigonométricas es justamente con la circunferencia unitaria, ya que el valor de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo, resulta ser el radio de la misma cuyo valor es 1, por lo que las funciones trigonométricas quedan simplificadas a los valores de los catetos como se muestra a continuación:

$$\operatorname{sen} A = y, \quad \cos A = x, \quad \tan A = \frac{y}{x},$$

$$\cot A = \frac{x}{y}, \quad \sec A = \frac{1}{x}, \quad \csc A = \frac{1}{y}.$$

Existen algunos ángulos que se utilizan con frecuencia, que se conocen como ángulos notables, por lo tanto sus valores en las funciones trigonométricas son fáciles de obtener; estos ángulos son $\frac{\pi}{4}$(45°),$\frac{\pi}{3}$(60°) y $\frac{\pi}{6}$(30°).

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas en estos ángulos, primero construimos un triángulo rectángulo con lados conocidos y el ángulo en uno de los vértices.

Para el ángulo $\frac{\pi}{4}$(45°) consideramos un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1 unidad. Como los lados son iguales, los ángulos opuestos a estos lados son iguales. Y como la suma de los tres ángulos debe ser π(180°), cada ángulo a cada cateto mide $\frac{\pi}{4}$.

Por el teorema de Pitágoras la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ unidades. De esta manera ya contamos con los valores de los catetos y podemos calcular las funciones trigonométricas:

$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

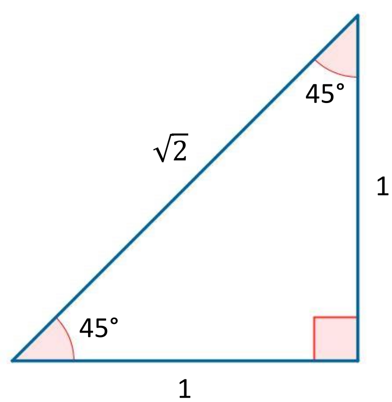
$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{1} = 1$$

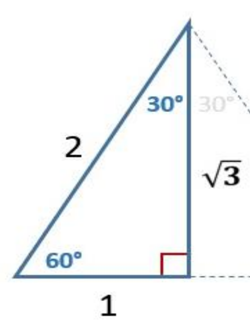
$$cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{1} = 1$$

$$sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$csc\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



Para los ángulos $\frac{\pi}{3}$(60°) y $\frac{\pi}{6}$(30°) tenemos un triángulo equilátero con lados igual a 2 unidades, es decir cada uno de los ángulos es $\frac{\pi}{3}$. Si trazamos la altura desde el vértice superior, nos quedan dos triángulos iguales con hipotenusa de 2 unidades, un cateto de 1 unidad y el otro cateto de acuerdo al teorema de Pitágoras de $\sqrt{3}$ unidades.



De donde tenemos las siguientes funciones trigonométricas para $\frac{\pi}{3}$(60°):

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{2}$$

$$tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{2}{1} = 2$$

$$csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

De donde tenemos las siguientes funciones trigonométricas para $\frac{\pi}{6}$(30°):

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{2}{1} = 2$$

De donde obtenemos una tabla como la siguiente:

	0	$\frac{\pi}{6}$**(30°)**	$\frac{\pi}{4}$**(45°)**	$\frac{\pi}{3}$**(60°)**
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

4.5 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad es un caso particular de ecuación que se cumple para todos los valores de la variable para los que tiene sentido. Las identidades aquí mencionadas son las utilizadas con más frecuencia.

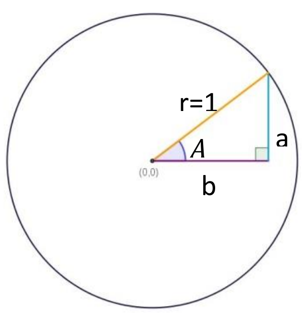
Identidades recíprocas

Por la misma definicón de las funciones trigonométricas, se tienen las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Identidades pitagóricas

1) $cos^2A + sen^2A = 1$



Esta identidad se obtiene de la aplicación del Teorema de Pitágoras en la circunferencia unitaria, ya que se tiene que $sen\ A = \frac{a}{1}$ y $\cos A = \frac{b}{1}$, aplicando esto en el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$sen^2\ A + \cos^2 A = 1$$

2) $tan^2A + 1 = sec^2A$

Esta identidad es una consecuencia de la anterior, ya que si $sen^2A + \cos^2 A = 1$, al dividirse toda la igualdad por $\cos^2 A$, se llega a:

$$\frac{1}{\cos^2 A}(sen^2\ A + \cos^2 A) = (1)\frac{1}{\cos^2 A}$$

$$\frac{sen^2\ A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$tan^2A + 1 = sec^2A$$

3) $1 + cot^2A = csc^2A$

De forma similar a la anterior, ahora dividimos a la primer identidad Pitagórica por sen^2A:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 A}(sen^2\ A + \cos^2 A) = (1)\frac{1}{\operatorname{sen}^2 A}$$

$$\frac{sen^2 A}{\text{sen}^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\text{sen}^2 A} = \frac{1}{\text{sen}^2 A}$$

$$1 + cot^2A = csc^2A$$

EJEMPLOS:

1) Mostrar que $\frac{senA}{cscA} + \frac{cosA}{secA} = 1$ para todo ángulo A para el que esté definido el miembro izquierdo.

Solución:

Utilizando relaciones e identidades anteriores tenemos:

$$\frac{senA}{cscA} + \frac{cosA}{secA} = \frac{senA}{\frac{1}{senA}} + \frac{cosA}{\frac{1}{cosA}} = sen^2A + cos^2A = 1$$

2) Mostrar que $tan^2A - cot^2A = sec^2A - csc^2A$ para todo ángulo A para el que estén definidas todas las expresiones que aquí aparecen.

Solución:

$$\begin{aligned} tan^2A - cot^2A &= \frac{sen^2A}{cos^2A} - \frac{cos^2A}{sen^2A} = \frac{sen^4A - cos^4A}{sen^2Acos^2A} = \frac{(sen^2A + cos^2A)(sen^2A - cos^2A)}{sen^2Acos^2A} \\ &= \frac{1 * (sen^2A - cos^2A)}{sen^2Acos^2A} = \frac{sen^2A}{sen^2Acos^2A} - \frac{cos^2A}{sen^2Acos^2A} = \frac{1}{cos^2A} - \frac{1}{sen^2A} \\ &= sec^2A - csc^2A \end{aligned}$$

Identidades que relacionan al ángulo A con –A

Tenemos las siguientes relaciones:

$\cos(-A) = cosA$ y $sen(-A) = -senA$

EJEMPLO:

Probar que $senA - cosA = \frac{cos^2(-A) - sen^2(-A)}{sen(-A) - \cos(-A)}$ donde A es un ángulo.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{cos^2(-A) - sen^2(-A)}{sen(-A) - \cos(-A)} &= \frac{(cosA)^2 - (-senA)^2}{-senA - \cos A} = \frac{cos^2A - sen^2A}{-(senA + \cos A)} \\ &= \frac{(cosA + senA)(cosA - senA)}{-(senA + \cos A)} = -(cosA - senA) = senA - cosA \end{aligned}$$

Identidades para la suma de dos ángulos

Las identidades más utilizadas para suma de ángulos son las siguientes:

$\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$

$\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$

$$sen(A+B) = senAcosB + cosAsenB$$

$$sen(A-B) = senAcosB - cosAsenB$$

Para cualesquiera ángulos A, B

EJEMPLOS:

1) Probar que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = senA$ para cualquier ángulo A.

$Solución$:

Utilizando una de las anteriores tenemos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = cos\frac{\pi}{2}cosA + sen\frac{\pi}{2}senA = 0(cosA) + 1(senA) = senA$$

2) Probar que sen $\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = cosA$ para cualquier ángulo A.

$Solución$:

Utilizando el ejercicio anterior tenemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - A\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + A\right) = cosA$$

3) Encontrar el valor exacto de $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$

$Solución$:

Utilizando la identidad $\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$ tenemos que

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = cos\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{4} - sen\frac{\pi}{6}sen\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

4) Simplificar la siguiente expresión $\sec(A+\pi)$

$Solución$:

Utilizando la propiedad $secA = \frac{1}{cosA}$ tenemos que

$$\sec(A+\pi) = \frac{1}{cos(A+\pi)} = \frac{1}{cosAcos\pi - senAsen\pi} = \frac{1}{cosA(-1) - senA(0)} = -\frac{1}{cosA}$$

5) Probar que $senAcosB = \frac{1}{2}sen(A+B) + \frac{1}{2}sen(A-B)$ para cualesquiera ángulos A y B.

$Solución$:

Como ya conocemos que

$$sen(A+B) = senAcosB + cosAsenB$$

$$sen(A-B) = senAcosB - cosAsenB$$

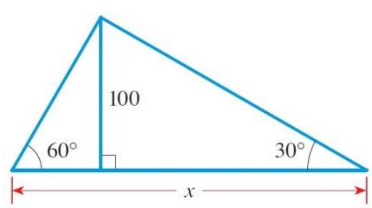
Al sumarlas obtenemos

$sen(A+B) + sen(A-B) = 2senAcosB$ entonces $\frac{sen(A+B)+sen(A-B)}{2} = senAcosB$

Por lo tanto $senAcosB = \frac{1}{2}sen(A+B) + \frac{1}{2}sen(A-B)$ que es lo que se quería probar.

Lista de ejercicios:

1. Dado un triángulo rectángulo que cumpla que $\cos\theta = \frac{3}{4}$, encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ.
2. Un edificio proyecta una sombra de 53.2 metros de largo. Encuentra la altura del edificio si el ángulo de elevación del Sol es 25.7°.
3. Stonehenge en los llanos de Salisbury, Inglaterra, fue construido usando bloques de piedra maciza de más de 99,000 libras cada uno. Levantar un solo bloque requería de 550 personas que lo subían por una rampa inclinada a un ángulo de 9°. Calcula la distancia que un bloque era movido para levantarlo a una altura de 30 pies.
4. Localizar el ó los puntos que pertenezcan a la circunferencia unitaria y sean de la forma $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, y\right)$.
5. Supón que te encuentras en un punto en el suelo a 500 metros de la base de un edificio, y encuentras que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que sobre éste, hay una astabandera, cuyo ángulo de elevación es de 27 °. Encuentre la altura del edificio y la longitud de la astabandera.
6. Encuentra el valor de x de:



7. La Tierra gira alrededor de su eje una vez cada 23 horas, 56 minutos y 4 segundos. Calcula el número de radianes que gira la Tierra en un segundo.
8. Un avión está volando a una elevación de 5150 pies, directamente sobre una carretera recta. Dos automovilistas van en su auto en la carretera en lados opuestos del avión; el ángulo de depresión a un auto es 35° y al otro es de 52°. ¿A qué distancia están entre sí los dos autos?

9. Un hombre que está en una playa hace volar un papalote. Sostiene el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del suelo y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la cuerda es de 35 metros de largo, ¿a qué altura está la cometa sobre el suelo?
10. Una escalera de 40 pies se apoya contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado por la escalera y el edificio?
11. Para estimar la altura de una montaña sobre una meseta, el ángulo de elevación a lo alto de la montaña se mide y es de 32°. A un kilómetro más cerca de la montaña a lo largo de la meseta, se encuentra que el ángulo de elevación es de 35°. Estima la altura de la montaña.

4.6 Ley de senos y cosenos

Introducción.

En la sección anterior se estudia la resolución de problemas que implican las funciones trigonométricas y a los triángulos rectángulos, pero las funciones trigonométricas también se pueden usar para triángulo oblicuos (triángulos sin ángulos rectos), para esto se estudiara en esta sección la ley de senos y la ley de cosenos.

Por convención se suelen nombrar a los ángulos de un triángulo como A, B,C y a sus lados opuestos correspondientes por a, b, c. (Fig.1)

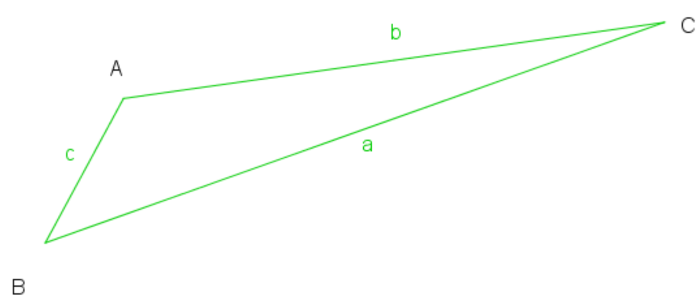


Figura_1

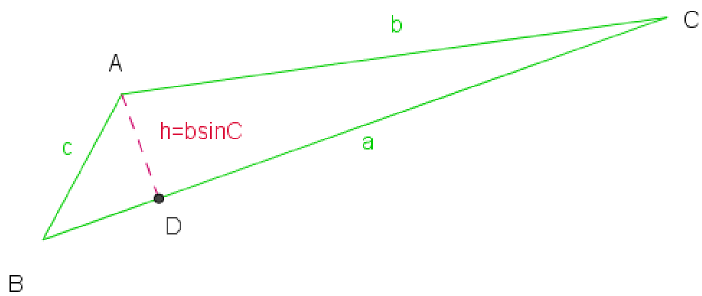
En general, un triángulo está determinado por tres de seis partes (ángulos y lados) siempre que al menos una sea un lado.

Ley de Senos

Está ley establece que dado cualquier triángulo ABC las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos correspondientes. Es decir,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Demostración.



En la Figura 1, trace la altura correspondiente al lado a, esta altura divide al triángulo ABC en dos triángulos rectángulos, aplicando la definición de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo ACD tenemos que la altura correspondiente está dada por $h = b\sin C$, si ahora tomamos el triángulo ABD y aplicamos la misma idea para sacar el valor de la misma altura obtenemos que $h = c\sin B$.

Luego, como hablamos de la misma altura entonces:

$$b\sin C = c\sin B \Rightarrow \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$$

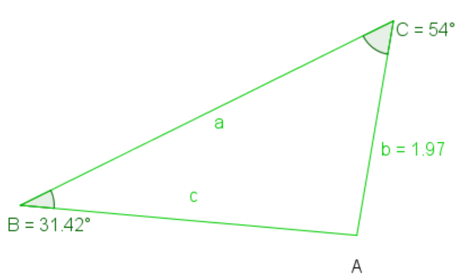
Para el resto de la igualdad se toman las otras dos alturas del triángulo.

Observación.

Esta ley aplica cuando se tiene un lado y dos ángulos (LAA) o bien dos lados y el ángulo opuesto de esos lados (LLA).

Ejemplo 1. Caso LAA.

Resuelva el siguiente triángulo



Solución:

Primero, encontraremos el ángulo faltante

$\angle A = 180^{o} - 54^{o} - 31.42^{o} = 94.58^{o}$

Dado que se conoce el lado b, para encontrar el lado a se usa la relación y despejamos a,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{1.97\sin 94.58^{o}}{\sin 31.42^{o}}\cong 3.77$$

De manera similar, para encontrar el lado c

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{b\sin c}{\sin B}=\frac{1.97\sin 54}{\sin 31.42}\cong 3.06.$$

Ejemplo 2

Si dos de los ángulos de un triángulo miden 75^{o} y 25^{o} grados, respectivamente, y el lado opuesto al ángulo de 25^{o} mide 6 centímetros, encontrar las longitudes de los lados faltantes.

Solución:

Llamaremos A al ángulo que mide 75^{o} y B al que mide 25^{o}. Encontramos el ángulo C con suma de los ángulos interiores C=180^{o}- 75^{o}-25^{o}=80^{o}, ahora utilizando la ley de los senos $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ tenemos $\frac{\sin 75^{o}}{a}=\frac{\sin 25^{o}}{6}=\frac{\sin 80^{o}}{c}$ donde

$$\frac{\sin 75^{o}}{a}=\frac{\sin 25^{o}}{6} \qquad \text{y} \qquad \frac{\sin 25^{o}}{6}=\frac{\sin 80^{o}}{c}$$

$$6\sin 75^{o}=a\sin 25^{o} \qquad c\sin 25^{o}=6\sin 80^{o}$$

$$a=\frac{6\sin 75^{o}}{\sin 25^{o}} \qquad c=\frac{6\sin 80^{o}}{\sin 25^{o}}$$

$$a\approx 13.71 \qquad c\approx 14$$

Nota:

Para el caso LLA se puede dar el caso que haya dos triángulos, un triángulo o ninguno.

Ejemplo 3. Caso LLA un triángulo.

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A=45^{o}, a=7\sqrt{2}, b=7.$

Solución:

Se puede realizar un bosquejo del triángulo, aunque no es necesario.

Dada la información partiremos de $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$ para encontrar el ángulo B

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{7}{\sqrt{2}}\sin 45^{o}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Ahora, los ángulos que hacen posible que $\sin B=\frac{1}{2}$ son dos 30^{o} y 150^{o}, pero el de 150^{o} no es compatible con la información previa, pues $45^{o}+150^{o}>180^{o}$. Por lo tanto, el $\angle B=30^{o}$, y así el ángulo restante es de $\angle C=180^{o}-45^{o}-30^{o}=105^{o}$.

Ahora para hallar el lado c ,

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{7\sin 105^{o}}{\sin 30^{o}}\cong 13.5$$

Ejemplo 4.

De un triángulo rectángulo ABC sabemos que el lado AC mide 3cm, el lado BC mide 9cm y el ángulo B mide 30^{o}. Encontrar los ángulos que faltan.

Solución:

Tenemos que el lado AC es opuesto al ángulo B; entonces $AC=b$. Análogamente, $BC=a$ y $AB=c$. Por la ley de los senos tenemos:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

De donde

$$\frac{\sin A}{9}=\frac{\sin 30^{o}}{3}=\frac{\sin C}{c}$$

de la primer igualdad tenemos

$$\sin A=\frac{9\sin 30^{o}}{3}=\frac{9(0.5)}{3}=\frac{4.5}{3}=1.5$$

Lo anterior no es posible ya que como se había comentado anteriormente el seno se encuentra entre -1 y 1. Por lo que no se puede construir un triángulo con esas características.

Ejemplo 5. Caso LLA dos triángulos.

Resuelva el triángulo ABC , si $\angle A = 41^{o}, a = 190, b = 250$

Solución:

Partimos de la ley de senos

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{250 \sin 41^{o}}{190} \cong 0.8632$$

Nuevamente hay dos posibles valores para el ángulo, usando la tecla de $\sin^{-1}$ en la calculadora obtenemos que uno de los ángulos es aproximadamente 59.7^{o} . El otro es $180^{o} - 59.7^{o} = 120.3^{o}$. Denotaremos a estos ángulos por B_1, B_2, de modo que resolveremos dos triángulos

Triangulo $A_1B_1C_1$

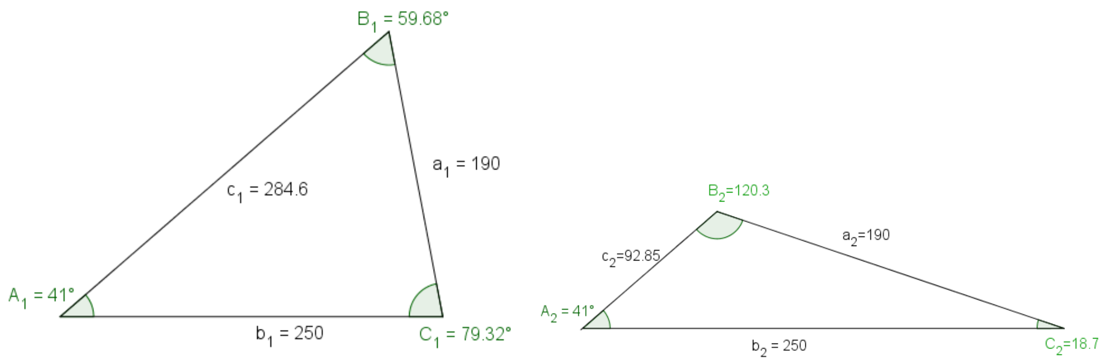
$$\angle C_1 = 180^{o} - 41^{o} - 59.7^{o} = 79.3^{o}$$

$$c_1 = \frac{a_1 \sin C_1}{\sin A_1} \cong \frac{190 \sin 79.3^{o}}{\sin 41^{o}} \cong 284.57$$

Triángulo $A_2B_2C_2$

$$\angle C_2 = 180^{o} - 41^{o} - 120.3^{o} = 18.7^{o}$$

$$c_2 = \frac{a_2 \sin C_2}{\sin A_2} \cong \frac{190 \sin 18.7^{o}}{\sin 41^{o}} \cong 92.85$$



Ejemplo 6. LLA sin triangulo.

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 42^{\text{o}}, a = 70, b = 122$.

Solución:

Aplicando la ley de senos,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

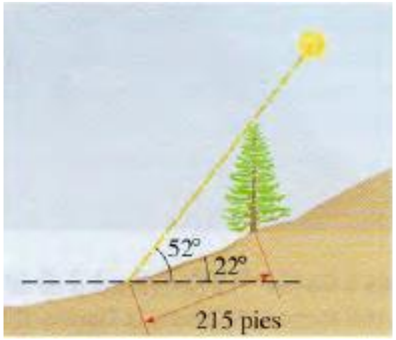
$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{122 \sin 42^{\text{o}}}{70} \cong 1.17$$

Dado que el seno de un número nuca es mayor a 1, se concluye que ningún triangulo se puede formar con la información proporcionada.

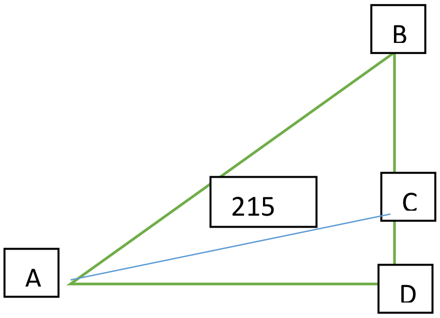
Ejemplo 7. Aplicación.

Un árbol en una ladera proyecta una sombra de 215 pies colina abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es 22^{o} respecto a la horizontal y el ángulo de elevación del sol es de 52^{o}, encuentre la altura del árbol.

Solución:



Tener un bosquejo de lo que se tiene y lo que se busca nos da una idea de por dónde empezar.



Buscamos el valor del lado BC en nuestro diagrama.

El ángulo BAC=52-22=30

Para conocer el ángulo en B nos fijamos que se forma un triángulo rectángulo con ABD y por tanto $\angle B = 180 - 90 - 52 = 38$.

Aplicando la ley d senos obtenemos

$$\frac{\sin 30}{BC} = \frac{\sin 38}{215} \Rightarrow BC = \frac{215 \sin 30}{\sin 38} \cong 174.60$$

Por lo tanto, la altura del árbol es 174.6 pies.

Ley de cosenos

En cualquier triángulo ABC (Figura 1) se tiene que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Demostración.

Para probar la ley de cosenos, coloque el triángulo ABC de modo que el ángulo de A quede sobre el origen, como se muestra en la figura 2.

