Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Propuesta didáctica para la enseñanza y evaluación del álgebra desde la perspectiva de la teoría APOE

Opción de titulación
Tesis o Publicación de artículos

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:
Daniela Hernández Jaramillo

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio

Dr. Víctor Larios Osorio Presidente	Firma
M.P. Juan Manuel González González Secretario	Firma
Dra. Marcela Cecilia Parraguez González Vocal	Firma
Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez Suplente	Firma
M.D.M. Telésforo Sol Campuzano Suplente	Firma

Dr. Manuel Toledano Ayala Director de la Facultad	Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña Directora de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Marzo, 2018

RESUMEN

Usando la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), desarrollada por el Dr. Ed Dubinsky y sus colaboradores con base en las ideas constructivistas propuestas por Piaget, como marco teórico y metodológico, el presente trabajo de tesis expone el diseño y validación de cuatro descomposiciones genéticas como parte de un proyecto para desarrollar una propuesta didáctica para la enseñanza y evaluación del álgebra a nivel bachillerato (estudiantes entre 15 y 18 años) en México. El trabajo se enfoca en los sistemas de ecuaciones lineales y sus conjuntos solución. La primera parte de la metodología de trabajo consiste en un análisis teórico de cuatro métodos algebraicos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales: método de Cramer, método de reducción, método de sustitución y método de igualación. Dicho análisis teórico lleva al diseño de cuatro descomposiciones genéticas hipotéticas donde se describe el camino que se espera que los estudiantes sigan para la construcción de los conceptos de solución única, solución vacía y soluciones infinitas. Posteriormente, dentro de la metodología, se describe el diseño de una serie de cuestionarios cuyo objetivo es validar lo propuesto en las descomposiciones genéticas y, finalmente el proceso de aplicación de dichos instrumentos y el análisis de los resultados obtenidos. Los instrumentos se aplicaron a un grupo de estudiantes de tercer semestre de un bachillerato perteneciente a la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro. Al analizar los datos obtenidos de los cuestionarios se llega a dos interesantes conclusiones. La primera es acerca de las deficiencias que presentan los estudiantes en cuanto a conocimientos previos, y la segunda es que es necesario llevar de la mano la parte algebraica y la parte geométrica para facilitar a los estudiantes el aprendizaje de los conceptos de interés.

(Palabras clave: álgebra, descomposición genética, sistema de ecuaciones lineales, teoría APOE)

SUMMARY

Using APOS (Actions, Process, Objects and Schemes) theory, developed by Dr. Ed Dubinsky and his collaborators based on the constructivist ideas proposed by Piaget, as a theoretical and methodological framework, the present research paper exposes the design and validation of four genetic decompositions as part of a project to develop a didactic proposal for the teaching and evaluating of algebra at high school (students between 15 and 18 years old) level in Mexico. The paper focuses on linear equation systems and their solution sets. The first part of the methodology consists on a theoretical analysis of four algebraic methods for solving linear equation systems: Cramer's rule, elimination method, substitution method and equalization method. This theoretical analysis leads to the design of four hypothetical genetic decompositions, where the path that students are expected to follow in order to construct the concepts of single solution, empty solution and infinite solutions is described. Subsequently, within the methodology two phases are described; the design of a series of questionnaires whose objective is to validate what is proposed in the genetic decompositions, and finally, the process of applications of said questionnaires and the analysis of the collected data. The questionnaires where applied to a group of students on the third semester of a high school that belongs to the Universidad Autónoma de Querétaro. By analyzing the data collected from the questionnaires two interesting conclusions can be found. The first one is about the deficiencies that student present in terms of prior knowledge, and the second one is that, it is necessary to work with the algebraic and the geometrical interpretations at the same time, in order to make it easier for students to learn the concepts of interest of this work.

(Key words: algebra, genetic decomposition, linear equation systems, APOS theory)

Dedicado a mi gran héroe, mi mamá. A mi gran amor, Alfonso. A mis pequeñas inspiraciones, Iker y Valentina.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por su constante apoyo para el financiamiento de mis estudios, que culminarían en este proyecto. También agradezco porque sin su apoyo me habría sido imposible realizar la estancia de investigación que permitió enriquecer enormemente mi mente y mi proyecto. Igualmente agradezco a la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), en especial a la Facultad de Ingeniería, por el apoyo académico, económico y humano que me brindaron en todo momento. A la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) en Chile, por recibirme con los brazos abiertos para realizar mi estancia académica, por brindarme todo el apoyo en lo escolar y todo el calor humano que un mexicano en Chile puede necesitar.

Agradezco a cada uno de los profesores que formaron parte de mis dos años como estudiante de posgrado, por compartir conmigo su conocimiento, su experiencia dentro y fuera de las aulas y por hacer de mí una mejor persona y profesionista.

Un especial agradecimiento al Dr. Víctor Larios Osorio, director del proyecto, por estar siempre presente detrás de las cortinas para guiarme. Por escucharme divagar, por motivarme a salir de mi burbuja y por siempre tener el comentario adecuado. Al Maestro Juan Manuel González González por aceptar codirigir el proyecto, por enseñarme tanto y dejar al proyecto crecer. A la Doctora Angélica Rosario Jiménez Sánchez y al Maestro Telésforo Sol Campuzano por sus invaluables aportaciones.

A la Doctora Marcela Cecilia Parraguez González le agradezco infinitamente me haya aceptado como su invitada y protegida en su amada universidad. Sepa que sin su guía, sin sus comentarios, sin su calor humano y sin su sabiduría este proyecto no sería ni la mitad de lo que es ahora. Y gracias por incitarme a conocer Concón.

Agradezco a mis compañeros de maestría, después de dos años a su lado me siento más su amiga que compañera, gracias por las charlas filosóficas y por las risas, tan necesarias en ocasiones. A mis amigas y familia en Culiacán, gracias porque a pesar de la distancia jamás me han dejado sola. A mi novio, Alfonso, gracias infinitas por ser mi mejor amigo, mi motor, asesor, revisor, compañero de viajes y aventuras. Por escuchar mis dudas, quejas e ideas brillantes y no tan brillantes. Por inspirarme a seguir y a ser mejor cada día.

A mi hermano Rafael, gracias porque sin ti no sería tan fuerte como lo soy hoy. A ti y a Eva, gracias por darme uno de los mejores motivos para salir adelante, mi sobrino Iker. A mi papá, Jesús, gracias por ser y por estar a mi lado desde el primer día que te conocí.

Finalmente, y más importante, gracias a ti madre, Lorena. Mi primer, gran y eterno amor. Gracias por darme los cimientos para ser lo que soy ahora, por dejarme volar lejos del nido para seguir creciendo, por ser madre, padre y mejor amiga a la vez, por enseñarme lo que es el amor incondicional, y por ser el mejor ejemplo de lo que un profesor debe ser y hacer.

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Basándose en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) desarrollada por el Dr. Ed Dubinsky y sus colaboradores, este trabajo de tesis aborda el camino que se siguió para diseñar cuatro descomposiciones genéticas distintas.

El objetivo de dichas descomposiciones es describir como un estudiante, de primer semestre de bachillerato en México, construye los conceptos de solución única, solución vacía y soluciones infinitas para sistemas de ecuaciones lineales, al trabajar con cuatro distintos métodos de resolución: Cramer, reducción, sustitución e igualación.

El primer capítulo del trabajo, antecedentes, resume algunas de las investigaciones recientes (últimas dos décadas) que aportaron algo al desarrollo de este trabajo. Investigaciones relacionadas con el álgebra y los sistemas de ecuaciones lineales, abordadas desde distintos marcos teóricos y metodológicos, e investigaciones sobre álgebra realizadas bajo el marco teórico y metodológico de la teoría APOE.

En el segundo capítulo se describe la problemática que hizo surgir la idea para este trabajo, tomando en cuenta principalmente, estudios que resaltan la importancia del álgebra en la formación de los estudiantes, así como algunas estadísticas de las pruebas internacionales PISA, donde se evidencian los huecos en la formación matemática de los estudiantes mexicanos. En este mismo capítulo se plantean los objetivos generales y particulares que se busca alcanzar con este trabajo.

El capítulo tres aborda el marco teórico en base al cual se realizó este trabajo, la teoría APOE. Para entender mejor el marco teórico, en primer lugar se da un esbozo general de cómo es que el Dr. Ed Dubinsky y sus colaboradores propusieron la teoría APOE en base al concepto de abstracción reflexiva de Piaget. Después, se abordan las componentes que conforman esta teoría: las construcciones y mecanismos mentales, explicando qué es cada una de ellas y cómo es que un mecanismo mental permite llegar de una construcción a otra.

Finalmente, en este capítulo se explica el ciclo de investigación de la teoría APOE, abordando lo que es la descomposición genética o análisis teórico, el diseño y aplicación de las secuencias de enseñanza y la metodología para el análisis y recolección de datos, siendo el primero, análisis teórico, y el último, recolección y análisis de datos, los dos elementos más importantes de este trabajo de tesis.

El capítulo cuatro, metodología, se divide en tres apartados. En el primero de ellos se describe el objeto matemático con el objetivo de facilitar al lector la comprensión de la segunda parte del capítulo, el análisis teórico. En esta segunda parte, se lleva al lector paso a paso por el diseño de las descomposiciones genéticas, iniciando por el método de Cramer y continuando con los métodos de reducción, igualación y sustitución. En la tercera parte del capítulo se presentan los instrumentos diseñados para la validación de las descomposiciones genéticas, es decir para la recolección y análisis de datos, acompañados de su análisis a priori, donde se explica la finalidad de cada instrumento y la información que se espera recolectar al aplicarlos.

El objetivo del capítulo cinco es, precisamente, mostrar la información recolectada durante la aplicación de los instrumentos. Para ello se explica el contexto en el que se aplicaron los instrumentos, se presentan las respuestas dadas por los estudiantes, y se analiza lo que estas implican en términos de construcciones mentales. Todo esto se hace con base en el análisis a priori de los instrumentos, mostrado en el capítulo cuatro.

El capítulo seis se presentan algunos ejercicios y su evaluación propuesta. El objetivo del capítulo es mostrar como algunos de los ejercicios utilizados para la validación de las descomposiciones genéticas podrían ser utilizados durante la instrucción de los temas de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales.

Finalmente en el capítulo nueve se expondrán las conclusiones a las que se llegó en el desarrollo de este trabajo. Estas conclusiones incluyen un breve análisis de como los resultados obtenidos al aplicar los instrumentos afectan a las descomposiciones genéticas propuestas en el capítulo cuatro. También se hablará acerca de las preguntas que surgen a partir de este trabajo y se concluirá respecto al cumplimiento de los objetivos planteados en el capítulo dos.

CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES

En esta sección se presentarán algunos trabajos de investigación que se han realizado previamente, y que guardan alguna relación con el trabajo de tesis a desarrollar. En la primera sección se presentan trabajos que hablan acerca de la importancia de la enseñanza y aprendizaje del álgebra. En la segunda sección se presentan trabajos que hablan sobre sistemas de ecuaciones lineales. Finalmente, en la tercera sección se abordan trabajos que utilizan la teoría APOE como marco teórico y metodológico para realizar investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

1.1. Investigaciones relacionadas con el álgebra

Diversas investigaciones en educación matemática señalan al álgebra como un elemento esencial en el desarrollo de estructuras de pensamiento lógico y racional que el estudiante necesitará fuera del contexto escolar. Por ejemplo, Sánchez y Serna (2013) señalan que el aprendizaje del álgebra genera un desarrollo en el estudiante, que permite la activación de procesos mentales que no podrían desarrollarse por sí mismos. También señalan que el álgebra está presente en innumerables formas, una de ellas serían las palabras, consideradas como una generalización, incluso nos dicen: “Cada una tiene un significado en específico, por lo tanto la palabra es un acto verbal del pensamiento, así como el álgebra es el acto escrito que ayuda a la generalización y a la resolución de problemas en matemáticas” (p. 97).

Hace más de veinte años se realizan investigaciones para integrar el álgebra al currículo de la educación básica (Molina, 2009). Esta corriente recibe el nombre de *Early-Algebra* y propone introducir modos de pensamiento algebraicos, desde los primeros años de la educación básica. Estos modos de pensamiento, explica Molina, consisten en “proponer la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas” (p. 136).

Todo esto con la finalidad de facilitar al aprendizaje del álgebra. Para ello, el *early-algebra* considera al álgebra como un concepto amplio que engloba el estudio de relaciones funcionales y numéricas, de patrones, de estructuras, la formalización de generalizaciones, modelización, entre otras cosas.

Como puede observarse, las investigaciones referentes a la enseñanza y aprendizaje del álgebra en las últimas dos décadas, son numerosas y apuntan a diversos aspectos. Algunas, como la del Ruano, Socas y Palarea (2008) y la de Socas (2008) se enfocan en tratar de explicar las dificultades que los estudiantes presentan en el aprendizaje del álgebra, atribuyéndolas a una pobre o mala formación en el aritmética. Uno de los enfoques del grupo de trabajo de investigadores en álgebra del *International Group of the Psychology of Mathematics Education* es el análisis de las transición que los estudiantes hacen del aritmética al álgebra (Kieran, 2006) (Socas, 2011).

Otras como la de Carraher y Schliemann (2007) (citado de Socas, 2011), retomado en Molina (2009) apuntan a facilitar el aprendizaje del álgebra a través de la introducción temprana a algunas de sus temáticas a través de la propuesta del *early algebra*.

Algunas aportaciones interesantes, como la de Papini (2003) tratan de explicar situaciones referentes a la enseñanza y aprendizaje del algebra desde el punto de vista vigotskiano, describiendo el funcionamiento del álgebra desde cuatro líneas: el álgebra como una actividad modelizadora, el lenguaje simbólico como herramienta en la actividad modelizadora, la generalización como un instrumento del pensamiento y, la relación entre la actividad modelizadora y el aprendizaje.

Cabe resaltar que todas estas investigaciones corresponden a los últimos 20 años de investigación, sin embargo, es posible encontrar investigaciones en la enseñanza del álgebra con hasta treinta años de antigüedad.

Con eso queda claro que el campo de investigación que se puede dedicar al álgebra en la matemática educativa es muy vasto, tanto que los últimos 30 años de investigación no han bastado, y que las corrientes que persiguen estas investigaciones son diversas, manejando distintos puntos de vista y distintos objetivos de investigación.

1.2. Investigaciones relacionadas con sistemas de ecuaciones lineales

Dentro de las investigaciones de matemática educativa dedicadas al álgebra, se pueden encontrar trabajos enfocados en los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se presentan algunos de ellos para brindar una idea muy general de las líneas de investigación que los abordan y los objetivos que se persiguen.

Segura de Herrero (2004) presenta una secuencia didáctica para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y su conjunto solución utilizando la teoría semiótica de Duval como marco teórico y la ingeniería didáctica como marco metodológico, sin embargo la autora señala el uso de diversas teorías e investigaciones para el diseño de la secuencias. Dicha secuencia es aplicada a estudiantes de 15 años que cursan el tercer año de enseñanza media en el sistema escolar argentino de un instituto privado. La autora concluye que con la secuencia didáctica "se logró desarrollar en la alumna comportamientos matemáticos y cognitivos que no sólo le sirvieron para que asimilara estos objetos, sino también que hay otra forma de aprender." (p. 74).

Figueroa (2013) presenta en su tesis para obtener el grado de maestría, la elaboración, aplicación y análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales en alumnos de cuarto año de secundaria en Perú. La secuencia fue diseñada bajo el marco teórico de la teoría de situaciones didácticas de Brosseau y como marco metodológico la ingeniería didáctica, para el análisis de los resultados obtenidos se empleó la teoría semiótica de Duval, además del uso del software GeoGebra para el diseño y aplicación de ejercicios a los estudiantes.

Ochoviet (2009) en su tesis doctoral, diseña una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas a alumnos uruguayos de entre 14 y 15 años de edad.

Su trabajo se basa en los modos de pensamiento de Sierpinska. Ochoviet considera que al trabajar con distintos modos de pensamiento, los alumnos desarrollan un mejor entendimiento del concepto y concluye que para la enseñanza del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, no se debería restringir al ámbito de los sistemas de dos ecuaciones.

1.3. Investigaciones realizadas en el marco teórico APOE sobre el álgebra

La teoría APOE (acciones, procesos objetos y esquemas), adaptada por el Dr. Ed Dubinsky de las ideas constructivistas de Piaget, es un marco de referencia en base al cual, desde hace más de dos décadas, se realizan investigaciones para analizar la enseñanza y aprendizaje de diversas áreas de las matemáticas. Dubinsky señala que en el proceso de enseñanza de las matemáticas no deben evitarse los aspectos abstractos y formales de los conceptos, siendo estos la esencia de la misma, sino que es necesario brindar a los estudiantes experiencias agradables cuando se inician en el estudio de dichos conceptos (Oktaç y Trigueros, 2010).

Al hacer una búsqueda de trabajos de investigación relacionados con el álgebra, cuyo marco teórico y metodológico sea la teoría APOE, se encuentra que las aportaciones se centran en el álgebra lineal, en conceptos como espacio vectorial, transformación lineal, base, etc., y que son relativamente recientes (Parraguez, 2011).

En estos trabajos se ha encontrado que el ciclo de investigación de la teoría APOE, que como señala Parraguez (2011) consta de tres etapas: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de secuencia de enseñanza y recolección y análisis de datos, es una herramienta poderosa para explicar los problemas que tienen los estudiantes en comprender los conceptos abstractos del álgebra lineal.

En Roa-Fuentes y Oktaç (2010) se describe el diseño de una descomposición genética sobre el concepto de transformación lineal, es decir, los autores se centran en la primera etapa del ciclo de investigación con APOE.

El trabajo describe dos caminos distintos para la construcción del concepto, mostrando así el hecho de que una descomposición genética no es única, además las autoras describen las dificultades encontradas para el diseño de la descomposición.

En Roa-Fuentes y Oktaç (2012) se retoma la descomposición genética elaborada por los autores para el concepto de transformación lineal, y se completa el ciclo de investigación de APOE. El trabajo presenta una descripción detallada de cómo validar la descomposición genética propuesta. Los autores plantean el diseño de los instrumentos que se aplicaron con base en el análisis teórico preliminar, haciendo énfasis en la importancia de analizar previamente los instrumentos a aplicar.

Parraguez (2011) utiliza la teoría APOE como marco teórico y metodológico para intentar explicar cómo los estudiantes construyen el concepto de combinación lineal de vectores. La investigación se centra en un grupo de estudiantes de nivel licenciatura de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Para ello se propone un análisis teórico del concepto que lleva a la construcción de una descomposición genética y se aplican cuestionarios y entrevistas a los estudiantes, con la finalidad de determinar si el análisis teórico propuesto se apega a las construcciones mentales que los estudiantes realizan. Entre los resultados arrojados, destaca que en los estudiantes existe una descoordinación del concepto matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales y el concepto suma de vectores y multiplicación por escalar.

También Parraguez (2013) realiza una investigación en la que se explica la construcción del concepto de espacio vectorial desde el marco de referencia de la teoría APOE, considerando particularmente la importancia que juega el campo en esta construcción. El trabajo presentado incluye las tres etapas del ciclo de investigación con APOE: análisis teórico (descomposición genética), diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de datos.

De igual forma en un trabajo de Parraguez y un grupo de colegas (Trigueros, Maturana, Parraguez, y Rodríguez, 2015) podemos encontrar una investigación acerca de los mecanismos y construcciones mentales que un estudiante necesita desarrollar para la construcción de una Matriz Asociada a una Transformación Lineal (MATL). El trabajo de investigación consideró un grupo de 18 estudiantes de tres universidades chilenas distintas, adscritos a carreras de pedagogía en matemáticas. Los autores desarrollaron una descomposición genética del concepto de MATL además de instrumentos que les permitieran documentar en los estudiantes, los constructos previstos en la descomposición genética. Estos instrumentos les permitieron hacer un análisis de la manera en que los estudiantes aprenden dicho concepto y las dificultades que encuentran para construirlo como un objeto.

Salgado y Trigueros (2014) hablan de la dificultad del aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal debido a su alto nivel de abstracción. En particular reportan los resultados obtenidos de una investigación acerca del aprendizaje de los conceptos de valores, vectores y espacios propios en un curso cuyo diseño didáctico está basado en la teoría APOE. El trabajo reporta una descomposición genética del concepto matemático de interés diseñado por las autoras, también el diseño e implementación de métodos de enseñanza basados en la descomposición genética diseñada, así como la recolección y análisis de datos que les permitieron validar la descomposición genética diseñada. Los instrumentos se aplicaron durante cinco semestres a estudiantes que cursaban la materia de álgebra lineal en la carrera de Licenciatura en Economía. La investigación dejo claro que, los conocimientos previos, fueron indispensables para la construcción de los conceptos buscados por las autoras, destacando que es necesaria un estado de construcción proceso de los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución para poder realizar la interiorización de las acciones que se necesitan para construir los conceptos de valores, vectores y espacios propios.

Trigueros, Oktaç y Manzanero (2007) presentan un estudio enfocado en alumnos que tomaron un curso de algebra lineal diseñado con base en el marco teórico APOE. El curso no incluía el tema de sistemas de ecuaciones lineales de forma explícita, sin embargo las autoras esperaban observar la evolución de este concepto a través del curso, dada la necesidad de aplicarlo en otros temas. Para estudiar el entendimiento del concepto de sistemas de ecuaciones lineales y las dificultades que los estudiantes presentan en su aprendizaje, se diseñó una posible descomposición genética del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Para las autoras, en el contexto del álgebra lineal, los estudiantes deben conocer los conceptos de conjunto, función, igualdad y espacio vectorial antes de trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales. El trabajo concluye que la falta de ciertos conocimientos previos, que incluyen un buen manejo algebraico, impide que los estudiantes involucrados en el estudio, construyan los nuevos conceptos abstractos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales. Los estudiantes que mostraron un buen entendimiento del álgebra elemental, demostraron una evolución en las construcciones relacionadas al esquema de sistema de ecuaciones, sin embargo, los resultados obtenidos al aplicar el curso basado en la metodología de enseñanza de APOE no fueron tan satisfactorios como las autoras esperaban, al menos con respecto al concepto de sistemas de ecuaciones.

Oktaç y Trigueros (2010) toman como base los materiales de enseñanza diseñados por RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), un grupo que se dedica a hacer investigación en matemática educativa utilizando la teoría APOE, para realizar un análisis teórico de los conceptos involucrados en la enseñanza del álgebra lineal y, en base a dicho análisis, realizar sugerencias didácticas, trabajando con conceptos como espacio vectorial, transformación lineal y sistemas de ecuaciones lineales. Dentro de los conceptos analizados se encuentra el de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Oktaç y Trigueros (2010) señalan que este es un concepto de suma importancia, no solo para la comprensión de otros conceptos del álgebra lineal, sino también para otras áreas de las matemáticas.

Para el análisis de este concepto, los autores diseñaron y validaron una descomposición genética que les permitió modelar la posible construcción de estos conceptos, y así identificar algunas de las dificultades que los estudiantes presentan cuando estudian estos conceptos. Entre los resultados interesantes arrojados por la validación, encontraron que para llegar a la construcción del sistema de ecuaciones lineales como esquema, resulta indispensable la previa construcción de un esquema de variable, que incluya sus usos, diferenciación e interpretación, así como la construcción del concepto de solución de una ecuación.

Como puede verse, los sistemas de ecuaciones lineales también han sido explorados desde loa perspectiva de la teoría APOE, aunque las investigaciones apuntan a una visión en donde los sistemas son la base para el estudio de otros tópicos en álgebra lineal.

CAPÍTULO 2: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Justificación

En educación matemática existe un número muy amplio de teorías que intentar explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan cuando el estudiante, el profesor, las matemáticas y otros elementos interactúan. Entre estas teorías existen algunas que defienden la idea de que las matemáticas van más allá de una serie de conceptos y formulas. Entre ellas, por ejemplo, la visión socio crítica de Skovsmose quien señala que las matemáticas representan un conjunto de prácticas sociales que influyen grandemente en la formación de los futuros ciudadanos (Skovsmose, 1985).

Por otro lado, como señalan Alsina y Domingo (2010) algunas reinterpretaciones de los trabajos de Vygotsky, desde el punto de vista de la educación matemática, apuntan a que el estudiante construye los conceptos en un contexto social y cultural a través del diálogo, la interacción y la negociación.

Lo anterior implica que, en la enseñanza de las matemáticas, los profesores e investigadores deben apuntar a ayudar a los estudiantes en el desarrollo de una capacidad de análisis y crítica que les permita contribuir a la toma de decisiones informadas dentro del contexto social al que pertenecen, apoyándose de una constante interacción con sus pares. Dentro de todo este rol de suma importancia para la formación de los estudiantes, el álgebra destaca por ser una de las ramas de las matemáticas con mayor presencia, al menos en el sistema educativo mexicano. Basta revisar los planes y programas de estudio de nivel básico y medio superior para observar la presencia del álgebra.

En el caso de los planes de estudio para educación secundaria (SEP, 2017), estudiantes entre 12 y 15 años, los tres años de estudio consideran tópicos de álgebra, geometría y análisis de datos. Para el caso de bachillerato (SEP, 2013), estudiantes entre 15 y 18 años, se dedica la totalidad del primer semestre para el álgebra, repasando temas vistos en secundaria e introduciendo nuevos temas.

También a nivel internacional el álgebra es considerada como uno de los temas de mayor importancia. Un ejemplo de ello es el reporte presentado por el Departamento de Educación de los Estados Unidos, *Foundations for succes: The final report of The National Mathematics Advisory Panel* (2008). Este reporte señala diversas dificultades que los estudiantes enfrentan en su formación matemática, sin embargo, recalca que las políticas educaciones del país ven al álgebra como una de sus preocupaciones principales. Esto se basa en una consideración de que los conocimientos adquiridos durante los cursos de álgebra serán necesarios para los cursos que el estudiante deba enfrentar más adelante. Además, resultados de investigaciones incluidas en este reporte, han encontrado una fuerte relación entre el éxito de los estudiantes para completar los cursos de álgebra a nivel bachillerato, y el éxito que tendrán a nivel licenciatura así como el nivel de ingresos que podrán alcanzar una ver que se adentren en la vida laboral.

El álgebra representa una herramienta indispensable para el desarrollo del pensamiento lógico matemático, además de servir como conocimiento base para el estudio de otras ramas de la matemática (cálculo, geometría, probabilidad, etc). Para Sánchez y Serna (2013) el aprendizaje del álgebra implica el desarrollo de estructuras mentales superiores en el alumno, es así que consideran que el aprendizaje del álgebra ayuda al estudiante a desarrollar procesos y estructuras mentales que no podrían desarrollarse por sí mismas.

Por lo anterior es que se decidió enfocar este trabajo de tesis en la enseñanza del álgebra, siendo esta la primera materia de matemáticas que los estudiantes cursan al ingresar a la educación media superior. El trabajo se enfoca en la resolución de ecuaciones de primer grado, al considerarse este uno de los temas claves del curso, pues como lo mencionan Salgado y Trigueros (2014) y Oktaç y Trigueros (2010), este tema resulta un conocimiento previo esencial cuando se trabaja con tópicos más avanzados de algebra lineal, es decir, tópicos a los que la mayoría de los estudiantes de enfrentaran tanto a nivel medio superior como a nivel licenciatura.

2.2 Descripción del problema

Reconocer la importancia de la educación matemática, y del álgebra en particular, en la formación de los estudiantes no parece ser suficiente para obtener los aprendizajes esperados. Como un ejemplo de esto tenemos los resultados de las pruebas estandarizas PISA aplicadas a estudiantes mexicanos.

Recordemos que las pruebas PISA evalúan una serie de competencias que se espera que los estudiantes posean al término de la educación básica y realiza una comparación entre los sistemas educativos de los distintos países adscritos a la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). Estas competencias van enfocadas a tres dominios principales: lectura, ciencias y matemáticas.

En el dominio matemático el objetivo es evaluar si los estudiantes han adquirido la competencia de *alfabetización matemática,* la cual Salas (2012) define como “la capacidad de las y los jóvenes para analizar, razonar, modelar, argumentar y comunicarse eficazmente cuando se enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en diferentes contextos y situaciones" (p. 3).

La evaluación PISA se aplica cada tres años y en cada aplicación, se hace énfasis en alguna de las tres áreas mencionadas. En los años 2003 y 2012 el énfasis estuvo en el dominio matemático. De los resultados publicados por la OCDE (2013) sobre las pruebas PISA 2012 aplicadas a estudiantes mexicanos, tenemos que menos del 55% de dichos estudiantes alcanzan en nivel de competencias básicas en matemáticas, además que nuestra media (413 puntos) queda 81 puntos por debajo de la media de la OCDE, lo que equivale a un rezago escolar de dos años, es decir, nuestros estudiantes de 15 años (primer año de educación media superior o último año de educación básica) presentan un nivel educativo equivalente al primer año de educación secundaria.

Es necesario tomar acciones encaminadas a subsanar estas deficiencias que vayan más allá de obtener mayores puntajes en las pruebas y evaluaciones, PISA por ejemplo, y que apunten a generar aprendizajes significativos y duraderos en los estudiantes. Dichas acciones, además de hacer énfasis en el proceso de aprendizaje del estudiante, deben permear también en la manera en que los estudiantes son evaluados.

2.3 Objetivos

Como parte inicial de este proyecto se desarrolló un protocolo de tesis en el cual, entre otras cosas, se incluían objetivos generales y particulares para el trabajo. Entre estos objetivos destaca el diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza y evaluación del álgebra a nivel bachillerato, utilizando la teoría APOE como marco teórico y metodológico. Sin embargo, derivado de una estancia de investigación y de los trabajos y lecturas realizados durante ella, se encontró que la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE obligaba a replantear los objetivos originales propuestos en el protocolo, por lo que a continuación, se plantean los nuevos objetivos.

El objetivo principal de este trabajo de investigación es el diseño y validación de cuatro descomposiciones genéticas correspondientes a cuatro métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales cuadrados, estudiados por alumnos de primer semestre de bachillerato en México, alumnos de entre 15 y 16 años. Para la validación de las descomposiciones, se diseñarán instrumentos de evaluación, se aplicarán y los datos obtenidos de las aplicaciones serán analizados para determinar si las descomposiciones genéticas se validan o se refinan.

Como objetivo particular se busca ofrecer al lector, profesor o investigador, ejercicios propuestos para trabajar con sistemas de ecuaciones lineales cuadrados. Estos ejercicios estarán acompañados de rúbricas sugeridas para su evaluación. Ambos objetivos serán trabajados utilizando la teoría APOE como marco teórico y metodológico.

CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO

3.1 Primera aproximación: del constructivismo piagetiano a la teoría APOE

De acuerdo con Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky y Mathews, (1997) las ideas aportadas por Piaget comenzaron a influir en la investigación en matemática educativa, a principios de la década de los ochentas, para cambiar de métodos de investigación cuantitativos a métodos cualitativos. Esto llevo a Dubinsky y sus colaboradores a conformar un grupo informal de investigadores, nombrado *RUMEC: Research in Undergraduate Mathematics Education Community*, con la finalidad de investigar y desarrollar un marco de referencia que les permitiera mejor el entendimiento acerca de cómo se aprenden las matemáticas y desarrollar una pedagogía, respaldada por la teoría, para enseñar matemáticas a nivel pregrado.

Meel (2003) señala que las ideas de Dubinsky para el desarrollo de este marco de referencia, que posteriormente sería llamado APOS Theory, o APOE por sus siglas en español (acciones, procesos, objetos y esquemas), surgieron a partir del concepto de abstracción reflexiva propuesto por Piaget. Este concepto buscaba explicar cómo es que los niños desarrollan el pensamiento lógico- matemático y Dubinsky lo extendería a nociones matemáticas superiores. Así, Dubinsky utiliza el concepto de abstracción reflexiva para intentar explicar cómo el individuo realiza ciertas construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado.

Piaget divide la definición de abstracción reflexiva en dos partes. La primera habla acerca de la reflexión en el sentido de un pensamiento consciente y contemplativo y en el sentido de una reflexión de los contenidos y operaciones. La segunda parte habla acerca de la reconstrucción y reorganización de los contenidos y operaciones, de tal manera que las operaciones se conviertan en contenidos por sí mismas, contenidos a los cuales se les puedan aplicar nuevas operaciones (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014). Dubinsky encontró que esta segunda parte describía un fenómeno que era similar a ciertas ideas matemáticas (Dubinsky et al., 2014).

Además, Piaget identificó tres tipos de abstracciones: *empírica, pseudoempírica y reflexiva,* definiendo que la reflexiva dependía de las dos anteriores, pues la empírica "le permite al individuo abstraer propiedades comunes de varios objetos y realizar acciones sobre ellos, a través de la interiorización y coordinación de las acciones en nuevas y crear nuevos objetos" (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, p. 92). Es decir, cuando al individuo se le plantea una situación problema matemática, debe recurrir a los conocimientos previos que posee y hacer una reestructuración de los mismos a partir de la reflexión sobre la nueva situación problema a la que se está enfrentando. De esta manera, las estructuras que el individuo posea previamente, serán clave en la construcción de un nuevo concepto.

3.2 Los elementos de la teoría APOE: construcciones y mecanismos mentales

De los trabajos de investigación realizados por Dubinsky y sus colaboradores de la RUMEC surgió el marco de referencia conocido como APOS: actions, process, objects, scheme. En la literatura en español, este marco es conocido como la teoría APOE por su traducción directa del inglés. Como se mencionó, APOE es una teoría constructivista basada en las aportaciones de Piaget. Dubinsky, creador de la teoría APOE utiliza las ideas de Piaget para describir como un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008). Para Piaget, el entendimiento de los conceptos tiene su origen en la manipulación de objetos físicos. En el caso de las matemáticas, conforme el nivel de estas aumenta, se vuelve necesario construir nuevos objetos, que ya no podrán ser físicos si no que tendrán que ser mentales y que deberán ser manipulados para poder construir las ideas matemáticas (Dubinsky, 1996). Dubinsky (1996) menciona:

> *El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones*. (p. 32 – 33)

En esta reflexión se mencionan las construcciones mentales acción, proceso, objeto y esquema. Según Dubinsky (1996) estas construcciones se dan en forma espontánea, hasta cierto punto, siempre y cuando el sujeto, en este caso el estudiante, esté bajo la presencia de experiencias apropiadas. Estas construcciones surgen a partir de la abstracción reflexiva, la cual, en el caso de la teoría APOE consiste en ciertos mecanismos mentales, como lo son la interiorización, encapsulación, coordinación, desencapsulación, reversión y tematización.

Según Dubinsky et al. (2014) una construcción o estructura mental en el marco de la teoría APOE, es considerado como una etapa en el aprendizaje de un concepto matemático, la cual es utilizada por el individuo, en este caso el estudiante, para dar sentido del concepto matemático que se está construyendo. Es importante resaltar que estas construcciones no se dan necesariamente de manera lineal, pues la construcción del conocimiento matemático no es lineal.

Para que estas construcciones mentales surjan es necesaria la abstracción reflexiva, la cual en el caso de la teoría APOE implica ciertos mecanismos mentales. En las siguientes secciones se describirán las cuatro construcciones mentales consideradas en la teoría APOE, así como los mecanismos mentales que llevan a su construcción.

3.2.1 Acciones

La más simple de las construcciones es la acción. Barbosa (2003) define la acción como una transformación que el individuo realiza a un objeto matemático que posee previamente. Dicha transformación es algorítmica es decir, el estudiante realiza la transformación a través de una serie de pasos a seguir, generalmente estimulado por un agente externo. Dentro de la acción se realizan manipulaciones repetibles que transforman un objeto en otro objeto, dichas manipulaciones pueden ser físicas o mentales. Se dice que la acción es una construcción externa, en el sentido de que cada paso de la transformación debe ser realizado explícitamente guiado por instrucciones externas al individuo.

Además, cada paso indica el siguiente y el individuo no se encuentra en condiciones de saltarse o imaginarse pasos (Dubinsky et al., 2014). Aunque la acción es la más simple de las construcciones, resulta fundamental en la construcción de las siguientes estructuras.

3.2.2 Procesos, interiorización, coordinación y reversión

De acuerdo con Dubinsky et al. (2014) existen dos mecanismos mentales a través de los cuales puede surgir un proceso, el primero de ellos es el de interiorización y el segundo el de coordinación.

Una vez que el individuo comienza a repetir la acción y a reflexionar sobre ella sin realizarla de manera explícita, se llega a la interiorización de la misma, es decir, el estudiante construye la acción en su mente y es capaz de reflexionar acerca del objeto matemático sin tener que manipularlo de manera específica. Cuando el estudiante llega a este punto se dice que está en el estado de construcción proceso. Un proceso es una construcción mental que realiza la misma transformación que la acción, pero completamente en la mente del individuo, lo cual le permite al individuo imaginar los pasos a seguir en la transformación, sin necesidad de realizarlos todos de manera explícita, pudiéndose saltar algunos (Dubinsky et al., 2014).

Además de la interiorización de una acción, es posible llegar al nivel de proceso a través de la coordinación de dos o más procesos, esto implica que el individuo realiza conexiones entre dos o más procesos y establece relaciones que llevan a generar un nuevo proceso.

Por otro lado, en ocasiones resulta necesario un tercer mecanismo mental: la reversión. De acuerdo con Meel (2003) en la reversión, el estudiante deshace un proceso existente para generar uno nuevo que se contrapone al anterior. Dubinsky et al. (2014) señala que los problemas matemáticos que requieren la reversión de un proceso, suelen representar mayor dificultad para los estudiantes.

3.2.3 Objetos, encapsulación y desencapsulación

Cuando el individuo es capaz de reflexionar acerca del proceso como un todo, es decir, es capaz de analizar y construir las transformaciones que pueden actuar sobre el proceso en general, se dice que pasó al estado de construcción objeto como resultado de la encapsulación de un proceso. Es decir, el individuo ha construido un objeto, cuando su entendimiento del concepto matemático es tan profundo que la trata como un total y es capaz de realizar acciones sobre ese total (Barbosa, 2003).

Según Dubinsky et al. (2014) “la encapsulación ocurre cuando un individuo aplica una acción a un proceso, esto es, ve una estructura dinámica (proceso) como una estructura estática a la cual se le pueden aplicar acciones” (p. 21). Diversas investigaciones y estudios realizados con base en la teoría APOE, señalan que la encapsulación es el mecanismo más difícil de lograr (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Igual de importante es el mecanismo de desencapsulación, en el cual el individuo debe ser capaz de *desarmar* el objeto, para llegar de nuevo al proceso que le dio origen. Este mecanismo se da siempre y cuando, algún problema matemático haga surgir la necesidad (Dubinsky et al., 2014).

3.2.4 Esquemas

Los esquemas son las construcciones más amplias de un conocimiento matemático y surgen cuando se da una interacción entre las acciones, proceso y objetos y. posiblemente, otros esquemas. Los esquemas se caracterizan por ser estructuras dinámicas en constante cambio y reconstrucción, según lo requiera la actividad matemática (Dubinsky et al., 2014). Todas estas construcciones mentales se encuentran conectadas coherentemente, de manera consciente o no, en la mente del individuo y, para llegar a su construcción es necesaria una generalización.

Esta coherencia que menciona Barbosa (2003) está determinada por la capacidad del estudiante de discernir si el esquema puede ser utilizado para lidiar con una situación matemática particular.

Dubisnky et al. (2014) explica que una vez que el esquema es construido como una colección coherente de estructuras mentales interconectadas ente sí, el esquema puede entonces ser transformado en una estructura estática, es decir, en un objeto, o puede ser usado como una estructura dinámica para asimilar otros objetos y esquemas. El mecanismo mental que permite transformar el esquema en un objeto, es conocido como tematización.

"Por lo tanto los esquemas son estructuras que contienen descripciones, organización y ejemplificaciones de las estructuras mentales que el individuo ha construido con respecto a un concepto matemático" (Dubinsky et al., 2014, p. 25).

3.3 El ciclo de investigación de la teoría APOE

En Dubinsky et al. (1997) se da una visión general de la teoría APOE como un marco de referencia para realizar investigaciones en matemática educativa. En este contexto, se propone el ciclo de investigación de la teoría APOE el cual consiste en tres elementos:

análisis teórico (o descomposición genética), diseño y aplicación de secuencia de enseñanza y recolección y análisis de datos. Este ciclo permite estudiar el desarrollo cognitivo del individuo cuando intenta aprender un concepto matemático, para ello es necesario aplicar el ciclo de investigación de manera iterada y realizar refinaciones al mismo en cada iteración, estas refinaciones irán de acuerdo con los datos obtenidos en la tercera etapa del ciclo. En las siguientes secciones se dará una descripción de cada una de las etapas.

3.3.1 Análisis teórico: descomposición genética

El ciclo de investigación con la teoría APOE comienza con la realización de un modelo cognitivo conocido como descomposición genética.

