Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE CÁLCULO ESTIMATIVO

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el diploma/grado de (o la)

Maestra en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Presenta:
Ariadna Ramírez Dorantes

Dirigido por:
Diana Violeta Solares Pineda

SINODALES

Dra. Diana Violeta Solares Pineda — Firma
Presidente

Dra. Mónica Alvarado Castellanos — Firma
Secretario

Dra. Karina Hess Zimmermann — Firma
Vocal

Dra. Erika García Torres — Firma
Suplente

Dr. Armando Solares Rojas — RÚBRICA Firma

Suplente

Dr. Rolando Javier Salinas García
Director de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario

Querétaro, Qro.

15 de junio de 2018

México

1

RESUMEN

Diversas propuestas curriculares e investigaciones recalcan la importancia del aprendizaje del cálculo estimativo. A pesar de esta relevancia se ha detectado que su presencia en los documentos curriculares oficiales del país es escasa y no es sistemática.

Aunque existen propuestas didácticas orientadas al aprendizaje del cálculo estimativo se ha detectado que hace falta probar estas propuestas en diversos escenarios de manera que se pueda tener conocimiento sobre la capacidad de reproducibilidad de tales secuencias.

La presente investigación tuvo como objetivo adaptar una secuencia didáctica de cálculo estimativo e implementarla en un grupo de sexto grado de primaria de una escuela pública de la ciudad de Querétaro con la finalidad de observar las intervenciones didácticas que favorecen el aprendizaje del cálculo estimativo. Del mismo modo, se analizaron las implicaciones que tiene la comunicación investigador – docente en una secuencia didáctica. Además, se estudiaron las estrategias de cálculo estimativo usadas por los alumnos al momento de enfrentarse a los problemas matemáticos incluidos en la secuencia tales como los números compatibles y el redondeo.

Para su diseño y análisis, la investigación fue inscrita en el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas y su diseño metodológico se basó en los aportes de la Ingeniería Didáctica. Al mismo tiempo se estudia la reproducibilidad como fenómeno que forma parte de la Ingeniería Didáctica.

Una de las conclusiones más relevantes a las que se llegó fue que es preciso tener siempre presente al momento de reproducir una secuencia didáctica que serán necesarias ciertas adaptaciones y que estas, en parte, dependen del contexto socio cultural del colegio en que serán implementadas. Estas adaptaciones muchas veces son señaladas por el docente porque es este quien tiene conocimiento de las necesidades de su grupo. Debido a esto, es necesario brindar una guía breve y puntual que le permita al docente poder implementar la secuencia, de este modo podrá considerar tanto las necesidades de su grupo como los objetivos de la secuencia didáctica.

Más importante aún fue el hallazgo sobre los conocimientos previos de los alumnos en relación con el cálculo mental y estimativo, se observó a lo largo de la implementación de la secuencia didáctica que el grupo se inclinó por el uso de ciertas estrategias como el redondeo o el dígito de la izquierda, es probable que esto se haya debido al uso cotidiano de estas estrategias o a la facilidad y practicidad que estas implican. También se observó

que hay estrategias menos populares, lo anterior podría ser a los pasos que implican o a su grado de dificultad.

Finalmente, las experiencias y conocimientos didácticos de la docente fueron elementales para tomar decisiones sobre el rediseño de la secuencia ya que estos estaban fuertemente relacionados con el conocimiento de las necesidades del grupo.

Palabras clave: secuencia didáctica, Ingeniería didáctica, reproducibilidad, Teoría de las Situaciones Didácticas, cálculo estimativo, problemas multiplicativos.

ABSTRACT

Several curricular proposals and research emphasize the importance of learning the estimate. Despite this relevance, it has been detected that its presence in the official curricular documents of the country is limited and not systematic.

Although there are didactic proposals oriented to the learning of the estimative calculation, it has been detected that it is necessary to test these proposals in different scenarios in order to have knowledge about the reproducibility capacity of such sequences.

The objective of the present investigation was to adapt a didactic sequence of estimative calculation and to implement it in a group of sixth grade of primary school of a public school of the city of Querétaro with the purpose of observing the didactic interventions that favor the learning of the estimative calculation. In the same way, the implications of the researcher - teacher communication in a didactic sequence were analyzed. In addition, the estimated calculation strategies used by the students when dealing with the mathematical problems included in the sequence, such as compatible numbers and rounding, were studied.

For its design and analysis, the research was inscribed in the theoretical framework of the Theory of Didactic Situations and its methodological design was based on the contributions of the Didactic Engineering. At the same time, reproducibility is studied as a phenomenon that is part of the Didactic Engineering.

One of the most relevant conclusions reached was that it is necessary to always keep in mind when reproducing a didactic sequence that certain adaptations will be necessary and that these, in part, depend on the socio-cultural context of the school in which they will be implemented. These adaptations are often signaled by the teacher because he is the one who has knowledge of the needs of his group. Due to this, it is necessary to provide a brief and punctual guide that allows the teacher to implement the sequence, in this way you can consider both the needs of your group and the objectives of the teaching sequence.

One of the most relevant conclusions reached was that it is necessary to always keep in mind when reproducing a didactic sequence that certain adaptations will be necessary and that these, in part, depend on the socio-cultural context of the school in which they will be implemented. These adaptations are often signaled by the teacher because he is the one

who has knowledge of the needs of his group. Due to this, it is necessary to provide a brief and punctual guide that allows the teacher to implement the sequence, in this way you can consider both the needs of your group and the objectives of the teaching sequence.

Finally, the teaching experiences and knowledge of the teacher were key to make decisions on the redesign of the sequence since these were strongly related to the knowledge of the group's needs.

Keywords: didactical sequence, didactic engineering, reproducibility, theory of didactic situations, estimative calculation, multiplicative problems.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Se ha establecido al cálculo mental y al cálculo estimativo como ejes primordiales de esta investigación. El primero es considerado como una serie de procedimientos mentales que realiza un individuo para la resolución de un problema matemático (Mochón, 1995). Con el cálculo mental se obtiene una respuesta exacta, mientras que con el cálculo estimado se busca la obtención de una respuesta aproximada al problema matemático planteado (Gómez, 2005).

Diferentes autores han recalcado la importancia que tienen el cálculo mental y el cálculo estimativo en el desarrollo de habilidades matemáticas del alumno. Lethielleux (2005) menciona que el cálculo mental ha sido considerado como un medio excepcionalmente adecuado para la familiarización con los números y el desarrollo de la concentración y la memoria. Del mismo modo, autores como Cortés, Backhoff y Organista (2005) señalan que cuando se hacen cálculos estimativos se interrelacionan una serie de habilidades y conceptos, a la vez que se desarrolla un mejor sentido del número, debido a una mejor comprensión de la estructura del sistema numérico. Al respecto, McIntosh, Reys y Reys (1997) definen al "sentido numérico" como la habilidad y propensión para el uso de los números y las operaciones en formas flexibles para hacer juicios cuantitativos y para desarrollar estrategias eficientes con los números y los métodos cuantitativos. Hacer aproximaciones de resultados resulta muy útil para la vida cotidiana y la vida escolar. En el primer caso nos permite anticipar, por ejemplo, costos de algún producto sin tener que hacer la cuenta exacta. En la vida escolar le permite al alumno realizar comprobaciones de problemas matemáticos o anticiparse a un resultado; esto le podría servir como guía para saber si hizo bien algún cálculo. A pesar de los beneficios mencionados, el cálculo estimativo como contenido curricular ha sido abordado de manera escasa y poco sistemática. Por otro lado, existen variadas propuestas para el trabajo y desarrollo de estrategias de cálculo estimativo (Broitman, 2011; Wolman, 2006); sin embargo, es necesario analizar la puesta en escena de estas propuestas en diferentes contextos con el fin de estudiar su potencialidad.

En esta investigación se expondrá el estudio de la implementación de una secuencia didáctica de cálculo estimativo adaptada para un grupo de sexto grado de una escuela pública en la ciudad de Querétaro. Se tuvo como metodología de la investigación a la Ingeniería Didáctica y el marco teórico está fundamentado en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, específicamente en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Todo esto permitió realizar un análisis profundo de las respuestas brindadas por los alumnos, las intervenciones de la docente titular y del rediseño de la secuencia didáctica . Se reflexionó, sobre todo, en que en el diseño de ingenierías didácticas es primordial la colaboración de los docentes que implementan estas situaciones: por ello se trabajó mano a mano con la maestra titular del grupo de sexto grado quien realizó aportaciones valiosas sobre las necesidades propias y del grupo. Del mismo modo, se analizaron las intervenciones didácticas que promovieron el aprendizaje del cálculo estimativo, al igual que los procedimientos para la resolución de problemas del grupo.

Capítulo 1

Problema de investigación y justificación

Problema de investigación

Con el propósito de dar cuenta de la presencia del cálculo estimativo en diferentes propuestas curriculares de la Secretaría de Educación Pública (SEP), se analizaron los libros de texto “Desafíos matemáticos” de primero hasta sexto grado (SEP, 2015) y el Programa de Estudio de quinto y de sexto grados (SEP, 2011). Se identificó que a pesar de su importancia, la presencia del cálculo estimativo como contenido matemático no es tan evidente en las propuestas curriculares del país.

En los Programas de estudios (SEP, 2011) se plantea que uno de los propósitos del estudio de las matemáticas es que el alumno utilice el cálculo mental y la estimación con números naturales para resolver problemas aditivos y multiplicativos; sin embargo, el cálculo estimativo no es propuesto en los libros de texto de manera sistemática.

La introducción del cálculo mental como contenido curricular se identifica en el libro “Desafíos Matemáticos” de primer grado en la lección 33 del tercer bloque, como puede observarse en la Figura 1:


Intención didáctica

Que los alumnos usen el cálculo mental o los resultados memorizados para resolver operaciones de suma y resta de dígitos.

Contenido

Desarrollo de procedimientos de cálculo mental de adiciones y sustracciones de dígitos.

33 ¡Piensa pronto!

Consigna 1

En equipo, jueguen “¡Piensa pronto!”. Las reglas son las siguientes:

1. Cada equipo debe tener 10 fichas de un color diferente al que tienen los demás equipos.
2. El profesor les enseñará una tarjeta con una suma o una resta.
3. Cada equipo tratará de resolver la suma o la resta lo más pronto posible.
4. Cuando tengan el resultado, lo anotarán en el espacio correspondiente en la tabla. Enseguida, uno de ustedes correrá a poner una ficha sobre la mesa del profesor. Es necesario que las fichas queden en fila para que se vea en qué orden llegaron.
5. Cuando todos los equipos hayan puesto su ficha, comparen los resultados. Entre todos, decidan cuál es el correcto.
6. Los equipos que tengan el resultado incorrecto recogerán su ficha. Los que tengan el resultado correcto meterán su ficha en una caja.
7. Una vez que se terminen las tarjetas, ganará el equipo que tenga más fichas en la caja.

Tabla de registro			
Número de tarjeta	Resultado	Número de tarjeta	Resultado
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

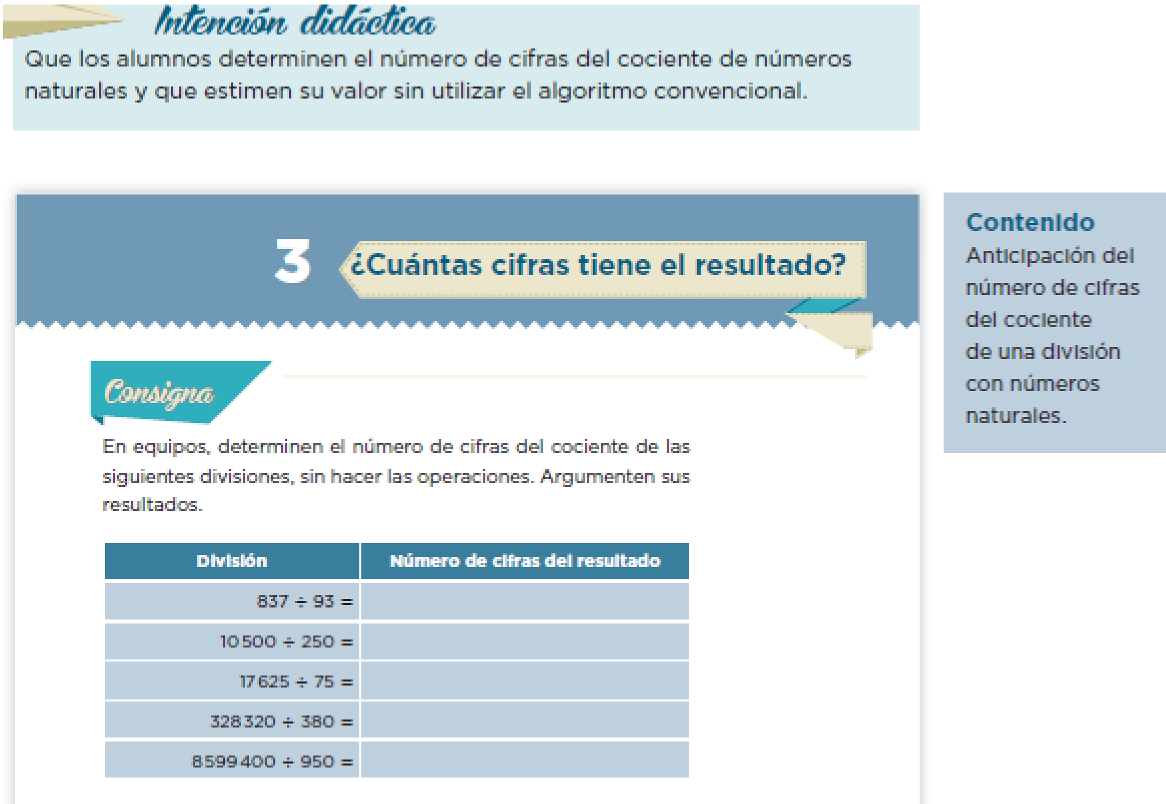
Figura 1. Cálculo mental en la adición y sustracción de cantidades (SEP, 2015, p. 98).

Ambas lecciones buscan que el alumno desarrolle procedimientos de cálculo mental de adiciones y sustracciones. En lo que se refiere a la estimación, ésta aparece en el contexto de la estimación de diferentes longitudes en la lección 39.

El cálculo mental aparece frecuentemente a lo largo de los libros de primero, segundo y tercer grados; en sus diversas lecciones se propone el uso de diferentes procedimientos de cálculo mental como la descomposición de números y el uso de cálculos memorizados. Sin embargo, es hasta la lección 39 y 40 del bloque III del libro de tercer grado cuando aparece por primera vez el cálculo estimativo para la adición y sustracción de cantidades.

El cálculo mental continúa apareciendo en el libro de cuarto grado, aunque no con tanta frecuencia como en los libros de los grados que le anteceden. Respecto a la estimación, ésta se retoma hasta la lección 80 con problemas dirigidos a la estimación de medidas.

En el libro de quinto grado el cálculo estimativo aparece en el bloque I, lección 3: se pide a los alumnos que anticipen el número de cifras de un cociente; es la primera vez que se propone el uso del cálculo estimativo para la resolución de problemas de estructuras multiplicativas, como puede verse en la Figura 2:



Intención didáctica

Que los alumnos determinen el número de cifras del cociente de números naturales y que estimen su valor sin utilizar el algoritmo convencional.

3 ¿Cuántas cifras tiene el resultado?

Contenido
Anticipación del número de cifras del cociente de una división con números naturales.

Consigna

En equipos, determinen el número de cifras del cociente de las siguientes divisiones, sin hacer las operaciones. Argumenten sus resultados.

División	Número de cifras del resultado
837 ÷ 93 =	
10 500 ÷ 250 =	
17 625 ÷ 75 =	
328 320 ÷ 380 =	
8 599 400 ÷ 950 =	

Figura 2. Anticipación de cocientes (SEP, 2015, p. 15).

Al parecer, el cálculo estimativo y el cálculo mental no son abordados de manera explícita en el libro de sexto grado de "Desafíos matemáticos". Si bien las lecciones 26 y 27 están orientadas a que el alumno identifique reglas prácticas para multiplicar por múltiplos de base 10, no se menciona que este tipo de procedimientos pueden ser utilizados para hacer estimaciones.

En síntesis, el análisis que se hizo a los libros de texto de la SEP mostró que el cálculo estimativo es abordado de manera escueta y poco sistemática, por lo que se reafirmó la necesidad de poner a disposición de los maestros y alumnos propuestas didácticas de ese contenido matemático.

1.2 Existencia de diversas propuestas didácticas de cálculo estimativo y la necesidad de estudios sobre su implementación.

A partir de la reflexión sobre la importancia que tiene la enseñanza y aprendizaje del cálculo estimativo es que han surgido diversas propuestas curriculares. Por ejemplo, en la propuesta coordinada por Wolman (2006) se subraya que la práctica de cálculo mental hace evolucionar los procedimientos de cálculo de los alumnos y enriquece las conceptualizaciones numéricas de los mismos. A lo largo de esa propuesta curricular se plantean problemas matemáticos donde el alumno tiene que realizar descomposiciones aditivas, hacer uso de cálculos memorizados, descomposiciones multiplicativas, entre otros procedimientos relacionados con el cálculo mental y estimativo.

Por su parte, en la propuesta curricular desarrollada por Broitman (2008) se señala que al construir estrategias de cálculo mental se exploran propiedades de los números y de las operaciones. En esa propuesta se propone explorar estrategias de cálculo aproximado de sumas y restas, la descomposición de números, uso de cálculos memorizados, explorar la función de la calculadora, construir un repertorio de sumas y restas, elaborar estrategias usando las regularidades del sistema de numeración y hacer selección de estrategias de cálculo.

Aunque se han desarrollado diversas propuestas para el aprendizaje y la enseñanza del cálculo mental y estimativo se ha identificado que hacen falta estudios que se enfoquen en el análisis de la implementación de estas propuestas; es decir, estudios que consideren las intervenciones didácticas del docente antes y durante la implementación de la secuencia, las respuestas otorgadas por los alumnos, las puestas en común durante la clase y el trabajo que conlleva la comunicación de una secuencia didáctica por parte del investigador al docente que la implementa.

Considerando las propuestas curriculares anteriormente comentadas, así como otras más (el currículo del cantón de Zurich, Suiza; los libros de texto suizos “mathematik” de primero a sexto de primaria; “Hacer matemática”, Saiz y Parra (2013), entre otros)

Stauffer (2018) adaptó e implementó una secuencia didáctica de cálculo estimativo de problemas multiplicativos para un grupo de quinto grado de primaria. Su trabajo tuvo la finalidad de identificar aquellos problemas fértiles para el aprendizaje de ese tipo de cálculo y las condiciones didácticas que lo favorecen. Uno de sus hallazgos principales respecto a los procedimientos de resolución de los alumnos, es que el redondeo fue uno de los procedimientos más usados para resolver los problemas de cálculo estimativo, mientras que los errores más comunes se encontraron en los problemas con divisiones. La autora identificó además aquellas intervenciones didácticas que apoyaron a los alumnos a involucrarse en el trabajo matemático, tales como promover la institucionalización de los saberes matemáticos y promover la discusión de diferentes procedimientos y resultados entre los alumnos. La autora considera que la secuencia didáctica puede servir de punto de partida a maestros, así como a formadores de maestros, para implementar y enriquecer las actividades de cálculo estimativo que se proponen. Asimismo, invita a reflexionar sobre sobre las posibilidades y límites de la reutilización de la secuencia didáctica en otros grupos de estudiantes.

1.3 Planteamiento del problema de investigación.

La secuencia didáctica de Stauffer (2018) es punto de partida de esta investigación pues, como se ha mencionado con anterioridad, aunque se han desarrollado varias propuestas curriculares centradas en la enseñanza del cálculo estimativo se hace necesario estudiar los efectos de su implementación. Por ello, se retomó dicha secuencia y se hicieron adaptaciones para poder estudiar las implicaciones de su implementación en un escenario didáctico distinto: con una maestra distinta, con otros alumnos y de un grado distinto (sexto), y en otro tipo de escuela (de una escuela privada donde el idioma predominante es el alemán a una escuela pública donde el idioma es el español). A lo largo de este estudio se analiza la flexibilidad de dicha secuencia, se estudia su potencialidad en escenarios distintos, sus alcances y limitaciones.

Los supuestos que orientan esta investigación son los siguientes:

- Indagar las implicaciones de implementación de una secuencia didáctica de cálculo estimativo en otro grupo de alumnos y maestros.
- Explorar las posibilidades de comunicación de la secuencia a una profesora, tanto de los tipos de problemas que se abordan, la forma de proponer y de gestionar la

resolución de problemas, los propósitos de aprendizaje, los procedimientos y errores que se esperan.

- Identificar qué adaptaciones hace la maestra durante el proceso de implementación.
- Identificar las intervenciones didácticas que favorecen el aprendizaje del cálculo estimativo, con la finalidad de ampliar y/o enriquecer las ya encontradas.