Con la fórmula de distancia entre dos puntos, se obtiene

$$a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A - 0)^2$$

$$= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A$$

$$= b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc \cos A + c^2$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

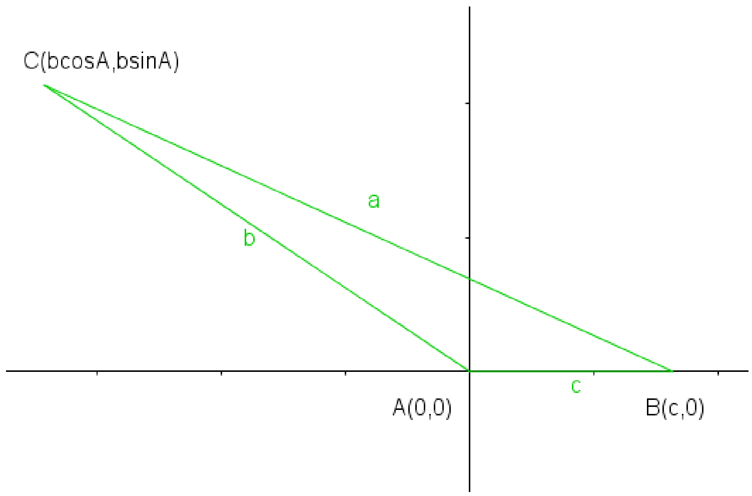


Figura 2

Esto demuestra una de las fórmulas, las otras se obtienen de manera análoga colocando los respectivos lados en el eje X.

Ejemplo 1. Caso LLL.

Los lados de un triángulo son $a = 4, b = 10, c = 7$. Encuentre los ángulos del triángulo.

Solución:

Primero encontraremos el $\angle A$, de la ley de cosenos despejamos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Sustituyendo los valores anteriores

$$\cos A = \frac{10^2 + 7^2 - 4^2}{2(10)(7)} \cong 0.95$$

Con ayuda de la calculadora obtenemos $\angle A = 18.195^{\circ}$

De la misma manera

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 7^2 - 10^2}{2(4)(7)} \cong -0.625$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 10^2 - 7^2}{2(4)(10)} \cong 0.8375$$

Con ayuda de la calculadora obtenemos $\angle B = 128.68, \angle C = 33.123^{\circ}$.

Ejemplo 2

Tenemos que los lados de un triángulo miden 2, 5 y 3.2, respectivamente, encontrar el valor de sus ángulos.
Solución:

Sean $a = 2, b = 5 \; y \; c = 3.2$ y los ángulos A, B, C a los vértices opuestos. Utilicemos la ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2(ab)\cos C$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2(ab)} = \frac{2^2 + 5^2 - 3.2^2}{2(2)(5)} = \frac{4 + 25 - 10.24}{20} = \frac{18.76}{20} = 0.938$$

De donde $C \approx 20.28$

Utilizaremos la ley de los senos $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ tenemos que $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin(20.28^o)}{3.2}$

$$\sin A = \frac{2\sin(20.28^o)}{3.2} = \frac{2(0.3466)}{3.2} = 0.216$$

$$A \approx 12.51^o$$

Entonces $B = 180^0 - 20.28^o - 12.51^o = 147.25^o$

Por lo que los ángulos del triángulo son: $A \approx 12.51^o$; $B \approx 147.25^o$ y $C \approx 20.28$

Ejemplo 3. Caso LAL.

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 46^{\text{o}}, b = 10, c = 18$

Solución:

Encontraremos a por la ley de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 10^2 + 18^2 - 2(10)(18)\cos(46^{\text{o}}) \cong 173.92$$

Así, $a \cong \sqrt{173.92} \cong 13.19$

Ahora, para los ángulos se podría utilizar la ley de senos, pero continuaremos con la de cosenos.

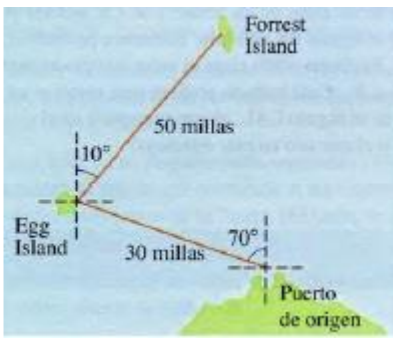
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(13.19)^2 + 18^2 - 10^2}{2(13.19)(18)} \cong 0.83813$$

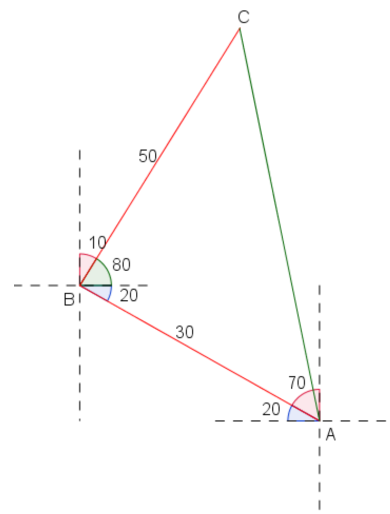
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(13.19)^2 + 10^2 - 18^2}{2(13.19)(10)} \cong -0.18963$$

Con ayuda de la calculadora obtenemos $\angle B = 33.06^{\circ}$, $\angle C = 100.94^{\circ}$.

Ejemplo 4. Aplicación.

Un pescador sale de su puerto de origen y se dirige en la dirección $N70^{\circ}O$. Viaja 30 minutos y llega a Egg Island. El siguiente día navega en dirección $N10^{\circ}E$ durante 50 millas y llega a Forrest Island. Encuentre la distancia entre el puerto de origen del pescador y Forrest Island.





Solución:

Pasamos nuestro problema un triángulo a resolver

Y completamos la información referente con los ángulos.

De esta manera el problema se reduce a un triángulo de la forma LAL y encontrar un lado.

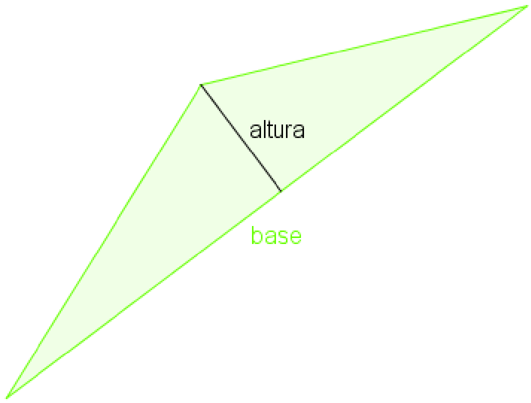
Usamos la ley de cosenos.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 50^2 + 30^2 - 2(50)(30)\cos(100^{\circ}) \cong 3920.9445$$

Así $b \cong \sqrt{3920.9445} \cong 62.61745$

Por lo tanto, la distancia entre el puerto de origen del pescador y Forrest Island es aproximadamente de 62.61745 millas.

Área de Triángulos.



La altura de un triángulo está dada por:

$$área = \frac{1}{2} \times (base) \times (altura)$$

´dónde la base es cualquier lado de un triángulo y la altura es la distancia más corta de la base al vértice opuesto (este segmento es perpendicular a la base).

Cuando queremos el área de un triángulo rectángulo la base y altura son los catetos del triángulo.

Cuando no es triangulo rectángulo es posible encontrar el área si se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, o bien si se conocen los tres lados del triángulo.

Área del triángulo conociendo dos lados a, b y el ángulo θ entre ellos.

$$área = \frac{1}{2} ab \sin\theta$$

Área del triángulo conociendo los tres lados a, b, c .

$$área = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el semiperímetro del triángulo. Está formula recibe el nombre de "formula de Herón".

Ejemplo 1.

Un hombre desea comprar un lote triangular, los frentes del lote son 125,280,315 pies. Encuentre el área del triángulo.

Solución:

El semiperímetro está dado por

$$s = \frac{125+280+315}{2} = 360$$

Luego, por la fórmula de Herón,

$$área = \sqrt{(360)(360-125)(360-280)(360-315)} \cong 17451.6$$

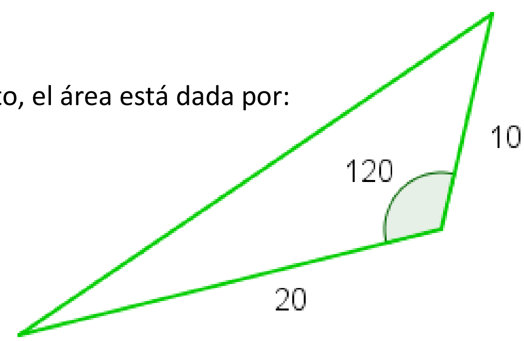
Así, el área del lote es 17451.6 pies.

Ejemplo 2.

Encuentre el área del triángulo mostrado en la figura siguiente.

Solución:

Tenemos dos lados y el ángulo entre ellos, por lo tanto, el área está dada por:



$$\acute{a}rea = \frac{1}{2}(10)(20)\sin(120) \cong 86.60$$

CAPITULO III
ACERCAMIENTO A LA PLATAFORMA MOODLE

3.1 ¿Qué es Moodle?

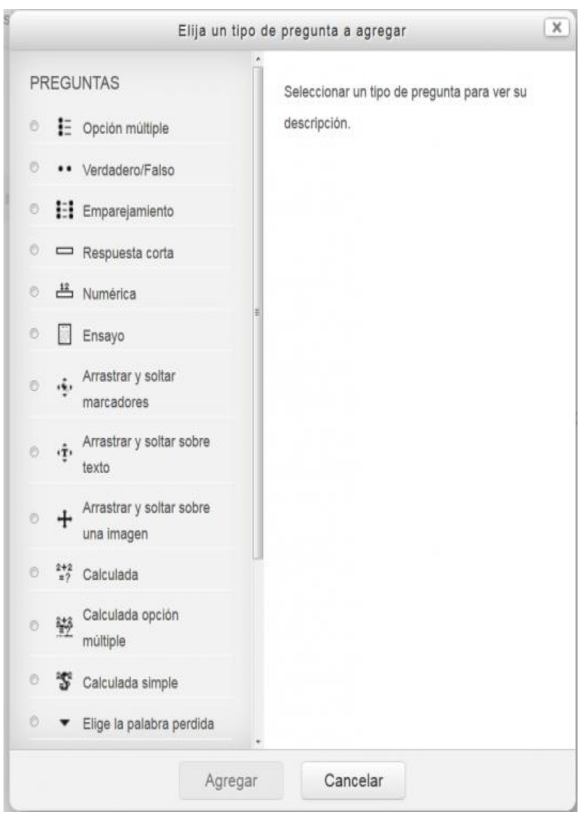
Moodle es una plataforma de aprendizaje diseñada para proporcionarles a educadores, administradores y estudiantes un sistema integrado único, robusto y seguro para crear ambientes de aprendizaje personalizado. Moodle se puede descargar a un servidor web o pedir asistencia a Moodle, cabe mencionar que es gratuito como programa de código abierto, es decir, es un modelo de desarrollo de software basado en la colaboración abierta. Esta plataforma tiene la confianza de empresas grandes y pequeñas, el número de sus usuarios asciende los 79 millones entre usuarios académicos y empresariales, lo que la hace la plataforma de aprendizaje más utilizada en el mundo. Con una capacidad multilingüe, ya que se ha traducido a más de 120 idiomas.

Moodle proporciona un conjunto de herramientas centradas en el estudiante y ambientes de aprendizaje colaborativo. Además de que cuenta con una interfaz fácil de usar.

En la UAQ se encuentra en: http://uaqedvirtual.uaq.mx/propeing/

3.2 Tipos de pregunta en Moodle

Al momento de realizar los cuestionarios en Moodle, se elige el tipo de pregunta que se quiere incluir: calculada, calculada opción múltiple, calculada simple, arrastrar y soltar texto, arrastrar y soltar marcadores, arrastrar y soltar sobre imagen, descripción, ensayo, emparejamiento (relación de columnas), respuestas incrustadas (cloze), opción múltiple, respuesta corta, numérica, relacionar columnas de respuesta corta aleatoria, seleccionar palabras faltantes, falso/verdadero, etc. Aquí únicamente describiré las que se utilizaron en el aula virtual de la UAQ para el curso propedéutico.



OPCIÓN MULTIPLE: con este tipo de pregunta se pueden crear preguntas con respuesta única y preguntas con respuesta múltiple, puede incluir imágenes, sonidos y/u opciones de respuesta (al insertarles HTML)

VERDADERO/FALSO: en respuesta a una pregunta el alumno elige entre dos opciones como el nombre de la pregunta lo sugiere Verdadero o Falso.

EMPAREJAMIENTO: en este tipo de pregunta se proporciona una lista de sub-preguntas, junto con una lista de respuestas. El alumno debe relacionar (emparejar)la respuesta correcta para cada pregunta.

RESPUESTA CORTA: en respuesta a una pregunta, el alumno escribe una palabra o frase corta. Puede haber varias respuestas correctas posibles con diferentes puntuaciones, por ejemplo: 3000 puede ser también 3,000 ó 3,000.00, etc. Además de que las respuestas pueden o no tener importancia por usar mayúsculas o minúsculas.

NUMÉRICA: este tipo de pregunta puede ser similar con la respuesta corta, la diferencia es que en la numérica se acepta un cierto margen de error, lo que permite que se configure un rango de respuesta aceptable.

RESPUESTA ANIDADA(CLOZE): estas son preguntas muy flexibles, que consisten en un párrafo de texto que tiene varias respuestas incrustadas dentro del texto que pueden ser de opción múltiple, respuesta corta y respuesta numérica.

CALCULADA: este tipo de pregunta permite crear preguntas individuales mediante el uso de comodines que son substituidos por valores aleatorios cuando se accede a dicha pregunta.

3.3 Estadísticas Moodle

La plataforma Moodle cuenta con la opción de proporcionar un reporte en el que se da un resumen completo y muestra las estadísticas del cuestionario o examen. Este reporte está dividido en 2 secciones:

-INFORMACIÓN DEL EXAMEN-
*Nombre del examen
*Nombre del curso
*Fechas de apertura y de cierre
*Número total de intentos (primeros/calificados)
*Calificación promedio para intentos primeros/todos
*Mediana de la calificación
*Desviación estándar de calificaciones
*Sesgo y Curtosis de la distribución de las calificaciones
*Coeficiente de consistencia interna
*Tasa de error
*Error estándar.

-ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DEL EXAMEN-
En esta sección se enlistan todas las preguntas del cuestionario con varias estadísticas:
*Número de la pregunta
*Nombre de la pregunta
*Intentos
*Índice de facilidad
*Desviación estándar
*Puntaje por adivinar aleatoriamente
*Peso Deseado/Efectivo
*Índice de discriminación
*Eficiencia discriminatoria
Cada una de las preguntas tiene la opción de llevarte al análisis individual de la pregunta, donde se desglosa el nombre de la pregunta, el tipo de pregunta, la pregunta formulada, las estadísticas, etc.
Para este trabajo se considerarán únicamente tres datos estadísticos proporcionados por la plataforma Moodle los cuales se definen a continuación:

-Índice de dificultad: implica que tan fácil o difícil es una pregunta específica para los estudiantes. El valor de este índice oscila entre 0 y 1, donde se clasifica como difícil si el valor es cercano al 0 o fácil si el valor es cercano al 1. O bien, puede verse como el porcentaje de estudiantes que contestó correctamente la pregunta.

La fórmula con la que es obtenida está estadística es la siguiente y nos proporciona un porcentaje:

$$F_p = 100 \frac{\bar{x}_p - x_p(\min)}{x_p(máx) - x_p(\min)}$$

Donde $\bar{x}_p = \frac{1}{S}\sum_{s\in S} x_p(s)$ es el promedio de todos los estudiantes, S el conjunto de estudiantes y p las posiciones de las preguntas.

-Índice de discriminación: este índice mide la eficacia de la pregunta, es decir, indica si el reactivo establece diferencias entre los estudiantes que tienen grandes o pequeñas cantidades de conocimientos, esta estadística puede tomar valores entre -1 y 1, los valores positivos indican una buena discriminación y los negativos una mala discriminación. Es decir, es la correlación entre el puntaje para esta pregunta y el puntaje para el examen completo. Así para una buena pregunta, se espera que los estudiantes que obtengan un puntaje alto en la pregunta sean los mismos estudiantes que tengan puntaje alto en el cuestionario.
La fórmula con la que Moodle calcula esta estadística es la siguiente:

$$D_p = 100\, r(x_p, X_p) = 100 \frac{C(x_p, X_p)}{\sqrt{V(x_p)V(X_p)}}$$

Donde $X_p = T_s - x_p(s)$, con $T_s = \sum_{p\in P} x_p(s)$ la calificación total de cada estudiante y $C(x_p, X_p) = \frac{1}{S-1}\sum_{s\in S}\left(x_p(s) - \bar{x}_p\right)\left(X_p(s) - \bar{X}_p\right)$

-Coeficiente de discriminación: este coeficiente considera a todos los estudiantes evaluados y permite predecir sobre los resultados del estudiante, este coeficiente nos permite diferenciar a los estudiantes eficientes de los no eficientes. El valor de este coeficiente oscila entre -1 y 1, y tiene la misma interpretación que el índice de discriminación. Con esto me refiero a que los valores negativos se dan cuando las preguntas son mejor contestadas por los estudiantes con bajas calificaciones. Es por eso que se diría que la pregunta está evaluando algo diferente a lo que se evalúa en el resto del cuestionario o es una pregunta con errores.

$DE_p = 100 \frac{C(x_p, X_p)}{C_{\max}(x_p, X_p)}$ donde $C_{\max}(x_p, X_p)$ se obtiene de ordenar de menor a mayor, antes de aplicar la fórmula de $C(x_p, X_p)$.

A continuación, presento las tablas de las estadísticas con su interpretación

TABLA: Calidad de los reactivos de acuerdo al índice de discriminación

Índice de discriminación	Calidad	Recomendación

<0	Pésima	Descartar
0-20	Pobre	Revisar a profundidad o descartar
21-30	Regular	Revisar
31-40	Buena	Posibilidad de mejora
>41	Excelente	Conservar

TABLA: Calidad de los reactivos de acuerdo al índice de dificultad

Índice de dificultad	**Clasificación del reactivo**
<10	Muy difícil
11-40	Difícil
41-60	Media
61-90	Fácil
>91	Muy fácil

La interpretación del coeficiente de dificultad es la misma que el índice de discriminación.

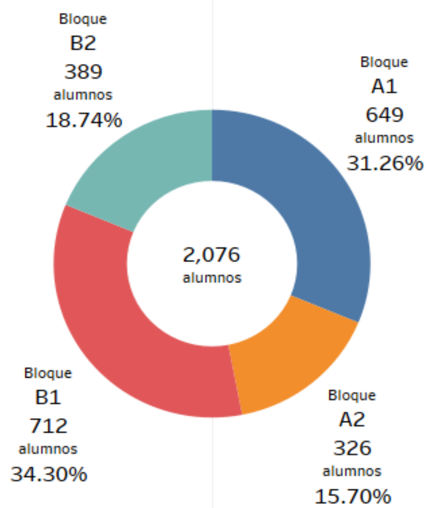
Si bien cada una de las estadísticas nos brinda valores importantes, el proceso de toma de decisiones considerando los tres elementos es fundamental.

Si bien dos de estas estadísticas recomienda descartar las preguntas que tengan una calidad pésima se recomienda analizar la redacción, estructura, tipo de pregunta y opciones de respuesta que se presenten en las preguntas antes de tomar la decisión de eliminarlos.

CAPÍTULO IV
ANÁLISIS

4.1 Metodología

La metodología empleada es de tipo descriptivo. Se dividieron los alumnos inscritos al curso propedéutico de la Facultad de Ingeniería en cuatro bloques A1, A2,B1 y B2 como se describe en la siguiente figura y tabla:



Bloque / Carrera	A1	B1	A2	B2
Licenciatura en Arquitectura	220	211	48	42
Licenciatura en Diseño Industrial	81	95	0	0
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas	0	34	0	0
Ingeniería Física	0	0	32	36
Ingeniería Agroindustrial	0	1	0	58
Ingeniería Biomédica	0	1	74	78
Ingeniería Civil	153	176	20	20
Ingeniería Electromecánica	2	0	24	24
Ingeniería en Nanotecnología	0	0	62	58
Ingeniería en Mecánica y Automotriz	4	4	50	55
Ingeniería Industrial y Manufactura	102	99	11	11

Ingeniería en Automatización	87	91	5	7
Total	649	712	326	389

El curso propedéutico tuvo una duración de 13 sábados, en el cual los alumnos realizaron 12 cuestionarios en el campus virtual, 10 correspondieron a tareas y 2 correspondieron a exámenes, el último sábado los alumnos realizaron el 3er examen parcial el cuál fue presencial. Para poder comparar los resultados los cuestionarios fueron los mismos en cada uno de los bloques.

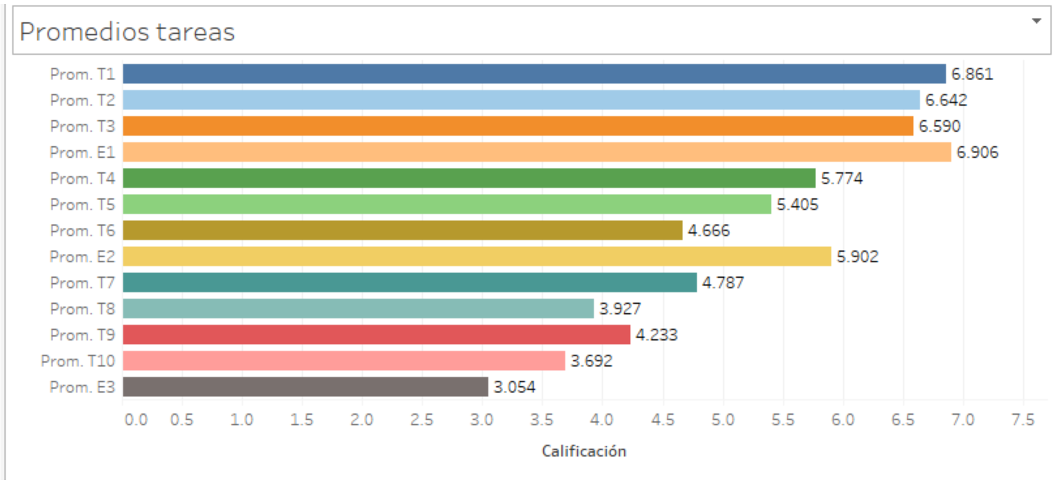
Para cada tarea y examen se utilizaron diferentes tipos de preguntas que la plataforma Moodle ofrece y la distribución es la siguiente:

Nombre del cuestionario	Numero de preguntas	Opción múltiple	Verdadero / Falso	Emparejamiento	Respuesta corta	Numérica	Respuesta anidada	Calculada
Tarea 1	9	0	6	0	0	2	1	0
Tarea 2	30	12	8	2	8	0	1	0
Tarea 3	19	8	0	0	2	2	0	4
1er Examen	37	9	0	16	1	1	3	3
Tarea 4	22	10	0	1	0	5	7	0
Tarea 5	36	9	2	1	1	3	6	0
Tarea 6	20	3	0	2	10	3	20	0
2do Examen	49	16	0	4	6	2	2	0
Tarea 7	26	5	0	11	0	0	21	0
Tarea 8	18	5	0	1	0	4	10	0
Tarea 9	27	9	0	3	0	2	8	0
Tarea 10	28	6	1	8	1	0	13	0
Total	321	92	17	49	29	24	12	7

Por último, el tiempo que se puso a disposición cada una de las tareas fue en promedio de 10 días 15 horas y los exámenes con un promedio de duración de 23 horas, tanto las tareas como los exámenes contaron con 2 intentos para resolverse. Estos intentos no tuvieron límite de tiempo para realizarse.