Este modelo debe ayudar a explicar que es lo que significa entender el concepto matemático en juego y cómo es que el individuo puede construir el entendimiento de dicho concepto (Dubinsky et al., 1997). Este primer análisis se basa en el entendimiento que el investigador tiene acerca del concepto, en sus propias experiencias como estudiante y como profesor.

El objetivo de la descomposición genética es describir las posibles construcciones y mecanismos mentales que el individuo realiza en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático (Parraguez, 2011). Es importante entender que este diseño de descomposición genética no es más que un modelo hipotético que en un inicio, se basa únicamente en el entendimiento del investigador y que, en ningún momento, será la única descomposición genética correspondiente a un concepto matemático particular.

El análisis teórico resulta ser el fundamento de los resultados que se obtengan al aplicar todo el ciclo de investigación. El investigador puede apoyarse en libros de texto, resultados de estudios previos y otros aspectos que considere pertinentes, para modelar el concepto matemático desde una perspectiva epistemológica y cognitiva (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

Dado que la teoría APOE señala que el aprendizaje de un concepto matemático surge a partir de transformar los conceptos que el individuo ya posee, se considera que la descomposición genética es una descripción de las acciones que los individuos realizan sobre esos conceptos ya existentes y como, posteriormente, estas acciones son interiorizadas en procesos, estos procesos encapsulados en objetos, etc. (Dubinsky et al., 2014). Por ello, además de describir como se construye un concepto matemático particular, una descomposición genética puede incluir una descripción de los conocimientos previos que son necesarios para el surgimiento del nuevo concepto.

El primer diseño de descomposición genética permitirá desarrollar las secuencias de enseñanza que, posteriormente serán aplicadas con la finalidad de recolectar y analizar datos que permitan ir refinando el diseño original de la descomposición genética.

3.3.2 Diseño y aplicación de secuencia de enseñanza

El siguiente paso en el ciclo de investigación de la teoría APOE es el diseño de la secuencia de enseñanza. Este diseño se hace con base en la descomposición genética generada en la primera etapa del ciclo y su finalidad es ayudar a los estudiantes en la construcción de las estructuras mentales propuestas.

De acuerdo con Dubinsky et al. (1997), el análisis teórico de la primera fase influye en la enseñanza de dos formas: la primera es que el análisis permite señalar los constructos mentales que el profesor debe buscar fomentar en la enseñanza, la segunda forma, y que necesitaría analizarse a mayor profundidad, es que este análisis teórico puede fomentar el rediseño del contenido matemático para un curso en particular.

Roa-Fuentes y Oktaç (2012) señalan que para esta fase es necesario considerar aspectos relacionados con el tiempo, el currículo, el número de investigadores necesarios, etc., pues en ocasiones para implementar las secuencias de enseñanza diseñadas de acuerdo con la descomposición genética es necesario realizar rediseños en el currículo y la aplicación del modelo propuesto requiere bastante tiempo. Estos aspectos, de acuerdo con las autoras, han generado que muchas investigaciones pasen de la fase 1, análisis teórico, directamente a la fase 3, recolección y análisis de datos.

Lo anterior implica que, una vez que se tiene el análisis teórico inicial, es decir, la descomposición genética hipotética, se diseñan instrumentos que permitan analizar o evaluar la manera en que los estudiantes han construido o están construyendo un concepto.

3.3.3 Recolección y análisis de datos

De acuerdo con Dubinsky et al. (1997), son muchos los datos que pueden recolectarse en esta fase. Por un lado, se puede recolectar información acerca de los estudiantes y el (los) curso(s) que estén tomando. En algunos casos, se busca encontrar información acerca de los estudiantes que ya han estudiado en concepto matemático en cuestión en cursos cuya metodología de enseñanza no se ha basado en la teoría APOE.

En otras ocasiones se busca analizar en particular a los estudiantes que han estudiado determinado concepto matemático en cursos cuya instrucción se basa en la teoría APOE.

En un trabajo de Roa-Fuentes y Oktaç (2012), las autoras señalan que el análisis de los datos empíricos obtenidos en esta fase del ciclo de investigación, en comparación con el análisis teórico que se haya propuesto en la primera fase, dan pie a un análisis más veraz sobre la manera en que los estudiantes construyen el concepto matemático en cuestión.

El diseño de los instrumentos se hace con base en la descomposición genética generada en la primera etapa del ciclo y su finalidad es recolectar datos que permitan analizar y reconsiderar dicha descomposición genética, por ello el análisis *a priori* de los instrumentos es fundamental para establecer su relación con los aspectos cognitivos de la descomposición genética.

Así mismo, Aldana (2011) señala que los datos obtenidos al aplicar los instrumentos deben ser analizados desde la descomposición genética diseñada en la primera fase. Este análisis debe servir para detectar si hay elementos que no fueron considerados en la descomposición genética original o si, por el contrario, hay elementos considerados en la descomposición genética, de los cuales no se muestran evidencias en los datos recolectados. Así mismo, los instrumentos diseñados para esta fase pueden ser refinados como resultado también del análisis de los datos obtenidos.

La totalidad del ciclo de investigación de APOE puede ser aplicada una y otra vez procurando en cada una de las aplicaciones, llegar a descomposiciones genéticas, a secuencias de enseñanza y a instrumentos para recolección de datos que sean más certeros y cercanos a la realidad de los estudiantes con quienes se está trabajando y, de este manera, tener una compresión más profunda de la manera en que los estudiantes construyen el concepto matemático en cuestión.

CAPÍTULO 4: METODOLOGÍA

En este capítulo se describen los aspectos metodológicos del trabajo de tesis. La teoría APOE no solo servirá como referente teórico, si no que su ciclo de investigación será el referente metodológico del trabajo.

Para iniciar, se describe el objeto matemático en el cual se ha enfocado el trabajo de tesis. Enseguida, se describen los aspectos relacionados a la primera fase del ciclo de investigación APOE: el análisis teórico. En este apartado se desarrollan las descomposiciones genéticas pertinentes al objeto matemático descrito en la primera sección.

Más adelante se describe como se diseñaron y aplicaron los instrumentos para la recolección de datos correspondiente a la fase tres del ciclo de investigación APOE. Finalmente, se muestra el análisis realizado a los datos obtenidos al aplicar los instrumentos y se describe cómo estos resultados afectan las descomposiciones genéticas hipotéticas diseñadas en la fase de análisis teórico.

4.1 Descripción del objeto matemático

El programa de Matemáticas I de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEP, 2013) señala que los estudiantes de primer semestre de bachillerato, estudian sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas y sus métodos de resolución, los cuales clasifican en tres rubros: i) Numérico: determinantes, ii) Algebraicos: eliminación por igualación, reducción (suma y resta) y sustitución, iii) Gráficos.

De acuerdo con Zill y Dewar en su libro Álgebra, trigonometría y geometría analítica (2012), un sistema de ecuaciones consta de dos o más ecuaciones, donde cada una de ellas tiene al menos una variable.

Si estas ecuaciones son lineales, entonces el sistema también es lineal. Para un sistema de *n* ecuaciones con *n* variables, la solución del mismo estará formada por los valores de las *n* variables, que satisfacen todas las ecuaciones del sistema al mismo tiempo. Zill y Dewar (2012) llaman a esta solución una n-ésima tupla ordenada.

En este sentido, un sistema de ecuaciones lineales puede tener tres tipos de solución:

i) Única: el sistema tiene exactamente una solución. Es decir, existe una única n-ésima tupla ordenada de valores que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. Se dice que el conjunto solución del sistema es único.

ii) Infinitas: el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, existen infinitas n-ésimas tuplas ordenadas de valores que satisfacen a todas las ecuaciones del sistema. Se dice que el conjunto solución del sistema es infinito.

iii) Vacía: el sistema no tiene solución. Es decir, no existe ninguna n-ésima tupla ordenada de valores que satisfaga todas las ecuaciones del sistema. Se dice que el conjunto solución del sistema es vacío.

Este trabajo de tesis considera trabajar dos de los tres tipos de métodos de solución señalados en el programa: numérico y algebraicos. Los sistemas de ecuaciones lineales considerados en el desarrollo de las descomposiciones genéticas, son sistemas cuadrados de dos o tres incógnitas, no homogéneos, con coeficientes *k* bien definidos y que pertenecen a los reales, y se consideran sistemas de ecuaciones lineales con los tres tipos de solución señalados anteriormente.

También es importante señalar que el análisis teórico del trabajo de tesis se desarrolla pensando en estudiantes regulares de primer semestre de bachillerato en México, es decir, jóvenes entre los 15 y 16 años, que han concluido la educación secundaria y, por lo tanto, ya han estudiado tópicos introductorios al álgebra.

4.2 Análisis teórico: descomposiciones genéticas hipotéticas

Como se describió en los objetivos del trabajo, esta tesis busca hacer el diseño y validación de cuatro descomposiciones genéticas, que corresponden a cuatro distintos métodos de resolución para sistemas de ecuaciones lineales que cumplan con las características señaladas en el apartado *4.1 Descripción del objeto matemático*, enfocándose en los tres distintos tipos de conjunto solución para ellos.

Como se describe en el ciclo de investigación de la teoría APOE, la primera fase a trabajar es el análisis teórico, es decir, es necesario realizar la descomposición genética del concepto matemático que se busca construir, la cual posteriormente debe ser evaluada para su validación o refinación. En este apartado, se busca dar un panorama general de las descomposiciones genéticas que se desarrollarán a fin de abordar el concepto matemático principal que este trabajo envuelve: métodos de resolución y conjuntos solución para sistemas de ecuaciones lineales.

Se busca que, a través de la enseñanza de cuatro distintos métodos de resolución (Cramer, reducción, sustitución e igualación) el estudiante llegue a la construcción del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales como un esquema. Para llegar a este constructo esquema, es necesario que el estudiante construya tres conceptos principales en un estado de construcción proceso: solución única, solución vacía y soluciones infinitas, tal y como se muestra en la Figura 1. Estos procesos se construirán a través del trabajo con los métodos de resolución.

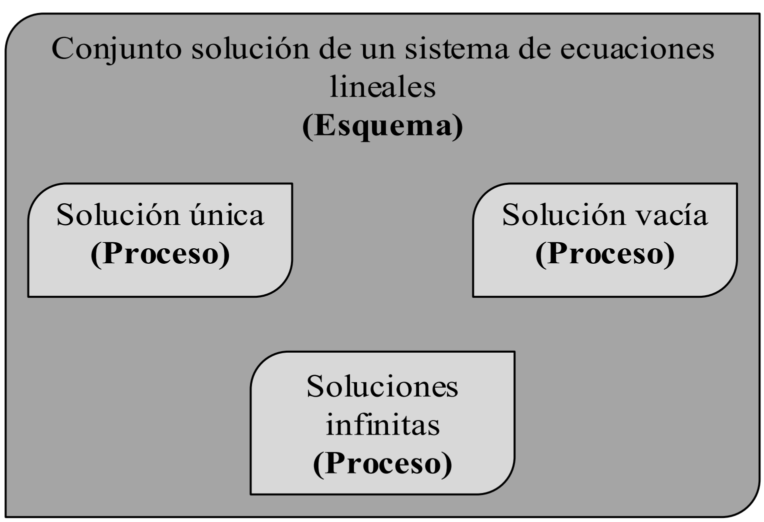


Figura 1. Esquema conjunto solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales (procesos).

Como se mencionó anteriormente, para llegar a estas construcciones se trabajará a través de cuatro distintos métodos de resolución, los cuales permitirán llegar a los conceptos de la Figura 1 en un estado de construcción proceso y, posteriormente, estos procesos deberían ser encapsulados por medio de ejemplos tipo enunciado[1] dados en contextos no estrictamente matemáticos. En la Figura 2 se muestra como se busca llegar a un estado de construcción objeto de los conceptos mencionados.

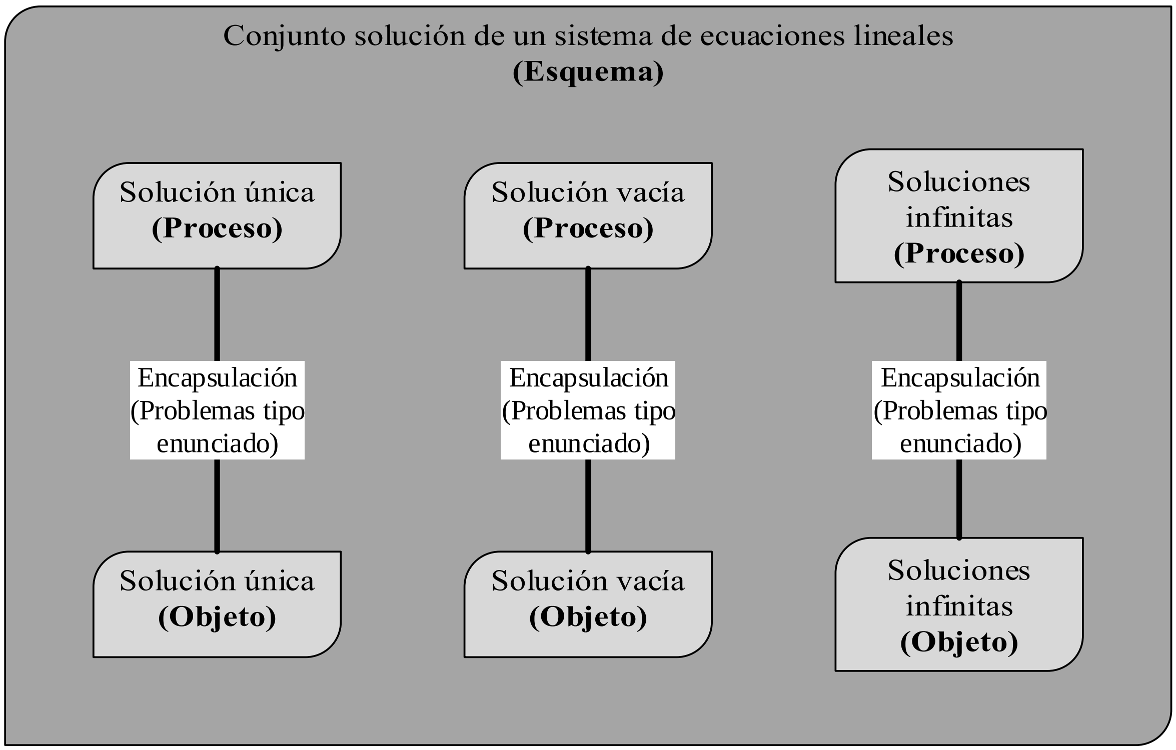


Figura 2. Esquema conjunto solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales (objetos).

En los apartados siguientes se irán desarrollando las descomposiciones genéticas para los cuatro métodos de resolución mencionados y el lector podrá observar cómo se llega a la construcción proceso de estos tres conceptos, solución única, solución vacía y soluciones infinitas.

[1] El siguiente es un ejemplo de problema planteado como enunciado:
"Anabel pagó \$145 por 3 cajas de palomitas y 2 vasos de refresco. Claudia compró 5 cajas de palomitas y 7 vasos de refresco y tuvo que pagar \$315. ¿Cuál es el precio de cada caja de palomitas y vaso de refresco?".

Primero se describe la descomposición genética para el método de Cramer, por considerarse un caso especial, como se describirá más delante. Posteriormente se presentará la descomposición para el método de reducción, esto por considerarse que es la descomposición más compleja y que algunas de las estructuras mentales construidas al trabajar con este método serán necesarios para trabajar con los siguientes métodos. En tercer lugar se describe el diseño de la descomposición genética para el método de sustitución, y en último lugar se presenta la descomposición genética para el método de igualación, por ser este el único que no puede ser utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas.

4.2.1 Método de Cramer

Como se ha mencionado anteriormente, las descomposiciones genéticas diseñadas en este trabajo de tesis, hacen referencia a tópicos enseñados en el primer semestre de bachillerato en México.

De acuerdo con lo señalado en el programa de estudios de Matemáticas I de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEP, 2013), en este nivel los estudiantes deben resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el método numérico de determinantes, es decir, el Método de Cramer. Sin embargo, al llegar a este nivel educativo, los alumnos no han estudiado tópicos relacionados con matrices y/o determinantes, ni en secundaria (SEP, 2017) ni en los bloques previos en bachillerato. Debido a lo anterior, se considera que al trabajar con el Método de Cramer los estudiantes solo lo harán de una manera mecánica y repetitiva. Dada la naturaleza de APOE, estas acciones mecánicas no le permitirán al alumno construir el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales, ni como proceso ni como objeto.

Esta particularidad nos lleva a que el concepto de solución asociado a la descomposición genética del método de Cramer, se convierta en un mecanismo auxiliar en la encapsulación y desencapsulación de otros conceptos matemáticos y no en una construcción mental por sí mismo. En el desarrollo de la descomposición genética para el método de Cramer, el cual se presenta a continuación, se podrá observar este uso de los conceptos de solución única, vacía e infinita. Esto diferencia a ésta descomposición genética de las que se describirán en las siguientes secciones.

Para la construcción del concepto del método de Cramer, el estudiante necesita haber construido previamente dos esquemas: Aritmética y Ecuación Lineal. Del esquema aritmético, que puede ser demasiado amplio, es necesario que el estudiante sea capaz de realizar las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números del conjunto de los enteros y racionales. Es importante que utilice de manera intuitiva las propiedades de cada operación (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.) aunque no sea capaz de dar una definición ni una demostración formal de ellas.

El esquema de ecuación lineal resulta particularmente importante, pues a partir de él se construye el concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL), el cuál será esencial para el desarrollo no solo de ésta, sino de todas las descomposiciones genéticas que conforman este trabajo de tesis.

Por ello, la construcción de estos conceptos se explica en especial detalle en éste apartado con la finalidad de ser retomado con más simpleza en las descomposiciones genéticas que siguen.

De este esquema, ecuación lineal, se espera que el estudiante sea capaz de identificar una ecuación lineal con una, dos, tres incógnitas, distinguiéndola de las ecuaciones cuadráticas, que identifique los elementos que la conforman (variables, coeficientes de las variables, términos independientes). Además, el estudiante debe ser capaz de comprender un problema dado por un enunciado y expresarlo en forma de ecuación lineal, puede operar una ecuación lineal hasta encontrar el valor de la o las incógnitas y, reconoce la solución única e infinita de una ecuación lineal y que es lo que esto implica para un problema contextualizado.

Al haber construido previamente el esquema de ecuación lineal, es posible que el estudiante construya la acción de definir un sistema de ecuaciones lineales (SEL). En esta construcción el estudiante es capaz de integrar ecuaciones lineales (de dos y tres incógnitas) para formar sistemas de ecuaciones lineales cuadrados. Reconoce las partes que forman al sistema debido a que reconoce las partes que conforman a una ecuación lineal. Sin embargo, no es capaz de resolver el sistema. En la Figura 3 se muestran estas construcciones.

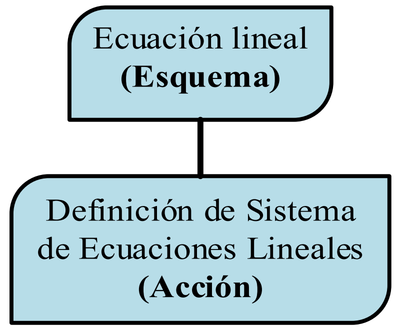


Figura 3. Definición de SEL, acción.

Esta acción que se ha construido, será interiorizada a través de ejemplos dados en forma de enunciado que los estudiantes tendrán que expresar en forma de sistema de ecuaciones lineales, detallando cuál es la información que poseen, cuáles son las incógnitas a encontrar, de qué manera se relacionan dichas incógnitas, llegando así a construir el sistema de ecuaciones lineales como un proceso. En este punto el estudiante no sólo reconoce las partes que conforman al sistema, sino que lo concibe como un conjunto de ecuaciones que pueden ser manipuladas de manera simultánea hasta encontrar una solución que las satisfaga a todas. La Figura 4 ilustra estas construcciones.

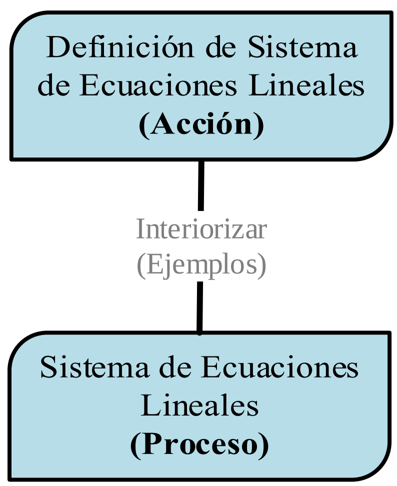


Figura 4. Interiorización del SEL como proceso.

Por otro lado, teniendo el esquema aritmético como base, el estudiante construirá la acción determinante. El hecho de que el determinante permanezca como un estado de construcción acción se debe a que el estudiante no posee los conocimientos previos necesarios (matrices) para interiorizar el concepto de determinante. Con esta construcción el estudiante podrá calcular el valor de un determinante dado, pero únicamente será capaz de hacerlo de manera mecánica, siguiendo indicaciones dadas por el profesor o el libro y siempre revisando sus cálculos a lo largo del proceso. En la Figura 5 se muestra lo descrito en este párrafo.

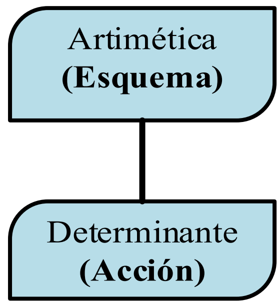


Figura 5. Construcción de la acción determinante.

El alumno ahora necesita construir una nueva acción, arreglo matricial del sistema de ecuaciones lineales, la cual se trabajará a la par con el proceso de sistemas de ecuaciones lineales que ha construido previamente.

La acción arreglo matricial del sistema de ecuaciones lineales le permite al alumno organizar el sistema en un arreglo matricial, diferenciando las filas como ecuaciones y las columnas como las constantes que corresponden a cada variable y a los términos independientes. Está acción va ligada al sistema de ecuaciones lineales (como proceso) pues, recordemos que el alumno aún no ha estudiado tópicos sobre matrices y únicamente relacionará el arreglo matricial con el sistema particular que esté trabajando.

El estudiante reconocerá que existe un orden explícito para el acomodo de los elementos pero sin ser capaz de comprender las razones detrás de este arreglo o los errores que generará el no respetarlo y le será necesario revisar las reglas dadas para el orden cada vez que necesite generar estos arreglos matriciales. En la Figura 6 podemos observar cómo estas dos construcciones se encuentran a la par.

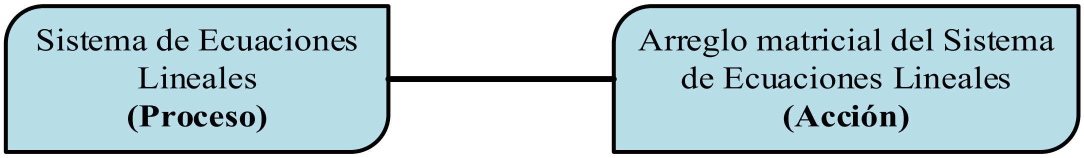


Figura 6. Arreglo matricial, acción.

En este punto, el estudiante ha construido dos acciones importantes: arreglo matricial del sistema de ecuaciones lineales y determinante. Estás acciones serán ahora interiorizadas en un nuevo proceso, Método de Cramer. La interiorización se realizará cuando al estudiante se le presenten las fórmulas correspondientes al Método de Cramer y tenga que resolver sus primeros ejercicios utilizando el método. Para resolverlos necesitará ambas acciones, por lo que la interiorización de una no se puede dar sin la presencia de la otra. La Figura 7 ilustra esta interiorización de ambas acciones.

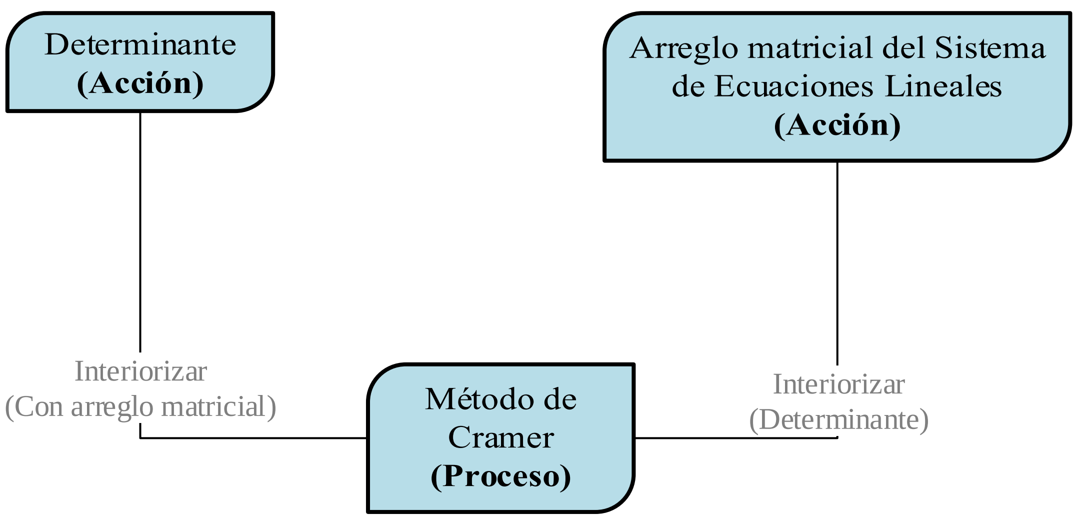


Figura 7. Interiorización en método de Cramer.

Cuando se ha construido el Método de Cramer como un proceso se comienzan a trabajar ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con los estudiantes. Estos ejemplos deben corresponder a sistemas con solución única.

Cuando el estudiante haya trabajado con suficientes ejemplos podrá manejar el método con mayor fluidez llegando a encapsularlo. Es importante no introducir a los estudiantes a ejemplos que no tengan solución o tengan soluciones infinitas antes de que demuestren que han encapsulado el método de Cramer en un objeto, pues esto los confundiría al no poder resolver los sistemas por este método.

Una vez que se haya logrado esta encapsulación podemos introducir al estudiante ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales cuyos conjuntos solución sean vacíos o infinitos. Los estudiantes se enfrentarán a un conflicto cuando no puedan resolver el ejercicio, lo cual generará la necesidad cognitiva de desencapsular el objeto previamente construido, método de Cramer, para encontrar el origen de la falla, lo que les permitirá llegar a la conclusión de que, si el determinante asociado al sistema es igual a cero, el sistema no se puede resolver por éste método. En la Figura 8 se muestran estas construcciones y mecanismos mentales.

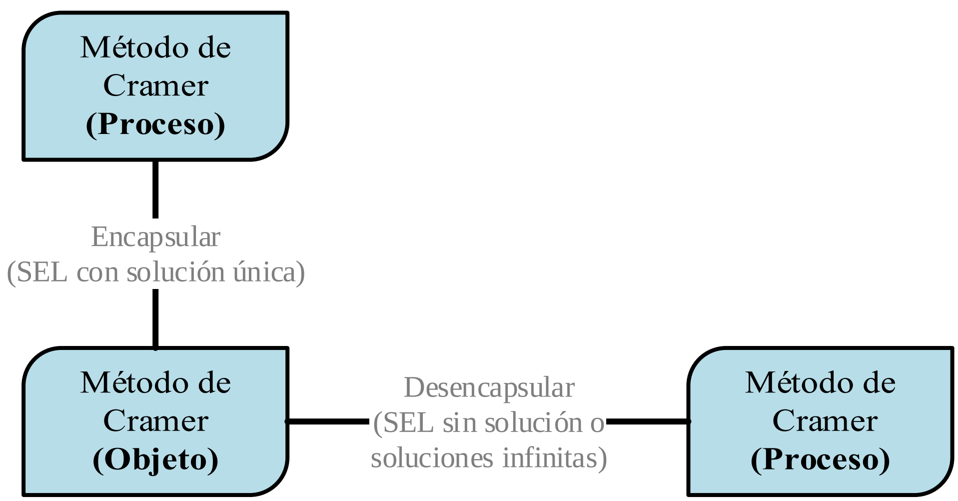


Figura 8. Encapsulación y desencapsulación del método de Cramer.

Finalmente, en la Figura 9 se puede apreciar la descomposición genética en su totalidad.

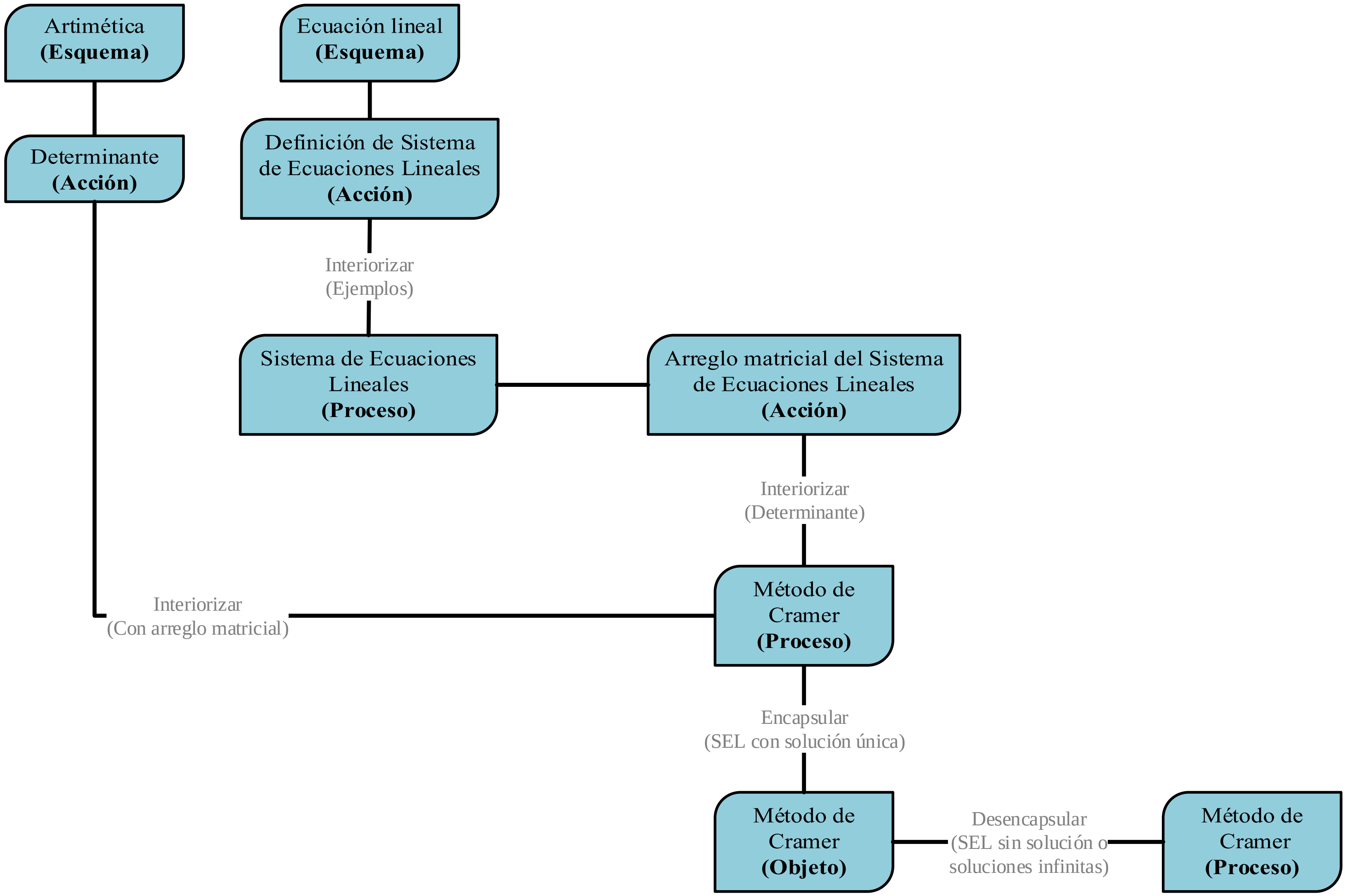


Figura 9. Descomposición genética, Método de Cramer.

4.2.2 Método de reducción

El método de reducción es otro de los métodos de resolución incluidos en el programa de Matemáticas I para bachillerato de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2013). Este método es aplicable a los dos tamaños de sistemas que se consideran en el trabajo de tesis, 2x2 y 3x3. Al trabajar este método de resolución, el estudiante pone en juego construcciones y mecanismos mentales que le permitirán llegar a un estado de construcción proceso de los tres conceptos matemáticos principales en este trabajo: solución única, solución vacía y soluciones infinitas de un sistema de ecuaciones lineales que cumple con las características descritas en la sección *4.1 Descripción del objeto matemático.*

Como conceptos previos, antes de trabajar el método de reducción, el estudiante debe haber construido el concepto de sistema de ecuaciones lineales como un proceso, tal y como se describió en la sección *4.2.1 Método de Cramer*. Se espera que el alumno demuestre que ha construido el concepto de ecuación lineal como un esquema, gracias a lo cual podrá construir la acción de definir sistema de ecuaciones lineales y, posteriormente, interiorizar está acción a través de una serie de ejemplos dados como enunciado. En la Figura 10 se muestran estas construcciones dentro de la descomposición genética.

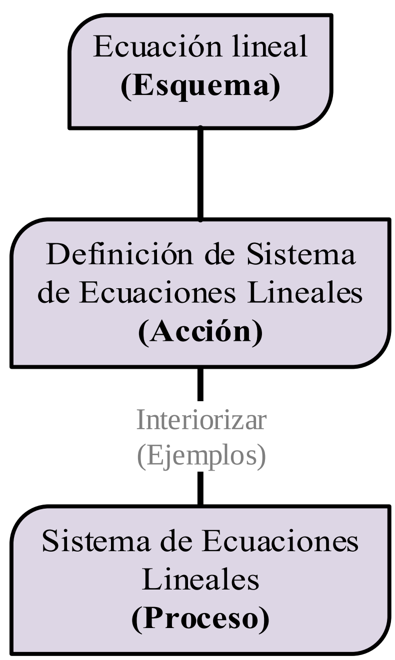


Figura 10. Construcción del SEL como un proceso.

Otro concepto previo que el estudiante debe haber construido es el de expresión algebraica como esquema. El estudiante debe demostrar que es capaz de reconocer una expresión algebraica, además de realizar manipulaciones con dichas expresiones, por ejemplo, sumar, restar, multiplicar o dividir una expresión con otra o con algún número k entero o racional. También se espera que simplifique, factorice y desarrolle expresiones algebraicas según sea necesario y que demuestre una correcta aplicación de la ley de los exponentes cuando manipula las expresiones.

En particular existen dos procesos dentro del esquema de expresión algebraica que serán indispensables para el manejo del método de reducción. Estos procesos son el de igualdad y el de simplificación de expresiones algebraicas. El que el estudiante haya construido el proceso de igualdad implica que es capaz de identificar dos expresiones algebraicas, e incluso aritméticas, como iguales aun cuando no se encuentren expresadas de la misma manera. Por ejemplo;$ax + by = \frac{a}{3}x + \frac{2a}{3}x + by$.Con la construcción simplificación de expresiones algebraicas, el estudiante debe manipular expresiones dadas hasta dejarlas en su forma más simple, es decir, irreducible. En la Figura 11 podemos ver como esos dos procesos se desprenden del esquema de expresión algebraica.

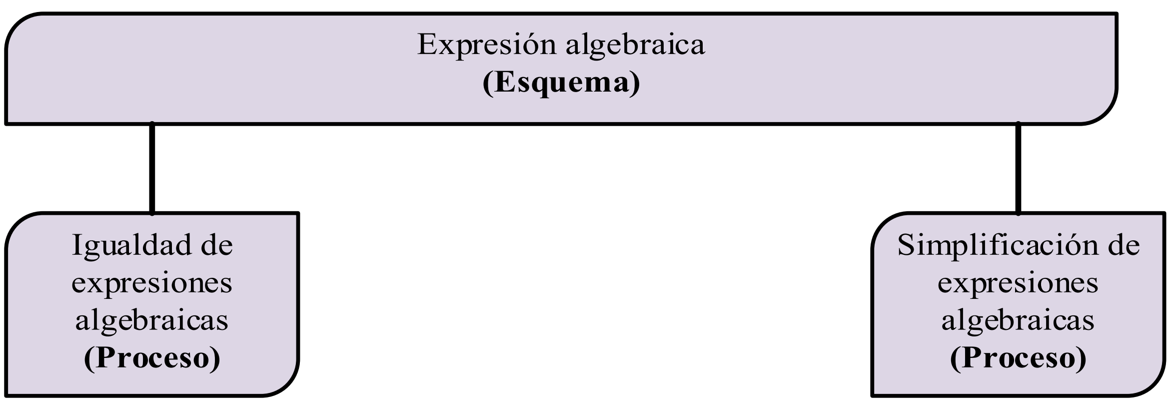


Figura 11. Expresión algebraica, esquema y procesos.

Cuando estos dos procesos se coordinan a través de las reglas para la manipulación de expresiones que el estudiante ya ha construido, dentro del esquema de expresión algebraica, surge un nuevo proceso: reducción de expresiones algebraicas. Al construir este nuevo proceso, el estudiante es capaz de reducir expresiones algebraicas aisladas y aquellas que surgen de combinar dos o más expresiones distintas. Es decir, al operar dos o más expresiones entre ellas, o al operar una expresión con un número real *k*, el estudiante podrá llevar el resultado de esa operación a su más simple expresión, manteniendo la equivalencia con la expresión original. En la Figura 12 se muestra la coordinación que lleva a la construcción de este proceso.

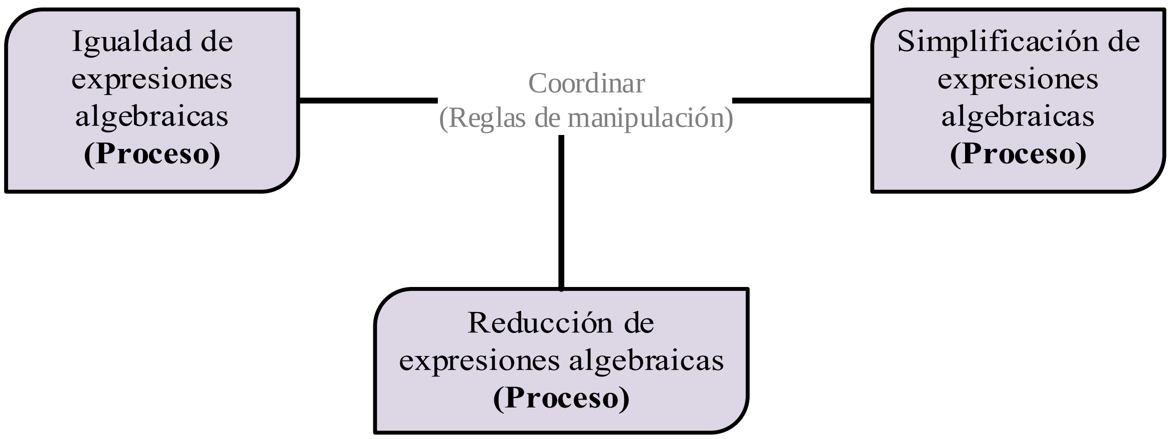


Figura 12. Reducción de expresiones algebraicas, proceso.

Una vez que se el estudiante ha construido este proceso, es posible coordinarlo con el proceso sistemas de ecuaciones lineales. Está coordinación se dará a través del método de resolución, en este caso el método de reducción. En la Figura 13 se observa dicha coordinación.

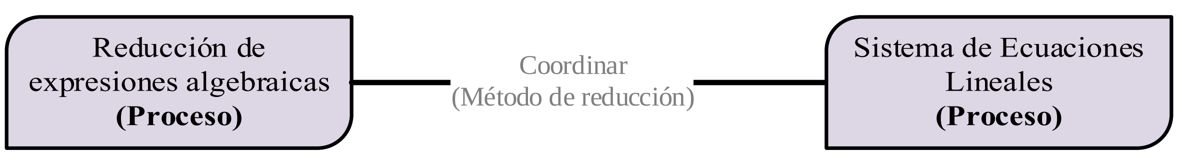


Figura 13. Coordinación por método de reducción.

Lo que se construya a partir de la coordinación mostrada en la Figura 12, dependerá del tipo de sistema con el que se esté trabajando. Cuando el estudiante está trabajando con un sistema de ecuaciones con solución única, al aplicar el método de resolución, cualquiera que este sea, llegará a obtener la ecuación lineal equivalente (proceso), la cual podrá manipular hasta encontrar la solución al sistema.