1.4 Justificación

Son dos los ejes que justifican el desarrollo de esta investigación. El primero es la importancia de estudiar la reproducibilidad de una secuencia didáctica de problemas multiplicativos en cálculo estimativo. El segundo es sobre la importancia del aprendizaje del cálculo estimativo en el aula los beneficios para la enseñanza y aprendizaje del cálculo estimativo que aportan el diseño, adaptación y aplicación secuencias didácticas como la que aquí se menciona. A continuación, se profundiza sobre cada uno de ellos.

La importancia de estudiar la reproducibilidad de una secuencia.

El fenómeno de la reproducibilidad ha sido definido como la forma en que una situación de aprendizaje puede ser instalada en distintos escenarios para extraer los elementos que permiten que la situación en sí misma no pierda su esencia con relación al logro del objetivo didáctico (Montoya y Lezama, 2016, p. 45). Comprender la reproducibilidad de la secuencia didáctica permite analizar los componentes de la ingeniería didáctica de ésta. Lezama y Farfán (2001) mencionan que la identificación de fenómenos que aparecen cuando se repite una situación didáctica posibilita describir sus interrelaciones y funcionamiento, con la finalidad de que tal modelo se constituya en un elemento con cierto valor de predicción sobre la reproducibilidad. Analizar la reproducibilidad de la secuencia didáctica que aquí se estudia pretende entonces establecer claramente los elementos que permiten lograr sus propósitos didácticos.

El trabajo matemático en el aula es una tarea que tiene la posibilidad de generar un espacio de producción de conocimientos a partir de la reflexión y el análisis. Esta tarea se construye a partir de la planificación de la enseñanza. Al respecto, Paolome (2013) señala que la forma de pensar la enseñanza tiene implicaciones en las herramientas que se usarán para llevarla a cabo, de las cuales la más amplia es la planificación. Tarasow

(2006) menciona que se puede pensar en la planificación como una herramienta del maestro, una instancia de reflexión acerca de qué se quiere enseñar y cómo vale la pena hacerlo.

Si bien es cierto que en México cada vez surgen más investigaciones que buscan comprender mejor los procesos de enseñanza y de aprendizajes matemáticos, hay una escasa producción en lo que se refiere al cálculo estimativo. Los Estados del Conocimiento entre los años 2002 y 2011 que elaboró el Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE) (Ávila, Carrasco, Gómez, Guerra, López y Ramírez, 2013) muestran que se han llevado a cabo 74 investigaciones de origen matemático a nivel preescolar y primaria. Respecto a investigaciones relacionadas con el cálculo mental y el cálculo estimativo en primaria, los Estados del Conocimiento del COMIE no presentaron ningún estudio, lo cual muestra la necesidad de aportar investigaciones de ese tipo.

La importancia del aprendizaje del cálculo estimativo en el aula.

Las estrategias de cálculo estimativo permiten realizar juicios previos a la resolución de un problema matemático, es decir, la estimación permite que el alumno pueda llevar a cabo estrategias como anticipar un resultado o recurrir a al procedimiento más económico para resolver un problema. El cálculo estimativo permite evaluar la factibilidad del resultado obtenido por medio de un algoritmo (Block & Dávila, 1995).

El cálculo estimativo contribuye al desarrollo del razonamiento matemático. Cuando una persona razona matemáticamente puede analizar un problema y decidir qué tipo de respuesta requiere, reconoce que existen varias estrategias para la resolución de un problema y puede revisar si el resultado obtenido es razonable; a este raciocinio matemático se le ha llamado *sentido numérico* (McIntosh, Reys & Reys, 1997; Trafton & Hartman, 1997; Van de Walle & Browman, 1993).

El cálculo estimativo juega un papel importante en el desarrollo del sentido numérico. Al respecto, García (2014) señala que, aunque se pida el resultado exacto, una práctica deseable y muy útil es hacer antes una estimación de este, lo que permite comprobar si el resultado que se obtuvo por cálculo mental, escrito o con la calculadora, es o no lógico. La autora menciona también que entre las razones para trabajar la estimación en la clase de matemáticas se encuentran las siguientes:

- Se usa en aquellas situaciones reales para las que no se requiere un resultado exacto sino aproximado para tomar decisiones.
- Enriquece la visión de las matemáticas al comprobar que no siempre se requiere exactitud y precisión para dar un resultado, además de que rompe con la idea de que sólo hay una manera de resolver las operaciones y los problemas.
- Mejora y desarrolla el sentido numérico al usar de manera flexible los números.
- Permite la construcción de estrategias propias y con ello desarrolla un conocimiento más profundo de los números, las relaciones entre ellos y las operaciones.
- Es un apoyo invaluable en la resolución de problemas. Al estimar primero el resultado, los alumnos atienden la relación entre los datos del problema antes de enfrascarse en las operaciones. Asimismo, permite valorar si el resultado obtenido en una operación o problema es o no razonable.

El estudio del cálculo estimativo: de sus estrategias y aportaciones para el desarrollo de diversas nociones matemáticas como el sentido numérico está inscrito en muchas ocasiones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas. Este estudio a su vez suele estar relacionado con la Teoría de las Situaciones Didácticas, lo anterior ha permitido a diversos investigadores y diseñadores de Ingenierías Didácticas una observación más precisa y cautelosa de los fenómenos didácticos que acontecen en el aula. A continuación, en el Marco teóricos y Antecedentes de esta investigación se abordarán estos estudios y aportaciones teóricas que han sido el sustento de esta investigación.

Capítulo 2

Marco teórico y antecedentes de investigación

En este apartado se desarrollan dos elementos que brindan información significativa y sientan precedentes para esta investigación. El primero consiste en la fundamentación teórica de este proyecto y el segundo se refiere a las investigaciones en torno al cálculo estimativo.

El marco teórico en el que se inscribe la investigación se ubica en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, específicamente en la Teoría de las Situaciones Didácticas, la Teoría de los Campos Conceptuales y la Ingeniería Didáctica, que a su vez es usada como metodología de la investigación. Los elementos mencionados aportan herramientas primordiales para poder cumplir con la propuesta que se tiene: adaptar e implementar una secuencia didáctica para el aprendizaje del cálculo estimativo en problemas multiplicativos en alumnos de quinto grado de primaria de una escuela pública en la ciudad de Querétaro. Al tratarse de una secuencia didáctica de cálculo estimativo es necesario un acercamiento al concepto de *secuencia didáctica* y a sus características, así como a las investigaciones y desarrollos teóricos relacionados con cálculo estimativo.

Didáctica de las Matemáticas

Como campo de investigación, la Didáctica de las Matemáticas busca aportar datos relevantes acerca de los procesos mediante los cuales se forman los conocimientos matemáticos. Panizza (2003) señala que se trata de un campo muy amplio en el que han surgido diferentes corrientes que buscan profundizar el análisis de la relación del conocimiento matemático con la educación.

Con el propósito de comprender los fenómenos alrededor de la Didáctica de la Matemáticas, se conformó un grupo de teóricos principalmente en Francia en la década de los setentas del siglo pasado. Su interés principal fue descubrir e interpretar los fenómenos y procesos ligados a la adquisición y a la transmisión del conocimiento matemático (Panizza, 2003). Las aportaciones principales de ese grupo teórico provinieron de Guy Brousseau, Gerard Vergnaud e Yves Chevallard

De acuerdo con Chamorro (2003), la Didáctica de las Matemáticas se ha posicionado como una disciplina científica con la posibilidad de analizar los problemas que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas bajo un contexto escolar. Es hoy en día una disciplina científica que dispone de resultados sólidamente probados, de conceptos y herramientas de diagnóstico, análisis y tratamiento de los problemas que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar (Chamorro, 2003). La Didáctica de las Matemáticas centra sus estudios en los procesos de construcción de los conocimientos matemáticos. Gálvez, menciona que su objetivo es la determinación de las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por los alumnos, y para esto, se necesita ejercer un cierto grado de control sobre esas condiciones, lo que implica que el investigador diseñe y participe en las situaciones didácticas que analiza (1984).

De acuerdo con Chamorro (2003), la Didáctica de las Matemáticas enfatiza en tres actores sin los cuales no es posible concebir el proceso de enseñanza- aprendizaje: el alumno, quien aprende aquello que ha sido pre-establecido socialmente, el saber matemático que es transmitido de generación en generación y el profesor quien es el encargado de llevar a cabo el proyecto de enseñanza. La Didáctica de las Matemáticas, por su parte, va a modelizar y estudiar las interacciones en los tres subsistemas: profesor-alumno, alumno-saber, profesor-saber.

Waldegg (1998) menciona que el enfoque sistémico es una característica importante de esta mirada hacia la Didáctica de las Matemáticas. De acuerdo con este enfoque el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes, de la misma manera que ocurre con otros fenómenos sociales. Chevallard y Joshua (1982) citados por Waldegg (1998) describen el "sistema didáctico" en sentido estricto, formado esencialmente por tres subsistemas: "profesor", "alumno" y "saber enseñado". Junto al sistema sistémico está también la sociedad; entre ellos dos hay una zona intermedia, la "noosfera", en donde surgen conflictos y transacciones por las que se realiza la articulación entre el sistema y su entorno.

La investigación presentada en este documento está apegada a la didáctica francesa, más específicamente se fundamenta en las aportaciones de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Teoría de las situaciones didácticas

Para cubrir con el objetivo de la adaptación de una secuencia didáctica de cálculo estimativo para quinto grado de primaria, es necesario tener un bagaje teórico pertinente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en la matemática, lo cual justifica un acercamiento a la teoría de las situaciones didácticas.

Guy Brousseau fue quien dio inicio a esta teoría para después ser retomada y enriquecida por varios investigadores de la comunidad francesa de Didáctica de la Matemática. Sadovsky (2005) señala que Brousseau (1999) propone pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. Para esto, es necesario establecer, transformar y reorganizar relaciones.

De acuerdo con esta teoría, que parte desde el constructivismo[1], el alumno aprende a causa de su adaptación con el medio, el cual es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana (Brousseau, 1986, citado por Sadovsky, 2005).

Brousseau (1984) define a la *situación matemática* como un conjunto de relaciones establecidas de manera implícita o explícita entre un alumno o un grupo de alumnos, un medio y un sistema educativo (que puede ser representado por el profesor) con el objetivo de que los alumnos se apropien de un saber construido.

Las situaciones matemáticas, Brousseau (1984) tienen por objeto representar el mínimo de condiciones necesarias para explicar o justificar la puesta en obra de un enunciado matemático, por un agente, o por un grupo de agentes, sin intervención didáctica exterior. Es así como una situación didáctica puede involucrar una situación matemática. En esta investigación, el tipo de situaciones matemáticas que se utilizaron para conformar la secuencia didáctica fueron los problemas matemáticos con un contexto puramente numérico.

Por otra parte, la *situación didáctica* de acuerdo con Brousseau (1984) está conformada por un sistema sujeto/medio y alumno/docente y no pueden concebirse de manera independiente unas de las otras.

Brousseau (1986) realiza una clasificación de las situaciones didácticas que a continuación serán presentadas. La primera es la *situación de acción* que se da en la interacción de los alumnos y el medio físico. Los alumnos toman decisiones para poder resolver un problema matemático. Otro tipo de situaciones son las de *formulación*, en las que se busca la comunicación de informaciones entre los alumnos. Para ello es necesaria la modificación del lenguaje que el alumno utiliza habitualmente por uno más preciso y adecuado para las informaciones que pretende comunicar. La teoría de las situaciones didácticas propone también las *situaciones de validación,* en donde se genera un momento de confrontación entre los alumnos. Al contrario de la implicación negativa que la palabra “confrontación” pudiera sugerir, se refiere más bien a un momento en el que

[1] El constructivismo es una teoría de aprendizaje basada en la idea de que para que se produzca aprendizaje, el conocimiento debe ser construido o reconstruido por el propio sujeto que aprende a través de la acción, por lo tanto, rechaza la idea de que el aprendizaje simplemente se transmite.

los alumnos construyen afirmaciones y deben elaborar pruebas para demostrarlas. Por último, están las *situaciones de institucionalización*. De acuerdo con Brousseau (1986), citado por Gálvez (1994), en este tipo de situaciones se busca que el alumnado de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Por otro lado, es necesario un análisis *a priori* o análisis previo de la situación didáctica que permita anticipar los efectos que tendrán la ejecución de las secuencias didácticas; en el caso de esta investigación se realizó un análisis previo a la implementación de la secuencia didáctica, el cual se presentará más adelante en el apartado de Metodología.

Una característica importante en las situaciones didácticas es la variable didáctica. Esta característica tiene la posibilidad de guiar a los alumnos al enfrentarse a un problema matemático (Gálvez, 1994). Al respecto, Brousseau define el concepto de *variable didáctica* de la manera siguiente:

> El docente puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. Las modificaciones de los valores de esas variables permiten entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferente (Brousseau, 1995, p. 13).

Secuencias didácticas

Las secuencias didácticas consisten en una serie de actividades sucesivas estructuradas progresivamente, de tal manera que una actividad complementa y amplía la actividad anterior. Estas herramientas didácticas persiguen los mismos objetivos que la Didáctica de las Matemáticas y al respecto Gálvez (1985) menciona:

> Se trata, entonces, de producir una génesis artificial de los conocimientos, de que los alumnos aprendan haciendo funcional el saber o más bien de que el saber aparezca, para el alumno, como un medio de seleccionar, anticipar, ejecutar y

controlar las estrategias que aplica a la resolución del problema planteado por la situación didáctica (p.6).

Las secuencias didácticas buscan el aprendizaje de un conocimiento especifico. En el caso de la secuencia didáctica que se presenta en el presente estudio, se trata de una secuencia didáctica sobre el cálculo estimativo centrado a la multiplicación y la división.

A partir de la tesis de la Teoría de las Situaciones Didácticas y de la Didáctica de las Matemáticas, Paolone (2010) presenta una caracterización de las secuencias didácticas, definiéndolas como el entrelazamiento de propuestas de modo tal que cada momento de trabajo constituya un punto de apoyo para el siguiente, y este a su vez retome y avance en algún sentido sobre el anterior. Es decir que el conjunto de actividades que forman parte de una secuencia didáctica guarda una coherencia interna en torno a un contenido específico determinado de antemano, dando posibilidad a los alumnos de trabajar sobre él en más de una oportunidad, revisando sus propios recursos de acción apropiándose de los utilizados por otros, ajustándolos y/o abandonándolos y reemplazándolos por otros más eficientes o económicos, según las nuevas exigencias que les plantean las situaciones a resolver. Los rasgos más importantes de las secuencias didácticas, según este autor.

- *Desarrollan un contenido específico*. Las secuencias didácticas abordan un contenido desde su especificidad, anticipando el o los aspectos sobre los que se busca profundizar, y definen una cantidad variable de actividades articuladas en torno a estos aspectos.
- *Incluyen varios problemas vinculados a él y contemplan la posibilidad de "pasar de nuevo" por el mismo problema, o por diferentes grados de dificultad*. Una vez que se selecciona el contenido, las actividades se articulan para que a lo largo de ellas se produzca un avance. Paolone (2010) señala que ese avance se produce, en ocasiones, con el solo hecho de tener una nueva oportunidad de pasar por la actividad; luego de un análisis de lo sucedido en una primera instancia, permite ajustar los procedimientos o encontrar estrategias de resolución que no solían estar disponibles.
- *Dan espacio para la aparición de estrategias erróneas o poco económicas.* Los problemas que se presentan a los alumnos se ofrecen para ser resueltos desde las posibilidades que el alumnado tiene para hacerlas avanzar. Muchas veces los conocimientos de los niños y los procedimientos que utilizan son erróneos,

incompletos o poco eficaces para la situación que se debe resolver. Si se tiende a evitar el error, explicando de antemano la mejor manera de resolver la situación, o si se esperan únicamente respuestas convencionales, se limita la posibilidad de que estas herramientas matemáticas tengan sentido para los niños. Resulta importante presentar los problemas sabiendo que se cometerán errores, inclusive sería conveniente anticipar alguno de ellos

- *Prevén instancias de sistematización.* Con el propósito de discutir acerca de los procedimientos: para analizar errores, para introducir un concepto, para reflexionar sobre las diferentes maneras de resolver una situación es necesario diseñar una secuencia con un orden establecido.

La presente investigación es una secuencia didáctica conformada por situaciones didácticas que buscan desarrollar estrategias de cálculo estimativo específicamente al momento de enfrentarse a una situación matemática basada en estructuras multiplicativas. De la misma manera no busca que su diseño evite la aparición de errores o de momentos de desequilibrio cognitivo, sino que permite la aparición de errores para dar paso a la argumentación y validación de las respuestas de los alumnos.

Las variables didácticas que se ponen en juego son relevantes para la puesta en marcha de ciertos procedimientos que serán profundizados en el capítulo de metodología.

Cálculo estimativo. Importancia de su aprendizaje y enseñanza.

Segovia y Castro (2007) recalcan que la estimación tiene diversos campos de aplicación. Por lo anterior es necesario delimitar el concepto de *cálculo estimativo* y el campo de aplicación al que se refiere en el presente documento. Mochón (1995) menciona que el cálculo estimativo no busca dar respuestas exactas a un problema, sino que su propósito es dar una respuesta cercana al resultado correcto de un problema. Segovia, Castro, Rico y Castro (1989), por su parte, definen a la *estimación* como el juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite.

En relación con lo anterior, Reys (1984) brinda una serie de características implícitas en el concepto de *estimación*, que más tarde, Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) complementaron. Algunas de estas son:

•Valorar una cantidad o el resultado de una operación aritmética.

•El sujeto que hace la valoración tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.

•El valor asignado no es exacto, pero sí adecuado para tomar decisiones y admite distintas aproximaciones dependiendo de quien realice la estimación.

Diversos autores como Mochón, 1995; Reys, 1984; y Segovia, 2007, remarcan la diferencia entre el cálculo mental y el cálculo estimativo, argumentando que en el cálculo mental se busca la obtención de la respuesta exacta de un problema matemático mientras que en el cálculo estimativo se busca una respuesta aproximada.

De acuerdo con Reys (1984), el cálculo estimativo está formado por ciertas características: el sujeto que hace la estimación tiene alguna información, experiencia o referencia sobre la situación que debe enjuiciar, se hace con rapidez empleando los números más sencillos posibles, el valor asignado no es exacto, pero sí es el adecuado para tomar decisiones y el valor asignado admite ciertas aproximaciones dependiendo de quien realice la aproximación.

Con el objetivo de subrayar la importancia que tiene el cálculo en el desarrollo de habilidades matemáticas, diversos autores han llevado a cabo investigaciones sobre los procedimientos y estrategias que se ponen en juego cuando los individuos se enfrentan a problemas matemáticos de ese tipo. Wolman (2006) menciona que es importante que la estimación se convierta en objeto de enseñanza porque, por un lado, forma parte de los conocimientos matemáticos básicos de los cuales debe disponer todo ciudadano por su potencia para anticipar y controlar cálculos; por otro lado, porque tiene un valor para la comprensión de las propiedades del sistema de numeración y de las operaciones y, finalmente, porque es necesario para la construcción de un “sentido de lo numérico”.

Como se mostró en el Capítulo I, si bien la enseñanza del cálculo mental y del cálculo estimativo está presente en el sistema de educación mexicano, no tienen la misma presencia que otros conocimientos matemáticos en el currículo oficial. Específicamente en el programa de estudio de matemáticas de quinto grado (Secretaría de Educación Pública, 2011) –que es el grado que nos interesa– el Bloque III es el único de cinco bloques que aborda el cálculo mental, y se limita a hacerlo para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales.

Procesos mentales y estrategias en el cálculo estimativo

El estudio de las estrategias de estimación que utilizan los estudiantes ha sido abordado por Reys (1982) y Reys (1986), quienes lograron categorizar y explicar de una manera puntual las estrategias más comunes al momento de realizar una estimación.

Esta clasificación facilitó el estudio de las respuestas y procedimientos que manifestó el grupo de sexto grado con el cual se implementó la secuencia didáctica de la tesis que aquí se reporta; entre esos procedimientos están el redondeo de números, el uso del dígito de la izquierda, entre otras, como se mostrará más adelante en la presentación de resultados

En la Tabla 1 se muestran las estrategias de cálculo estimativo que han sido identificadas por…

Tabla 1.

Estrategias de cálculo estimativo

Procesos mentales	Estrategias de cálculo estimativo
Reformulación: Se cambian los datos numéricos, pero se deja intacta la estructura del problema.	- Dígito de la izquierda - Redondeo - Números compatibles
Traducción: Se cambian los datos numéricos y la estructura del problema.	- Agrupación - Números especiales
Compensación:	- Ajustes

Se hacen ajustes numéricos finales con el fin de acercar el resultado estimativo al resultado exacto.	

En este espacio se presentan las estrategias aplicadas en el cálculo que han sido detalladas por Cortés et al. (1990).

Dígito de la izquierda

Consiste en centrar la atención en el dígito que se encuentra más a la izquierda del número, pues representa la parte más significativa del mismo. Se aplica principalmente a la suma. En la Tabla 2 se presenta un ejemplo.

