Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

El teorema de Baire. Un puente entre topología y análisis matemático

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta

María Belén Flores Landaverde

Dirigido por:

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López

Centro Universitario
Querétaro, Qro. 2024
México

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

El teorema de Baire. Un puente entre topología y análisis matemático

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta

María Belén Flores Landaverde

Dirigido por:

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López	
Presidente	Firma
Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga	
Secretario	Firma
Dr. Jesús Jerónimo Castro	
Vocal	Firma
M.C. Iván González García	
Suplente	Firma
M.C. Roberto Torres Hernández	
Suplente	Firma

Centro Universitario

Querétaro, Qro. 2024

México

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a mi familia por su amor y apoyo incondicional a lo largo de estos años de estudio; su respaldo ha sido vital en este camino. A mis amigos, gracias por su compañía y por siempre ofrecerme palabras de ánimo en los momentos más oportunos. A la Universidad Autónoma de Querétaro, le agradezco por brindarme la oportunidad de formarme en un entorno académico enriquecedor y por las valiosas experiencias vividas en sus instalaciones. Deseo reconocer al Dr. Francisco Gerardo Jiménez López, mi asesor de tesis, por su guía invaluable y sus consejos cruciales durante el desarrollo de este trabajo. Su apoyo ha sido un pilar fundamental para finalizar con éxito este proyecto. Al comité encargado de revisar este trabajo por sus comentarios y sugerencias. Los cuáles han sido fundamentales para mejorar la calidad de este estudio. Finalmente, me gustaría agradecer a todos mis profesores quienes, con su dedicación y pasión por la enseñanza, me han inspirado a continuar aprendiendo.

Índice

Índice de figuras

I Resumen

En la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, regularmente los problemas suelen enfocarse en una sola rama, lo que dificulta que los estudiantes aprecien las conexiones y aplicaciones en otras áreas de la matemática. El objetivo principal de este texto es presentar **aplicaciones** accesibles para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas que ilustren la relación entre el **teorema de categoría de Baire** (un resultado puramente topológico) y el análisis matemático, acercando así a los alumnos a problemas **multidisciplinarios** y fomentando una comprensión más integral de la disciplina. Se empleó una metodología deductiva para desarrollar las demostraciones del teorema de Baire, junto con sus lemas, corolarios y aplicaciones, partiendo de axiomas y definiciones previamente establecidas. En todo momento se aplicó inferencia analítica y rigor lógico para justificar las aplicaciones y hacerlas accesibles. Los principales resultados de este trabajo son el desarrollo del teorema de categoría de Baire en espacios métricos completos y en espacios topológicos. Resaltando la importancia de las hipótesis de este teorema en estos últimos. La analogía de los conjuntos nunca densos, los conjuntos de primera categoría, los conjuntos de segunda categoría con las distintas maneras de describir o determinar el tamaño de los conjuntos en matemáticas. Así como aplicaciones interesantes y accesibles para los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas Aplicadas, entre las principales se encuentran la existencia de funciones continuas y no diferenciables, el teorema de acotación uniforme y el teorema de la gráfica cerrada.

Palabras clave: **aplicaciones**, **teorema de categoría de Baire**, **multidisciplinarios**.

II Abstract

In the Bachelor of Applied Mathematics, problems often focus on a single branch, which makes it difficult for students to appreciate the connections and applications in other areas of mathematics. The main objective of this text is to present **applications** accessible to students of the Bachelor's Degree in Applied Mathematics that illustrate the relationship between the **Baire's category theorem** (a purely topological result) and the mathematical analysis, thus bringing closer students to **multidisciplinary** problems and promoting a more comprehensive understanding of the discipline. A deductive methodology was used to develop the proofs of Baire's theorem, along with its lemmas, corollaries and applications, starting from previously established axioms and definitions. Analytical inference and logical rigor were applied at all times to justify the applications and make them accessible. The main results of this work are the development of Baire's category theorem in complete metric spaces and in topological spaces. Highlighting the importance of the hypotheses of this theorem in the latter. The analogy of never dense sets, first-category sets, second-category sets with the different ways of describing or determining the size of sets in mathematics. As well as interesting and accessible applications for students of the Bachelor of Applied Mathematics, among the main ones are the existence of continuous and non-differentiable functions, the uniform bounding theorem and the closed graph theorem.

Keywords: **applications**, **Baire's category theorem**, **multidisciplinary**.

III Introducción

El teorema de categoría de Baire establece que en un espacio métrico completo, la intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso. Este teorema interviene, directa o indirectamente, en la demostración de una cantidad elevada de resultados, muchos de los cuales son no triviales, algunos son un verdadero reto a la propia imaginación. Es un resultado de naturaleza puramente topológica. Sin embargo, tiene consecuencias en campos muy variados (entre ellos la topología, el cálculo, la teoría de números, el análisis funcional, las ecuaciones diferenciales, la probabilidad, etc.). Garantiza la existencia de ciertos objetos matemáticos de una manera no constructiva; algunos de estos objetos son muy difíciles de construir y en un principio se consideran como excepcionalmente raros y, a veces, extravagantes; sin embargo, estos objetos constituyen la regla y no la excepción. Un ejemplo de esto son las funciones continuas nunca diferenciables (Aplicación 4), las funciones continuas nunca monótonas (Aplicación 9), las funciones continuas con un conjunto denso de máximos locales propios (Aplicación 10), etc.

Además, es un ejemplo claro de la relación entre dos ramas de las matemáticas: la topología y el análisis matemático. Esto representa una excelente oportunidad para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ya que les permite conocer un ejemplo fascinante en donde dos ramas de las matemáticas se fusionan. Los problemas que se presentan en la licenciatura suelen estar aislados dentro de una única rama, sin resaltar las relaciones y aplicaciones en otras áreas de las matemáticas. Lo cual limita la capacidad de los estudiantes para aplicar conceptos y herramientas matemáticas en contextos diversos. El objetivo de este texto es presentar a los estudiantes de la licenciatura el teorema de categoría de Baire como un puente entre topología y análisis matemático. A través de exhibir aplicaciones accesibles de este teorema al análisis matemático y de presentar la teoría necesaria para comprender estas aplicaciones. Acercando así a los alumnos a problemas multidisciplinarios y fomentando una comprensión más completa de la teoría matemática en su conjunto.

En el primer capítulo se explora la biografía del matemático René Baire (1874-1932), quién demostró el teorema de categoría en su tesis doctoral [39] en 1899. Este capítulo está fuertemente basado en el trabajo [28] de P. Dugac y en el trabajo [6] de B. Jeauffroy y S. Pellerin. Luego, en el siguiente capítulo se presentan conceptos y lemas necesarios para comprender este teorema. Después, se demuestra dicho teorema para espacios métricos completos y se exhiben definiciones derivadas de él. Posteriormente, en el capítulo Espacios de Baire se definen los espacios de Baire y se extiende el teorema de categoría de Baire para espacios topológicos. Se exhiben ejemplos de espacios de Baire que no cumplen alguna de las hipótesis de la extensión. Finalmente, se demuestra el teorema de categoría de Banach que afirma que en un espacio topológico, la unión de cualquier familia de conjuntos abiertos de primera categoría es de primera categoría. Esta demostración es más compleja que la demostración para espacios métricos. En el capítulo de aplicaciones, se exponen aplicaciones accesibles para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas del teorema de categoría de Baire al análisis matemático. Algunas aplicaciones utilizan este teorema para demostrar la existencia de funciones difíciles de imaginar. Las últimas aplicaciones de esta sección son el teorema de acotación uniforme, el teorema de la función abierta y el teorema de la gráfica cerrada. Estos resultados son esenciales en el análisis funcional y suelen estudiarse en un primer curso de la materia.

IV Antecedentes

En su tesis doctoral [39], René Baire (1874-1932) evaluó la importancia de la teoría de conjuntos en el análisis matemático. El objetivo principal en la tesis de Baire era caracterizar aquellas funciones de dos variables que eran continuas en cada variable separadamente pero que podían ser o no continuas simultáneamente en ambas variables [51]. Para esto Baire combinó teoría de conjuntos y análisis. En consecuencia creó un teorema de topología conocido actualmente como el teorema de categoría de Baire. González García en la introducción de [54] se menciona que en 1897, William Fogg Osgood prueba que la intersección de una sucesión de subconjuntos abiertos densos de $\mathbb{R}$ es densa en $\mathbb{R}$. Y dos años después, Baire observa que el mismo resultado sigue siendo verdadero en $\mathbb{R}^n$ y lo aprovecha en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (llamadas funciones de la primera clase de Baire). En 1914, F. Hausdorff extendió el resultado a los espacios métricos completos.

El teorema de Baire brindó una generalización eficiente y demostraciones más elegantes a resultados anteriores. El siguiente ejemplo encontrado en [51] es prueba de esto. Poco tiempo antes de la publicación de la tesis de Baire, George Cantor había demostrado que ningún conjunto numerable podía llenar totalmente un intervalo abierto; es decir, la totalidad de los puntos de cualquier intervalo abierto es no numerable. Baire extiende este principio al demostrar que ningún conjunto de primera categoría en $\mathbb{R}$ (de los cuales, los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$ constituyen un caso particular) puede cubrir totalmente un intervalo abierto, este resultado es el corolario 1 del teorema de categoría de Baire. Claramente, esto es una generalización de mayor alcance.