4.2 GENERAL

Los promedios de todas las tareas junto con exámenes se presentan con una gráfica de barras:

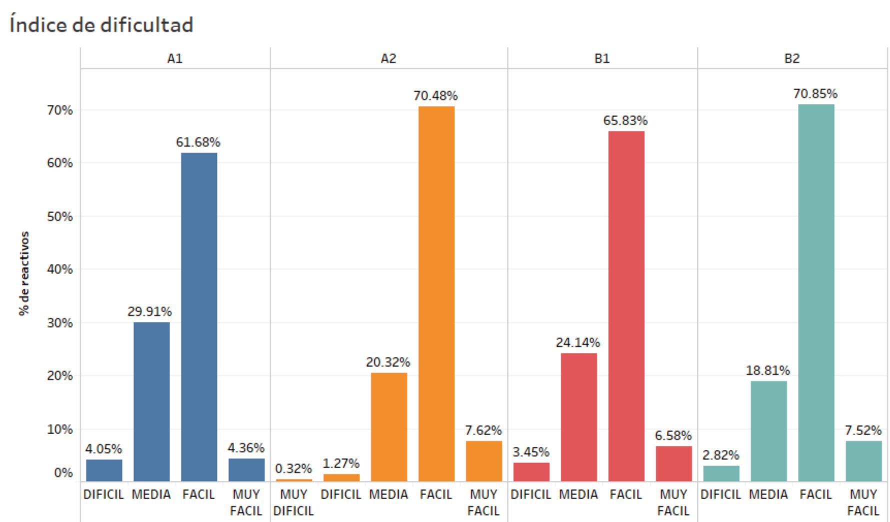


En donde podemos observar que los promedios de las tareas van disminuyendo, esto es comprensible dado que conforme se va avanzando en el curso propedéutico el contenido va adquiriendo mayor grado de dificultad y aunado a esto está la deserción de los alumnos.

Otra observación que hacer es que hubo alumnos que tuvieron 0 en todas las tareas y exámenes de matemáticas, en total fueron 63. Estos ceros sin duda hicieron que los promedios fueran aún más bajos.

Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados obtenidos de todas las tareas y exámenes virtuales, sin antes recordar que las estadísticas se obtienen como se mencionó en el capítulo anterior:

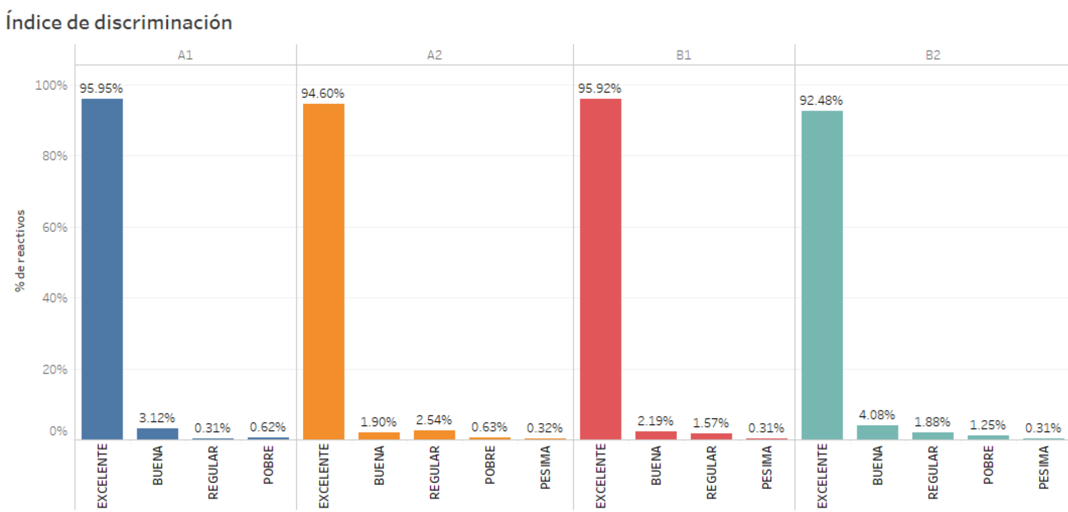
Tabla: Clasificación del índice de dificultad



Bloque	MUY DIFICIL	DIFICIL	MEDIA	FACIL	MUY FACIL
A1		13	96	198	14
A2	1	4	64	222	24
B1		11	77	210	21
B2		9	60	226	24

De la gráfica de barras y la tabla anterior, podemos ver que en los 4 bloques el mayor porcentaje se encuentra en la clasificación de la dificultad en fácil, es decir que contestaron correctamente 61.68% los alumnos del bloque A1, 70.48% de los alumnos del bloque A2, 65.83% de los alumnos del bloque B1 y por último del bloque B2 el 70.85% de los alumnos contestaron correctamente.

Tabla: Clasificación del índice de discriminación

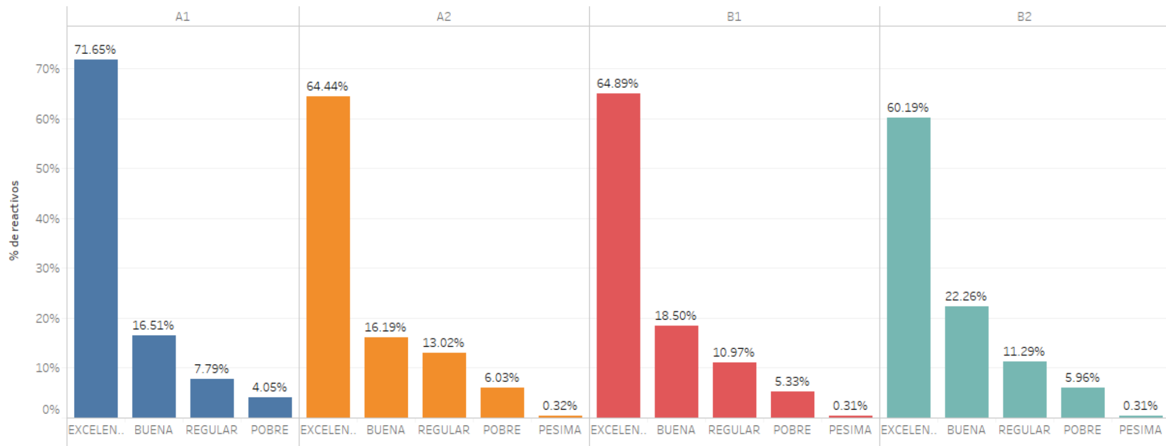


Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE	PESIMA
A1	308	10	1	2	
A2	298	6	8	2	1
B1	306	7	5		1
B2	295	13	6	4	1

Observando la gráfica de barras y la tabla anterior, vemos que la mayoría de las preguntas tienen una excelente discriminación en los 4 bloques, lo que es bueno. Ya que indica que las preguntas están haciendo una buena discriminación entre los alumnos que llevan altas calificaciones y los que no.

Gráfica: Clasificación del coeficiente de discriminación

Coeficiente de discriminación



Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE	PESIMA
A1	230	53	25	13	
A2	203	51	41	19	1
B1	207	59	35	17	1
B2	192	71	36	19	1

De acuerdo al coeficiente de discriminación, en los 4 bloques el coeficiente de discriminación estuvo en la clasificación de excelente al igual que el coeficiente de discriminación. Lo que quiere decir que se está evaluando en general lo que se desea evaluar. Como se mencionó en el capítulo anterior esta estadística permite diferenciar a los estudiantes eficientes de los no eficientes, es decir, que se espera que los estudiantes con altas calificaciones contesten correctamente la pregunta.

En ambas estadísticas el número de preguntas que se recomienda descartar son pocas, pero como ya se dijo anteriormente se deben tomar en cuenta las tres estadísticas para tomar una decisión, además deberá revisarse la redacción, tipo de pregunta y los tipos de respuesta para la pregunta.
A continuación, se presenta una descripción más detallada de cada una de las tareas y los dos primeros exámenes, ya que el tercer parcial fue contestado en el salón de clases.

4.3 TAREA1

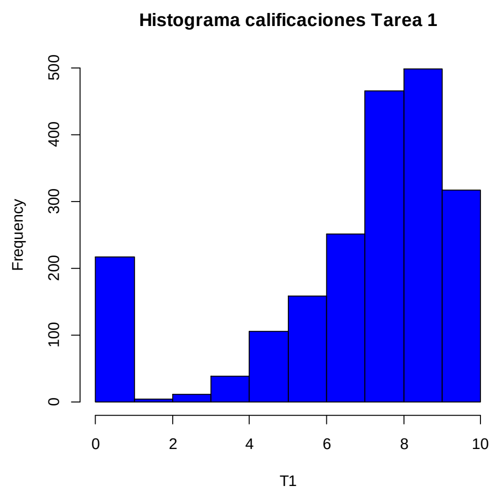
Esta tarea incluyó los siguientes temas:

Números reales
-Operaciones y propiedades de campo
-Orden en los números reales

En esta tarea fueron 9 preguntas aleatorias. El tipo de preguntas a escoger para esta tarea es como sigue:

Tipo De Pregunta		
Numérica	Respuestas anidadas Cloze	VerdaderoFalso
2	1	6

Se permitió realizar la tarea dos veces y promediar la calificación de cada intento. Para esta tarea los alumnos aprovecharon la opción.
El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio de esta tarea fue de 6.86. Debido a que, de un total de 2478 intentos, 217 fueron ceros.
Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta primera tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.
Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

	Clasificacion Ind Dif	
Bloque	FACIL	MUY FACIL
A1	8	1
A2	8	1
B1	8	1
B2	6	3

Tabla: clasificación índice de discriminación

	Clasificacion Ind Dis			
Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	PESIMA
A1	7	1	1	
A2	9			
B1	7	2		
B2	5	3		1

Tabla: clasificación coeficiente de discriminación

	Clasificacion Efis Dis			
Bloque	BUENA	REGULAR	POBRE	PESIMA
A1		2	7	
A2	1		8	
B1		1	8	
B2		2	6	1

De acuerdo con las tablas presentadas, podemos decir que esta tarea 1 mostró un nivel de dificultad fácil para todos los bloques, debajo del análisis están las preguntas de esta tarea para revisarlas.

Respecto al índice de discriminación, se presentan 7 reactivos a conservar en el bloque A1, 9 en el bloque A2, 7 en el bloque B1 y 5 en el bloque B2. Esto indica que las preguntas son adecuadas para el análisis. Las preguntas que pueden mejorarse son: la 1) en el bloque A1. Solamente una pregunta en el bloque B2 fue catalogada como pésima, la cual se recomienda descartar, pregunta sobre una sucesión y es la número 9).
Como se ha venido mencionando, el índice de discriminación nos indica si el reactivo está estableciendo diferencias entre los estudiantes con altas y bajas calificaciones.
Finalmente, en el análisis del coeficiente de discriminación la mayoría de las preguntas fueron catalogadas con un coeficiente de discriminación pobre, así que deben de revisarse las que entran dentro de la clasificación regular y pobre, es decir, se deben de revisar todas las preguntas para los bloques A1, B1 y B2; del bloque A2 se pudo rescatar una pregunta, pregunta de verdadero falso sobre una desigualdad, esta es la pregunta 6), esta se recomienda revisar para los otros bloques. Los reactivos deben revisarse a profundidad o descartarse. Y en el bloque B2 la pregunta 9) fue catalogada como pésima y lo recomendable es descartarla, esta es la misma pregunta que se recomendó descartar con el índice de discriminación, ya que está calificando algo distinto a lo deseado.
En general esta tarea no es tan buena, tal vez se deba al tipo de pregunta o a la redacción de estas, por lo que deben revisarse todas las preguntas.
En cuanto a la teoría que se maneja en la guía está apegada a las preguntas del campus virtual. Cabe mencionar que cuando me refiero al número de la pregunta quiere decir al número que se le puso al enunciado para identificarlo, no al orden en el que salieron, ya que como se mencionó fueron aleatorias.

1)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	verdadero o falso
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

Cada número racional es un número real.

2)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	verdadero o falso
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

Todo número real es un número entero.

3)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	verdadero o falso
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

0.4521111... Es un número racional.

4)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	verdadero o falso
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

$$(-10)^6 = -10^6$$

5)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	verdadero o falso
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

$$(1/9)^{-5} = 9^5$$

6)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	verdadero o falso
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

Si

$$0 < x < 1$$

entonces

$$x < x^2$$

7)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	problem
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

Luis consigue un préstamo por $50,000 mismos que pagará de la siguiente manera: el día del préstamo pagará un peso: al día siguiente dos pesos y así sucesivamente hasta completar 500 días. ¿Cuánto dinero habrá pagado de intereses al cubrir su último pago?

Respuesta: $(#1).

8)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	problema
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

¿Cuál número al suprimirse de la lista 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 hace que el promedio de los números restantes siga siendo 6?

9)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 1 Matemáticas
Nombre de la pregunta	problema
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	1,2,3,4,5,6,7,8,9

¿Qué número sigue 502, 612, 722, 832,...?

4.4 TAREA 2

Esta tarea incluyó los siguientes temas:

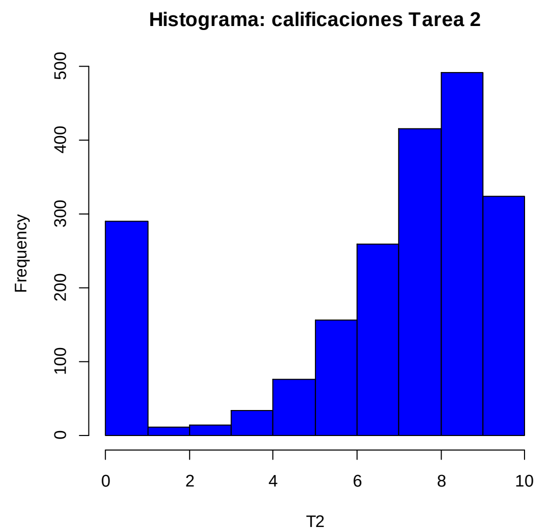
Números reales
-Valor absoluto. Propiedades
-La recta real. Intervalos
Álgebra
-Lenguaje algebraico. Términos semejantes.

Para esta tarea se realizaron 10 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta			
Emparejamiento	Opción múltiple	Respuesta corta	VerdaderoFalso
2	12	8	8

Como ya se había mencionado anteriormente, se permitió realizar la tarea dos veces y promediar la calificación de cada intento. Para esta tarea los alumnos de los bloques A1, B1 y B2 aprovecharon la opción. Mientras que en bloque faltante hubo alumnos que no realizaron el cuestionario.

El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio de esta tarea fue de 6.64 y el total de ceros para esta tarea fueron 131.

Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta segunda tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.

Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

	Clasificacion Ind Dif			
Bloque	DIFICIL	MEDIA	FACIL	MUY FACIL
A1	2	6	18	4
A2	1	3	15	4
B1	1	2	16	4
B2	1		17	5

Tabla: clasificación índice de discriminación

	Clasificacion Ind Dis			
Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	PESIMA
A1	26	4		
A2	17	2	3	1
B1	20	1	2	
B2	20	2	1	

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

Bloque	Clasificacion Efis Dis				
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE	PESIMA
A1	21	6	3		
A2	9	7	4	2	1
B1	5	10	7	1	
B2	9	8	4	2	

Respecto a las tablas presentadas, esta segunda tarea presentó preguntas en los diferentes niveles de dificultad, pero en general la tarea se encuentra en un nivel fácil. Con respecto al índice de discriminación la mayoría de las preguntas resultaron con una excelente discriminación, se conservan 26 en el bloque A1, 17 en el bloque A2, en los bloques B1 y B2 20 preguntas.
De acuerdo con el índice de discriminación se deben de revisar las preguntas 5), 14), 17) en el bloque A2, estas preguntas son una del tema de valor absoluto y las otras 2 sobre definiciones de algebra.

5)
Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 2 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Valor absoluto
Tipo de pregunta	Verdadero/Falso
Número de preguntas	1,2,3

Si se sustituye 5 por x, entonces se satisface la desigualdad

$$|x-2|<3$$

14)
Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 2 Matemáticas
Nombre de la pregunta	problema
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	6,7,8

¿Cuál es el mayor entero que divide a la suma de los cuadrados de cualesquiera 3 pares consecutivos?

17)
Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 2 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	6,7,8

Juan, Pedro y Pablo juegan a lanzar una roca lo más lejos posible. Juan la lanzó y llegó hasta 23 metros, la roca de Pedro llegó hasta 57 metros y la roca de Pablo quedó a la mitad de la piedra lanzada entre Juan y Pedro ¿Cuántos metros alcanzó la roca de Pablo?

En el bloque B1 las preguntas que se recomiendan revisar con el índice de discriminación son la 3) y 4):

3)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 2 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Valor absoluto
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3

$$|2-\sqrt{2}| =$$

Respuesta modelo

$\sqrt{2}-2$
$2-\sqrt{2}$
$2+\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}-2$

4)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 2 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Valor absoluto
Tipo de pregunta	Verdadero/Falso
Número de preguntas	1,2,3

1.3 es solución de la desigualdad

$$|1-x| < 2$$

Que como podemos notar son de valor absoluto y son de diferente tipo de pregunta.

Para el bloque B2, también con el índice de discriminación se debe revisar solo la siguiente pregunta:

20)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 2 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Intervalo
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9,10

¿Cuál es el conjunto de números que satisfacen |x|≥7?

Respuesta modelo

(-7,7)
(-∞,-7]U(7,∞)
(-∞,-7]U[7,∞)
[-7,7]

Como vimos es una pregunta de valor absoluto.

La pregunta que descartar según esta estadística en el bloque A2 es la 15) y es sobre algebra:

15)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 2 Matemáticas
Nombre de la pregunta	problema
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	6,7,8

Sofía guarda todas las velas de sus pasteles de cumpleaños. Si tiene 66 velas, ¿cuántos años tiene Sofía?

Y de acuerdo con el coeficiente de discriminación también en su mayoría resultó con una clasificación excelente. Las preguntas que entraron dentro de la clasificación de pobre en el bloque A2 son 5), 14) y para descartar la 15), estas preguntas se vieron también con el índice de discriminación. En el bloque B1 es la pregunta 4) que como vimos líneas arriba es una pregunta de falso/verdadero de valor absoluto. En el bloque B2 son las preguntas 20) y 22), la primera se revisó líneas arriba y la otra es la siguiente:

22)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 2 Matemáticas
Nombre de la pregunta	intervalos
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9,10

Selecciona la respuesta que describe al intervalo [-3,2)

Respuesta modelo

$-3 \leq x < 2$
$-3 \leq x \leq 2$
$$-3
$$-3

Como se ha venido mencionando, el índice de discriminación nos indica si el reactivo está estableciendo diferencias entre los estudiantes con altas o bajas calificaciones y el coeficiente de discriminación se espera que la pregunta sea contestada correctamente por los alumnos de altas calificaciones, de lo contrario está evaluando algo diferente.

Por lo que lo más conveniente sería revisarlas a profundidad. En conclusión, de esta tarea, el tema problema fue valor absoluto y en la resolución de problemas.

Revisando la guía, esta cuenta con varios ejemplos similares a los que se presentan en el campus virtual.

4.5 TAREA 3

Esta tarea incluyó los siguientes temas:

Álgebra

-Leyes de los exponentes

-Suma y resta de expresiones algebraicas

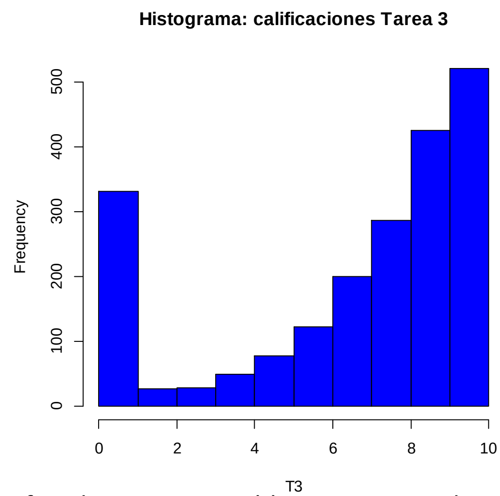
-Producto de expresiones algebraicas

-Productos notables

Para esta tarea se realizaron 10 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta				
Calculada	Numérica	Opción múltiple	Respuesta corta	Respuestas anidadas Cloze
4	2	8	2	3

Para esta tarea únicamente solo el bloque A1 aprovecho la oportunidad de realizar el cuestionario dos veces, sin embargo, algunos de los alumnos de los bloques restantes no realizaron el cuestionario.
El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio de esta tarea fue de 6.59, y en el histograma podemos ver que la cantidad de ceros fue elevada, para ser más exactos fueron 320.
Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta tercer tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.

Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

	Clasificacion Ind Dif		
Bloque	MEDIA	FACIL	MUY FACIL
A1	3	13	3
A2	3	14	3
B1	3	13	3
B2	2	14	3

Tabla: clasificación índice de discriminación

	Clasificacion Ind Dis			
Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	19			
A2	19	1		
B1	18		1	
B2	17	1		1

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

Bloque	Clasificacion Efis Dis			
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	10	5	4	
A2	10	4	5	1
B1	11	2	5	1
B2	11	3	3	2

Esta tercera tarea de acuerdo con las tablas presentó un nivel de dificultad fácil, respecto al índice y coeficiente de discriminación, la tarea fue clasificada en ambas estadísticas como excelente, esto significa que en su mayoría las preguntas son buenas, ya que se hace la distinción entre alumnos con altas y bajas calificaciones, además de que los alumnos con altas calificaciones contestaron correctamente las preguntas.
El índice de discriminación recomienda revisar la pregunta 2) en el bloque B1:

2)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Multiplo
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3

¿Para cuántos números a del 2 al 12 se tiene que

$$a^3 - a$$

es un múltiplo de 10?

de exponentes, la cual tiene un coeficiente de discriminación pobre, esta pregunta no está evaluando lo que se espera.
Otra pregunta que revisar en el bloque B2 es la pregunta 3), que también cuenta con un coeficiente de discriminación pobre:
3)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	exponentes
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3

Simplificar la siguiente expresión

$$(a^2b)^2(2a^2b^3)^2$$

Que como vemos es del tema de leyes de exponentes.
De acuerdo con el coeficiente de discriminación en el bloque A1 solo se recomienda revisar las preguntas 2), 3), 5) y 17), las dos primeras las vimos líneas arriba, a continuación, pongo las faltantes:

5)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Leyes de los exponentes
Tipo de pregunta	Calculada
Número de preguntas	1,2,3

Realiza la operación:

$$(\frac{a}{b})^3(\frac{1}{b})^{-4}$$

17)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	producto
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	8,9,10

Realiza el siguiente producto

$$(a^2 - 9b^2)(a^2 + 9b^2)$$

Respuesta modelo

$a^4 - 81b^4$
$a^4 + 81b^4$
$a^4 - 18a^2b^2 + 81b^4$
$a^4 + 18a^2b^2 - 81b^4$

En el bloque A2, de acuerdo con el coeficiente de discriminación se deben revisar las preguntas 2), 3) 4), 9), 20) y 17), esta última cuenta con coeficiente de discriminación pobre. 2), 3) y 17) ya las vimos arriba, revisemos las faltantes:

4)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Exponentes
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	1,2,3

Cuál es el valor numérico de

$$(-5)^3$$

9)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	producto
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	4,5

Realiza el siguiente producto

$$(9x^2 - 3x + 1)(2x - 1) =$$

elige la respuesta correcta

Respuesta modelo

$18x^3 - 15x^2 + 5x - 1 =$
$18x^2 + 5x - 1 =$
$18x^3 - 1 =$
$35x^3 - 10x^2 + 5x - 2 =$

20)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Producto notable
Tipo de pregunta	Calculada
Número de preguntas	8,9,10

Utiliza productos notables para calcular:

$$\frac{w^2}{w^2 - 4} - \frac{1}{w - 2} =$$

3 fueron de exponentes y las otras 3 de productos notables; para el bloque B1, con el coeficiente de discriminación fueron las preguntas 3), 5), 15), 16), 17 y 2), esta última con coeficiente de discriminación pobre. 3), 5),17) y 2) las vimos líneas arriba, las faltantes son:

15)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	producto
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	8,9,10

Realiza el siguiente producto

$$(3x - y^2)^2$$

Respuesta modelo

$9x^2 - 6xy^2 + y^4$
$9x^2 + 6xy^2 - y^4$
$9x^2 - y^4$
$9x^2 + y^4$

16)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	producto
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	8,9,10

Realiza el siguiente producto.

$$(3x - 2)^3$$

Respuesta modelo

$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
$27x^3 + 54x^2 - 36x + 8$
$27x^3 - 8$
$27x^3 + 8$

Por último, del bloque B2 se deben de revisar las preguntas 2), 3), 12), 16) y 17) de las cuales solo falta revisar la 12), ya que las demás se revisaron líneas arriba.