Tabla 2.

Estrategia de dígito de la izquierda.

Problema	Paso 1	Paso 2	Resultado exacto
260 153 + 99 371 528	Se suman las cifras que están más a la izquierda: 2+1+3+5 = 11 Y se agregan los ceros correspondientes, por lo tanto, se obtiene 1 100.	Se ajustan las demás cifras tratando de juntar aquellas que sumen aproximadamente 100: 71 + 28 son aproximadamente 100 60 + 53 son aproximadamente 100 99 es aproximadamente 100	1, 411

		Son en total 300 + 1 100 = 1 400	

Agrupación

Es utilizada frecuentemente en situaciones de la vida diaria. Se usa cuando un grupo de números está muy cerca de un valor común. Pueden usar números enteros, decimales y fracciones. En la Tabla 3 se presenta un ejemplo de adición con números naturales.

Tabla 3.

Estrategia de agrupación.

Problema	Paso 1	Paso 2	Resultado exacto
92 430 83 658 + 87 199 93 280 94 672 88 390	Se estima el número alrededor del cual están los sumandos del problema. En este caso fue alrededor de 90 000	Se multiplica el valor estimado por la cantidad de números que hay. En este caso es: 6 x 90,000 = 540,000	539, 629

Redondeo de números

Reys (1990) menciona que el redondeo de números es una estrategia muy poderosa y eficiente para la estimación de resultados. Busca, principalmente, producir números que puedan ser manejados con facilidad, además es sumamente efectiva con problemas de multiplicación. Primero se lleva a cabo el redondeo, luego se opera con él y un tercer paso consiste en ajustar el resultado, dependiendo si el redondeo es hacia arriba o debajo de una cantidad base, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Tabla 4.

Estrategia de redondeo de números.

Problema	Paso 1	Paso 2	Resultado exacto
47 x 66 =	En este producto se debe hacer el redondeo hacia arriba 50 X 70 = 3500	El ajuste consiste en considerar que el resultado real es menor que el estimado.	3, 102

Números compatibles

En esta estrategia es necesario observar de manera global todas las cantidades involucradas en el problema y cambiar o redondear cada uno para hacerlos compatibles entre ellos. Se deben considerar parejas de números que den resultados exactos ya que mentalmente son muy fáciles de operar. Esta estrategia es especialmente efectiva con la división, como puede advertirse en el siguiente ejemplo.

Tabla 5.

Estrategia de números compatibles.

Problema	Números compatibles	Números no compatibles
3 370 ÷ 7 =	3 500 ÷ 7	3 000 ÷ 7
	3 200 ÷ 8	3 300 ÷ 7
	4 000 ÷ 8	3 400 ÷ 8

Números especiales

La función principal de esta estrategia es observar si los números del problema a resolver son parecidos o muy cercanos a números más sencillos de operar y sustituirlos por ellos. Combina varios puntos de las estrategias antes mencionadas. Los números especiales pueden ser potencias de diez, fracciones comunes y decimales cercanos a 0.5, 0. 24, 0.75 o cualquier entero. Por ejemplo:

Tabla 6.

Estrategia de números especiales.

Problema	Paso 1	Paso 2	Resultado exacto
23 / 45 de 720	Observe que 23/45 está cerca de ½	El problema se reduce a calcular la mitad de 720	360

Investigaciones sobre estrategias de cálculo estimativo y sobre su enseñanza en el aula

Robert E. Reys (1982) desarrolló un estudio centrado en identificar las estrategias de cálculos que usan los alumnos considerados como buenos estimadores. El estudio fue aplicado a más de 1,200 estudiantes de séptimo grado de Estados Unidos. Se identificaron una serie de procesos de estimación claves como la “reformulación” que es el proceso en el cual se altera un dato numérico por otro que es más sencillo de manejar mentalmente. Otro proceso utilizado frecuentemente por los alumnos que son buenos estimadores fue la “sustitución de números” en donde se utiliza un número compatible cercano al número original para poder operar con él de forma más sencilla. (Reys, R. 1982, p. 183 – 188)

Además de la aportación de Stauffer (2018) han surgido otras aportaciones importantes que buscan generar conocimiento para el campo del cálculo (ya sea mental o estimativo). Basándose en los resultados de la investigación de Robert E. Reys (1982), la investigación de Cortés et al. (2005) caracteriza los procesos mentales y las estrategias de cálculo que utilizan los alumnos de segundo grado de una secundaria ubicada en Baja California, México; tales alumnos son considerados como buenos estimadores. Para el desarrollo de esa investigación se utilizaron dos instrumentos: un examen de cálculo estimativo que les permitió la selección de los mejores estimadores, y una entrevista aplicada a cada uno de los estudiantes elegidos para poder detectar y clasificar las estrategias de cálculo estimativo y los procesos mentales que utilizaron. Los resultados del estudio indicaron que la estrategia más utilizada por los alumnos fue el redondeo, mientras que el agrupamiento de números casi no se presentó. La investigación concluye que existen características, estrategias y procesos mentales que se encuentran en estudiantes considerados como buenos estimadores independientemente de su contexto cultural. Los autores señalan que: “El ambiente alrededor de la enseñanza del cálculo estimativo detectado, puede sintetizarse en los siguientes términos: los programas de matemáticas en educación media señalan el uso de cálculos estimativos en algunos temas, pero no resaltan su importancia para lograr un adecuado desarrollo del sentido numérico” (2005, p. 90).

Los estudios anteriores, además de las propuestas didácticas desarrolladas por Wolman, Broitman…, fueron la base para el diseño, implementación y análisis de la secuencia didáctica de cálculo estimativo desarrollada por Stauffer (2018). El trabajo de esta autora consiste en una secuencia didáctica en cálculo estimativo, diseñada para alumnos de quinto grado de una escuela privada donde las clases se llevan a cabo en alemán. El objetivo principal de la investigación fue “Elaborar e implementar una secuencia didáctica de cálculo estimativo para un grupo de 5° año de primaria, que se pueda reutilizar o adaptar en otros grupos” (Stauffer, 2018, pág.…).

La autora tuvo como referente teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Metodología de la Ingeniería Didáctica para desarrollar su investigación.

El presente documento busca dar continuidad a la investigación que Stauffer comenzó; precisamente se busca la adaptación de la secuencia didáctica que ella presentó para un grupo en un contexto con particularidades que lo hacen muy distinto del grupo original.

Ingeniería didáctica

A continuación, se mostrarán los fundamentos de la *ingeniería didáctica* como metodología de investigación. Esta noción surgió a partir de la Didáctica de las Matemáticas en los años ochenta del siglo pasado. La palabra "ingeniería" fue usada debido a que se considera a esta forma de trabajo similar al que hace un ingeniero: para realizar una tarea determinada, este se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Al mismo tiempo, tiene que trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados por la ciencia: tiene que abordar prácticamente problemas de los que la ciencia no puede (o no quiere) hacerse cargo con todos los medios disponibles (Artigue, 1989).

Godino et al. (2013) basado en Artigue (2011) menciona que la ingeniería didáctica está basada en el diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia de determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza que hayan sido científicamente experimentados.

Características de la Ingeniería Didáctica

Como particularidades principales de la ingeniería didáctica en su sentido originario destacan que, de acuerdo con Godino et al. (2013), está compuesta de las siguientes características principales:

- Está basada en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
- La validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (y no validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control)

Fases de la metodología de la Ingeniería Didáctica

Artigue (1989) delimita la ingeniería didáctica en un proceso con cuatro fases que a continuación serán explicados.

1) análisis preliminar
2) concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería
3) experimentación
4) análisis a posteriori y evaluación

El análisis preliminar

En una investigación de ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa en un determinado número de análisis preliminares. Los más frecuentes tocan:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y problemáticas que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

Por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación (Artigue, 1989).

En esta investigación se llevó a cabo un breve análisis preliminar de los aspectos anteriores; los dos primeros se presentaron de manera sucinta en el planteamiento y justificación del problema, así como en los antecedentes de investigación; el tercero y el cuarto aspectos se describen en el capítulo de Metodología.

La concepción y el análisis a priori

Para esta fase, existe la posibilidad de elegir entre dos variables: macro – didácticas o micro – didácticas que se explican a continuación:

- Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería

• Y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

El objetivo del análisis a priori es poder anticipar la aparición de ciertas respuestas: errores y aciertos que van a mantener o modificar el rumbo de la secuencia didáctica. El análisis previo o a priori que se hace en el presente estudio se enfoca en las variables micro-didácticas o locales, y se basa en un conjunto de hipótesis; por ejemplo, pensar que para cierto tipo de cálculos el redondeo será la estrategia más popular en el alumnado, por lo tanto, las intervenciones didácticas y el control de las variables está relacionado a esta anticipación.

Experimentación

Como su nombre lo indica, esta fase consiste en la aplicación de las situaciones didácticas en el aula a partir del análisis a priori. En el caso de esta investigación, la fase de experimentación consistió en la implementación de la secuencia didáctica.

Análisis a posteriori y validación

El análisis a posteriori está basado en el contraste de los datos recogidos durante la experimentación y las anticipaciones creadas en la fase del análisis a priori. A partir de este análisis se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación (Artigue, 1989).

La reproducibilidad de una secuencia didáctica

El análisis de la potencialidad de la secuencia didáctica de cálculo estimativo está relacionado con el fenómeno didáctico de la reproducibilidad. Lezama (2003) menciona que estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica es establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la misma, al repetirla en distintos escenarios. El autor agrega que la reproducibilidad está fundamentada en el análisis de la ingeniería didáctica de la secuencia. Cabe agregar, que al igual que esta investigación, el soporte teórico del constructo de la reproducibilidad está basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas (véase fundamento teórico).

Más adelante, Lezama (2003) menciona que la reproducibilidad consiste en repetir una situación didáctica que se vivirá en un ambiente de aula. En el caso de este documento, se pretende reproducir una secuencia didáctica (originalmente diseñada por Stauffer, 2017) que fue precedida de un análisis estructurado sobre un conocimiento en específico, que es el cálculo estimativo en problemas multiplicativos. Sería necesario tomar en cuenta que al cambiar de escenario (escuela, profesor e investigador) se presentan diferentes fenómenos. Además, es necesario construir adecuaciones sin alterar los propósitos didácticos de la secuencia, ya que como mencionan diversos autores involucrados en la reproducibilidad (Farfán, 2001; Lezama, 2003; Montoya, 2015) no basta con sólo repetir las secuencias didácticas. Para lograr la reproducibilidad de una situación es necesario pensar en todos sus componentes, los cuales serán mencionados a continuación.

Lezama y Farfán (2001) señalan, basándose en la aportación de Brousseau (1982), que existen dos tipos de reproducibilidad:

- Externa: que se ubica en el nivel de las historias de clase (actividades, procedimientos, etc.).
- Interna: se ubica en el nivel de comprensión de los significados e intenta determinar en qué nivel se sitúa la reproducción de un proceso de construcción de saberes.

Atendiendo a los supuestos de esta investigación se pone énfasis en las intervenciones didácticas hechas por la maestra titular del grupo y las estrategias de cálculo estimativo utilizadas por el alumnado de sexto grado. Este análisis considera también las posibilidades y limitantes de reproducibilidad de la secuencia didáctica. Al respecto Artigue (1984) señala que para que una secuencia sea considerada como "replicable" es necesario que cada vez que sea implementada aparezcan los mismo fenómenos didácticos.

Cabe mencionar que las intervenciones y adaptaciones realizadas por la docente durante las sesiones o previas a ellas son concebidas como un aporte importante al estudio de la secuencia como lo señala Arsac (1989) citado por Artigue (1995):

> El investigador se queja del hecho de que el profesor que experimenta una situación concebida por el primero "interpreta" la situación. Dicha interpretación

> del profesor, que se traduce de manera concreta en las iniciativas imprevistas durante el desarrollo de la secuencia de clase, no parece que debe tomarse como objeto de estudio en sí misma y no como un tipo de "ruido" inevitable en la experimentación. (p.54)

En seguida se comentarán brevemente algunos estudios sobre reproducibilidad que constituyen antecedentes para la presente investigación.

En 2015, Montoya y Lezama llevaron a cabo una investigación de tesis doctoral cuyo propósito fue identificar elementos del quehacer docente cuando los profesores en ejercicio reflexionan sobre la reproducibilidad de situaciones de aprendizajes diseñadas por ellos. Para llevar a cabo la investigación, los autores tomaron a la Ingeniería Didáctica como metodología. El estudio se realizó en cinco etapas, entre las cuales los autores contemplaron a las ideas intuitivas de los docentes sobre reproducibilidad seguida de seis talleres de reflexión sobre el diseño de situaciones de aprendizaje. Se llegó a la siguiente conclusión:

> Es posible detectar ciertos elementos que se agregan al quehacer del docente para que los diseños didácticos puedan ser aplicados en distintos escenarios. Esto permitió que la organización matemática y organización didáctica presentada por los profesores evolucione en términos del logro didáctico (p. 10).

En la presente investigación se pretende…

Lezama (2003) realizó un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: el objetivo principal de su investigación fue repetir la implementación de una situación didáctica en diferentes escenarios, con diferentes profesores y alumnos para poder localizar y delimitar los fenómenos asociados a la repetición de una situación didáctica. En su estudio señala que:

> Si bien el diseño de propuestas didácticas requiere de una amplia perdurabilidad en la escuela, nuestra investigación ha mostrado para un caso específico, que todo producto didáctico se ve amenazado por un número grande de interpretaciones, modificaciones, reducciones, etc., de las cuales es casi imposible sustraerse (p. 147)

La aportación de Lezama (2003) fue relevante para esta investigación ya que a partir de su lectura se consideró difícilmente se podría repetir la implementación de una secuencia didáctica sin que fueran necesarios adaptaciones ya que al realizar un cambio de escenario es necesario considerar nuevas necesidades provenientes del maestro y de los alumnos.

El estudio de la reproducibilidad de una propuesta didáctica conduce a reflexionar sobre un hecho importante: las historias particulares de las clases no se reproducen, esto dificulta la reproducibilidad de las experiencias. Por consecuencia, el concepto de reproducibilidad ha sido replanteado en términos de "estabilidad de resultados en contextos similares" (Barallobres, 2013, p. 18).

Teniendo en cuenta lo anterior en esta investigación se estudiaron las posibilidades y limitantes de una secuencia didáctica llevada a cabo previamente pero en una implementación con un grado distinto, una maestra y un contexto escolar sumamente diferente al llevado a cabo por Stauffer (2018).

Capítulo 3

Metodología

Características generales de la investigación

La investigación que se presenta en este documento tiene un enfoque cualitativo con alcance exploratorio y su tipo de muestreo es no probabilístico y de conveniencia. De acuerdo con Sampieri, Fernández y Baptista (2010) "[e]l enfoque cualitativo se selecciona cuando se busca comprender la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará) acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados, es decir, la forma en que los participantes perciben subjetivamente su realidad" (p. 364).

La investigación consideró como población a un grupo de sexto grado de primaria de una escuela pública de la ciudad de Querétaro; el grupo de sexto grado estaba integrado por 31 alumnos y alumnas de entre 10 y 11 años de edad.

La maestra titular del grupo seleccionado para la aplicación de la secuencia es egresada de la especialidad en Enseñanza y Aprendizajes Escolares de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). Gracias a esto se pudo hacer un contacto con ella y la directora de la escuela en la que labora, lo que significa que el tipo de muestreo realizado fue no probabilístico, sino de conveniencia. Cabe señalar que la muestra tiene la posibilidad de ser considerada como estudio de caso. Al respecto Giménez (2012) menciona "También podríamos definirlo [el estudio de caso], desde una posición más constructivista, como un fenómeno o evento social relativamente unificado y delimitado, que se da en la experiencia histórica concreta y cuyo sentido se constituye en función de una teoría o una categoría analítica." (p. 44).

Para poder realizar un análisis cuidadoso de la secuencia, se procuró llevar a cabo un registro detallado de las interacciones de la docente con los alumnos y del trabajo de los mismos. La investigadora tuvo interacciones con la docente durante cada sesión en la que se implementó la secuencia, esto con el propósito de obtener más información sobre las intervenciones didácticas de la maestra.

Consideraciones éticas

Para poder tomar decisiones acerca de la adaptación de la secuencia didáctica original y para la aplicación de esta, es necesario adentrarse en el contexto escolar, por lo tanto, se consideraron los siguientes permisos:

- Permiso de la escuela para poder realizar observaciones y grabaciones del grupo, aclarando que no se evaluará a la escuela, la docente ni al alumnado, sino a la propia secuencia (el documento está presente en el apartado de "Anexos").
- Permiso de la docente titular para poder realizar observaciones en su grupo y llevar registro de sus intervenciones, esto con el objetivo de detectar las adaptaciones que son necesarias para aplicarse a la secuencia didáctica.
- Permiso por escrito de los padres y del alumnado para grabar las clases asegurando que los datos obtenidos se manejarán con absoluta confidencialidad (el formato de la hoja del permiso que le fue entregada a los padres de familia se encuentra en el apartado de "Anexos").
- No se tuvo registro de los nombres completos de los alumnos más que de su nombre de pila para poder registrar de manera más eficiente las sesiones.
- Las grabaciones obtenidas fueron usadas con propósitos académicos y no serán exhibidas en público.

Análisis preliminar

Antes de realizar la implementación de la secuencia didáctica se llevó a cabo una serie de observaciones al grupo, con el propósito de dar cuenta de sus características y los conocimientos de cálculo mental con los que contaban los estudiantes. A partir de este acercamiento se identificarían las adaptaciones para la secuencia didáctica de cálculo estimativo original que serían necesarias.

En este apartado se muestra primero la metodología para el registro de datos durante las sesiones de clase y los datos más relevantes sobre la implementación de una secuencia de cálculo mental previa al rediseño e implementación de la secuencia de cálculo estimativo; finalmente, se aborda el diseño de la secuencia didáctica de cálculo estimativo para un grupo de quinto grado elaborada por Stauffer (2018), incluyendo su propuesta de tipología de problemas estimativos multiplicativos; se hará mención de los problemas matemáticos que formaron parte de la secuencia didáctica de la autora. Después se muestra la adaptación que se realizó a tal secuencia; por último, se muestran los comentarios relacionados con las adaptaciones realizadas a la secuencia original y su justificación.

Registro de datos

Para la presente investigación se pensó en una observación y registro de datos de las situaciones implementadas en el aula desde una mirada etnográfica. De acuerdo con Rockwell (2008), un estudio etnográfico tiene por lo menos las siguientes características:

> Requiere de una estancia relativamente prolongada en una localidad relativamente pequeña, de tal forma que el investigador, o el equipo de investigadores en su conjunto, puedan construir relaciones de confianza con algunos de los habitantes; además de que debe tener acceso a acontecimientos públicos y documentar su experiencia por vía escrita o gráfica. (p.90).

Al analizar las características de un estudio etnográfico se optó por llevar un registro escrito. En él se describió a detalle el acontecer en aula al momento de implementar las situaciones previas a la secuencia didáctica y las situaciones presentadas durante la implementación de la secuencia. Se registraron diálogos que la docente del grupo tuvo con los alumnos, así como las interacciones entre el alumnado. Basados en lo que García (1998) propone como *registro sencillo*, se procedió a tomar en cuenta tres elementos importantes que forman parte de la estructura de este. El primero fue la ubicación, donde se señalaron las características del aula, la conformación del grupo, los elementos visuales que están en las paredes del salón. Por ejemplo, se observó que relacionado a la clase de matemáticas en el salón únicamente había un cartel con las tablas de multiplicar. En segundo lugar se registraron *los hechos de la práctica* referente a las situaciones implementadas con el grupo. Por último, se realizó el análisis de las clases. Esto permitió realizar ajustes para las sesiones que seguían, además de que surgieron variables que permitieron tomar decisiones sobre la adecuación de la secuencia didáctica original.

Implementación de una secuencia didáctica de cálculo mental preliminar

Durante una fase preliminar del estudio se diseñó una serie de situaciones didácticas de cálculo mental con estructuras aditivas y multiplicativas. Posteriormente la profesora del grupo las implementó. Esta exploración tenía principalmente dos objetivos:

1. Preparar a los alumnos para la secuencia didáctica: se buscaba que el alumno pusiera en práctica los conocimientos previos necesarios para enfrentarse a la secuencia, entre ellos estaba saber de memoria los resultados de las tablas del 1 al 10 y usarlos para resolver multiplicaciones, establecer relaciones entre la multiplicación y la división, y poder resolver mediante cálculo mental multiplicaciones y divisiones con un factor potencia 10. Por ejemplo: 100 x 1234 = 123,400.
2. Tomar decisiones acerca de las adaptaciones que debían realizarse a la secuencia didáctica original.

Los datos arrojados a partir del análisis de la implementación de la secuencia didáctica de cálculo mental fueron importantes, pues permitieron decidir que la implementación de la secuencia didáctica de Stauffer (2018) implicaría ciertas adaptaciones. Para enunciar las adaptaciones que fueron hechas primero se mencionará los rasgos más importantes de la secuencia didáctica de cálculo mental (la secuencia preliminar), después se abordarán los rasgos elementales de la secuencia didáctica original Stauffer (2018) y, finalmente, se expondrán los datos más importantes de la secuencia de cálculo estimativo adaptada.