El teorema de acotación uniforme es un resultado importante en el campo del análisis funcional y fue demostrado por el matemático alemán Stefan Banach en la década de 1920. La demostración original de Banach fue publicada en 1922 en la revista "Studia Mathematica". Existen varias demostraciones de este teorema, sin embargo, la demostración que emplea el teorema de categoría de Baire es posiblemente la más sencilla. En [22] puede leerse una demostración que no utiliza el teorema de categoría de Baire.

El teorema de Baire tiene varias aplicaciones en varias ramas de las matemáticas en las que se demuestra la existencia de objetos matemáticos extraños, un ejemplo de esto es el siguiente. A principios del siglo XIX, la mayoría de los matemáticos creían que toda función continua tiene puntos donde es diferenciable [20]. En 1806 Ampère publica una justificación teórica para esto en [1]. En 1872, Karl Weierstrass fue el primero en publicar un ejemplo de una función continua y diferenciable en ninguna parte dada por

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right).$$

Ahora se sabe que varios matemáticos, incluido Bernard Bolzano, construyeron tales funciones antes de este tiempo. Sin embargo, la publicación de la función de Weierstrass fue el primer caso en el que se cuestionó seriamente la idea de que una función continua debe ser diferenciable en casi todas partes
[49], [26]. Con el teorema de categoría de Baire puede demostrarse de una forma no constructiva la existencia de funciones continuas nunca diferenciables y además que son la mayoría. Intuitivamente ser diferenciable, parece ser algo inherente a las funciones continuas, pero de hecho es una rareza en estas, usando el teorema de categoría de Baire puede demostrarse que el conjunto de las funciones continuas y diferenciables en ningún punto es denso.

El descubrimiento de funciones continuas nunca diferenciables conmocionó a la comunidad matemática. Un matemático de la talla de Charles Hermite (1822-1901), en una carta dirigida a Stieltjes fechada el 20 de mayo de 1893, le decía:

« Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des functions continue qui n'ont pas de dérivé »

("Me alejo con horror y temor de esta plaga lamentable de las funciones continuas que no poseen derivadas") [51, pp. 115-117].

Emile Picard (1856-1941) señaló que si Newton hubiera sabido acerca de tales funciones, nunca hubiera creado el cálculo. En lugar de aprovechar las ideas sobre la física de la naturaleza, se habría quedado atascado tratando de trepar por obstáculos matemáticos rígidos . Los argumentos del artículo [1] que Ampère había publicado comenzaron a derrumbarse. En [13, p. 159], Henri Poincaré (1854-1912) comenta que estas funciones se inventaron a propósito para demostrar que el razonamiento de nuestros antepasados era defectuoso y nunca obtendremos nada más de ellas, son inútiles.

Sin embargo, a pesar de los comentarios negativos en aquella época la existencia de dichas funciones ayudo a enfatizar la necesidad de definiciones rigurosas y precisas en matemáticas. Estas funciones son algunos de los primeros ejemplos de curvas fractales. De hecho, la función de Weierstrass es el primer gráfico conocido de una curva fractal [14]. En [14] se puede consultar aplicaciones de las funciones continuas nunca diferenciables. Aunque hoy en día conocemos muchos ejemplos de este tipo de funciones, encontrar una nueva es toda una proeza.

V Objetivos

El objetivo general de este proyecto es presentar **aplicaciones** accesibles para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas que ilustren la relación entre el **teorema de categoría de Baire** (un resultado puramente topológico) y el análisis matemático, acercando así a los alumnos a problemas **multidisciplinarios** y fomentando una comprensión más integral de la disciplina. Por otra parte los objetivos específicos son

- Exhibir aplicaciones del teorema de categoría de Baire al análisis matemático y analizar la teoría necesaria para decodificar esto.
- Presentar una semblanza histórica del teorema de categoría de Baire.
- Demostrar algunas variantes del teorema de categoría de Baire (para espacios métricos completos y para espacios topológicos).

VI Material y métodos o metodología

El material empleado en este trabajo consistió de una computadora con acceso a internet y una bibliografía selecta descrita en la sección de referencias bibliográficas. Se buscó información sobre conceptos básicos de topología y análisis matemático requeridos para entender el teorema de categoría de Baire, principalmente se consulto [19], [9] y [24]. Luego, para examinar qué enuncia el teorema e indagar en los conceptos de conjunto denso en ninguna parte, conjunto de primera categoría y conjunto de segunda categoría se examinó [12]. Más tarde, se consultó el capítulo 8, "Baire Spaces and Dimension Theory" de [19], para desarrollar la variante del teorema de Baire para espacios Hausdorff compactos, así como las definiciones y propiedades de los espacios de Baire.

Se buscó identificar aplicaciones del teorema de Baire accesibles para estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, basándome en mi experiencia como estudiante y en el plan de estudios de esta licenciatura en la Universidad Autónoma de Querétaro. Se seleccionaron aplicaciones que solo requieren conocimientos de cursos básicos de topología, análisis matemático y análisis funcional. La bibliografía consultada para estas aplicaciones incluye [12], [51], [9], [8] y [52].

Se empleó una metodología deductiva para desarrollar las demostraciones del teorema de Baire, junto con sus lemas, corolarios y aplicaciones, partiendo de axiomas y definiciones previamente establecidas. En todo momento se aplicó inferencia analítica y rigor lógico para justificar las aplicaciones y hacerlas accesibles. Además, se incluyeron comentarios en algunas aplicaciones para despertar el interés de los estudiantes.

Se analizaron fuentes que contienen información sobre la biografía de Baire y sus publicaciones. Principalmente la biografía se baso en el trabajo [28] de P. Dugac y en el trabajo [6] de B. Jeauffroy y S. Pellerin. Finalmente, para recalcar que el teorema de Baire se sigue utilizando en la actualidad y ha permitido obtener resultados nuevos, se recopilaron trabajos del año 2000 al año 2024 que utilizan el teorema de categoría de Baire o que utilizan los conceptos de conjunto de primera categoría, segunda categoría, nunca denso o espacio de Baire. Estos trabajos se encuentran enumerados en el anexo.

VII Biografía

Figura 1: Fotografía de René-Louis Baire [10].

René Baire nació el 21 de enero de 1874 en París, Francia. Era el tercer hijo junto con Georges y Henri, de Georges Baire, un sastre y Catherin Perrin. En 1886, a los doce años, René obtuvo una beca por parte del gobierno para ingresar al Liceo Lakanal Sceaux donde se convierte en un estudiante destacado. Durante su tiempo en el Liceo Lakanal Baire acumuló distintos premios; en 1887 obtuvo el primer premio de excelencia en francés, griego, geología, alemán, matemáticas y música. En 1890, su padre muere; no obstante, René continuó sus estudios y en ese mismo año completó las clases avanzadas en el Lycée Lakanal y entró en la sección especial de matemáticas del Lycée Henri IV. En el Lycée Henri IV se preparó para ser admitido en la École Polytechnique o en la École Normale Supérieure. Fue admitido en ambas escuelas; sin embargo, decidió estudiar en la École Normale Supérieure [28, p. 299].

En aquella época, la sección de ciencias de la École Normale Supérieure tenía como objetivo preparar a los estudiantes para una de las tres agregaciones en ciencias matemáticas, físicas o naturales. Baire optó por la agregación en matemáticas y para eso era necesario primero obtener la licenciatura en ciencias matemáticas y en ciencias físicas. Los alumnos de la École Normale no se sometían a los mismos exámenes de licenciatura que los demás candidatos; en su lugar, rendían exámenes especiales y eran clasificados según su desempeño. Baire completó su licenciatura en ciencias matemáticas el 3 de julio de 1894 y su licenciatura en ciencias físicas el 21 de julio [28, pp. 302-303]. En 1895, publicó junto a Rouyer “Théorie analytique de la chaleur”, un curso impartido por Poincaré en la Facultad de Ciencias de París [6, p. 16].

Durante el año escolar 1894-1895, Baire se prepara para la agregación de matemáticas y se convierte en “Agregado de liceo en el orden de ciencias matemáticas”, siendo el tercero de 14 admitidos. Baire fue el mejor en la parte escrita del examen [28, p.304]. Según [28, p.304] Paul Appell, el presidente del jurado de agregación, escribe el 20 de agosto que Baire era “buen profesor, de espíritu muy distinguido. Seguramente se beneficiará mucho de una beca de estudios”. En la parte oral del examen le pidieron probar la continuidad de la función exponencial, pero cuando estaba en medio de la prueba se dio cuenta de que su demostración de continuidad, que había aprendido en el Lycée Henri IV no estaba fundamentada en una comprensión profunda del concepto de continuidad de la función exponencial, sino que se basaba en un método superficial o simplificado, ya que no se refería suficientemente a la definición de la función [5]. Baire fue juzgado de manera severa por el jurado. Parece que su decepción en la parte oral de la agregación lo orientó en la elección del tema de su tesis.