Sin embargo, si está trabajando con un sistema de ecuaciones lineales con solución vacía o soluciones infinitas, al aplicar el método lo que se obtendrá es una expresión algebraica o aritmética (proceso) de la cual no se puede obtener el valor de las incógnitas, entonces, el estudiante tendrá que involucrar otros constructos para concluir si el sistema tiene solución vacía o infinitas soluciones. La Figura 14 muestra estos dos procesos construidos a partir de la misma coordinación aunque en momentos distintos.

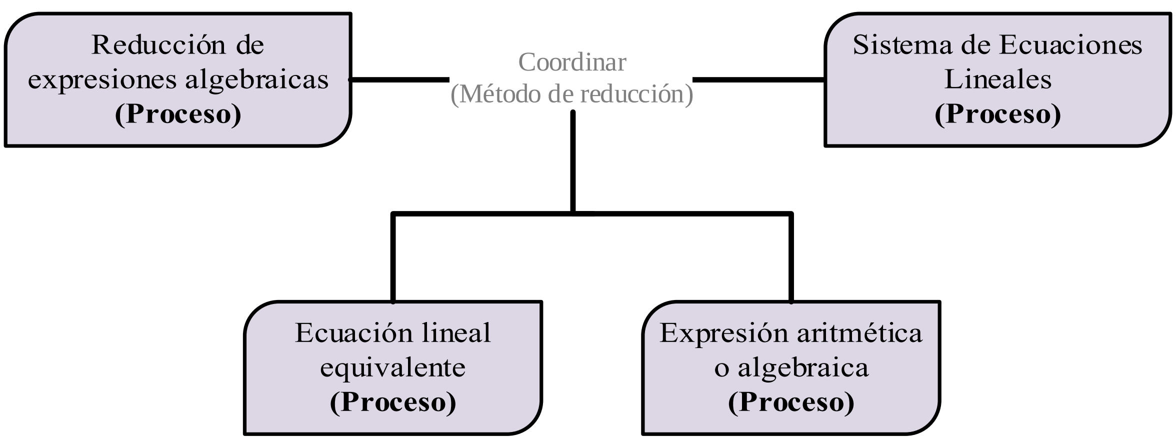


Figura 14. Coordinación por método de reducción 2.

Las construcciones que el estudiante realizará a partir de este punto, son cruciales para la construcción de los conceptos matemáticos principales de este trabajo: solución única, solución vacía y soluciones infinitas. Por este motivo, y para facilitar su comprensión, lo que pasa después de cada uno de estos procesos se abordará de manera independiente.

Además, estas construcciones son comunes a las tres descomposiciones genéticas que corresponden a los tres métodos de resolución algebraicos: reducción, igualación y sustitución, por lo que serán abordadas nuevamente en los apartados siguientes.

4.2.2.1 Ecuación lineal equivalente. Método de reducción

Como se mencionó anteriormente, cuando el estudiante trabaja con sistemas de ecuaciones lineales con solución única, al realizar la coordinación mostrada en la Figura 13 lo que se construye es el proceso de ecuación lineal equivalente, como se muestra en la Figura 15.

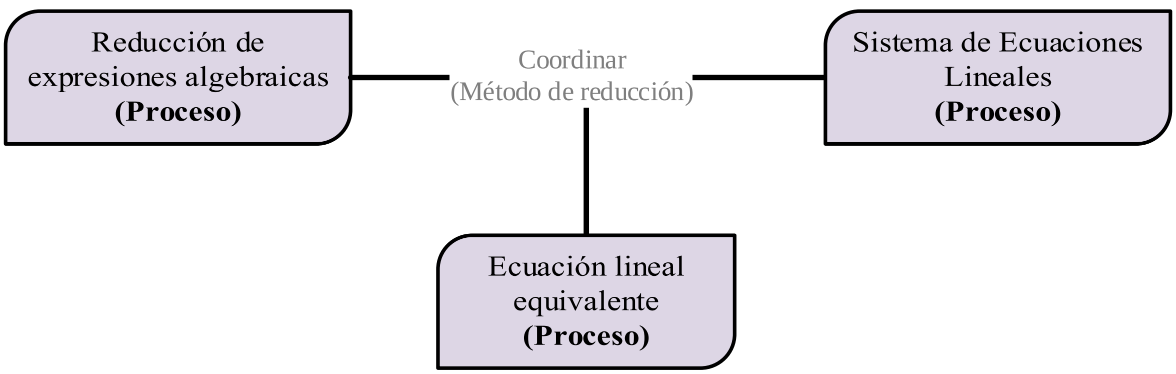


Figura 15. Ecuación lineal equivalente, proceso.

Es decir, cuando el estudiante coordina los procesos de reducción de expresiones algebraicas y sistema de ecuaciones lineales, al trabajar con un sistema con solución única, obtiene la ecuación (para sistemas de 2x2) o las ecuaciones (para sistemas de 3x3) equivalentes al sistema original.

Al llegar a este punto, el estudiante necesita continuar reduciendo el sistema hasta llegar a una ecuación lineal de una incógnita. Como sabemos, el estudiante es capaz de manipular una ecuación lineal de una incógnita (esquema de ecuación lineal) hasta llegar a la solución de la misma, encontrando el valor de la primera incógnita. Esto es, el estudiante realiza una coordinación entre el proceso de reducción de expresiones algebraicas, que ha construido previamente, y el de ecuación lineal equivalente.

Está coordinación se da a través de la sustitución (de la primer incógnita encontrada) y la comprobación (de los valores de las incógnitas que ya se han determinado). Esta coordinación se muestra en la Figura 16.

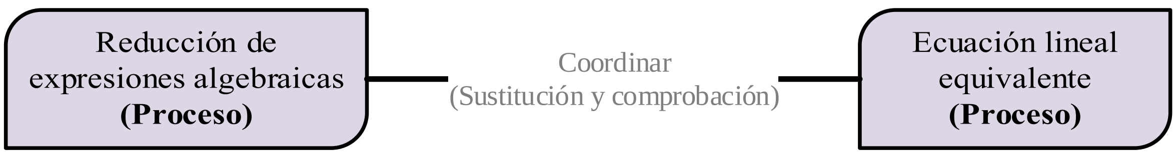


Figura 16.Coordinación por sustitución y comprobación.

Es decir, el estudiante puede manipular el sistema dado hasta encontrar el valor de todas las incógnitas y comprobar que los valores encontrados satisfacen todas las ecuaciones del sistema, lo cual lo llevará a la construcción del proceso solución única, como se ilustra en la Figura 17.

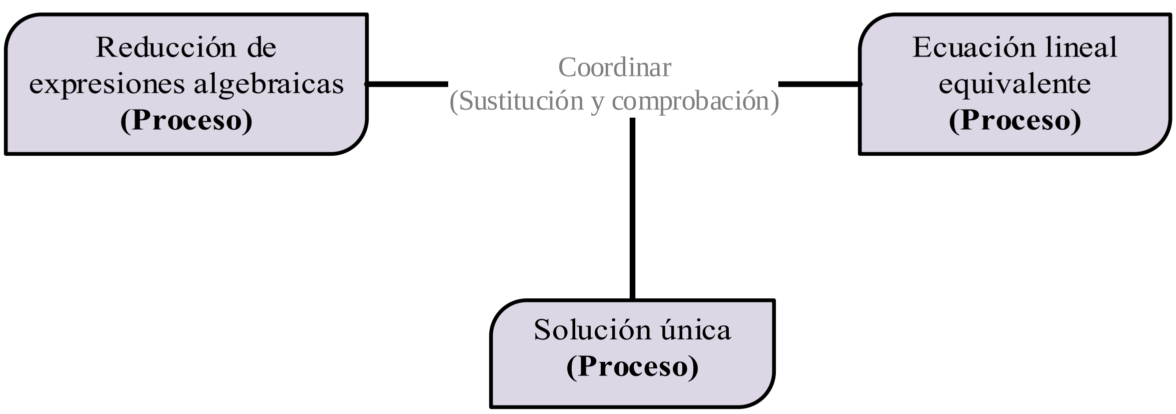


Figura 17. Solución única, proceso. Método de reducción.

4.2.2.2 Expresión aritmética o algebraica. Método de reducción

Cuando el estudiante trabaja con sistemas con solución vacía o soluciones infinitas, al realizar la coordinación mostrada en la Figura 13 lo que se construye es el proceso de expresión aritmética o algebraica, tal y como se muestra en la Figura 18.

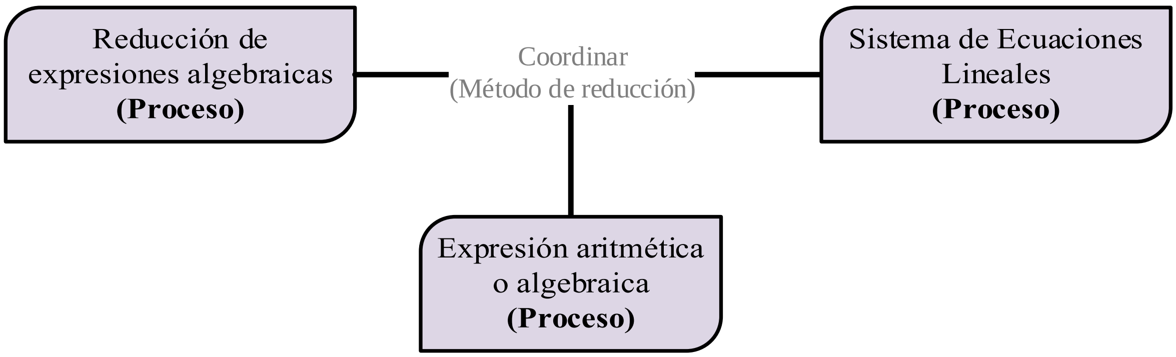


Figura 18. Expresión aritmética o algebraica, proceso.

Cuando el estudiante trabaja con ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales en los que el conjunto solución es vacío o infinito, al aplicar el método de resolución, en este caso por reducción, no le será posible llegar a una ecuación lineal equivalente de una incógnita, sino que obtendrá una expresión aritmética (por ejemplo, $a = a, d = c \ con \ a, d, c \in R$) o una expresión algebraica (por ejemplo, $ax + c = ax + c, by + d = dy + a \ con \ a, b, c, d \ \in R$) irreducible. Dado que el estudiante ha construido la expresión aritmética o algebraica como proceso, le es posible identificar que se trata de una expresión que ya no puede ser manipulada, en donde el valor de la incógnita, si es que aún hay una, no podrá ser determinado.

Cuando lo anterior ocurra el estudiante necesitará otra construcción mental que lo ayude a llegar a una conclusión para el problema que está trabajando. Dicha construcción será la igualdad de expresiones como proceso, la cual se sabe que el estudiante ha construido previamente dado que construyo el esquema de expresiones algebraicas.

La construcción de este proceso implica que el estudiante entiende el concepto de igualdad de expresiones (algebraicas o aritméticas) viéndolo como una equivalencia entre partes y no como un resultado. Es decir, el estudiante comprende que para que una igualdad sea cierta, ambas partes de ella deben tener el mismo valor y elementos. Estos dos procesos, expresión aritmética o algebraica e igualdad de expresiones se coordinan para dar una resolución al problema. La conclusión a la que el estudiante llegue dependerá del mecanismo mental que utilice para realizar esta coordinación.

Cuando el estudiante determine que la expresión aritmética o algebraica que encontró representa una contradicción concluirá que el sistema no tiene solución, construyendo el proceso de solución vacía, esto se muestra en la Figura 19.

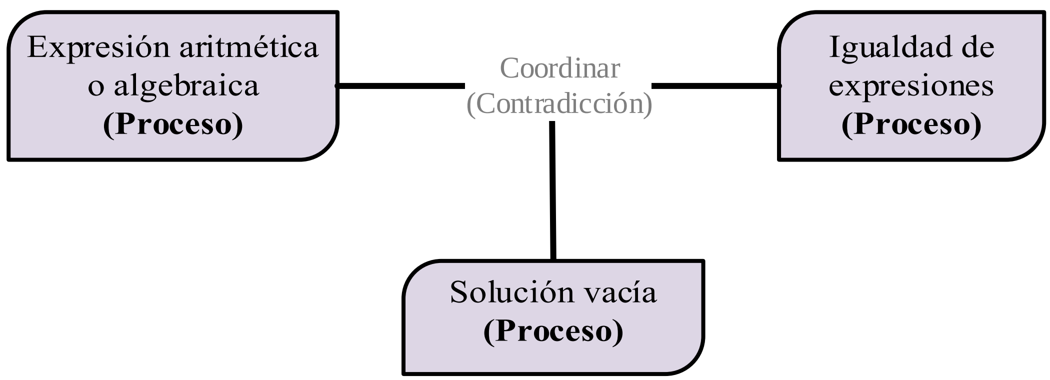


Figura 19. Solución vacía, proceso. Método de Reducción.

Por otro lado, cuando encuentre que su expresión representa una verdad, concluirá que el sistema tiene infinitas soluciones, construyendo así el proceso de solución infinita, como se muestra en la Figura 20.

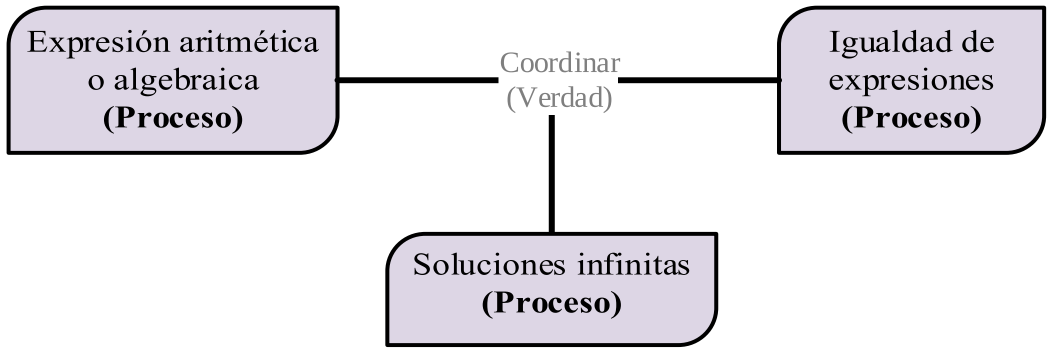


Figura 20. Soluciones infinitas, proceso. Método de reducción.

Es decir, el estudiante comprende de manera intuitiva el concepto de verdad y contradicción, sin apegarse a una definición matemática formal y, como anteriormente ha construido el concepto de solución y soluciones infinitas para una ecuación lineal, es capaz de entender que el llegar a una verdad implica que los pares o tercias de valores que satisfacen todas las ecuaciones del sistema son infinitos.

Si llega a una contradicción el estudiante comprende la falta de lógica en la expresión y la asocia a no poder resolver el sistema, es decir, a no poder encontrar ningún par o tercia de valores que satisfagan a todas las ecuaciones y, por lo tanto, que el sistema no tiene solución. Finalmente, en la Figura 21 se puede apreciar en su totalidad la descomposición genética correspondiente al método de reducción.

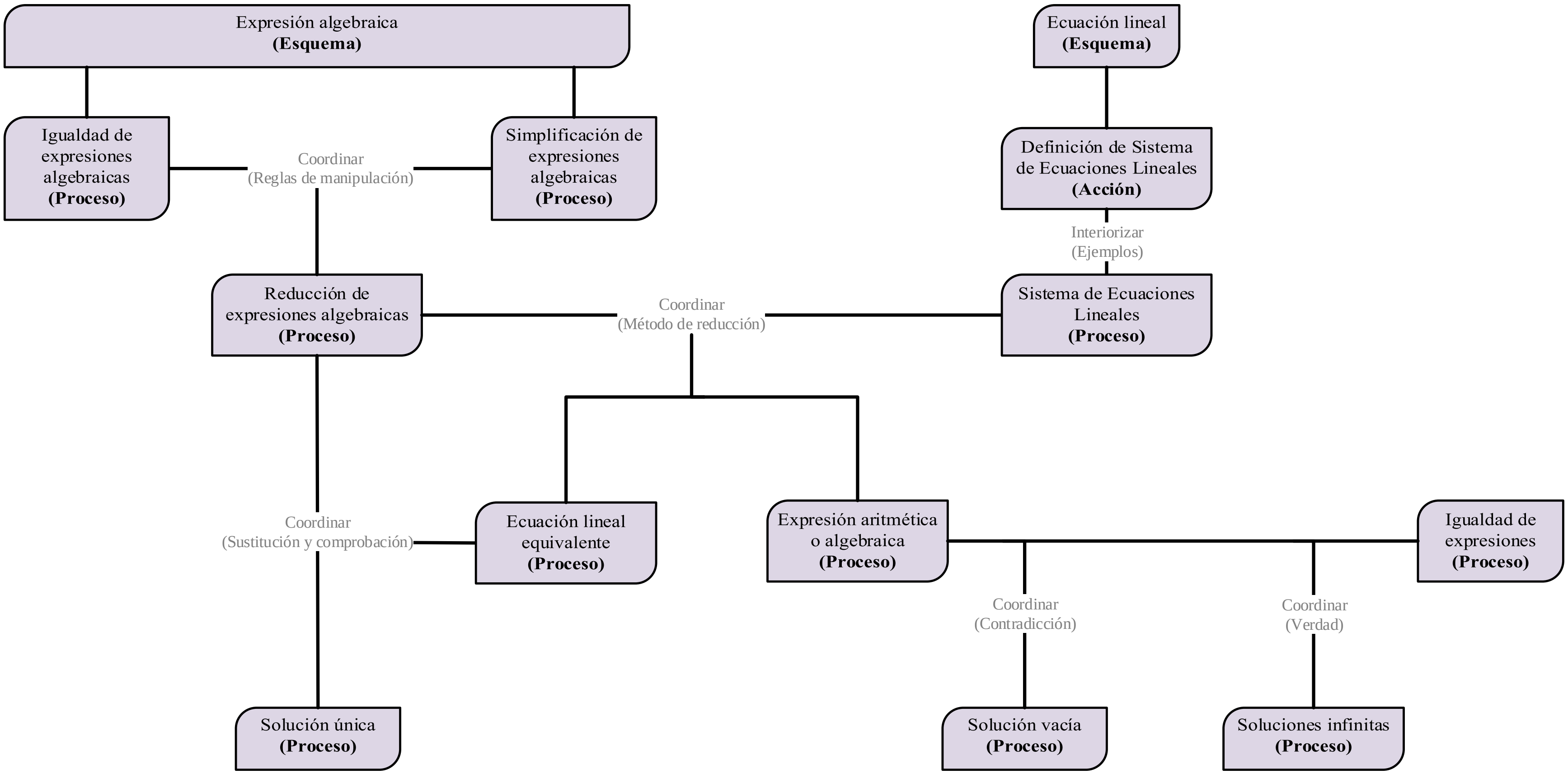


Figura 21. Descomposición genética Método de Reducción.

4.2.3 Método de sustitución

Otro de los métodos algebraicos que se manejan en el primer semestre de bachillerato en México, es el método de sustitución. Al igual que el de reducción, este método se aplica a los dos tamaños de sistemas que el programa maneja, 2x2 y 3x3. En la descomposición genética observaremos constructos mentales que se han observado en el método de Cramer y en el método de reducción, por lo que algunas de las explicaciones para estos constructos serán breves y, si el lector desea profundizar en ellas, podrá regresar a los apartados anteriores.

Al igual que con el método de reducción, en este método se espera que el estudiante alcance un estado de construcción proceso de los conceptos de solución única, solución vacía y soluciones infinitas para un sistema de ecuaciones lineales como el definido en el apartado *4.1 Descripción del objeto matemático.*

Previo a trabajar con este método, el estudiante debe haber construido el concepto de sistema de ecuaciones lineales como un proceso. Está construcción se explica a detalle en la sección *4.2.1 Método de Cramer*. La Figura 22 muestra estos constructos mentales dentro de la descomposición genética del método de sustitución.

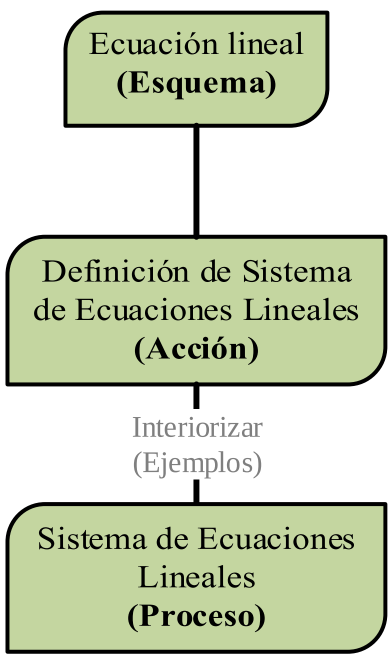


Figura 22. Sistema de ecuaciones lineales como un proceso. Método de sustitución.

Dentro del esquema de ecuación lineal, el estudiante debe demostrar que es capaz de despejar una incógnita dada en una ecuación lineal y encontrar el valor de la misma. Es decir, dentro de la construcción del esquema de ecuación lineal, el estudiante debe haber construido el despeje de ecuaciones lineales al menos como un proceso. Este proceso será necesario para trabajar el método de sustitución.

Por otro lado, dentro de la descomposición genética del método de reducción se describe como el estudiante construye un proceso que llamamos reducción de expresiones algebraicas. Es posible que el estudiante coordine estos dos procesos, despeje de ecuaciones lineales y reducción de expresiones algebraicas, a través de las reglas de manipulación de expresiones que el ya conoce (esquema de expresión algebraica). Esta coordinación se muestra en la Figura 23.

Figura 23. Coordinación por reglas de manipulación.

De esta coordinación surge un nuevo proceso que le permitirá al estudiante establecer las bases para trabajar el método de sustitución. Este nuevo proceso es el de sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales, y se muestra en la Figura 24.

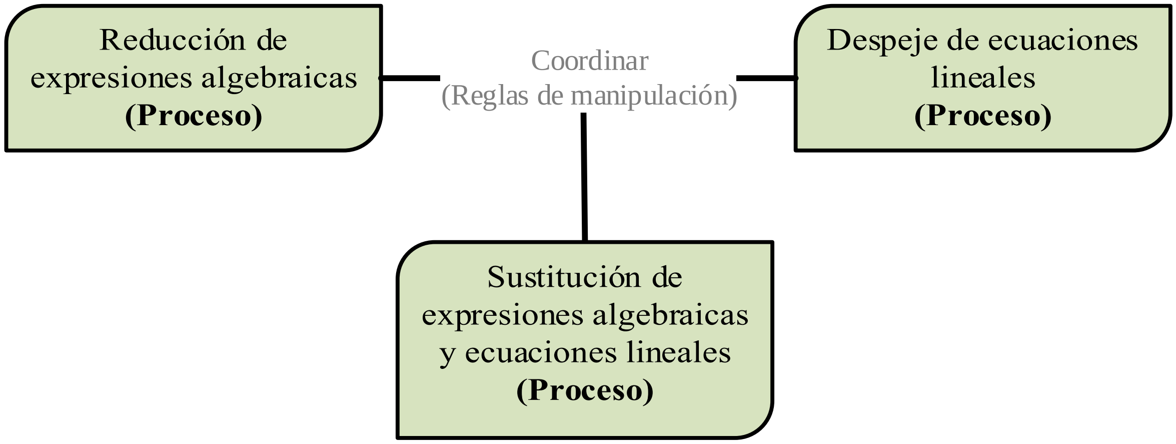


Figura 24. Proceso de sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales.

Al haber construido este proceso, el estudiante es capaz de despejar correctamente literales o constantes de una ecuación o expresión algebraica y sustituir el valor de dicha literal o constante en otra expresión o ecuación según sean necesario.

Cuando el estudiante ha construido este conocimiento puede utilizar el método de reducción. Este método será un mecanismo que nos permita coordinar dos procesos importantes, el de sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales que el estudiante acaba de construir, y el de sistemas de ecuaciones lineales, como se muestra en la Figura 25.

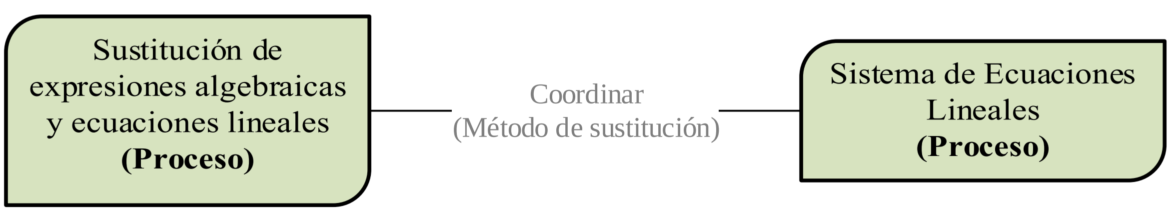


Figura 25. Coordinación por método de sustitución.

A partir de esta coordinación, al igual que en la descomposición genética para el método de reducción, pueden surgir dos procesos distintos, y cuál de ellos surgirá, depende del tipo de sistema con el que se esté trabajando. Si el sistema tiene solución única, se construirá el proceso de ecuación lineal equivalente, como se muestra en la Figura 26.

Por otro lado, si el sistema tiene solución vacía o infinitas soluciones, se construirá el sistema de expresión aritmética o algebraica, mostrado también la Figura 26.

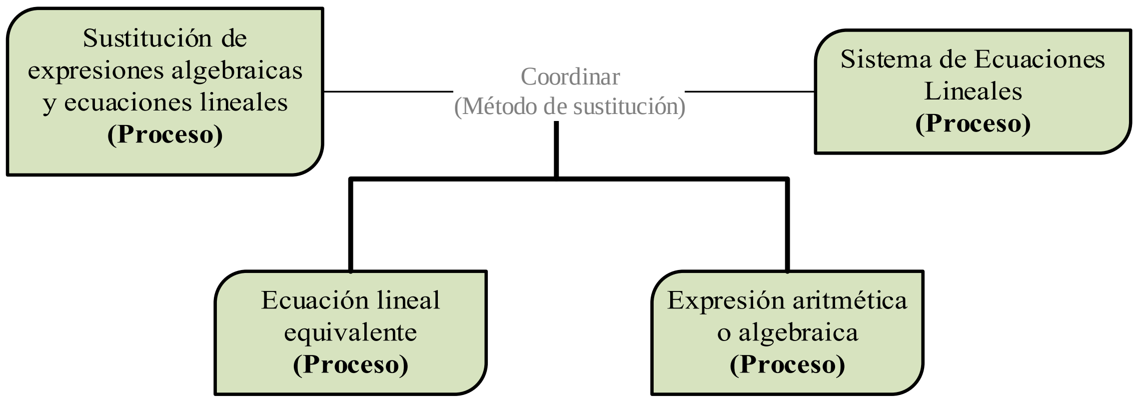


Figura 26. Dos construcciones a partir de una coordinación.

4.2.3.1 Ecuación lineal equivalente. Método de sustitución.

Al igual que en el método de reducción, cuando el estudiante trabaja con un sistema con solución única, al aplicar el método de sustitución obtendrá una ecuación lineal equivalente. Cuando haya construido este proceso, podrá coordinarlo con el proceso de reducción de expresiones algebraicas para llegar a la construcción de la solución única como un proceso. Estas construcciones se muestran en la Figura 27 y son explicadas a detalle en el apartado *4.2.2.1 Ecuación lineal equivalente. Método de reducción.*

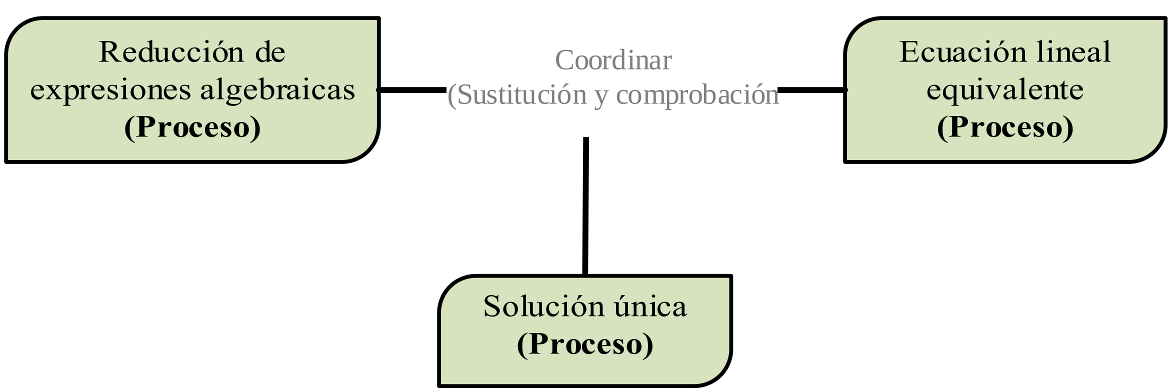


Figura 27. Solución única, proceso. Método de Sustitución.

4.2.3.2 Expresión aritmética o algebraica. Método de sustitución.

Cuando el estudiante trabaja con sistemas con solución vacía o soluciones infinitas, se encontrará con el obstáculo de no poder llegar a una ecuación equivalente, sino que simplemente obtendrá una expresión aritmética o algebraica que es irreducible. Entonces el estudiante, quien ya ha construido el proceso de expresión aritmética o algebraica, necesitará de otros y mecanismos constructos mentales que le auxilien para dar una conclusión al problema con el cual esta trabajado.

En este caso, los conceptos que ayudarán al estudiante serán el de igualdad de expresiones y el de verdad y contradicción. El primero, igualdad de expresiones, lo ha construido anteriormente como un proceso.

Los segundos, verdad y contradicción, más que conceptos corresponden a ideas intuitivas del estudiante que, para él, carecen de definiciones formales o demostraciones. Los constructos y mecanismos que se han descrito en este apartado, le permitirán al estudiante realizar coordinaciones con las cuales llegar a una conclusión sobre el sistema de ecuaciones lineales particular con el que esté trabajando.

Cuando el sistema tenga solución vacía, el estudiante coordinará el proceso de expresión aritmética o algebraica y el proceso de igualdad de expresiones apoyándose de su concepto de contradicción como mecanismo mental. De esta coordinación se construirá el proceso de solución vacía. Estos constructos de muestran en la Figura 28 y son explicados de manera amplia en la sección *4.2.2.2 Expresión aritmética o algebraica. Método de reducción*

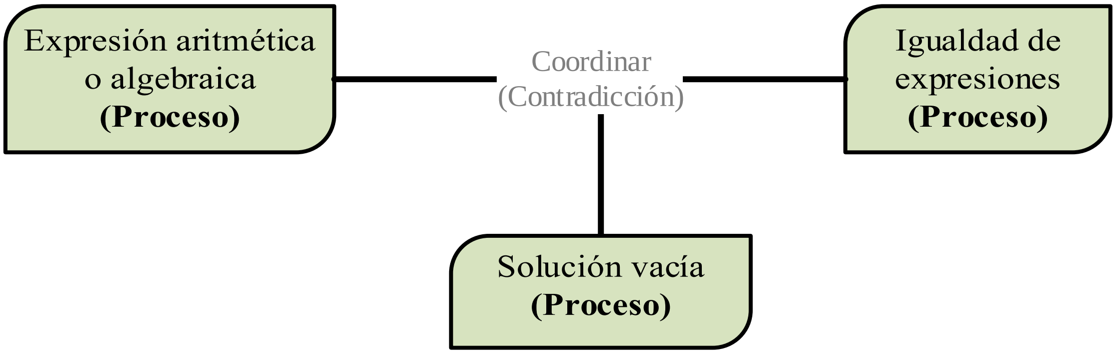


Figura 28. Solución vacía, proceso. Método de Sustitución.

Por otro lado cuando el estudiante trabaje con un sistema de ecuaciones lineales con soluciones infinitas, necesitará su concepto de verdad para realizar la coordinación entre estos dos procesos y así llegar al concepto de soluciones infinitas como un proceso. La Figura 29 ilustra esta coordinación, la cual se explica a detalle en el apartado *4.2.2.2 Expresión aritmética o algebraica. Método de reducción*

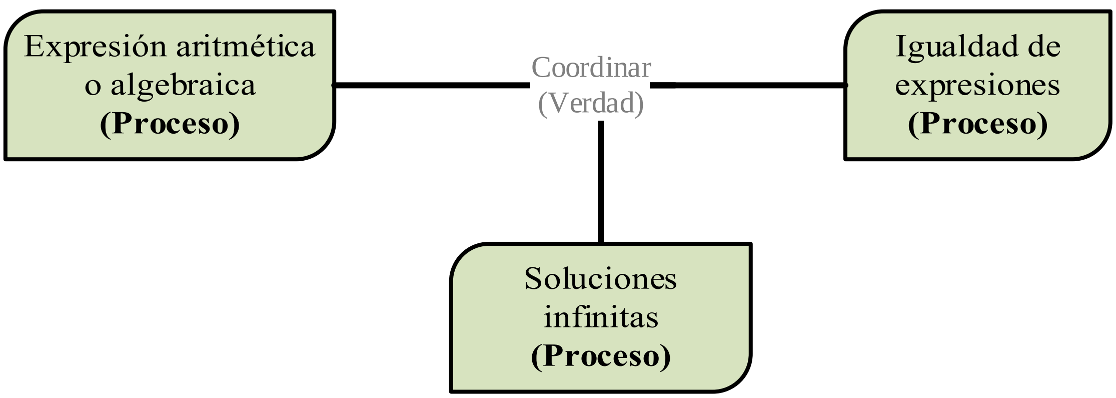


Figura 29. Soluciones infinitas, proceso. Método de sustitución.

Finalmente, en la Figura 30 se muestra la imagen completa de la descomposición genética para el método de sustitución.

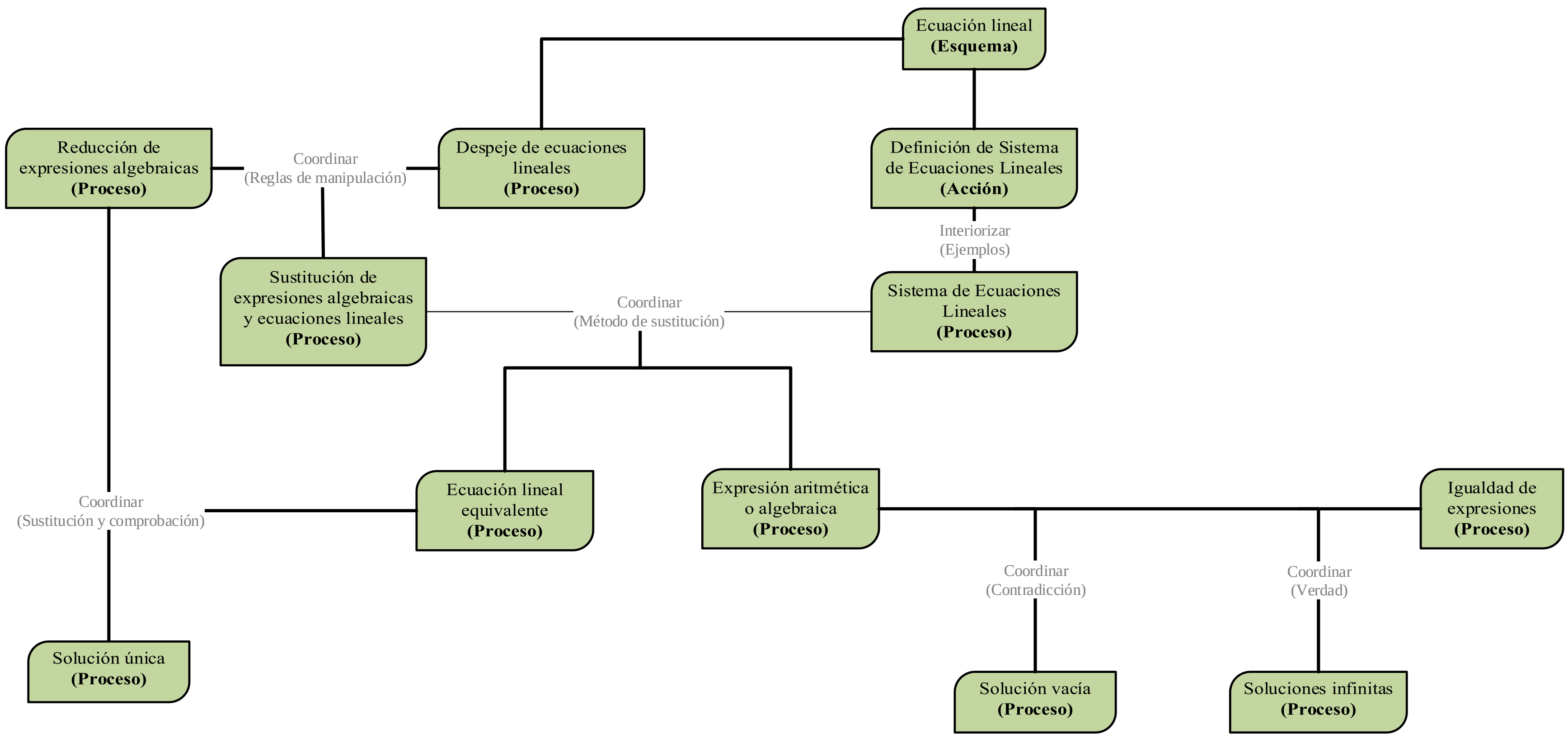


Figura 30. Descomposición genética, Método de Sustitución

4.2.4 Método de igualación

El último de los métodos que se abordará es el método de igualación. A diferencia de los tres métodos anteriores, este método únicamente es aplicable para sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, por ello, dentro del programa para primer semestre de bachillerato de la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEP, 2013) este método solo se incluye en el bloque VII correspondiente a sistemas de ecuaciones de 2x2 y no en el bloque VIII, correspondiente a sistemas de ecuaciones lineales de 3x3.

A pesar de esta diferencia, el trabajar con este método le exige al alumno la construcción de conceptos matemáticos que también han sido necesarios en los tres métodos anteriores. Este el caso del concepto de sistema de ecuaciones lineales como un proceso, el cual es construido a partir del esquema de ecuación lineal que el alumno debe tener como conocimiento previo. La Figura 31 muestra las construcciones mentales que llevan a este proceso y en la sección *4.2.1 Método de Cramer* se explica a detalle cómo es que se van formando dichos constructos mentales.

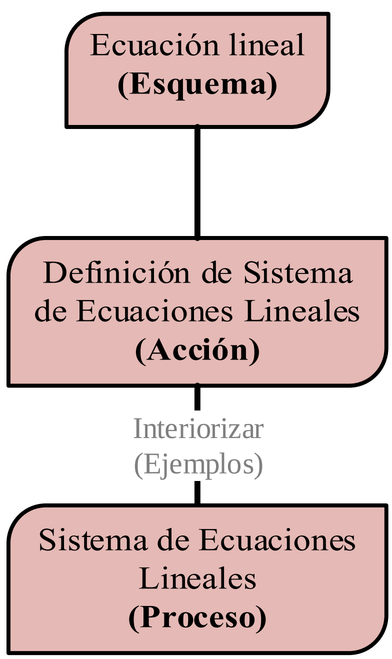


Figura 31. Sistema de ecuaciones lineales como un proceso. Método de Igualación.

Un concepto que será crucial para el uso de este método es el de despeje de ecuaciones lineales. Como se menciona en la descomposición genética para el método de sustitución, el estudiante debe haber construido este concepto previamente cuando construyó el esquema de ecuación lineal. Este proceso, despeje de ecuaciones lineales, implica que el estudiante es capaz de despejar correctamente una literal o constante dada en una ecuación, ya sea para encontrar el valor de una incógnita o para sustituir valores en otra ecuación dada. En este caso, el estudiante necesitará este proceso para coordinarlo con el de sistema de ecuaciones lineales, por medio del método de igualación. Esta coordinación se muestra en la Figura 32.

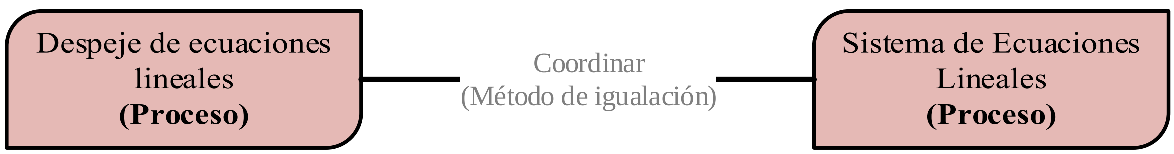


Figura 32. Coordinación por método de igualación.

Una vez que el estudiante aplique el método de igualación obtendrá dos posibles resultados, dependiendo del tipo de sistema con el que esté trabajando. Si el sistema tiene solución única, entonces el estudiante llegará a una ecuación lineal equivalente, un proceso que ha construido previamente. Si el sistema, en cambio, no tiene solución o su conjunto solución es infinito, el estudiante llegará a una expresión aritmética o algebraica. En ambos casos, mostrados en la Figura 33, el estudiante ya ha construido los conceptos matemáticos que le serán necesarios para concluir el sistema de ecuaciones lineales dado.