A raíz de las observaciones previas en el aula, se llevó a cabo un análisis para tener mayor entendimiento de las necesidades del grupo que se debían atender antes de implementar la secuencia didáctica. Por ejemplo, una necesidad detectada estuvo relacionada con habilidades matemáticas de cálculo mental que los alumnos tenían que adquirir, reforzar o potencializar; para ello se propuso una secuencia didáctica de cálculo mental previas a la secuencia didáctica de cálculo estimativo. La secuencia contemplaba los siguientes tipos de problemas:

- Organizar y sistematizar cálculos
- Uso de cálculos memorizados
- Revisión y ampliación del repertorio aditivo

- Uso de calculadora
- Problemas con la calculadora que incluyen la multiplicación y las potencias de ceros
- Calcular distancias entre números

Secuencia didáctica original de cálculo estimativo

Stauffer (2018) elaboró una tipología de problemas estimativos multiplicativos a partir de la revisión de investigaciones centradas en los procesos y dificultades que enfrentaron alumnos al resolver situaciones de cálculo estimativo. Identificó nueve diferentes tipos de problemas estimativos multiplicativos (Stauffer, 2017, pp. 35 - 41):

a. Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado:

> Ejemplo de multiplicación (Broitman, 2011, p. 40)
>
> ¿Será menor, igual o mayor? Coloca el signo correspondiente sin hacer la cuenta exacta.
> 21’376 x 9 ____100’000

Figura 3. Ejemplo de problema de la tipología de problemas estimativos multiplicativos cuando el número dado es una potencia de 10 (Stauffer, 2017).

> Ejemplo de multiplicación (Broitman, 2011, p. 40):
>
> ¿Será menor, igual o mayor? Coloca el signo correspondiente sin hacer la cuenta exacta.
> 34’671 x 99___3’467’100

Figura 4. Anticipar el producto cuando el número dado no es potencia de 10 cuando el número dado no es una potencia de 10 (Stauffer, 2017).

b. Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado:

Ejemplo multiplicación (adaptado de un problema de división de Broitman, 2015).

Mirando la primera cuenta, anticipa si las otras van a dar más o menos.
3 x 1512 = 4536
3 x 1612
2 x 1512

Figura 5. Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado cuando el cálculo está resuelto (Stauffer, 2017).

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016, p. 16)

Sin hacer el cálculo exacto, completa con <, =, >
3 x 8250 ____ 8 x 2190

Figura 6. Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado cuando el cálculo no está resuelto (Stauffer, 2017).

c. Encuadrar el producto/cociente entre números dados:

Ejemplo de multiplicación (Broitman, 2015, p. 61)

Sin hacer el cálculo, señala entre qué números va estar el resultado.
350 x 99
❍ menos que 1000
❍ entre 1000 y 10'000
❍ más que 10'000

Figura 7. Problema de encuadrar el producto/cociente entre números dados cuando los números dados son potencias de 10 (Stauffer, 2017).

Ejemplo de multiplicación (Broitman, 2015, p. 65):

Decide, sin hacer la cuenta, en qué intervalos estará el siguiente producto.
1620 x 6
❍ entre 0 y 300
❍ entre 3000 y 6000
❍ entre 6000 y 10'000

Figura 8. Problema de encuadrar el producto/cociente entre números dados cuando los números dados no son potencias de 10 (Stauffer, 2017).

d. Anticipar a cuál de varios números dados se acerca más el producto/cociente:

Ejemplo de multiplicación (adaptado de Keller, 2016)

17 x 33
❍ 100
❍ 1000
❍ 10'000
❍ 100'000

Figura 9. Problema de anticipar cuál de varios números se acerca más el producto /cociente cuando los números son potencias de 10.

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016, p. 57)

17 x 33
❍ 100
❍ 500
❍ 2000
❍ 10'000

Figura 10. Problema de anticipar cuál de varios números se acerca más el producto /cociente cuando los números no son potencias de 10.

e. Anticipar a cuál de varios cálculos dados se acerca más el producto/cociente:

Ejemplo de multiplicación

¿Cuál de las cuentas A, B o C te da el resultado que está más cerca del cálculo siguiente?
375 x 420 = 157’500
A: 300 x 400
B: 400 x 400
C: 400 x 500

Figura 11. Ejemplo de problema de anticipar a cuál de varios cálculos dados se acerca más el producto/cociente cuando los cálculos dados están resueltos (Stauffer, 2017).

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016, p. 59)

¿Cuál de las cuentas A, B o C te da el resultado que está más cerca del resultado de
375 x 420?
A: 300 x 400
B: 400 x 400
C: 400 x 500

Figura 12. Ejemplo de problema de anticipar a cuál de varios cálculos dados se acerca más el producto/cociente cuando los cálculos dados no están resueltos (Stauffer, 2017).

f. Revisar la validez de resultados

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016, p. 57):

Sin hacer el cálculo exacto decide si el resultado puede ser correcto o no.
17 x 277 = 14’709

Figura 13. Ejemplo de problema de revisar la validez de resultados cuando se tiene que identificar si un resultado dado es correcto (Stauffer, 2017).

> Ejemplo multiplicación (Broitman, 2015, p. 65):
>
> Sin hacer la cuenta, selecciona cuál crees que es el resultado correcto.
>
> 250 x 6 =
>
> ❍ 1500
>
> ❍ 2500
>
> ❍ 3500

Figura 14. Ejemplo de problema de revisar la validez de resultados cuando se tiene que identificar el cociente/ producto correcto entre varios resultados dados (Stauffer, 2017).

g. Ordenar de menor a mayor producto/cociente de varios cálculos

> Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016, p. 58).
>
> Ordena los resultados de los siguientes cálculos de menor a mayor, sin hacer el cálculo exacto.
>
> 25 x 69
>
> 64 x 63
>
> 71 x 68

Figura 15. Ejemplo de problema de ordenar de menor a mayor producto/cociente de varios cálculos (Stauffer, 2017).

h. Anticipar la cantidad de cifras de un producto/cociente

> Ejemplo de multiplicación (Parra y Saiz, 2013, p. 80)
>
> Sin averiguar el resultado exacto, ¿se puede saber cuántas cifras tiene el resultado?
>
> 352 x 12

Figura 16. Ejemplo de problema de anticipar la cantidad de cifras de un producto/cociente (Stauffer, 2017).

i. Anticipar producto/cociente de un cálculo dado

Ejemplo de multiplicación (Keller, 2016, p. 57)

Anticipa, sin hacer el cálculo exacto cuánto te va a dar más o menos el siguiente cálculo.
8 x 455

Figura 17. Ejemplo de problema de anticipar producto/cociente de un cálculo dado (Stauffer, 2017).

Con base en lo anterior, los problemas que fueron incluidos en la secuencia didáctica de Stauffer (2018) fueron los siguientes:

- Anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado cuando el número dado es una potencia de 10.
- Encuadrar el producto/cociente entre números dados cuando los números dados son potencias de 10.
- Anticipar a cuál de varios cálculos dados se acerca más el producto/cociente cuando los cálculos dados no están resueltos

La autora se centró en tres aspectos: el problema matemático que involucra, el modo de presentación del problema y el tipo de respuesta de los alumnos. Al considerar el modo de presentación del problema como una variable didáctica, la autora decidió utilizar problemas con términos solamente numéricos. Por ejemplo:

260 ÷ 24 da

☐ menos que 10

☐ igual a 10

☐ más que 10

Respecto al tipo de respuesta, la autora utilizó problemas con respuestas cerradas, ya que son más sencillos en comparación con los problemas con respuestas abiertas.

Adaptación de la secuencia didáctica

Para la presente investigación se retomaron los problemas estimativos multiplicativos seleccionados por Stauffer (2018) para su secuencia didáctica aunque se realizaron modificaciones a la secuencia a partir del estudio previo que se había llevado a cabo con la implementación de una secuencia didáctica de cálculo mental en el grupo de sexto grado. Las adaptaciones realizadas se centraron en:

- Rango numérico: Con base en las observaciones preliminares que se hicieron al grupo de sexto se decidió que el rango numérico tendría que ser disminuido. La secuencia didáctica original contenía cantidades grandes como: 52,000 ÷ 6. Se determinó que las cantidades tendrían que ser modificadas para que el alumno se enfrentará a problemas que le permitieran centrarse en el objetivo: usar estrategias de cálculo estimativo. Se decidió que usar cantidades grandes era una variable didáctica que significaba un reto muy grande para el grupo. Por lo tanto, la decisión que se tomó fue que se tomarían cantidades con centenas y unidades de millar.
- Número de ítems: La secuencia didáctica original superaba los 10 ítems por sesión. Al realizar un análisis en conjunto con la maestra titular del grupo de sexto se concluyó que el número de ítems tendría que ser reducido para que las sesiones no se excedieran en tiempo y que se pudiera dar prioridad a la puesta en común de la clase. Finalmente, los ítems de cada sesión variaron, pero se procuró que estos no fueran menos de 6 y no más de 10.
- Número de sesiones: La investigación llevada a cabo por Stauffer (2018) contempló 14 sesiones para el desarrollo de la secuencia. El tiempo con el que se contaba para la presente investigación era más limitado teniendo en cuenta las necesidades del grupo y de la maestra. Por tanto se determinó que era necesario disminuir considerablemente el número de sesiones y se optó por 8 sesiones para la implementación de la secuencia.

Por otro lado, se decidió mantener las variables didácticas relacionadas con el tipo de problema: anticipar si el producto/cociente es menor, igual o mayor a un número dado cuando el número dado es una potencia de 10, anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado cuando el cálculo está resuelto y encuadrar el producto/cociente entre números dados cuando los números dados son potencias de 10. También se mantuvo el modo de presentación del problema: con términos exclusivamente numéricos y el tipo de respuesta cerrado. Lo anterior se concibió de tal manera con la finalidad de tener la posibilidad de analizar la reproducibilidad de la secuencia.

Presentación sintética de la adaptación de la secuencia didáctica

A continuación se muestra de manera sintética la adaptación de la secuencia didáctica de cálculo estimativo en problemas multiplicativos:

- Sesión 1

  Objetivo del problema: Anticipar si el producto de una multiplicación es mayor o menor a un número dado

  Muestra de problema:

  11 x 660

  □ menos que 1,000

  □ más que 1,000

  Problema original:

  12 x 7900

  □ menos que 100,000

  □ más que 100,000

  Tipo de modificación realizada: Modificación al número dado como opción de respuesta.

  Justificación de la modificación: El rango numérico podría provocar errores de valor posicional.

- Sesión 2

Objetivo del problema: Encuadrar productos entre rangos de números potencias de 10

Muestra de problema:

11 x 330

□ 1,000 – 10,000

□ 10,000 -100,000

Para este tipo de problemas no se realizó una modificación en las cantidades, se consideró que era un reto posible para el grupo.

Tipo de modificación realizada: Número de ítems propuestos. Cambió de 12 a 7. Originalmente se proponía encuadrar cocientes y productos en la misma clase, se dividió en dos clases.

Justificación de la modificación : El número de ítems original podría generar que el grupo se tomara mucho tiempo para resolver los problemas provocando que la clase fuera muy larga o que se viera interrumpida. Por el mismo motivo se dividió en dos la clase.

- Sesión 3

Objetivo del problema: Encuadrar cocientes de divisiones entre rangos de números potencias de 10

Muestra de problema:

4 900 ÷ 51

□ 10 – 100

□ 100 -1,000

Problema original:

42,179 ÷ 31

□ 0– 100

□ 100 -1,000

□1,000 – 10,000

Tipo de modificación realizada: Número de ítems propuestos. Cambió de 12 a 6. También se hizo una disminución del rango numérico.

Justificación de la modificación: Las observaciones realizadas durante la implementación de la secuencia de cálculo mental mostraron que los alumnos tienen dificultades para operar con números grandes especialmente en las divisiones.

- Sesión 4

Objetivo del problema: Encuadrar cocientes de divisiones entre rangos de números potencias de 10

Muestra de problema: 926 ÷ 50

□ 0– 500

□ 500 -1,000

□1,000 – 1,500

Problema original:

92, 600 ÷ 50

□0 - 100

□100 - 1000

□1000 - 10’000

Tipo de modificación realizada: Número de ítems, pasó de 16 a 6 ítems.

Cambio en el rango numérico

Justificación de la modificación: El mismo motivo que el de la sesión 3.

- Sesión 5

Objetivo del problema: Anticipar a cuál de varios cálculos dados se acerca más el producto/cociente cuando los cálculos dados no están resueltos

Muestra de problema:

2 x 48,800

□menos que 8 x 14,300

□más que 8 x 14,300

Al igual que en la sesión 2, no hubo modificaciones en este tipo de problemas.

- Sesión 6.

  Objetivo del problema: Puesta en común de las estrategias usadas para resolver los problemas de la sesión anterior.

- Sesión 7

  Objetivo del problema: Anticipar a cuál de varios cálculos dados se acerca más el producto/cociente cuando los cálculos dados no están resueltos

  Muestra de problema:

  32 x 3050

  □menos que 8 x 14,300

  □más que 8 x 14,300

  Igual que en las sesiones 2 y 5 se consideró que los alumnos podrían enfrentarse al problema original sin realizar adaptaciones.

- Sesión 8

  Objetivo del problema: Registro escrito de las estrategias usadas para resolver los problemas de la sesión anterior.

En el siguiente apartado se expone el análisis generado a partir del contraste entre el análisis previo y los procedimientos que realmente se presentaron durante la implementación de la secuencia didáctica. Las situaciones propuestas en cada sesión iban de menor a mayor grado de dificultad; se planteaban primero problemas de multiplicaciones y luego de divisiones, y finalmente se hacía una sesión exclusiva para una puesta en común, en donde se podían desplegar los procedimientos de los alumnos. Originalmente se planeó que cada sesión contará con la siguiente estructura: el inicio de la clase retomando los conocimientos previos de los alumnos y definiendo conceptos matemáticos como el de “estimación”, después resolver los problemas matemáticos de la secuencia y por último realizar una puesta en común que además sirviera para institucionalizar los conocimientos de la sesión. Aunque, el tiempo que se tomaba para la resolución de los problemas y para la puesta en común se excedía, de este modo, se dividieron los momentos de puesta en común en dos: al final de la clase y al comienzo de la clase que le precedía.

Capítulo 4

Análisis de los datos

Antes de comenzar a detallar el análisis de datos que se realizó durante la investigación, es necesario mencionar que la estructura de este capítulo no sigue el orden de la secuencia didáctica, sino que se divide en dos grandes apartados, uno dedicado al análisis de las interacciones con la maestra: las implicaciones de la comunicación de una secuencia y de las intervenciones didácticas que propiciaron, o no, el aprendizaje del cálculo estimativo. El otro apartado será para analizar los procedimientos de los alumnos.

Intervenciones docentes

Como se ha dicho, para la adaptación, implementación y análisis de la secuencia didáctica fue elemental el trabajo colaborativo con la maestra titular del grupo de sexto grado, ya que ella tenía conocimiento de las necesidades de su grupo, además de que de este modo le fue posible externar necesidades propias. Durante la puesta en escena de este proyecto didáctico se observó que la maestra hizo algunas modificaciones, las cuales abrieron paso a la pregunta "¿a qué necesidades obedecen tales modificaciones". Se reflexionó sobre estas acciones para que así se pudiera analizar la potencialidad de la secuencia.

Retos de la comunicación de una secuencia didáctica

El trabajo en conjunto con la maestra titular del grupo puso en evidencia un elemento de suma importancia para esta investigación: la comunicación de una secuencia didáctica desde un investigador que la ha diseñado hacia el profesor que la implementará en el grupo. Se reconoció que la acción de comunicar una secuencia didáctica a un docente no es una mera transmisión sencilla de conocimientos, como apuntan Block, Ramírez y Solares (2007). Dichos autores señalan la necesidad de desmitificar la transparencia supuesta en la relación entre los modelos pedagógicos y las prácticas reales de la enseñanza. La transmisión de una secuencia didáctica supone una serie de retos, los cuales se observaron en el presente trabajo y serán detallados a continuación.

El primer problema de adaptación que se detectó obedeció a la extensión del documento que describe la secuencia didáctica, pues resultó ser demasiado extenso para la maestra. Se tuvo en cuenta que el trabajo cotidiano del maestro lleva una serie de tareas que no son exclusivas de la clase de matemáticas: asuntos administrativos, enseñar otras materias, atender a los padres de familia y otros personajes relacionados con la escuela como institución, entre otros quehaceres, mismos que hacen complicado que el maestro dedique demasiado tiempo a una tarea en particular. Fue por tanto necesario diseñar un documento que además de breve, contuviera la información importante para que la docente supiera cómo implementar la secuencia didáctica: con los objetivos generales de la sesión que se llevaría a cabo, los objetivos específicos de cada problema matemático propuesto, la anticipación de respuestas de los alumnos y opciones de problemas matemáticos para los alumnos que tuvieran dificultades para resolver los problemas originales, así como para alumnos que resolvieran los problemas originales con demasiada facilidad.

Aunado a la extensión del documento, otro reto importante para la comunicación de la secuencia a la maestra del grupo fue entregar un documento que expresara claramente los conocimientos y procedimientos que se buscaban explorar durante cada sesión. Un ejemplo de esto se observa en el caso de la sesión 5, cuyo objetivo fue: “Que el alumno anticipe si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado (el cálculo dado no está resuelto)”.

Para esa sesión se planteó un “cálculo original” que tenía que ser comparado con otros cálculos, como se muestra en la siguiente imagen:

Cálculo	Menos que 8 x 14 300	Más que 8 x 14 300
9 x 12 200		
9 x 13 200		
4 x 24 500		
2 x 48 800		
32 x 3050		
9 x 12 200		
9 x 13 200		
4 x 24 500		
32 x 3050		

Figura 18. Anticipación de un producto comparando con otro cálculo.

Al recibir el documento la maestra expresó la siguiente inquietud:

(…) lo que pasa es que sí entiendo lo que estás buscando, que los chamacos se den cuenta de los números por lo que se está multiplicando para tomar decisiones ¿no? Sí, o sea que piensen que aunque 4 es menor que 8, el 24 500 es casi el doble que 14 300 (refiriéndose a la multiplicación 4 x 24 500) o sea que probablemente será más que 8 x 14 300, o que al redondear el 9 puedan más o menos anticipar, o qué sé yo. Lo que pasa es que yo pienso que si quieres que se den cuenta de eso y si no quieres que se pongan a multiplicar todas las multiplicaciones y comparar con el producto, o sea que acaben comparando puros productos, sí tienes que darles contexto, me los vas a perder si no le haces así (…)

Lo que enfatiza la profesora es que si se quería que los alumnos compararan cálculos para tomar decisiones como procedimiento de cálculo estimativo, era necesario realizar modificaciones a la situación didáctica presentada, ubicarla en un contexto que no fuera puramente numérico.

Espinosa (2008) citado por Block et al. (2007, p. 734) señala que los maestros no se limitan a hacer uso de las propuestas pedagógicas tal como estas son prescritas. Al hacer uso de estas, los maestros las reelaboran, las reformulan, porque "las llenan con sus propias intenciones". Esta manera de ver la apropiación advierte sobre la diversidad de usos y significados que adquieren las propuestas al ser incorporadas por los maestros a sus prácticas cotidianas. La apropiación de esta propuesta didáctica por parte de la docente, ha sido provista de una consideración importante: "si se quiere lograr el objetivo: que el alumno compare cálculos como procedimiento de cálculo estimativo, es necesario que se enfrente a situaciones con contexto". Como se podrá observar a lo largo de todo este documento, las intervenciones de la maestra en su proceso de apropiación de la propuesta didáctica fueron primordiales para obtener información sobre la reproducibilidad de la secuencia didáctica.

Intervenciones didácticas que favorecieron el cálculo estimativo

Como se ha mencionado, un elemento de suma importancia para esta investigación fueron las intervenciones y adaptaciones didácticas que realizó la maestra en distintos momentos de la implementación de la secuencia. Nos parecen relevantes puesto que, como señala Elmore (2000) (citado por Block, et al, 2007) la operación de una propuesta didáctica supone procesos de "adaptación mutua" en los que la propuesta se adapta al mismo tiempo que las prácticas de los maestros. La adaptación de la secuencia didáctica no obedeció entonces sólo a modificaciones realizadas por la investigadora (tales fueron elaboradas a partir de la consideración de las necesidades de su grupo, por ejemplo, la variación en el rango numérico), sino también a cambios que respondían a necesidades detectadas por la docente.