A partir del 19 de octubre de 1895, es nombrado profesor de Matemáticas Especiales en el Lycée de Troyes. Durante el año escolar 1896-1897 es nombrado profesor de matemáticas especiales en el Lycée de Bar-le-Duc. Alrededor del 25 de noviembre de 1896, descubre que una función real de dos variables reales continua respecto a cada una de las variables x, y puede no ser continua respecto al par (x, y), y pone de manifiesto las nociones de semicontinuidad inferior y superior. A pesar de perder a su madre a principios de 1897, el 8 de noviembre en los Comptes Rendus de l’Académie des Sciences publicó su primer informe que contiene los principales resultados obtenidos durante ese año [28, pp.304-305]. En febrero de 1898 Baire obtuvo una beca de estudios de la Facultad de Ciencias de París. Fue a Turín para estar con Volterra, profesor en la Universidad de Turín. Poco tiempo después formuló un teorema que establece la condición necesaria y suficiente para que una función sea límite de una sucesión de funciones continuas. En Comptes Rendus habla sobre este teorema [28, p.305]. Baire introdujo la siguiente clasificación de funciones; las funciones de clase 0 son funciones continuas, las funciones de clase 1 son funciones que no pertenecen a las de clase 0 y que se pueden expresar como el límite de una sucesión de funciones continuas, las funciones de clase 2 son funciones que no son de clase 0 o de clase 1 y que pueden expresarse como el límite de sucesiones de funciones de las clases 0 y 1, una función de clase n es una función que no es de clase 1,2,3,...,n y que puede expresarse como el límite de sucesiones de funciones de clases anteriores [11, p. 18].

En 1899, Baire defendió con éxito su tesis doctoral sobre el tema de las funciones discontinuas. En su tesis, titulada “Sur les fonctions de variables réelles” [39], introdujo el concepto de conjuntos de Baire. Este concepto fue bautizado más tarde con este nombre en su honor. Estos conjuntos pueden aproximarse mediante una sucesión de conjuntos abiertos y densos. Este concepto se convirtió en fundamental en el estudio de la teoría de funciones y tuvo un profundo impacto en el desarrollo de las matemáticas. Además, su tesis es importante para la teoría moderna de funciones. Baire establece una teoría general de funciones discontinuas, algo que los matemáticos de aquella época consideraban inaudito. Puede verse en [28, p.306] que las investigaciones de Henri Lebegue encontraron su fuente de inspiración en los descubrimientos de Baire.

Al poco tiempo, la salud de Baire decayó. En [6, p. 17] y [28, p. 307] se indica que el certificado médico del 20 de noviembre de 1900 precisa que estaba “afectado por trastornos neurasténicos caracterizados principalmente por una gran debilidad muscular, incapacidad para cualquier trabajo intelectual y una fuerte depresión nerviosa”. Arnol Denjoy aseguraba que el deterioro de su salud se debía a que había escrito una tesis tan profunda en corto tiempo [28, p. 307].

El 1 de octubre de 1901 ocupó el cargo de maestro de conferencias en la Facultad de Ciencias de Montpellier. Se encarga hasta 1905 de la preparación del agregado, con tres horas semanales. Según el decano, su “salud lamentable lo obliga a menudo a dar clases en su habitación”. Además, solo tiene dos estudiantes, a veces menos según algunas fuentes [6, p. 17]. En enero y febrero de 1904, Baire fue encargado del curso Peccot en el Collège de France, donde expuso los principales resultados de su tesis [28, p.308]. Este curso, “Leçons sur les fonctions discontinues” [29], fue publicado en 1905 en una edición de A. Denjoy. El curso de Baire tenía pocos oyentes; se decía que su curso era de gran dificultad, sin embargo, Baire respondía: “Miren a Denjoy, él entendió, por lo tanto, no es difícil” [28, p. 308]. Denjoy afirma que Baire es el matemático que más le ha influenciado. Aplicó sus métodos en su tesis desarrollada entre 1915-1917 “ Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse” [2]. Baire regresó a Montpellier donde tuvo una crisis de cansancio dolorosa; las constricciones del estomago convertían sus comidas en un suplicio. En 1904, Baire completó su Teoría de los números irracionales, los límites y la continuidad, publicada en 1905 [44].

Durante este año, a partir del 1 de octubre impartió el curso de matemáticas puras en la Facultad de Ciencias de Dijon y en 1907 fue nombrado profesor. El 11 de febrero de 1907, Baire trabajó en la demostración del siguiente teorema: No existe un homeomorfismo entre R^n y R^p, si $n \neq p$. Baire presentó su demostración incompleta en la Academia de Ciencias de París y ésta nunca se publicó [28, p. 309]. En [6, p. 18] se menciona que esta sería la última investigación original de Baire. En 1907 se publica el primer tomo de “ Leçons sur les théories générales de l’analyse” [30] y el segundo tomo se publica en 1908 [31].

En 1909, Baire tiene una crisis por su enfermedad; pide licencias consecutivas durante 3 meses. En [28] se menciona que Baire expresaba amargura repetidamente a causa del reconocimiento insuficiente de su trabajo y por la decepción de no obtener una cátedra en París, donde Lebesgue fue nombrado maître de conférences en 1910. La familia de Baire percibía que se cometió una injusticia a causa del escaso reconocimiento obtenido. Prueba de esto es la carta de su hermano Georges a Emilie Picard escrita el 6 de julio de 1932 “Sabes que mi hermano estuvo enfermo de neurastenia durante mucho tiempo y tuvo que dejar de dar clases en Dijon. Su enfermedad fue causada primero por el exceso de trabajo intelectual y sobre todo por una gran decepción. Estando en Dijon, esperaba poder conseguir una cátedra en París y esta cátedra fue dada a otro más joven y mejor relacionado, sin duda. No sé los nombres de aquellos que cometieron esta injusticia, pero tienen en su conciencia la muerte de mi hermano” [28, p. 310].
Los años escolares de 1909-1910 y 1912-1913 transcurren de manera tranquila. Baire tomó una licencia de dos meses en 1914 debido a una depresión nerviosa. Después de este episodio, Baire renueva licencias médicas cada año hasta 1919 para recuperar su salud [6, p. 18]. Durante este periodo de licencias médicas constantes, Baire estuvo en la casa de reposo de Alise-Sainte-Reine, en la comuna de Côte-d’Or, de donde partió a Montreux, Suiza, en la orilla derecha del lago Leman, donde lo sorprendió el estallido de la Primera Guerra Mundial y no pudo regresar a Francia. Pasó los años de la guerra, desde 1914 hasta 1918, en Lausana, con problemas económicos. El año de 1919 fue un año de preocupación para Baire dado que en noviembre de este año se cumplirían 5 años de baja por enfermedad. Esta baja le permitía recibir solamente la mitad de su salario de profesor [28, p. 310]. Durante estos 5 años escribió a su amigo Marijon [3, p. 85] “Me he perfeccionado en el deporte de la economía. El vino es caro: bebo agua. En invierno, un abrigo grueso y mantas reemplazan al combustible. Además, mi molesta enfermedad tiene la ventaja de no llevar a gastos. Cuando estoy en la cama, no uso zapatos ni ropa. Y así es como pasé mis cinco años de permiso. La existencia que llevo no es más insoportable que otra cuestión de adaptación a las necesidades”.

La Academia de Ciencias le otorgó el premio Gegner en 1919 y el premio Francour en 1920 y 1921 por el conjunto de sus trabajos; estos premios estaban dotados de sumas de dinero. Además, a partir del 1 de octubre de 1919 se le otorgó un salario de 2400 francos debido a su permiso de inactividad. Sin embargo, este dinero no era suficiente debido a la inflación y al aumento de los precios de la época. En 1922, Baire es elegido como corresponsal de la Sección de Geometría, Baire había sido considerado candidato para este puesto desde 1911 [6, pp. 18-19].

En octubre de 1923 es nombrado Caballero de la Legión de Honor y en este mismo año la Academia de Ciencias le otorga el premio Estrade-Delcros [28, pp. 312]. Baire decide retirarse en 1925 y se instala en Thonon-les-Bains. En 1926 vuelve a ganar el premio Gegner de la Academia de Ciencias. La enfermedad de Baire se agrava cada vez más y el 1 de julio de 1932 es llevado a urgencias en el hospital psiquiátrico Bassens-Chambéry. Fallece en este lugar cuatro días después [6, p. 19].

A pesar de su corta vida y los desafíos que enfrentó debido a su salud, René Baire dejó un legado duradero en el campo de las matemáticas. Sus contribuciones a la teoría de funciones y su desarrollo del concepto de conjuntos de Baire siguen siendo fundamentales en el análisis matemático.

Algunos de los trabajos de Baire son:

- “Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles” (1897) [37].
- “Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues” (1898) [40].
- “Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues” (1898) [41].
- “Sur les fonctions de variables réelles”(1899) [39].
- “Sur le problème de l’intégration au point de vue des variables réelles” (1898) [39].
- “Sur la théorie des fonctions discontinues” (1899) [35].
- “Nouvelle démonstration d’un théorème sur les fonctions discontinues” (1900) [33].
- “Sur la théorie élémentaire des séries” (1904) [36].
- “Sur les séries à termes continus et tous de même signe” (1904) [42].
- “Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité” (1905) [44].
- “Leçons sur les fonctions discontinues” (1905) [29].
- “Lettre à M. Hadamard sur la théorie des ensembles” (1905) [32].
- “Une simplification dans l’enseignement des séries” (1905) [45].