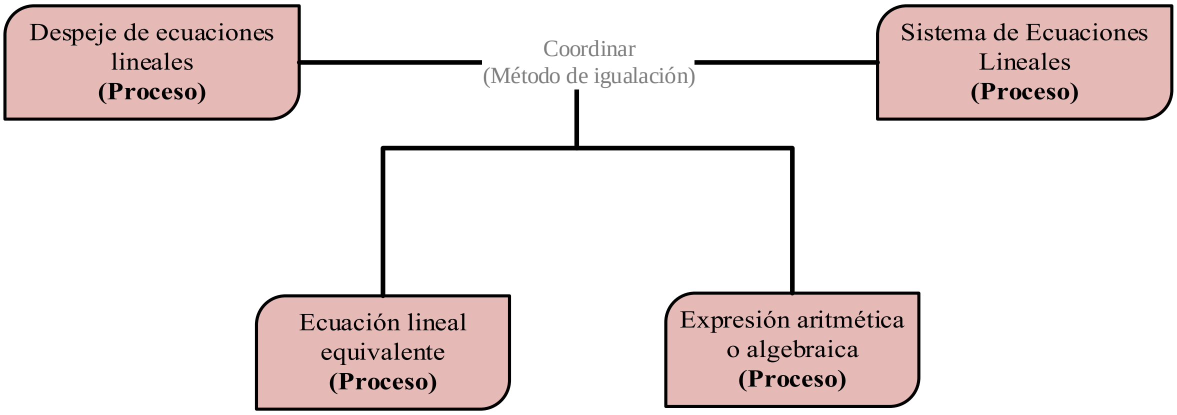


Figura 33. Dos procesos a partir de la coordinación por método de igualación.

4.2.4.1 Ecuación lineal equivalente. Método de igualación.

Cuando el estudiante aplica el método de igualación a un sistema de 2x2 con solución única, obtiene una expresión algebraica con las características de una ecuación equivalente, de la que le será posible obtener el valor de la incógnita. Sin embargo, en primera instancia está expresión puede que no se vea como un ecuación lineal desde la perspectiva del estudiante.

Por ello el estudiante necesitará del proceso de reducción de expresiones algebraicas. Al haber construido este proceso, como se explica en la sección *4.2.2.1 Ecuación lineal equivalente. Método de reducción*, el estudiante tendrá el conocimiento y capacidad de manipular dicha expresión hasta determinar el valor de la primera incógnita, el cual usará, a su vez, para encontrar el valor de la segunda incógnita y así llegar a la solución única del sistema. Estas construcciones mentales se ilustran en la Figura 34.

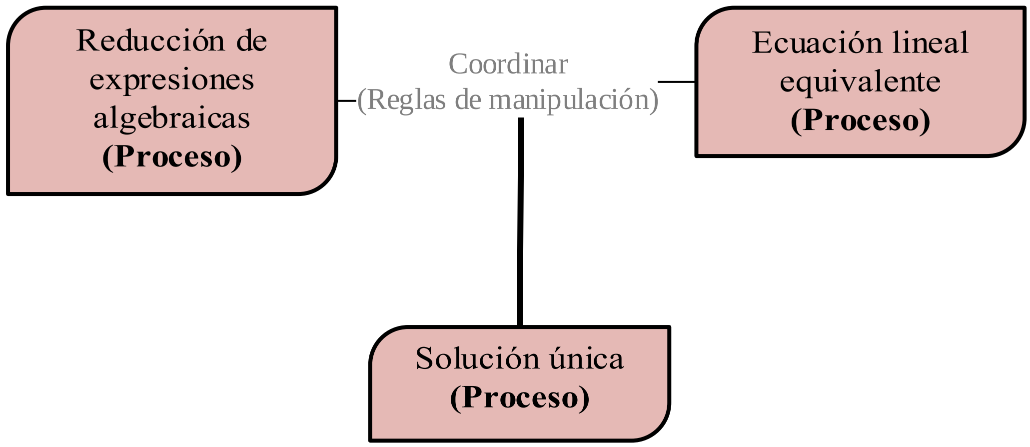


Figura 34. Solución única, proceso. Método de Igualación.

4.2.4.2 Expresión aritmética o algebraica. Método de igualación.

Cuando lo que se está trabajando es un sistema de 2x2 sin solución o con soluciones infinitas, al aplicar el método de igualación, el estudiante llegará a una expresión aritmética o algebraica que será irreducible, es decir, el estudiante no podrá encontrar un valor único para las incógnitas del sistema.

En el apartado *4.2.2.2 Expresión aritmética o algebraica. Método de reducción* de este documento se explica a detalle cómo es que, a partir de esta expresión aritmética o algebraica y apoyándose de conceptos matemáticos que ha construido previamente, el estudiante podrá llegar a concluir si el sistema tiene solución vacía o soluciones infinitas.

En ambos casos el estudiante necesitará el concepto de igual de expresiones. En el caso de solución vacía, este concepto se coordinará a través del concepto que el estudiante posee de contradicción para llegar a determinar que el sistema no tiene solución, como se muestra en la Figura 35.

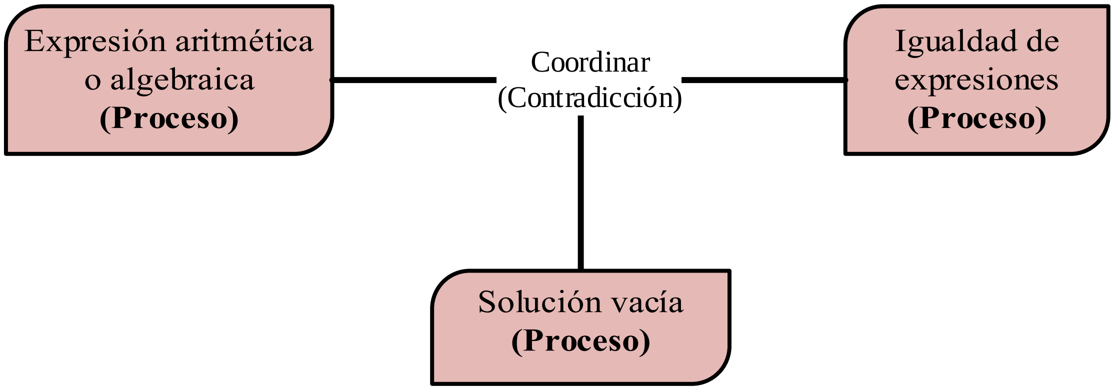


Figura 35. Solución vacía, proceso. Método de Igualación.

En el segundo caso, el estudiante utilizará su concepto de verdad para coordinar los procesos de expresión aritmética o algebraica e igualdad de expresiones, y así concluir que el sistema tiene soluciones infinitas. Estas construcciones se muestran en la Figura 36 y se explican a detalle en la sección *4.2.2.2 Expresión aritmética o algebraica. Método de reducción.*

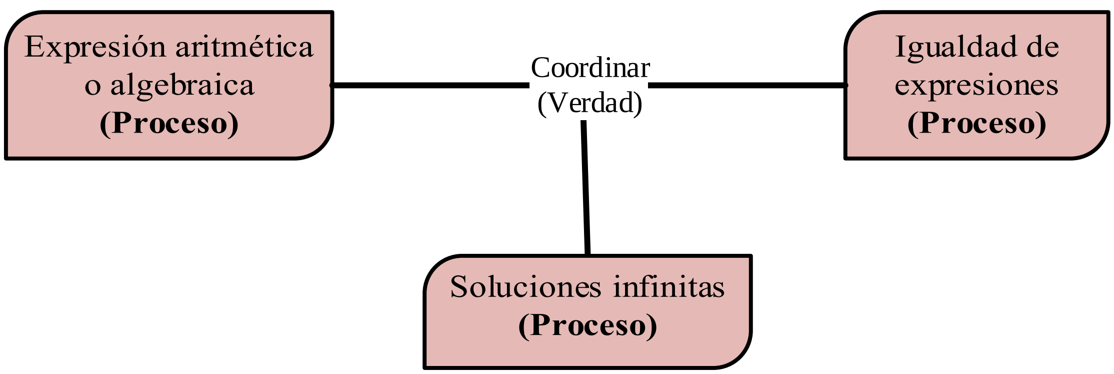


Figura 36. Soluciones infinitas, proceso. Método de Igualación.

Por último, en la Figura 37 de muestra la descomposición genética para el método de igualación en sus totalidad.

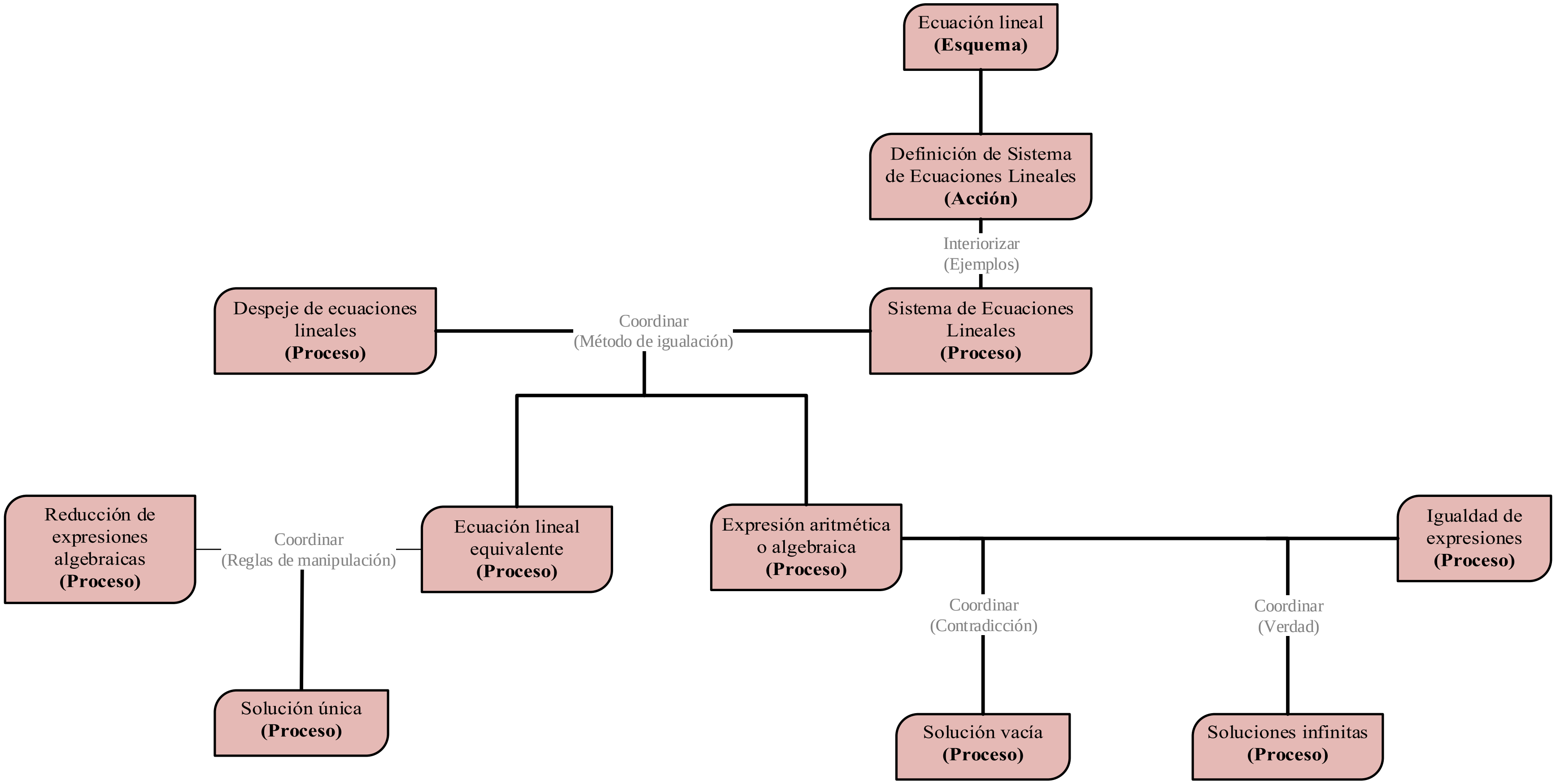


Figura 37. Descomposición genética, Método de Igualación.

4.3 Validación de las descomposiciones genéticas

De acuerdo con lo discutido en la sección *3.3 El ciclo de investigación de la teoría APOE*, muchas investigaciones que trabajan con esta teoría como marco teórico y metodológico, pasan de la fase de análisis teórico directamente a la fase de recolección y análisis de datos. Esto implica que, después de diseñar la o las descomposiciones genéticas hipotéticas para el concepto matemático en cuestión, se diseñan instrumentos de evaluación. Estos instrumentos deberían permitir evaluar si los estudiantes poseen los constructos y mecanismos mentales que se han considerado en el análisis teórico.

Al aplicar y analizar los instrumentos existen dos posibles resultados. Por un lado, la descomposición genética puede ser validada tal y como fue planteada o, puede que necesite hacerse una refinación de la misma, ajustándose a los constructos que los estudiantes demuestren.

En la siguiente sección se describirán los instrumentos diseñados para la validación de las cuatro descomposiciones genéticas presentadas en la sección *4.2 Análisis teórico: descomposiciones genéticas hipotéticas.*

4.3.1 Diseño y análisis a priori de los instrumentos de validación

Considerando las descomposiciones genéticas hipotéticas se diseñaron una serie de cuestionarios para la recolección de datos. Con la finalidad de hacer más fácil y eficiente la recolección y análisis de los datos, las descomposiciones genéticas se segmentaron en cuatro secciones, lo que dio origen a cuatro cuestionarios diferentes.

En las siguientes secciones se explican uno a uno los instrumentos. En primer lugar se explica a qué segmento de las descomposiciones corresponde el cuestionario y cuál es su objetivo principal.

Después se presentan uno a uno los reactivos que forman cada instrumento, señalando qué relación mantiene con la descomposición genética, cuál es la respuesta matemática esperada y, además, se presenta una rúbrica que será útil para que el investigador determine, en base a las respuestas del estudiante, el estado de construcción del concepto matemático que se está evaluando.

4.3.1.1 Cuestionario 1: Conocimientos previos

El primer cuestionario está diseñado para evaluar los constructos de las descomposiciones genéticas que son considerados conocimientos previos, es decir, todas aquellas construcciones mentales que el estudiante debió haber construido previo a empezar a trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Algunos de estos constructos aparecen en las cuatro descomposiciones genéticas, mientras que otros aparecen solo en una de ellas, sin embargo, todos se consideran igualmente importantes para la construcción de la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Se recomienda que las respuestas que los estudiantes den para este cuestionario, sean analizadas antes de seguir adelante con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, pues si los estudiantes no demuestran haber construido estos conceptos, es altamente probable que no tengan éxito en el aprendizaje de los métodos de solución para los sistemas de ecuaciones lineales, pues de acuerdo con la teoría APOE el estudiante no puede aprender sin una base de conocimientos previos sólidamente construidos.

Pregunta 1

En la descomposición genética para el método de Cramer, se explica que es necesario que el estudiante haya construido un esquema aritmético.

La pregunta 1 de este cuestionario está pensada, precisamente, para evaluar este esquema en el estudiante, mostrado en la Figura 38.

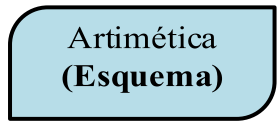


Figura 38. Constructo pregunta 1, cuestionario 1.

Lo que se busca, en particular, es que el estudiante haya llegado a un estado de construcción objeto de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números enteros y racionales. Es decir, que el estudiante sea capaz de realizar estas operaciones con números que pertenezcan al conjunto de los reales. Para evaluar esto se le plantea al estudiante el ejercicio mostrado en la Tabla 1.

Tabla 1. Pregunta 1, cuestionario 1.

Enunciado: *Resuelve las siguientes operaciones sin utilizar calculadora:* *a.* $\frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} - 12$
Respuesta matemática esperada: a. $\frac{-177}{16}$

La rúbrica mostrada en la Tabla 2 describe las acciones observables realizadas por el estudiante al resolver el ejercicio y cómo estas son un indicador, para el investigador, del estado de construcción en que se encuentra el concepto.

Tabla 2. Rúbrica 1, cuestionario 1.

Estado de construcción	Aritmética
Acción	El estudiante no realiza correctamente las operaciones o solo las realiza correctamente de manera individual, pero presenta problemas cuando tiene que hacer varias operaciones, no respeta el orden que dan los paréntesis y tiene dificultades con los signos.
Proceso	El estudiante realiza correctamente la suma y resta, pudiendo presentar dificultades con la multiplicación o división. Puede presentar dificultades con leyes de los signos y orden de las operaciones.
Objeto	El alumno realiza correctamente todas las operaciones, respetando leyes de los signos y el orden dado por los paréntesis.

Pregunta 2

La descomposición genética para el método de reducción habla de la necesidad de que el estudiante haya construido el esquema de expresiones algebraicas antes de iniciar el trabajo con sistemas de ecuaciones lineales, en particular es necesario que haya construido dos procesos. Uno de ellos, el que esta pregunta evalúa, es el de igualdad de expresiones algebraicas, mostrado en la Figura 39.

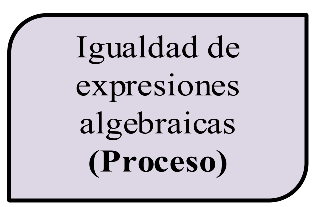


Figura 39. Constructo pregunta 2, cuestionario 1.

Cuando el estudiante ha construido este proceso, es capaz de entender una igualdad como una equivalencia entre partes y no como un resultado a obtener, y entiende que esta equivalencia se mantiene aun cuando las expresiones estén escritas de manera distinta. Para evaluar lo anterior se le pide al estudiante que responda el ejercicio mostrado en la Tabla 3.

Tabla 3. Pregunta 2, cuestionario 1.

Enunciado: *Señala cuales de los siguientes pares de expresiones son equivalentes entre sí. Explica como llegaste a esa conclusión.* a. $7x + 12;$ $\quad -4x + 7 + 5x - 4 + 6x + 9$ b. $-6z + 7$ $\quad -2z - 4 - 6z + 10$ c. $4x - 6$ $\quad x + 5 + 3x - 11$
Respuesta matemática esperada: a. Las ecuaciones son equivalentes entre sí. b. Las ecuaciones no son equivalentes entre sí. c. Las ecuaciones son equivalentes entre sí.

En la rúbrica 2, mostrada en la Tabla 4, se muestran las acciones observables que el estudiante realiza al resolver el ejercicio y como estas son un indicador del estado de construcción en que se encuentra el concepto.

Tabla 4. Rúbrica 2, cuestionario 1.

Estado de construcción	Igualdad de Expresiones algebraicas

Acción	El estudiante no reconoce ningún par de expresiones como iguales o equivalentes.
Proceso	El estudiante reconoce los dos pares de expresiones que son equivalentes, señalando que esta equivalencia se da porque ambas expresiones representan la misma cantidad de elementos.

Pregunta 3

Otro proceso que surge del esquema de expresiones algebraicas es el de simplificación de expresiones algebraicas, mostrado en la Figura 40.

Figura 40. Constructo pregunta 3, cuestionario 1.

Cuando el estudiante trabaje los métodos de solución para resolver sistemas de ecuaciones lineales necesitará este proceso, el cual le permitirá llevar expresiones a su forma irreducible, agrupando elementos semejantes, respetando leyes de signos y signos de agrupación. Para evaluar el estado de construcción de este concepto en el estudiante, se plantea el ejercicio mostrado en la Tabla 5.

Tabla 5. Pregunta 3, cuestionario 1.

Enunciado: *Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:* a. $3x - 4 + x^2 - 9x + 18 - 2x + 2 - x + 1$ b. $6y + 2y^3 - 8 + y^2 - 2y + 6$

Respuesta matemática esperada:

a. $x^2 - 9x + 17$
b. $2y^3 + y^2 + 4y - 2$

La Tabla 6 muestra la rúbrica correspondiente a esta pregunta, la cual nos permite observar el estado de construcción del proceso de la Figura 39 con base en las respuestas del estudiante.

Tabla 6. Rúbrica 3, cuestionario 1.

Estado de construcción	Simplificación de expresiones algebraicas
Acción	El alumno no lleva las expresiones a su forma irreducible. El alumno comete errores al agrupar términos, ignorando leyes de signos o de exponentes.
Proceso	El alumno lleva las expresiones a su forma irreducible.

Pregunta 4

Otro de los elementos considerados como conocimiento previo es el esquema de ecuación lineal. Dentro de este esquema se espera que el estudiante demuestre que ha construido ciertos conceptos a un nivel proceso. Existen tres procesos que destacan por su importancia en la posterior construcción del concepto de sistemas de ecuaciones lineales y de su solución. Para facilitar su análisis, estos tres procesos se evaluarán en preguntas separadas.

El primero de ellos es el de identificación de ecuaciones lineales, mostrado en la Figura 41.

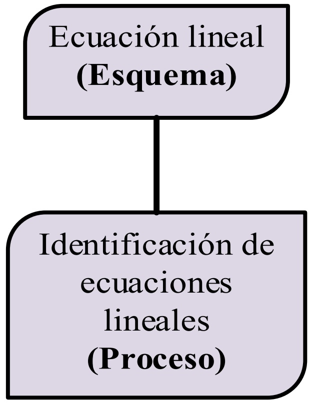


Figura 41.Constructo pregunta 4, cuestionario 1.

La construcción de este proceso implica que el estudiante reconoce las características de una ecuación lineal, distinguiéndolas de las ecuaciones cuadráticas. Para evaluar esto, se le presenta al estudiante la pregunta mostrada en la Tabla 7.

Tabla 7. Pregunta 4, cuestionario 1.

Enunciado: *En la siguiente lista, señales cuáles de las ecuaciones son lineales y cuáles no. Justifica tu respuesta.* a. $x^3 + 7x^2 - 4x = 8$ b. $h = 2x + 8$ c. $2a - 2b + c - 5 = 0$ d. $2xy + 7 = 12$
Respuesta matemática esperada: a. La ecuación no es lineal. b. La ecuación si es lineal. c. La ecuación si es lineal. d. La ecuación si es lineal.

La Tabla 8 nos muestra la rúbrica correspondiente a esta pregunta.

Tabla 8. Rúbrica 4, cuestionario 1.

Estado de construcción	Identificación de Ecuaciones Lineales
Acción	El estudiante no identifica correctamente las ecuaciones que si son lineales. El estudiante identifica correctamente las ecuaciones lineales pero también señala la ecuación del inciso *a* o del inciso *d* como lineal.
Proceso	El estudiante identifica correctamente las ecuaciones que si son lineales y justifica correctamente por qué las ecuaciones del inciso *a* y *d* no son lineales.

Pregunta 5

Esta pregunta busca evaluar otro de los procesos que surgen del esquema de ecuación lineal, el proceso de despeje de ecuaciones lineales, como se muestra en la Figura 42.

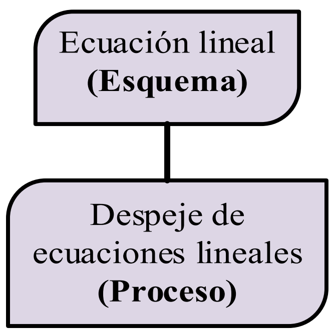


Figura 42. Constructo pregunta 5, cuestionario 1.

Si el estudiante ha construido este proceso, debe ser capaz de emplear correctamente las reglas de despeje para encontrar el valor de una incógnita dada en una ecuación lineal. El ejercicio que se presenta en la Tabla 9 tiene el objetivo de evaluar si el estudiante ha llegado a un estado de construcción proceso de este concepto.

Tabla 9. Pregunta 5, cuestionario 1.

Enunciado: *Encuentra el valor de "x" en las siguientes ecuaciones. ¿Qué puedes concluir respecto a la solución de las ecuaciones?* a. $7x + 12 - y = 3y + 8$ *b.* $4 = 2x + 7$
Respuesta matemática esperada: a. $x = \frac{4}{7}y - \frac{4}{7}$ b. $x = -\frac{3}{2}$

La rúbrica 5, mostrada en la Tabla 10, ayuda a analizar las respuestas dadas por el estudiante para determinar el estado de construcción del concepto de despeje de ecuaciones lineales.

Tabla 10. Rúbrica 5, cuestionario 1.

Estado de construcción	Despeje de ecuaciones lineales
Acción	El estudiante no despeja correctamente la literal. Comete errores de signos o en las reglas de despeje. En el inciso *a* deja ambas literales al mismo lado de la ecuación o señala que no se puede encontrar el valor de *x*.
Proceso	El estudiante despeja correctamente la literal en ambas ecuaciones, respetando signos y reglas de despeje. Señala que si se puede determinar el valor de *x* en ambos casos ya que reconoce que la literal *y* representa un número general.

Pregunta 6

Con este ejercicio se pretende evaluar el proceso de interpretación de ecuaciones lineales, también derivado del esquema de ecuación lineal, mostrado en la Figura 43.

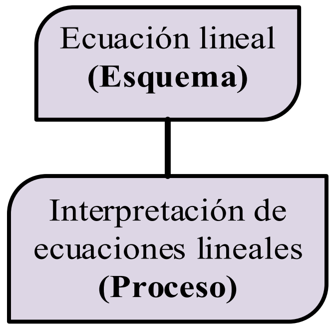


Figura 43. Constructo pregunta 6, cuestionario 1.

Cuando el estudiante ha construido este proceso es capaz de comprender un problema dado por un enunciado y expresarlo en forma de ecuación lineal y, gracias a otros conceptos que ha construido dentro del esquema de ecuación lineal, puede manipular esa ecuación hasta determinar el valor de la o las incógnitas.

Para evaluar este proceso, se le presenta al estudiante un problema dado en un enunciado y se le pide que encuentre un valor que no está dado por el problema, por lo que el estudiante tendrá que plantear la ecuación y poner en juego esas herramientas para encontrar el valor requerido. El problema se muestra en la Tabla 11

Tabla 11. Pregunta 6, cuestionario 1.

Enunciado: *a. Resuelve el siguiente problema:* *Estas de vacaciones en la playa y quieres rentar un bote para pasear con tus amigos. Dispones de $8,000 para hacerlo. Si la renta del bote es de $2,500 más*

$1,100 por cada hora que lo tengas, ¿cuántas horas podrás pasear en el bote con tus amigos?
Respuesta matemática esperada: a. 5 horas

En la Tabla 12 se muestra la rúbrica para analizar la respuesta del estudiante a este ejercicio.

Tabla 12. Rúbrica 6, cuestionario 1.

Estado de construcción	Interpretación de ecuaciones lineales
Acción	El estudiante no puede plantear una ecuación lineal. El estudiante plantea una ecuación lineal que no refleja correctamente la información dada por el problema. El estudiante no puede resolver la ecuación que el mismo planteo.
Proceso	El estudiante plantea correctamente la ecuación, encuentra el valor de la incógnita y la expresa en términos del problema dado.

Pregunta 7

El último de los conocimientos previos a evaluar es el de sistema de ecuaciones lineales como un proceso, como se muestra en la Figura 44.

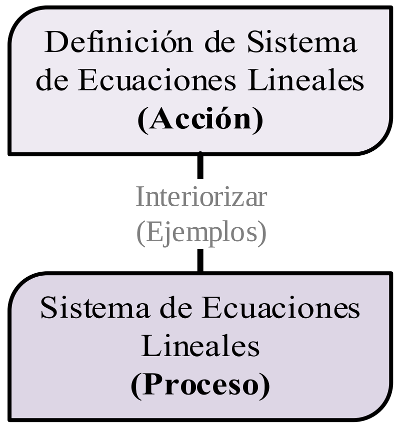


Figura 44. Constructo pregunta 7, cuestionario 1.

Al llegar a esta construcción, el estudiante es capaz de formar sistemas de ecuaciones lineales con la información dada por un problema, de la misma manera que planteaba ecuaciones lineales, aunque aún no posee los conocimientos necesarios para resolver los sistemas, sino que estos se construirán más adelante a partir de todas las construcciones previas que se han evaluado en esta sección. Para validar si el estudiante ha llegado a este estado de construcción, se le platea el problema mostrado en la Tabla 13.

Tabla 13. Pregunta 7, cuestionario 1.

Enunciado: a. *Escribe la o las ecuaciones que consideres describan la información dada en el siguiente problema:* *Tus amigos y tú pasean en el bote que rentaste, vas navegando contra corriente a una velocidad de 30 km/h. Cuando navegas a favor de la corriente alcanzas una velocidad de 60 km/h.* b. *¿Consideras que con las ecuaciones que escribiste podrías encontrar la velocidad de tu bote? ¿Por qué?*
Respuesta matemática esperada: a. $x - y = 30$ $x + y = 60$ b. Opinión del estudiante

La Tabla 14 muestra la rúbrica para analizar los argumentos que el estudiante de como respuesta.

Tabla 14. Rúbrica 7, cuestionario 1.

Estado de construcción	Sistema de Ecuaciones Lineales
Acción	El estudiante plantea ecuaciones independientes entre sí, aunque usa las mismas literales le cuesta trabajo ver la relación entre las ecuaciones. Plantea más o menos ecuaciones de las necesarias.
Proceso	El estudiante plantea las dos ecuaciones necesarias y es capaz de ver y explicar la relación que existe entre ellas, aunque aún no pueda encontrar el valor de la incógnita

4.3.1.2 Cuestionario 2: Método de Cramer

La finalidad de diseñar este cuestionario, es la de evaluar los constructos que se considera que el estudiante debe poner en juego cuando resuelve un sistema de ecuaciones lineales por medio del método de Cramer.

Si el estudiante ha aplicado el cuestionario 1, con resultados favorables, se espera que haya demostrado que ha construido previamente el esquema aritmético. Este esquema es considerado un conocimiento previo indispensable para que el estudiante pueda trabajar el cálculo de determinantes.

El instrumento diseñado contiene dos reactivos, el primero de ellos permitirá observar si el estudiante es capaz de calcular el valor de un determinante. El segundo pretende observar si el estudiante logra una construcción objeto del método de Cramer y si es capaz de realizar la desencapsulación descrita en la descomposición genética hipotética. A continuación se hace un análisis de ambas preguntas, tal y como se analizaron los reactivos del cuestionario 1 en la sección *4.3.1.1 Cuestionario 1: Conocimientos previos*.

Pregunta 1

Esta pregunta está pensada para evaluar el estado de construcción al que el estudiante ha llegado del concepto determinante, mostrado en la Figura 45.

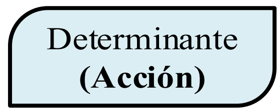


Figura 45. Constructo pregunta 1, cuestionario 2.

Para validar si el estudiante ha construido esta acción, se usa un ejemplo de un determinante de 3x3. El estudiante debe conocer el método para calcular estos determinantes y, como previamente ha construido el esquema aritmético, no deberá tener problemas para realizar el cálculo. Si calcular el determinante le causa conflicto o lo hace incorrectamente, es posible que no pueda seguir avanzando en la construcción del Método de Cramer, pues el cálculo de determinantes es la base de éste. Dado que, como se explica en el desarrollo de la descomposición genética para el método de Cramer en la sección *4.2.1 Método de Cramer*, únicamente se busca llegar a un estado de construcción acción de este concepto, es posible durante la aplicación del instrumento apoyar al estudiante en los pasos para el cálculo del determinante, si éste así lo solicita. El ejercicio que se le plantea al estudiante, se muestra en la Tabla 15.

Tabla 15. Pregunta 1, cuestionario 2.

Enunciado: *Calcula el valor del siguiente determinante. No utilices calculadora.*   a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ \frac{9}{3} & -1 & 6 \\ 4 & \frac{8}{4} & -2 \end{vmatrix}$

Respuesta matemática esperada:
a. Det = -50

Si el estudiante resuelve el problema correctamente está demostrando, de manera implícita, que también puede realizar cálculos de determinantes de 2x2. La Tabla 16 muestra la rúbrica para este reactivo, la cual ayudará al investigador a relacionar las acciones que realiza el estudiante con el estado de construcción del concepto.

Tabla 16. Rúbrica 1, cuestionario 2.

Estado de construcción	Determinante
Acción	El estudiante aplica el método dado para calcular determinantes de 3x3. Necesita auxiliarse de flechas y dibujos que le señalen el orden que debe seguir. El estudiante solicita ayuda para recordar los pasos para el cálculo de determinantes. El estudiante comete errores (aritméticos o del método) pero revisa e intenta corregir.

Pregunta 2

La pregunta 2 del cuestionario 2 se divide en dos incisos. El primer inciso busca recoger datos de tres construcciones mentales a la vez, las mostradas en la Figura 46.

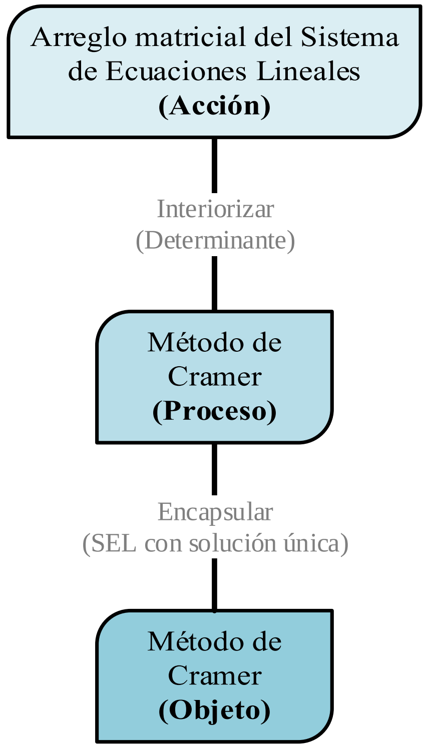


Figura 46. Constructos pregunta 2, inciso a, cuestionario 2.

El segundo inciso se diseñó con la finalidad de recoger datos de las dos construcciones y del mecanismo mental que se muestran en la Figura 47.

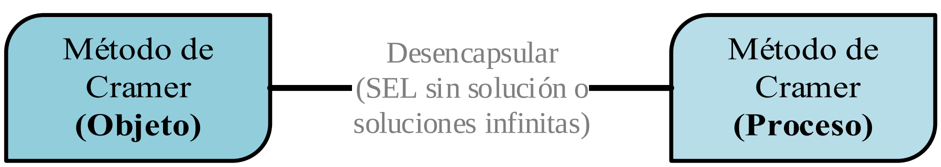


Figura 47. Constructos pregunta 2, inciso b, cuestionario 2.

Se le plantea al estudiante un problema con dos incisos, el inciso a) es un sistema de 2x2 con solución única, mientras que el inciso b) es un sistema de 2x2 con solución vacía y se le pide al estudiante que los resuelva específicamente por el método de Cramer.

En primer lugar, el estudiante debe calcular el determinante asociado al sistema, al acomodar correctamente los elementos del sistema para calcular su determinante, el estudiante demuestra que ha construido la acción arreglo matricial.

En el inciso a, cuando el estudiante calcula todos los determinantes que necesita y aplica las fórmulas para determinar el valor de las incógnitas, demuestra que ha construido el proceso método de Cramer. Debido a que el sistema del inciso b tiene solución vacía no es posible resolverlo por método de Cramer. Cuando le pedimos al estudiante que comente las dificultades encontradas, esperamos que indique que ese sistema no se puede resolver por este método, pues no posee una solución única. Al expresar esto, el estudiante demuestra que pudo encapsular el proceso método de Cramer y que, además, lo des-encapsuló cuando fue necesario para determinar por qué no se podía resolver (determinante asociado al sistema igual a cero).

La Tabla 17 muestra el ejercicio planteado al estudiante y las respuestas esperadas.

Tabla 17. Pregunta 2, cuestionario 2.

Enunciado: *Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Cramer. ¿Encuentras alguna dificultad para resolverlo? Si es así, ¿cuál es la dificultad y a qué consideras que se debe?* a. $x - y = 30$ $x + y = 60$ b. $2x + y = 21$ $4x + 2y = 28$
Respuesta matemática esperada: a. x= 45; y=15 b. El sistema no se puede resolver (no tiene solución).

En la rúbrica mostrada en la Tabla 18 se sintetiza el análisis hecho en el párrafo anterior, con la finalidad de ayudar al investigador a determinar el estado de construcción que el estudiante demuestra, de los conceptos matemáticos involucrados.

Tabla 18. Rúbrica 2, cuestionario 2.

Estado de construcción	Arreglo matricial del SEL
Acción	El estudiante acomoda correctamente los elementos del sistema de ecuaciones lineales para calcular los determinantes necesarios.
Estado de construcción	**Método de Cramer**
Acción	El estudiante aun comete errores en el acomodo o en el cálculo de los determinantes. Si el determinante asociado al sistema es igual a cero, el estudiante continúa con los cálculos. El estudiante necesita anotar las fórmulas del método, de otra manera no sabe cuáles elementos necesita calcular.
Proceso	El estudiante calcula correctamente los determinantes que se necesitan para el método. Cuando el sistema tiene solución única (inciso a) el estudiante puede llegar a ella sin problema. Si comete errores de cálculo los corrige al hacer la comprobación. Si el determinante asociado al sistema es igual a cero, el estudiante continúa con los cálculos. Cuando el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones (inciso b) el estudiante asume que ese sistema no se puede resolver.
Objeto	El estudiante calcula correctamente los determinantes que se necesitan para el método. Cuando el sistema tiene solución única (inciso a) el estudiante puede llegar a ella sin problema. Reafirma el resultado obtenido por comprobación. Cuando el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones (el determinante asociado al sistema es igual a cero, inciso b) el estudiante es capaz de determinar que el sistema no se puede resolver por método de Cramer, pero eso no implica que no tenga solución.

4.3.1.3 Cuestionario 3: Métodos de solución: reducción, sustitución e igualación.

Cuando el estudiante demuestra que ha construido los conocimientos previos pertinentes (evaluados en el cuestionario 1), es posible comenzar a trabajar en la construcción del concepto conjunto solución, a través de los tres métodos de solución algebraicos que considera este trabajo de tesis.

Este trabajo considera una descomposición genética independiente para cada uno de los tres métodos de solución algebraicos. Sin embargo, se puede observar que estas descomposiciones comparten la mayoría de sus componentes, diferenciándose entre sí en algún constructo previo que es necesario para cada método en particular.

Todos estos constructos llevan a un mismo punto, la construcción de los conceptos solución única, solución vacía y soluciones infinitas como procesos, siendo los métodos de resolución un mecanismo que permite coordinar los procesos necesarios para construir dichos conceptos.

Este cuestionario fue diseñado, precisamente con el propósito de evaluar la construcción de estos conceptos (solución única, solución vacía y soluciones infinitas), a través de los tres métodos de solución algebraicos.

Originalmente se consideró que una manera de recolectar más datos que permitieran llegar a un análisis más profundo de los constructos mentales propuestos en las descomposiciones genéticas, sería incluir en el instrumento un sistema de ecuaciones lineales por cada método y por cada tipo de solución, es decir, 9 sistemas diferentes.

Sin embargo, en la práctica esto resultaría en un cuestionario muy tedioso para los informantes, lo cual podría resultar, contrario a lo que se pensó originalmente, perjudicial para la recolección de datos. Por lo anterior, se decide que la validación se lleve a cabo a través de dos cuestionarios. Cada uno de estos cuestionarios contendrá tres sistemas de ecuaciones que el estudiante debe resolver. De estos tres sistemas uno será con solución única, uno con solución vacía y otro con soluciones infinitas, y se le solicitará al estudiante que resuelva cada uno de ellos por alguno de los tres métodos algebraicos.

Los sistemas planteados para los cuestionarios serán seleccionados tomando en cuenta las consideraciones que se describen a continuación. Por un lado, dado que el método de igualación no se maneja en los sistemas de ecuaciones lineales de 3x3, los sistemas a trabajar con este método serán de 2x2. Por otra parte, los sistemas de 3x3 que se planteen tendrán solución única, esto con la finalidad de que el estudiante tenga que realizar un manejo aritmético y algebraico completo, a diferencia de los sistemas sin solución o con soluciones infinitas que, idealmente, quedan resueltos en pocos pasos, y así brinde más información al investigador para el análisis de las descomposiciones genéticas. De los cuatro sistemas de 2x2 que se plantearán, dos tendrán solución vacía y dos tendrán soluciones infinitas.

Entonces, los cuestionarios a plantear serán como se describe a continuación:

i) Cuestionario 3, tipo 1: un sistema de 3x3 con solución única a resolver por el método de reducción, un sistema de 2x2 con solución vacía a resolver por el método de igualación, y un sistema de 2x2 con soluciones infinitas a resolver por el método de sustitución.

ii) Cuestionario 3, tipo 2: un sistema de 3x3 con solución única a resolver por el método de sustitución, un sistema de 2x2 con solución vacía a resolver por el método de reducción, y un sistema de 2x2 con soluciones infinitas a resolver por el método de igualación.