El trabajo en aula implicó para la maestra una apropiación gradual de la propuesta didáctica que se le propuso; ello se tradujo en una serie de intervenciones didácticas durante la implementación que enriquecieron la secuencia. Block et al. (2007) consideran el término "apropiación" para referirse a una relación compleja y dialéctica de los maestros con las propuestas didácticas, y coinciden con Espinosa (2004), quien plantea que cuando los maestros hacen uso de las propuestas pedagógicas las reelaboran y las reformulan. En este documento se utiliza el término "apropiación" del mismo modo que los autores anteriores. En cada sesión la maestra orientó a los alumnos, realizó recomendaciones y señaló ciertas participaciones que podrían conducir a que los alumnos utilizaran estrategias de cálculo estimativo. Enseguida se destacan algunas de esas intervenciones. Cabe decir que las intervenciones didácticas de la maestra nos dan elementos para tratar de comprender algunas de las decisiones que los alumnos tomaron al resolver los problemas matemáticos que se les plantearon, como se podrá apreciar en el apartado 5.2.

El siguiente fragmento de transcripción corresponde a la primera sesión que se realizó. Durante esta sesión la maestra invitó a los alumnos a utilizar el redondeo como estrategia, como se muestra en el siguiente fragmento donde los niños tenían que decidir si 11 x 660 era menos o más que 10,000:

Ma: (…) ya algunos de ustedes me platicaron más o menos lo que hicieron, unos lo hicieron con el cálculo exacto y otros no, otros estimaron, usaron la estimación ¿se acuerdan del juego de ahorcado? La palabra secreta era estimación, que es lo que estamos haciendo con la maestra (refiriéndose a la investigadora).

Oigan, ¿ya vieron que el once también se puede hacer otro número?

Diana: Se puede hacer diez.

Ma: Se puede hacer diez, se puede redondear y también se vale en la estimación redondear números.

Una práctica docente frecuente en la maestra es invitar a los alumnos a que expliciten sus procedimientos y, en caso de que no hayan podido resolver el problema que se les presentó, los invita a que lo resuelvan frente al pizarrón y acepta la ayuda de otros alumnos. Para tener un mejor entendimiento de esta práctica se platicó con la maestra:

Investigadora:	Emilie ayudó a Noemí a resolver el problema que no pudo hacer solita.
Ma:	Sí, pues es que, no sé cómo lo veas tú, pero prefiero que se ayuden entre ellos, así se platican y pues sí, valga la redundancia se ayudan. Siempre y cuando no se "soplen" las respuestas, pero es que niños como Emilie saben mucho: una Emilie, un Josué, incluso Tadeo, saben mucho y necesito que me "jalen" a los que les cuesta más trabajo: Wendy, Jessica y bueno Alejandro no se deja. Pero sí.

Una gran parte del análisis de la secuencia didáctica se centra en las intervenciones docentes, pues se observaron algunas que beneficiaron al uso de estrategias de cálculo estimativo y algunas otras que favorecieron una sola estrategia de estimación. En este estudio se clasificaron las intervenciones docentes más relevantes en cinco categorías:

a) Introducción del cálculo estimativo como un procedimiento "válido".
b) Planteamiento de problemas matemáticos contextualizados.
c) Replanteamiento de problemas usando otros contextos.
d) Promoción del redondeo como procedimiento privilegiado.
e) Fomentar la expresión de los procedimientos propios.

A continuación se explicarán con mayor detalle cada una de estas cinco categorías.

a) Introducción del cálculo estimativo como un procedimiento "válido"

En este apartado se podrá observar el proceso por el que pasaron los alumnos para aceptar al cálculo estimativo y considerar que la obtención de cálculos estimados tiene la posibilidad de ser igual válido o aceptado que los resultados exactos. En estos fragmentos se observa también el esfuerzo que hace la docente para que los alumnos noten la utilidad del cálculo estimativo.

Como mencionó la docente a la investigadora en repetidas ocasiones (sesiones 1, 5 y 7), es necesario invitar a los alumnos a realizar algunas estrategias ya que, de no ser así, los alumnos podrían optar por realizar cálculos exactos y operaciones canónicas haciendo a un lado a la estimación:

Ma: (…) a veces, no siempre, sí los dejo solitos a que hagan lo que quieran, pues sí, hacen lo que quieren, pero eso significa, como te digo, no siempre, que ya no estimen, ¿me explico? Porque esto de la estimación no lo usan tanto. O sea, yo les puedo decir “a ojo de buen cubero díganme cuánto es, no sé, 80 x 7” pero ya viste, incluso alumnos como Josué se me adelantan y me dan la respuesta exacta y pues yo entiendo que la estimación es importante…

A lo largo de la implementación de la secuencia didáctica la maestra buscó que los alumnos reconocieran el uso del cálculo estimativo como un procedimiento válido para resolver problemas matemáticos. Al parecer, esto resultó necesario para la maestra debido a que con frecuencia los alumnos invalidaban el uso de la estimación.

En un primer momento la maestra elaboró, junto con el grupo, una definición del concepto “estimación”.

Ma: Ya, estimación. ¿qué es eso, quien me puede decir?

Saúl: Estimar una cierta cantidad

Ma: Estimar una cierta cantidad (repite lo dicho por el alumno).

Saúl: Calcular

Ma: Ándale

Emilie: Calcular sin llegar al resultado exacto

Diana: Que se acerque poquito

Ma: Que se acerque poquito. Es como el juego del stop. Alguien dice "¡stop!" cuatro pasos chiquitos y uno grandote para llegar a…(hace referencia a un juego en el que se deben estimar distancias medidas en pasos).

Ma: ¿Alguien más?, ¿quién más piensa qué puede ser la estimación?, ¿qué más?

Roberto: ¿Estimar dinero?

Ma: ¿Qué más?

Roberto: ¿Acercarse al resultado?

A lo largo de la primera sesión se definió al cálculo estimativo como “calcular sin llegar al resultado exacto”. Se estableció que era un procedimiento útil cuando se está usando dinero. Los alumnos no expresaron otras situaciones además del uso del dinero en el que la estimación puede ser útil, la maestra les recordó que en algunos juegos como “stop” es posible realizar estimación, en el caso del juego se trataría de una estimación de medida que ha sido definida como “los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida” (Segovia y Castro, 2009, p. 501).

.

Al iniciar la segunda sesión, la maestra recuperó los conocimientos previos acerca de la estimación como concepto. Algunos alumnos señalaron que la estimación era “llegar poquito al resultado”. A partir de estas participaciones la maestra señaló que la estimación se trataba de “acercarse al resultado” y propone un problema matemático situado en un contexto de compraventa para que los alumnos pudieran utilizar estrategias de estimación:

Maestra: Acercarse al resultado. Oye, pero para eso necesitas ciertas cosas ahí en tu cabeza que te ayude a acercarte al resultado. Y hay números que son muy sencillos y hay números que no lo son tanto. Por ejemplo, si yo te preguntara, por ejemplo: la bolsa de cacahuates cuesta diez pesos, si yo le voy a comparar a los veintiocho niños que están aquí ¿cuánto me voy a gastar?

Josué: También le puedes agregar el cero.

Maestra: A ver, denme chance de que Claudia explique.

Claudia: Le quité al diez el cero y se lo regalé al veintiocho.

En este fragmento de la segunda sesión se observa que la maestra brinda una pequeña pista a los alumnos: “hay números que son muy sencillos y hay números que no lo son tanto”. Al conversar sobre esta intervención, la maestra señaló que buscaba que el alumnado entendiera que el cálculo estimativo llevaba consigo ciertas herramientas que permitían convertir una cantidad a otra más sencilla, como es el caso de la estrategia de *números compatibles*, aunque utiliza ejemplos para explicar esta estrategias no la denomina con el nombre de “números compatibles”.

Antes de obtener una respuesta, ya sea aproximada o exacta, al problema que propuso la profesora Josué expresó el procedimiento que había utilizado: “agregar el cero”. Tal procedimiento implica tomar el cero del factor 10 y agregarlo al factor 28 para obtener como producto 280; de este modo se evita realizar el algoritmo de manera convencional. También logra anticipar que el cociente del problema será más que mil. Cuando la maestra le da la palabra a la alumna Claudia se puede notar que ese fue el procedimiento que ella utilizó, al igual que Josué. Autores como Wolman (2006, p. 44) señalan que este tipo de estrategias se fundamentan en la propiedad asociativa de la multiplicación.

Algunas aportaciones de los alumnos resultaron imprecisas en cuanto a la validación del uso del cálculo estimativo. Durante la primera y la segunda sesión algunos alumnos expresaron respuestas como “llegar poquito al resultado” (sesión 2):

Ma:	bueno, ¿alguien me quiere recordar qué hicimos la clase pasada?
Claudia:	¿Estimar?
Ma:	Vamos a estimar, es el tema que estamos trabajando con la maestra Ariadna.
Ma:	Y otra vez, ¿alguien me cuenta nada más rápido qué es estimar?

Wendy: Es llegar poquito al resultado.

Ma: Acercarse al resultado. Oye, pero para eso necesitas ciertas cosas ahí en tu cabeza que te ayude a acercarte al resultado están aquí (señala su cabeza).

Al parecer, los alumnos consideran que la estimación no es llegar a un resultado, sino acercarse al resultado. En los problemas de cálculo hay dos resultados posibles, uno exacto y una estimación; sin embargo, ambos resultados tienen validez. Es decir, cuando se resuelve un problema matemático haciendo uso de la estimación también se obtiene un resultado, igual de válido que el resultado exacto. Otra interpretación es que “llegar poquito al resultado” signifique “aproximarse al resultado”. Debido a lo anterior se considera a este tipo de respuestas como imprecisas, ya que se puede interpretar que el alumno no considera a la estimación como procedimiento válido o, por el contrario, se puede considerar que el alumno lo considera como una aproximación a un resultado. Cabe agregar que la segunda interpretación estaría más cercana a la definición que el grupo construyó respecto al cálculo estimativo.

Respecto al sentido de los conocimientos, Brousseau (1994, p.75) plantea que para crear una conexión entre la situación que el docente ha diseñado y su institucionalización, es necesario dar sentido a los conocimientos. Agrega que si se quiere volver sobre lo que se ha hecho en una situación didáctica, es necesario establecer ciertos conceptos que sean universales. Waldegg (1998, p. 25) recalca la importancia de una determinación a priori del conocimiento matemático que se desea construyan los alumnos. En este caso, la definición del cálculo estimativo como concepto resultó primordial para iniciar la secuencia didáctica.

Como puede observarse en el siguiente fragmento de diálogo de la sesión 3, al inicio de la clase se retomaba el concepto de cálculo estimativo que se había definido en colectivo con el grupo:

Maestra:	Sí, a ver. La semana pasada habíamos quedado que ¿qué era estimar?
Josué:	Pues te acercas al resultado, pero no todo el resultado.
Emilie:	O sea, no es necesario que sea lo exacto.
Wendy:	Con poquito alcanza.

Cabe mencionar que es común este tipo de acciones por parte de la profesora: retomar los conocimientos previos al inicio de la clase. En diversas sesiones (1, 2, 3, 6 y 7) al dar inicio a la clase la maestra dedica un momento para establecer o restablecer un concepto de estimación común entre el grupo.

b) Planteamiento de problemas matemáticos contextualizados

La implementación de la secuencia didáctica dio lugar a numerosas intervenciones didácticas donde la profesora busca que los problemas matemáticos planteados estén apegados a situaciones de la vida cotidiana de los alumnos. Este tipo intervenciones se presentaron desde la primera sesión. Como puede observarse en el siguiente, la maestra recurre al contexto del dinero cuando se plantean problemas matemáticos en términos puramente numéricos:

Maestra:	(…) Lo que a la maestra (refiriéndose a la investigadora) y a mí nos interesa no es que contesten bien o mal, sino lo que saben,

qué es lo que hicieron. Tenemos este problemita (11 x 6600) y tenemos que…

Alumnos: … Estimar.

Maestra: Estimar. Piensen que se ganaron una beca. Once niños ganaron una beca y ahora les van a dar seis mil seiscientos pesos a cada uno. A ojo de buen cubero, así, más o menos ¿cuánto será el total? Más o menos, no necesitamos saber el total-total. (…)

A lo largo de la investigación la maestra señaló la importancia de modificar los problemas que originalmente estaban presentados en términos numéricos, a problemas con un contexto que permitiera que los alumnos le encontraran sentido, como el contexto de dinero.

c) Replanteamiento de problemas usando otros contextos

Respecto a esta práctica la maestra expresó que: “los problemas matemáticos en términos numéricos algunas veces confunden al grupo, no encuentran el sentido. Por el contrario, si se les platica una situación en donde ellos o un amigo tuvo que hacer uso del dinero o que tuvo que tomar decisiones sobre una cantidad de dinero, es más interesante”.

Por ejemplo, para la sesión 4 se había propuesto el siguiente problema:

5, 535 ÷ 4

- Más que 1,000
- Menos que 100

Este problema fue transformado durante la clase por la maestra de la siguiente forma:

Maestra: Quiero que imaginen que ustedes son el secretario de educación ¿sí? Y tienen cinco mil quinientos treinta y cinco computadoras y las tienen que repartir entre cuatro escuelas.

Josué: ¡Pues a la nuestra!

Maestra: O sea, sí, pero a parte de la suya otras tres.

Josué: Entonces, de mil a cada escuela.

Claudia:	Más de mil…
Maestra:	Eso está bien interesante, platíquenme ¿qué hicieron? …

Pareciera ser que el cambio del contexto del problema captó el interés de alumnos como Josué. Después de platicar lo sucedido con la profesora, indicó que de acuerdo con lo que ha observado en otros momentos de la clase de matemáticas, los alumnos pierden interés cuando sólo se les brindan datos numéricos. El hecho de brindar datos que los hagan parte del problema, los hace apropiarse de él y mostrar mayor interés.

Se cuestionó si este tipo de intervenciones realizadas por la maestra modificarían el objetivo de los problemas puramente numéricos propuestos originalmente por Stauffer (2018), por lo que se analizaron las respuestas que brindaron los alumnos a estas adaptaciones de problemas. Se muestra la continuación del fragmento anterior de la clase 4:

Maestra:	Eso está bien interesante, platíquenme ¿qué hicieron?
Claudia:	Conviertes las computadoras a cuatro mil…
Maestra:	¿Y eso? ¿Por qué? O sea, sí. Está bien lo que hicieron, pero quiero que me platiquen como por qué se les ocurrió hacer eso.
Josué:	Pues es que puedes redondear el cinco mil a las cuatro mil y lo divides entre cuatro y sabes bien fácil que es mil, entonces ya sabes que es más de mil.
Maestra:	¿A poco es más de mil? Yo veo que cuatro mil entre cuatro da exactitos mil.
Diana:	Es que, en realidad no es cuatro mil, es más, por eso es más que mil.
Maestra:	Eso, gracias.

d) Promoción del redondeo como un procedimiento privilegiado

Segovia, Castro, Rico y Castro (2007), en su análisis sobre investigaciones realizadas sobre estimación en cálculo, señalan que en la estimación se transforman o sustituyen los datos por números más sencillos que puedan ser más fáciles para realizar operaciones aritméticas y agregan que una de las formas para producir, a partir de datos exactos, números sencillos es el redondeo (p.2). Durante las sesiones de intervención se pudo observar que la maestra motivaba a los alumnos a que utilizaran procedimientos estimativos para resolver los problemas. Uno de los procedimientos que ella promocionó con mayor frecuencia fue el redondeo. Similar a lo que señalan los autores, la maestra indicó que su invitación a que el grupo usara el redondeo estaba basada en que se trata de un procedimiento más sencillo:

Investigadora: Aprovechando este ratito en lo que terminan los chicos de resolver los problemas, noté que ayer y hoy les recomendaste a los niños que usaran el redondeo, como cuando les dijiste catorce mil (en la multiplicación 8 x 14 300) en vez de catorce mil trescientos. ¿Habías planeado eso?

Ma: Ah, ¿sí? (se ríe) ay, déjame pensarlo (se queda callada un momento) pues supongo que es fácil… Usar el redondeo es fácil y así estiman nada más tienen que pensar en la centena o decena o qué sé yo, el cero más cercano y ya.

Al finalizar la implementación de la secuencia se analizaron todas las sesiones en búsqueda de aquellos momentos en los que la profesora motivó a los alumnos a que utilizaran el redondeo. Se obtuvo que este procedimiento está inmerso incluso en el lenguaje. En repetidas ocasiones al realizar la puesta en común la maestra replanteaba los problemas matemáticos y pronunciaba las cantidades ya redondeadas. Por ejemplo, en la sesión 3 en el problema 4 350 ÷ 52 la maestra lo comunicó como "cuatro mil trecientos entre cincuenta y dos" y el 50 fue redondeado a cero. Al analizar sobre estas decisiones conscientes o inconscientes se planteó una reflexión sobre el papel que tiene el redondeo en la practicidad del lenguaje en la vida cotidiana; es decir, es común que al ver una cantidad que puede ser fácilmente redondeada se haga casi sin pensarlo, como decir que un televisor cuesta 7 000 en lugar de decir 6 999, o que la renta de un equipo celular es de 400 en vez de 399. Es posible que lo que en esta investigación se ha llamado como “practicidad del lenguaje” esté profundamente apropiado por la docente.

A partir de este análisis se reflexionó sobre aquellos procedimientos que no fueron tan frecuentes en la intervención didáctica como el del “dígito de la izquierda”, a diferencia del estudio de Stauffer (2018). Se realizó un segundo análisis en donde procedimientos como los anteriores pudieron haber aparecido, pero en su lugar se utilizó el redondeo:

Ma:	A ver, atención 43 x 234 ¿cuánto es? (espera un momento a que respondan los alumnos, al no recibir respuesta continúa) ¿ya vieron que este (señala el 43) está bien cerca del cuarenta pues vamos a redondearlo a cuarenta.
Tadeo:	Y ya 40 x 200 te da 8000.
Ma:	¿Ocho mil?
Tadeo:	Que diga, ochocientos.

Aquí se pudo haber utilizado “el dígito de la izquierda” como procedimiento al multiplicar el 4 de la cantidad 43 por el 2 de la cantidad 234 y después agregar ceros: un cero que corresponde al 43 y dos ceros que corresponden al 234 obteniendo 800, si bien en este procedimiento también se redondea el factor que tiene más relevancia es que primero se multiplican los dígitos de la izquierda.

e) Fomentar la expresión de los procedimientos propios

A lo largo de las sesiones pareció ser que la maestra enfrentaba una tensión entre la expresión de los procedimientos para la resolución de cálculos y el uso de la estimación. Esta situación será explicada con más detalle a continuación.

Cuando los alumnos expresaban sus procedimientos para resolver los problemas que se les planteaban, se observó que algunos de ellos no habían hecho uso de ninguna estrategia de cálculo estimativo; por el contrario, habían realizado una operación canónica y habían llegado al resultado exacto. Sin embargo, esos procedimientos eran aceptados por la maestra, y en algunas ocasiones no proponía que se usara el cálculo estimativo. Por ejemplo, en la sesión 1 una alumna explicó el procedimiento que utilizó para decidir si el resultado de 29 x 320 era mayor o menor a 1 000. La alumna utilizó una operación canónica y llegó al resultado exacto:

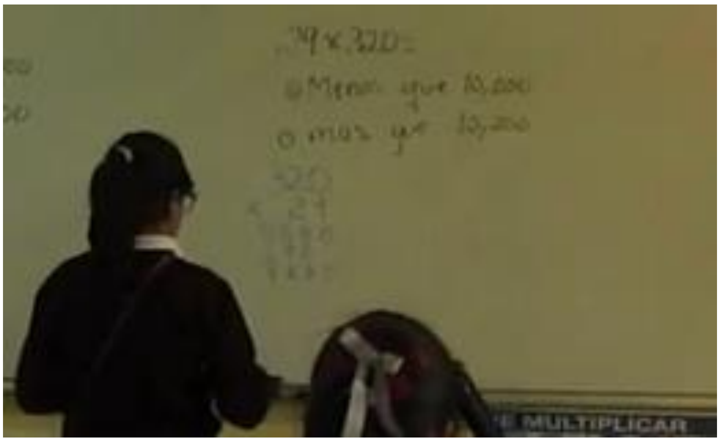


Figura 20. Alumna que utiliza una operación canónica para resolver el problema.

Cuando se conversó con la maestra respecto a lo sucedido, hizo el siguiente comentario:

"Les cuesta mucho trabajo expresar lo que hicieron (los alumnos), tengo que estar jalándolos y jalándolos, casi que obligarlos a que expresen lo que hicieron para resolver un problema, porque si te fijas en lo que te dicen es: 'lo pensé en mi cabeza' y ya no te dicen qué hicieron".

Otro ejemplo de este tipo de situaciones se presentó en la sesión 6, cuando la maestra propone un problema matemático sucede lo siguiente:

Maestra:	(…) Bien, por ejemplo, si yo tengo trescientos pesos y los quiero repartir entre cinco niños ¿de a cuanto le tocaría a cada niño?
Emilie:	Setenta y cinco.
Maestra:	A ver, ¿y cómo le hizo para llegar al resultado?
Emilie:	Ay, es que no sé, pasó así por mi cabeza
Maestra:	Algo más tuvo que haber pasado, porque, a ver ¿por qué no pensó en cien pesos?