- “Sur la non-applicabilité de deux continus à n et à n+p dimensions” (1907) [34].
- “ Leçons sur les théories générales de l’analyse, tome I, Principes fondamentaux. Variables réelles.” (1907) [30].
- “Leçons sur les théories générales de l’analyse, tome II, Variables complexes. Applications géométriques.” (1908) [31].
- “Sur lorigine de la notion de semi-continuité” (1927) [43].

VIII Teorema de categoría de Baire

En esta sección se introducirán los conceptos de análisis y topología necesarios para comprender el teorema de categoría de Baire, así como los nuevos conceptos e ideas derivadas de este teorema. Posteriormente se presentarán teoremas y lemas empleados en la demostración del teorema de categoría de Baire, junto con la demostración de dicho teorema. Finalmente se presentarán propiedades interesantes de conjuntos cuyo concepto se deriva del teorema de categoría de Baire.

Definición 1. Un **espacio métrico** es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in X$ se cumple

A) $d(x, y) \geq 0$.

B) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

C) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetría).

D) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad del triángulo).

A d se le llama **métrica en** X, d nos da una noción de distancia entre los elementos del conjunto X.

Definición 2. Sean (X, d) un espacio métrico, $Y \subset X$ y $d' : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es la restricción de la métrica d en $Y \times Y$. Es decir,

$$d' = d|_{Y \times Y} .$$

A d' se le denomina **métrica inducida en $\boldsymbol{Y}$ por $\boldsymbol{d}$** y al conjunto (Y, d') se le llama **subespacio de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$**.

Definición 3. Sean (X, d), (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Se dice que **$\boldsymbol{f}$ es continua** si para todo punto $\boldsymbol{x_0 \in X}$ y $\boldsymbol{\epsilon > 0}$ existe $\boldsymbol{\delta > 0}$ tal que si $\boldsymbol{d(x, x_0) < \delta}$, entonces $\boldsymbol{d'(f(x), f(x_0)) < \delta}$.

Definición 4. Sea (X,d) espacio métrico. Dado un punto $x_0 \in X$ y un número real $r > 0$ $B(x_0,r) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\}$ es la **bola abierta centrada en x_0 y con radio r**. Un conjunto U de un espacio métrico X es **abierto** si para todo punto x de U existe una bola centrada en x que está contenida en U y un conjunto es **cerrado** si su complemento es abierto.

Definición 5. Sea $X \neq \varnothing$. Una **topología de** X es una colección τ de subconjuntos de X tal que

A) $\varnothing, X \in \tau$.

B) Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una colección arbitraria de conjuntos en τ, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

C) Si $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N},\, i\leq n} U_i \in \tau$.

Al par (X,τ) se le llama **espacio topológico**. Si $U \subseteq X$ con $U \in \tau$ se dice que U es **abierto** y un conjunto $F \subseteq X$ es **cerrado** si su complemento es abierto.

En particular, todo espacio métrico es un espacio topológico, pues toda función distancia (métrica) en un espacio métrico define una topología en el conjunto dado. A continuación recordamos algunos conceptos topológicos básicos. Para ahondar en detalles sobre éstos y sus propiedades se pueden consultar las referencias [19] y [24].

Definición 6. Sea (X,τ) un espacio topológico y $E \subseteq X$.

A) Decimos que E es **denso** si para todo U abierto no vacío se tiene que $U \bigcap E \neq \varnothing$.

B) El **interior** de E se define como $IntE = \{x \in X \mid$ existe U abierto con $x \in U \subseteq E\}$. Esta afirmación es equivalente a la siguiente, $IntE = \bigcup U$ donde U es un abierto, tal que $U \subseteq E$. Mientras que la **cerradura** de E se define como $\overline{E} = \{x \in X \mid$ para todo U abierto con $x \in U, U \bigcap E \neq \varnothing\}$.

C) La **frontera** de E se define como $\partial E = \{x \in X \mid x \notin IntE$ y $x \notin Int(E^C)\}$.

Es fácil ver que si (X,d) es un espacio métrico y $E \subseteq X$, entonces E es **denso** si para toda bola abierta B se tiene que $B \bigcap E \neq \varnothing$. Además, $IntE = \{x \in X \mid$ existe una bola abierta B centrada en x con $B \subseteq E\}$. Mientras que $\overline{E} = \{x \in X \mid$ para toda bola abierta B centrada en x $B \bigcap E \neq \varnothing\}$.

Definición 7. Sea (X, τ) un espacio topológico y $E, U \subseteq X$. Entonces, ***E* es denso en *U*** si $\overline{E} \bigcap U = U$.

Definición 8. Sean (X, τ), (Y, τ^*) espacios topológicos y una función $f : X \longrightarrow Y$. La función ***f* es continua** en X si para todo conjunto abierto U de Y, la imagen inversa $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.

Dado que todo espacio métrico es un espacio topológico, esta definición de continuidad es equivalente a la definición 3 en espacios métricos. El siguiente teorema demuestra esto.

Teorema 1. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. La función f es continua si y solo si la imagen inversa de cualquier conjunto abierto de Y es un conjunto abierto de X. Denotemos por $B_X(x_0, r)$ a la bola abierta contenida en X con centro x_0 y radio r y denotemos por $B_Y(y_0, r)$ a la bola abierta contenida en Y con centro y_0 y radio r.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua. Sea $A \subseteq Y$ abierto. Si $f^{-1}(A) = \varnothing$, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto. Ahora supongamos que $f^{-1}(A) \neq \varnothing$. Sea $x_0 \in f^{-1}(A)$ en consecuencia $f(x_0) \in A$. Dado que A es abierto, existe $B_Y(f(x_0), r) \subseteq A$. Luego, por continuidad de f para r existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_X(x_0, \delta)$ entonces, $f(x) \in B_Y(f(x_0), r)$. Como $B_Y(f(x_0), r) \subseteq A$ se tiene que $B_X(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$. A causa de que el punto x_0 fue un punto arbitrario de $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(A)$ es abierto.

($\Longleftarrow$ Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Luego, $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \epsilon))$ es un conjunto abierto que contiene a x_0. Por consiguiente, existe $B_X(x_0, \delta)$ tal que $f(B_x(x_0, \delta)) \subseteq B_Y(f(x_0), \epsilon)$. Por lo tanto, f es continuo.

$\square$

Proposición 1. *Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. La función f es continua si y solo si la imagen inversa de cualquier conjunto cerrado de Y es un conjunto cerrado de X.*

Una demostración de esta proposición puede verse en [48, p. 104].

Definición 9. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico es **convergente** a $x \in X$, si para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n > N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de **Cauchy**, si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Es fácil ver que toda sucesión convergente es de Cauchy, sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto. Un espacio métrico es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Teorema 2. *Sea (X, d) un espacio métrico y E subconjunto de X no vacío.*

A) El punto x está en $\overline{E}$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que x_n converge a x.

B) El conjunto E es cerrado si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en E tal que x_n converge al punto x se cumple que x está en E.

Teorema 3. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y M un subespacio de (X, d). El subespacio M es completo si y solo si es cerrado en X.*

La demostración de los teoremas 1 y 2 puede consultarse en la página 30 del libro “Introductory Functional Analysis with applications” [9].

Los siguientes lemas se emplean en la demostración del teorema de categoría de Baire:

Lema 1. *Sea (X, d) espacio métrico. Si $x_0 \in X$, $r > 0$ y $y \in \overline{B(x_0, r)}$, entonces $d(x_0, y) \leq r$. En otras palabras, $\overline{B(x_0, r)}$ está contenida en $\{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $B\left(y, \frac{1}{n}\right) \bigcap B(x_0, r) \neq \varnothing$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B\left(y, \frac{1}{n}\right) \bigcap B(x_0, r)$, entonces $d(x_0, y) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y) < r + \frac{1}{n}$. para todo número natural n.

Por lo que $d(x_0, y) < r + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo n tender a infinito se tiene que $d(x, y) \leqslant r$. $\square$

Lema 2. *Sea (X, d) espacio métrico. Si $x_0 \in X$ y $r > 0$, entonces $\overline{B(y, r')} \subseteq B(x_0, r)$ para todo y, r' con $y \in B(x_0, r)$ y $0 < r' < r - d(x_0, y)$.*

Demostración. Sea $z \in \overline{B(y, r')}$. Por el lema 1 $d(z, y) \leqslant r' < r - d(x_0, y)$.

Como $d(z, y) < r - d(x_0, y)$, entonces

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) < d(x_0, y) + r - d(x_0, y) = r$$

por lo que $z \in B(x_0, r)$.

Concluimos que $\overline{B(y, r)} \subseteq B(x_0, r)$. $\square$

Teorema 4. ***Categoría de Baire:*** *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos abiertos y densos en X. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso en X.*

Demostración. Sea V abierto. Entonces existe $x_1 \in U_1 \bigcap V$ pues U_1 es denso y V es abierto. Sea B_1 una bola abierta con centro en x_1 y radio r_1, tal qué $B_1 \subseteq U_1 \bigcap V$. Como U_2 es denso y B_1 es abierto $U_2 \bigcap B_1 \neq \varnothing$ por lo que existe $x_2 \in U_2 \bigcap B_1$. Sea B_2 una bola abierta centrada en x_2 y con radio $r_2 < \text{mín}\left\{\frac{1}{2}r_1, r_1 - d(x_1, x_2)\right\}$. Por el lema 2, $\overline{B_2} \subseteq B_1$.