12)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 3 Matemáticas
Nombre de la pregunta	promedio
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	6,7

El promedio de dos números es 3a-4 y uno de los números es 2a+3, ¿cuál es el otro número?

Respuesta modelo
4a - 11
a - 7
6a - 12
5a -1

En conclusión, las preguntas a revisar son de los temas de exponentes y de productos notables. Esta tarea en general es buena, solo hay que revisar las preguntas y determinar de qué manera se podrían mejorar.

4.6 1ER EXAMEN PARCIAL

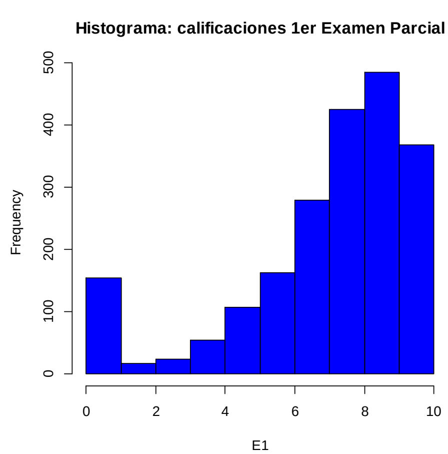
Este primer examen abarcó los temas de las tareas 1, 2 y 3.

Para este examen se realizaron 11 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta					
Calculada	Emparejamie..	Numérica	Opción múltiple	Respuesta corta	Respuestas anidadas Cloze
3	16	1	9	1	7

Para este primer examen alumnos de todos los bloques realizaron el cuestionario una segunda vez.

El histograma de calificaciones es como sigue:



El promedio de este examen fue de 6.90, en este examen hubo 150 ceros.

Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de este primer examen, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.

Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

	Clasificacion Ind Dif		
Bloque	MEDIA	FACIL	MUY FACIL
A1	7	25	5
A2	3	26	8
B1	5	22	9
B2	3	24	9

Tabla: clasificación índice de discriminación

	Clasificacion Ind Dis			
Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	37			
A2	32	2	3	
B1	36			
B2	31	1	3	1

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

	Clasificacion Efis Dis			
Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	37			
A2	36		1	
B1	36			
B2	31	3	1	1

Este primer examen está clasificado con un nivel de dificultad fácil, el índice y coeficiente de discriminación se clasifica como excelente.
En este examen como podemos ver en las tablas, son pocas las preguntas que deben ser revisadas, y por fortuna ninguna debe ser descartada.
De acuerdo con el coeficiente de discriminación solo deben revisarse en el bloque A2 las preguntas 2), 10) y 35):

2)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1

Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Algunas opciones son las siguientes:

Respuesta modelo
Todo número racional es un número entero.: Falso
Todo número racional es un número entero.: Verdadero
[Sin respuesta]
La unión de los números racionales y de los números irracionales son los números reales.: Falso
La unión de los números racionales y de los números irracionales son los números reales.: Verdadero
[Sin respuesta]
La unión de enteros y naturales son los racionales.: Falso
La unión de enteros y naturales son los racionales.: Verdadero
[Sin respuesta]
$5\sqrt{2}$ es un número racional.: Falso
$5\sqrt{2}$ es un número racional.: Verdadero

10)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	3

Determina si la afirmación es verdadera o falsa

Algunas respuestas son las siguientes:

Respuesta modelo
Si a<0 entonces $\frac{1}{a} > 0$: Falso
Si a<0 entonces $\frac{1}{a} > 0$: Verdadero

35)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b) Producto notable
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	10

Realiza el siguiente producto

$$(3x-y^2)^2$$

Respuesta modelo

$9x^2-6xy^2+y^4$
$9x^2+6xy^2-y^4$
$9x^2-y^4$
$9x^2+y^4$

Estas preguntas son de los temas de números reales, desigualdades y problemas. Del bloque B2 hay que revisar las preguntas 3), 16), 28) y 10), esta última pregunta se pidió revisar en el bloque líneas arriba, por lo que las preguntas restantes son:

3)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1

Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Algunos enunciados de esta pregunta:

Respuesta modelo
Cada número irracional se puede expresar como el cociente de dos enteros: Falso
Cada número irracional se puede expresar como el cociente de dos enteros: Verdadero
[Sin respuesta]
R^+ es el conjunto de los número reales positivos: Falso
R^+ es el conjunto de los número reales positivos: Verdadero
[Sin respuesta]
Todo número natural es es número racional: Falso
Todo número natural es es número racional: Verdadero
[Sin respuesta]
$\sqrt{9}$ es un número racional.: Falso
$\sqrt{9}$ es un número racional.: Verdadero

16)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Intervalos
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	5

Escoge el intervalo descrito por el conjunto de número reales.

Algunos enunciados de la pregunta:

Respuesta modelo

El conjunto de números reales que satisfacen $$-2

El conjunto de números reales que satisfacen $$-2

El conjunto de números reales que satisfacen $$-2

El conjunto de números reales que satisfacen $$-2

[Sin respuesta]

El conjunto de números reales que satisfacen

$$-2 \leq x \leq 5$$

: (-2,5]

El conjunto de números reales que satisfacen

$$-2 \leq x \leq 5$$

: [-2,5]

El conjunto de números reales que satisfacen

$$-2 \leq x \leq 5$$

: [-2,5)

El conjunto de números reales que satisfacen

$$-2 \leq x \leq 5$$

: (-2,5)

28)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	8

Simplifica las siguientes expresiones y elige la opcion correcta.

Algunos enunciados de esta pregunta son:

Respuesta modelo
$3a - [b - [c - 3b + 2(c - a) + b] + 2a] =$: -a-3b+3c
$3a - [b - [c - 3b + 2(c - a) + b] + 2a] =$: -6x+4y+4z
$3a - [b - [c - 3b + 2(c - a) + b] + 2a] =$: 3ab
$3a - [b - [c - 3b + 2(c - a) + b] + 2a] =$: 6x-4y+4z
[Sin respuesta]
$2x + 2[y - (4x - [z + 2y]) + z] - 2y =$: -a-3b+3c
$2x + 2[y - (4x - [z + 2y]) + z] - 2y =$: -6x+4y+4z
$2x + 2[y - (4x - [z + 2y]) + z] - 2y =$: 3ab
$2x + 2[y - (4x - [z + 2y]) + z] - 2y =$: 6x-4y+4z

Estas preguntas son de emparejamiento, sobre números reales, desigualdades, intervalos y simplificación de términos semejantes.
Por último, de acuerdo con el coeficiente de discriminación se debe revisar la pregunta 2) en el bloque A2, esta pregunta ya se mencionó arriba y es del tipo de pregunta de emparejamiento sobre números reales. En el bloque B2 se pide revisar las preguntas 3) y 10) que con el índice de discriminación la recomendación fue revisarlas, estas preguntas son sobre números reales y desigualdad.
Por lo que en este examen el tema que causó problema es sobre los números reales, cabe mencionar que las preguntas de este tema fueron en general de verdadero/falso, por ejemplo: "Todo número racional es entero".

Recordemos que el índice de discriminación indica que las preguntas están haciendo una buena discriminación entre los alumnos que llevan altas calificaciones y los que no. Y el coeficiente de discriminación lo que quiere decir que se está evaluando en general lo que se desea evaluar.
Este examen en general fue bueno y solamente hay que revisar las preguntas y verificar si necesitan una mejor redacción.

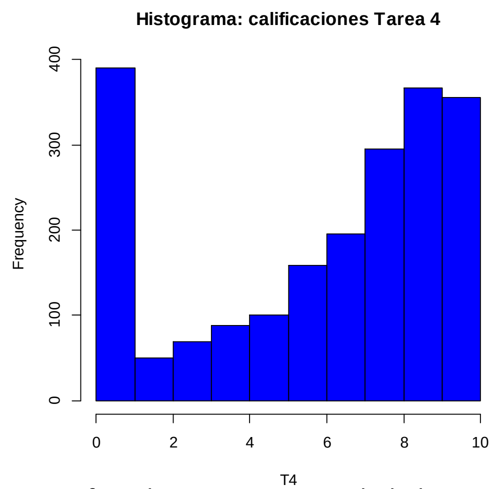
4.7 TAREA 4

Esta tarea incluyó los siguientes temas:
Álgebra
-Factorización
-División de polinomios

Para esta tarea se realizaron 12 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta			
Emparejamiento	Numérica	Opción múltiple	Respuestas anidadas Cloze
1	5	10	6

Para esta tarea hubo alumnos que no contestaron el cuestionario.
El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio de esta tarea fue de 5.77. La cantidad de ceros de esta tarea fue bastante, en comparación con las tareas y examen ya realizados, fueron 357.

Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta cuarta tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.
Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

	Clasificacion Ind Dif			
Bloque	DIFICIL	MEDIA	FACIL	MUY FACIL
A1	1	7	13	1
A2		3	18	1
B1		6	15	1
B2		5	16	1

Tabla: clasificación índice de discriminación

	Clasificacion Ind Dis		
Bloque	EXCELENTE	BUENA	POBRE
A1	21	1	
A2	20	1	1
B1	20	2	
B2	20	1	1

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

Bloque	Clasificacion Efis Dis			
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	8	7	5	2
A2	6	4	9	3
B1	8	7	5	2
B2	5	6	7	4

De acuerdo con las tablas presentadas, la tarea está en la clasificación fácil del índice de dificultad. Con el índice de discriminación la tarea fue catalogada como excelente y solamente debe revisarse una pregunta, esta es la número 7) y es recomendada para los bloques A2 y B2:

7)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1,2,3,4

Factorizar las siguientes expresiones y elegir la respuesta correcta.

Recuerda que

$$XXX = X^3$$

y que también se puede escribir simbólicamente como XXX=X^3

Algunos enunciados son:

Respuesta modelo

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

: (a+b)^3

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

: (a+7)^2

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

: (5a+3b)(5a-3b)

[Sin respuesta]

$a^2+14a+49$

: (a+b)^3

$a^2+14a+49$

: (a+7)^2

$a^2+14a+49$

: (5a+3b)(5a-3b)

[Sin respuesta]

$25a^2-9b^2$

: (a+b)^3

Esta pregunta se recomienda revisar en todos los bloques de acuerdo con el coeficiente de discriminación.

Y, por último, de acuerdo con el coeficiente de discriminación, deben de revisarse las siguientes preguntas para el bloque A1:

1)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Operacion
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3,4

El resultado de la siguiente operación

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2}-\frac{x-1}{x^2+x-2}$$

es igual a:

Respuesta modelo

$\frac{2}{x^2+3x+2}$
$\frac{2}{(x+2)(x-1)}$
$\frac{2}{(x-2)(x+1)}$
$\frac{2}{x^2-3x-2}$

2)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Factorizar TC 1
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3,4

Elige la factorización correcta por "término común" de la siguiente expresión:

$15x^3y^3+30x^3y^2-90x^2y$

Respuesta modelo

3x2(5xy3+10xy2-30y)
5xy(3x2y2+6x2y-18x)
5x2y(3xy2+6xy-18)
15x2y(xy2+2xy-6)

4)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Dif de cuadrados
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3,4

Elige "todas" las posibles factorizaciones de la siguiente diferencia de cuadrados:

$75x^7y^5-48x^5y^7$

Respuesta
3x5y5(5x+4y)(5x-4y)
3xy(5x3y2+4x2y3)(5x3y2-4x2y3)
3xy(5x3y2+4x2y3)(5x3y2+4x2y3)
3x5y5(5xy2+4x2y)(5xy2-4x2y)

5)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Factorizar
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3,4

Elige la factorización correcta de la siguiente diferencia de cuadrados:

$$16-(x-y)^2$$

Respuesta modelo
(4-x+y)(4+x-y)
(4-x-y)(4+x+y)
(4+x-y)(4+x+y)
(4-x-y)(4-x-y)

6)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Factorizar
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3,4

Elige la factorización correcta de la siguiente diferencia de cuadrados:

$$(x-3)^2-9y^2$$

Respuesta modelo
(x-3-3y)(x-3+3y)
(x-3-3y)(x-3-3y)
(x-3-3y)(x+3+3y)
(x+3+3y)(x+3-3y)

14)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Simplifica
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	8,9,10,11

Realiza la opreacióm correspondiente y simplifica la siguiente expresión

$$\frac{z+3}{z^2+3z+2}-\frac{z-1}{z^2+z-2}$$

Elige la opción correcta

Respuesta modelo
$\frac{2}{z^2+3z+2}$
$\frac{4}{z^2+z-2}$
$\frac{4}{z^2+3z+2}$
$\frac{2}{z^2-1}$
Nminguna de las anteriores

Para el bloque A2 se deben revisar las preguntas 1), 3), 4), 5), 9), 10), 13), 14), 15), 16) y 17), algunas se revisaron líneas arriba, faltan:

3)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Factorización
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3,4

Elige la factorización total del siguiente binomio:

$32x^9y^3-8x^7y^5$

Respuesta modelo
8xy(2x4y+x3y2)(2x4y-x3y2)
8x3y(2x3y+x2y2)(2x3y-x2y2)
2x7y3(4x+2y)(4x-2y)
8x7y3(2x-y)(2x+y)
8x3y(2x2y+xy2)(2x2y-xy2)

9)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	division
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	5,6,7

Rellena los espacios en blanco con la respuesta correcta.

$$\frac{6x^2+7x-20}{3x-4}=$$

{#1}+{#2}

10)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	División sintética
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	5,6,7

Encuentra el polinomio resultante y el residuo (si es el caso) de efectuar la siguiente división:

$(2x^3-5x^2+6x-3)\div(x+2)$

El polinomio resultante es:

{#1}x^2+{#2}x+{#3}

Y su residuo es: {#4}

**Rellena cada espacio con los coeficientes correspondientes. No olvides colocar el signo.

13)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Simplifica
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	8,9,10,11

Realiza la operación indicada y simplifaca

$$\frac{3}{3-x}+\frac{3}{3+x}-\frac{6x}{9-x^2}=$$

Selecciona la opción correcta

Respuesta modelo

$\frac{6}{3+x}$
$\frac{6}{3-x}$
$\frac{18+3x}{9-x^2}$
$\frac{6x}{3+x}$
Ninguna de las anteriores

15)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Simplificar
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	8,9,10,11

Simplifica la siguiente expresión y elige la respuesta correcta

$$\frac{x-1}{x^2-1}$$

Respuesta modelo

$\frac{1}{x+1}$
$\frac{1}{x-1}$
$\frac{-1}{x+1}$
$\frac{1}{(x+1)^2}$

16)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Operación y simplificación
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	8,9,10,11

Realiza la operación en la siguiente expresión, simplifica y elige la respuesta correcta

$$\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=$$

Respuesta modelo

$\frac{x+1}{x+2}$
$\frac{x-1}{x+2}$
$\frac{x-1}{x-2}$
$\frac{x+1}{(x-2)^2}$

17)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Simplificar
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	8,9,10,11

Simplifica la siguiente expresión algebraica, escribe los coeficientes de los términos.

$$\frac{24a^2b^2 + 12ab^2 + 6a^2b}{2ab} =$$

{#1} a+ {#2}ab+{#3}b

Como vimos son 4 preguntas de factorización, 2 de división de polinomios y 5 de simplificar. Para el bloque B1 se deben revisar las preguntas 1), 2),3) ,4) ,15) y 17) las cuales ya se pidieron revisar líneas arriba, de donde 5 son de factorización y 2 de simplificar. Para el bloque B2 son las preguntas 1), 3), 4), 5), 6), 11), 13), 14), 15) y 16) de las cuáles solamente falta revisar la 11) ya que las demás fueron vistas en los bloques anteriores.

11)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 4 Matemáticas
Nombre de la pregunta	División
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	5,6,7

Encuentra el polinomio resultante y el residuo (si es el caso) de efectuar la siguiente división:

$(3x^3-5x^2+7x-18)\div(x-2)$

El polinomio resultante es:

$\{\#1\}x^2+\{\#2\}x+\{\#3\}$

Y su residuo es: {#4}

Para esta tarea los dos temas tratados causaron conflicto. Como ya se ha venido mencionando, es necesario revisar cuidadosamente las preguntas para determinar la posible solución. El índice de discriminación indica que las preguntas están haciendo una buena discriminación entre los alumnos que llevan altas calificaciones y los que no. Y el coeficiente de discriminación quiere decir que se está evaluando en general lo que se desea evaluar.

4.7 TAREA 5

Esta tarea incluyó los siguientes temas:

Álgebra

-Ecuaciones de 1º grado

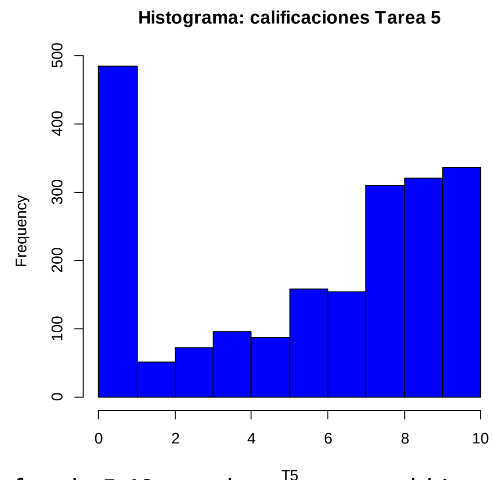
-Sistemas de ecuaciones

-Ecuaciones de 2º grado

Para esta tarea se realizaron 15 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta					
Emparejamiento	Numérica	Opción múltiple	Respuesta corta	Respuestas anidadas Cloze	VerdaderoFalso
1	3	9	1	20	2

Nuevamente para esta tarea algunos alumnos no la realizaron.
El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio de esta tarea fue de 5.40 y podemos ver en el histograma que el número de ceros para esta tarea fueron de 459.
Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de quinta tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.
Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

Bloque	Clasificacion Ind Dif		
	DIFICIL	MEDIA	FACIL
A1	3	6	27
A2	1	5	29
B1	1	9	25
B2	1	8	26

Tabla: clasificación índice de discriminación

Bloque	Clasificacion Ind Dis			
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	33	1		2
A2	33		1	1
B1	33		2	
B2	34		1	

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

Bloque	Clasificacion Efis Dis			
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	13	14	6	3
A2	15	10	7	3
B1	14	14	4	3
B2	12	15	6	2

Con las tablas de arriba, podemos notar que la tarea tiene un índice de dificultad fácil. Y es clasificada excelente de acuerdo con el índice y coeficiente de discriminación. Que de acuerdo con estas últimas estadísticas no se pide descartar ninguna pregunta, pero si revisar unas cuantas.

El índice de discriminación pide revisar 2 preguntas para los bloques A1, A2, B1 y únicamente una pregunta para el bloque B2.

Las preguntas para el bloque A1 fueron la número 9) y 11):

9)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Falso-Verdadero
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	4,5,6

Contesta si es falsa o verdadera la deducción.

Si

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$$

se deduce que

$$1 = \frac{R}{R1 + R2}$$

11)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Falso-Verdadero
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	4,5,6

Si

$$J = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

entonces

$$m = \frac{J}{\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}r^2}$$

Ambas preguntas del tipo verdadero/falso sobre despejar.

Las preguntas para el bloque A2 fueron las preguntas 2) y 11), esta última la vimos líneas arriba, veamos la que falta:

2)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Solucion par/impar
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1,2,3

Elige la opción correcta.

Respuesta modelo

La solución de la ecuación 8(x + 3) = 32 es un número: impar
La solución de la ecuación 8(x + 3) = 32 es un número: par
La solución de la ecuación 8(x + 3) = 32 es un número: fraccionario
[Sin respuesta]
La solución de la ecuación 7 + 2(x - 3) = 5 es un número: impar
La solución de la ecuación 7 + 2(x - 3) = 5 es un número: par
La solución de la ecuación 7 + 2(x - 3) = 5 es un número: fraccionario
[Sin respuesta]

Que como pudimos ver es encontrar la solución de un par de ecuaciones y decir si es par o impar.
Las preguntas para el bloque B1 fueron la 9) y 11), estas preguntas fueron revisadas en el bloque A1. Para el bloque B2 solamente es la pregunta 11), que ya se revisó en los demás bloques.
Como ya vimos todos los bloques tuvieron en común revisar la pregunta 11), una pregunta de tipo verdadero/falso sobre despeje.
De acuerdo con el coeficiente de discriminación se sugiere revisar 9 preguntas para el bloque A1, tienen número 1), 4), 8), 9), 11), 13), 22), 28) y 32), de las cuáles ya vimos la 9) y 11), veamos de que se tratan las restantes:

1)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Ecuacion-equivalente
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3

Resolver la ecuación

$$4 + 2(x - 4) = 6$$

es equivalente a resolver la ecuación:

Respuesta modelo

x - 2 = 3
2(x - 4) = 10
2(x - 4) + 2= 0
x + 3 = 2

4)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Simplifica
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3

Realiza la operación indicada, simplifica al máximo y elige la respuesta correcta.

$$\frac{x-2}{x+2} + 1 =$$

Respuesta modelo

$\frac{2x}{x-2}$
$\frac{2x}{x+2}$
$\frac{x}{x-2}$
$\frac{2x}{x-4}$

8)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Ecuacion lineal
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	1,2,3

Resuelve la siguiente ecuación

$$(x-3)^2-7x^2=-3(2x^2+3)$$

Introduce la respuesta correcta:

x={#1}

13)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Despejes
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	4,5,6

Despeja la variable b y selecciona la respuesta correcta.

$$A=\frac{1}{2}bh$$

Respuesta modelo

$b=\frac{A}{2h}$
$b=\frac{2A}{h}$
$b=2Ah$

22)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Factorizar-Solución
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	7,8,9

¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

?