La maestra busca que Emilie explicite el procedimiento que utilizó para resolver el problema; sin embargo, ella no logra expresar lo que ha hecho. Mason, Graham, Pimm y Gowar (1985, p. 21) mencionan que, en el pensamiento algebraico, el hecho de poder expresar una generalidad detectada es algo con un nivel de dificultad alto. Los alumnos con frecuencia encuentran muy difícil el moverse del “ver” (es decir, expresar el patrón detectado) al “decir” (explicitar tal patrón). “Registrar” puede involucrar una variedad de formatos, por ejemplo, recursos gráficos como dibujos, dibujos apoyados con palabras, la mayor parte palabras y algunos símbolos (refiriéndose al caso del álgebra), o la mayor parte símbolos con algunas palabras. Si bien es cierto que la secuencia didáctica no contenía ningún problema matemático relacionado con el álgebra, esa dificultad para expresar o “registrar” que expresan los autores estuvo presente durante todas las sesiones. Esta situación también fue identificada por Stauffer (2018), quien habla de la dificultad que tuvieron sus alumnos para poder expresar sus procedimientos de manera escrita. La dificultad para expresar los procedimientos mentales realizados para resolver un problema se presentó en las ocho sesiones que duró la implementación de la secuencia didáctica, aunque fue más evidente durante la sesión 8, donde se les pidió a los alumnos que escribieran sus procedimientos.

La docente continuó motivando a los alumnos a pesar de la dificultad del grupo para expresar (de manera oral o por escrito) sus procedimientos. Comentó que consideraba importante que los alumnos lograran poner en evidencia sus estrategias y procedimientos, pues esto les permitiría entender diversos contenidos matemáticos. Al respecto, Wolman (2010) (citada por Sancha, 2016), en su estudio sobre el papel que juegan las anotaciones que los alumnos de primer año de primaria realizan sobre sus procedimientos para resolver sumas y restas, señala que representar por escrito lo que se piensa permite a los alumnos reflexionar sobre sus procedimientos y sobre los pasos intermedios seguidos; menciona también que estas anotaciones ponen en juego procesos constructivos, favorecen abstraer, objetivar, construir regularidades y establecer relaciones propias del dominio matemático.

Esta dificultad para poner por escrito los procedimientos matemáticos fue encontrada también por Stauffer (2017, p. 104) quien menciona que, al realizar evaluaciones individuales, se encontró con la dificultad de los alumnos para verbalizar sus procedimientos de resolución de manera escrita.

Procedimientos de los alumnos

Conocimientos de cálculo mental que influyeron en la adaptación de la secuencia didáctica.

Como se recordará, previo a la implementación de la secuencia didáctica de cálculo estimativo se diseñó e implementó una secuencia didáctica de cálculo mental con el objetivo de conocer las estrategias con las que contaba el grupo; además, se buscaba que el alumno pusiera en práctica sus procedimientos de cálculo mental y que esto favoreciera su desempeño en la secuencia didáctica de cálculo estimativo. Gálvez et al. (2011, p. 11) citando a Lethielleux (2005, p. 17 – 18) menciona que uno de los beneficios que tiene la práctica del cálculo mental es la familiarización progresiva con los números, al punto de poder "jugar con ellos", expresar un número de variadas maneras, según el contexto del cálculo, y aprovechar las propiedades fundamentales de las operaciones numéricas básicas (asociatividad, conmutatividad, distributividad).

En la implementación didáctica observada se encontró que una de las estrategias más recurrentes de los alumnos fue la de agregar los ceros de un factor al otro para conocer el producto de una multiplicación. Véase el siguiente ejemplo de la Sesión 1, en la que se planteó lo siguiente:

5) a) Un chofer de camión tenía al inicio de la semana 32 450 pesos en pasajes. El lunes pagó con 12 monedas de diez al poner gasolina. ¿Qué cantidad le queda?

Figura 19. Problema matemático propuesto en la sesión 1.

Una estrategia para resolver la primera parte del problema podría ser agregar los ceros de un factor al otro para obtener el producto, por ejemplo, 120 x 10, se le agrega el cero del diez al ciento veinte, por lo que el producto sería 1, 200. Otra estrategia es realizar la operación canónica en papel ya sea de forma vertical u horizontal, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 120 \\ \underline{X\ 10} \\ 000 \end{array}$$

+1200

1200

Se esperaba que los alumnos utilizaran estrategias económicas para resolver la primera parte de la situación presentada, como agregar los ceros de un factor *a* al otro factor *b* para obtener el producto. Por ende, se creía que serían pocos los alumnos que utilizarían la operación canónica.

Agregar los ceros de los factores al producto de una multiplicación resultó ser una de las estrategias más económicas, como puede observarse en el siguiente fragmento de la sesión, durante un momento de validación que se hizo presente en la puesta en común:

Sam: A mí lo que se me hizo más fácil fue sumar las doce monedas de diez. (procede a escribir la suma vertical 10+10+10+10+10+10+10+10+10+10+10+10)

Maestra: Dice Samantha que ella primero sumó todas las monedas de diez, le dio ciento veinte y luego les restó esa cantidad al treinta y dos mil cuatrocientos cincuenta.

Ahora ¿Qué piensan ustedes de lo que hizo Samantha respecto a la suma de las monedas?

Emilie: Lo hizo bien, pero pudo ser más corto. En vez de hacer todo eso, al doce se le puede agregar un cero.

Características del grupo que influyeron en la adaptación de la secuencia didáctica.

Las primeras observaciones realizadas al grupo mostraron que se trataba de un grupo sumamente heterogéneo: mientras que había alumnos que tenían habilidades matemáticas que les permitían resolver las situaciones didácticas de una forma rápida y sin errores, también había alumnos que mostraban grandes dificultades para resolver los problemas matemáticos presentados. Igualmente, el grupo estaba integrado por alumnos que se desempeñaban mejor al momento de resolver problemas con estructuras aditivas y alumnos que encontraban más fáciles aquellos problemas de estructuras multiplicativas.

Tanto la docente como la investigadora determinaron que era necesario tomar en cuenta esta diversidad al momento de realizar adaptaciones en la secuencia didáctica.

También se observó que en el grupo había alumnos que participaban frecuentemente en la puesta en común mientras, que había otros que no participaban. Incluso cuando la maestra le pedía su participación a este segundo tipo de alumnos, ellos brindaban respuestas muy cortas y preferían no participar. Más adelante, se observará que esta dificultad relacionada con la expresión de los procedimientos que realiza el grupo para resolver los problemas matemáticos se hizo presente durante la implementación de la secuencia de cálculo estimativo.

Finalmente, fue necesario realizar cambios en los datos numéricos de los problemas contenidos en la secuencia didáctica original. Durante la implementación de la secuencia didáctica de cálculo mental, los alumnos mostraron dificultades para enfrentarse a problemas con cantidades numéricas grandes, mayores a las decenas de millar.

A lo largo de la implementación se observó además que los alumnos de sexto grado recurrían frecuentemente a ciertos procedimientos los cuales serán mencionadas con detalle en el siguiente apartado. Los procedimientos que se presentan en dicho apartado están ordenados de acuerdo con el tipo de problema.

Anticipar si el producto de una multiplicación es mayor o menor a un número dado.

Específicamente en el tipo de problema este apartado (anticipar si el producto de una multiplicación es mayor o menor a un número dado) los alumnos realizaron un procedimiento compuesto de tres pasos: 1) redondear los factores de la multiplicación; 2) operar con los factores redondeados; 3) comparar el producto de tal multiplicación con los rangos de resultados ya dados. Por ejemplo, en la sesión 2 la maestra preguntó a los alumnos si 3 x 3059 daba un producto mayor o menor a 1000. Hay distintos recursos a los que los alumnos podrían acudir para responder sin recurrir al cálculo exacto: por una parte, 3059 es un número mayor a mil y una de las propiedades de la multiplicación con números naturales es que el producto es mayor a cualquiera de sus factores, por lo que el producto de 3 x 3059 no puede ser menor a mil. Finalmente, al hacer uso de procedimientos de estimación, por ejemplo, utilizando el dígito de la izquierda, se puede advertir que 3 x 3 es igual a 9, y entonces el producto de 3 x 3059 sería aproximadamente mayor a 9,000. El uso de esos recursos se identifica en las explicaciones de los siguientes alumnos.

Ma:	Una más sencilla, 3 x 3059. ¿Qué onda?, ¿quién me cuenta qué hizo?
Ma:	¿Qué piensas tú, Uriel?
Uriel:	Del mil ya se pasaría, ¿no?

A partir de este momento la maestra espera un poco para que los alumnos participen:

Ma:	¿Entonces qué hacemos? Tenemos tres veces esa cantidad: tres mil cincuenta y nueve, tres mil cincuenta y nueve, tres mil cincuenta y nueve.
Alonso:	Son nueve mil
Uriel:	Se acercaría a los diez mil, ¿no?
Ma:	Muy bien, entonces dice Alonso, no me voy a meter en broncas con el tres mil cincuenta y nueve (3059), entonces los voy a redondear a 3000
Ma:	¿Y cuánto será tres veces tres mil?
Alonso:	Nueve mil.

En este fragmento la maestra sugiere el uso del redondeo como procedimiento de cálculo estimativo, después, hace una interpretación del procedimiento utilizado por Alonso. A lo largo de las sesiones se observó que la maestra sugiere el redondeo como estrategia y que los alumnos siguen esta sugerencia, esta acción muestra una característica del contrato didáctico que parece operar en esta aula: los procedimientos que la docente sugiere para resolver ciertos problemas matemáticos son adoptados por los alumnos y, por lo tanto, aparecen frecuentemente en la clase.

Aunque el redondeo y la manipulación del dígito de la izquierda fueron procedimientos comunes en el aula, también surgieron procedimientos que llevaron a la obtención del resultado exacto a través de la operación canónica. En el siguiente fragmento, por ejemplo, los alumnos tenían que decidir si la multiplicación presentada sería mayor o menor que 10 000.

Ma: Ahora 11 x 3300

Diana: Yo multipliqué uno por cero, uno por cero…

Ma: O sea, te la llevaste uno por cero, uno por cero es cero, uno por tres… No está mal, pero yo creo que tenemos que buscar otras alternativas.

A lo largo de toda la secuencia fue recurrente que los alumnos intentaran utilizar la operación canónica y llegaran a un resultado exacto. Para enfrentarse a los problemas de tipo de encuadramiento de cocientes la maestra continuó invitando a los alumnos a que utilizaran procedimientos como el redondeo, como se muestra en el ejemplo tomado de la sesión 6, en la que se planteó el siguiente problema:

	0 - 100	100 – 1 000
4,217 ÷ 31		

Figura 21. Ejemplo de problema de tipo encuadramiento de cocientes.

Se realizó un cambio en el rango numérico del problema. A partir del análisis de los datos que se obtuvieron en la implementación de una secuencia didáctica de cálculo mental, se determinó que era necesario disminuir las cantidades que se presentaban en los problemas.

Similar a los problemas de multiplicación, los alumnos utilizaron el redondeo y los números compatibles como estrategia principal. FALTA METER EL EJEMPLO

Otra estrategia recurrente en el salón fue lo que el grupo y la maestra llamaron “agregar y quitar ceros”, aunque las características de esta estrategia son las mismas que las del redondeo:

Ma: ¿Listos todos? Bueno, pásele el número… doce de la lista, Noemí, véngase para acá. ¿Tú cómo le hiciste?

Noemí: El 4,200 puede ser 4,000 y lo divides entre 30

Ma: ¿Y a ojo de buen cubero, cuánto será?

Noemí:	Ay no sé, es que en la hojita que nos dio no pude hacer la división, no había espacio.
Ma:	O sea, sí, pero bueno, de lejitos, observa la división, ¿qué puedes hacer?
Emilie:	Puede convertir el 31 a 40 y así nada más le quitas el cero al 4 mil.
Tadeo:	Te da mil.
Ma:	Mira lo que te sugiere Emilie, Noemí. Puedes usar el 40 porque así es mucho más fácil estimar la división ¿no?
Noemí:	Ah, pues así sí.
Ma:	Usen las estrategias, muchachos, para eso están.

Como se observa en la primera participación de Noemí, el redondeo surge casi inmediatamente como procedimiento: redondea la cantidad 4,217 a 4,200. Incluso a nivel oral es más sencillo expresar esa cantidad ya redondeada. Después, Noemí señala que en la hoja que se les entregó no había espacio para realizar la división. La secuencia didáctica original sugería el uso de un apartado donde los alumnos pudieran realizar un registro escrito de sus procedimientos; se hizo una modificación y se omitieron estos espacios, ya que los alumnos los utilizaban para hacer la operación canónica y no utilizaban ninguna estrategia de estimación. Más adelante se analizará con detenimiento sobre el registro oral y verbal del grupo.

Como se mencionó con anterioridad, el objetivo de los problemas presentados en la sesión 1: “anticipar si el producto de un cálculo es mayor o menor a un número dado”, los alumnos tendrían que determinar sin realizar el algoritmo convencional, si el producto de 29 x 320 es mayor o menor que 10,000, a continuación, se muestra como una alumna obtiene la respuesta correcta al problema propuesto, aunque lo hace realizando el algoritmo convencional. En el fragmento de la primera sesión la maestra propone la resolución del problema “29 x 320, ¿es más o menos que 10,000?”, y durante la puesta en común Emilie presentó su procedimiento de resolución: ella escribe en el pizarrón: 29 x 32 y comienza a resolver el algoritmo, como se muestra en la Figura 22.

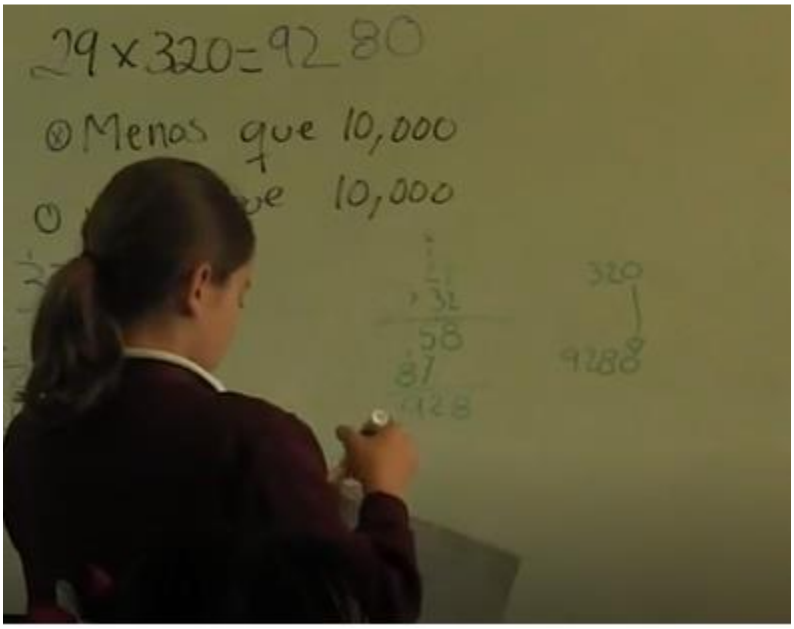


Figura 22. Resolución de problema: 29 x 320.

La imagen muestra que el resultado del algoritmo que escribió Emilie es 928. Después, junto al algoritmo escribe 320 → 9280. Nótese que la flecha comienza en el cero del 320 y termina en el cero del 9280:

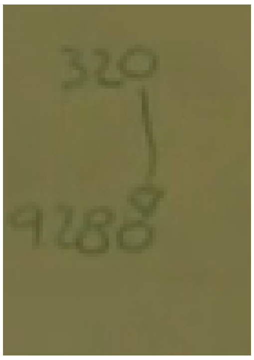


Figura 23: procedimiento de Emilie.

Al respecto la alumna y la maestra comentaron lo siguiente:

Maestra:	¿Por qué pusiste esa flecha?
Emilie:	Para decir que era 320 entonces es 9280
Maestra:	Bueno.
Maestra:	A ver, quiero que le pongan atención a lo que hizo Emilie. ¿Por qué puso ese cero ahí?
Diana:	Porque le da el cero.

Daphne: Se lo agregaron.

Después de ser analizadas, se determinó que esta estrategia está más apegada a la que autores como Reys (1986) y Flores et al. (1990) describen como "números compatibles". Aunque, para ser más específicos, la estrategia comúnmente usada en el grupo era quitarle el cero de uno o de los factores para agregarlo al final al producto. Al respecto, Wolman (2006, p.17) señala la posibilidad de hacer uso del cálculo mental para hacer funcionar las propiedades de las operaciones, así, se ofrece al alumno la oportunidad de tomar conciencia de que algunos cálculos son más sencillo que otros, y de que es posible valerse de ellos para resolver otros más complejos. En el caso del problema anterior, para la alumna fue más sencillo calcular 29x 32 que 29 x 320.

A lo largo de las 8 sesiones en las que se implementó la secuencia didáctica de cálculo estimativo se puso atención en aquellos procedimientos que los alumnos utilizaron con mayor frecuencia. El uso de números compatibles como estrategia fue el recurso más utilizado por el grupo. Por ejemplo, al iniciar la sesión 4 se planteó el siguiente problema:

"Se van a repartir 5,535 pizarrones nuevos a 4 escuelas. ¿Crees que a cada escuela le toque menos que 1000 o más que 1,000?" (problema previamente diseñado por la investigadora a partir de la necesidad de brindarle a los alumnos problemas con un contexto situacional en vez de uno puramente numérico)

Al momento de la puesta en común los alumnos expresaron los procedimientos que utilizaron para resolver el problema:

Ma: Acuérdense, me van a decir todo, todo, todito lo que pasó por esa cabeza de ustedes para resolver el problema. Porque yo sé que ustedes son bien inteligentes y hacen un montón de procedimientos que les, pues, les ayudan o les dicen cómo hacerle. ¿Tadeo, me estás escuchando?

Ma: A ver, Roberto, pues, dígame ¿cómo le hizo?

Roberto: Pues sí pasaron cosas en mi cabeza.

Ma: ¿Cómo qué?

Roberto: Pues que cuatro mil se parece más al cuatro que cinco mil quinientos treinta y cinco.

Ma: ¿Entonces?

Roberto: Mejor dividí cuatro mil entre cuatro y pues ya.

Ma: Síguele, síguele, ¿qué más?

Roberto: Cuatro mil entre cuatro da de a mil pesos.

Wendy: ¿Pesos?

Roberto: Sí. Ah no, pizarrones.

Lo anterior ejemplifica dos situaciones comunes en el salón. La primera, es que era habitual que la profesora invitara a los alumnos a elaborar sus respuestas, aunque esta situación será retomada en el apartado relacionado con las intervenciones docentes. Lo segundo es que Roberto, utilizó "los números compatibles" como estrategia para hacer una estimación: primero redondeó la cantidad 5,535 a 4,000 porque es más sencillo dividir cuatro mil entre cuatro; después operó con esta cantidad redondeada y obtuvo un resultado aproximado.

El uso de la estrategia de "los números compatibles" como procedimiento de cálculo estimativo fue detectado en las sesiones 1, 3, 4, 5, 6 y 7, lo que lo convierte en el más frecuente, seguido por el redondeo que fue observado durante las sesiones 1, 2, 3, 5 y 6. A continuación, se puede observar un fragmento de la sesión 4, donde surgió el uso de ambas estrategias con el problema "Se repartirán 5,535 pizarrones a 4 escuelas. ¿A cada escuela le toca más que 1,000 o menos que 1,000?":

Maestra: Bueno, ¿aquí qué?, ¿qué se les ocurre que hay que hacer? Quiero escucharlos.

Mariana: El cinco mil podría cambiarse de a cuatro mil.

Josué: ¡Más que mil!

Ma: Señor, Mariana me estaba explicando, además, me tienes que decir qué pasó por esa cabecita suya para pensar en esa respuesta. Mariana, ¿qué decías?

Mariana:	Sí, es más que mil.
Maestra:	O sea, sí pero ¿qué hiciste en tu cabeza?
Mariana:	Que es más fácil dividir cuatro mil entre cuatro.
Ma:	Es mucho más fácil dividir cuatro mil entre cuatro que cinco mil ¿qué? Cinco mil quinientos treinta y cinco.

Al parecer, Mariana utilizó dos estrategias: la primera fue pensar en un número compatible con el dividendo 4, para así operar con una cantidad mucho más sencilla. Después utiliza el redondeo para sustituir el dividendo 4, 535 por 4,000.

Anticipar a cuál de varios cálculos dados se acerca más un producto cuando esos cálculos no están resueltos

Para este tipo de problemas los alumnos se enfrentaron a un reto distinto: en vez de resolver un cálculo y analizar si estaba dentro de un rango numérico debían comparar dos cálculos para decidir si uno da menos o más que otro. Para ello se tenían que valer de las características de los factores de ambos cálculos para poder conseguir el resultado más apropiado.