Luego, como U_3 es denso y B_2 es abierto $U_3 \bigcap B_2 \neq \varnothing$ por lo que existe $x_3 \in U_3 \bigcap B_2$, sea B_3 una bola centrada en x_3 y con radio $r_3 < \text{mín}\left\{\frac{1}{2}r_2,\ r_2 - d(x_2, x_3)\right\}$, por el lema 2 , $\overline{B_3} \subseteq B_2$.

Repetimos este procedimiento y se obtiene una sucesión de bolas $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\overline{B_n} \subseteq B_{n-1}$ y $B_n \subseteq U_n$, cuya sucesión de radios $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito. En efecto, tenemos

$$
\begin{aligned}
r_2 &< \frac{1}{2}r_1\\
r_3 &< \frac{1}{2}r_2\\
r_4 &< \frac{1}{2}r_3\\
&\vdots\\
r_n &< \frac{1}{2}r_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Entonces, $r_n < \frac{1}{2}r_{n-1} < \frac{1}{2^2}r_{n-2} < \frac{1}{2^3}r^1_{n-3} < \ldots < \frac{1}{2^{n-1}}r_1$ por lo que $r_n < \frac{1}{2^{n-1}}r_1$. Si n tiende a infinito, entonces r_n tiende a 0.

Veamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy:
Como $r_n \longrightarrow 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, entonces $r_n < \frac{\epsilon}{2}$. Si $n, m > N$ entonces $x_n \in B_N$ y $x_m \in B_N$ por lo que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) < 2r_N < 2\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Por la completitud de X existe un punto x tal que $x_n \to x$. Sea $N \in \mathbb{N}$. Entonces, $x_n \in B_{N+1}$ para $n > N$. En consecuencia, $x_n \in B_{N+1} \subseteq \overline{B_{N+1}} \subseteq B_N \subseteq U_N$. Como $x_n \longrightarrow x$ y $x_n \in B_{N+1} \subseteq \overline{B_{N+1}} \subseteq B_N \subseteq U_N$ para $n > N$ se tiene que $x \in \overline{B_{N+1}} \subseteq B_N \subseteq U_N$ (en particular si $N = 1, \quad x \in \overline{B_2} \subseteq B_1$, pero $B_1 \subseteq U_1 \bigcap V$ por construcción). Luego, $x \in U_1 \bigcap V$). Como N fue arbitrario, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y por la observación anterior $x \in U_1 \bigcap V$ por lo que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \bigcap V$.

Al ser V un abierto arbitrario, se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso. □

Lema 3. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces, $IntA = \varnothing$ si y sólo si A^C es denso.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Como $IntA = \varnothing$, entonces para todo $x \in A$ y abierto U con $x \in U$, $U \bigcap A^C \neq \varnothing$. En consecuencia, $A \subset \overline{A^C}$.

Luego, $A \subset \overline{A^C}$ y $A^C \subset \overline{A^C}$ por lo que $X = A \bigcup A^C \subset \overline{A^C}$ por ende $X = \overline{A^C}$.

($\Longleftarrow$ Sea U abierto, como A^C es denso $U \bigcap A^C \neq \varnothing$. En consecuencia, no existe un abierto contenido en A. Es decir, $IntA = \varnothing$. □

Definición 10. Sea (X,τ) un espacio topológico y $E \subseteq X$. Decimos que E es **nunca denso** o **denso en ninguna** si $int\overline{E} = \varnothing$.

Teorema 5. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $E \subseteq X$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) El conjunto E es nunca denso.

b) El conjunto E satisface que $(\overline{E})^C$ es denso.

c) Para cada abierto $U \neq \varnothing$ existe un conjunto V no vacío y abierto con $V \subseteq U$ tal que $V \bigcap E = \varnothing$.

d) Para todo abierto no vacío U, E no es denso en U.

e) Para todo abierto $U \subseteq X$ no vacío, $\overline{E} \bigcap U \neq U$.

Demostración.

$a) \Longleftrightarrow b)$

La equivalencia entre las afirmaciones $a)$ y $b)$ se deriva inmediatamente del lema 3.

$c) \Longleftrightarrow d)$

Es fácil ver la equivalencia entre estas 2 afirmaciones, esta equivalencia se infiere de la definición de conjunto denso.

$a) \Longleftrightarrow e)$

$(\Longleftarrow$ Supongamos que $\operatorname{Int} \overline{E} \neq \varnothing$. Notemos que $\operatorname{Int} \overline{E} \subseteq \overline{E} \bigcap \operatorname{Int} \overline{E} \subseteq \operatorname{Int} \overline{E}$. Entonces, $\operatorname{Int} \overline{E} = \overline{E} \bigcap \operatorname{Int} \overline{E}$, lo cual es una contradicción, ya que $\operatorname{Int} \overline{E}$ es un abierto no vacío.

$\Longrightarrow)$ Supongamos que existe $U \subseteq X$ abierto y no vacío tal que $\overline{E} \bigcap U = U$. Entonces, $U \subseteq \overline{E}$ en consecuencia $U \subseteq \operatorname{Int} \overline{E} = \varnothing$ lo cual es una contradicción ya que U es no vacío.

$d) \Longleftrightarrow e)$

$\Longrightarrow)$ Supongamos que existe $U \subseteq X$ abierto y no vacío tal que $\overline{E} \bigcap U = U$. Entonces, E es denso en *U,* lo cual es contradice a la hipótesis.

$(\Longleftarrow$ Supongamos que existe un abierto U no vacío tal que E es denso en U. Como E es denso en *U,* $\overline{E} \bigcap U = U$ lo cual contradice la hipótesis.

$\square$

Definición 11. Sea (X, τ) un espacio topológico y $E \subseteq X$.

1. El conjunto E se llama de **primera categoría**, si puede expresarse como la unión numerable de conjuntos nunca densos.
2. Si E no es de primera categoría, se dice que es de **segunda categoría**.
3. Un conjunto se llama **residual**, si su complemento es de primera categoría.

Es importante señalar que un conjunto puede ser de primera categoría y residual al mismo tiempo. Por ejemplo: en el espacio topológico de los racionales con la métrica euclidiana, un conjunto de un solo punto es de primera categoría y residual al mismo tiempo.

Existen varias maneras de describir o determinar el tamaño de los conjuntos. Por ejemplo la cardinalidad en teoría de conjuntos, donde un conjunto finito es “más pequeño”que uno infinito. No obstante, un conjunto infinito numerable se considera pequeño con respecto a otro que es no numerable. Otra forma de determinar el tamaño de los conjuntos es mediante la noción de medida en la teoría de la medida e integración. En este enfoque, el tamaño de un conjunto se representa con un número real positivo o cero y, en algunos casos, un conjunto puede tener un tamaño infinito. Un conjunto se considera más pequeño que otro si su medida es menor que la del otro conjunto. Los conjuntos más pequeños son los de medida 0. Baire proporciona una forma de determinar el tamaño de conjuntos desde un punto de vista topológico. Los conjuntos nunca densos son aquellos conjuntos que no logran cubrir completamente un subconjunto del espacio. Si intentáramos cubrir el espacio con conjuntos nunca densos, cada rincón del espacio tendría huecos (esta observación puede derivarse inmediatamente del lema 5), por tanto son considerados pequeños y cualquier conjunto que es unión numerable de estos conjuntos es llamado un conjunto de primera categoría o magro y, en consecuencia, también se le considera pequeño. Un conjunto que no es de primera categoría se le suele llamar de segunda categoría o no magro. Intuitivamente, los conjuntos de segunda categoría son conjuntos grandes.

Existen conjuntos que son pequeños en un sentido, pero grandes en otro. Por ejemplo, un conjunto grande en cardinalidad pero pequeño en medida es el conjunto de Cantor; este conjunto es no numerable y tiene medida 0. Además puede demostrarse que dicho conjunto es nunca denso y por ende pequeño en el sentido que Baire proporciona. En [23, p. 1] se habla de los números de Liouville y se menciona que el conjunto de números de Liouville es un conjunto de medida 0, no numerable y además es denso en el conjunto de los números reales con la métrica euclidiana. En consecuencia, es pequeño en medida, grande en cardinalidad y no pequeño en el sentido de Baire. El conjunto gordo de Cantor es un conjunto pequeño en el sentido de Baire, grande en cardinalidad y de medida positiva. Dado que es nunca denso en los reales con la métrica euclidiana, es no numerable y tiene medida positiva. El conjunto de los números irracionales en el conjunto de los números reales con la métrica euclidiana es un conjunto grande en cardinalidad al ser no numerable, grande en medida debido a que tiene medida igual a infinito y grande en el sentido de Baire porque es un conjunto de segunda categoría. Los conjuntos de Vitali son no Lebesgue- medibles, de cardinalidad grande al ser no numerables y son conjuntos de segunda categoría, por lo que son grandes en el sentido de Baire. Estas características de los conjuntos de vitali pueden verificarse en [16, p. 22], mientras que las características mencionadas del conjunto de Cantor y los conjuntos gordos de Cantor pueden consultarse en [46].