Respuesta modelo
-5 y -2
5 y 2
-5 y 2
5 y -2

28)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Sistema de ecuaciones
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	10,11,12

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$5x + 2y = 34$$

$$7x - 3y = 7$$

Las soluciones son:

x={#1}

y={#2}

32)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	13,14,15

Gabriela y Patricia son secretarias. Gabriela escribe a máquina 45 palabras por minuto y Patricia, como está aprendiendo, sólo hace 25 palabras por minuto. Si están escribiendo un mismo documento y Patricia empezó hace 8 minutos,

¿Cuánto tardará Gabriela en alcanzar a Patricia?

Respuesta: Gabriela tardará {#1} min en alcanzar a Patricia

Las preguntas por revisar para el bloque A2 son 2), 8), 11), 12), 13), 21), 29), 30), 31) y 32) de las cuáles solamente falta visualizar 12), 21), 29), 30) y 31):

12)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Despeje
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	4,5,6

Despeja la variable m y selecciona la respuesta correcta.

$$c = b(1 + \frac{1}{m})$$

21)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Ecuación cuádratica
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	7,8,9

Resuelve la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}(x^2 + x) = 1$$

Las soluciones son:

(ordenalas de menor a mayor)

x_1={#1}

x_2={#2}

29)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	problema
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	13,14,15

En una bolsa de 200 caramelos hay 90 de fruta y el resto de leche. ¿Cuántos caramelos de fruta hay que agregar para que los caramelos de fruta sean 70% del total de la bolsa?

30)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	13,14,15

Doña Flor vende artículos de barro. Un cliente pago, con un billete de $50, 2 ollas y 3 cazuelas. Como Doña Flor no tenía cambio le dio dos jarritos de un peso. Otro cliente por $100 compró 5 ollas y 5 cazuelas. ¿Cuánto cuestan las ollas y cuánto las cazuelas?

Respuesta: Una olla cuesta $ {#1} y una cazuela $ {#2}.

31)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	13,14,15

Pablo dividió una herencia en dos depósitos, uno que le pagan el 7% de interés anual y otro el 10%. Invirtió el doble en el de 10% en comparación con lo que invirtió en el de 7%, si lo que ganó de interés es $6750,

¿cuál fue el monto de su herencia?

Respuesta: Su herencia fue de ${#1}

Para el bloque B1 son las preguntas 8), 9), 11), 13), 16), 29) y 33) de las cuáles solamente faltan por revisar la 16) y 33):

16)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Cuadrática-Núm. Soluciones
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	7,8,9

La ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0$$

tiene

33)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	13,14,15

En un concurso participaron 3080 competidores. El 25% de ellos obtuvo medallas (oro, plata, bronce). El número de medallas de bronce es seis veces el número de medallas de oro y el número de medallas de plata es el cuadruple del número de medallas de oro.

¿Cuántas medallas de bronce se entregaron?

Respuesta: Se entregaron {#1} medallas de bronce

¿Cuántas medallas de plata se entregaron?

Respuesta: Se entregaron {#2} medallas de plata

Para el bloque B2 las preguntas que se sugirieron revisar son 5), 10), 11), 13), 16), 24), 32) y 35) de las que solo faltan revisar 5), 10), 24) y 35):

5)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Ecuacion lineal
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	1,2,3

Resuelve la siguiente ecuación

$$\frac{5}{x-2} = \frac{1}{8-x}$$

Introduce la respuesta correcta:

x={#1}

10)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Despejar
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	4,5,6

De acuerdo a

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

elige la igualdad correcta.

Respuesta modelo

$$r = (\frac{3V}{2\pi h})^{\frac{1}{2}}$$

$$h = \frac{2}{3}\pi r^2 V$$

24)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Sistema de ecuaciones
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	10,11,12

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones e ingresa la solución.

$$5(x+2) = 4y$$

$$3(y-4) = 6x$$

Respuestas: x= {#1}, y= {#2}.

35)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 5 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	13,14,15

Se tiene un triángulo rectángulo de área 195u^2 y altura 15u. ¿Cuántas unidades mide su base? Escribe la respuesta sin unidades.

En todos los bloques con el índice y coeficiente de discriminación al menos hubo una pregunta que se recomendó revisar, esta es la pregunta 11), la pregunta 13) fue solamente con el coeficiente de discriminación en todos los bloques.

En general esta tarea fue buena, ya que el índice de discriminación indica que las preguntas están haciendo una buena discriminación entre los alumnos que llevan altas calificaciones y los que no.
Y el coeficiente de discriminación quiere decir que se está evaluando en general lo que se desea evaluar. Por lo que antes de tomar una decisión se recomienda revisar con cuidado las preguntas de arriba y tomar la mejor decisión.

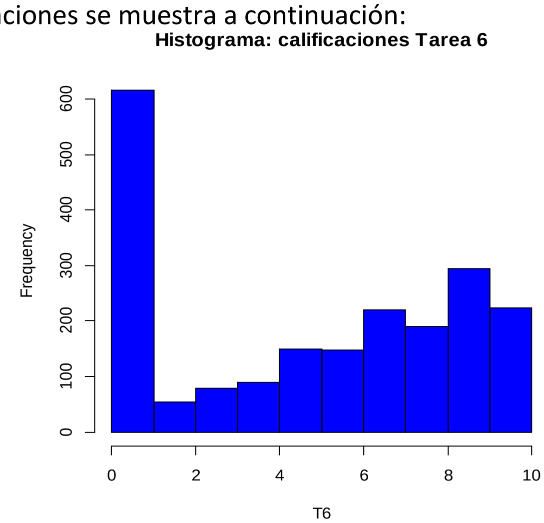
4.9 TAREA 6

Esta tarea incluyó los siguientes temas:
Álgebra
-Desigualdades

Para esta tarea se realizaron 12 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta				
Emparejamiento	Numérica	Opción múltiple	Respuesta corta	Respuestas anidadas Cloze
2	3	3	10	2

En esta tarea el número de intentos fue bajo, lo que significa que algunos alumnos no realizaron esta tarea.
El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio de esta tarea fue de 6.66 y una cantidad de ceros muy notable que para esta tarea es de 573.
Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.

Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

Bloque	Clasificacion Ind Dif			
	MUY DIFICIL	DIFICIL	MEDIA	FACIL
A1		1	10	9
A2	1		6	14
B1		1	8	11
B2		1	7	12

En esta tarea todas las preguntas en el índice de discriminación fueron excelentes.
Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

Bloque	Clasificacion Efis Dis			
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	9	8	3	
A2	11	8		2
B1	9	5	5	1
B2	10	6	3	1

Esta tarea tiene un nivel de dificultad fácil y de acuerdo con el índice y coeficiente de discriminación en general la tarea fue excelente, además de que no se sugirió descartar ninguna pregunta. Lo que significa que las preguntas están haciendo una buena discriminación entre los alumnos con altas y bajas calificaciones y que las preguntas han sido contestadas en general correctamente por los alumnos con altas calificaciones.

Como ya se mencionó arriba no se sugiere revisar ninguna pregunta con el índice de discriminación, pero el coeficiente de discriminación si sugiere revisar unas cuantas preguntas, del bloque A1 se recomienda revisar las preguntas 1), 6) y 11):

1)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Solución de desigualdades
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3

Escribe en forma de desigualdad al conjunto que satisface:

$$8 - 5x > 18$$

Respuesta modelo

$x < -2$
$x > -2$
$x \geq -2$
$x \leq -2$

6)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Ecuación valor absoluto
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	4,5,6

Resuelve la siguiente ecuación:

|3 - 2x|= 1

Anota los valores de x separados por una coma y colocando su respectivo signo. No utilices espacios. Escríbelos de menor a mayor.

11)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Solución de desigualdades
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	7,8,9

Elige la opción donde se describe correctamente el conjunto solución de la siguiente desigualdad:

$$x(x-1) < 0$$

Respuesta modelo

$\{x \in R : x < 0\} \cup \{x \in R : x \geq 1\}$
$0 < x < 1$
$0 \leq x < 1$
$\{x \in R : x \leq 0\} \cup \{x \in R : x > 1\}$

Para el bloque A2 fueron las preguntas 3) y 18):

3)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Desigualdad
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1,2,3

Encuentra el conjunto de todos los números reales que satisfacen cada una de las siguientes desigualdades, expresa el conjunto en forma de intervalo.

Respuesta modelo	
$-8 \leq x-5 < -3$: [-3,2)	$5 \leq 7-x \leq 10$: [-3,2)
$-8 \leq x-5 < -3$: [-3,2]	$5 \leq 7-x \leq 10$: [-3,2]
$-8 \leq x-5 < -3$: (-3,2]	$5 \leq 7-x \leq 10$: (-3,2]
$-8 \leq x-5 < -3$: (-3,2)	$5 \leq 7-x \leq 10$: (-3,2)

18)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	10,11,12

Una compañia A renta autos en $300 dólares por una semana, sin ningún cargo extra por kilometraje recorrido. Un auto similar puede rentarse en la compañía B por $135 dólares por semana, más $0.30 por cada kilómetro recorrido.

¿Cuántos kilómetros se deben manejar en una semana para que el pago por la renta del auto en la compañía B sea mayor que el pago de la compañía A?

Respuesta:

Se deben manejar más de {#1}km.

Del bloque B1 son las preguntas 1), 2), 4), 7), 17) y 20) de las cuáles solamente la 1) se revisó líneas arriba, veamos las demás:

2)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Desigualdad
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	1,2,3

Expresa al conjunto solución de la desigualdad siguiente

$$\frac{x+3}{2}>1$$

en forma de intervalo.

** No utilices espacios y si necesitas algún símbolo, sólo escribe su nombre. No olvides colocar los signos + / - correspondientes. Por ejemplo, (-3,infinito)

4)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Descripción de conjuntos
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1,2,3

Elige la opción donde se describe correctamente al conjunto

$$(-\infty,-3)\cup[2,20)\cup[50,\infty)$$

Respuesta modelo

$\{x\in\mathbb{R}:x<-3\}\cup\{x\in\mathbb{R}:2\leq x<20\}\cup\{x\in\mathbb{R}:50\leq x\}$
$$\small \{x\in \mathbb{R}:x\leq -3\}\cup \{x\in \mathbb{R}:2
$\{x\in\mathbb{R}:x>-3\}\cup\{x\in\mathbb{R}:2\leq x<20\}\cup\{x\in\mathbb{R}:50\geq x\}$
$$\small \{x\in \mathbb{R}:-3
$\{x\in\mathbb{R}:-3\leq x<2\}\cup\{x\in\mathbb{R}:20\leq x<50\}$

7)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Desigualdad valor absoluto
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	4,5,6

Escribe el intervalo donde se encuentran los valores x que satisfacen la siguiente desigualdad:

|8 - x| < 2

**No utilices espacios.

17)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	10,11,12

En una fábrica de focos se producen 1000 focos al día. Si de cada 10 focos uno sale defectuoso, ¿cuántos días necesita esta fábrica, como mínimo, para hacer 20000 focos en buen estado?

20)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 6 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	10,11,12

En una fábrica de bolsas, para calcular la utilidad total utilizan la siguiente ecuación

$$U = -10000 + 21x$$

donde x es el número de bolsas vendidas¿Cuántas bolsas deben venderse para que la utilidad total sea de por lo menos $94000?

Y por último del bloque B2 son las preguntas 1), 3), 17) y 20) que como ya vimos en líneas arriba se sugirieron revisar.

Antes de tomar la decisión de descartar alguna pregunta, se recomienda tomar en cuenta las tres estadísticas en conjunto y revisar con cuidado la redacción de cada una de las preguntas, para ahora si tomar una decisión.

4.10 2DO EXAMEN PARCIAL

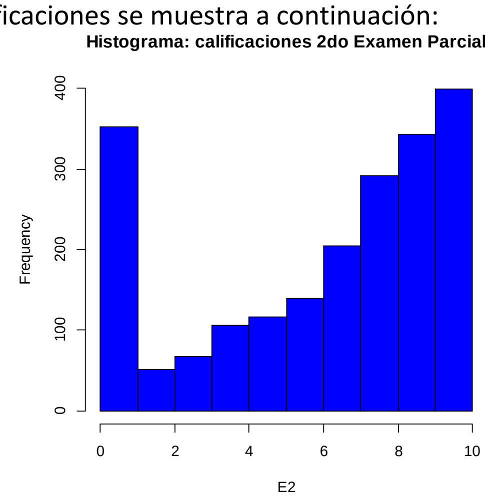
Este segundo examen evaluó los temas de las tareas 4,5 y 6.

Para este examen se realizaron 15 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta				
Emparejamiento	Numérica	Opción múltiple	Respuesta corta	Respuestas anidadas Cloze
4	2	16	6	21

Los intentos para este segundo examen fueron menores que el número de alumnos en cada bloque, lo que significa que algunos alumnos no contestaron este examen.

El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio del examen fue de 5.90. y la cantidad de ceros observada en el histograma fue de 325.

Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de este segundo examen, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.

Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

Bloque	Clasificacion Ind Dif			
	DIFICIL	MEDIA	FACIL	MUY FACIL
A1	1	13	35	
A2	1	12	33	3
B1	1	16	31	1
B2	1	8	39	1

Tabla: clasificación índice de discriminación

Bloque	Clasificacion Ind Dis	
	EXCELENTE	BUENA
A1	48	1
A2	49	
B1	49	
B2	47	2

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

	Clasificacion Efis Dis		
Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR
A1	47	2	
A2	47	2	
B1	48	1	
B2	44	4	1

Este segundo examen se encuentra en el nivel de dificultad fácil, tanto el índice de discriminación como el coeficiente de discriminación catalogaron este examen como excelente, de acuerdo con la estadística del índice de discriminación no nos sugirió en esta ocasión revisar alguna pregunta; respecto del coeficiente de discriminación solo se sugiere revisar una pregunta en el bloque B2, esta pregunta fue la número 40), la cual está relacionada con el tema de valor absoluto:

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	e)
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	12,13

Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^2 - |5x+6| = 0$$

**Escribe los valores de x separados por comas (,)

**Ordenalos de menor a mayor

**No utilices espacios

Para haber sido una tarea con bastantes preguntas a elegir, fue un buen examen. En conclusión para este examen las preguntas hacen una buena discriminación entre los alumnos con altas y bajas calificaciones, además de que las preguntas fueron contestadas correctamente en su mayoría por los alumnos con altas calificaciones.

4.11 TAREA 7

Esta tarea incluyó los siguientes temas:

Trigonometría

-Teorema de Pitágoras

-Funciones trigonométricas

-Identidades trigonométricas

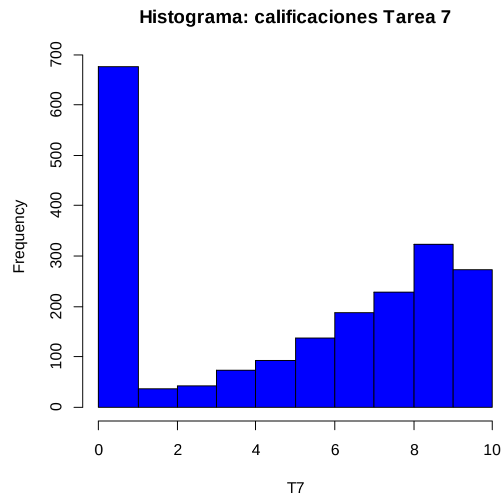
-Solución de triángulos rectángulos

Para esta tarea se realizaron 11 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta		
Emparejamiento	Opción múltiple	Respuestas anidadas Cloze
11	5	10

El número de intentos para el bloque A1 fue de 485, 263 para el bloque A2, 501 para el B1 y 280 intentos para B2. Lo que significa que algunos alumnos no contestaron la tarea.

El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio del examen fue de 4.78, del histograma podemos observar que hay una gran cantidad de ceros, para ser exactos 648, que sin duda afectaron el promedio.

Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.

Las tablas de clasificación del índice e dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

	Clasificacion Ind Dif			
Bloque	DIFICIL	MEDIA	FACIL	MUY FACIL
A1	2	7	17	
A2		4	19	3
B1	3	7	21	2
B2	3	6	23	1

Tabla: clasificación índice de discriminación

	Clasificacion Ind Dis				
Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE	PESIMA
A1	26				
A2	26				
B1	31	1			1
B2	30	1	1	1	

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

	Clasificacion Efis Dis				
Bloque	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE	PESIMA
A1	21	5			
A2	16	6	4		
B1	23	6	3		1
B2	21	6	5	1	

De acuerdo con las tablas presentadas, esta tarea tiene un nivel de dificultad fácil; el índice de discriminación nos dice que esta tarea es clasificada como excelente, lo que significa que las preguntas hacen una adecuada discriminación entre los alumnos con altas y bajas calificaciones. Esta estadística sugiere descartar una pregunta del bloque B1, esta tiene el número 8):

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Valores exactos
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	3,4,5

Encuentra el valor exacto de las expresiones, y relaciona con la respuesta correcta.

Alguna de las respuestas son:

Respuesta modelo

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
: -45°

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
: 9°

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
: -60°

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
: 20°

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
: 24°

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
: 30°

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
: 60°

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
: -20°

Del bloque B2 se recomienda revisar las preguntas 6) y 8), pero esta ultima la revisamos arriba, por lo que la otra pregunta es:

6)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	e) Determinación de cuadrante
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	3,4,5

Determina el cuadrante que contiene a θ si son válidas las condiciones dadas.

Respuesta modelo
cosθ>0 y cscθ<0: 4° cuadrante
cosθ>0 y cscθ<0: 3° cuadrante
cosθ>0 y cscθ<0: 2° cuadrante
cosθ>0 y cscθ<0: Ninguno
[Sin respuesta]
senθ<0 y secθ<0: 4° cuadrante
senθ<0 y secθ<0: 3° cuadrante
senθ<0 y secθ<0: 2° cuadrante
senθ<0 y secθ<0: Ninguno

cscθ>0 y cotθ<0: 4° cuadrante
cscθ>0 y cotθ<0: 3° cuadrante
cscθ>0 y cotθ<0: 2° cuadrante
cscθ>0 y cotθ<0: Ninguno
[Sin respuesta]
secθ>0 y cscθ>0: 4° cuadrante
secθ>0 y cscθ>0: 3° cuadrante
secθ>0 y cscθ>0: 2° cuadrante
secθ>0 y cscθ>0: Ninguno

Ambas preguntas de funciones trigonométricas.
El coeficiente de discriminación en su mayoría es excelente, esto significa que las preguntas en su mayoría fueron contestadas correctamente por alumnos con altas calificaciones, es decir, evalúa lo que se espera. Esta estadística sugiere revisar 4 preguntas en el bloque A2, 3 preguntas de funciones trigonométricas y un problema; en bloque B1 se sugiere revisar 3 preguntas.
Las preguntas del bloque A2 son 8), 15), 17) y 24), pero como la primera ya se vio arriba, revisaremos las demás:

15)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	e) Ecuaciones
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	6,7,8

Son soluciones de la ecuación

$$tan^2x = 1$$

Respuesta modelo
$\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$
$\pi, -\pi$
$\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

17)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Identidades
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	6,7,8

Identifica cada una de los siguientes productos.

Respuesta modelo

$$\frac{(1-cosx)(1+cosx)}{cosx}$$

: senxtanx

$$\frac{(1-cosx)(1+cosx)}{cosx}$$

: cosxcotx

$$\frac{(1-cosx)(1+cosx)}{cosx}$$

: Ninguno

$$\frac{(1-senx)(1+senx)}{senx}$$

: senxtanx

$$\frac{(1-senx)(1+senx)}{senx}$$

: cosxcotx

$$\frac{(1-senx)(1+senx)}{senx}$$

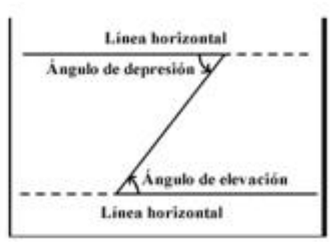
: Ninguno

24)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	e) Problema
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	10,11

Un árbol de 45 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.



Respuesta modelo
36.8°
39.8°
37.8°
38.9°

Las preguntas del bloque B1 son 17), 23) y 26) de las cuales la primera se vio líneas arriba, veamos las restantes:

23)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Problema
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	10,11

Un helicóptero que está volando a 900 m de altura, logra distinguir una ciudad con un ángulo de depresión de 24°. ¿A qué distancia de la ciudad se encuentra?

Se encuentra a {#1} metros.

**Si la respuesta contiene cifras decimales escribe dos de ellas y utiliza coma como separador decimal.

26)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	c) Problema
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	10,11

Al lado de una asta bandera se encuentra una estatua que mide 9m. de alto. El extremo superior del asta con la parte inferior de la estatua forman un ángulo de 53.13° con respecto al piso, y el extremo superior del asta con la parte superior de la estatua forma un ángulo de 59° respecto a la horizontal.

¿Cuál es la altura del asta y a que distancia se encuentra de la estatua?

La altura del asta es de {#1} m. y está a {#2} m. de distancia de la estatua.

De este mismo bloque se pide descartar la pregunta 8), también revisada en el bloque A2.
Las preguntas para el bloque B2 son 6), 8), 12), 21), 22) y 26), como pudimos ver la pregunta 6), 8) y 26) las vimos líneas arriba, la 8) ha aparecido en casi todos los bloques, veamos las demás:

12)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	c) Simplificación (funciones trigonométricas)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	6,7,8

Simplifica las siguientes expresiones y relaciona con la opción correcta.

Alguna de las respuestas son:

Respuesta modelo

$\sin(A+\pi)$

: -senA

$\sin(A+\pi)$

: senA

$\sin(A+\pi)$

: tanA

$\sin(A+\pi)$

: -tanA

$\sin(A+\pi)$

: -secA

$\sin(A+\pi)$

: cosA

$\sin(A+\pi)$

: -cosA

$\sin(A+\pi)$

: cotA

$\sin(A+\pi)$

21)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	c) Elementos del triángulo
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	9

Dados los elementos indicados del triángulo rectángulo ABC (A el ángulo recto), calcula los valores de los elementos restantes

$$\angle B = 41^{\circ}, a = 63$$

Introduce las respuestas correctas, aproximando a dos cifras decimales:

ángulo A={#1}°

cateto b={#2}

ángulo C={#3}°

cateto c={#4}

**Utiliza coma (,) como separador decimal donde corresponda.

22)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 7 Matemáticas
Nombre de la pregunta	d) Problema
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	10,11

Un árbol de 45 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.

Respuesta modelo
36.8°
39.8°
37.8°
38.9°

El tema que causó problema en esta tarea fue el de funciones trigonométricas. Por lo que hay que revisar con cuidado las preguntas y determinar que hacer con ellas.