De nueva cuenta, se destaca el papel que tuvieron las intervenciones de la docente al identificar las dificultades de sus alumnos para resolver los problemas. En primer lugar, se había planeado conservar la propuesta de la secuencia didáctica original y presentar a los alumnos multiplicaciones y divisiones; sin embargo, la maestra anticipó que las divisiones causarían un gran conflicto para los alumnos y que podrían centrarse en resolver las divisiones de manera convencional, haciendo a un lado la estimación. Por lo tanto, se decidió disminuir el número de divisiones y se aumentó el número de multiplicaciones para las futuras sesiones.

Previo al inicio de la sesión 6, la maestra revisa la hoja con cálculos y dice a la investigadora

Ma:	Si gustas podemos aplicar las dos (divisiones y multiplicaciones), pero el problema va a ser que les cuesta mucho trabajo las divisiones y no te van a lograr lo que esperas, está muy alto (refiriéndose a la dificultad de los problemas propuestos)
Investigadora:	Ya veo. ¿Qué propones?
Ma:	Pues, yo entiendo que lo hiciste para que hagan eso, comparar los cálculos, pero… Híjole, al menos no les pongas tantos y eso sí, divisiones sí les va a costar trabajo. O sea, Emilie, Tadeo, Josué… Sin problema, ¿eh? Pero otros chicos, no sé, pues a ver (voltea y ve al grupo). No, siento que la mayoría van a tener broncas.
Investigadora:	¿Y si aplicamos menos cálculos y que sean sólo multiplicaciones? A mí me interesa que vean las características de cada cálculo y que, pues que las comparen.
Ma:	Sí, sí, eso te entiendo… Bueno, vamos a hacerlo como tú dices… Eso sí, sí les vamos a poner el problema introductorio ¿verdad?
Investigadora:	Sí, claro.

La maestra expresó la necesidad de plantear un problema "introductorio" en un contexto situacional, con la intención de que los niños se familiarizaran con el tipo de problema y el tipo de respuestas que se esperaban. El problema fue: "8 alumnos se ganaron un viaje. Cada boleto de avión cuesta $14,300. ¿El total del precio de los boletos es más que 8 x 28,000 o más que 8 x 28,000?"

Se esperaba que los alumnos identificaran que hay ciertas características en los cálculos que les pueden dar información suficiente para establecer su respuesta. El primer factor de ambos cálculos es 8, pero el segundo factor es diferente: 28,000. Es casi el doble de 14,300, por lo que sin realizar ninguna operación se puede anticipar que el producto de 8 x 14,300 es menor que el de 8 x 28,000. Sin embargo, durante la puesta en común del problema las respuestas expresadas por los alumnos indicaron que no habían realizado ninguna comparación de cálculos:

Ma: Bueno, vamos a aprovechar que Diana quiere participar. Dígame, Dianita, cómo lo hicieron ustedes

Diana: Ah, cada quien sumó dos niños, uno más uno, dos.

Wendy: ¡No! Sumamos lo de dos niños

Ma: Ah, cada quien sumó lo de cada boleto.

Roberto: Nos da 28 mil 600.
Ma: Entonces, dice su compañero "cada 2 niños son 28 mil 600"
¿Y luego?
Diana: Lo sumamos todo y ya.
Ma: ¿Pero cómo? O sea, entiendo que sumaron 28 mil 600 más 28 mil 600 pero ¿luego?

Ma: O sea, hicieron 4 veces 28 mil 600.

Diana: Sí, eso
Ma: ¿Y cómo cuánto más o menos les salió?
(Los alumnos toman un momento para pensar su respuesta)

Luis: A ver, súmelo, maestra

Ma: Ay no, yo no. Ustedes.

Ma: A ver, así a ojo de buen cubero, ¿quién le atina?

Alumnos: ¡Yo, yo!

Ma: 28 mil 600, más 28 mil 600, más 28 mil 600, más 28 mil 600 ¿cómo le vamos a hacer?

Desde el inicio de la puesta en común hubo alumnos, como Diana, que mostraron no haber utilizado la comparación de cálculo como estrategia para resolver el problema. Diana, Roberto y Wendy tomaron la cantidad 14,300 y la sumaron 8 veces, tampoco usaron la multiplicación para resolver el cálculo, usaron la suma iterada. Cuando la maestra pregunta "¿cómo le vamos a hacer?", hace una pausa y decide acercarse a la investigadora:

Ma: Híjole, no ¿eh?

Investigadora: Sí, ya vi ¿tienes alguna sugerencia?

La maestra replanteó la situación ante el grupo:

Ma: Oigan, y si no pudieran hacer ninguna operación, así ni una sola, ¿cómo le harían?

Emilie: Redondeas el 8 del 8 x 14 mil, y redondeas el 8 del 28 mil.

Ma: ¿Y luego, a qué lo redondeas?

Emilie: A 10.

Tadeo: A 10, te da 140 mil y 280 mil.

Emilie: Es menos.

Ma: Es menos… Ustedes redondearon.

Diana: También puedes redondear el 28 mil a 30 mil.

Ma: ¿Y otra cosa?

Alejandro: ¿Cómo qué?

Ma: Uhmmm, no sé. Miren las operaciones, ¿no hay información ahí que les sirva para que no tengan que hacer ninguna multiplicación o suma?

Tadeo: Pues sí, tiene que haber.

Ma: Pues no sé, yo no sé, ustedes díganme.

Emilie:	El 28 mil es más que 14 mil 300.
Ma:	El 28 mil es más que 14 mil 300.
Emilie:	Si lo ves así entonces el 28 mil, es más.
Ma:	Sí, pero elaboren su respuesta.
Emilie:	El 8 x 28 mil es más que 8 por 14 mil 300, porque 8 y 8 son igual, pero el 28 mil es más que 14 mil.
Ma:	Exacto.

Al momento en el que la maestra invita a los alumnos a que exploren otros procedimientos, se encuentra con una respuesta que parece determinada por el contrato didáctico establecido en torno a los problemas de estimación: usar el redondeo. Como se ha mencionado, la maestra invita con frecuencia a los alumnos a que utilicen el redondeo, y como resultado a esa acción recurrente, Emilie propone utilizarlo para resolver el problema. La maestra lo acepta, pero también pregunta a los alumnos sobre lo que podrían hacer si no realizaran cálculos. Tadeo parece interpretar la intención de la maestra e identifica, al igual que Emilie, que debe haber otra solución para el problema. Finalmente esta alumna resuelve el problema haciendo una comparación de cálculos.

Aunque en este problema los alumnos usaron la comparación de cálculos, con la ayuda de la intervención didáctica de la maestra, cuando posteriormente se les plantearon problemas similares pero en un contexto totalmente numérico, no se presentó nuevamente la comparación de cálculos.

A diferencia de la investigación realizada por Stauffer (2018), donde los alumnos lograron comparar los factores de ambos cálculos para después establecer relaciones entre ellos, en esta investigación los alumnos utilizaron otros recursos relacionados con la estimación, como se mostrará enseguida.

Es necesario mencionar dos sucesos al implementar este tipo de situaciones en la presente investigación. El primero es que se dedicaron dos sesiones para que los alumnos pudieran realizar la comparación de cálculos como estrategia de estimación, esto fue porque en la primera sesión tanto la maestra como el grupo omitieron esta comparación y se dedicaron a resolver los cálculos de manera convencional y exacta. Por ello, para la segunda sesión se realizó una adaptación en el rango numérico y cantidad de cálculos propuestos; además, durante el trabajo en conjunto con la profesora se hizo un mayor énfasis sobre la comparación de cálculos como estrategia de resolución. Sin embargo, de nueva cuenta no hubo aparición de esta estrategia en los alumnos.

Cuando concluyó la segunda sesión y se realizó la puesta en común las respuestas variaron: algunos alumnos realizaron operaciones canónicas y llegaron al resultado exacto de ambos cálculos, otros utilizaron el redondeo de uno o de los dos factores de una o ambas multiplicaciones. Por ejemplo, en el problema 4 x 5 400 tenían que decidir si era mayor o menor a 3 x 5 400. En la puesta en común Roberto señaló que había redondeado el 5,400 a 5,000, dejando intacto el factor 4; después determinó que como 4x5 son 20, solo había que "agregar los ceros" y así se obtenía 2,000. Del mismo modo, redondeó las cantidades de la segunda multiplicación, el 5,400 a 5,000 y como el producto es 1,500 entonces la respuesta sería que la segunda multiplicación es menor a la primera.

En síntesis, a pesar de las intervenciones de la profesora los alumnos no utilizaron la comparación de cálculos; la sustituyeron por otras estrategias relacionadas –o no– con el cálculo estimativo. Al realizar un análisis más profundo de lo sucedido se concluyó que la omisión de comparación de cálculos se debió, en parte, a una falla en la comunicación investigadora – docente – alumno de esta sección de la secuencia didáctica, ya que la docente no logró comprender el objetivo de las situaciones propuestas.

Cuando se diseñó la secuencia didáctica de cálculo estimativo en problemas multiplicativos (Stauffer, 2017) se tuvo como propósito propiciar el aprendizaje de estrategias de estimación. Cabe aclarar que no se buscaba favorecer solamente a una, sino que el alumno tuviera a su disposición una serie de estrategias de estimación útiles para poder resolver cálculos. Para esta investigación se consideró que ninguna estrategia es "mejor" que otra, aunque si hay algunas que son más comunes en su aplicación para la vida cotidiana, como el redondeo. Con lo anterior se busca establecer que para las sesiones donde el objetivo era que el grupo comparara cálculos no fue porque esta estrategia fuera más eficiente o mejor que las demás, sino porque se buscaba que los alumnos ampliaran su repertorio de estrategias de estimación, sin embargo no se consiguió el objetivo y se favoreció el uso de otras estrategias.

Como se ha mencionado en repetidas ocasiones, la comunicación de una secuencia didáctica conlleva varias tareas y la más importante es que el objetivo de cada situación sea claro para el profesor que está implementando la secuencia, de lo contrario se presentan sucesos como el que se ha relatado anteriormente. Entonces, se determinó que al comunicar alguna situación específica sería necesario lo siguiente:

- Redactar el objetivo de aprendizaje de una manera clara y concisa.
- Proponer ejemplos de posibles aciertos y errores y establecer claramente la razón por la cual tales respuestas son consideradas errores, por ejemplo “si el alumno recurre a resolver de manera exacta los cálculos propuestos es necesario invitarlo que se fije en las características de las cantidades que permiten que llegue a un resultado aproximado sin hacer cálculos”.
- Así como las propuestas curriculares proponen la anticipación de las respuestas de los alumnos, es necesario anticiparse a las dificultades a las que podría enfrentarse un docente al momento de implementar una propuesta curricular.

Uso de procedimientos de cálculo estimativo para resolver un problema donde se obtiene un resultado exacto al final.

Aunque las situaciones propuestas al grupo de sexto grado tenían como objetivo que los alumnos desarrollaran estrategias de cálculo estimativo en problemas multiplicativos, en algunas sesiones los alumnos utilizaron estrategias de estimación para después llegar al resultado exacto de los problemas. La maestra del grupo les recordaba constantemente que hay situaciones, tanto de la vida cotidiana como en los problemas matemáticos que ellos ven en la escuela, en las que aproximarse al resultado es un procedimiento válido.

A pesar de ello, los alumnos continuaron buscando resultados exactos. Al respecto, Wolman (2006, p. 30) menciona que abrir el trabajo escolar a situaciones que admiten o requieren la estimación no es una práctica habitual, ya que regularmente las actividades apuntan a encontrar resultados exactos. De modo que, lo que se ha detectado con este tipo de prácticas es un rasgo de la cultura escolar. Parece ser que el grupo de sexto grado estaba muy apegado a una norma escolar que dicta que los resultados obtenidos de un problema matemático siempre tienen que ser exactos.

Por ejemplo, se observó durante la sesión 5, en la que tanto los alumnos como la maestra optaron por llegar al resultado exacto del problema. La sesión estuvo centrada en que los alumnos pudieran anticipar si el producto o cociente sería mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado.

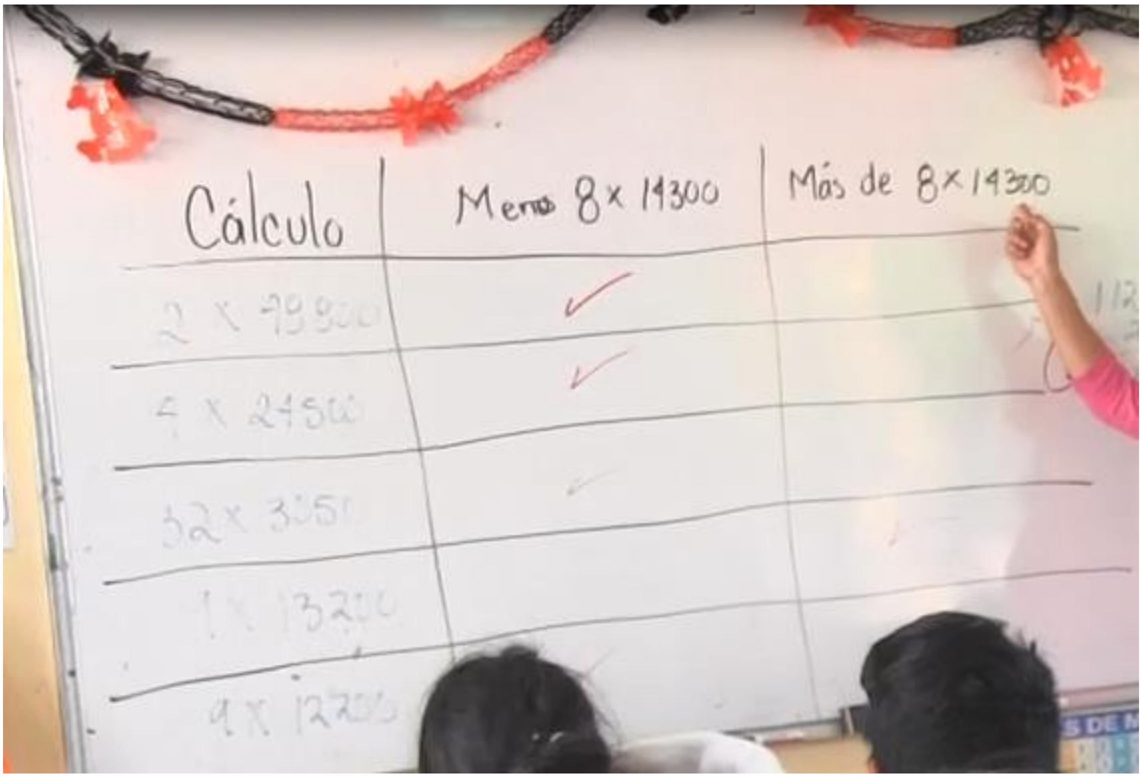


Figura 24. Anticipar si el producto será mayor, menor o igual a otro cálculo dado.

Se esperaba que el alumno resolviera este tipo de problemas comparando un cálculo con otro, por ejemplo 2 x 48 800 comparado con 8 x 14 300. Existe la posibilidad de utilizar diversas estrategias para resolver los problemas, en el caso del ejemplo que se está usado es posible redondear el factor 48,800 a 50,000 y pensar en su doble (ya que se está multiplicando por dos); el producto estimado sería entonces 100,000. Una de las estrategias usadas por los alumnos fue redondear el factor 14,300 a 14,000 y después "separarlo" para multiplicarlo fácilmente: (8 x 10,000) + (8 x 4,000) = 80,000 + 32,000; obteniendo como resultado 112,000.

Sin embargo, al avanzar la sesión la maestra recurrió a la resolución exacta para la comparación de resultado, y los alumnos procedieron a comparar los resultados exactos de cada multiplicación perdiéndose el objetivo de la sesión.

Maestra: Lo que yo estoy buscando en ustedes es que discutan sus procedimientos, que los platiquen y que se pongan de acuerdo. Miren, es como si yo les dijera que 8 alumnos se van a ir de viaje…

Leonardo: ¡Lléveme a mí!

Maestra:	… Y cada boleto cuesta catorce mil trescientos pesos, mi pregunta es ¿cuánto pagarán en total por los boletos? (la maestra resuelve el algoritmo 8 x 14,300 en el pizarrón con ayuda de los alumnos)

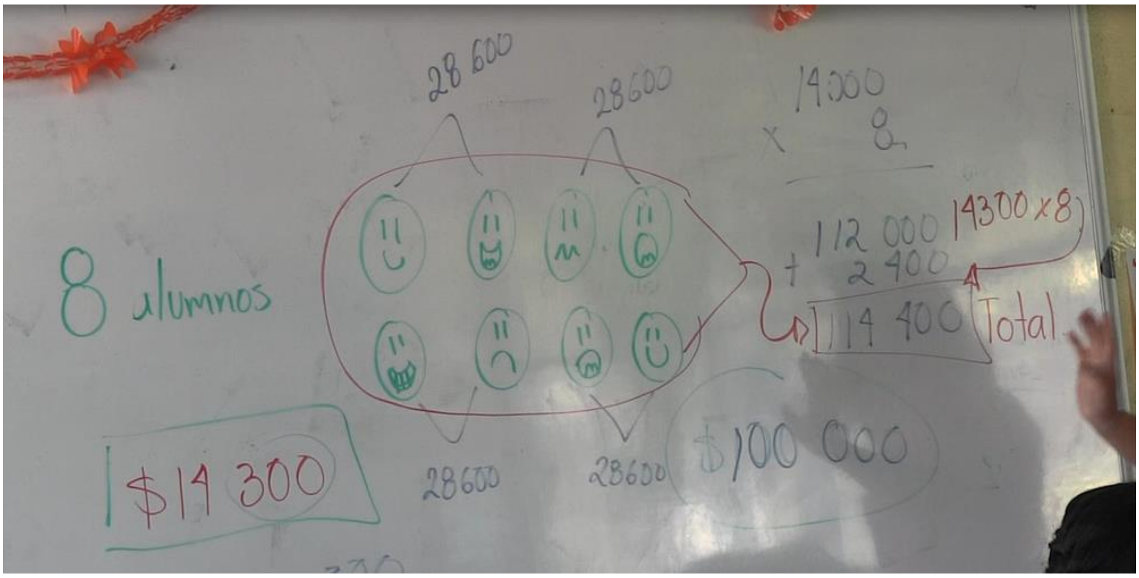


Figura 25. Planteamiento y resolución de la multiplicación 14,300 x 8.

Cabe mencionar que algunos alumnos utilizaron tanto la estimación como el cálculo exacto para resolver la multiplicación. En la fotografía pueden observarse unas “caritas” que dibujó la profesora como recurso gráfico para guiar a los alumnos en el problema comunicado. Después de esto, se procedió a realizar el cálculo, como se observa en la Figura 26:

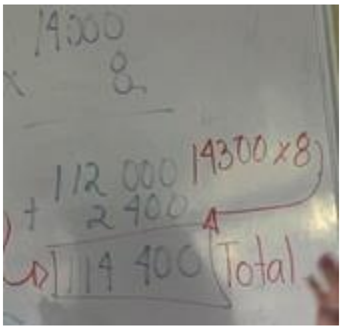


Figura 26. Se multiplicó 14,000 x 8.

En la imagen se puede apreciar que el 14,300 fue redondeado a 14,000. Al obtener el resultado, la maestra y el grupo calcularon el resultado exacto a modo de comprobación de la estimación.

Capítulo 6: Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones a las que se llegó después del diseño e implementación de una secuencia de cálculo mental y después de la adaptación y ejecución de la secuencia de cálculo estimativo.

El diseño original de la secuencia didáctica estuvo orientado al desarrollo de estrategias de cálculo estimativo. Para poder implementar tal propuesta fue necesario realizar una serie de adaptaciones de una secuencia llevada a cabo anteriormente (Stauffer, 2017) debido al cambio de diferentes elementos: docente, grupo y escuela. Se puso especial atención en analizar que, aun con estas adecuaciones, el alumnado desarrollara y pusiera en práctica estrategias de cálculo estimativo. Los diferentes momentos en cada sesión (las intervenciones docentes, las devoluciones, los aciertos y errores de los alumnos) nutrieron esta investigación al punto de poder llevar a cabo un análisis profundo sobre qué tareas están relacionadas con el diseño de propuestas didácticas. Diversos autores (Segovia y Castro, 2007; Wolman, 2006; Broitman, 2011) han expresado la importancia de compartir proyectos didácticos a los profesores. Destacan que la apropiación de esos proyectos tiene efectos positivos en la enseñanza, en el análisis y estudio de tales propuestas, así como en la preparación y actualización del cuerpo docente. En este documento se comparte esa postura.

En lo que se refiere a las implicaciones relacionadas con los procedimientos, fueron necesarias acciones como la anticipación de respuestas (aciertos o errores que los alumnos pudieran producir al momento de la implementación). Del mismo modo, se considera que el uso de teorías como la Didáctica de las Matemáticas y metodologías como la Ingeniería Didáctica produce un efecto positivo en la práctica docente. Artigue señala al respecto que la implementación de la Ingeniería Didáctica requiere que el profesor sea capaz de anticipar y tomar decisiones que se encuentren adaptadas a nuevas situaciones (p. 18, 1995); por lo tanto, la acción de anticipar las posibles respuestas del alumno beneficia al maestro, ya que podría tener un mejor control de su clase y podría pensar en diferentes acciones para permitir el aprendizaje de algún contenido.