Los conjuntos mencionados en la definición anterior tienen propiedades interesantes; algunas de estas las exploraremos en los siguientes lemas y corolarios.

Lema 4. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $U,\ F \subseteq X$, tal que U es abierto y F es cerrado, entonces los conjuntos $\overline{U}-U$ y $F-IntF$ son densos en ninguna parte.*

Demostración. Sea U abierto. Entonces, $U = IntU$ por lo que

$$\overline{U}-U=\overline{U}-IntU=IntU\bigcup\partial U-IntU=\partial U.$$

Supongamos que $Int(\partial U)\neq\varnothing$. Entonces, existe un abierto V no vacío, tal que $V\subseteq\partial U$ y sea $x\in V$. Como $V\subseteq\partial U$, $x\in\overline{U}$. Luego, por la definición de cerradura $V\bigcap U\neq\varnothing$. Esto implica que $V\bigcap IntU\neq\varnothing$, lo cuál es una contradicción dado que $V\subseteq\partial U$. Por lo tanto, $Int(\overline{U}-U)=Int(\partial U)=\varnothing$, es decir $\overline{U}-U$ es denso en ninguna parte.

Sea F cerrado entonces,

$$F-IntF=\overline{F}-IntF=IntF\bigcup\partial F-IntF=\partial F.$$

Supongamos que $Int(\partial F)\neq\varnothing$. Entonces, existe un abierto V no vació, tal que $V\subseteq\partial F$. Entonces, $V\subseteq F$. Luego, por la definición de interior $V\subseteq IntF$, esto es una contradicción dado que $V\subseteq F-IntF$. Por lo tanto, $Int(F-IntF)=Int(\partial F)=\varnothing$, es decir $Int(F-IntF)$ es denso en ninguna parte.

$\square$

Este lema nos indica que la frontera de un conjunto cerrado o abierto es un conjunto nunca denso.

Lema 5. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $E\subseteq X$. Entonces, E es nunca denso si y solo si para todo abierto no vacío U existe un abierto no vacío contenido en $U-E$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $E\subseteq X$ un conjunto nunca denso y U un conjunto abierto. Como E es nunca denso entonces, $(\overline{E})^C$ es denso por lo que $U\bigcap(\overline{E})^C\neq\varnothing$. Luego, $U\bigcap(\overline{E})^C$ es abierto y está contenido en $U-E$. Esto último puede verificarse de esta forma,

$$E \subseteq \overline{E} \Longrightarrow (\overline{E})^C \subseteq E^C \Longrightarrow U \bigcap (\overline{E})^C \subseteq U - E.$$

($\Longleftarrow$ Sea U un conjunto abierto. Luego, por hipótesis existe $V \subseteq X$ abierto y no vacío tal que $V \subseteq U - E$. Entonces, $V \subseteq U \bigcap Int\left(E^C\right)$.

Notemos que $\operatorname{Int}\left(E^C\right) = (\overline{E})^C$, pues

$$(\overline{E})^C = (\partial(E) \bigcup Int(E))^C = Int\left(E^C\right).$$

En consecuencia, $V \subseteq U \bigcap (\overline{E})^C$ por lo que $U \bigcap (\overline{E})^C \neq \varnothing$. Como U es un abierto arbitrario $(\overline{E})^C$ es denso. Por lo tanto, E es nunca denso.

□

Corolario 1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos nunca densos. Si V es un conjunto abierto no vacío, entonces $V \nsubseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.*

Demostración. Como E_n es nunca denso $U_n = \left(\overline{E_n}\right)^C$ es denso y abierto entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso por el teorema 4. En consecuencia, $V \bigcap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \neq \varnothing$. Es decir, existe $x \in V \bigcap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)$ por lo que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{E_n}\right)^C = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}\right)^C$. Por consiguiente, $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}$. Entonces, $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Con esto se puede concluir que $V \nsubseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. □

Una consecuencia inmediata de este corolario es que en un espacio métrico completo, todo conjunto abierto no es de primera categoría. Además, se puede decir que en un espacio métrico completo, todo conjunto de primera categoría es “pequeño”dado que este no logra cubrir a un conjunto abierto.

Lema 6. *Si F es cerrado y de primera categoría en un espacio métrico completo, entonces F es denso en ninguna parte.*

Demostración. Sea F cerrado y de primera categoría. Entonces, $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ donde E_n es denso en ninguna parte para cada $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$F = IntF \bigcup \partial F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n. \text{ Entonces, } IntF \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Luego, por el corolario 1 $Int(F) = \varnothing$ por lo que F es denso en ninguna parte. □

Definición 12. Sea (X, τ) un espacio topológico y $E \subseteq X$.

1. Si el conjunto E se puede expresar como la intersección numerable de conjuntos abiertos, se dice que E es un conjunto $\boldsymbol{G_\delta}$.

2. Si el conjunto E se puede expresar como la unión numerable de conjuntos cerrados, se dice que E es un conjunto $\boldsymbol{F_\sigma}$.

Lema 7. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico. Si* E *es un conjunto de primera categoría y* $A \subseteq E$*. Entonces,* A *es de primera categoría.*

Demostración. Sean A, $E \subseteq X$ tales que $A \subseteq E$ y $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, donde $\{E_n\}$ es una colección de conjuntos densos en ninguna parte. Notemos que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_n \bigcap A)$. Supongamos que $E_n \bigcap A$ no es nunca denso. Entonces, existe un conjunto no vacío y abierto V tal que

$$V \subseteq \overline{E_n \bigcap A} \subseteq \overline{E_n} \bigcap \overline{A} \subseteq \overline{E_n}$$

Esto es una contradicción, puesto que $Int\overline{E_n} = \varnothing$ para todo n. Por consiguiente, $E_n \bigcap A$ es un conjunto nunca denso para cada n. Por lo tanto, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_n \bigcap A)$ es un conjunto de primera categoría. ☐

Lema 8. *Sea* (X,d) *un espacio métrico completo y* $A \subseteq X$*.* A *es residual si y sólo si contiene un conjunto* G_δ *denso. Por lo tanto, un subconjunto de un espacio métrico es de primera categoría si y solo si está contenido en un conjunto* F_σ *cuyo complemento es denso.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $A \subseteq X$ residual. Entonces, A^C es de primera categoría por lo que $A^C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ donde E_n es denso en ninguna parte para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {E_n}^C$.

Notemos que $\left(\overline{E_n}\right)^C \subseteq {E_n}^C$ por lo que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{E_n}\right)^C \subseteq A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {E_n}^C$. Luego, como E_n es denso en ninguna parte, $\left(\overline{E_n}\right)^C$ es denso. Entonces, por el teorema de categoría de Baire $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{E_n}\right)^C$ es denso.

Finalmente, como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{E_n}\right)^C$ es un conjunto G_δ denso y además $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}\right)^C \subseteq A$ se tiene que A contiene un conjunto G_δ denso.

($\Longleftarrow$ Sea $A \subseteq X$ y $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de abiertos, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq A$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso . Como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq A$ entonces, $A^C \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^C$.
Por otra parte

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^C \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^C}.$$

Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^C}\right)^C$ lo cual implica que $\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {U_n}^C}\right)^C$ es denso, por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^C$ es nunca denso.

Luego $A^C \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^C$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^C$ es nunca denso. Entonces, A^C es subconjunto de un conjunto de primera categoría por lo que A^C es de primera categoría. $\square$

Lema 9. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\{F_n\}$ una colección numerable de conjuntos cerrados con $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Entonces $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} IntF_n$ es un conjunto residual. Si X es un espacio métrico completo entonces, U es denso.*

Demostración. Los conjuntos $E_n = F_n - IntF_n$ son nunca densos. Por lo tanto, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ es de primera categoría. Luego, $X - U \subset E$ por lo que $X - U$ es de primera categoría y por ende U es residual. Finalmente, si X es un espacio métrico completo U es denso por el lema 8. $\square$

Corolario 2. *Si (X,d) es completo y no vacío, entonces no es de primera categoría.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos nunca densos de X tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Como E_n es denso en ninguna parte $U_n = \left(\overline{E_n}\right)^C$ es denso y abierto. En consecuencia, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso por el teorema 4.

Luego, $E_n \subseteq \overline{E_n}$ por lo que $U_n = \left(\overline{E_n}\right)^C \subseteq E_n^C$. En consecuencia, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^C$, no obstante $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^C = \varnothing$ puesto que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^C$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^C = \varnothing$ entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \varnothing$. Esto contradice que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso. $\square$

Lema 10. *Sea (X,d) un espacio métrico completo y sean $E, F \subseteq X$.*

A) Si E^C es denso y F es un conjunto cerrado contenido en E, entonces F es nunca denso.

B) Si E y E^C son ambos conjuntos densos, entonces como máximo uno de ellos es un conjunto F_δ.