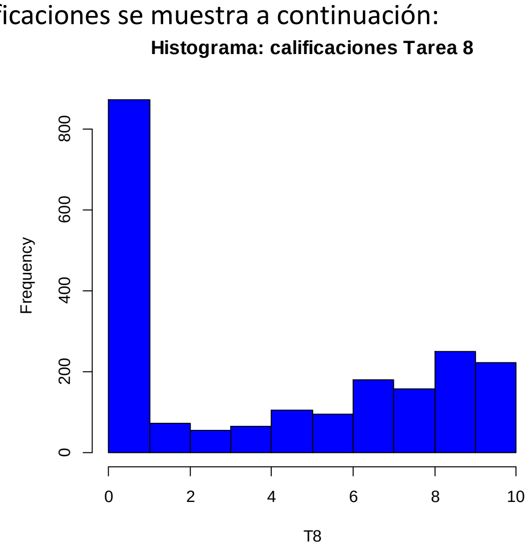
4.12 TAREA 8

Esta tarea incluyó los siguientes temas:
Trigonometría
-Ley de senos y cosenos

Para esta tarea se realizaron 12 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta			
Emparejamiento	Numérica	Opción múltiple	Respuestas anidadas Cloze
1	4	5	8

El número de intentos para el bloque A1 fue de 438, 231 para el bloque A2, 474 para el B1 y 282 intentos para B2. Lo que significa que algunos alumnos no contestaron la tarea.
El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio del examen fue de 3.92. La cantidad de ceros para esta tarea también fue muy grande, 795 ceros.

Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.

Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

Bloque	Clasificacion Ind Dif		
	DIFICIL	MEDIA	FACIL
A1	1	11	6
A2		5	13
B1	2	5	11
B2	1	7	10

Esta tarea tuvo todas las preguntas en excelente en la clasificación del índice de discriminación.

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

Bloque	Clasificacion Efis Dis		
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR
A1	17	1	
A2	12	5	1
B1	14	4	
B2	13	5	

Observando las tablas podemos ver que la tarea es considerada fácil, todas las preguntas de esta tarea fueron clasificadas como excelentes de acuerdo con el índice de discriminación. Esto significa que las preguntas hacen una buena discriminación entre los alumnos con altas y bajas calificaciones.

Y el coeficiente de discriminación en su mayoría también fue excelentes, lo que quiere decir que las preguntas fueron contestadas correctamente en su mayoría por los alumnos con altas calificaciones, esta estadística solo sugiere revisar una pregunta en el bloque A2, esta pregunta es sobre leyes de senos y cosenos, que es el único tema de esta tarea, veamos de que se trata la pregunta:

7)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 8 Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Área del triángulo
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	5,6,7

Encuentra el área del triángulo si

$$a = 8, b = 7, c = 9$$

La sugerencia para esta pregunta es revisarla con cuidado para determinar de que manera se puede mejorar.

4.13 TAREA 9

Esta tarea incluyó los siguientes temas:

Geometría analítica

-Plano cartesiano

-División entre puntos

-División de un segmento en una razón dada

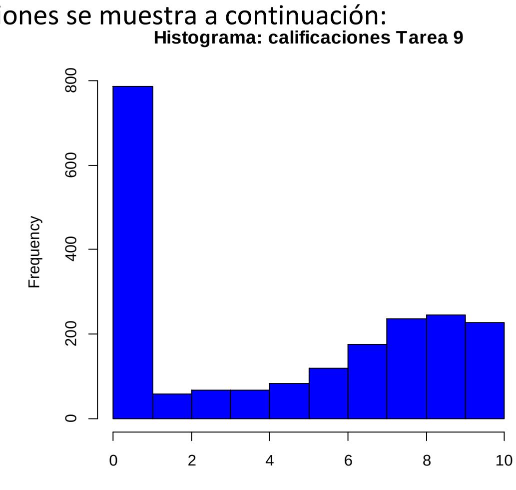
-Ecuación de la recta

Para esta tarea se realizaron 15 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta			
Emparejamiento	Numérica	Opción múltiple	Respuestas anidadas Cloze
3	2	9	13

El número de intentos para el bloque A1 fue de 429, 241 para el bloque A2, 477 para el B1 y 269 intentos para B2. Lo que significa que algunos alumnos no contestaron la tarea.

El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio de la tarea fue de 4.23. Para esta tarea se contaron 753 ceros.

Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta penúltima tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.
Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

Bloque	Clasificacion Ind Dif			
	DIFICIL	MEDIA	FACIL	MUY FACIL
A1	2	10	15	
A2	1	10	15	1
B1	1	9	17	
B2	1	7	18	1

Tabla: clasificación índice de discriminación

Bloque	Clasificacion Ind Dis		
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR
A1	26	1	
A2	26		1
B1	26	1	
B2	25	2	

Tabla: clasificación coeficiente de discriminación

Bloque	Clasificacion Efis Dis			
	EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	24	2	1	
A2	20	2	5	
B1	21	3	2	1
B2	17	9	1	

De acuerdo con las tablas presentadas, la tarea fue catalogada con un nivel de dificultad fácil, con un índice y coeficiente de discriminación excelente en general, lo que significa que las preguntas realizan una buena discriminación entre los alumnos con altas y bajas calificaciones y que las preguntas en su mayoría fueron contestadas correctamente por los alumnos con buenas calificaciones.
El índice de discriminación sugirió revisar una pregunta en el bloque A2, esta pregunta es sobre definiciones de rectas, es la pregunta 3):

3)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	c) Figura geométrica
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1

Lee con cuidado y escoge la respuesta correcta.

Respuesta modelo
Una recta vertical es el conjunto de puntos cuya: abscisa es igual en cada punto.
Una recta vertical es el conjunto de puntos cuya: ordenada es igual en cada punto.
Una recta vertical es el conjunto de puntos cuya: Ninguna de las anteriores
[Sin respuesta]
Una recta horizontal es el conjunto de puntos cuya: abscisa es igual en cada punto.
Una recta horizontal es el conjunto de puntos cuya: ordenada es igual en cada punto.
Una recta horizontal es el conjunto de puntos cuya: Ninguna de las anteriores

El coeficiente de discriminación sugirió revisar una pregunta en el bloque A1, esta pregunta es sobre distancia entre puntos, es la pregunta 6):

6)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	2,3,4

Los vértices de un triángulo son A(2,5), B(4,-1) y C(6,5).

Respuesta modelo
El triángulo ABC es isósceles.
El triángulo ABC es equilátero.
El triángulo ABC es escaleno.
Ninguna de las anteriores respuestas.

Las preguntas a revisar del bloque A2 son 3), 4), 8), 14) y 27, la primera la vimos arriba con el índice de discriminación, veamos las restantes:

4)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2,3,4

Determina lo que se te pide:

Nota: Escribe tus resultados en forma decimal usando coma en lugar de punto y solamente con dos decimales.

La distancia entre los puntos P(5,3) y Q(3,5): {#1}

La longitud del segmento que une los puntos P(-2,5) y Q(3,5): {#2}

La abscisa del punto sobre el eje X que equidista de los puntos P(-1,3) y Q(4,2) es: {#3}

8)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	e)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2,3,4

Determina el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son A(-3,-1), B(0,3), C(3,4) y D(4,-1).

Nota: Escribe tu respuesta en forma decimal, con dos dígitos decimales y usando coma en lugar de punto.

El perímetro es: {#1}

14)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Calcular pendiente
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	8,9,10

Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados

$$(-4,3),(12,-9)$$

Introduce el valor de la pendiente

**Nota: Escribe la respuesta en forma decimal utilizando coma (,) como separador decimal

27)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	e) Simplificación
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	14,15

Selecciona la opción correcta que muestre la siguiente expresión simplificada

$$\frac{2}{2x^2-3x+1}-\frac{1}{2x^2-7x+5}+\frac{3}{4x^2-12x+5}$$

Respuesta modelo

$\frac{5x-12}{4x^3-16x^2+17x-5}$
$\frac{12-5x}{4x^3-16x^2+17x-5}$
$\frac{5x-12}{4x^3-17x^2+16x-5}$
$\frac{5x-12}{4x^3-12x^2+12x-5}$
$\frac{5x-12}{4x^3-16^2-17x-5}$

3 de ellas de distancia entre puntos, otra de encontrar pendientes de rectas y una de simplificar una expresión algebraica

Del bloque B1 se recomienda revisar las preguntas 6), 7) y 13), la primera ya se había mencionado, veamos las demás:

7)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	2,3,4

Un cuadrilátero es un rectángulo si tiene sus diagonales iguales.
Determina el tipo de figura del cuadrilátero con vértices en A(8,-3), B(6,5), C(-2,3) y D(0,-5).

Respuesta modelo
El triángulo ABC es isósceles.
El triángulo ABC es equilátero.
El triángulo ABC es escaleno.
Ninguna de las anteriores respuestas.

13)
Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Calcular pendiente
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	8,9,10

Elige la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:

Respuesta modelo
(2,3) y (7,1): -2/5
(2,3) y (7,1): -5/2
(2,3) y (7,1): 2/5
(2,3) y (7,1): 5/2
[Sin respuesta]
(3,2) y (1,7): -2/5
(3,2) y (1,7): -5/2
(3,2) y (1,7): 2/5
(3,2) y (1,7): 5/2

2 sobre distancia entre puntos y una de pendiente de la recta.
Por último, revisar una pregunta en el bloque B2, esta pregunta es la número 15), sobre pendiente de la recta:

15)
Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 9 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Calcular pendiente
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	8,9,10

Calcula la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos:

$$(-5,-7),(3,9)$$

Introduce el valor de la pendiente

Los temas problema de esta tarea son sobre distancia entre dos puntos y pendiente de la recta.

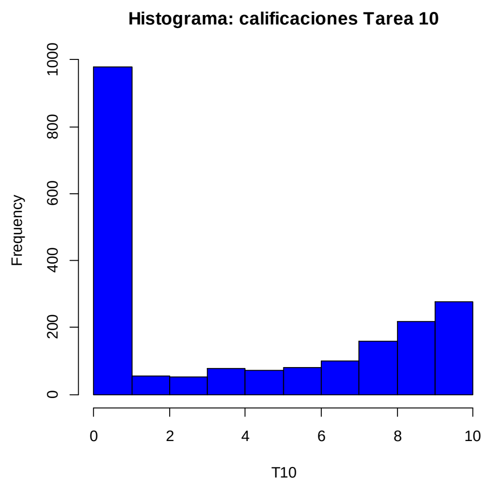
4.14 TAREA 10

Esta tarea incluyó los siguientes temas:
Geometría analítica
-Rectas paralelas
-Rectas perpendiculares
-Desigualdades

Para esta tarea se realizaron 15 preguntas aleatorias, el tipo de preguntas a elegir para esta tarea fueron como sigue:

Tipo De Pregunta				
Emparejamiento	Opción múltiple	Respuesta corta	Respuestas anidadas Cloze	VerdaderoFalso
8	6	1	12	1

El número de intentos para el bloque A1 fue de 372, 209 para el bloque A2, 425 para el B1 y 248 intentos para B2. Lo que significa que algunos alumnos no contestaron la tarea.
El histograma de calificaciones se muestra a continuación:



El promedio de la tarea fue de 3.69. Para esta tarea fueron 935 ceros, una gran cantidad de ceros, los cuales hicieron que el promedio fuera realmente bajo.
Respecto al análisis de los reactivos, se presentan los resultados de esta última tarea, considerando la cantidad de reactivos propuestos para la tarea y cuántos de ellos de clasifican de forma óptima(permanencia), modificación y/o eliminación para los semestres futuros.

Las tablas de clasificación del índice de dificultad y discriminación se muestran a continuación:

Tabla: clasificación índice de dificultad

Bloque	Clasificacion Ind Dif		
	DIFICIL	MEDIA	FACIL
A1		16	12
A2		10	18
B1	1	7	20
B2		7	21

Tabla: clasificación índice de discriminación

Bloque	Clasificacion Ind Dis	
	EXCELENTE	BUENA
A1	27	1
A2	28	
B1	28	
B2	28	

Tabla: clasificación del coeficiente de discriminación

Bloque	Clasificacion Efis Dis EXCELENTE	BUENA	REGULAR	POBRE
A1	23	3	1	1
A2	21	2	5	
B1	18	7	3	
B2	19	6	3	

Esta tarea en general fue clasificada con un nivel de dificultad fácil, con excelente índice y coeficiente de discriminación, lo que significa que las preguntas están haciendo una buena discriminación entre alumnos con altas y bajas calificaciones, además de que las preguntas en su mayoría fueron contestadas correctamente por alumnos con altas calificaciones.
El índice de discriminación no recomienda revisar ninguna pregunta y el coeficiente de discriminación sugirió revisar varias preguntas.

Para el bloque A1 se sugirió revisar las preguntas 12) y 21):

12)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Puntos en la misma recta
Tipo de pregunta	•• Verdadero/Falso ••
Número de preguntas	5,6,7,8

Los puntos (1.5,8), (2,7) y (3.5,3) se encuentran en la misma recta.

21)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	12,13,14

Suponga que el costo para producir 15 unidades de un producto es de $80 y el de 20 unidades es de $70. Si el costo está relacionado linealmente con el producto, determine una ecuación lineal que los relacione, y así, encuentre el costo de producir 35 unidades.

Respuesta modelo
$40
$39
$31
$32

Una pregunta sobre puntos en una recta y el otro un problema sobre la ecuación de la recta.
Para el bloque A2 tenemos las siguientes preguntas 5), 6), 8), 17) y 21), esta última la vimos líneas arriba, veamos las demás:

5)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	d) Rectas perpendiculares
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	3,4

El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es:

**Escribe con número el resultado y no olvides colocar el signo. No utilices espacios.

6)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Rectas perpendiculares
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	3,4

La recta L_1 pasa por los puntos A(-3,2) y B(7,3) y la recta L_2 pasa por los puntos C(-1,1) y D(1,3). Determina lo que se te pide en forma de fracción n/m en donde n y m no tienen factores comunes, en caso de que la respuesta sea un entero n escribe n/1.

Primero calcula la pendiente entre A y B: m1= {#1}/ {#2}

Ahora calcula la pendiente entre C y D: m2= {#3}/ {#4}

Ahora contesta si las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares: {#5}

8)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	c) Rectas perpendiculares
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	3,4

Tenemos la ecuación de la recta

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

¿que pendiente debe tener otra recta para que sean perpendiculares?

* Determina lo que se te pide en forma de fracción n/m en donde n y m no tienen factores comunes, en caso de que la respuesta sea un entero n escribe n/1.

**Si la pendiente es negativa, colocar el signo negativo en el numerador sin utilizar espacios

Debe tener pendiente= {#1}/ {#2}

17)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Punto de intersección
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9,10,11

Encuentra el punto de intersección de las siguientes rectas y selecciona la opción correcta

$$L_1 : 2x - y - 1 = 0$$

$$L_2 : 3x - y + 2 = 0$$

Respuesta modelo

$(-3, -7)$
$(3, 7)$
$(-3, 7)$
$(3, -7)$
$(-7, -3)$
$(7, 3)$
$(-7, 3)$
$(7, -3)$

5 en el bloque A2, 2 preguntas de rectas perpendiculares, una pregunta sobre ecuación de la recta, otra sobre intersección de recta y un problema de ecuación de la recta.

Para el bloque B1 tenemos las siguientes preguntas 10), 12) y 14), de estas ya vimos la 12), por lo que veamos las otras dos:

10)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Ecuaciones de las rectas
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	5,6,7,8

Selecciona la opción que complete correctamente el enunciado:

Algunos enunciados son:

Respuesta modelo
La ecuación de la recta cuya ordenada al origen es -3 y pendiente -3 es: 3x + y = -3
La ecuación de la recta cuya ordenada al origen es -3 y pendiente -3 es: y = -x + 3
La ecuación de la recta cuya ordenada al origen es -3 y pendiente -3 es: y = 2x + 2
La ecuación de la recta cuya ordenada al origen es -3 y pendiente -3 es: y = 3x + 5

Una recta paralela a $L: x + y = 1$ es la recta con ecuación: 3x + y = -3
Una recta paralela a $L: x + y = 1$ es la recta con ecuación: y = -x + 3
Una recta paralela a $L: x + y = 1$ es la recta con ecuación: y = 2x + 2
Una recta paralela a $L: x + y = 1$ es la recta con ecuación: y = 3x + 5

14)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Recta-pendiente-ordenada
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	5,6,7,8

Los valores de la pendiente m y la ordenada al origen b de la ecuación de la recta

$$2y + 4x + 2 = 0$$

son:

Respuesta modelo
m = -2 y b = -1
m = 2 y b = 1
m = 4 y b = 2
m = -4 y b = -2

Todas estas preguntas sobre la ecuación de la recta.

Para el bloque B2 se pide revisar las preguntas 11), 14) y 19), de estas ya se revisó la 14), veamos las otras dos:

11)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Recta
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	5,6,7,8

El punto P(1,-3) es un punto de la recta

Respuesta modelo
y = 2x - 5
y = 5x - 2
y = x - 3
y = -3x + 1

19)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	Tarea 10 Matemáticas
Nombre de la pregunta	Problema
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	12,13,14

El costo de fabricar 100 títeres a la semana es $700 y el de 120 títeres a la semana es de $800.

a) Determine la ecuación de costo, suponiendo que es lineal

Respuesta: y = {#1}x + {#2}

b) ¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

Respuesta: costo variable = {#3} y costo fijo = {#4}

Estas preguntas son sobre la ecuación de la recta.

CAPÍTULO IV
CONCLUSIONES

Si bien matemáticas no es una materia muy fácil, en el material didáctico se trató de explicar la teoría de una manera sencilla de leer y entender con algunos ejemplos que ilustraran el tema que se estaba viendo, también se incluyeron algunas demostraciones sencillas. Este material cubrió los temas del programa de la materia de matemáticas, el cual se anexa.

No cabe duda que al realizar este análisis pude ver que el material se puede mejorar. Sin duda este ejercicio me sirvió para darme cuenta que cuando se escribe algo y después de tiempo se vuelve a releer ya no suena igual o no es la idea que se buscaba transmitir en aquel momento.

A lo largo de las tareas, se pudo notar que los temas iban tomando un nivel de dificultad mayor a la anterior. Fue notorio también que los intentos en los cuestionarios iban disminuyendo también, pudo deberse a varios factores, pero una justificación es la deserción de los alumnos.

De acuerdo a las estadísticas vistas, índice de dificultad, índice de discriminación y coeficiente de discriminación, este material didáctico proporcionado en la plataforma Moodle fue clasificado con un nivel de dificultad fácil, con un índice y coeficiente de discriminación excelente. Lo que significa que los cuestionarios de matemáticas propuestos en la plataforma Moodle están discriminando bien entre los alumnos con altas y bajas calificaciones, además de que están evaluando lo que se buscaba evaluar, es decir, en general son buenos, y dado que los cuestionarios están basados en la guía, podemos decir que es un buen material, ya que la cantidad de preguntas a descartar fueron pocas, claramente con un estudio más a fondo y detallado se pueden realizar muchas mejoras tanto en el material de apoyo como en la plataforma Moodle, como cambiar los tipos de preguntas, mejorar la redacción, poner más ejemplos en el material, etc.

En este análisis pudimos ver que la plataforma cuenta con la ventaja de que te proporciona la calificación del cuestionario al momento además de que permite el análisis posterior de los cuestionarios, que fue nuestro caso de interés. En donde se pudieron identificar las preguntas que causaron algún conflicto. Otra cuestión es que las tareas y exámenes en su mayoría estuvieron catalogados como fáciles, habría que equilibrar el tipo de preguntas para que haya diversidad en el nivel de dificultad en las preguntas.

Podemos concluir que este material preuniversitario es adecuado, pero que requeriría de un análisis más profundo para su mejora.

Este trabajo no fue fácil a pesar de que no cuenta con un alto grado de profundidad, pero quedo satisfecha con lo aprendido en esta travesía y con mucha motivación para seguir aprendiendo.

Los histogramas fueron realizados en R, las gráficas y tablas se realizaron con ayuda de Tableau, para la limpieza y organización de la información se utilizó Alteryx.

Los objetivos de este trabajo se cumplieron, escribir el material de apoyo y realizar un análisis descriptivo para evaluarlo. Ambos objetivos tuvieron sus dificultades y consigo muchos aprendizajes.

ANEXO

Programa de matemáticas para propedéutico

facultad de ingeniería

propedéutico

Matemáticas

Programa

Números reales

1.1 Números Reales.

- 1.1.1 Operaciones y propiedades de campo.
- 1.1.2 Orden en los números reales. Propiedades. La recta real..

1.2 Relación de orden.

1.3 Problemas

álgebra

2.1 Lenguaje algebraico (Terminología)**.**
2.2 Grado y Términos Semejantes.
2.3 Leyes de exponentes.
2.4 Suma y resta de expresiones algebraicas.
2.5 Producto de expresiones algebraicas.
2.6 Productos Notables: binomio al cuadrado; binomios conjugados; binomios con término común, binomio al cubo.
2.7 Factorización: trinomio cuadrado perfecto; diferencia de cuadrados;
2.8 División de polinomios.
2.9 Expresiones fraccionarias.
2.10 Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Sistemas de ecuaciones. Problemas.
2.11 Ecuaciones de segundo grado. Problemas.
2.12 Desigualdades.
2.13 Problemas.

geometría analítica

4.1 Plano cartesiano. Localización de puntos en el plano.
4.2 Distancia entre dos puntos. División de un segmento en una razón dada.
4.3 Ecuación de la recta.
4.4 Rectas paralelas; rectas perpendiculares. Desigualdades.
4.9 Problemas

Trigonometría

3.1 Teorema de Pitágoras.
3.2 Funciones trigonométricas. Círculo unitario. Definiciones. Valores 30°, 45° y 60°.
3.3 Identidades.
3.4 Solución de triángulos rectángulos. Problemas.
3.5 Triángulo oblicuángulo. Ley de senos. Ley de los cosenos. Aplicaciones.
3.6 Problemas

Bibliografía

[1]De Oteyza de Oteyza, Elena, [et al], *Geometría analítica y trigonometría* , Pearson Educación, México, 2001.

[2]Stewart, James. *Precálculo*, Ed. Thompson

[3] Swokowski, Earl W. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Ed. Iberoamericana.