Los sistemas de ecuaciones lineales que se planteen en ambos cuestionarios serán los mismos, solamente cambiando el método por el cual deben resolverse. Esto con la finalidad de comparar como trabajan los estudiantes distintos métodos de resolución con un mismo sistema. A continuación se hará el análisis de cada uno de los reactivos para ambos cuestionarios.

Cuestionario 3, tipo 1. Pregunta 1

La pregunta 1 de este cuestionario está pensada para evaluar las construcciones y los mecanismos mentales que el estudiante pone en juego cuando necesita construir el concepto de solución única de un sistema de ecuaciones lineales, a través del trabajo con el método de reducción. Estos constructos se muestran en la Figura 48.

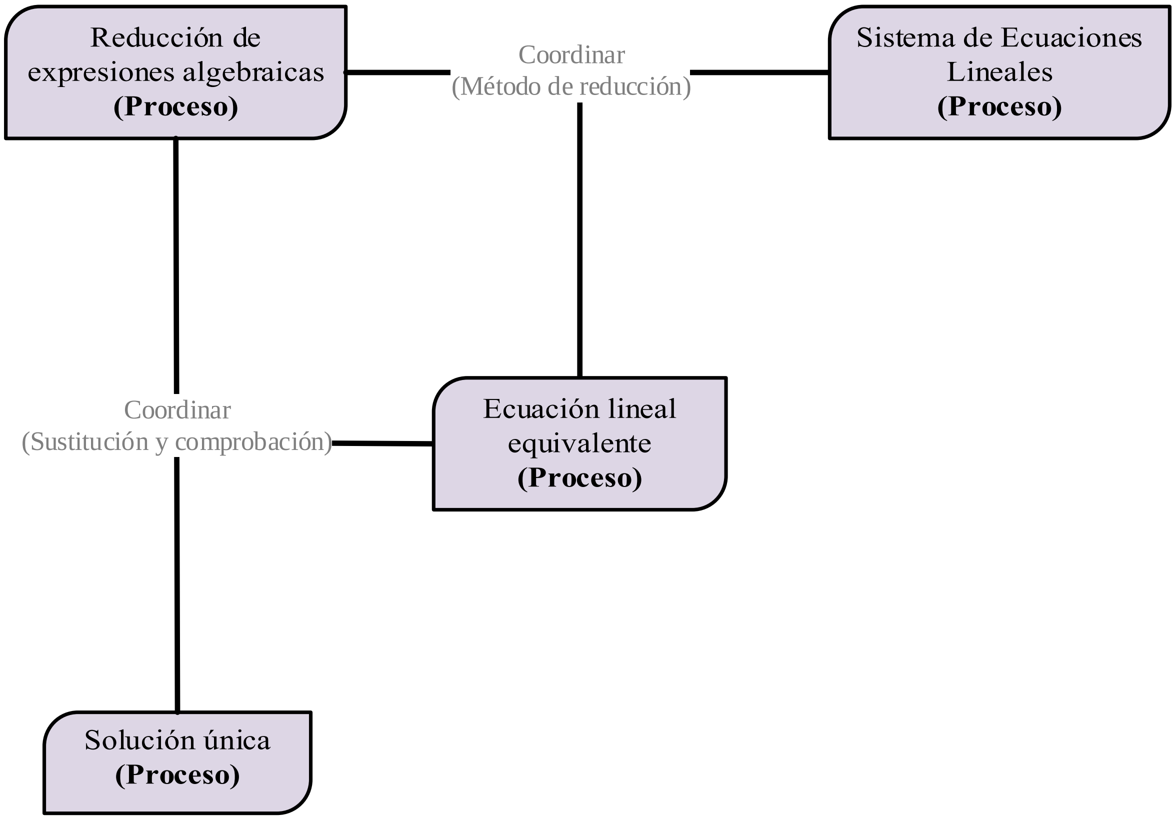


Figura 48. Constructos pregunta 1, cuestionario 3, tipo 1.

Para hacer la validación se le plantea al estudiante un sistema de ecuaciones lineales de 3x3 y se le da la instrucción específica de que lo resuelva por el método de reducción.

Las primeras manipulaciones que el estudiante realice con las ecuaciones lineales del sistema para llegar a un sistema equivalente de 2x2 y, posteriormente a una ecuación lineal equivalente, darán muestra de la construcción del concepto reducción de expresiones algebraicas como un proceso, y de la coordinación que se da entre éste concepto y el de sistema de ecuaciones lineales, también construido como un proceso, y como esta coordinación lleva a construcción del concepto ecuación lineal equivalente, también como un proceso.

Cuando el estudiante determine el valor de la primera incógnita se espera que lo utilice para sustituir en alguna de las ecuaciones del sistema equivalente, para así determinar el valor de la segunda incógnita, y entonces tener que repetir este proceso para determinar el valor de la tercera incógnita. Una vez que tenga los tres valores, se espera que compruebe los resultados que obtuvo, sustituyendo el valor de las incógnitas en las ecuaciones originales, esto dará muestra de que el estudiante está construyendo el concepto de solución única como un proceso.

Todo lo anterior permite observar si el estudiante ha coordinado los procesos de reducción y ecuación equivalente y, además, permite observar si se ha llegado a la construcción del concepto de solución única como proceso. En la Tabla 19 se muestra el ejercicio que se le plantea al estudiante.

Tabla 19. Pregunta 1, cuestionario 3, tipo 1.

Enunciado: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción. ¿Qué puedes comentar acerca de la solución? $x + 2y + z = -6$ $4x - 2y - z = -4$ $2x - y + 3z = 19$
Respuesta matemática esperada: $x = -2; y = -5; z = 6$

La rúbrica mostrada en la Tabla 20 permite al investigador relacionar las acciones observables del estudiante con los estados de construcción de los conceptos involucrados en la pregunta.

Tabla 20. Rúbrica 1, cuestionario 3, tipo 1.

Estado de construcción	Reducción de expresiones algebraicas
Acción	El estudiante no identifica las operaciones que debe realizar para eliminar la incógnita deseada. Realiza operaciones al azar hasta llegar a un resultado. Realiza las operaciones correctamente después de algunos intentos. El estudiante no logra eliminar la incógnita deseada.
Proceso	El estudiante opera correctamente las ecuaciones, multiplicando y sumando para eliminar la incógnita deseada. Respeta leyes de los signos. Logra llevar el sistema a una ecuación lineal equivalente de una incógnita.
Estado de construcción	**Ecuación lineal equivalente**
Acción	El estudiante obtiene una ecuación lineal que no es equivalente al sistema original.
Proceso	El estudiante reduce correctamente el sistema de 3x3 hasta llegar a una ecuación lineal con una incógnita. Manipula correctamente la ecuación lineal para obtener el valor de la incógnita. Utiliza el valor encontrado y la reducción para encontrar los dos valores faltantes.
Estado de construcción	**Solución única**
Acción	El estudiante no realiza la comprobación una vez que ha obtenido el valor de las tres incógnitas. El estudiante realiza la comprobación. Da el ejercicio por bueno aun si no se satisfacen las tres ecuaciones.
Proceso	El estudiante realiza la comprobación con los valores encontrados. No da la respuesta por correcta hasta que los valores satisfagan a las tres ecuaciones a la vez.

Cuestionario 3, tipo 1. Pregunta 2

Con esta pregunta se busca evaluar las construcciones que el alumno hace para llegar al concepto de solución vacía como un proceso, utilizando el método de igualación.

En la Figura 49 se muestran dichas construcciones.

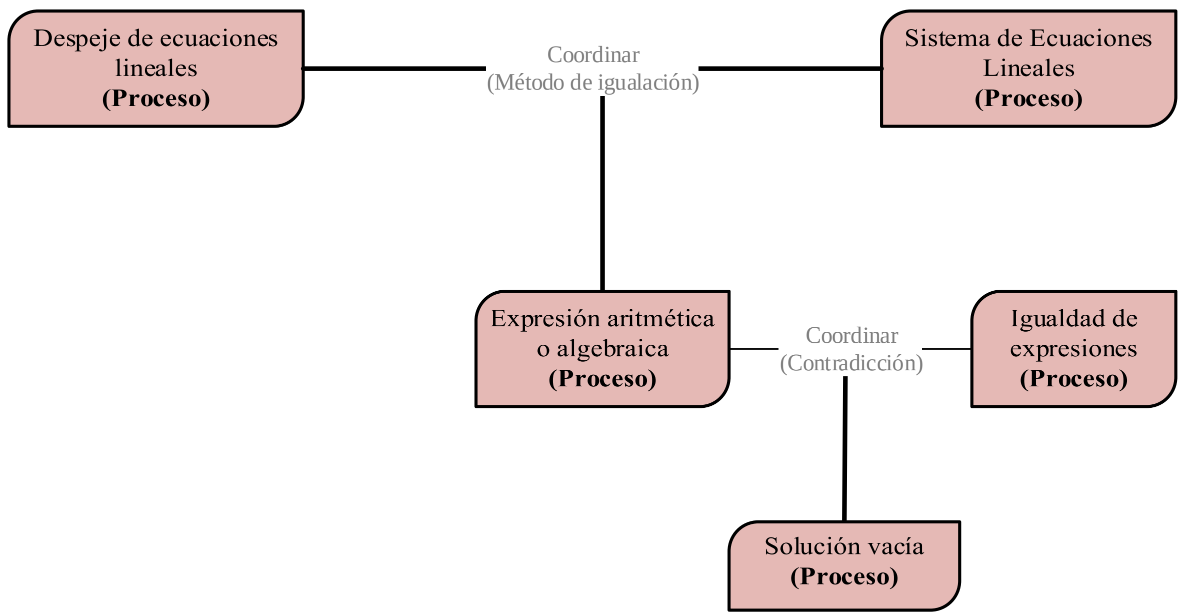


Figura 49. Constructos pregunta 2, cuestionario 3, tipo 1.

Para evaluar los constructos de la Figura 49, se le plantea al estudiante un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas, cuyo conjunto solución es vacío, y se le da la instrucción de resolverlo por el método de igualación.

Para poder resolver el sistema, el estudiante debe primero despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones. Al hacer esto estará dando muestras del estado de construcción en el que se encuentra el concepto de despeje de ecuaciones lineales. Cuando el estudiante iguale los valores despejados, estará coordinando el concepto de despeje de ecuaciones lineales, como un proceso, con el concepto de sistema de ecuaciones lineales (también un proceso) y la coordinación se estará dando a través del método de igualación.

Debido a que es un sistema sin solución, al hacer la igualación el estudiante llegará a una expresión (aritmética o algebraica) que carecerá de sentido para el (por ejemplo, 2=8; 2x=4x, etc.). Si el estudiante es capaz de reconocer que se trata de una expresión algebraica irreducible dónde el valor de la incógnita no puede ser determinado, es porque ha construido el concepto de expresión algebraica como un proceso.

Si el estudiante es capaz de llegar a la conclusión de que el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución dado que la expresión aritmética o algebraica que encontró carece de sentido, está demostrando que posee el concepto de igualdad de expresiones como un proceso, y que es capaz de coordinarlo con el concepto de expresión aritmética o algebraica (también un proceso) a través de la contradicción. Todo esto llevará al estudiante a la construcción del concepto de solución vacía como un proceso. Entonces el estudiante comprende que no le será posible encontrar valores ningún conjunto de valores que satisfagan las ecuaciones que conforman al sistema. La Tabla 21 muestra el ejercicio que se le plantea al estudiante.

Tabla 21. Pregunta 2, cuestionario 3, tipo 1.

Enunciado: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación. ¿Encontraste alguna dificultad? ¿Qué puedes comentar acerca de la solución? $2w + n = 21$ $4w + 2n = 28$
Respuesta matemática esperada: El sistema no tiene solución. El conjunto solución del sistema es vacío.

En la Tabla 22 se muestra la rúbrica correspondiente a este reactivo.

Tabla 22. Rúbrica 2, cuestionario 3, tipo 1.

Estado de construcción	**Despeje de ecuaciones lineales**
Acción	El estudiante no despeja correctamente la literal. Comete errores de signos o en las reglas de despeje. El estudiante despeja correctamente la literal, siempre y cuando su coeficiente sea 1.
Proceso	El estudiante despeja correctamente la literal respetando signos y reglas de despeje. Despeja correctamente la literal aunque su coeficiente sea diferente de 1.
Estado de construcción	**Expresión aritmética o algebraica**
Acción	Encuentra la expresión algebraica, no la analiza y finaliza el ejercicio diciendo que el sistema no se puede resolver.
Proceso	Analiza la expresión encontrada y llega a la conclusión de que es una contradicción.
Estado de construcción	**Solución vacía**
Acción	Reconoce que por ser una contradicción el sistema no se puede resolver. No reconoce si el sistema tiene solución vacía o soluciones infinitas.
Proceso	Reconoce que el llegar a la contradicción implica que el sistema no tiene solución.

Cuestionario 3, tipo 1. Pregunta 3

Esta pregunta está planteada con la intención de observar las construcciones mentales que el alumno desarrolla para llegar al concepto de soluciones infinitas de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 cuando lo resuelve por el método de sustitución. Dichas construcciones mentales se muestran la Figura 50.

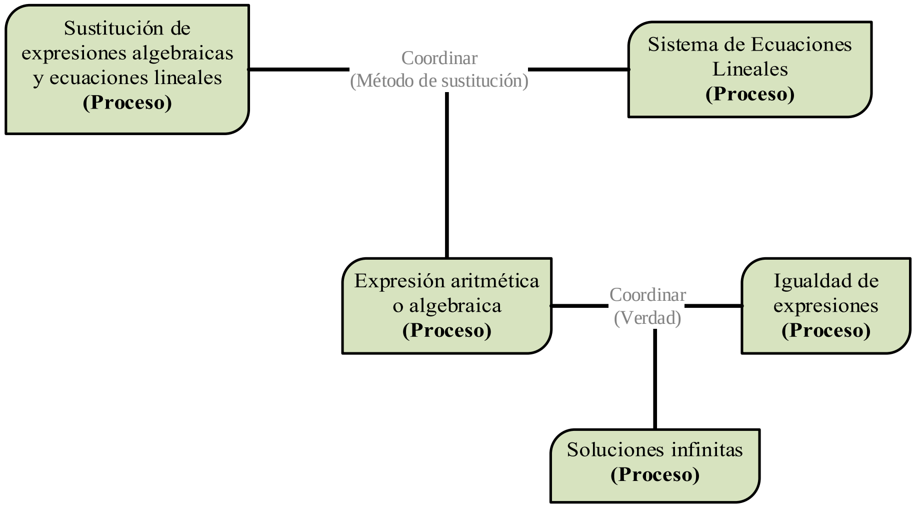


Figura 50. Constructos pregunta 3, cuestionario 3, tipo 1.

Cuando el alumno comience a trabajar el ejercicio necesitará, en primer lugar, despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones lineales y sustituir el valor encontrado en la otra ecuación lineal del sistema. Estos paso darán muestra del estado de construcción que el alumno ha alcanzado del concepto de sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales y de si es capaz de coordinar este concepto (que debió llegar a un estado de construcción proceso) con el concepto de sistema de ecuaciones lineales, a través del método de sustitución.

Dado que el sistema con el que se está trabajando tiene infinitas soluciones, cuando el estudiante realice la coordinación mencionada en el párrafo anterior, le será imposible llegar a una ecuación lineal equivalente y, en su lugar, obtendrá una expresión algebraica o aritmética que representa una verdad (6=6, y=y, etc.). Si el estudiante es capaz de reconocer que se trata de una expresión algebraica irreducible dónde el valor de la incógnita no puede ser determinado, es porque ha construido el concepto de expresión aritmética o algebraica como un proceso.

Para que el ejercicio quede concluido, es necesario que el estudiante note que se trata de un sistema con infinitas soluciones. Lo anterior implica que el estudiante realice una coordinación entre los conceptos de expresión aritmética o algebraica e igualdad de expresiones, ambos construidos como procesos, a través de su concepto intuitivo de verdad. Si el estudiante es capaz de realizar esta coordinación y de relacionar el hecho de que la expresión que encontró representa una verdad con el hecho de que el sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones, entonces podremos decir que el estudiante ha construido el concepto de soluciones infinitas como un proceso.

La Tabla 23, mostrada a continuación, contiene el sistema de ecuaciones lineales de 2x2 planteado en este reactivo y su correspondiente respuesta esperada.

Tabla 23. Pregunta 3, cuestionario 3, tipo 1.

Enunciado: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de sustitución. Comenta si encontraste alguna dificultad y escribe tus conclusiones acerca de la solución. $3g + h = 2$ $9g + 3h = 6$
Respuesta matemática esperada: El sistema tiene infinitas soluciones. El conjunto solución del sistema es infinito.

La rúbrica mostrada en la Tabla 24 sintetiza lo descrito en los párrafos anteriores, y servirá como guía al investigador para determinar si el estudiante ha construido los conceptos señalados en la descomposición genética hipotética del método de sustitución.

Tabla 24. Rúbrica 3, cuestionario 3, tipo 1.

Estado de construcción	Sustitución ecuación algebraica
Acción	El estudiante comete errores en el despeje de la incógnita, generando resultados erróneos en los siguientes pasos. El estudiante despeja correctamente la incógnita pero comete errores al sustituirla.

Proceso	El estudiante realiza correctamente el despeje y sustitución de la incógnita y logra llegar a la expresión algebraica.
Estado de construcción	**Expresión aritmética o algebraica**
Acción	Encuentra la expresión algebraica, no la analiza y finaliza el ejercicio diciendo que el sistema no se puede resolver.
Proceso	Analiza la expresión encontrada y llega a la conclusión de que es una verdad.
Estado de construcción	**Soluciones infinitas**
Acción	Reconoce que por ser una verdad el sistema no se puede resolver. No reconoce si el sistema tiene solución vacía o soluciones infinitas.
Proceso	Reconoce que el llegar a la verdad implica que el sistema tiene soluciones infinitas. Intenta encontrar algún par ordenado que satisfaga ambas ecuaciones o expresar la solución con una incógnita en términos de la otra.

Cuestionario 3, tipo 2. Pregunta 1

Como se describió al inicio de la sección *4.3.1.3 Cuestionario 3: Métodos de solución: reducción, sustitución e igualación.*, esta segunda versión del cuestionario está diseñada con la intención de recolectar más datos que contribuyan a enriquecer el análisis de las descomposiciones genéticas propuestas.

Para ello, se consideran los mismos sistemas planteados en la versión 1 pero siendo resueltos por métodos distintos. La pregunta 1 plantea un sistema de 3x3 con solución única que debe ser resuelto por el método de sustitución, esto permitirá evaluar los constructos mostrados en la Figura 51.

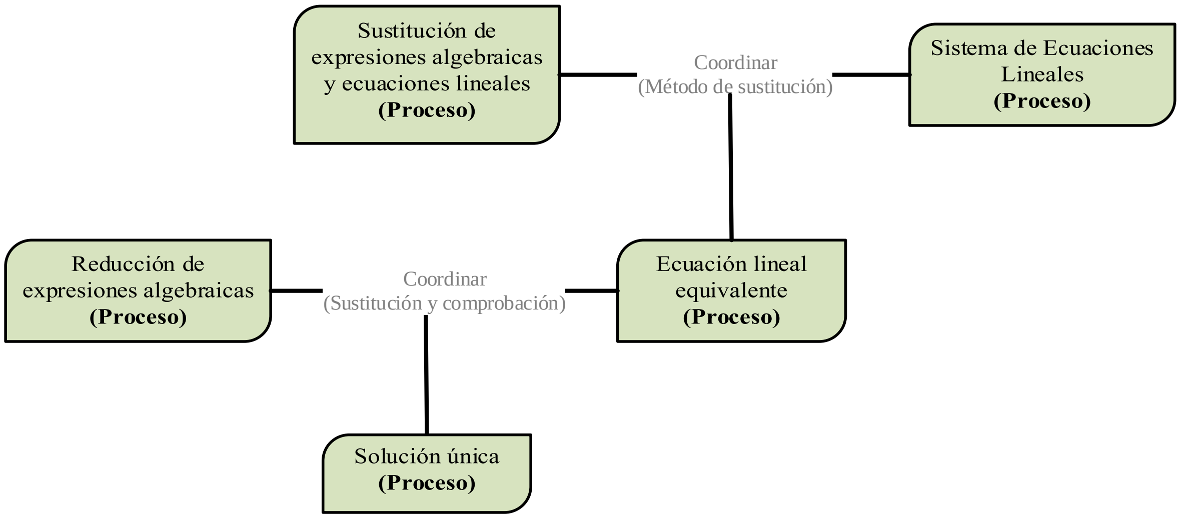


Figura 51. Constructos pregunta 1, cuestionario 3, tipo 2.

Al igual que en la pregunta 3 de la versión 1 del cuestionario 3, el estudiante necesitará, en primer lugar, despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones del sistema y sustituir su valor en las otras ecuaciones. Si el estudiante es capaz de repetir este proceso las veces necesarias, hasta llegar a obtener una ecuación lineal equivalente, estará demostrando que ha construido los conceptos de sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales y el de sistemas de ecuaciones lineales como procesos, y que es capaz de coordinarlos a través del método de sustitución. De esta coordinación, se construye el concepto de ecuación lineal equivalente como un proceso. Si el estudiante es capaz de determinar el valor de la primera incógnita y utilizarlo para encontrar el valor de las dos incógnitas restantes, está dando muestras de que es capaz de coordinar el concepto de reducción de expresiones algebraicas (construido como un proceso) con el de ecuación lineal equivalente, por medio de la sustitución y comprobación lo cual lo llevará, finalmente, a construir el concepto de solución única como un proceso.

La Tabla 25 muestra el ejercicio que se le plantea al estudiante.

Tabla 25. Pregunta 1, cuestionario 3, tipo 2.

Enunciado: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución. ¿Qué puedes comentar acerca de la solución? $x + 2y + z = -6$ $4x - 2y - z = -4$ $2x - y + 3z = 19$
Respuesta matemática esperada: $x = -2; y = -5; z = 6$

La Tabla 26 muestra la rúbrica que servirá como guía al investigador para el análisis de las respuestas del estudiante.

Tabla 26. Rúbrica 1, cuestionario 3, tipo 2.

Estado de construcción	Sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales
Acción	El estudiante comete errores en el despeje de la incógnita, generando resultados erróneos en los siguientes pasos. El estudiante despeja correctamente la incógnita pero comete errores al sustituirla.
Proceso	El estudiante realiza correctamente el despeje y sustitución de la incógnita y logra llegar a la expresión algebraica.
Estado de construcción	**Ecuación lineal equivalente**
Acción	El estudiante obtiene una ecuación lineal que no es equivalente al sistema original.

Proceso	El estudiante reduce correctamente el sistema de 3x3 hasta llegar a una ecuación lineal con una incógnita. Manipula correctamente la ecuación lineal para obtener el valor de la incógnita. Utiliza el valor encontrado y la reducción para encontrar los dos valores faltantes.
Estado de construcción	**Solución única**
Acción	El estudiante no realiza la comprobación una vez que ha obtenido el valor de las tres incógnitas. El estudiante realiza la comprobación. Da el ejercicio por bueno aun si no se satisfacen las tres ecuaciones.
Proceso	El estudiante realiza la comprobación con los valores encontrados. No da la respuesta por correcta hasta que los valores satisfagan a las tres ecuaciones a la vez.

Cuestionario 3, tipo 2. Pregunta 2

Este reactivo plantea un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, con solución vacía, que debe ser resuelto por el método de reducción.

El objetivo es evaluar los constructos que se muestran en la Figura 52.

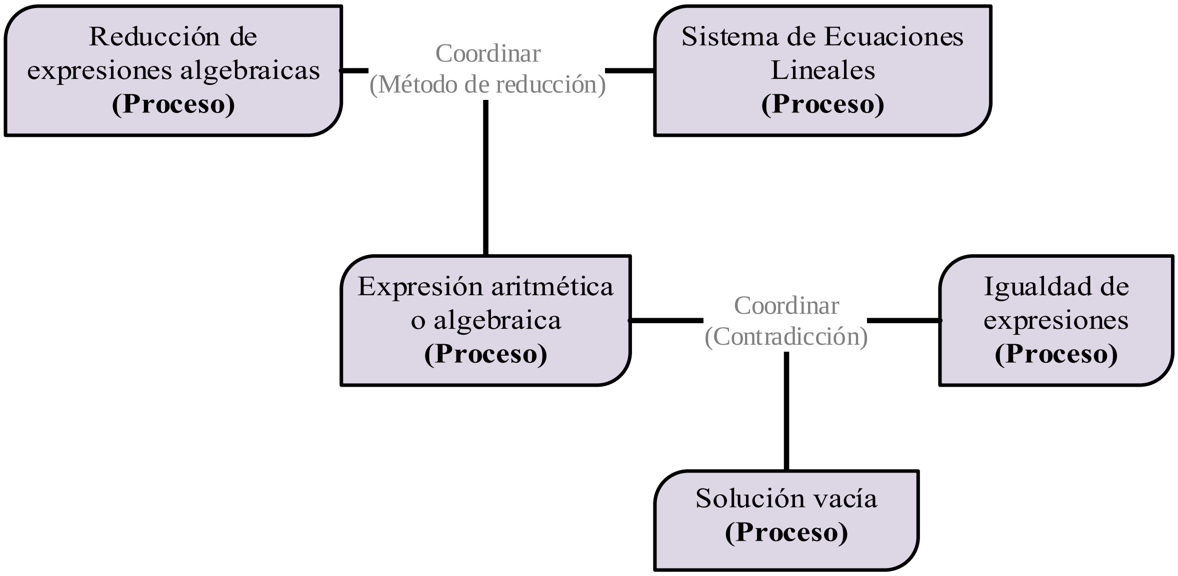


Figura 52. Constructos pregunta 2, cuestionario 3, tipo 2.

Si al intentar resolver el sistema de ecuaciones dado por el método de reducción, el estudiante obtiene una expresión aritmética y no una ecuación lineales equivalente, estará dando muestra de que ha construido el concepto de reducción de expresiones algebraicas como un proceso, y que además es capaz de coordinar dicho proceso con el proceso de sistema de ecuaciones lineales, por medio del método de reducción.

Al igual que en la pregunta 2 del cuestionario 3 tipo 1, al aplicar el método de solución correctamente, el estudiante deberá obtener una expresión aritmética o algebraica irreducible que representará una contradicción ($2 = 8$, $2x = 4x$, etc.). Cuando el estudiante sea capaz de reconocer que, precisamente, se trata de una expresión aritmética o algebraica irreducible, de la cual es imposible determinar el valor de las incógnitas, estará dando muestras de que ha construido el concepto de expresión aritmética o algebraica como un proceso.

Si, además de lo anterior, es capaz de concluir que el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución (conjunto solución vacío), es porque ha construido el concepto de igualdad de expresiones como un concepto y porque fue capaz de coordinar dicho concepto con el de expresión aritmética o algebraica por medio de sus concepto intuitivo de contradicción.

Al llegar a esta conclusión, el estudiante ha construido el concepto de solución vacía como un proceso, y entiende que no será posible encontrar ni un par de valores que satisfagan ambas ecuaciones del sistema. La Tabla 27 muestra el ejercicio que se le plantea al estudiante.

Tabla 27. Pregunta 2, cuestionario 3, tipo 2.

Enunciado: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción. ¿Encontraste alguna dificultad? ¿Qué puedes comentar acerca de la solución? $2w + n = 21$ $4w + 2n = 28$
Respuesta matemática esperada: El sistema no tiene solución. El conjunto solución del sistema es vacío.

En la Tabla 28 se muestra la rúbrica correspondiente a este reactivo.

Tabla 28. Rúbrica 2, cuestionario 3, tipo 2.

Estado de construcción	Reducción de expresiones algebraicas
Acción	El estudiante no identifica las operaciones que debe realizar para eliminar la incógnita deseada. Realiza operaciones al azar hasta llegar a un resultado.
Proceso	El estudiante opera correctamente las ecuaciones, multiplicando y sumando para eliminar la incógnita deseada. Respeta leyes de los signos.
Estado de construcción	**Expresión aritmética o algebraica**

Acción	Encuentra la expresión algebraica, no la analiza y finaliza el ejercicio diciendo que el sistema no se puede resolver.
Proceso	Analiza la expresión encontrada y llega a la conclusión de que es una contradicción.
Estado de construcción	**Solución vacía**
Acción	Reconoce que por ser una contradicción el sistema no se puede resolver. No reconoce si el sistema tiene solución vacía o soluciones infinitas.
Proceso	Reconoce que el llegar a la contradicción implica que el sistema no tiene solución.

Cuestionario 3, tipo 2. Pregunta 3

Este reactivo plantea un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 cuyo conjunto solución es infinito, y que debe resolverse por el método de igualación. Su objetivo es evaluar los constructos mostrados en la Figura 53.

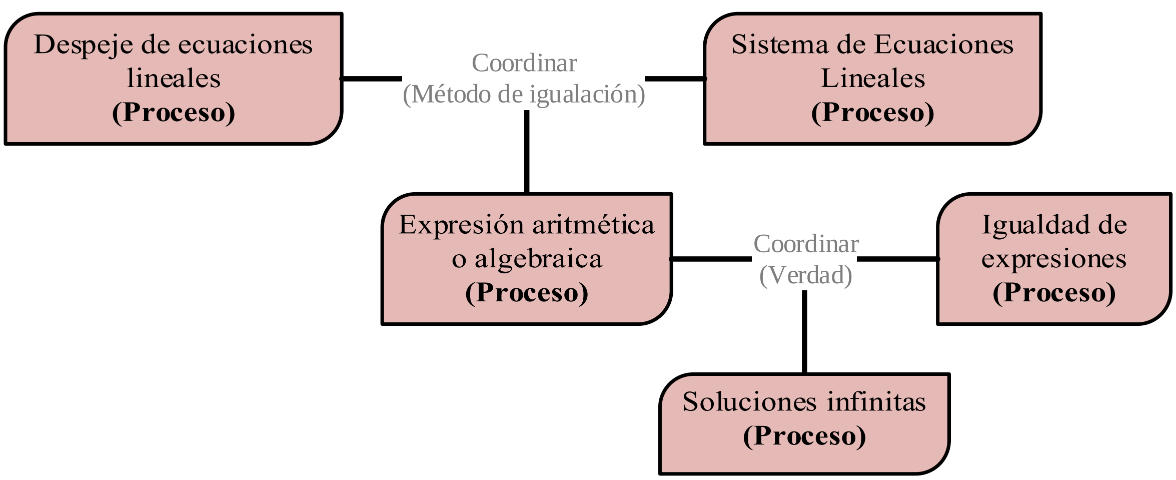


Figura 53. Constructos pregunta 3, cuestionario 3, tipo 2.

Para que el estudiante intente resolver el sistema por el método de igualación, será necesario que despeje la misma incógnita de ambas ecuaciones y que las iguale. Si al hacer esta manipulación el estudiante es capaz de obtener la expresión aritmética o algebraica, será muestra de que ha construido el concepto de despeje de ecuaciones lineales como un proceso, y que es capaz de coordinarlo a través del método de igualación, con el proceso de sistema de ecuaciones lineales.

Una vez que haya aplicado el método, el estudiante debe ser capaz de notar que lo que ha obtenido no es una ecuación equivalente, sino una expresión aritmética o algebraica irreducible. Si lo hace, es porque ha construido el concepto de expresión aritmética o algebraica como un proceso.

Por último, si el estudiante es capaz de llegar a la conclusión de que el sistema dado tiene infinitas soluciones, estará dando muestra de cosas, por un lado que ha construido el concepto de igualdad de expresiones como un proceso, y por otro lado, que es capaz de coordinad este proceso con el de expresión aritmética o algebraica por medio de su concepto intuitivo de verdad. Cuando el estudiante se percate de que los pares de números que satisfacen a ambas ecuaciones a la vez es infinito, dado que la expresión que obtuvo representa una verdad, habrá construido el concepto de soluciones infinitas como un proceso. En la Tabla 29 se muestra el ejercicio que se le plantea al estudiante y la respuesta esperada.

Tabla 29. Pregunta 3, cuestionario 3, tipo 2.

Enunciado: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de igualación. Comenta si encontraste alguna dificultad y escribe tus conclusiones acerca de la solución. $3g + h = 2$ $9g + 3h = 6$
Respuesta matemática esperada: El sistema tiene infinitas soluciones. El conjunto solución del sistema es infinito.

La rúbrica para este reactivo, se muestra en la Tabla 30 y en ella se puede apoyar el investigador para determinar el estado de construcción que el estudiante ha alcanzado de los conceptos evaluados por este reactivo.

Tabla 30. Rúbrica 3, cuestionario 3, tipo 2.

Estado de construcción	**Despeje de ecuaciones lineales**
Acción	El estudiante no despeja correctamente la literal. Comete errores de signos o en las reglas de despeje. El estudiante despeja correctamente la literal, siempre y cuando su coeficiente sea 1.
Proceso	El estudiante despeja correctamente la literal respetando signos y reglas de despeje. Despeja correctamente la literal aunque su coeficiente sea diferente de 1.
Estado de construcción	**Expresión aritmética o algebraica**
Acción	Encuentra la expresión algebraica, no la analiza y finaliza el ejercicio diciendo que el sistema no se puede resolver.
Proceso	Analiza la expresión encontrada y llega a la conclusión de que es una verdad.
Estado de construcción	**Soluciones infinitas**
Acción	Reconoce que por ser una verdad el sistema no se puede resolver. No reconoce si el sistema tiene solución vacía o soluciones infinitas.
Proceso	Reconoce que el llegar a la verdad implica que el sistema tiene soluciones infinitas. Intenta encontrar algún par ordenado que satisfaga ambas ecuaciones o expresar la solución con una incógnita en términos de la otra.

4.3.1.4 Cuestionario 4: Encapsulación

Una vez que el estudiante demuestra que ha construido los conceptos de solución única, solución vacía y soluciones infinitas como procesos, es momento de llevarlo al siguiente paso, la encapsulación de los mismos. De acuerdo con lo propuesto en el análisis teórico de este documento, esta encapsulación se dará cuando el estudiante sea capaz de interpretar problemas dados como enunciados en términos de sistemas de ecuaciones lineales, plantear y resolver dichos sistemas y asignar a la solución que encuentre (sea única, vacía o infinitas) una interpretación de acuerdo al contexto dado por el problema.

La intención del cuestionario cuatro es precisamente la de evaluar si el estudiante es capaz de realizar la interpretación mencionada en el párrafo anterior. Sin embargo, el lector podrá observar que el cuestionario únicamente considera problemas que tienen solución única, dejando de lado los de solución vacía y soluciones infinitas.

Esta discriminación se dio debido a la dificultad que se encontró en plantear problemas tipo enunciado cuya solución correspondiera a la solución vacía o a las soluciones infinitas de un sistema de ecuaciones lineales.

Después de realizar una búsqueda en diversos libros de problemas, se encontró que los problemas que cumplían con estas características correspondían a contextos que resultan muy confusos o muy elevados para estudiantes de bachillerato, por ejemplo la página web Khan Academy (https://es.khanacademy.org/math/algebra/systems-of-linear-equations/systems-of-linear-equations-word-problems/v/systems-word-problem-with-no-solution) propone el siguiente problema:

"Una fábrica tiene máquinas que producen juguetes, los cuales se empacan por los trabajadores de la fábrica. Un día cada máquina produce 14 juguetes y cada trabajador empaca 2 juguetes, por lo que un total de 40 juguetes queda sin empacar. Además, el número de trabajadores ese día era 8 menos que 7 veces el número de máquinas."

Al plantear un sistema de ecuaciones que representa la información dada por el problema anterior, se encuentra que este no tiene solución. Sin embargo, si el estudiante tratará de darle sentido a este hecho dentro del contexto del problema, esto sería complicado, pues no se entenderían exactamente las implicaciones de ello, ¿si no hay solución es porque no hay fábrica? Entonces, desde esta perspectiva, el problema no tiene utilidad en la encapsulación del concepto solución vacía en un objeto.

Dadas estas dificultades es que se decidió únicamente considerar sistemas con solución única para este cuestionario, los cuales permitirán al investigador observar si el estudiante ha logrado llegar a la encapsulación de dicho concepto.

A continuación se muestran los problemas presentados a los estudiantes y sus respuestas matemáticas esperadas. A diferencia de las preguntas de los cuestionarios anteriores, estas preguntas no estarán acompañadas de rúbrica para el investigador, ni de la figura que representa los constructos a evaluar. Debido a que, dependiendo del método que el estudiante seleccione para resolver el sistema, los constructos observables y la rúbrica a utilizar cambiarán.

Por lo anterior, para analizar las respuestas dadas por el estudiante y determinar el estado de construcción del concepto, primero se deberá determinar que método de resolución utilizó, para entonces emplear la rúbrica correspondiente al mismo para evaluar las construcciones del estudiante.

Pregunta 1

La pregunta o ejercicio uno, plantea un problema dado como enunciado. Para resolver este problema, el estudiante deberá plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y resolverlo por el método que el encuentre conveniente, pues en la instrucción dada no se especifica el método a utilizar.

La respuesta al ejercicio corresponde a los valores de las incógnitas que se planteen en el sistema. En la Tabla 31 se muestra el problema y la respuesta matemática esperada.

Tabla 31. Pregunta 1, cuestionario 4.

Enunciado: Lee con atención el siguiente enunciado: Claudia y Anabel fueron al cine con algunos amigos y compraron palomitas y refrescos. Anabel pagó \$145 por tres cajas de palomitas y 2 vasos de refresco. Claudia compró 5 cajas de palomitas y 7 vasos de refresco y tuvo que pagar \$315. ¿Cuánto costó cada caja de palomitas y cada vaso de refresco?

a. Plantea la o las ecuaciones que consideres representan la información dada por el problema y que te ayudarán a contestar la pregunta hecha en el enunciado. b. Encuentra la información que el enunciado te solicita y exprésala en términos del problema dado. c. Comenta si encontraste alguna dificultad para resolver el problema
Respuesta matemática esperada: Cada caja de palomitas cuesta \$35 y cada refresco cuesta \$20.

Pregunta 2

Para resolver este problema, el estudiante necesitará plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. La pregunta principal del problema no le pide al estudiante que determine el valor de alguna de las incógnitas, sin embargo necesita uno de esos valores para responder la pregunta planteada. En la Tabla 32 de muestra el ejercicio.

Tabla 32. Pregunta 2, cuestionario 4.

Enunciado: Lee con atención el siguiente enunciado: Marcos fue al supermercado y se compró chocolates con nueces y chocolates con leche. El chocolate con leche cuesta \$8 y el chocolate con nueces \$11. Si Marcos gastó \$79 en un total de 8 chocolates, ¿cuánto gastó en chocolate con nueces? d. Plantea la o las ecuaciones que consideres representan la información dada por el problema y que te ayudarán a contestar la pregunta hecha en el enunciado. e. Encuentra la información que el enunciado te solicita y exprésala en términos del problema dado. f. Comenta si encontraste alguna dificultad para resolver el problema

Respuesta matemática esperada: Marcos gastó $55 en chocolates.

CAPÍTULO 5: RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se describirá el proceso que se siguió para la recolección y análisis de los datos que permitiría validar las descomposiciones genéticas hipotéticas. En un primer apartado se describe brevemente al grupo de estudiantes a los cuales se les aplicaron los instrumentos de validación y la manera en que dichos instrumentos se aplicaron.

En un segundo apartado se analizan las respuestas dadas por los estudiantes para los diferentes instrumentos y, finalmente, en un tercer apartado se resumen algunos de los resultados obtenidos en el análisis de los datos, y como estos afectan a las descomposiciones genéticas propuestas en el capítulo 4.

5.1 Los informantes y la aplicación de los cuestionarios

Para la aplicación de los instrumentos se buscaba, idealmente, contar con un grupo de estudiantes de primer semestre de bachillerato regular, es decir, estudiantes de 15 a 16 años que cursaran por primera vez el bachillerato y que recientemente hubieran estudiado los tópicos relacionados a los sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

Sin embargo, los instrumentos se aplicaron durante los meses de octubre y noviembre del presente año, y durante esas fechas, los estudiantes de primer semestre de bachillerato aún no cursaban estos temas o estaban estudiándolos en ese momento. Por ello, se optó por buscar un grupo que ya hubiera estudiado dichos tópicos.

El grupo seleccionado cursa el tercer semestre de bachillerato en la Preparatoria Norte de Querétaro, la cual forma parte de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). Dicho grupo cursa, al momento de la aplicación, la materia de geometría euclidiana, impartida por una profesora egresada de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas, también de la UAQ, quien prestó su apoyo para la aplicación de los instrumentos.