Demostración. Como E^C es denso y $F \subset E$ entonces $E^C \subset F^C$. Luego,$X = \overline{E^C} \subset \overline{F^C}$ por lo que F^C es denso en X. Finalmente, $F^C = (\overline{F})^C$ es denso así que F es denso en ninguna parte.

Probamos ahora la segunda afirmación. Supongamos que E y E^C son conjuntos F_δ entonces $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ donde $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos cerrados. Entonces, por el inciso a) F_n es denso en ninguna parte para cada n $\in \mathbb{N}$. En consecuencia, E es un conjunto de primera categoría. Análogamente, se concluye que E^C es de primera categoría por lo que $X = E^C \bigcup E$ es de primera categoría, lo cual es una contradicción por el corolario 2. $\square$

Lema 11. *Sea (X,d) un espacio métrico completo tal que $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ donde $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable de cerrados no vacíos. Entonces, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que F_m tiene interior no vacío.*

Demostración. Supongamos que $IntF_n=\varnothing$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Entonces, F_n es nunca denso para cada $n\in\mathbb{N}$ por lo que X es un conjunto de primera categoría, lo cuál es una contradicción a causa del corolario 2. $\square$

Lema 12. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A\subseteq X$. Entonces, A es residual si y solo si $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ donde $IntE_n$ es denso para cada $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Como A es residual, entonces $A^C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ donde E_n es un conjunto nunca denso. Luego, $\left(\overline{E_n}\right)^C$ es denso. Además,

$$(\overline{E_n})^C=\left(\partial E_n\bigcup IntE_n\right)^C=Int(E_n^C).$$

Entonces, $Int\left(E_n^C\right)$ es denso.

Luego, como $A^C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ entonces $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n^C$ donde $Int\left(E_n^C\right)$ es denso.

($\Longleftarrow$ Como $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ donde $IntE_n$ es denso para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces $A^C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^C$. Por otra parte,

$$IntE_n=\left(\partial(E_n^C)\bigcup Int(E_n^C)\right)^C=(\overline{E_n^C})^C.$$

Entonces, $(\overline{E_n^C})^C$ es denso. Luego, E_n^C es denso en ninguna parte. Por lo tanto, $A^C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^C$ es de primera categoría. $\square$

IX Espacios de Baire

En esta sección primeramente se exhibirá la definición de espacios de Baire. Al igual que definiciones, lemas y teoremas que nos auxiliarán en la extensión del teorema de categoría de Baire para espacios topológicos. Esta extensión es presentada en el teorema 8. Una vez demostrado este teorema se presentarán ejemplos de espacios topológicos que no cumplen alguna de las hipótesis, esto con el propósito de enfatizar que el recíproco del teorema es falso. Finalmente, se probará que en un espacio topológico, la unión de cualquier familia de conjuntos abiertos de primera categoría es de primera categoría. Demostrar esta afirmación para espacios métricos es sencillo, sin embargo, para espacios topológicos la demostración se complica un poco.

Definición 13. Sea (X, τ) espacio topológico. Decimos que X es **espacio de Baire** si para toda colección $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos densos se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso.

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del teorema 4.

Teorema 6. *Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces es de Baire.*

Teorema 7. *Un espacio topológico (X, τ) es de Baire si y sólo si para toda sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados con $\operatorname{Int} F_n = \varnothing$, se tiene que $Int \bigcup F_n = \varnothing$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea (F_n) una colección de cerrados que cumple las hipótesis del teorema. Por el lema 3, ${F_n}^C$ es denso y abierto para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (X, τ) es de Baire, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} {F_n}^C = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^C$ es denso. Luego, por el lema 3 $Int \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$

($\Longleftarrow$ Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos densos. Entonces, $Int{U_n}^C = \varnothing$ y ${U_n}^C$ es cerrado para toda $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis $\varnothing = Int \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {U_n}^C = Int \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)^C$.

Luego, por el lema 3 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso. □

A continuación presentamos una serie de propiedades de separación en los espacios topológicos. Para más detalles consúltense los libros [48] y [24].

Definición 14. Un espacio topológico (X, τ) es $\boldsymbol{T_1}$, si para todo $a, b \in X$ $a \neq b$ existen abiertos U y W en X con $a \in U, b \notin U, a \notin W, b \in W$.

Definición 15. Un espacio topológico (X, τ) es $\boldsymbol{T_2}$ **o Hausdorff**, si para $a, b \in X, a \neq b$ existen U y W abiertos ajenos en X con $a \in U$ y $b \in W$.

Definición 16. Un espacio topológico (X, τ) es **regular**, si para un punto $p \in X$ y un conjunto cerrado F con $p \notin F$, existen U y W abiertos ajenos con $p \in U$ y $F \subseteq W$.

Definición 17. Un espacio topológico (X, τ) es $\boldsymbol{T_3}$, si X es regular y T_1.

Lema 13. *Sea (X, τ) espacio topológico T_2 y compacto. Entonces, (X, τ) es T_3.*

Demostración. Sea $p \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado con $p \notin F$. Para todo $q \in F$ existen abiertos U_q, V_q tales que $p \in U_q, q \in V_q$ y $U_q \bigcap V_q = \varnothing$. El conjunto F es compacto por ser subconjunto cerrado de un compacto y $F \subseteq \bigcup_{q \in F} V_q$. Por lo tanto, existen $q_1, q_2, ..., q_n$ tales que $F \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{q_i}$.

Sean $U = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{q_i}$ y $V = \bigcup_{1 \leq i \leq n}$. Claramente $p \in U$ y $F \subseteq V$. Solo resta probar que $U \bigcap V = \varnothing$. Supongamos que existe $x \in U \bigcap V$. Por ende existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_{q_j}$ y $x \in U_{q_j}$, lo que contradice que $V_{q_j} \bigcap U_{q_j} = \varnothing$. □

Lema 14. *Sea (X, τ) T_2 y compacto. Si $U \subseteq X$ es abierto y $p \in U$, existe $V \subseteq X$ abierto tal que $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$*

Demostración. Como (X, τ) es T_2 y compacto, entonces (X, τ) es T_3. Sea $U \subseteq X$ abierto y $p \in U$, luego U^C es cerrado por lo que existen $V, W \subseteq X$ abiertos ajenos tal que $p \in V$ y $U^C \subseteq W$.

Entonces, $W \bigcap \overline{V} = \varnothing$. Como $U^C \subseteq W$, entonces $U^C \bigcap \overline{V} \subseteq W \bigcap \overline{V} = \varnothing$. Así, $U^C \bigcap \overline{V} = \varnothing$, por lo que $\overline{V} \subseteq U$. □

Teorema 8. *Si (X, τ) es T_2 y compacto, entonces es de Baire.*

Demostración. Sea $\{U_n\}$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos. Demostrar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es denso es equivalente a demostrar que para todo abierto U, $U \bigcap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \varnothing$. Como U es abierto y U_1 es denso, existe $x_1 \in V_1 = U \bigcap U_1$ (notemos que V_1 es abierto). Como V_1 es abierto y U_2 es denso, existe $x_2 \in V_1 \bigcap U_2$ y V_2 abierto tal que $x_2 \in V_2 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq V_1 \bigcap U_2$ por el lema 14.

Continuamos con este proceso y encontramos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos y una sucesión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos tales que $x_n \in V_{n-1} \bigcap U_n \quad y \; x_n \in V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq V_{n-1} \bigcap U_n$.

Entonces, los elementos de la sucesión $\{\overline{V}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son cerrados anidados y satisfacen la propiedad de la intersección finita. Además, X es compacto, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V}_n \neq \varnothing$. Por lo tanto, existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Como $\overline{V}_n \subseteq U$ para todo n, entonces $x \in U$. En consecuencia, $x \in U \bigcap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. $\square$

Ejemplo 1. *Un espacio métrico (X, d) el cuál es un espacio de Baire no compacto.*

Sea $X = \mathbb{R}$ y d la métrica euclidiana. Resulta claro ver que este espacio no es compacto. Sin embargo, es completo por consiguiente es un espacio de Baire.

Ahora recordamos una serie de definiciones relacionadas con conjuntos que generan la topología de un espacio. Para más detalles consúltense los libros [48] y [24].

Definición 18. Sea (X, τ) espacio topológico. Una colección $B \subseteq \tau$ es **base** de τ si para todo $U \in \tau$, $p \in U$ existe $\mathcal{B} \in B$ con $p \in \mathcal{B} \subseteq U$.

Definición 19. Sea (X, τ) espacio topológico y $p \in X$ B_p es **base local** de p si para cualquier U abierto con $p \in U$ existe $\mathcal{B} \in B_p$ con $p \in \mathcal{B} \subseteq U$.

Definición 20. X es C_1 o **primero contable** si todo punto $p \in X$ tiene una base local numerable.

Un espacio topológico (X, τ) es metrizable si existe una métrica d tal que la topología inducida por d es τ.

Lema 15. *Todo espacio metrizable es C_1.*

Demostración. Sea X un espacio metrizable y sea $p \in X$ entonces $B_p = \left\{B_n\left(p, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ es base local de P. Sea U abierto con $p \in U$. Como U es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon)$ $\subseteq U$, por la propiedad arquímedeana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{1}{n}$ por lo que

$$B_n\left(p, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(p, \epsilon) \subseteq U.$$

$\square$

Ejemplo 2. *Un espacio topológico (X, τ) el cuál es un espacio de Baire no metrizable.*

Sean $X = \mathbb{R}$ y $\tau = \mathcal{C} \bigcup \{U \subseteq \mathbb{R} | 1 \notin U\}$ donde $\mathcal{C} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U^C \text{ es finito}\}$.