ANEXO PREGUNTAS DE EXAMEN

1ER EXAMEN PARCIAL

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1

Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Respuesta modelo	**Respuesta real**
El 0 es un número racional y también es un número irracional.: Falso	Falso
El 0 es un número racional y también es un número irracional.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
Cada número racional es un número real.: Falso	Falso
Cada número racional es un número real.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
Todo número racional es un número entero.: Falso	Falso
Todo número racional es un número entero.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$5\sqrt{4}$ es un número racional.: Falso	Falso
$5\sqrt{4}$ es un número racional.: Verdadero	Verdadero

$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$	Falso
$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$	Verdadero

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1

Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Respuesta modelo	**Respuesta real**
Todo número racional es un número entero.: Falso	Falso
Todo número racional es un número entero.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
La unión de los números racionales y de los números irracionales son los números reales.: Falso	Falso
La unión de los números racionales y de los números irracionales son los números reales.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
La unión de enteros y naturales son los racionales.: Falso	Falso
La unión de enteros y naturales son los racionales.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$5\sqrt{2}$ es un número racional.: Falso	Falso
$5\sqrt{2}$ es un número racional.: Verdadero	Verdadero
$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$: Falso	Falso
$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$: Verdadero	Verdadero

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1

Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Respuesta modelo	Respuesta real
Cada número irracional se puede expresar como el cociente de dos enteros: Falso	Falso
Cada número irracional se puede expresar como el cociente de dos enteros: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$$R^+$$ es el conjunto de los número reales positivos: Falso	Falso
$$R^+$$ es el conjunto de los número reales positivos: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
Todo número natural es es número racional: Falso	Falso
Todo número natural es es número racional: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$$\sqrt{9}$$ es un número racional.: Falso	Falso
$$\sqrt{9}$$ es un número racional.: Verdadero	Verdadero
$$\frac{a^2+b}{a+5}=\frac{a+b}{5}$$: Falso	Falso
$$\frac{a^2+b}{a+5}=\frac{a+b}{5}$$: Verdadero	Verdadero

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	1

Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Respuesta modelo	Respuesta real
Los numeros irracionales no son reales.: Falso	Falso
Los numeros irracionales no son reales.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
e es un número irracional.: Falso	Falso
e es un número irracional.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
La interseccion de los números racionales con los irracionales es el vacio.: Falso	Falso
La interseccion de los números racionales con los irracionales es el vacio.: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$\sqrt{8}$ es un número racional.: Falso	Falso
$\sqrt{8}$ es un número racional.: Verdadero	Verdadero
$\sqrt{(-9)^2} = -9$: Falso	Falso
$\sqrt{(-9)^2} = -9$: Verdadero	Verdadero

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2

Encuentra el valor numérico sustituyendo m=3, n=4, p=5 en las siguientes expresiones:

$$\frac{m+\frac{2}{m}}{\frac{1}{n}+\frac{p}{mn}} - \frac{p}{2n} - \frac{p}{2m} =$$

{#1}/{#2} **

**Simplifica y escribe la fracción irreducible.

$$m^2 - (\frac{1}{m})^{-2} =$$

{#3}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2

Encuentra el valor numérico sustituyendo w=3 en la siguientes expresión:

$$\frac{(9w+1)-(4w^2-8w)}{5(2-3w)-(w-5)} = \{\#1\}/\{\#2\}$$

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2

Encuentra el valor numérico sustituyendo x=-3 y y=8 en la siguientes expresión:

$$\frac{(x^2-9)-(x^3-3y^2+7)}{x^3-x^2+y^2-24} = \{\#1\}$$

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	3

Elige la respuesta correcta a cada enunciado.

¿Cómo debe de ser $(3a)^2$ respecto a $(5b)^2$ si $0 < 3a < 5b$?: Menor	Menor
¿Cómo debe de ser $(3a)^2$ respecto a $(5b)^2$ si $0 < 3a < 5b$?: Positivo	Positivo
¿Cómo debe de ser $(3a)^2$ respecto a $(5b)^2$ si $0 < 3a < 5b$?: Mayor	Mayor

Si $xy > 0$ entonces ¿que signo tendrá $(-5x)(-12y)$?: Menor	Menor
Si $xy > 0$ entonces ¿que signo tendrá $(-5x)(-12y)$?: Positivo	Positivo
Si $xy > 0$ entonces ¿que signo tendrá $(-5x)(-12y)$?: Mayor	Mayor
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
¿Cómo debe de ser $\frac{1}{2x}$ respecto a $\frac{1}{3y}$ si $0 < 2x < 3y$?: Menor	Menor
¿Cómo debe de ser $\frac{1}{2x}$ respecto a $\frac{1}{3y}$ si $0 < 2x < 3y$?: Positivo	Positivo
¿Cómo debe de ser $\frac{1}{2x}$ respecto a $\frac{1}{3y}$ si $0 < 2x < 3y$?: Mayor	Mayor

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	3

Escribe los números siguientes en orden ascendente: -2,-7,7,2.

Escríbelos separándolos con comas y sin dejar espacios, por ejemplo:
1,2,3

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	3

Determina si la afirmación es verdadera o falsa

Respuesta modelo	Respuesta real
Si a<0 entonces $\frac{1}{a} > 0$: Falso	Falso
Si a<0 entonces $\frac{1}{a} > 0$: Verdadero	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
Si a	Falso
Si a	Verdadero
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
Si a**bc: Falso**	Falso
Si a**bc: Verdadero**	Verdadero

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	3

¿Qué signo tienen

$$\frac{a}{b}$$

si ab>0?

Respuesta modelo
Positivo
Negativo

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	4

Reducir a la mínima expresión y elegir la respuesta correcta.

Respuesta modelo	Respuesta real
$\lvert x-3\rvert$ si $x<3$: $-x+3$	$-x+3$
$\lvert x-3\rvert$ si $x<3$: $-2+3\pi$	
$\lvert x-3\rvert$ si $x<3$: $x-3$	$x-3$

$\lvert 2-3\pi\rvert$: $-x+3$	$-x+3$
$\lvert 2-3\pi\rvert$: $-2+3\pi$	$-2+3\pi$
$\lvert 2-3\pi\rvert$: $x-3$	$x-3$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Valor absoluto
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	4

¿Cuál es el valor de

$$\left|\frac{3-x}{7}\right|$$

si x>3?

Respuesta modelo
$\frac{-x+3}{7}$
$\frac{x+3}{7}$
$\frac{x-3}{7}$
$\frac{x}{7}$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b) Valor absoluto
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	4

$$|\sqrt{2}-2| =$$

Respuesta modelo

$\sqrt{2}-2$
$2-\sqrt{2}$
$2+\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}-2$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	5

Elige la opción correcta para cada enunciado

Respuesta modelo	Respuesta real
Todos los números mayores que 5 y menores o iguales a 15: $(5, 15]$	$(5, 15]$
Todos los números mayores que 5 y menores o iguales a 15: $(-2, 3)$	$(-2, 3)$
Todos los números mayores que 5 y menores o iguales a 15: $[-2, 15)$	$[-2, 15)$
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
El conjunto de números reales que satisfacen $x < 3$ y $x > -2$: $(5, 15]$	$(5, 15]$
El conjunto de números reales que satisfacen $x < 3$ y $x > -2$: $(-2, 3)$	$(-2, 3)$
El conjunto de números reales que satisfacen $x < 3$ y $x > -2$: $[-2, 15)$	$[-2, 15)$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Intervalos
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	5

Escoge el intervalo descrito por el conjunto de número reales.

Respuesta modelo	Respuesta real
El conjunto de números reales que satisfacen $$-2	(-2,5]
El conjunto de números reales que satisfacen $$-2	[-2,5]
El conjunto de números reales que satisfacen $$-2	[-2,5)
El conjunto de números reales que satisfacen $$-2	(-2,5)
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
El conjunto de números reales que satisfacen $-2 \leq x \leq 5$: (-2,5]	(-2,5]
El conjunto de números reales que satisfacen $-2 \leq x \leq 5$: [-2,5]	[-2,5]
El conjunto de números reales que satisfacen $-2 \leq x \leq 5$: [-2,5)	[-2,5)
El conjunto de números reales que satisfacen $-2 \leq x \leq 5$: (-2,5)	(-2,5)
Todos los números reales que satisfacen $-2 \leq x < 5$: (-2,5]	(-2,5]
Todos los números reales que satisfacen $-2 \leq x < 5$: [-2,5]	[-2,5]
Todos los números reales que satisfacen $-2 \leq x < 5$: [-2,5)	[-2,5)
Todos los números reales que satisfacen $-2 \leq x < 5$: (-2,5)	(-2,5)
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
Todos los números reales que satisfacen $$-2	(-2,5]
Todos los números reales que satisfacen $$-2	[-2,5]
Todos los números reales que satisfacen $$-2	[-2,5)
Todos los números reales que satisfacen $$-2	(-2,5)

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b) Intervalo
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	5

¿Cuál es el conjunto de números que satisfacen la desigualdad |x|<8?

Respuesta modelo
(-8,8)
[-8,8)
[-8,8]
(-8,8]

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d) Intervalo
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	5

¿Cuál es el conjunto de números que satisfacen |x|≥3?

Respuesta modelo
(-3,3)
(-∞,-3]U(3,∞)
(-∞,-3]U[3,∞)
[-3,3]

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	6

Relaciona y elige la opción correcta:

Respuesta modelo	**Respuesta real**
El cubo de la tercera parte de un número.: $(\frac{x}{3})^3$	$(\frac{x}{3})^3$
El cubo de la tercera parte de un número.: $\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
El cubo de la tercera parte de un número.: $3y+y^2$	$3y+y^2$
El cubo de la tercera parte de un número.: $\sqrt{x}-2x$	$\sqrt{x}-2x$
El cubo de la tercera parte de un número.: $\frac{x}{y}+xy$	$\frac{x}{y}+xy$
El cubo de la tercera parte de un número.: $\frac{x+y}{5}$	
El cubo de la tercera parte de un número.: $x+\frac{y}{5}$	

La suma del triple de un número y el cuadrado del mismo.: $(\frac{x}{3})^3$	$(\frac{x}{3})^3$
La suma del triple de un número y el cuadrado del mismo.: $\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
La suma del triple de un número y el cuadrado del mismo.: $3y+y^2$	$3y+y^2$
La suma del triple de un número y el cuadrado del mismo.: $\sqrt{x}-2x$	$\sqrt{x}-2x$
La suma del triple de un número y el cuadrado del mismo.: $\frac{x}{y}+xy$	$\frac{x}{y}+xy$
La suma del triple de un número y el cuadrado del mismo.: $\frac{x+y}{5}$	$\frac{x+y}{5}$
La suma del triple de un número y el cuadrado del mismo.: $x+\frac{y}{5}$	$x+\frac{y}{5}$

La mitad del producto de un número y el cubo de otro.:	$(\frac{x}{3})^3$	$(\frac{x}{3})^3$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.:	$\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.:	$3y+y^2$	$3y+y^2$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.:	$\sqrt{x}-2x$	$\sqrt{x}-2x$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.:	$\frac{x}{y}+xy$	$\frac{x}{y}+xy$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.:	$\frac{x+y}{5}$	$\frac{x+y}{5}$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.:	$x+\frac{y}{5}$	$x+\frac{y}{5}$

El cociente de la suma de dos números y 5.:	$(\frac{x}{3})^3$	$(\frac{x}{3})^3$
El cociente de la suma de dos números y 5.:	$\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
El cociente de la suma de dos números y 5.:	$3y+y^2$	
El cociente de la suma de dos números y 5.:	$\sqrt{x}-2x$	$\sqrt{x}-2x$
El cociente de la suma de dos números y 5.:	$\frac{x}{y}+xy$	
El cociente de la suma de dos números y 5.:	$\frac{x+y}{5}$	$\frac{x+y}{5}$
El cociente de la suma de dos números y 5.:	$x+\frac{y}{5}$	$x+\frac{y}{5}$

La diferencia de la raíz cuadrada de un número y el doble del mismo.:	$(\frac{x}{3})^3$	$(\frac{x}{3})^3$
La diferencia de la raíz cuadrada de un número y el doble del mismo.:	$\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
La diferencia de la raíz cuadrada de un número y el doble del mismo.:	$3y+y^2$	$3y+y^2$
La diferencia de la raíz cuadrada de un número y el doble del mismo.:	$\sqrt{x}-2x$	$\sqrt{x}-2x$
La diferencia de la raíz cuadrada de un número y el doble del mismo.:	$\frac{x}{y}+xy$	
La diferencia de la raíz cuadrada de un número y el doble del mismo.:	$\frac{x+y}{5}$	
La diferencia de la raíz cuadrada de un número y el doble del mismo.:	$x+\frac{y}{5}$	

La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.:	$(\frac{x}{3})^3$	$(\frac{x}{3})^3$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.:	$\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.:	$3y+y^2$	$3y+y^2$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.:	$\sqrt{x}-2x$	
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.:	$\frac{x}{y}+xy$	$\frac{x}{y}+xy$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.:	$\frac{x+y}{5}$	$\frac{x+y}{5}$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.:	$x+\frac{y}{5}$	$x+\frac{y}{5}$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	6

Relaciona y elige la opción correcta:

Respuesta modelo	**Respuesta real**
La diferencia del producto de dos números y el cuadrado de la suma de un número y cuatro.: $4x - x^2$	$4x - x^2$
La diferencia del producto de dos números y el cuadrado de la suma de un número y cuatro.: $\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
La diferencia del producto de dos números y el cuadrado de la suma de un número y cuatro.: $(x-y)^2$	$(x-y)^2$
La diferencia del producto de dos números y el cuadrado de la suma de un número y cuatro.: $xy-(z+4)^2$	$xy-(z+4)^2$
La diferencia del producto de dos números y el cuadrado de la suma de un número y cuatro.: $xy+\frac{x}{y}$	$xy+\frac{x}{y}$
La diferencia del producto de dos números y el cuadrado de la suma de un número y cuatro.: $\frac{3z}{10}$	$\frac{3z}{10}$
La diferencia del producto de dos números y el cuadrado de la suma de un número y cuatro.: $2(xy)^2z^3$	$2(xy)^2z^3$

La mitad del producto de un número y el cubo de otro.: $4x - x^2$	$4x - x^2$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.: $\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.: $(x-y)^2$	$(x-y)^2$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.: $xy-(z+4)^2$	$xy-(z+4)^2$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.: $xy+\frac{x}{y}$	$xy+\frac{x}{y}$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.: $\frac{3z}{10}$	$\frac{3z}{10}$
La mitad del producto de un número y el cubo de otro.: $2(xy)^2z^3$	$2(xy)^2z^3$

El cuadrado de la diferencia de dos números.: $4x - x^2$	$4x - x^2$
El cuadrado de la diferencia de dos números.: $\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
El cuadrado de la diferencia de dos números.: $(x - y)^2$	$(x - y)^2$
El cuadrado de la diferencia de dos números.: $xy - (z + 4)^2$	$xy - (z + 4)^2$
El cuadrado de la diferencia de dos números.: $xy + \frac{x}{y}$	$xy + \frac{x}{y}$
El cuadrado de la diferencia de dos números.: $\frac{3z}{10}$	$\frac{3z}{10}$
El cuadrado de la diferencia de dos números.: $2(xy)^2z^3$	$2(xy)^2z^3$

La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.: $4x - x^2$	$4x - x^2$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.: $\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.: $(x - y)^2$	$(x - y)^2$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.: $xy - (z + 4)^2$	$xy - (z + 4)^2$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.: $xy + \frac{x}{y}$	$xy + \frac{x}{y}$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.: $\frac{3z}{10}$	$\frac{3z}{10}$
La suma del cociente de dos números y el producto de ellos.: $2(xy)^2z^3$	$2(xy)^2z^3$

La décima parte del triple de un número.: $4x - x^2$	$4x - x^2$
La décima parte del triple de un número.: $\frac{xy^3}{2}$	$\frac{xy^3}{2}$
La décima parte del triple de un número.: $(x - y)^2$	$(x - y)^2$
La décima parte del triple de un número.: $xy - (z + 4)^2$	$xy - (z + 4)^2$
La décima parte del triple de un número.: $xy + \frac{x}{y}$	$xy + \frac{x}{y}$
La décima parte del triple de un número.: $\frac{3z}{10}$	$\frac{3z}{10}$
La décima parte del triple de un número.: $2(xy)^2z^3$	$2(xy)^2z^3$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	6

Lee los siguientes enunciados y elige la expresión matemática adecuada para describir el problema.

Respuesta modelo	**Respuesta real**
La edad de Carlos es la mitad de la edad de Roberto más la tercera parte de la edad de Juan: $C = \frac{R}{2} + \frac{J}{3}$	$C = \frac{R}{2} + \frac{J}{3}$
La edad de Carlos es la mitad de la edad de Roberto más la tercera parte de la edad de Juan: $L = 5A$	
La edad de Carlos es la mitad de la edad de Roberto más la tercera parte de la edad de Juan: $C = 5J + L$	$C = 5J + L$
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
La longitud de la calle es cinco veces la anchura: $C = \frac{R}{2} + \frac{J}{3}$	
La longitud de la calle es cinco veces la anchura: $L = 5A$	$L = 5A$
La longitud de la calle es cinco veces la anchura: $C = 5J + L$	$C = 5J + L$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	7

Simplifica las siguientes expresiones y elige la opcion correcta.

Respuesta modelo	Respuesta real
$16^{\frac{3}{4}}$: 8	8
$16^{\frac{3}{4}}$: 12ab	12ab
$16^{\frac{3}{4}}$: 3ab	3ab
$16^{\frac{3}{4}}$: 32	32
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$\sqrt{9a^2(4b)^2}$: 8	8
$\sqrt{9a^2(4b)^2}$: 12ab	12ab
$\sqrt{9a^2(4b)^2}$: 3ab	3ab
$\sqrt{9a^2(4b)^2}$: 32	32

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	7

Efectúa la siguiente operación cuando

$$x = -2,\ y = \frac{5}{3}$$

, simplifica al máximo

$$x^{-3} - \left(\frac{1}{y}\right)^{-4} =$$

Expresar en forma decimal con los primeros 3 decimales.

Usa coma en lugar de punto.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Calculada
Número de preguntas	7

Realiza la operación:

$$(\frac{a}{b})^3(\frac{1}{b})^{-4}$$

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	7

Simplificar la siguiente expresión

$$(xy)^3(8x^2y^3)^2$$

Respuesta modelo

$64x^7y^9$
$8x^7y^3$
$64x^8y^8$
x^4y^4

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	8

Simplifica las siguientes expresiones y elige la respuesta:

Respuesta modelo	Respuesta real
$2a^2 + [3a - 2(a^2 - 2b) - 3a] =$: 4b	4b
$2a^2 + [3a - 2(a^2 - 2b) - 3a] =$: 3a + 2	3a + 2
$2a^2 + [3a - 2(a^2 - 2b) - 3a] =$: 5a+2	5a+2
$2a^2 + [3a - 2(a^2 - 2b) - 3a] =$: 4a	4a
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$\frac{18a^4 - 3a^3 + 6a^2}{3a^2} - 2a(3a - 2) =$: 4b	
$\frac{18a^4 - 3a^3 + 6a^2}{3a^2} - 2a(3a - 2) =$: 3a + 2	3a + 2
$\frac{18a^4 - 3a^3 + 6a^2}{3a^2} - 2a(3a - 2) =$: 5a+2	5a+2
$\frac{18a^4 - 3a^3 + 6a^2}{3a^2} - 2a(3a - 2) =$: 4a	4a

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	8

Simplifica las siguientes expresiones y elige la respuesta:

Respuesta modelo	Respuesta real
$\frac{3}{4}(2a-b)-\frac{2}{3}(a-2b)=$: (5/6)a+(7/12)b	(5/6)a+(7/12)b
$\frac{3}{4}(2a-b)-\frac{2}{3}(a-2b)=$: 1	1
$\frac{3}{4}(2a-b)-\frac{2}{3}(a-2b)=$: (5/6)a-(7/12)b	(5/6)a-(7/12)b
$\frac{3}{4}(2a-b)-\frac{2}{3}(a-2b)=$: 0	0
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$[\frac{6a^3b^3-9a^2b^2+3ab^4}{3ab^2}]^0=$: (5/6)a+(7/12)b	(5/6)a+(7/12)b
$[\frac{6a^3b^3-9a^2b^2+3ab^4}{3ab^2}]^0=$: 1	1
$[\frac{6a^3b^3-9a^2b^2+3ab^4}{3ab^2}]^0=$: (5/6)a-(7/12)b	(5/6)a-(7/12)b
$[\frac{6a^3b^3-9a^2b^2+3ab^4}{3ab^2}]^0=$: 0	0

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	8

Simplifica las siguientes expresiones y elige la opcion correcta.

Respuesta modelo	Respuesta real
$3a-[b-[c-3b+2(c-a)+b]+2a]=$: -a-3b+3c	-a-3b+3c
$3a-[b-[c-3b+2(c-a)+b]+2a]=$: -6x+4y+4z	-6x+4y+4z
$3a-[b-[c-3b+2(c-a)+b]+2a]=$: 3ab	3ab
$3a-[b-[c-3b+2(c-a)+b]+2a]=$: 6x-4y+4z	
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$2x+2[y-(4x-[z+2y])+z]-2y=$: -a-3b+3c	-a-3b+3c
$2x+2[y-(4x-[z+2y])+z]-2y=$: -6x+4y+4z	-6x+4y+4z
$2x+2[y-(4x-[z+2y])+z]-2y=$: 3ab	3ab
$2x+2[y-(4x-[z+2y])+z]-2y=$: 6x-4y+4z	6x-4y+4z

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9

Realiza los siguientes productos.

$(2x-y)(x^2-y)=$

Respuesta modelo
$2x^3+2xy+x^2y-y^2$
$2x^3-y^2$
$2x^3-2xy-x^2y+y^2$
$2x^3+2xy-x^2y+y^2$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Calculada
Número de preguntas	9

$$\left(\frac{4*x}{5*y}\right)^3 * \left(\frac{15*y^2}{2*x^2}\right)^2 =$$

Recuerda que se usa coma en lugar de punto y utiliza 3 cifras decimales

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9

Realiza los siguientes productos.

$$8x^2y(5x^2 - 4xy + y^2 - 3) =$$

Respuesta modelo

$40x^4y - 32x^3y^2 + 8x^2y^3 - 24x^2y$
$35x^4y - 3x^3y^2 + 10x^2y^3 - 14x^2y$
$40x^5y - 32x^3y^2 + 8x^2y^5 - 24x^2y^2$
$40x^4y + 8x^2y^3 - 24x^2y$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	10

Calcula lo que se te pide:

Si

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=13$$

entonces x + y = {#1}.

Si

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{S}=5$$

y

$$R+S=\frac{5}{6}$$

entonces RS = {#2}/{#3}.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	10

Calcula lo que se te pide:

Si $$ \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} = 5 $$ y $$ R1 + R2 = \frac{5}{6} $$ entonces R1R2 = {#1}/{#2}.

Si $$ \frac{a^2-b^2}{a-b} = 13$$ entonces a + b = {#3}.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Producto notable
Tipo de pregunta	Calculada
Número de preguntas	10

Utiliza productos notables para calcular:

$$\frac{w^2}{w^2-4}-\frac{1}{w-2}=$$

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b) Producto notable
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	10

Realiza el siguiente producto

$$(3x - y^2)^2$$

Respuesta modelo

$9x^2 - 6xy^2 + y^4$
$9x^2 + 6xy^2 - y^4$
$9x^2 - y^4$
$9x^2 + y^4$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	11

Resuelve lo siguiente.

1. Si llamamos n al primer número de 5 números naturales consecutivos, entonces el promedio de éstos es:

n + {#1}.

2. En una bolsa de 200 caramelos hay 110 de fruta y el resto de leche. ¿Cuántos caramelos de fruta hay que agregar para que los caramelos de fruta sean 70% del total de la bolsa? Hay que agregar {#2} caramelos de fruta.

3. En una escuela hay 7 computadoras por cada 15 alumnos y 5 profesores por cada 49 alumnos. ¿Cuántas computadoras hay en total si son 75 profesores? Hay {#3} computadoras.

4. Un número natural se llama palíndromo si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo, 323 es un número palíndromo. ¿Cuántos números de tres dígitos son palíndromos? Hay {#4} números palíndromos de tres dígitos.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	1er Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	11

Resuelve lo siguiente.

1. Definimos la operación " * " como

$$a * b = a^2 + 3^b$$

El valor de

$$(2 * 0) * (0 * 1)$$

es: {#1}.

2 ¿Cuál número debe suprimirse de la lista 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 para que el promedio de los números restantas siga siendo 6? Se debe suprimir el número {#2}.