Los estudiantes tienen entre 16 y 17 años y dos semestres antes, en primer semestre, cursaron la materia de álgebra, estudiando tópicos de sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

La aplicación de los instrumentos se dio en dos etapas. En la primera etapa se aplicó el Cuestionario 1: Conocimientos previos a un total de 44 estudiantes que conforman el grupo. Los resultados obtenidos de este cuestionario se analizaron para seleccionar a los estudiantes que participarían en la segunda etapa.

En la segunda etapa únicamente se seleccionaron cuatro estudiantes y a cada uno de ellos se le aplicó un instrumento diferente de entre los cuestionarios 2, 3 tipo 1, 3 tipo 2 y cuestionario 4. La selección se hizo analizando cuáles estudiantes habían demostrado, en la aplicación del cuestionario 1, que poseían los conceptos previos necesarios para contestar alguno de los siguientes cuestionarios.

El hecho de solo haber seleccionado cuatro estudiantes para la aplicación de los cuestionarios 2, 3 (en sus dos versiones) y 4 se debió a que no se contaba con el tiempo suficiente para analizar todos los instrumentos si se aplicaban cada uno de los cuatro cuestionarios a los 44 estudiantes.

En la siguiente sección se analizaran las respuestas dadas por los cuatro estudiantes, tanto en el cuestionario 1 como en los cuatro cuestionarios siguientes. El análisis se hace en base a las rúbricas planteadas en el análisis a priori de los instrumentos en el capítulo 4.

5.2 Análisis de las respuestas obtenidas

En esta sección se presentará el análisis de las respuestas obtenidas al aplicar los instrumentos a los informantes, basado en las rúbricas diseñadas en el capítulo 4 para cada una de las preguntas. Para ello, se presentará un análisis, pregunta por pregunta, de las respuestas dadas por los informantes, para cada uno de los cinco cuestionarios. Seguido del análisis amplio se presentará una tabla donde se sintetiza la información encontrada en el análisis de los instrumentos.

Cada sección abordará uno de los cuestionarios aplicados. En las secciones correspondientes a los cuestionarios 2, 3 tipo 1, 3 tipo 2 y 4, en primer lugar, se explicará por qué se eligió al informante para el instrumento y, después, se presentará el análisis pregunta a pregunta de cada instrumento.

Para nombrar a las imágenes que se presentarán, usaremos la siguiente nomenclatura: I1: Informante 1; I2: Informante 2; I3: Informante 3; I4: Informante 4; C1: Cuestionario 1; C2: Cuestionario 2; C3-1: Cuestionario 3 tipo 1; C3-2: Cuestionario 3 tipo 2; C4: Cuestionario 4. Las preguntas se señalarán con una P seguida del número de pregunta que se está presentado.

5.2.1 Cuestionario 1: Conocimientos previos

En esta sección se presentará un análisis amplio de las respuestas dadas por los informantes para cada una de las preguntas. Al final de la sección se muestra la *Tabla 33. Análisis respuestas cuestionario 1*, en la cual se condensa la información presentada a continuación.

Pregunta 1

La pregunta 1 estaba pensada para evaluar el estado de construcción del esquema aritmético en los estudiantes. Para ello se le plantea al estudiante una operación que involucra suma y división de fracciones y enteros. Para consultar el reactivo y la respuesta matemática esperada, puede dirigirse a la *Tabla 1. Pregunta 1, cuestionario 1.*

El informante 1 muestra un manejo adecuado de las operaciones, además de realizarlas de manera relativamente ordenada. También se puede apreciar que el informante necesitó realizar algunas de las multiplicaciones y restas por separado. Esto pudiera ser un indicador de que el concepto no ha llegado a un estado de construcción esquema, sin embargo, considerando que las operaciones necesarias implican trabajar con centenas es compresible que el informante necesite realizar dichas cuentas por separado.

También es observable un correcto manejo de los signos. Todo lo anterior evidencia un estado de construcción objeto del concepto. En la Figura 54 se muestra la respuesta del informante.

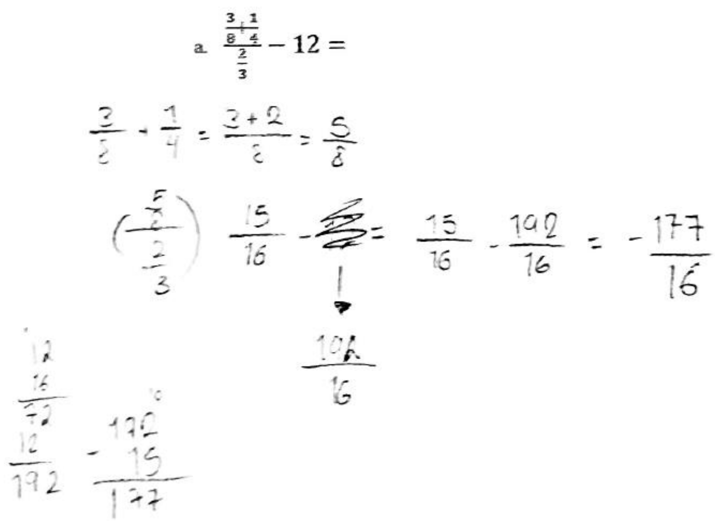


Figura 54. I1, C1, P1

Similar al infórmate 1, el informante 2 muestra un correcto manejo de las operaciones con fracciones. De igual forma que en el caso anterior, el informante 2 necesitó realizar algunas de las operaciones de manera independiente, integrando después los resultados obtenidos a la operación principal. Muestra un correcto manejo de los signos y respeta el orden en que se realizan las operaciones, es decir, da muestra de tener el concepto en un estado de construcción objeto. En la Figura 55 se muestran las operaciones realizadas por el informante.

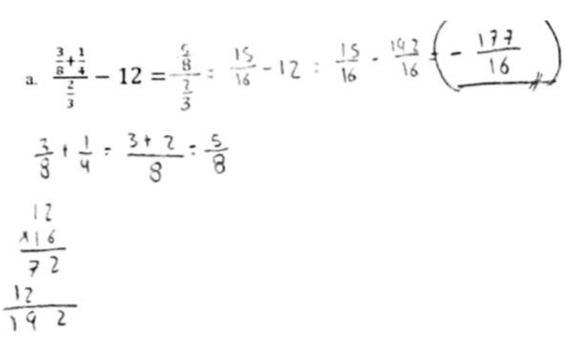


Figura 55. I2, C1, P1

El informante 3 realiza la suma y división de fracciones de manera correcta, sin embargo, presenta un problema con los signos. Al realizar la operación "$\frac{15-192}{16}$" , aunque realiza correctamente la resta, obteniendo el resultado de 177, no anota el signo negativo que le corresponde.

Es decir, para el estudiante el signo únicamente implicaba la resta de dos números y no era necesario una vez obtenido el resultado. Por ello, y de acuerdo con la rúbrica para este reactivo, se concluye que el estudiante ha llegado a un estado de construcción proceso del concepto de aritmética. En la Figura 56 se muestran las manipulaciones realizadas por el estudiante.

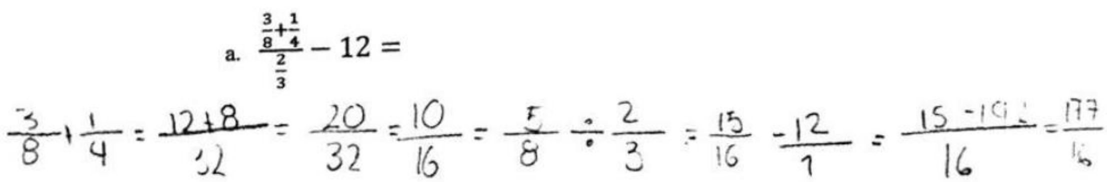


Figura 56. I3, C1, P1.

Finalmente, el informante 4 no da muestra del estado de construcción del concepto de aritmética, pues únicamente realiza la primera operación dejando el ejercicio inconcluso. Por ello se concluye que su concepto se encuentra en un estado de construcción acción, lo cual podría resultar en un obstáculo para responder correctamente a otros reactivos de los instrumentos. En la Figura 57 se muestra las acciones realizadas por el estudiante.

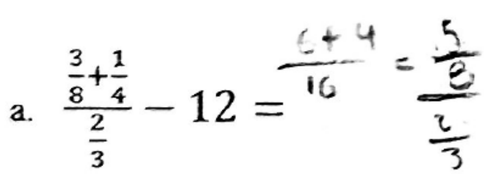


Figura 57. I4, C1, P1.

Pregunta 2

La pregunta 2 planteaba a los estudiantes tres pares de expresiones algebraicas y se les solicitaba que en cada uno de ellos señalaran si las dos expresiones eran equivalentes entre sí, además, se les pedía que explicaran como llegaron a la respuesta. Para consultar el reactivo y su respuesta esperada, puede dirigirse a la *Tabla 3. Pregunta 2, cuestionario 1.*

El informante 1 llegó a la respuesta correcta para los tres incisos. El manejo que realiza de las expresiones da muestra de que reduce términos semejantes hasta llevar la expresión a su forma irreducible, y así decidir si es equivalente a la otra expresión dada o no. Sin embargo no termina su explicación acerca de cómo llego a la respuesta, pero la manera en que se expresa hace pensar que no finalizó la descripción por falta de ganas y no por falta de conocimiento. El estudiante demuestra tener el concepto de igualdad de expresiones algebraicas en un estado de construcción proceso. La Figura 58 muestra la respuesta del estudiante.

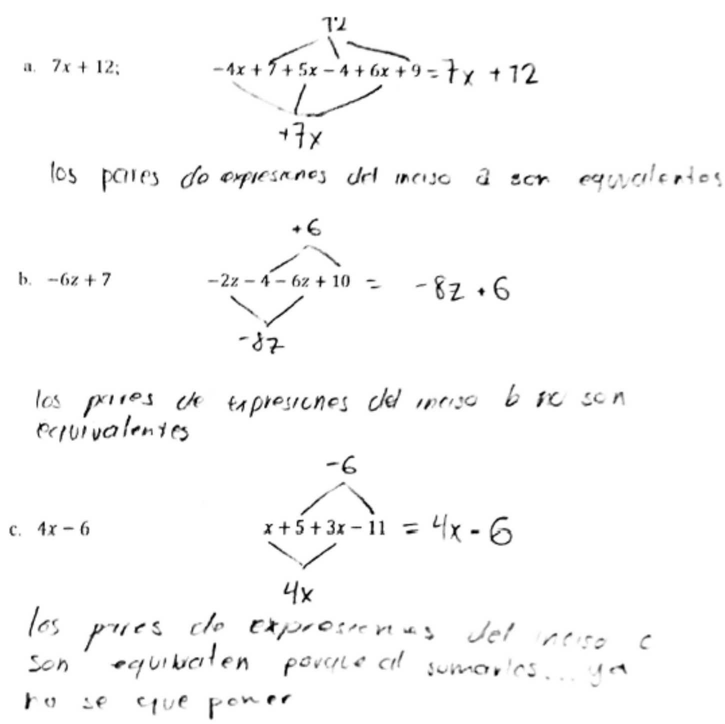


Figura 58. I1, C1, P2

El informante 2 respondió correctamente a los tres incisos además de que expresó de manera verbal como había llegado a esa conclusión. Al explicar que las ecuaciones son equivalentes porque cuando “junte términos equivalentes” obtuvo dos expresiones iguales, el informante está demostrando que su concepto de igualdad de expresiones está en un estado de construcción proceso. En la Figura 59 se muestra la respuesta del estudiante.

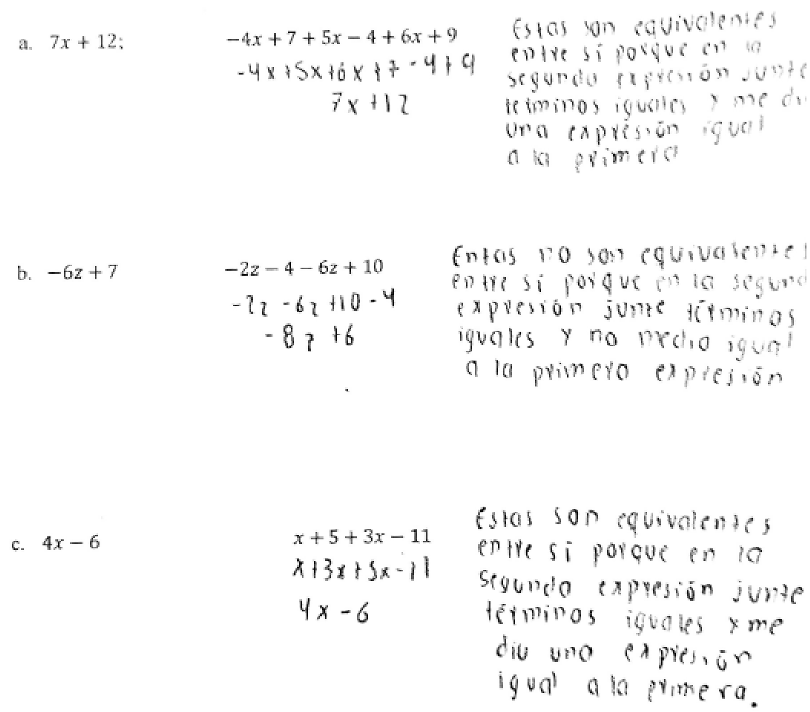


Figura 59. I2, C1, P2.

El informante 3 llegó a la respuesta correcta para los tres incisos, y aunque no explicó cómo fue que llegó a esas conclusiones, se puede observar en su desarrollo que agrupó términos semejantes hasta llegar a una expresión irreducible. También es observable que el informante necesitó hacer de forma explícita algunas operaciones de suma y resta sencillas, lo cual resulta en una evidencia más de que el concepto de aritmética se encuentra aún en un estado de construcción proceso, al igual que su concepto de igualdad de expresiones.

En la Figura 60 podemos observar el instrumento del informante 3.

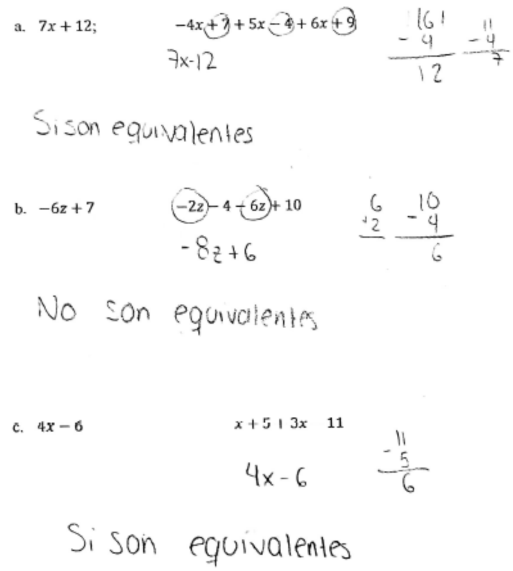
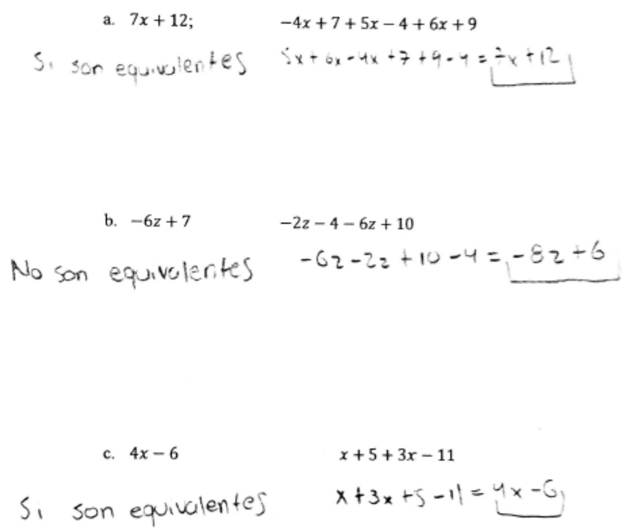


Figura 60. I3, C1, P2.

Por último, el informante 4 demuestra que su concepto de igualdad de expresiones algebraicas está en un estado de construcción proceso. Al igual que el informante 3, no expresa como es que llegó a esta conclusión pero en su desarrolló se puede observar la agrupación de términos semejantes para reducir una de las expresiones.

En la Figura 61 se observa la respuesta del informante.



a. $7x + 12$; $\quad -4x + 7 + 5x - 4 + 6x + 9$

Si son equivalentes $\quad 5x + 6x - 4x + 7 + 9 - 4 = \boxed{7x + 12}$

b. $-6z + 7$ $\quad -2z - 4 - 6z + 10$

No son equivalentes $\quad -6z - 2z + 10 - 4 = \boxed{-8z + 6}$

c. $4x - 6$ $\quad x + 5 + 3x - 11$

Si son equivalentes $\quad x + 3x + 5 - 11 = \boxed{4x - 6}$

Figura 61. I4, C1, P2

Pregunta 3

La pregunta 3 puede ser consultada a detalle en la *Tabla 5. Pregunta 3, cuestionario 1*. La pregunta está diseñada para observar el desarrollo del estudiante al simplificar una expresión y si es capaz de llevarla a su forma irreducible aun si el reactivo no lo solicita de manera explícita.

El informante 1 simplifica correctamente ambas expresiones, llevándolas a su forma irreducible, respetando signos y exponentes. Estas acciones demuestran que el informante ha llevado el concepto de simplificación de expresiones algebraicas a un estado de construcción proceso.

La Figura 62 da evidencia de dichas acciones.

a. $3x - 4 + x^2 - 9x + 18 - 2x + 2 - x + 1$

$x^2 - 9x + 17$

b. $6y + 2y^3 - 8 + y^2 - 2y + 6$

$2y^3 + y^2 + 4y - 2$

Figura 62. I1, C1, P3.

En el caso del infórmate 2 se pueden observar errores en la simplificación de las expresiones. En el inciso a. el informante se equivoca al agrupar los términos que corresponden a la literal *x,* mientras que en el inciso b. no comete ningún error.

El error puede deberse simplemente a que el informante no haya contado bien los términos, sin embargo, dada la descripción dada en la *Tabla 6. Rúbrica 3, cuestionario 1.,* se llega a la conclusión de que el informante ha llevado el concepto de simplificación de expresiones algebraicas a un estado de construcción acción.

En la Figura 63 se muestra la respuesta del estudiante.

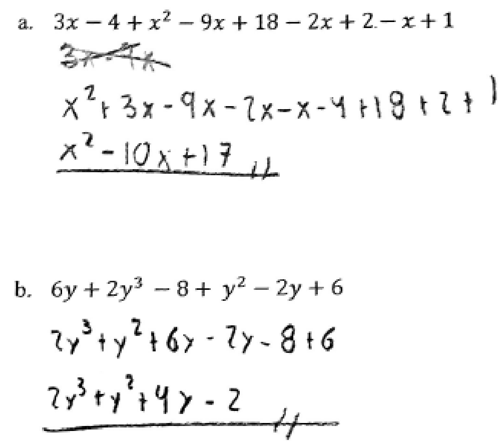


Figura 63. I2, C1, P3

El informante 3 también comete un error en el inciso a. de la pregunta. En este caso el error radica en un signo, pues donde el informante escribe *"+9x"* el término correcto es *"-9x"*. Este error puede estar relacionado con el error que el mismo informante cometió en la pregunta 1 de este cuestionario, y al igual que en la pregunta 2, el informante necesita realizar algunas sumas y restas sencillas de manera explícita. Todo lo anterior da muestra de que el estudiante posee un estado de construcción acción del concepto de simplificación de expresiones algebraicas. En la Figura 64 se observa la respuesta dada por el estudiante.

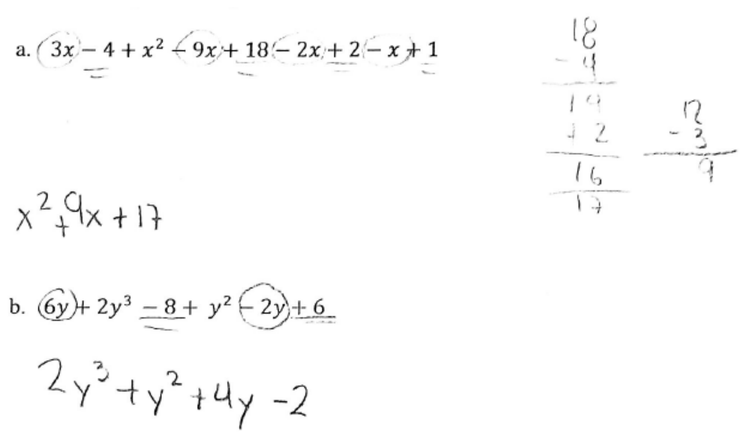


Figura 64. I3, C1, P3.

El informante 4 llega correctamente la forma irreducible de ambas expresiones, sin cometer errores de signos ni de agrupación. Entonces su concepto de simplificación de expresiones algebraicas, ha llegado a un estado de construcción proceso. En la Figura 65 se muestra el instrumento del informante 5.

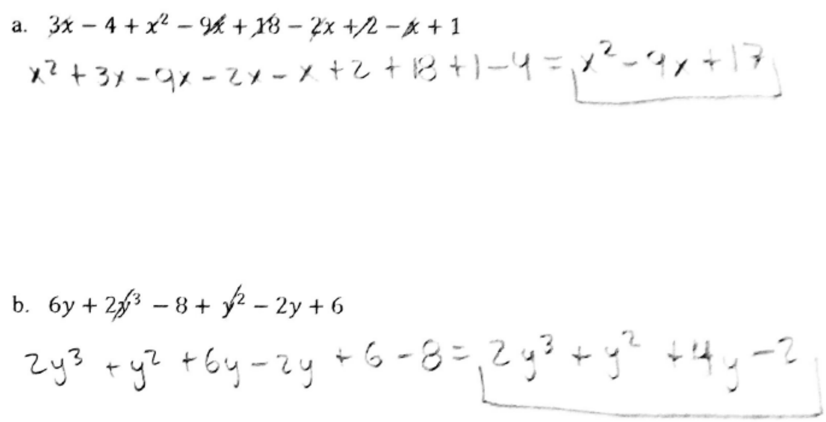


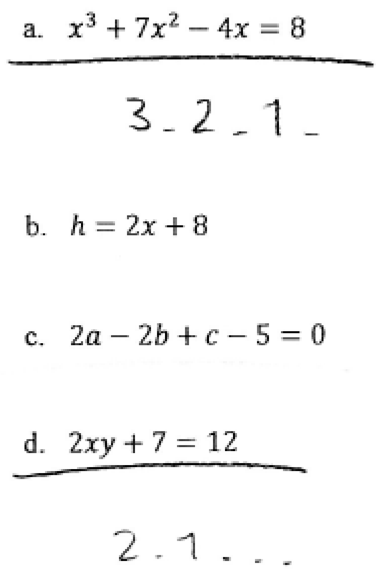
Figura 65. I4, C1, P3

Pregunta 4

La pregunta 4 del cuestionario 1 está diseñada para evaluar el concepto de identificación de una ecuación lineal en el estudiante. Lo que busca la pregunta, planteada en la *Tabla 7. Pregunta 4, cuestionario 1.*, es que el estudiante distinga una ecuación lineal de aquellas que no lo son, basándose en las características que dichas ecuaciones deben cumplir. Además, se le pide al estudiante que justifique su respuesta, esperando que use dichas características para explicar la diferencia entre una ecuación que es lineal y una que no lo es.

En el caso del informante 1 se puede observar claramente que su entendimiento del concepto de ecuación lineal no es el correcto. Aunque no justifica su respuesta, como se le solicitó, el informante 1 parece clasificar una ecuación lineal como aquella en la que los exponentes de las literales están en un orden descendente. Se puede decir que el concepto de ecuación lineal, en el caso del infórmate 1, no está presente, pues no solo sus criterios de clasificación son erróneos, sino que dejan fuera, justamente, a las ecuaciones que sí son lineales.

En la Figura 66 podemos ver el instrumento del informante.



a. $x^3 + 7x^2 - 4x = 8$

3 _ 2 _ 1 _

b. $h = 2x + 8$

c. $2a - 2b + c - 5 = 0$

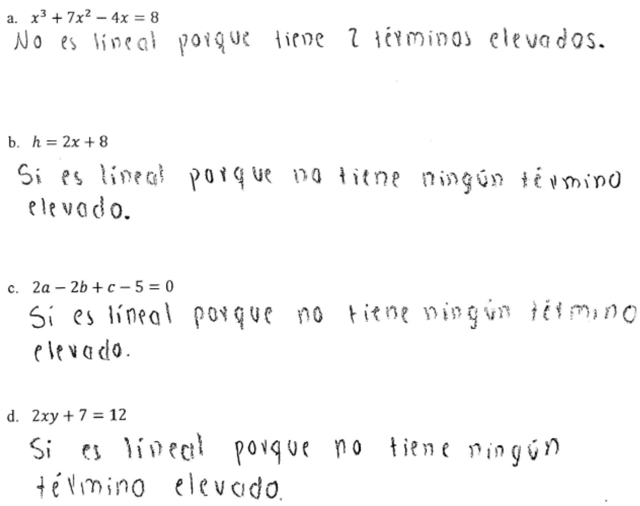
d. $2xy + 7 = 12$

2 . 1 . . .

Figura 66. I1, C1, P4.

El informante 2 muestra que su concepto de identificación de una ecuación lineal se encuentra en un estado de construcción acción. Esto se puede observar al analizar la rúbrica para este reactivo, contenida en la *Tabla 8. Rúbrica 4, cuestionario 1.,* pues, tal y como lo menciona la tabla, el estudiante identifica correctamente las ecuaciones que si son lineales, pero también identifica la ecuación del inciso d, la cual contiene un término *xy* como una ecuación lineal. Es decir, su concepto está parcialmente construido.

En la Figura 67 observamos la respuesta del informante 2.



a. $x^3 + 7x^2 - 4x = 8$
No es lineal porque tiene 2 términos elevados.

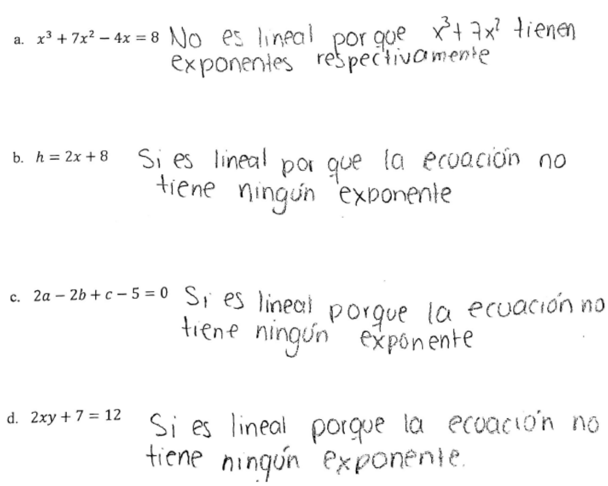
b. $h = 2x + 8$
Si es lineal porque no tiene ningún término elevado.

c. $2a - 2b + c - 5 = 0$
Sí es líneal porque no tiene ningún término elevado.

d. $2xy + 7 = 12$
Si es líneal porque no tiene ningún término elevado.

Figura 67. I2, C1, P4

El informante 3 ha construido un concepto similar al del infórmate 2, señalando las mismas ecuaciones como lineales y confundiendo, de igual manera, la ecuación con el término *xy* con una ecuación lineal, al observar que el exponente es igual a uno. Es decir, el informante 3 también ha alcanzado un estado de construcción acción del concepto de identificación de una ecuación lineal. En la Figura 68 se muestra el instrumento del informante 3.



a. $x^3 + 7x^2 - 4x = 8$ No es lineal porque $x^3 + 7x^2$ tienen exponentes respectivamente

b. $h = 2x + 8$ Si es lineal porque la ecuación no tiene ningún exponente

c. $2a - 2b + c - 5 = 0$ Si es lineal porque la ecuación no tiene ningún exponente

d. $2xy + 7 = 12$ Si es lineal porque la ecuación no tiene ningún exponente.

Figura 68. I3, C1, P4

En el caso del informante 4 se puede observar que sus respuestas, además de ser incorrectas, no siguen un criterio de clasificación que sea consistente, es por ello que se puede concluir que el informante no ha construido el concepto de identificación de una ecuación lineal. En la Figura 69 se observan sus respuestas.

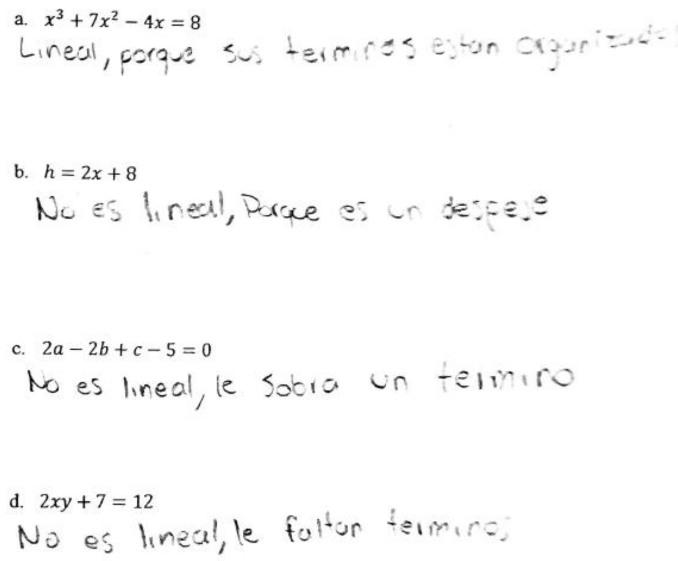


Figura 69. I4, C1, P4

Pregunta 5

La pregunta 5 está diseñada para evaluar si el estudiante es capaz de manipular una ecuación lineal para despejar correctamente alguna de sus incógnitas para determinar su valor. La pregunta, y su respuesta matemática esperada, se plantean en la *Tabla 9. Pregunta 5, cuestionario 1.* La pregunta cuenta con dos incisos, el primero plantea una ecuación lineal con dos incógnitas y con soluciones infinitas, mientras que el segundo tiene solución única. Además de encontrar el valor de la incógnita, se le pide al estudiante que de una conclusión acerca de la solución encontrada, esperando así detectar si el estudiante posee la noción de solución única y soluciones infinitas para una ecuación lineal.

En la respuesta del informante 1 se puede observar que su manipulación para el despeje de la incógnita en el inciso a. es, aunque en su conclusión al respecto no incluye nada acerca de la solución de la ecuación, ni del hecho de que *x* dependa de *y*.

Por otro lado, en el inciso b. se pueden observar algunos detalles, por ejemplo, en el tercer renglón de su respuesta se observa lo que en un principio se creyó era una raíz cuadrada, lo cual no tendría ningún sentido en el problema, sin embargo se determinó que no se trata de una raíz, sino del símbolo de “casita” para una división. Además, cuando al final el informante pasa el resultado a forma de fracción, se observa que se olvida del signo.

Dados estos detalles, principalmente el hecho de que no relaciona las expresiones obtenidas con la solución de las ecuaciones, se concluye que el estudiante ha llevado el concepto de despeje de ecuaciones lineales a un estado de construcción acción. En la Figura 70 se muestra la respuesta del estudiante.

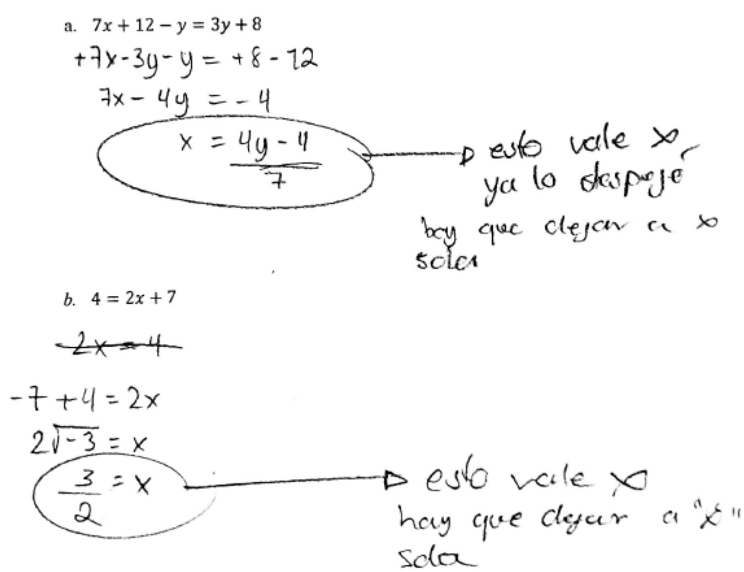
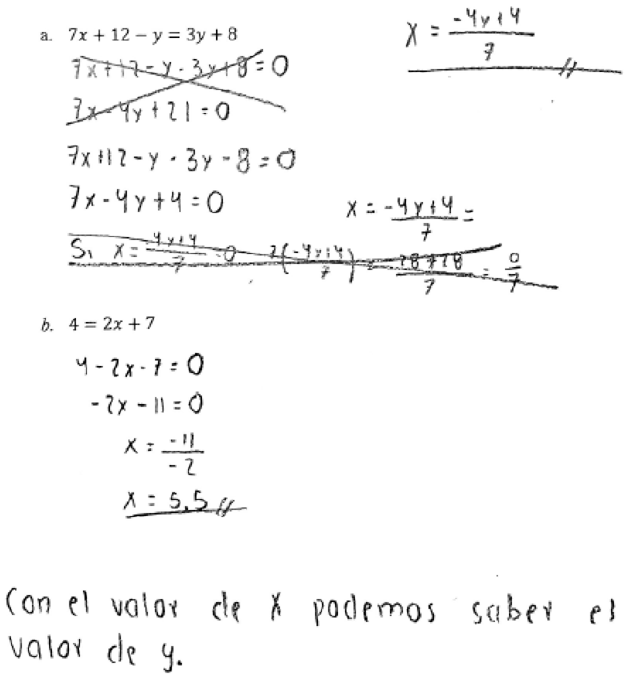


Figura 70. I1, C1, P5

El informante 2 comete errores en el despeje, tanto en el inciso a. como en el inciso b. En el caso del inciso a., se da cuenta de su error y comienza de nuevo, pero comete errores de signos en el resultado final, pues donde expresa *“-4y + 4”,* la respuesta correcta es en realidad *“4y – 4”.* En el inciso b., el error está en la agrupación de los términos *4* y *-7,* pues expresa que esto es *-11* y no *-3,* por lo que obtiene un resultado incorrecto.

A diferencia del informante 1, el informante 2 expresa que “con el valor de *x* podemos saber el valor de *y”* lo cual implica que reconoce que existe una dependencia entre los valores de *x* y de *y,* sin embargo no lo relaciona exactamente con soluciones infinitas. En general las manipulaciones del informante demuestran que su concepto se haya en un estado de construcción acción. En la Figura 71 se muestra la respuesta dada por el estudiante.


a. $7x + 12 - y = 3y + 8$

$\cancel{7x+12-y-3y+8=0}$

$\cancel{7x-4y+21=0}$

$7x+12-y-3y-8=0$

$7x-4y+4=0$

$x = \frac{-4y+4}{7} =$

$x = \frac{-4y+4}{7}$

$\cancel{Si\ x = \frac{4y+4}{7} = 0 \quad \frac{7(-4y+4)}{7} = \frac{28+28}{7} = \frac{0}{7}}$

b. $4 = 2x + 7$

$4-2x-7=0$

$-2x-11=0$

$x = \frac{-11}{-2}$

$x = 5.5$

Con el valor de x podemos saber el valor de y.

Figura 71. I2, C1, P5

El informante 3 realiza los despejes correctamente, a excepción del inciso a. donde comete un error de signo, pues donde el informante escribe *"-7",* realmente el signo negativo está de más. Además de ellos, el estudiante no relacione los valores encontrados con los tipos de solución de una ecuación, por lo que se concluye que su concepto de está en un estado de construcción acción.

En la Figura 72 se observan las manipulaciones realizadas por el informante.

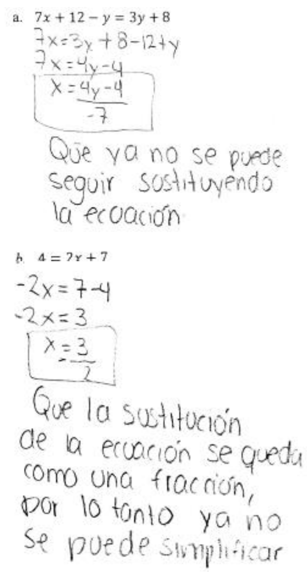
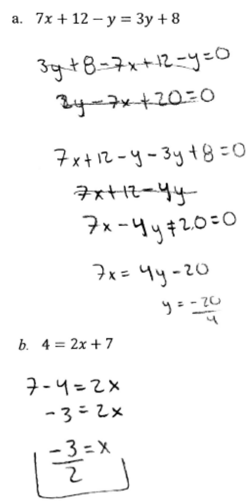


Figura 72. I3, C1, P5

El informante 4 despeja correctamente la ecuación de inciso 4, pero comete errores en el inciso a., pues no respeta los signos al momento del despeje, además se observa que intenta encontrar el valor de *y*, despejando dentro de la misma ecuación que había despejado. Esto demuestra que el despeje de ecuaciones lineales con dos incógnitas le causa problemas al informante y que el concepto de soluciones infinitas no está presente. Sin embargo, como el despeje del inciso b. es correcto, podemos decir que el concepto se encuentra en un estado de construcción proceso.

En la Figura 73 se muestra la respuesta del informante.



a. $7x + 12 - y = 3y + 8$

$3y + 8 - 7x + 12 - y = 0$

$\cancel{3y - 7x + 20} = 0$

$7x + 12 - y - 3y + 8 = 0$

$\cancel{7x + 12 - 4y}$

$7x - 4y + 20 = 0$

$7x = 4y - 20$

$y = \frac{-20}{4}$

b. $4 = 2x + 7$

$7 - 4 = 2x$

$-3 = 2x$

$\boxed{\frac{-3}{2} = x}$

Figura 73. I4, C1, P5.

Pregunta 6

El objetivo de la pregunta 6 del cuestionario 1 es evaluar si los estudiantes son capaces de plantear una ecuación lineal a partir de datos que se encuentran en un problema, además de que deben encontrar el valor requerido en términos del problema dado. El problema planteado y la respuesta esperada se encuentran en la *Tabla 11. Pregunta 6, cuestionario 1.*

El informante 1 llega a la respuesta matemática esperada, sin embargo, el proceso que sigue para llegar a ella no involucra una ecuación lineal, sino que lo hace por medio de sumas. Dado lo anterior, no es posible determinar en qué estado de construcción se encuentra el concepto de interpretación de ecuaciones lineales.

En la Figura 74 se muestra el desarrollo que hizo el informante.

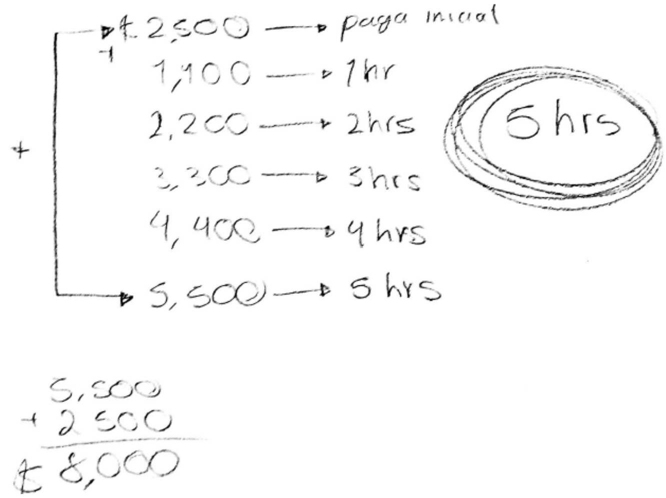


Figura 74. I1, C1, P6.

El informante 2 también llega a la respuesta matemática esperada y lo hace a través de una ecuación lineal, la cual plantea y despeja correctamente, además de poner el resultado en el contexto del problema. Esto demuestra que su concepto ha llegado a un estado de construcción proceso. Su planteamiento se muestra en la Figura 75.

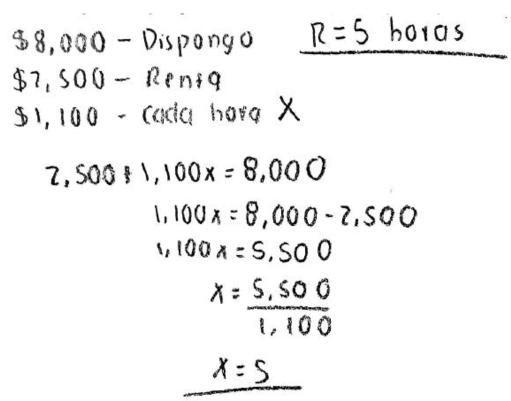


Figura 75. I2, C1, P6

El informante 3 plantea una ecuación lineal, sin embargo utiliza literales que no son necesarias, y la manipulación que realiza para encontrar el valor de la incógnita no es correcto. Se puede observar que, fuera de la ecuación, está haciendo una suma que lo lleva a un valor de *"3,600",* el cual después utiliza en la resolución de la ecuación lineal de manera incorrecta. Además realiza una división erróneamente y al final olvida sumar el valor que consideró al inicio, al resultado que encuentra al final.