La implementación de una secuencia de cálculo mental previa a la secuencia en la que se centra esta investigación también resultó de mucha ayuda, ya que aportó datos relevantes sobre el conocimiento del cálculo mental de los alumnos.

Por otro lado, se observó que la construcción de ciertas estrategias de cálculo estimativo está fuertemente ligada al contrato didáctico. Durante la implementación de la secuencia didáctica se observó que la maestra invitaba a los alumnos a utilizar ciertas estrategias que en ella consideraba más útiles o más fáciles, obteniendo como resultado que los alumnos primero aplicaran estas estrategias y después hicieran uso de otras diferentes, aquellas que no habían sido motivadas desde un principio por la maestra.

Sobre los problemas que estaban diseñados como un "juego".

Tanto en la secuencia original como en la adaptación las situaciones que se plantearon estaban diseñadas como un juego para los alumnos. Sin embargo, durante la implementación los alumnos no lo consideraron de tal forma. En repetidas ocasiones el grupo pensó que se trataba de un examen, a pesar de que la maestra expresó lo contrario, como puede observarse en el fragmento de la sesión 6.

Ma:	Ahora, ¿qué vamos a hacer? Pues es otro juego, parecido al de la otra vez; recuerden, hay que platicar nuestras estrategias y, sobre todo, hay que estimar.
Alejandro:	Acercarnos al resultado.
Ma:	Eso, acercarse al resultado.

La maestra hace hincapié de que se trata de un juego, aunque más adelante un alumno se acerca a ella y le comenta que se trata de un examen.

Roberto:	¿Este examen cuenta para calificación?
Ma:	No, ya habíamos platicado que no.

Aunque la maestra no comunicó al alumno que se trataba de un juego, en varias ocasiones les mencionó que no era un examen, pero los alumnos lo siguieron considerando como tal. En un primer momento se pensó que tal situación se había dado porque los problemas fueron presentados en un contexto puramente numérico. Aunque, existen juego matemáticos que de igual manera tienen un contexto numérico como "carrera veinte" o el "sudoku", así que al final se pensó que usar un contexto situacional o uno numérico no era algo sumamente determinante para que el alumnado creyera que se trataba de un examen.

El uso de ciertas estrategias para cierto tipo de problemas.

Al analizar la aparición de ciertas estrategias de cálculo estimativo ante determinados tipos de problemas, surgió la pregunta de si los problemas planteados propiciaban la aparición de tales estrategias, y si omitían otras.

Independientemente del tipo de problema, el "agregar y quitar ceros" fue la estrategia más recurrente. Cabe mencionar que esta estrategia siempre estuvo acompañada de otras como el redondeo, el uso de número compatibles o la conversión del dígito de la izquierda. Sin embargo, cada vez que los alumnos estaban por finalizar un problema matemático señalaban que al final sólo había que "agregar los ceros", en el caso de la multiplicación, o "quitar los ceros" en el caso de la división. Incluso en el plano oral el redondeo se presentó de manera "natural", pues tanto la maestra como los alumnos "abreviaban" cantidades como 4,217 y la expresaban como 4,200. Ello podría ser una manifestación del uso de la estimación en lo cotidiano.

Se observó que en los problemas donde los alumnos tenían que anticipar si el producto de una multiplicación es mayor o menor a un número dado se presentaba con mayor frecuencia el redondeo. Es posible que esto se haya debido a que las cantidades utilizadas en estos problemas propiciaban tal estrategia; por ejemplo, en la multiplicación 3 x 3059, la estrategia más obvia era redondear el segundo factor a 3,000 y después multiplicar tal factor por 3, obteniendo 9,000 como producto estimado.

En los problemas donde el alumno tenía que encuadrar cocientes de divisiones entre rangos de números potencias de 10 se utilizaron los números compatibles acompañados del redondeo. Por ejemplo, en el problema 3,600 ÷ 80 (sesión 2), donde los alumnos tenían que estimar si el resultado era mayor o menor a 1,000, utilizaron la cantidad 3,600 y la cambiaron por 3,200 que es un número que se puede dividir fácilmente entre 80.

En síntesis, se puede decir que, aunque ciertos problemas sí propiciaron la aparición de ciertas estrategias sobre otras, la variable que contemplaba las cantidades tuvo una relación muy estrecha en el uso de una estrategia específica.

En la Tabla 6 se contrastan las estrategias más frecuentes identificadas en esta investigación y las identificadas por Stauffer (2018):

Tabla 6.

Comparación de los procedimientos más usados en la presente investigación y en la propuesta de Stauffer (2018).

Tipo de problema	Procedimiento más usado	Procedimiento más usado en secuencia original (Stauffer, 2017)
Problemas de anticipación y problemas de encuadramiento de un resultado	Números compatibles: se observó de manera global los factores de la multiplicación para después redondearlos o cambiarlos a un número más sencillo para operar con ellos.	Redondear los factores y operar con ellos para obtener un producto estimado.
Anticipar si el producto/cociente será mayor, menor o igual al resultado de otro cálculo dado.	Redondeo de uno o los dos factores en una o las dos multiplicaciones.	Comparar los factores de ambos cálculos para después establecer relaciones entre ellos.

¿Para qué metes la tabla si no la vas a discutir en el texto?

Es posible que el cambio en el rango numérico y el formato de los problemas haya tenido efecto en los procedimientos de los alumnos; sin embargo, estrategias de cálculo estimativo aparecieron durante toda la implementación de la secuencia, incluso en situaciones donde al final el resultado obtenido fue exacto.

Se consideró necesario apegarse a la Ingeniería Didáctica como metodología de la investigación para poder identificar las implicaciones inherentes a la adaptación (o diseño) de una secuencia didáctica: las relacionadas con los procedimientos de los alumnos y con la comunicación de una secuencia de parte de una investigadora a una docente.

Sobre la comunicación de la secuencia se observó que el trabajo colaborativo con el maestro que implementa la secuencia didáctica es fundamental, ya que sus respuestas son valiosas para el diseño o la adaptación de la misma. El docente tiene conocimiento de las necesidades específicas de su grupo y al momento en que una propuesta didáctica llega a sus manos, realiza las modificaciones que considera pertinentes para atender a tales necesidades. Por tanto, la adaptación y la implementación de la secuencia llevados a cabo en la presente investigación tuvo numerosos aportes por parte de la maestra titular del grupo. Estos aportes permitieron la reflexión sobre la flexibilidad de la secuencia didáctica y sus limitantes.

Del mismo modo, es necesario reiterar la importancia del trabajo en conjunto de la maestra y la investigadora durante el diseño de propuestas didácticas. Las aportaciones que la maestra realizó a la adaptación de la secuencia fueron valiosas. A través de la maestra se obtuvo conocimiento sobre las necesidades que suele tener un grupo de sexto grado de una escuela pública: el trabajo en grupos pequeños, las puestas en común donde se practica el registro oral de los procedimientos de los alumnos; además, se conocieron las necesidades de una docente al momento de implementar un proyecto didáctico tales como brindar contexto a los alumnos antes de iniciar con un problema matemático, tener en cuenta que no se tienen periodos de clases "largos" para poder implementar secuencias con un número grande de sesiones o aplicar un largo número de problemas matemáticos.

Aparición del redondeo como primer procedimiento para resolver un cálculo

El análisis posterior a la implementación de la secuencia señaló que el redondeo es el primer procedimiento que utiliza el grupo en general (incluyendo a la docente) al resolver un cálculo. Esto es importante porque uno de los propósitos de la secuencia didáctica es favorecer el surgimiento de diversos procedimientos de cálculo estimativo; sin embargo, en ocasiones solamente se usa el redondeo. En estudios relacionados con los procedimientos de estimación que utilizan los alumnos (Levine, 1982; Lemaire, Lecacheur y Farioli, 2000; Cortés, Backhoff y Organista, 2004; Stauffer, 2017) también aparece el redondeo como el procedimiento más frecuente. A partir de este análisis se consideró lo siguiente: sería necesario en un futuro repensar la estructura de la secuencia didáctica de tal forma que en primera instancia se haga un uso total del redondeo para después favorecer la aparición de otros tipos de procedimiento.

Por otro lado, al analizar los procedimientos del grupo al hacer uso del redondeo se observó que algunos alumnos no tenían un criterio para redondear hacia un número arriba o hacia abajo. También se observó que durante las puestas en común no se reflexionó sobre tal criterio, ya que dependiendo del contexto en algunas ocasiones resulta más adecuado redondear "hacia arriba" y en otras ocasiones es preferente redondear "hacia abajo". Tal reflexión no se hizo presente en ninguna sesión. Koyama (1994) advierte sobre la enseñanza de estrategias de estimación inadecuadas. En su trabajo con niños de cuarto, quinto y sexto grado encontró que muchos alumnos tendían a utilizar el redondeo estándar cuando era más apropiado usar el redondeo "hacia arriba".

Volviendo al análisis a posteriori de esta secuencia, se recurrió de nueva cuenta a realizar un análisis de los libros de texto de matemáticas con el fin de saber si en las lecciones donde se trabaja la estimación existe algún problema que propicie que el alumno analice si es mejor redondear hacia arriba o hacia abajo, no se encontró tal cosa. Entonces, es probable que una situación similar a la que menciona Koyama (1994) se haya presentado durante la implementación de la secuencia didáctica: los alumnos no sabían en qué momento era más razonable hacer un redondeo hacia arriba y cuando hacerlo hacia abajo.

Estudios sobre la comunicación de secuencias didácticas como una necesidad

El análisis sobre la comunicación de una secuencia didáctica, las intervenciones didácticas y el favorecimiento de ciertos procedimientos de estimación llevó a la siguiente reflexión: si bien es necesario que se desarrollen más estudios sobre la potencialidad de las propuestas didácticas de cálculo estimativo, también lo es el desarrollo de propuestas enfocadas a guiar al docente en su enseñanza del cálculo estimativo.

Se considera primordial que el docente tenga conocimiento suficiente sobre la estimación para poder guiar al alumno a tomar las decisiones más adecuadas. De este modo tanto el docente como el alumno podrían saber en qué momento sería mejor redondear hacia arriba o hacia abajo, cuándo sería más conveniente utilizar el dígito de la izquierda, o los números compatibles… En fin, se considera necesaria una propuesta didáctica que ayude al docente en la enseñanza de los procedimientos de cálculo estimativo.

Sobre los retos pendientes.

Como se mencionó en un apartado anterior, las situaciones implementadas fueron diseñadas con una intención lúdica; sin embargo, los problemas no fueron tomados como un juego por los alumnos. Aunque se les recordaba que se trataba de una "competencia" o de un "juego", en algunas ocasiones los alumnos comunicaron a la maestra que se trataba de un examen. Sería importante en un futuro repensar el diseño de los problemas presentados para que el alumno realmente juegue mientras hace uso de estrategias de cálculo estimativo.

Con respecto al tipo de problemas que fueron implementados se obtuvo que aquellos donde se esperaba que los alumnos hicieran una comparación de cálculos como estrategia para la obtención del resultado, no se presentó como tal, y más bien usaron el redondeo y los números compatibles. Es posible que el alumnado estuviera habituado a utilizar esos procedimientos, por lo que no ponían atención a aquellas características de los números que les permitían realizar una estimación mediante la comparación. Tal vez convendría que este tipo de problemas fuesen los primeros en la secuencia.

Una de las adaptaciones más relevantes fue la relacionada con el número de sesiones necesarias para implementar la secuencia. Las demandas cotidianas del aula, los tiempos que se destinan para las clases y situaciones ajenas al control del docente requieren la utilización de secuencias que no se excedan en tiempo; además, se observó que los alumnos ya no se mostraban con tanto interés en las últimas sesiones como en las primeras.

Es necesario reflexionar sobre los tiempos para la implementación de la secuencia, de igual manera, se requiere considerar que en muchas ocasiones la puesta en común de los problemas matemáticos toma tiempo. Aunque se realizó una modificación en el número de problemas propuestos a los alumnos, la maestra tuvo que hacer una selección de aquellos que presentaría en la puesta en común para no excederse en el tiempo destinado para la clase.

A la par, es necesario considerar que algunos problemas deberían plantearse apegándose a un contexto situacional. De acuerdo con lo expresado por la docente, los alumnos requieren de un contexto cotidiano que les permita apropiarse del problema. Entre las intervenciones más importantes se destaca el cambio de los problemas en términos numéricos a problemas situacionales. La maestra manifestó que con su grupo este tipo de modificaciones resultaba elemental para que los alumnos pudieran apropiarse de la secuencia y encontrar el sentido de esta. El uso de problemas situacionales en un contexto de dinero resultó ser la manera más amable para que los alumnos pudiesen enfrentarse a la secuencia didáctica.

Aportaciones de esta tesis para el diseño de secuencias didácticas y para la enseñanza en el aula.

Se ha mencionado con anterioridad la importancia de la enseñanza del cálculo mental y estimativo en el aula. Es necesario que propuestas como la que en este documento se ha presentado sean implementadas con mayor frecuencia y sistematización. Otra contribución que brinda esta investigación es el hincapié que se hace sobre las aportaciones didácticas de un profesor para el diseño y adaptación de secuencias. Se ha valorado el conocimiento que tiene el maestro sobre las necesidades de sus alumnos y que el trabajo en conjunto le permite, también, conocer sus intervenciones, tanto las que propician el aprendizaje como las que no lo hacen, todo esto con el objetivo de la mejora en la enseñanza.

La investigación realizada por Stauffer (2018) fue considerada como una aportación importante a la enseñanza del cálculo estimativo, también se reconoce su estudio de las estrategias que le permiten al alumno el aprendizaje de la estimación. A partir de este estudio se pudo obtener conocimiento sobre la potencialidad y capacidad de reproducibilidad al rediseñar e implementar una secuencia de cálculo estimativo en problemas multiplicativos.

Conclusiones sobre las limitantes del estudio de reproducibilidad de una secuencia.

Estudiar el fenómeno didáctico de la reproducibilidad de una ingeniería didáctica es una tarea compleja. Autores como Brousseau (1986), Artigue (1986) y posteriormente Montoya (2015), quien apoyada en los primeros autores desarrolló estudios específicos sobre la reproducibilidad, han señalado esta dificultad. Se considera que es necesaria la búsqueda de un instrumento puntual y sistemático para el estudio de la reproducibilidad: se ha reconocido la necesidad de formular un instrumento que pueda medir la reproducibilidad de una secuencia didáctica de manera sucinta. Esta necesidad ha sido mencionada por Artigue (1986). En su investigación sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas expone las limitantes del modelo. En el caso de Artigue, se diseñó un instrumento que le permitiera analizar la reproducibilidad con mayor precisión. Si bien esta investigación no estuvo centrada en medir la reproducibilidad de una secuencia didáctica, aspectos como la flexibilidad y la potencialidad de una secuencia fueron factores tomados en cuenta (los cuales están fuertemente ligados al fenómeno de la reproducibilidad). Se prestó especial atención en aquellos procedimientos que se repitieron en ambas implementaciones de la secuencia (la original y la adaptada) lo que permitió hacer conclusiones sobre su potencialidad.

Del mismo modo, los estudios de reproducibilidad (Montoya, 2015; Montoya y Lezama, 2016; Lezama, 2003) apuntan a que las investigaciones didácticas puedan ser utilizadas en el aula por otros maestros y que eso pueda mejorar la enseñanza generando condiciones que permitan que el alumno transforme, valide y produzca lo que Brousseau (1986) denomina *conocimiento matemático*.

El aprendizaje generado al realizar la investigación.

La realización de esta investigación generó una serie de aprendizajes valiosos y es fundamental comenzar por la transformación del criterio sobre el quehacer docente. Durante el desarrollo de la secuencia didáctica surgieron diferentes situaciones que permitieron grandes momentos de reflexión: los docentes, en muchas ocasiones, realizan modificaciones a las situaciones didácticas y estos cambios responden a necesidades que ellos detectan en su grupo y que en muchas ocasiones escapan al ojo del investigador. En este sentido, escuchar al docente al momento de diseñar una propuesta didáctica es esencial.

En esta investigación además se hizo evidente que es necesario que los productos de ingeniería didáctica sean transformados. Las propuestas no pueden ser de compleja comunicación. Las tareas docentes no se limitan únicamente a la enseñanza de las matemáticas, tienen a su cargo diversas tareas y es injusto pensar que en su deber está tener tiempo para acercarse a productos extensos y con un lenguaje sumamente técnico. La tarea del investigador debe ser, entonces, utilizar las teorías que ofrece el campo de la Didáctica de las Matemáticas y generar productos accesibles: menos fundamentadas, breves y menos complejos. Por lo tanto, sería más adecuado poner al alcance del maestro documentos curriculares sintéticos.

El segundo aprendizaje generado está relacionado con la importancia que se le da al cálculo estimativo como conocimiento matemático. Al igual que en la investigación desarrollada por Stauffer (2018), surgieron argumentos por parte del alumnado que apuntaban a que la estimación no tiene la misma validez que la obtención de resultados exactos. Asimismo, el grupo llegó a pensar que después de resolver un problema matemático con una estimación era necesario calcular el resultado exacto; de nueva cuenta, se desvalorizaba al cálculo estimativo. Se considera que es importante recordar la validez que tiene el cálculo estimativo, recordar que forma parte de la cotidianeidad y que permite, por ejemplo, la comprobación de resultados exactos.

Finalmente, el apego a la Teoría de las Situaciones Didácticas en el diseño y la implementación de la secuencia dio paso a situaciones interesantes que apuntaron al análisis de los procedimientos de la maestra y los alumnos. Los momentos de validación permitieron que los alumnos miraran en retrospectiva sus acciones. La institucionalización de los conocimientos dio paso a que los alumnos lograran hacer un registro oral de sus procedimientos y así llegar a la transformación de su trabajo matemático.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México, Grupo

Editorial Iberoamérica.

Barallobres, G. (2013). *La noción de cientificidad en la teoría de situaciones didácticas. Educación matemática*, (pp.25). México, Educación Matemática.

Block, D., & Dávila, M. (1995). *La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros*. (pp. 18-22). México, Educación Matemática.

Broitman, C. (2011). *Estrategias de cálculo con números naturales: Segundo ciclo*. Buenos Aires : Santillana.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, G., Montoya, S. y Soto-Andrade, J.(2011). *Estrategias cognitivas para el cálculo* *mental*. (pp. 11). Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en linea].

García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa.* México: INEE.

Lezama, F. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas. (Tesis de doctorado).* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa. México.

Lethielleux, C. (2005). *Le calcul mental au cycle des apprentissagesfondamentaux* (tome 1). Paris, France: Bordas/Sejer.

Mochón, S.. (1995). *Cálculo mental y estimación: métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza.* (pp. 7-93) Educación matemática,

Reys, B. (1986). *Teaching Computational Estimation: Concepts and Strategies*. *H. Shoen y M. Zweng, Estimation and Mental Computation, Yearbook, Iowa, NCTM*. (pp. 31-44).

Reys, R., Rybolt, J., Bestgen, B., Wendell, J. (1982). *Processes used by good estimators. Journal for Research in Mathematics Education,* (pp.13; 183 – 188).

Sancha, I. (2016). *Escrituras en las clases de matemática para explicitar, reorganizar y sistematizar lo aprendido: análisis de una secuencia.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de La Plata, La Plata.

Secretaría de Educación Pública. (2015). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2016). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2016). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (2006). *Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza. Coordinado por Susana Wolman.* Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Segovia, I., & Castro, E. (2009). *La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas.* (pp.499-536) Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Electronic Journal of Research in Educational Psychology,.

Segovia, I., & De Castro, C. (2007). *La Investigación en Estimación en Cálculo.* Obtenido de E-Prints Universidad Complutense Madrid: http://eprints.ucm.es/12834/1/Segovia_y_De_Castro_2007.pdf

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Stauffer, I. (2017). *Cálculo estimativo en quinto grado de la escuela primaria. Implementación de una secuencia didáctica. (Tesis de maestría*). Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Wolman, S. (2006). *Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza.* Buenos Aires: Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

ANEXOS

Anexo A. Carta de autorización de padres de familia o tutores del grupo de sexto grado.

Querétaro, Qro, 26 de septiembre de 2017.

Autorización de videograbación de la Implementación de la secuencia didáctica de cálculo estimativo

Yo, Sr. / Sra. (nombre completo) ____ acepto que mi hijo (a) (nombre completo del alumno) ____ participe en la videograbación de las 10 sesiones de la implementación de la secuencia didáctica de cálculo estimativo en problemas multiplicativos que se realizará en el grupo de sexto grado de la escuela "Mariano Matamoros", investigación llevada a cabo por la Lic. Ariadna Ramírez Dorantes estudiante de la Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro. Con la única condición de que el material obtenido sea utilizado con fines académicos y estrictamente confidenciales.

____

Firma y nombre completo del padre de familia /tutor.