3. En una escuela hay 7 computadoras por cada 15 alumnos y 5 profesores por cada 49 alumnos. ¿Cuántas computadoras hay en total si son 75 profesores? Hay {#3} computadoras.

4. Un número natural se llama palíndromo si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo, 323 es un número palíndromo. ¿Cuántos números de tres dígitos son palíndromos? Hay {#4} números palíndromos de tres dígitos.

2DO EXAMEN PARCIAL

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1

Realiza la operación indicada y simplifica.

$$\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} =$$

Respuesta modelo

$\frac{x+1}{x+2}$
$\frac{x-1}{x+2}$
$\frac{x^2-x+2}{x^2-4}$
$\frac{x^2+x-2}{x^2-4}$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1

Realiza la operación indicada y simplifica.

$$\frac{1}{x-2}-\frac{x}{x+3}=$$

Respuesta modelo

$\frac{-x^2+3x+3}{(x-2)(x+3)}$
$\frac{-x^2+3x-3}{(x-2)(x+3)}$
$\frac{x^2-3x-3}{(x-2)(x+3)}$
$\frac{x^2+3x-3}{(x-2)(x+3)}$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1

Realiza la operación indicada y simplificada.

$$\frac{x+1}{x-5}-\frac{x}{x+5}$$

Respuesta modelo

$\frac{11x+5}{x^2-25}$
$\frac{x+5}{x^2-25}$
$\frac{6x+5}{x^2-25}$
$\frac{3x+5}{x^2-25}$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	1

Realiza la operación indicada y simplifica.

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x}{x-2}$$

Respuesta modelo

$$\frac{2x^2+3x-6}{x^2-4}$$

$$\frac{x^2+3x-6}{x^2-4}$$

$$\frac{2x^2-3x-6}{x^2-4}$$

$$\frac{x^2+3x+6}{x^2-4}$$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2

Rellena los recuadros en blanco con la respuesta correcta.

$$\frac{2x^2+4x-30}{2x-6}=$$

{#1} + {#2}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2

Rellena los espacios en blanco con la respuesta correcta.

$$\frac{6x^2+7x-20}{3x-4}=$$

{#1}+{#2}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2

Encuentra el polinomio resultante y el residuo (si es el caso) de efectuar la siguiente división:

$(3x^3-5x^2+7x-18)\div(x-2)$

El polinomio resultante es:

{#1}x^2+{#2}x+{#3}

Y su residuo es: {#4}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	2

Encuentra el polinomio resultante y el residuo (si es el caso) de efectuar la siguiente división:

$(2x^3-5x^2+6x-3)\div(x+2)$

El polinomio resultante es:

{#1}x^2+{#2}x+{#3}

Y su residuo es: {#4}

**Rellena cada espacio con los coeficientes correspondientes. No olvides colocar el signo.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	3

Selecciona la opción correcta que muestre la siguiente expresión simplificada

$$\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2+\frac{x}{x-1}}}$$

Respuesta modelo

$$\frac{2-3x}{2x^3+x^2-x}$$

$$\frac{3x-2}{2x^3+x^2+x}$$

$$\frac{2-3x}{2x^3-x^2+x}$$

$$\frac{3x-2}{2x^3-x^2+x}$$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	3

Selecciona la opción correcta que muestre la siguiente expresión simplificada

$$\frac{\frac{1}{(x+h)^3}-\frac{1}{x^3}}{h}$$

Respuesta modelo

$$-\frac{3x^2+3xh+h^2}{x^3(x+h)^3}$$

$$-\frac{3x^2-3xh+h^2}{x^3(x+h)^3}$$

$$\frac{3x^2-3xh-h^2}{x^3(x+h)^3}$$

$$\frac{-3x^2+3xh-h^2}{x^3(x+h)^3}$$

$$\frac{3x^2+3xh+h^2}{x^3(x+h)^3}$$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	3

Selecciona la opción correcta que muestre la siguiente expresión simplificada

$$\frac{2}{2x^2-3x+1}-\frac{1}{2x^2-7x+5}+\frac{3}{4x^2-12x+5}$$

Respuesta modelo

$$\frac{5x-12}{4x^3-16x^2+17x-5}$$

$$\frac{12-5x}{4x^3-16x^2+17x-5}$$

$$\frac{5x-12}{4x^3-17x^2+16x-5}$$

$$\frac{5x-12}{4x^3-12x^2+12x-5}$$

$$\frac{5x-12}{4x^3-16^2-17x-5}$$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	3

Realiza la operación indicada y simplifaca

$$\frac{3}{3-y}+\frac{3}{3+y}-\frac{6y}{9-y^2}=$$

Selecciona la opción correcta

Respuesta modelo

$\frac{6}{3+y}$
$\frac{6}{3-y}$
$\frac{18+3y}{9-y^2}$
$\frac{6y}{3+y}$
Ninguna de las opciones

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	4

Resuelve la siguiente ecuación

$$\frac{5}{w-2}=\frac{1}{8-w}$$

Introduce la respuesta correcta:

w={#1}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	4

La solución de la ecuación

$$4-\frac{10z+1}{6}=3-\frac{3z}{2}+\frac{z}{4}$$

es z =

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	4

Resuelve la siguiente ecuación

$$\frac{y+7}{2}+4=2(y-7)+8$$

Introduce la respuesta correcta:

y={#1}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	4

Resuelve la siguiente ecuación

$$\frac{2(t+5)}{3}+\frac{8}{4}=\frac{4t}{5}$$

Introduce la respuesta correcta:

t={#1}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	5,6

Despeja la variable indicada de la ecuación dada y elige la respuesta correcta:

Respuesta modelo	Respuesta real
$V = lwh$ despeja w: w=V/lh	w=V/lh
$V = lwh$ despeja w: c=4π²m/T²	
$V = lwh$ despeja w: w=lh/V	w=lh/V
$V = lwh$ despeja w: c=4π²T²/m	c=4π²T²/m
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ despeja c: w=V/lh	w=V/lh
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ despeja c: c=4π²m/T²	c=4π²m/T²
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ despeja c: w=lh/V	
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ despeja c: c=4π²T²/m	c=4π²T²/m

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	5,6

Despeja la variable indicada de cada una de las ecuaciones y elige la opción correcta:

$$E = mc^2$$

despeja c

$$c = f(1 + \frac{1}{m})$$

despeja m

Respuesta modelo

$$c = \sqrt{\frac{E}{m}}$$ y $$m = \frac{f}{c-f}$$
$$c = \sqrt{\frac{E}{m^2}}$$ y $$m = f(f-c)$$
$$c = \frac{E}{m}$$ y $$m = \frac{c}{f-c}$$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	5,6

Despeja la variable indicada de la ecuación dada y elige la respuesta correcta:

$$A = \frac{1}{2}bh$$

despeja h

$$F = -mx\frac{4\pi^2}{T^2}$$

despeja T

Respuesta modelo

$$h = \frac{2A}{b}$$

y

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{mx}{F}}$$

$$h = \frac{A}{2b}$$

y

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{F}{mx}}$$

$$h = \frac{2A}{b}$$

y

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{F}{mx}}$$

$$h = \frac{A}{2b}$$

y

$$T = 4\pi\sqrt{-\frac{F}{mx}}$$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	5,6

Despeja la variable indicada de la ecuación dada y elige la respuesta correcta:

$$I = prt$$

despeja r

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$$

despeja R

Respuesta modelo

$$r = \frac{I}{pt}$$ y $$R = \frac{R1R2}{R1+R2}$$
$$r = \frac{pt}{I}$$ y $$R = \frac{R1R2}{R1+R2}$$
$$r = \frac{I}{pt}$$ y $$R = \frac{R1+R2}{R1R2}$$
$$r = \frac{pt}{I}$$ y $$R = \frac{R1+R2}{R1R2}$$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a) Ecuación cuadrática
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	7

Resuelve las siguientes ecuaciones y elige la respuesta correcta:

Respuesta modelo	Respuesta real
$5x^2+15=3x^2+65$: x= - 5,5	x= - 5,5
$5x^2+15=3x^2+65$: x= - raíz(7), raíz(7)	
$5x^2+15=3x^2+65$: x=2,3	
$5x^2+15=3x^2+65$: x= - 4,5	x= - 4,5
$5x^2+15=3x^2+65$: x= raíz(7)	x= raíz(7)
$5x^2+15=3x^2+65$: x=3,3	

$x^2+7=14$: x= - 5,5	
$x^2+7=14$: x= - raíz(7), raíz(7)	x= - raíz(7), raíz(7)
$x^2+7=14$: x=2,3	
$x^2+7=14$: x= - 4,5	
$x^2+7=14$: x= raíz(7)	x= raíz(7)
$x^2+7=14$: x=3,3	x=3,3

$x^2 - 5x + 6 = 0$: x= - 5,5	x= - 5,5
$x^2 - 5x + 6 = 0$: x= - raíz(7), raíz(7)	
$x^2 - 5x + 6 = 0$: x=2,3	x=2,3
$x^2 - 5x + 6 = 0$: x= - 4,5	
$x^2 - 5x + 6 = 0$: x= raíz(7)	x= raíz(7)
$x^2 - 5x + 6 = 0$: x=3,3	x=3,3

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b) Ecuación cuadrática
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	7

Resuelve las siguientes ecuaciones y elige la respuesta correcta:

Respuesta modelo	Respuesta real
$$2x^2-3x=9$$: x=(-3)/2 , 3	x=(-3)/2 , 3
$$2x^2-3x=9$$: x= 2+raíz(2), 2- raíz(2)	x= 2+raíz(2), 2- raíz(2)
$$2x^2-3x=9$$: x= 6/2, raíz(5)	x= 6/2, raíz(5)
$$2x^2-3x=9$$: x= 2+raíz(2)	x= 2+raíz(2)
[Sin respuesta]	[Sin respuesta]
$$x+\frac{2}{x}=4$$: x=(-3)/2 , 3	x=(-3)/2 , 3
$$x+\frac{2}{x}=4$$: x= 2+raíz(2), 2- raíz(2)	x= 2+raíz(2), 2- raíz(2)
$$x+\frac{2}{x}=4$$: x= 6/2, raíz(5)	x= 6/2, raíz(5)
$$x+\frac{2}{x}=4$$: x= 2+raíz(2)	x= 2+raíz(2)

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	7

Resuelve la siguiente ecuación

$$x^4-10x^2+9=0$$

Las soluciones son:

(ordenalas de menor a mayor)

x_1={#1}

x_2={#2}

x_3={#3}

x_4={#4}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	7

Resuelve la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}(x^2+x)=1$$

Las soluciones son:

(ordenalas de menor a mayor)

x_1={#1}

x_2={#2}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	8

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$2x+3y=-1$$

$$3x+4y=0$$

Las soluciones son x = {#1} y y = {#2}.

$$6x-8y=-12$$

$$2x+4y=16$$

Las soluciones son x = {#3} y y = {#4}.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	8

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$3x+2y=7$$

$$4x-3y=-2$$

Las soluciones son x = {#1} y y = {#2}.

$$4x+6y=-2$$

$$3x+4y=0$$

Las soluciones son x = {#3} y y = {#4}.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	8

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones e ingresa la solución.

$$4x - 5y = 3$$

$$-x + 3y = 1$$

Respuesta: x= {#1} , y= {#2}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Emparejamiento
Número de preguntas	8

Resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas y selecciona la respuesta adecuada.

Respuesta modelo	Respuesta real
$x + 3y = -1$ $-2x + y = 2$: -1,0	-1,0
$x + 3y = -1$ $-2x + y = 2$: 31,42	
$x + 3y = -1$ $-2x + y = 2$: Cualquier x y y	Cualquier x y y
$x + 3y = -1$ $-2x + y = 2$: No hay solución	No hay solución
$x + 3y = -1$ $-2x + y = 2$: -1,1	-1,1
$x + 3y = -1$ $-2x + y = 2$: -31,42	-31,42

$x - y = 11$ $51x - 73y = -121$: -1,0	-1,0
$x - y = 11$ $51x - 73y = -121$: 31,42	31,42
$x - y = 11$ $51x - 73y = -121$: Cualquier x y y	Cualquier x y y
$x - y = 11$ $51x - 73y = -121$: No hay solución	No hay solución
$x - y = 11$ $51x - 73y = -121$: -1,1	-1,1
$x - y = 11$ $51x - 73y = -121$: -31,42	-31,42

$-x+y=3$ $2x-2y=-6$: -1,0	-1,0
$-x+y=3$ $2x-2y=-6$: 31,42	
$-x+y=3$ $2x-2y=-6$: Cualquier x y y	Cualquier x y y
$-x+y=3$ $2x-2y=-6$: No hay solución	No hay solución
$-x+y=3$ $2x-2y=-6$: -1,1	-1,1
$-x+y=3$ $2x-2y=-6$: -31,42	-31,42

$3x-2y=12$ $-9x+6y=1$: -1,0	-1,0
$3x-2y=12$ $-9x+6y=1$: 31,42	31,42
$3x-2y=12$ $-9x+6y=1$: Cualquier x y y	Cualquier x y y
$3x-2y=12$ $-9x+6y=1$: No hay solución	No hay solución
$3x-2y=12$ $-9x+6y=1$: -1,1	-1,1
$3x-2y=12$ $-9x+6y=1$: -31,42	

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9,10

Escribe en forma de desigualdad al conjunto que satisface:

$$18 > 8 - 5x$$

Respuesta modelo

$x > -2$
$x < -2$
$x \geq -2$
$x \leq -2$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	e)
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	9,10

Expresa al conjunto solución de la desigualdad siguiente

$$\frac{x+3}{2} > 1$$

en forma de intervalo.

** No utilices espacios y si necesitas algún símbolo, sólo escribe su nombre.
No olvides colocar los signos + / - correspondientes. Por ejemplo, (-3,infinito)

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9,10

Escribe en forma de desigualdad al conjunto que satisface:

$$5x + 1 \geq 4x - 2$$

Respuesta modelo

$x > -3$
$x < -3$
$x \geq -3$
$x \leq -3$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9,10

Escribe en forma de desigualdad al conjunto que satisface:

$$3(2x + 2) > 4x - 10$$

$$ -8
$x < 8$
$x \geq -8$
$x \leq -8$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	9,10

Escribe en forma de desigualdad al conjunto que satisface:

$$-4 < 6x + 8 < 8$$

Respuesta modelo

$(-2, 0)$
$(-3, 0)$
$(0, 3)$
$(0, 2)$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	11

Resuelve la siguiente ecuación:

|3 - 2x|= 1

Anota los valores de x separados por una coma y colocando su respectivo signo. No utilices espacios. Escríbelos de menor a mayor.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	11

Resuelve la siguiente desigualdad

$$|x-5| \leq 0$$

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	11

Escribe el intervalo donde se encuentran los valores de x que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{2(x+5)}{3}\right| \leq \frac{4}{5}$$

**Nota: No utilices espacios, expresa los números con un solo decimal.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	11

Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación:

$$|3x+2| = 5-x$$

**Escribe los valores de x separados por comas (,)

**No utilices espacios

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Opción múltiple
Número de preguntas	12,13

Elige la opción donde se describe correctamente el conjunto solución de la siguiente desigualdad:

$$x(x-1) < 0$$

Respuesta modelo

$\{x \in R : x < 0\} \cup \{x \in R : x \geq 1\}$
$0 < x < 1$
$0 \leq x < 1$
$\{x \in R : x \leq 0\} \cup \{x \in R : x > 1\}$

--

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Numérica
Número de preguntas	12,13

Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^2 - |6x - 8| = 0$$

si

$$6x > 8$$

**Escribe los valores de x separados por comas (,)

**Ordenalos de menor a mayor

**No utilices espacios

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	e)
Tipo de pregunta	Respuesta corta
Número de preguntas	12,13

Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^2 - |5x + 6| = 0$$

**Escribe los valores de x separados por comas (,)

**Ordenalos de menor a mayor

**No utilices espacios

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	12,13

Determina todos los números reales que satisfacen la desigualdad siguiente; es decir, resuelve la desigualdad

$$x^2 + 4x - 5 < 0$$

Primero encuentra el discriminante de la ecuación

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Δ = {#1}

Si el discriminante es mayor que cero habrá dos soluciones. Determina las soluciones de la ecuación, escribiéndolas en los espacios de menor a mayor: {#2} , {#3}

El intervalo solución de la desigualdad original es: (escribe 1 en la respuesta correcta y 0 en la respuesta incorrecta

(-5,1) {#4}

(-∞,-5)U(1,∞) {#5}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	12,13

Determina todos los números reales que satisfacen la desigualdad siguiente; es decir, resuelve la desigualdad

$$x^2 + 3x + 2 > 0$$

Primero encuentra el discriminante de la ecuación

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Δ = {#1}

Si el discriminante es mayor que cero habrá dos soluciones. Determina las soluciones de la ecuación, escribiéndolas en los espacios de menor a mayor: {#2} , {#3}

El intervalo solución de la desigualdad original es: (escribe 1 en la respuesta correcta y 0 en la respuesta incorrecta

(-2,-1) {#4}

(-∞,-2)U(-1,∞) {#5}

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	14

Resuelve lo siguiente.

1. En una clase hay 35 alumnos. Le han regalado 2 bolígrafos a cada niña y un cuaderno a cada niño. Si en total han sido 55 regalos, ¿cuántos niños y niñas hay en la clase?

Hay {#1} niños y {#2} niñas.

2. Una compañía A renta autos en $250.00 dólares por semana, sin ningún cargo extra por kilometraje recorrido. Un auto similar puede ser rentado en la compañía B por $150.00 dólares por semana, más $0.25 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros se deben manejar en una semana para que el pago por la renta del auto en la compañía B sea mayor que el pago de la compañía A?

Se deben manejar más de {#3} kilómetros.

3. El costo de fabricar 100 títeres a la semana es $700 y el de 120 títeres a la semana es de $800.

a)Determine la ecuación de costo, suponiendo que es lineal.

La ecuación de costo es C={#4}x+{#5}.

b)¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

Costo fijo = {#6} y costo variable = {#7}.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	14

Resuelve lo siguiente.

1. En una librería han vendido 20 libros a dos precios distintos: unos a $80 y otros a $120, con los que han obtenido $1920. ¿Cuántos libros han vendido de cada precio?

Han vendido {#1} libros de $80 y {#2} libros de $120.

2. El peso de tres manzanas y dos naranjas es de 225 gr. El peso de dos manzanas y tres naranjas es de 285 gr. Si todas las manzanas son del mismo peso y todas las naranjas son del mismo peso, ¿cuánto pesan una manzana y una naranja juntas?

Una manzana y una naranja juntas pesan {#3} gr.

3. El costo de fabricar 100 títeres a la semana es $700 y el de 120 títeres a la semana es de $800.

a)Determine la ecuación de costo, suponiendo que es lineal.

La ecuación de costo es C={#4}x+{#5}.

b)¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

Costo fijo = {#6} y costo variable = {#7}.

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	14

1. Se hizo una inversión a un 6% de interés simple por un año.La inversión aumentó a $874.5

¿Qué cantidad de dinero se invirtió originalmente?

Respuesta: Se invirtió $ {#1}

2. Gabriela y Patricia son secretarias. Gabriela escribe a máquina 45 palabras por minuto y Patricia, como está aprendiendo, sólo hace 25 palabras por minuto. Si están escribiendo un mismo documento y Patricia empezó hace 8 minutos,

¿Cuánto tardará Gabriela en alcanzar a Patricia?

Respuesta: Gabriela tardará {#2} min en alcanzar a Patricia

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	d)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	14

1. Doña María vende artículos de barro. Un cliente pago, con un billete de $50, 2 ollas y 3 cazuelas. Como Doña María no tenía cambio le dio dos jarritos de un peso. Otro cliente por $100 compró 5 ollas y 5 cazuelas. ¿Cuánto cuestan las ollas y cuánto las cazuelas?

Respuesta: Una olla cuesta $ {#1} y una cazuela $ {#2}.

2. En un concurso participaron 3080 competidores. El 25% de ellos obtuvo medallas (oro, plata, bronce). El número de medallas de bronce es seis veces el número de medallas de oro y el número de medallas de plata es el cuadruple del número de medallas de oro.

¿Cuántas medallas de bronce se entregaron?

Respuesta: Se entregaron {#3} medallas de bronce

¿Cuántas medallas de plata se entregaron?

Respuesta: Se entregaron {#4} medallas de plata

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	a)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	15

Encuentra el conjunto de soluciones de cada ecuación o inecuación dada.

$$4(x+1) = -x^2$$

Sus soluciones son x1 = {#1} y x2 = {#2}.

**Ordénalas de menor a mayor.

$$\frac{1}{4}x - 3 \geq 2$$

El conjunto de soluciones son todos los valores x tales que

$x \geq$

{#3}.

$$|3-2x| < 5$$

El conjunto de soluciones es el intervalo ({#4},{#5}).

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	b)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	15

Encuentra el conjunto de soluciones de cada ecuación o inecuación dada.

$$\frac{1}{2}(x^2+x) = 1$$

Sus soluciones son x1 = {#1} y x2 = {#2}. **Ordénalas de menor a mayor.

$$\frac{1}{4}x - 3 \leq 2$$

El conjunto de soluciones son todos los valores x tales que $x \leq$ {#3}

$$|2-2x| < 6$$

El conjunto de soluciones es el intervalo (-2,{#4}).

Información sobre la pregunta

Cuestionario	2o. Examen Matemáticas
Nombre de la pregunta	c)
Tipo de pregunta	Respuestas anidadas (Cloze)
Número de preguntas	15

1. Rellena los espacios en blanco con la respuesta correcta.

$$\frac{6x^2+7x-20}{3x-4}=$$

{#1}+{#2}

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x-y+2z=6$$

$$3x+2y-z=4$$

$$4x+3y-3z=1$$

Respuesta:

x={#3}

y={#4}

z={#5}

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía de material didáctico

[1]Robledo Rella, Víctor. Introducción a las Matemáticas. Ejercicios y problemas, Grupo editorial Patria, México, 2012.

[2]Spivak, Michel. Calculus. Cálculo infinitesimal, Editorial Reverté S. A.

[3]De Oteyza, Elena; Lam, Emma; Hernández, Carlos; Carrillo, Ángel. Álgebra. Cuarta edición, editorial Pearson.

[4]De Oteyza, Elena; Lam, Emma; Hernández, Carlos; Carrillo, Ángel. Geometría Analítica y Trigonometría. Segunda edición, editorial Pearson.

[5]Wentworth, Jorge y Smith, David Eugenio. Elementos de álgebra. Ginn y Compañía.

[6] Burdette, A. C. (1968). An introduction to analytic geometry and calculus. Academic Press; New York.

[7] Lehmann, C.H. (1989). Geometría Analítica. Limusa, Noriega Editores; México.

[8] Kletenik, D. (1968). Problemas de geometría analítica. Editorial MIR, Moscú.

Bibliografía de tesis

http://ingenieria.uaq.mx/admision/admision-licenciatura/

https://docs.moodle.org/all/es/Acerca_de_Moodle

https://docs.moodle.org/all/es/Tipos_de_preguntas#Calculada_simple

https://docs.moodle.org/all/es/Reporte_de_estadísticas_de_examen

https://docs.moodle.org/dev/Quiz_statistics_calculations