El mal planteamiento de la ecuación nos dice que su concepto está en un estado de construcción acción, y esto lo podemos observar en la Figura 76.

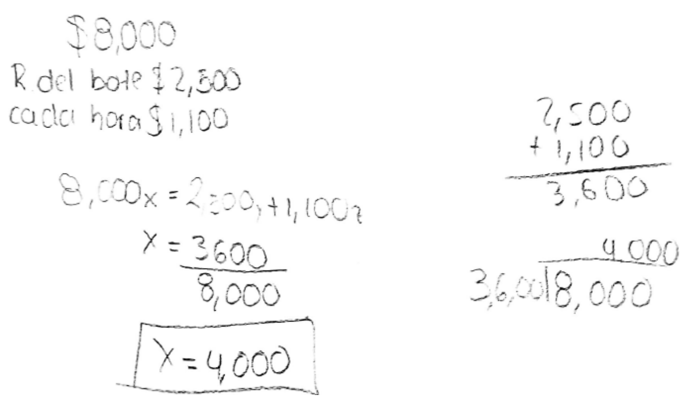


Figura 76. I3, C1, P6

El informante 4 no plante una ecuación lineal para resolver el ejercicio, y el desarrollo que se observa da cuenta de que realizó los cálculos mentalmente, además que no consideró la cantidad inicial al momento de dar su respuesta al ejercicio. Esto no permite observar el estado de construcción del concepto de interpretación de una ecuación lineal, e incluso podría ser muestra de que no ha construido dicho concepto. En la Figura 77 podemos observar su instrumento.

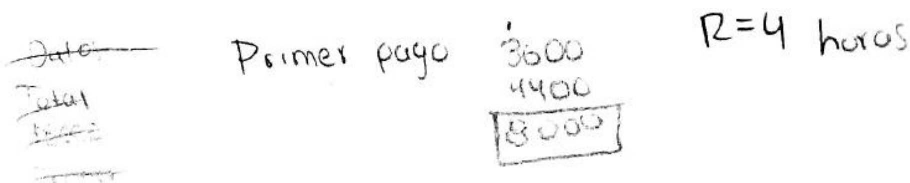


Figura 77. I4, C1, P6

Pregunta 7

El objetivo de esta pregunta es analizar el concepto de sistema de ecuaciones lineales. Se busaca que el estudiante sea capaz de plantear sistemas de ecuaciones lineales, a partir de datos dados en un problema.

No se le pide al estudiante que resuelva el sistema, pues lo único que se busca es que sepa plantearlos y que entienda la relación que existe entre las variables. El ejercicio se puede consultar a detalle en la *Tabla 13. Pregunta 7, cuestionario 1.*

En el caso del informante 1 se observa que plantea una expresión algebraica con los datos dados por el problema. Sin embargo, la expresión no es correcta ni parece tener algún sentido para el informante, quien deja inconcluso el ejercicio e incluso. Por ello, diremos que el concepto de encuentra en un estado de construcción acción, pues aunque reconoce que necesita expresar el problema en términos de los datos proporcionados y de incógnitas, no es capaz de encontrar la relación entre dichas incógnitas y datos y plantear las ecuaciones necesarias, esto lo podemos observar en la Figura 78, mostrada a continuación.

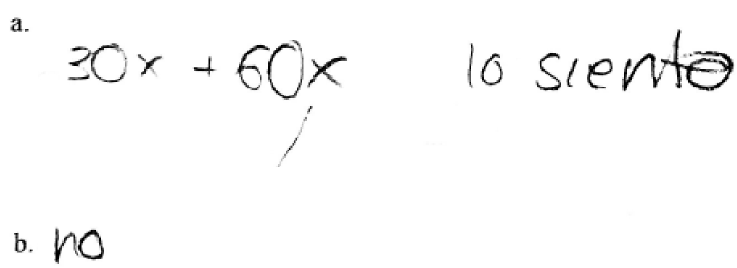


Figura 78. I1, C1, P7

El informante 2 relaciona lo datos proporcionados, que son elementos constantes, con incógnitas que deben ser determinadas, representando el valor de 30 como x y el valor 60 como y. Aun tomando en cuenta dicha representación, las ecuaciones que plantea el estudiante no representan de manera correcta la información dada por el problema, lo que indica que el concepto del informante está en un estado de construcción acción.

En la Figura 79 se muestra la respuesta dada por el informante.

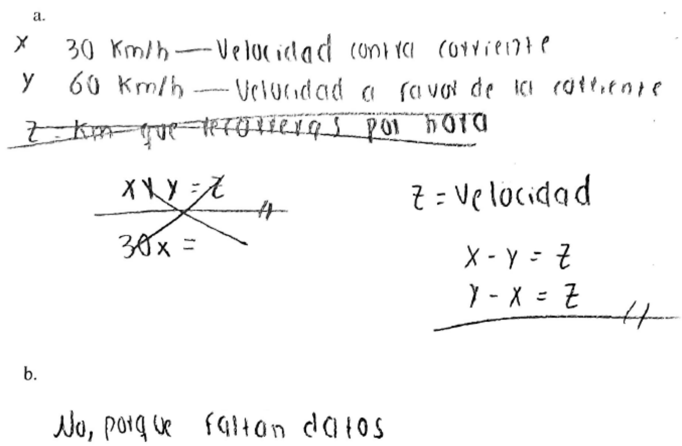


Figura 79. I2, C1, P7

En el caso del informante 3 el concepto parece encontrarse en un estado de construcción acción, pues aunque el informante plantea una ecuación, esta no representa la información dada por el problema. En la Figura 80 se muestra el instrumento del informante.

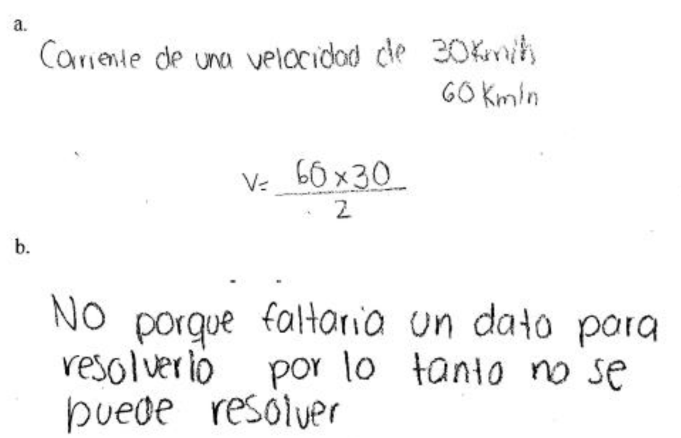


Figura 80. I3, C1, P7

El informante 4 es el único que muestra un estado de construcción proceso del concepto de sistemas de ecuaciones lineales. Esto se observa en el sistema de ecuaciones que plantea, pues estas representan correctamente la información dada por el problema. En la Figura 81 se observa la respuesta del informante.

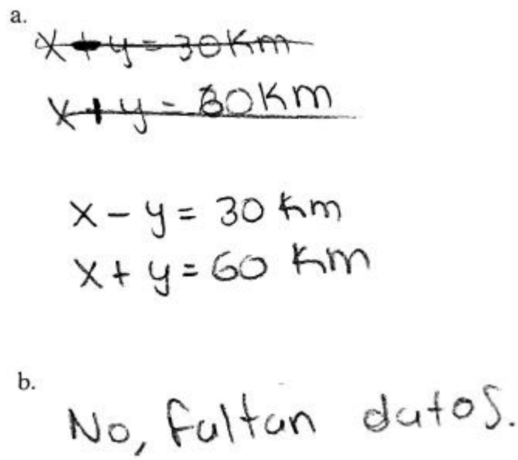


Figura 81. I4, C1, P7.

A continuación, en la Tabla 33 se muestra un resumen de la información descrita hasta ahora, resaltando algunas de las acciones observables del informante en cada pregunta y el estado de construcción que el informante ha alcanzado del concepto en juego.

Tabla 33. Análisis respuestas cuestionario 1.

Reactivo / Concepto	Informante 1	Informante 2	Informante 3	Informante 4
	Acciones observables del informante	**Acciones observables del informante**	**Acciones observables del informante**	**Acciones observables del informante**
	Estado de construcción del concepto	**Estado de construcción del concepto**	**Estado de construcción del concepto**	**Estado de construcción del concepto**
Pregunta 1: Aritmética (esquema)	Manejo adecuado y ordenado de las operaciones. Hace las multiplicaciones y restas por separado. Correcto manejo de los signos.	Correcto manejo de las operaciones con fracciones y de los signos Realiza algunas operaciones de forma independiente, integrando después los resultados a la operación principal.	Realiza correctamente las operaciones con fracciones. Omite los signos correspondientes al escribir los resultados.	Realiza correctamente la primera suma de fracciones pero deja el ejercicio inconcluso.
	Objeto	**Objeto**	**Proceso**	**Acción**
Pregunta 2: Igualdad de expresiones algebraicas (proceso)	Lleva las expresiones a su forma irreducible a través de agrupación de términos.	Explica que las ecuaciones son equivalentes porque cuando "junte términos equivalentes" obtuvo dos expresiones iguales.	Utiliza la agrupación de términos semejantes para concluir, correctamente, cuales pares de expresiones son equivalentes.	Concluye correctamente cuales pares de ecuaciones son equivalentes, a través de la agrupación de términos semejantes.
	Proceso	**Proceso**	**Proceso**	**Proceso**
Pregunta 3: Simplificación de expresiones algebraicas (proceso)	Lleva las expresiones, correctamente, a su forma irreducible, respetando leyes de signos y exponentes.	Comete errores en la simplificación de las expresiones.	Comete errores se signos. Requiere hacer de forma explícita algunas operaciones de suma y resta.	Lleva las expresiones a su forma irreducible de manera correcta.
	Proceso	**Acción**	**Acción**	**Proceso**
Pregunta 4: Identificación de ecuaciones lineales (proceso)	Clasifica las ecuaciones lineales como aquellas en las que los exponentes de las literales están ordenados de forma descendente.	Identifica correctamente las ecuaciones que si son lineales. Identifica la ecuación que contiene un término *xy* como una ecuación lineal.	Señala todas las ecuaciones cuyas literales tienen exponentes igual a 1 como ecuaciones lineales, incluyendo la ecuación con el termino *xy*.	No muestra un criterio de clasificación consistente para discriminar cuales ecuaciones son lineales y cuáles no. Señala como lineales ecuaciones que no lo son, y viceversa.
	No se encuentra	**Acción**	**Acción**	**No se muestra**

	Informante 1	Informante 2	Informante 3	Informante 4
Reactivo / Concepto	**Acciones observables del informante**	**Acciones observables del informante**	**Acciones observables del informante**	**Acciones observables del informante**
	Estado de construcción del concepto	**Estado de construcción del concepto**	**Estado de construcción del concepto**	**Estado de construcción del concepto**
Pregunta 5: Despeje de ecuaciones lineales (proceso)	Comete errores de signos. No da argumentos acerca de la solución de la ecuación cuando *x* depende de *y*.	Comete errores de signo y de agrupación de términos. Reconoce la existencia de una dependencia entre los valores de *x* y de *y* en el inciso a.	Comete errores de signos. No relaciona los valores encontrados para *x* con el tipo de solución que le corresponde a la ecuación (vacía o infinita).	Comete errores de signos. Presenta problemas para dejar una literal en términos de otra, tratando de despejar la segunda incógnita de la misma ecuación.
	Acción	**Acción**	**Acción**	**Acción**
Pregunta 6: : Interpretación de ecuaciones lineales (proceso)	Llega a la respuesta matemática esperada per sin utilizar ecuaciones lineales para resolver el problema.	Plantea una ecuación lineal correcta de acuerdo a los datos del problema. Llega a la respuesta matemática esperada. Relaciona el resultado obtenido con el contexto del problema.	Plantea una ecuación lineal con literales que no son necesarias. La manipulación de la ecuación lineal para encontrar el valor de la incógnita no es correcto.	No plantea una ecuación lineal para la resolución del ejercicio. El desarrolló que se muestra en el instrumento da evidencia de que realizó los cálculos de manera mental, o bien, copió el resultado.
	No se encuentra	**Proceso**	**Acción**	**No se muestra**
Pregunta 7: Sistema de ecuaciones lineales (acción /proceso)	Reconoce que necesita expresar el problema en términos de los datos proporcionados y de incógnitas. La ecuación planteada no representa correctamente los datos dados por el problema.	Representa los datos constantes del problema con literales o incógnitas a ser encontradas. Las ecuaciones que plantea no representan la información dada por el problema.	La ecuación planteada no representa la información dada por el problema.	Plantea un sistema de ecuaciones que representa de manera correcta la información dada en el problema.
	Acción	**Acción**	**Acción**	**Proceso**

5.2.2 Cuestionario 2: Método de Cramer

El cuestionario 2 está diseñado para evaluar las construcciones mentales que involucra la descomposición genética para el método de Cramer. Para ello, el instrumento le plantea al estudiante tres preguntas, en las cuáles es necesario que realice el cálculo de determinantes, y que utilice el método de Cramer para encontrar la solución a dos sistemas de ecuaciones, aunque uno de ellos realmente tiene solución vacía. Para su aplicación se seleccionó al informante 1, y a continuación se explican las razones.

De acuerdo con la descomposición genética para este método, el estudiante necesita haber construido tres conceptos principales antes de trabajar con el método de Cramer.

El primero de ellos es el esquema aritmético. En este caso, el informante 1 demostró haber llegado a un estado de construcción objeto. Es observable en su instrumento que no presenta problemas en realizar las operaciones aritméticas básicas con enteros y racionales. Esto se observa no solo en la pregunta 1, diseñada especialmente para evaluar este constructo, sino en las operaciones que también requirió realizar en otras de las preguntas.

Otro de los constructos previos que se requieren es el esquema de ecuaciones lineales con sus tres procesos principales. En este caso, el informante 1 si mostró problemas, pues de los tres procesos solo mostro evidencias de uno, el de despeje de ecuaciones lineales, y ni siquiera lo ha llevado a un estado de construcción proceso, sino que aún se encuentra en un estado de construcción acción.

El tercero de los constructos previos, es el de sistema de ecuaciones lineales como proceso. En este caso, el informante 1 mostró que este concepto se encuentra en un estado de construcción acción.

A pesar del déficit demostrado en la construcción de los conceptos previos se eligió al informante 1, porque, la mayoría de los 44 estudiantes mostró el mismo déficit además de mostrar evidencias de problemas con las operaciones aritméticas, particularmente con racionales.

De acuerdo con lo descrito en la sección *4.2.1 Método de Cramer,* no se espera que con el método de Cramer los estudiantes logren la construcción del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. En realidad, se describe que este método solo implica acciones mecánicas y repetitivas por parte de los estudiantes. Dichas acciones son, prácticamente, solo operaciones aritméticas, lo que aporta una razón más para seleccionar al informante 1 para este cuestionario.

A continuación, presentaremos las respuestas del informante y su correspondiente análisis. Al finalizar el análisis, se muestra la *Tabla 34. Análisis respuestas cuestionario 2,* en la cual se sintetiza lo encontrado en el análisis de las respuestas.

Pregunta 1

La pregunta 1 del cuestionario 2 está diseñada con la finalidad de evaluar si el estudiante ha construido el concepto de determinante como una acción. Para ello se le pide al estudiante que calcule el valor de un determinante de 3x3, el determinante puede ser consultado en la *Tabla 15. Pregunta 1, cuestionario 2.*

El informante muestra que conoce el procedimiento para calcular el determinante pero necesita apoyarse de líneas que le indiquen el orden en el cuál debe realizar los cálculos. A pesar de conocer el procedimiento, el informante comete errores en los cálculos. Por ejemplo, al hacer la multiplicación *(-2)(9/3)(0)* el informante señala que el resultado es *-6* (considerando el cambio de signo), omitiendo el hecho de que se está multiplicando por cero. Este error lleva al informante a obtener un resultado incorrecto para el valor del determinante. Además, al realizar la suma final *"+2 + 0 – 24 – 16 – 12 + 6"* el resultado debería ser *-44* pero el informante omite el signo negativo. Todo lo anterior, analizado desde la rúbrica para este reactivo, indica que el concepto del estudiante se encuentra en un estado de construcción acción.

En la Figura 82 se observa el desarrollo del estudiante.

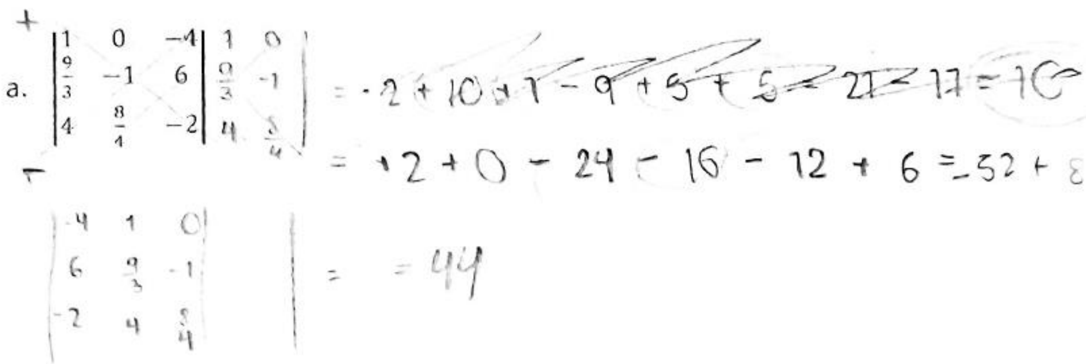


Figura 82. I1, C2. P1.

Pregunta 2

La pregunta 2, que puede ser consultada en la *Tabla 17. Pregunta 2, cuestionario 2.*, se divide en dos incisos.

El inciso a está diseñado para evaluar tres constructos a la vez, el concepto de arreglo matricial de un sistema de ecuaciones lineales como una acción, y el concepto de método de Cramer como un proceso y como un objeto. El inciso b está diseñado para evaluar la desencapsulación del concepto método de Cramer, de un objeto a un proceso.

Para evaluar esto, el inciso a plantea al informante un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con solución única y el inciso b un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con solución vacía. A continuación se presenta el análisis, el cual se hará constructo por constructo, considerando ambos incisos, para llegar a una conclusión más acertada.

Tanto en el inciso a como en el inciso b, se puede observar que el informante acomoda correctamente los elementos del sistema de ecuaciones lineales para calcular los distintos determinantes que necesita. Esto indica que el concepto de arreglo matricial se encuentra en un estado de construcción acción.

Es importante señalar que el informante solicitó ayuda, pues no recordaba las fórmulas para aplicar el método de Cramer. Esto podría indicar que dicho concepto se encuentra en un estado de construcción acción.

Además de lo anterior, el informante comete errores en el cálculo de los determinantes. En primer lugar añade columnas como si se tratará de un determinante de 3x3, también, en un inicio, realiza sumas y no multiplicaciones, aunque después corrige este error, debido a las columnas que añade sigue obteniendo un valor incorrecto.

En el inciso a, al calcular el determinante asociado al sistema encuentra que su valor es cero. Además de que esto es incorrecto, el informante utiliza dicho valor para tratar de encontrar el valor de *x* y de *y*. Al hacer esto, el estudiante divide 30 sobre cero y obtiene 30 como resultado. Esto no sólo representa una falla en el esquema aritmético, sino que además muestra que el estudiante no ha encapsulado el concepto de método de Cramer, pues aunque calcula que el determinante asociado al sistema es cero, continúa con los cálculos. Todo lo anterior es muestra de que el concepto de método de Cramer se encuentra en un estado de construcción acción, por lo cual ni siquiera es posible analizar la desencapsulación de dicho concepto.

En la Figura 83 se muestra el desarrollo del informante en el inciso a del instrumento.

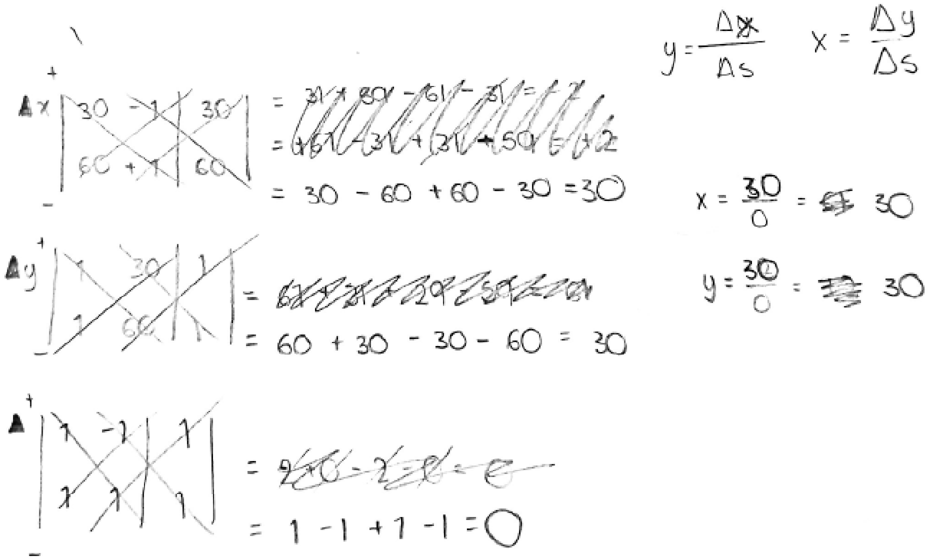


Figura 83. I1, C2, P2a

En la Figura 84 se muestra el desarrollo del informante en el inciso b del instrumento.

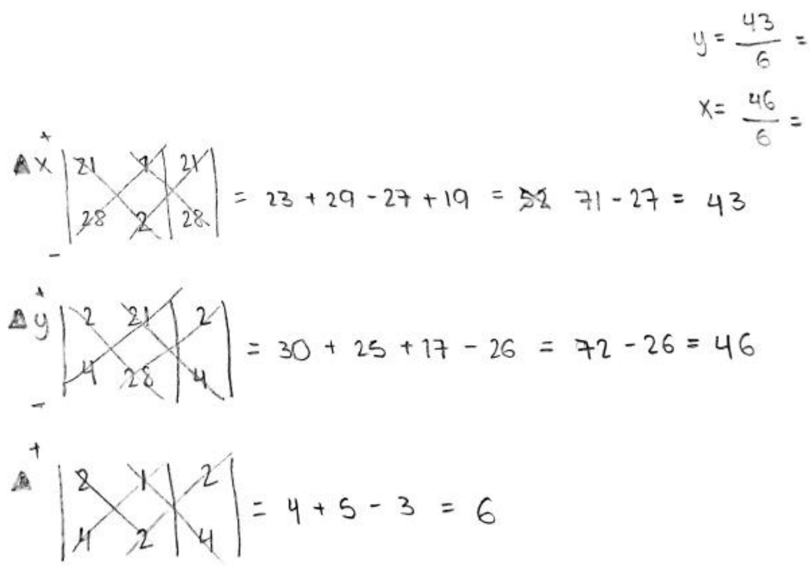


Figura 84. I1, C2, P2b

En la Tabla 34 se resume la información encontrada en el análisis del instrumento.

Tabla 34. Análisis respuestas cuestionario 2.

	Informante 1
Reactivo / Concepto	**Acciones observables del informante**
	Estado de construcción del concepto
Pregunta 1: Determinante (acción)	Aplica el procedimiento correcto para el cálculo del determinante. Se apoya en líneas y símbolos para saber el orden que debe seguir. Comete errores aritméticos en los cálculos.
	Acción
Pregunta 2, inciso a: Arreglo matricial del sistema de ecuaciones lineales (acción)	Acomodo correcto de los elementos del sistema de ecuaciones lineales para el cálculo de los determinantes.
	Acción
Pregunta 2, inciso a: Método de Cramer (acción/proceso/objeto)	Comete errores en el cálculo de los determinantes, aritméticos y en el algoritmo. Aunque el determinante asociado al sistema es igual a cero, el informante continúa con los cálculos.
	Acción
Pregunta 2, inciso b: Desencapsulación método de Cramer	Calcula los valores de x y de y aun cuando el determinante asociado al sistema es igual a cero. No ha llegado a encapsular el concepto de método de Cramer
	No se muestra

5.2.3 Cuestionario 3: Métodos de solución

El cuestionario 3 se diseñó con el objetivo de evaluar las descomposiciones genéticas que corresponden a los métodos de reducción, igualación y sustitución. Para ello se diseñaron dos cuestionarios distintos, donde se plantean los mismos tres sistemas de ecuaciones lineales, pero se le pide al estudiante resolver dichos sistemas por diferentes métodos.

El primer cuestionario, que se denominó cuestionario 3 tipo 1, plantea un sistema de ecuaciones lineales de 3x3 con solución única que debe ser resuelto por reducción, un sistema de 2x2 con solución vacía que debe ser resuelto por igualación, y un sistema de 2x2 con infinitas soluciones que debe ser resuelto por sustitución. El segundo cuestionario, denominado cuestionario 3 tipo 2, plantea los mismos sistemas pero se le pide al estudiante que resuelva el primero de ellos por sustitución, el segundo por reducción y el tercero por igualación.

Para el cuestionario tipo 1 se seleccionó al informante 2, mientras que para el cuestionario tipo 2 se seleccionó al informante 3. Una de las razones principales para seleccionar a estos dos informantes fue que, de la totalidad de 44 estudiantes que respondieron al cuestionario uno, ellos se encuentran entre los pocos que alcanzaron un estado de construcción acción del concepto identificación de ecuaciones lineales.

Aunque, idealmente, se busca que antes de trabajar con los métodos de solución los estudiantes hayan alcanzado un estado de construcción proceso de dicho concepto, en la práctica se observó que ninguno de los estudiantes había alcanzado esa construcción mental.

El informante 2, además, mostró que reconocía la existencia de una dependencia entre el valor de x y el valor de y, en el despeje de ecuaciones lineales, por lo que se consideró que también podría encontrar la relación entre expresiones algebraicas como $0=2$ o $5=5$ y la solución vacía o infinita de un sistema de ecuaciones lineales, y por ello se le seleccionó para responder una de las versiones del cuestionario 3.

Por otro lado, la selección del estudiante que respondería el cuestionario 3 tipo 2 fue más complicada. Ninguno de los 44 estudiantes que respondieron al cuestionario 1 mostró haber construido la totalidad de los conceptos previos necesarios en las diferentes descomposiciones genéticas. Por ello, la selección del informante 3 se basó, principalmente, en elegir al estudiante que había cometido menos errores que sus compañeros y que realizaba las operaciones y despejes de manera más ordenada.

A continuación se presentará el análisis de las respuestas dadas por los informantes 2 y 3. En primer lugar se presentará el análisis de la totalidad del cuestionario 3 tipo 1, respondido por el informante 2, y después el análisis del cuestionario 3 tipo 2, respondido por el informante 3. Al final de la sección, se mostrará la *Tabla 35. Análisis respuestas* *cuestionario 3*, en la que se condensa la información encontrada en el análisis de los instrumentos.

Informante 2, pregunta 1

La pregunta 1 plantea un sistema de 3x3 con solución única que debe ser resuelto por el método de reducción, el sistema plateado se puede consultar en la *Tabla 19. Pregunta 1, cuestionario 3, tipo 1.* La finalidad de esta pregunta es evaluar tres construcciones mentales: reducción de expresiones algebraicas, ecuación lineal equivalente y solución única.

En el instrumento del informante 2 se observa una correcta manipulación de las ecuaciones del sistema para lograr una reducción de las mismas, hasta llegar a un sistema de ecuaciones equivalente, de 2x2, y posteriormente a una ecuación lineal equivalente con una incógnita. Esto da muestra de que su concepto de reducción de expresiones algebraicas ha alcanzado un estado de construcción proceso.

También se observa que, en un inicio, el informante comete errores en la manipulación de dicha ecuación equivalente, lo cual lo lleva a calcular valores incorrectos para las tres incógnitas. Sin embargo, se da cuenta de su error y vuelve a manipular la ecuación, hasta llegar al valor correcto para la primera incógnita, el cual utiliza para encontrar el valor de las dos incógnitas restantes. Esto quiere decir que ha construido el concepto de ecuación lineal equivalente como un proceso.

Finalmente, el informante relacione los valores obtenidos con el hecho de que el sistema de ecuaciones lineales dado tiene “una posible solución”.

Sin embargo, no es observable que el estudiante realice la comprobación para verificar que los valores determinados satisfagan las tres ecuaciones a la vez y, de acuerdo con la rúbrica para este reactivo, esto indica que el concepto de solución única se encuentra en un estado de construcción acción. En la Figura 85, se muestra el desarrollo realizado por el informante.

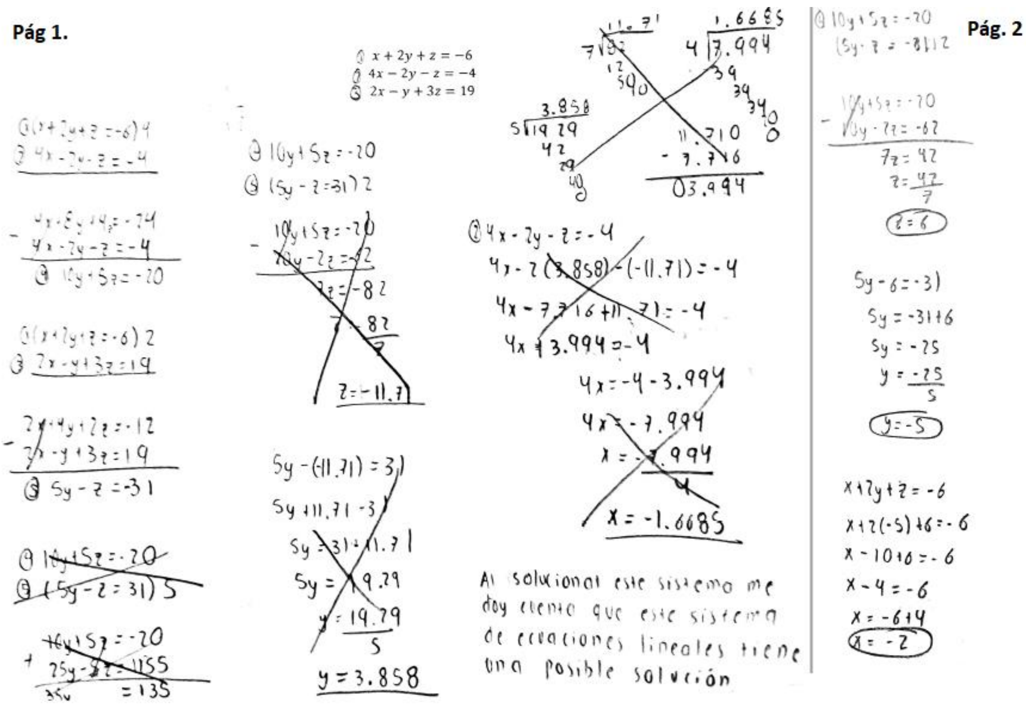


Figura 85. I2, C3-1, P1

Informante 2, pregunta 2

En la pregunta 2 se le plantea al informante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuyo conjunto solución es vacío y se le pide que lo resuelva por el método de igualación, y que además de una conclusión acerca de la solución del sistema. La pregunta puede ser revisada en la *Tabla 21. Pregunta 2, cuestionario 3, tipo 1.*

El objetivo de esta pregunta es evaluar tres conceptos distintos: despeje de ecuaciones lineales, expresión aritmética o algebraica y solución vacía.

En cuanto al concepto de despeje de ecuaciones lineales, se puede observar que el informante ha llegado a un estado de construcción proceso, pues es capaz de despejar correctamente la misma literal de las dos ecuaciones, respetando signos y reglas de despeje.

El informante manipula correctamente las expresiones que obtuvo al despejar la literal, lo cual le permite llegar a una expresión algebraica que lleva hasta su forma irreducible. Esto es muestra de que el informante ha llevado el concepto de expresión aritmética o algebraica a un estado de construcción proceso.

Finalmente, de dicha expresión, *0 = - 14*, el informante concluye que el sistema no tiene solución. Además de lo que se observa en el instrumento, también se reporta que el informante se acercó al aplicador mientras resolvía el instrumento para preguntar acerca de la expresión a la que había llegado. El informante expresó que no sabía lo que esa expresión implicaba y que ya no podía seguir resolviendo el ejercicio. Sin embargo, el aplicador utilizó la representación gráfica (rectas en el plano) de los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 para ayudar al estudiante a relacionar la expresión algebraica con el tipo de solución para el sistema.

Al hacer esto, el informante fue capaz de llegar a la conclusión, por sí mismo, de que una expresión que represente una contradicción está relacionada con dos rectas paralelas, que no se cruzan en ningún punto, y que esto implica que el sistema no tiene ninguna solución. Todo lo anterior permite llegar a la conclusión de que el concepto de solución vacía en el informante 2, ha llegado a un estado de construcción proceso.

En la Figura 86 se muestra el desarrollo de informante para esta pregunta.

① $n = 21 - 2w$

② $n = \frac{28 - 4w}{2}$

$$21 - 2w = \frac{28 - 4w}{2}$$

$$2(21 - 2w) = 28 - 4w$$

$$42 - 4w = 28 - 4w$$

$$-4w + 4w = 28 - 42$$

$$0 = -14$$

Al solucionar este sistema me doy cuenta que este sistema de ecuaciones lineales no tiene ninguna solución

Figura 86. I2, C3-1, P2

Informante 2, pregunta 3

La pregunta 3 está diseñada para evaluar los conceptos de sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales, expresión aritmética o algebraica y soluciones infinitas. Para ello se plantea un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuyo conjunto solución es inicito, el cual puede ser consultado en la *Tabla 23. Pregunta 3, cuestionario 3, tipo 1.*, y se le pide al estudiante que lo resuelva por el método de sustitución

El informante aplica el método de sustitución de manera correcta. Despeja y sustituye la literal sin cometer errores y es capaz de llegar a la expresión algebraica. De eso se concluye que su concepto de sustitución algebraica ha llegado a un estado de construcción proceso.

En el instrumento también se observa, al igual que el pregunta 2, que el informante llega a la expresión aritmética irreducible y que la analiza para llegar a una conclusión respecto a la solución del sistema, es decir, se reafirma que su concepto se ha construido como un proceso.

Finalmente, al igual que en la pregunta 2, el informante necesitó ayuda para relacionar la expresión $0 = 0$ con la solución del sistema. Al presentarle al informante la representación gráfica (rectas en el plano) de los sistemas de ecuaciones, con sus distintos conjuntos solución, el informante relacionó los sistemas cuyas ecuaciones trazan la misma recta en el plano con los sistemas que, al intentar resolverlos, llevan a una expresión aritmética o algebraica como la que se obtuvo en este caso, $0 = 0$. Es decir, el informante llegó a la conclusión de que, el obtener una expresión aritmética irreducible que representa una verdad, implica que el sistema tiene infinitas soluciones, demostrando así que su concepto de soluciones infinitas alcanzó un estado de construcción proceso. En la Figura 87 se muestra el desarrollo realizado por el informante.

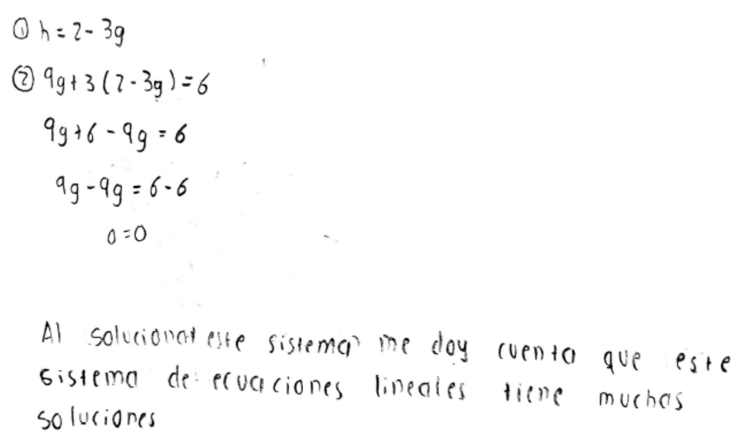


Figura 87. I2, C3-1, P3

Informante 3, pregunta 1

La pregunta 1 del cuestionario 3 tipo 2, plantea el mismo sistema de ecuaciones que la pregunta 1 del cuestionario 3 tipo 1, sin embargo, en este caso se le solicita al informante que resuelva dicho sistema por el método de sustitución.

Esto implica que uno de los constructos a evaluar cambia. Ahora la pregunta evalúa los conceptos de sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales, ecuación lineal equivalente y solución única. Para revisar la pregunta, se puede consultar la *Tabla 25. Pregunta 1, cuestionario 3, tipo 2*.

En el caso del informante 3 no es posible analizar ninguno de los tres conceptos mencionados. En su instrumento es observable que el informante no recuerda los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y, aunque intenta manipular las ecuaciones para simplificarlas, realmente no está aplicando el método solicitado.

En realidad, no está aplicando ningún método. No despeja ni sustituye ninguna de las literales, no llega a la ecuación lineal equivalente ni, mucho menos, a obtener la solución del sistema, que en este caso es única. En la Figura 88 se puede observar lo descrito.

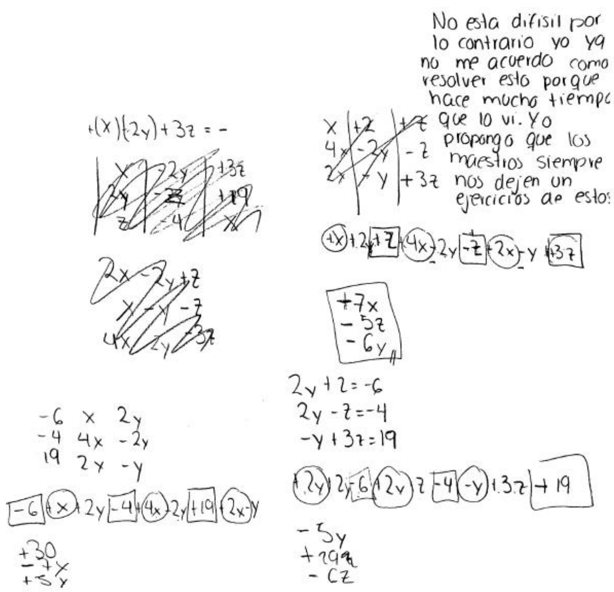


Figura 88. I3, C3-2, P1

Informante 3, pregunta 2

Esta pregunta está diseñada para evaluar los conceptos reducción de expresiones algebraicas, expresión aritmética o algebraica y solución vacía.

Para ello se plantea un sistema de ecuaciones lineales de 2x2 con solución vacía que debe ser resuelto por el método de reducción. El sistema planteado puede ser consultado en la *Tabla 27. Pregunta 2, cuestionario 3, tipo 2.*

Al igual que en el reactivo anterior, en el desarrollo del informante no es observable ninguno de los conceptos que se buscaba analizar. El informante no aplica el método de reducción para resolver el ejercicio, ni logra llegar a la expresión aritmética o algebraica. De hecho las manipulaciones que realiza con las ecuaciones carecen de sentido. En la Figura 89 se observa la respuesta del informante.

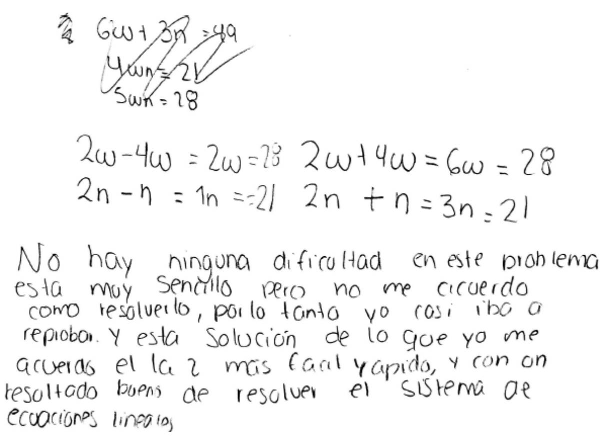


Figura 89. I3, C3-2, P2

Informante 3, pregunta 3

La pregunta 3 de este cuestionario busca evaluar los conceptos despeje de ecuaciones lineales, expresión aritmética o algebraica y soluciones infinitas. El sistema planteado para esta pregunta puede ser consultado en la *Tabla 29. Pregunta 3, cuestionario 3, tipo 2.*

Al igual que en los dos reactivos anteriores, el informante no da muestras de haber construido ninguno de los conceptos que el ejercicio pretende evaluar. Su manipulación del sistema no corresponde al método de igualación y además, aunque llega a un par de ecuaciones, es incorrecto.

En la Figura 90 se puede observar lo anterior.

$$3g + 9g = 12$$
$$3h + h = 4$$
$$\boxed{\begin{array}{c} 12g = 6 \\ 4h = 2 \end{array}}$$

Esta solución no es difisil pero no me acuerdo como resolverlo. y es lo más rapido que lo puedes resolver.

Figura 90. I3, C3-2, P3

En la Tabla 35 se condensa la información encontrada al analizar los cuestionarios 3 tipo 1 y 3 tipo 2.

Tabla 35. Análisis respuestas cuestionario 3.

	Informante 2		**Informante 3**
Reactivo / Concepto	**Acciones observables del informante**	**Reactivo / Concepto**	**Acciones observables del informante**
	Estado de construcción del concepto		**Estado de construcción del concepto**
Pregunta 1: Reducción de expresiones algebraicas (proceso)	Correcta manipulación de las ecuaciones para eliminar una de las incógnitas. Llega a una ecuación lineal equivalente con una incógnita.	Pregunta 1: Sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales (proceso)	No realiza el despeje ni la sustitución de ninguna de las literales.
	Proceso		**No se muestra**
Pregunta 1: Ecuación lineal equivalente (Proceso)	Manipulación correcta de la ecuación para obtener el valor de la incógnita. Utiliza el valor determinado para encontrar los valores restantes.	Pregunta 1: Ecuación lineal equivalente (Proceso)	No llega a encontrar la ecuación lineal equivalente al sistema.
	Proceso		**No se muestra**
Pregunta 1: Solución única (Proceso)	Señala que el sistema tiene "una posible solución". No realiza la comprobación de los valores encontrados.	Pregunta 1: Solución única (Proceso)	No encuentra ninguna solución para el sistema.
	Acción		**No se muestra**
Pregunta 2: Despeje de ecuaciones lineales (proceso)	Despeje correcto de la misma literal en ambas ecuaciones.	Pregunta 2: Reducción de expresiones algebraicas (proceso)	No opera las ecuaciones para eliminar alguna incógnita.
	Proceso		**No se muestra**

	Informante 2		Informante 3
Reactivo / Concepto	**Acciones observables del informante**	**Reactivo / Concepto**	**Acciones observables del informante**
	Estado de construcción del concepto		**Estado de construcción del concepto**
Pregunta 2: Expresión aritmética o algebraica (proceso)	Llega a la expresión aritmética irreducible. Concluye que la expresión no tiene sentido.	Pregunta 2: Expresión aritmética o algebraica (proceso)	No llega a una expresión ni aritmética ni algebraica.
	Proceso		**No se muestra**
Pregunta 2: Solución vacía (proceso)	El informante concluye que expresiones contradictorias, como la encontrada, representan sistemas con solución vacía.	Pregunta 2: Solución vacía (proceso)	No concluye el ejercicio ni aporta anda acerca del tipo de solución.
	Proceso		**No se muestra**
Pregunta 3: Sustitución de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales (proceso)	Realiza correctamente el despeje y sustitución de la incógnita, logrando llegar a una expresión algebraica.	Pregunta 3: Despeje de ecuaciones lineales (proceso)	No despeja ninguna de las incógnitas.
	Proceso		**No se muestra**
Pregunta 3: Expresión aritmética o algebraica (proceso)	Llega a una expresión aritmética irreducible y la utiliza para llegar a una conclusión acerca de la solución del sistema.	Pregunta 3: Expresión aritmética o algebraica (proceso)	No llega a una expresión ni aritmética ni algebraica.
	Proceso		**No se muestra**
Pregunta 3: Soluciones infinitas (proceso)	El informante concluye que expresiones verdaderas, como la encontrada, representan sistemas con soluciones infinitas.	Pregunta 3: Soluciones infinitas (proceso)	No concluye el ejercicio, ni aporta nada acerca de la solución del mismo.
	Proceso		**No se muestra**

5.2.4 Cuestionario 4: Encapsulación

Como se describió en el capítulo 4, el cuestionario 4 está diseñado para evaluar si el estudiante ha encapsulado el concepto de solución única en un objeto. De acuerdo con el análisis teórico del concepto, esta encapsulación se lograría cuando el estudiante sea capaz de interpretar problemas dados como enunciados y plantearlos en términos de ecuaciones lineales, resolver dichas ecuaciones para encontrar los valores deseados y ponerlo en términos del contexto del problema.

Considerando lo anterior, el cuestionario 4, le plantea al estudiante dos problemas en forma de enunciado, de los cuales se le pide que encuentre algún valor determinado. Las instrucciones que se le dan al estudiante no señalan el método que debe utilizar para resolver el problema, dejando esa decisión a criterio del estudiante, ya que el objetivo no es analizar su manejo de un método en particular, sino su manejo en general de un problema que debe ser resuelto por sistema de ecuaciones lineales.

Por lo anterior, para que un estudiante sea capaz de resolver los problemas planteados en este cuestionario, debe haber demostrado al responder el cuestionario 1, un adecuado manejo de las ecuaciones lineales, su despeje, identificación e interpretación, además de haber demostrado que su concepto de sistema de ecuaciones lineales ha llegado a un estado de construcción proceso.

Al analizar las respuestas de los 44 estudiantes al cuestionario 1, se encontró que solo uno de ellos había construido el concepto de sistemas de ecuaciones lineales como un proceso. Aunque dicho estudiante no posee el concepto de identificación de una ecuación lineal y cometió errores en el despeje de las ecuaciones, fue el único capaz de plantear un sistema que representara correctamente la información dada por un problema.

Por ello dicho estudiante, el informante 4, fue seleccionado para responder al cuestionario 4. A continuación se presentará el análisis de las respuestas dadas por el informante para este instrumento, resumiendo la información encontrada en la Tabla 36, mostrada al final de la sección. El análisis se basa en distintas rúbricas, diseñadas a lo largo del capítulo 4.

Pregunta 1

Esta pregunta plantea un problema dado como un enunciado. Para resolverlo el informante debe plantear un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos incógnitas. El problema planteado y su respuesta matemática pueden ser consultados en la *Tabla 31. Pregunta 1, cuestionario 4.*

En el instrumento del informante se pueden apreciar distintos conceptos y el estado de construcción al que han llegado. Por un lado, el estudiante plantea un sistema de ecuaciones lineales que representa correctamente la información dada por el problema, esto reafirma que su concepto de encuentra en un estado de construcción proceso.

También es observable que el informante empleó el método de reducción para resolver el problema, y que el método fue correctamente aplicado. El informante demuestra que su concepto de reducción de expresiones algebraicas ha llegado a un estado de construcción proceso, al igual que su concepto de ecuación lineal equivalente.

Finalmente, el estudiante es capaz de llegar a la solución única del sistema, realiza la comprobación para verificar que los valores encontrados satisfacen a las dos ecuaciones planteadas y además, pone los resultados obtenidos en el contexto del problema dado. Por lo anterior se concluye que su concepto de solución única ha llegado a un estado de construcción objeto. En la Figura 91 se muestra la respuesta del estudiante.

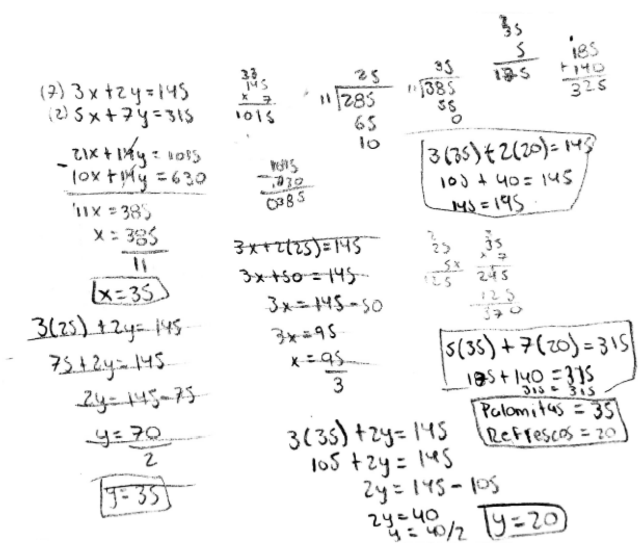


Figura 91. I4, C4, P1

Pregunta 2

Al igual que la pregunta anterior, este reactivo plantea un problema dado como un enunciado. El informante necesita plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, encontrar el valor de una de las incógnitas y utilizar dicho valor para encontrar el dato que el problema solicita. Esto implica que no basta con resolver el sistema de ecuaciones lineales, sino que el informante debe comprender el contexto del problema para darse cuenta que, encontrar la solución del sistema es solo una parte de la respuesta. El problema planteado puede ser revisado en la *Tabla 32. Pregunta 2, cuestionario 4.*

En este caso, el instrumento del informante no da tanta información como en la pregunta anterior. Es observable que planteó una ecuación lineal correcta aunque los datos dados por el problema requerían de dos ecuaciones para ser representados.

Por otro lado, el estudiante logró llegar a la respuesta matemática esperada, aunque hay evidencias de que resolvió el problema haciendo cálculos por prueba y error y no resolviendo la ecuación. También hay que tener en cuenta que logró poner el resultado obtenido en los términos del problema dado.

Dado lo anterior y tomando en consideración lo encontrado al analizar la pregunta 1 del instrumento, se puede concluir que su concepto de sistema de ecuaciones lineales se encuentra en un estado de construcción proceso, mientras que su concepto de solución única ha llegado a un estado de construcción objeto. En la Figura 92 se muestra el instrumento del informante.

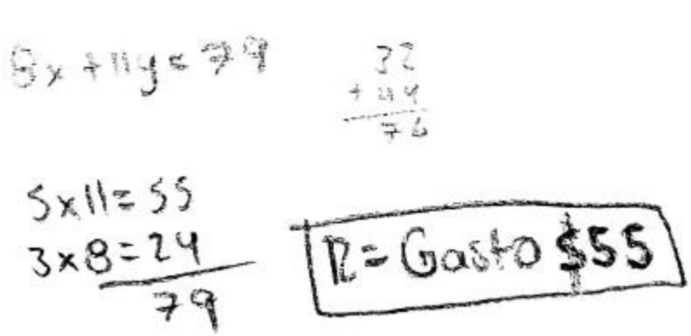


Figura 92. I4, C4, P2

La Tabla 36, mostrada a continuación, condensa la información encontrada en el análisis del cuestionario 4.

Tabla 36. Análisis respuestas cuestionario 4.

	Informante 4
Reactivo / Concepto	**Acciones observables del informante**
	Estado de construcción del concepto
Pregunta 1: Sistema de ecuaciones lineales (proceso)	El sistema planteado representa correctamente la información dada por el problema.
	Proceso
Pregunta 1: Reducción de expresiones algebraicas (proceso)	Emplea el método de reducción correctamente para eliminar una de las incógnitas y llegar a una ecuación lineal equivalente.
	Proceso
Pregunta 1: Ecuación lineal equivalente (proceso)	Manipula correctamente la ecuación lineal equivalente hasta encontrar el valor de una de las incógnitas. Utiliza el valor encontrado para determinar el valor de la incógnita faltante.
	Proceso
Pregunta 1: Solución única (proceso/objeto)	Realiza la comprobación para verificar que los valores determinados satisfacen las ecuaciones planteadas. Pone los valores encontrados para las incógnitas en términos del problema dado.
	Objeto
Pregunta 2: Sistema de ecuaciones lineales (proceso)	Planteamiento correcto de una de las ecuaciones lineales del sistema.
	Proceso
Pregunta 2: Solución única (objeto)	Utiliza el valor el encontrado para dar la respuesta de acuerdo al contexto del problema
	Objeto

CAPÍTULO 6: EJERCICIOS PROPUESTOS Y SU EVALUACIÓN

Como se explicó en la sección *2.3 Objetivos*, el objetivo particular para este trabajo de tesis es ofrecer ejercicios propuestos que puedan ser aplicados durante las secuencias de enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales cuadrados y sus métodos de solución numéricos y algebraicos, es decir, los cuatro métodos de resolución abordados en el análisis teórico.

En esta sección del documento se abordará, precisamente, ese objetivo. Para ello se plantearán algunos de los ejercicios utilizados para la validación de las descomposiciones genéticas. Estos ejercicios se acompañarán de rúbricas que, a diferencia de las planteadas en el capítulo 4, servirán para que el profesor evalúe el aprendizaje de los estudiantes y no para la validación de la descomposición genética

Hay que señalar que no se trata de una propuesta de secuencia didáctica, por lo que lo ejercicios serán solo una propuesta, y quedará a criterio del profesor en que momento de la clase aplicarlos, cuanto tiempo dedicar a cada ejercicio, que peso darle en la evaluación total del estudiante, etc., tomando todas estas decisiones con base en el contexto de su grupo, institución y materia.

A continuación presentamos los ejercicios propuestos, acompañados de la rúbrica y de algunas sugerencias para su aplicación.

Ejercicio 1

En la siguiente lista, señales cuáles de las ecuaciones son lineales y cuáles no. Justifica tu respuesta.

a. $x^3 + 7x^2 - 4x = 8$
b. $h = 2x + 8$
c. $2a - 2b + c - 5 = 0$
d. $2xy + 7 = 12$

El ejercicio pretende determinar si el estudiante posee el concepto de ecuación lineal, reconociendo cuales son las características de dichas ecuaciones y en qué se diferencian de otras ecuaciones, por ejemplo de las cuadráticas.

Se recomienda utilizar este ejercicio como una evaluación diagnóstica antes de comenzar a trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales, o bien, como evaluación formativa mientras se trabaja el tema de ecuaciones lineales. Si el estudiante logra hacer la distinción correcta entre ecuación que son lineales y aquellas que no lo son, es entonces factible introducir el concepto de sistema de ecuaciones lineales.

En la Tabla 37 se muestra la rúbrica sugerida al profesor para evaluar este ejercicio.

Tabla 37. Rúbrica ejercicio 1.

Elementos	**Nivel de desempeño**			**Total del Puntos**
	Muy bien (5)	**Por mejorar (3.5)**	**No satisfactorio (1)**	
Identificación	El estudiante identifica correctamente las dos ecuaciones que son lineales y las dos que no lo son.	El estudiante identifica correctamente las dos ecuaciones que son lineales y además señala la ecuación del inciso *d* como lineal.	El estudiante no identifica correctamente ninguna de las ecuaciones lineales.	
Justificación	El estudiante justifica correctamente su respuesta utilizando el concepto de ecuación lineal.	El estudiante únicamente considera que los exponentes de las literales de una ecuación lineal deben ser igual a 1, considerando que la ecuación del inciso *d* cae en dicha categoría.	El criterio del estudiante para justificar cuando una ecuación es lineal no corresponde al concepto de ecuación lineal.	

Ejercicio 2

Encuentra el valor de "x" en las siguientes ecuaciones. ¿Qué puedes concluir respecto a la solución de las ecuaciones?

a. $7x + 12 - y = 3y + 8$
b. $4 = 2x + 7$

El profesor puede aplicar este ejercicio como evaluación formativa en el tópico de ecuaciones lineales. En caso de requerir un ejercicio para evaluación final, se recomienda aplicar el ejercicio 3, que requiere que el estudiante interprete un problema para plantear una ecuación.

La particularidad de este ejercicio es que, además, de evaluar las habilidades del estudiante para despejar incógnitas de ecuaciones dadas, permite observar si los conceptos de soluciones infinitas y solución única para una ecuación lineal con una y dos incógnitas están presentes. El evaluar si el estudiante posee este concepto o no, será importante para que el profesor decida como abordará el tema de los conjuntos solución para los sistemas de ecuaciones lineales. En la Tabla 38, mostrada a continuación, se encuentra la rúbrica propuesta para evaluar el desempeño del estudiante en este ejercicio.

Tabla 38. Rúbrica ejercicio 2.

Elementos	**Nivel de desempeño**			**Total del Puntos**
	Muy bien (5)	**Por mejorar (3.5)**	**No satisfactorio (1)**	
Despeje de la ecuación	Despeja correctamente la literal solicitada en ambos incisos.	Comete errores en el despeje de uno de los incisos.	No despeja correctamente la literal de ninguno de los dos incisos.	

Interpretación de la solución	Expresa que la ecuación del inciso a tiene infinitas soluciones, ya que el valor de *x* depende del valor de *y*. También reconoce que la ecuación del inciso b tiene solución única.	Expresa que la ecuación del inciso b tiene solución única, pero no logra expresar algo concreto respecto a la solución de la ecuación del inciso a.	No logra relacionar que los valores encontrados corresponden a soluciones infinitas y solución única para los incisos a y b respectivamente.	

Ejercicio 3

Resuelve el siguiente problema por medio de ecuaciones lineales.
Estas de vacaciones en la playa y quieres rentar un bote para pasear con tus amigos. Dispones de $8,000 para hacerlo. Si la renta del bote es de $2,500 más $1,100 por cada hora que lo tengas, ¿cuántas horas podrás pasear en el bote con tus amigos?

Con este ejercicio se busca evaluar más de un aspecto a la vez. Por un lado el estudiante debe plantear por sí mismo la ecuación que le permitirá resolver el problema, y esto hablará de su capacidad para interpretar problemas y llevarlos a un contexto matemático. Por otro lado, también tendrá que resolver la ecuación planteada hasta encontrar el valor que se le solicita, lo cual pondrá a prueba sus habilidades para el despeje de incógnitas y para realizar operaciones aritméticas.

Este ejercicio puede ser aplicado como auxiliar en la evaluación formativa dentro del tema de ecuaciones lineales, o puede ser incluido en la evaluación final de dicho tópico. En la Tabla 39 se muestra la rúbrica propuesta para la evaluación del estudiante.

Tabla 39. Rúbrica ejercicio 3.

Elementos	Nivel de desempeño			Total del Puntos
	Muy bien (5)	**Por mejorar (3.5)**	**No satisfactorio (1)**	
Interpretación del problema	Plantea una ecuación lineal que representa correctamente los datos dados por el problema.	La ecuación planteada no representa de forma adecuada la información dada por el problema.	No plantea ninguna ecuación lineal.	
Manipulación de la ecuación lineal	Despeja correctamente la incógnita y también realiza correctamente las operaciones aritméticas hasta encontrar el valor buscado.	Comete errores de signos o en las operaciones aritméticas, llegando a un resultado incorrecto.	No sabe despejar la incógnita y comete errores en todo el proceso. También se equivoca en las operaciones aritméticas	
Interpretación del resultado	Expresa el resultado obtenido en términos del problema dado, colocando unidades al resultado.	Llega al resultado correcto pero no lo pone en términos del problema, no incluye unidades.	La respuesta carece completamente de lógica en relación con el problema planteado.	

Ejercicio 4

Escribe la o las ecuaciones que consideres describan la información dada en el siguiente problema:
Tus amigos y tú pasean en el bote que rentaste, vas navegando contra corriente a una velocidad de 30 km/h. Cuando navegas a favor de la corriente alcanzas una velocidad de 60 km/h.

Este ejercicio está pensado para evaluar si los estudiantes comprenden el concepto de sistemas de ecuaciones lineales. Si el estudiante es capaz de plantear las ecuaciones que representen correctamente la información dada por el problema, es porque ha comprendido que en un sistema de ecuaciones lineales, las ecuaciones se relacionan entre sí.

Este conocimiento es clave para comprender el concepto de solución del sistema de ecuaciones lineales. Por ello, se recomienda plantear el ejercicio como apertura al tema de métodos de solución.

Sin embargo, el profesor puede extender el ejercicio y solicitar al estudiante que, además de plantear las ecuaciones, resuelva el sistema y con ello llevar el ejercicio a ser una herramienta de evaluación final en el tema de métodos de solución.

La rúbrica propuesta para el profesor, para la evaluación de este ejercicio, se muestra en la Tabla 40.

Tabla 40. Rúbrica ejercicio 4.

Elementos	**Nivel de desempeño**			**Total del Puntos**
	Muy bien (5)	**Por mejorar (3.5)**	**No satisfactorio (1)**	
Interpretación del problema	Plantea las ecuaciones lineales necesarias para representar la información dada por el problema.	Una o todas las ecuaciones planteadas no representan de forma adecuada la información dada por el problema.	No plantea ninguna ecuación lineal.	
Relación entre ecuaciones	Las ecuaciones lineales planteadas muestran relación entre sí. Usando las mismas literales o símbolos de representación.	Aunque las ecuaciones utilizan las mismas literales o símbolos para representar la información, las ecuaciones son independientes entre sí.	Las ecuaciones planteadas son completamente independientes entre sí. Se utilizan símbolos o literales distintas para representar la información.	

Ejercicio 5

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Cramer. ¿Encuentras alguna dificultad para resolverlo? Si es así, ¿cuál es la dificultad y a qué consideras que se debe?

$x - y = 30$

$x + y = 60$

Este ejercicio plantea un sistema de ecuaciones lineales con solución única, por lo que es posible resolverlo por el método de Cramer. El objetivo del ejercicio es evaluar si el estudiante es capaz de calcular determinantes por medio del algoritmo dado en clase por el profesor y, además, si es capaz de utilizar el método de Cramer para encontrar el valor de las incógnitas.

Para resolver este ejercicio únicamente se requiere del estudiante conocimiento de los algoritmos dados y no una interpretación de los sistemas de ecuaciones lineales o de su solución, por lo que no se recomienda emplear este ejercicio como evaluación final, si no como evaluación formativa durante el estudio del método de Cramer. En la Tabla 41 se muestra la rúbrica para la evaluación de este ejercicio.

Tabla 41. Rúbrica ejercicio 5.

Elementos	**Nivel de desempeño**			**Total del Puntos**
	Muy bien (5)	**Por mejorar (3.5)**	**No satisfactorio (1)**	
Determinantes	Se aplica correctamente el algoritmo para el cálculo de determinantes. Tanto para el asociado al sistema como para los determinantes necesarios para el método.	Hay errores en el algoritmo o en los cálculos realizados para determinar el valor de alguno de los determinantes.	Hay errores en el algoritmo en el los cálculos realizados para determinar el valor de todos los determinantes requeridos.	
Método de Cramer	Aplica correctamente el algoritmo del método de Cramer para encontrar el valor de las incógnitas.	Comete errores en el algoritmo o en los cálculos realizados para determinar el valor de alguna de las incógnitas.	Desconoce el algoritmo del método de Cramer. No logra determinar el valor de las incógnitas.	

Ejercicio 6

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción (suma y resta). ¿Qué puedes comentar acerca de la solución?
$x + 2y + z = -6$
$4x - 2y - z = -4$
$2x - y + 3z = 19$

El sistema de ecuaciones lineales planteado en el ejercicio tiene solución única. La idea del ejercicio es evaluar como el estudiante maneja el método de reducción para encontrar la solución al sistema, las manipulaciones algebraicas que realiza y las conclusiones a las que llega respecto a la solución del sistema. Sin embargo, el profesor puede decidir si el sistema de resuelve por algún otro método, o si se deja a consideración del estudiante el método a utilizar.

Se recomienda aplicar el ejercicio como auxiliar en la evaluación formativa cuando se estudia el método de reducción. Si lo que se busca es un ejercicio para evaluación final del tópico de métodos algebraicos de resolución, se recomienda utilizar el ejercicio 9 o 10. En la Tabla 42 se muestra la rúbrica para la evaluación de este ejercicio.

Tabla 42. Rúbrica ejercicio 6.

Elementos	**Nivel de desempeño**			**Total del Puntos**
	Muy bien (5)	**Por mejorar (3.5)**	**No satisfactorio (1)**	
Método de Reducción	Reduce correctamente el sistema de ecuaciones, a través de multiplicaciones, sumas y restas, para llegar a la ecuación lineal equivalente.	Comete errores en la reducción del sistema. Errores de signos, de operaciones. Corrige los errores cometidos y llega a la ecuación lineal equivalente.	No reconoce las operaciones que debe realizar para reducir el sistema. No logra llegar a la ecuación lineal equivalente.	

Despeje de ecuaciones	Despeja correctamente la ecuación lineal equivalente para encontrar el valor de la primera incógnita. Utiliza el valor de la primera incógnita para encontrar el valor de las incógnitas restantes.	Comete errores en el despeje u operaciones, que llevan a obtener valores erróneos para alguna de las incógnitas.	No encuentra los valores de las incógnitas o encuentre valores erróneos debido a errores en el despeje u operaciones.	

Ejercicio 7

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación. ¿Encontraste alguna dificultad? ¿Qué puedes comentar acerca de la solución?

$2w + n = 21$
$4w + 2n = 28$

En este caso el sistema de ecuaciones planteado tiene solución vacía, y el objetivo principal del ejercicio es evaluar el entendimiento que tiene el estudiante del concepto de solución vacía del sistema de ecuaciones lineales.

Esto quiere decir que el método de solución queda en segundo plano, por lo que queda a criterio del profesor decidir cuál método aplicar, pudiendo ser aquel que los estudiante ya han demostrado dominar.

De la misma forma, el profesor puede cambiar el sistema por uno cuya solución sea infanta, y así evaluar el entendimiento del estudiante de dicho concepto. Se recomienda que el ejercicio se utilice para la evaluación del concepto de conjunto solución, ya sea como evaluación formativa o evaluación final. En la Tabla 43 se muestra la rúbrica para el ejercicio.

Tabla 43. Rúbrica ejercicio 7.

Elementos	Nivel de desempeño			Total del Puntos
	Muy bien (5)	**Por mejorar (3.5)**	**No satisfactorio (1)**	
Método de igualación	Despeja correctamente la misma literal de ambas ecuaciones. Manipula correctamente las ecuaciones una vez que las ha igualado. Llega a una expresión algebraica.	Comete errores en el despeje de alguna de las literales o en la manipulación de las ecuaciones igualadas. Obtiene una expresión incorrecta.	No logra despejar correctamente ninguna de las literales. Comente errores en la manipulación de las ecuaciones igualadas. Obtiene una expresión incorrecta o no obtiene expresión.	
Solución vacía/infinitas	Concluye que el sistema no tiene solución, o que tiene soluciones infinitas, con base en la expresión algebraica obtenida.	Concluye que el sistema se puede resolver con base en la expresión obtenida, pero no que su solución es vacía o infinita.	No logra llegar a ninguna conclusión respecto a la solución del sistema.	

Ejercicio 8

Claudia y Anabel fueron al cine con algunos amigos y compraron palomitas y refrescos. Anabel pagó $145 por tres cajas de palomitas y 2 vasos de refresco. Claudia compró 5 cajas de palomitas y 7 vasos de refresco y tuvo que pagar $315. ¿Cuánto costó cada caja de palomitas y cada vaso de refresco?

a. Plantea la o las ecuaciones que consideres representan la información dada por el problema y que te ayudarán a contestar la pregunta hecha en el enunciado.
b. Encuentra la información que el enunciado te solicita y exprésala en términos del problema dado.

El ejercicio 8 pretende evaluar diversos aspectos a la vez, y es una fusión de aspectos de diferentes ejercicios. El ejercicio permitirá observar el conocimiento que el estudiante posee acerca de planteamiento de sistema de ecuaciones lineales, resolución de sistemas de ecuación lineales, así como aspectos del manejo algebraico del estudiante. Por ello, se recomienda al profesor utilizar este ejercicio como herramienta de evaluación final en el tópico de sistemas de ecuaciones lineales.

En la Tabla 44 se muestra la rúbrica para la evaluación de este ejercicio.

Tabla 44. Rúbrica ejercicio 8.

Elementos	**Nivel de desempeño**			**Total del Puntos**
	Muy bien (5)	**Por mejorar (3.5)**	**No satisfactorio (1)**	
Interpretación del problema	Plantea las ecuaciones lineales necesarias para representar la información dada por el problema.	Una o todas las ecuaciones planteadas no representan de forma adecuada la información dada por el problema.	No plantea ninguna ecuación lineal.	
Relación entre ecuaciones	Las ecuaciones lineales planteadas muestran relación entre sí. Usando las mismas literales o símbolos de representación.	Aunque las ecuaciones utilizan las mismas literales o símbolos para representar la información, las ecuaciones son independientes entre sí.	Las ecuaciones planteadas son completamente independientes entre sí. Se utilizan símbolos o literales distintas para representar la información.	
Método de solución	Aplica correctamente el algoritmo del método seleccionado, despejando e igualando correctamente, hasta llegar a la ecuación lineal equivalente.	Comete errores en el algoritmo a aplicar o errores en la manipulación algebraica. Corrige los errores y logra llegar a la ecuación lineal equivalente.	No aplica correctamente el algoritmo del método de resolución, y además comete errores en la manipulación algebraica. No logra llegar a la ecuación lineal equivalente.	
Despeje de ecuaciones	Despeja correctamente la ecuación lineal equivalente para encontrar el valor de la primera incógnita. Utiliza el valor de la primera incógnita para encontrar el valor de las incógnitas restantes.	Comete errores en el despeje u operaciones, que llevan a obtener valores erróneos para alguna de las incógnitas.	No encuentra los valores de las incógnitas o encuentre valores erróneos debido a errores en el despeje u operaciones.	

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

7.1 Respecto a los resultados obtenidos de los cuestionarios

En esta sección se aportará una conclusión con respecto a los resultados señalados para cada uno de los cuestionarios en el *CAPÍTULO 5: RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS.*

7.1.1 Cuestionario 1: Conocimientos previos

Aunque en el documento únicamente se presenta el análisis de los instrumentos de cuatro informantes, para seleccionar a esos cuatro informantes fue necesario analizar los 44 cuestionarios de conocimientos previos que se aplicaron.

De este análisis se pueden resaltar algunos aspectos importantes:

- La mayoría de los estudiante ha llegado a un estado de construcción proceso de las operaciones aritméticas y, la mayoría de los problemas observados en este concepto se generan en la manipulación de fracciones, particularmente en la división de las mismas, así como en la omisión de los signos cuando el resultado obtenido es negativo.
- Los conceptos de igualdad y simplificación de expresiones algebraicas están bien cimentados en el 100% de los estudiantes, pues todos contestaron correctamente a las preguntas 2 y 3 del cuestionario 1. Aunque muchos de ellos no explicaron cómo llegaron a la conclusión de que dos expresiones eran equivalentes, es observable en su manipulación que utilizan la agrupación de términos semejantes para decidir esto.
- El concepto de identificación de una ecuación lineal es el que presenta más problemas. Ninguno de los 44 estudiantes fue capaz de definir correctamente las características que identifican a una ecuación lineal y, en el mejor de los casos consiguieron identificar correctamente las dos ecuaciones que eran lineales, pero

también señalaron la ecuación que contenía el termino *xy* como una ecuación lineal.

Este parece ser uno de los problemas más graves, considerando que el tópico que se está trabajando es precisamente el de sistemas de ecuaciones lineales.

- A pesar de lo anterior, muchos de los estudiantes que demostraron no tener el concepto de ecuación lineal, si fueron capaces de despejar ecuaciones con un mínimo de errores, sin embargo, no fueron capaces de relacionar los resultados obtenidos con el tipo de solución que corresponde a la ecuación. Un concepto que, en el desarrollo de las descomposiciones genéticas también se consideró como necesario antes de trabajar con los conjuntos solución para sistemas de ecuaciones lineales.
- Fueron pocos los estudiantes que demostraron la capacidad de plantear una ecuación lineal en base a un problema dado. La mayoría de los estudiantes que lograron resolver el problema, no lo hicieron por medio de una ecuación, sino a través de sumas iterativas que les permitieron llegar al resultado. Esto puede hablar de una falta de fluidez en el manejo de las ecuaciones o, simplemente, puede deberse a que la instrucción dada no especificaba que el problema debía resolverse usando una ecuación lineal.
- De la totalidad de 44 estudiantes solo uno fue capaz de plantear correctamente un sistema de ecuaciones lineales para representar la información dada por un problema.

7.1.2 Cuestionario 2: Método de Cramer

En el desarrollo del cuestionario 2, el estudiante cometió diversos errores en el manejo aritmético, entre ellos realizó divisiones en las que el dividendo era 0, generando respuestas como “$y = \frac{30}{0} = 30$”, lo cual, además de demostrar problemas no observados antes en el esquema aritmético, demostró que el estudiante no había construido el concepto de método de Cramer como un objeto.

Lo anterior fue observable desde el inició de la aplicación del cuestionario, pues el estudiante se acercó en repetidas ocasiones a solicitar ayuda, pues no recordaba de que se trataba el método, que se buscaba encontrar con él o como debía aplicarlo, demostrando que su concepto de método de Cramer se encontraba en un estado de construcción acción, y más importante, que no era capaz de relacionar el método con la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Esto apoya el supuesto dado por este trabajo durante el desarrollo del capítulo 5, de que en estudiantes de bachillerato, el método de Cramer no es más que una herramienta algorítmica que no les permite a los estudiantes construir conceptos relacionados a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, no se puede afirmar esto como un hecho, pues sería necesario dedicar toda una investigación a la confirmación o refutación de dicho supuesto.

7.1.3 Cuestionario 3: Métodos de solución

Antes de discutir las conclusiones obtenidas al analizar este cuestionario, es importante recordar que hubo una notable diferencia entre el estudiante seleccionado para responder al cuestionario tipo 1 y el estudiante seleccionado para el cuestionario tipo 2. Aunque ninguno de los dos informantes demostró haber construido todos los conceptos previos que las descomposiciones genéticas consideraban, el informante 2 demostró en el cuestionario 1 reconocer una dependencia entre los valores de x y de y en una ecuación lineal, lo que se supuso le ayudaría a responder este cuestionario. Por otro lado, el informante 3 fue elegido simplemente, por ser uno de los estudiantes que cometió menos errores en el despeje de ecuaciones.

En la *Tabla 35. Análisis respuestas cuestionario 3*, se puede observar de forma general que el informante 3 no dio evidencia de haber construido ninguno de los conceptos que se buscaban evaluar, pues aunque intentaba manipular las ecuaciones, no lograba despejar ninguna de las incógnitas, y por ende, no logró llegar a ninguna conclusión respecto a las soluciones de los sistemas.

Por otro lado, el informante 2 demostró que la mayoría de los conceptos evaluados habían alcanzado un estado de construcción proceso.

En el caso de los sistemas con solución vacía y con soluciones infinitas, el informante se apoyó del aspecto geométrico para llegar a una conclusión acerca de la solución, asignando a cada una de las expresiones aritméticas que encontró, tanto la que representaba una verdad como la que representaba una contradicción, una representación geométrica en el plano cartesiano. Lo anterior, sería una indicación de que, tal vez, es necesario llevar de la mano el aspecto algebraico con el aspecto geométrico.

7.1.4 Cuestionario 4: Encapsulación

En el caso de este cuestionario y su informante se observó que, a pesar de que el estudiante mostró un gran déficit en la construcción de los conceptos previos, fue el único capaz de plantear un sistema de ecuaciones lineales en base a problemas tipo enunciado, resolver dichas ecuaciones y darle a los resultados obtenidos un sentido con respecto al problema dado.

Esto genera la necesidad de replantear si los conceptos previos considerados en el análisis teórico se apegan realmente a la realidad de los estudiantes.

7.2 Conclusiones hacia la descomposición genética

De acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, es observable que las descomposiciones genéticas propuestas en el análisis teórico necesitan ser revisadas y, seguramente, replanteadas en algunos de sus aspectos.

En cuanto a la descomposición genética para el método de Cramer, sería necesario aplicar los mismos cuestionarios a una variedad de estudiantes con la finalidad de corroborar si, tal y como se supone, este método permanece como un elemento algorítmico para los estudiantes, no llegando más allá de un estado de construcción acción.

Para las descomposiciones de los métodos de reducción, sustitución e igualación, es necesario reconsiderar un aspecto muy importante, la representación geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones.

Desde un inicio, las descomposiciones genéticas propuestas están considerando únicamente aspectos aritméticos y algebraicos, es decir, toda la manipulación y la solución de los sistemas de ecuaciones planteados tiene que hacerse por métodos algebraicos. Sin embargo, el cuestionario respondido por el informante 3, así como los acercamientos que el informante tuvo con el aplicador, hablan de que no es posible, o al menos no es ideal, hacer dicha separación si no que, por el contrario, es necesario que los estudiantes se apoyen en la parte geométrica para llegar a conclusiones que para ellos tengan sentido y sean más tangibles que la simple manipulación algebraica.

Pensando aun en la representación geométrica, sería posible que sea precisamente esta la que ayude al estudiante a encapsular los conceptos de solución vacía y soluciones infinitas, los cuales este trabajo supone no es posible encapsular a través de problemas dados como enunciado.

Por último, sería necesario analizar aquellos conceptos que se consideran conocimientos previos indispensables para llegar a la construcción del concepto de conjunto solución como un objeto, pues el informante 4, a pesar de haber demostrado que no había alcanzado los estados de construcción ideales de los conceptos previos, también demostró, con respecto a las mismas descomposiciones genéticas, que había logrado encapsular el concepto de solución única.

Con todo lo anterior, queda claro que es necesario continuar con iterando la aplicación del ciclo de investigación APOE, para refinar continuamente las descomposiciones genéticas propuestas.

7.3 Respecto a los objetivos y al futuro

En cuanto a los objetivos propuestos en el *CAPÍTULO 2: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA*, se considera que fueron alcanzados en su totalidad, tal y como están planteados. Sin embargo, lo anterior no implica que el trabajo ha terminado, pues el ciclo de investigación puede continuar aplicándose cuantas veces sea necesario, siempre que se vea que las descomposiciones propuestas están quedando cortas con respecto a la realidad.

Lo dicho en el párrafo anterior nos lleva a pensar en los trabajos a futuro que surgen a partir de este trabajo de tesis. En primer lugar, se buscará continuar con las iteraciones del ciclo de investigación de la teoría APOE, hasta tener la oportunidad de diseñar y aplicar toda una secuencia de enseñanza para los sistemas de ecuaciones lineales en bachillerato, que se base en las descomposiciones genéticas diseñadas en este trabajo y refinadas a partir del mismo.

Por otro lado, como se observó que los estudiantes llegan a bachillerato con muchas deficiencias aritméticas y algebraicas, se buscará llevar la investigación a nivel secundaria (estudiantes entre 12 y 15 años), para así estudiar cómo es que los estudiantes construyen en un principio los conceptos de ecuación lineal (definición, interpretación, despeje), solución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales.

REFERENCIAS

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría APOE* (tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.

Alsina, A. y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 7 – 32.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York, EEUU: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1997). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.), *Research in College Mathematics Education II*, 1 – 32, EEUU: American Mathematical Society.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 6 (3), 199 – 219.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra an algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Reston, Virgnina: NCTM e IAP.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. E*ducación matemática.,* 8(3), 24 – 41.

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación matemática*, 20(2), 65 – 89.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 6 (3), 221 – 278.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135 – 156.

National Mathematics Advisory Panel [NMAP]. (2008). *Foundations of succes: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, EEUU: U.S. Department of Education.

OCDE (2013) Programa para la evaluación Internacional de Alumnos (PISA), PISA 2012 – Resultados. Recuperado de (Diciembre, 2016): https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-mexico-ESP.pdf

Ochoviet, C. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas* (tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, Montevideo, Uruguay.

Oktaç, A., Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 13 – 4(II), 373 – 385.

Palarea, M., Ruano, R. y Socas, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61 – 74.

Parraguez, M. (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* México, 24, 263 – 272.

Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto de espacio vectorial. *Educación Matemática.* 25(1), 133 – 154.

Roa-Fuentes, S., Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 13(1), 89 – 112.

Roa-Fuentes, S., Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 15(2), 199 - 232.

Salas, O. (2012). Constructo "Alfabetización matemática" según PISA. *Cuarto informe del estado de la educación*. Costa Rica: Estado de la nación.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática,* 26(3), 75 – 107.

Sánchez, E. y Serna, D. (2013). Álgebra, un conocimiento indispensable. *Educación científica y tecnológica.* Edición especial, 95 -98.

Secretaría de Eduación Pública (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* Obtenido de Programas de estudio. Secundaria: http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/

Secretaría de Educación Pública (2013). *Materiales de apoyo para procesos de evaluación al SPD. Matemáticas.* Obtenido de Subsecretaría de Educación Media Superior. Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico: http://cosdac.sems.gob.mx/maespd/index.php/ctr/matematicas

Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes esperados, Matemáticas Secundaria 2°.* Obtenido de Aprendizajes Clave para la Educación Integral: http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate2.html

Segura de Herrero, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(1), 49 – 78.

Skovsmose, O. (1985). Mathematical Education versus Critical Education. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 337 - 354.

Socas, M. (2008). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM (2007).* Págs. 19 -52.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5 – 34.

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M. y Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema de matriz asociada a una transformación lineal. *Educación Matemática.* 27(2), 95 – 124.

Trigueros, M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Lineal Algebra. *Proceedings of the 5th CERME*, Lanarca, Chipre, 2359 – 2368.

Zill, D. y Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica.* D.F., México: McGraw-Hill/Interamericana Editores.