Veamos que τ es topología:

A) Es claro que $\varnothing, \mathbb{R} \in \tau$.

B) Si $U_i \in \tau$ con $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$

- Caso 1: Existe $m \in I$ tal que $U_m \in \mathcal{C}$. Notemos que $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} {U_i}^C \subseteq {U_m}^C$, U_m^C es finito, entonces $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^C$ es finito, por ende $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.
- Caso 2: $U_i \notin \mathcal{C}$ para todo $i \in I$. Dado que $U_i \notin \mathcal{C}$ para todo $i \in I$, entonces $U_i \in \{U \subseteq \mathbb{R} \mid 1 \notin U\}$ para cada $i \in I$. Entonces, $1 \notin \bigcup_i U_i$ entonces $\bigcup_i U_i \in \tau$.

C) Si $U_1, U_2 \ldots, U_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in \tau$

- Caso 1: Existe $m \in I$ tal que $U_m \in \{U \subseteq \mathbb{R} | 1 \notin U\}$. Observemos que $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \subseteq U_m$ por lo que $1 \notin \bigcap_{1\leq i\leq n} U_i$. Por consiguiente, $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in \tau$.
- Caso 2: $U_i \notin \{U \subseteq \mathbb{R} | 1 \notin U\}$ para todo $i \in I$. A causa de que $U_i \notin \{U \subseteq \mathbb{R} | 1 \notin U\}$ para todo $i \in I$ entonces $U_i \in \mathcal{C}$ para cada $i \in I$ por lo que $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in \mathcal{C}$, pues $\mathcal{C}$ es topología.

Por lo tanto, τ es topología.

Ahora demostremos que $(\mathbb{R}, \tau)$ es Hausdorff. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ por demostrar que existen U y W conjuntos abiertos ajenos tales que $x \in U$ y $y \in W$.

- Caso 1: x, y son distintos de 1 . Sean $U = \{x\}$ y $W = \{y\}$ (U y W son abiertos pues $1 \notin U$ y $1 \notin W$).

- Caso 2 : $x = 1$ y $y \neq 1$
  Sea $U = \mathbb{R} \backslash \{y\}$ y $W = \{y\}$ (W es abierto pues $1 \notin W$ y U es abierto pues $U^C = \{y\}$ es finito).

Por lo tanto, (X, τ) es Hausdorff. Ahora demostremos que $(\mathbb{R}, \tau)$ es compacto.

Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cubierta abierta de $\mathbb{R}$ por demostrar que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser reducida a una subcubierta finita. Como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta de $\mathbb{R}, 1 \in U_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces ${U_m}^C$ es finito es decir $U_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Luego, como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cubierta abierta de $\mathbb{R}$ existe m_i tal que $x_i \in U_{m_i}$ entonces $\mathbb{R} \subseteq U_m \bigcup U_{m_1} \bigcup U_{m_2} \bigcup U_{m_3} \bigcup \ldots \bigcup U_{m_n}$. Por lo tanto, $(\mathbb{R}, \tau)$ es compacto. Finalmente, por el teorema 8, $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio de Baire.

Veamos que $(\mathbb{R}, \tau)$ no es C_1. Supongamos que $(\mathbb{R}, \tau)$ es C_1. Entonces, el número 1 tiene una base local numerable $B_1 = \{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau$, como B_1 es base local numerable de 1 cada $\mathcal{B}_n$ contiene a 1, entonces $\mathcal{B}_n \in \mathcal{C}$ (por definición de τ), por lo que ${\mathcal{B}_n}^C$ es cerrado y finito. Luego, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {\mathcal{B}_n}^C$ es la unión numerable de conjuntos finitos; por lo tanto A es numerable . Pero $\mathbb{R}$ no es numerable por lo que existe $p \in \mathbb{R}$ con $p \neq 1$ tal que $p \notin A$. Por tanto, $p \in A^C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ por ende $p \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, al ser B_1 base local de 1 existe $\mathcal{B}_m \in B_1$ tal que $B_m \subset \{p\}^C$ ($\{p\}^C$ es abierto pues $\{p\}$ es finito). Entonces, $p \notin \mathcal{B}_m$, lo cual es una contradicción, dado que $p \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $(\mathbb{R}, \tau)$ no es C_1. Entonces, por el lema 15 $(\mathbb{R}, \tau)$ no es metrizable.

Teorema 9. ***Teorema Categoría de Banach.*** *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, la unión de cualquier familia de conjuntos abiertos de primera categoría es de primera categoría.*

Demostración. Sea G la unión de una familia ζ de conjuntos abiertos no vacíos de primera categoría. Sea $\mathcal{F} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia maximal de conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos con la propiedad de que cada U_α está contenido en algún elemento de ζ. Supongamos que el conjunto cerrado $\overline{G} - \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ no es nunca denso. Entonces, existe un abierto V no vacío tal que $V \subseteq \overline{G} - \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Entonces, $V \subseteq \overline{G}$ y $V \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^C \subseteq G^C$ por lo que $V \subseteq \overline{G}$ y $V \subseteq \operatorname{lnt}\left(G^C\right)$. Luego,

$$V \subseteq \overline{G} \bigcap Int\left(G^C\right) = (\operatorname{lnt} G \bigcup \partial G) \bigcap Int\left(G^C\right) = \varnothing.$$

Por consiguiente, $V = \varnothing$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\overline{G} - \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ es denso en ninguna parte .

Luego, como U_α está contenido en un elemento de ζ y los elementos de ζ son de primera categoría entonces, U_α es de primera categoría. Así, podemos expresar $U_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{\alpha,n}$ donde $N_{\alpha,n}$ es un conjunto denso en ninguna parte para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $N_n = \bigcup_{\alpha \in A} N_{\alpha,n}$.

Si un abierto U intercepta a N_m para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces existe $\alpha^* \in A$ tal que $U \bigcap N_{\alpha^*,m} \neq \varnothing$. Además, $U \bigcap N_{\alpha^*,m} \subseteq U \bigcap U_{\alpha^*}$. Luego, como $U \bigcap N_{\alpha^*,m}$ es abierto y $N_{\alpha^*,m}$ es denso en ninguna parte existe un abierto V tal que $V \subseteq (U \bigcap U_{\alpha^*}) - N_{\alpha^*,m}$.

Veamos que esto último implica que $V \subseteq U - N_m$. Supongamos que $V \nsubseteq U - N_m$. Como $V \subseteq (U \bigcap U_{\alpha^*}) - N_{\alpha^*,m}$ y $V \nsubseteq U - N_m$ entonces,

$$V \in U \bigcap U_{\alpha^*} \bigcap (N_{\alpha^*,m})^C \bigcap N_m = \varnothing$$

Entonces, $V = \varnothing$ lo cuál es una contradicción. Por lo tanto, $V \subset U - N_m$. Como V fue un abierto arbitrario N_m es denso en ninguna parte. Luego,

$$G \subseteq \overline{G} \subseteq \left(\overline{G} - \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \bigcup \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \left(\overline{G} - \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n.$$

Finalmente, al ser $\left(\overline{G} - \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ de primera categoría se tiene que G es de primera categoría. $\square$

X Aplicaciones

En este capítulo abordaremos diversas e interesantes aplicaciones del teorema de categoría de Baire en el análisis matemático. Algunas aplicaciones en primera instancia parecen no tener relación con el teorema de Baire. Sin embargo, todas ellas muestran cómo este resultado fundamental puede revelar propiedades sorprendentes y a menudo no intuitivas en diversos contextos. Veremos aplicaciones en las que se utiliza el teorema de Baire para demostrar la existencia de funciones con comportamientos singulares y difíciles de imaginar. Y finalmente se presentaran los teoremas de acotación uniforme, de la función abierta y la gráfica cerrada los cuales son fundamentales en análisis funcional.

Aplicación 1

Un espacio métrico completo sin puntos aislados es no numerable.

Definición 21. Un punto x en un espacio métrico X es llamado **aislado** si el conjunto $\{x\}$ es abierto.

Aplicación 1. *Un espacio métrico completo sin puntos aislados es no numerable.*

Demostración. Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Supongamos que X tiene una cantidad contable de puntos es decir $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.
Veamos que $X - \{x_n\}$ es denso para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que dado que $\{x_n\}$ no es abierto, la bola abierta $B(x_n, r)$ tiene puntos diferentes de x_n para todo $r \in \mathbb{R}$, por lo que $B(x_n, r) \bigcap (X - \{x_n\}) \neq \varnothing$ para todo $r \in \mathbb{R}$ y todo $x_n \in X$.
Sea U un conjunto abierto y no vacío. Entonces, existen dos posibles casos

a. Caso 1: U contiene a x_n.
Como U es abierto existe $r_n \in \mathbb{R}$ tal que $B(x_n, r_n) \subseteq U$. Luego, dado que X no tiene puntos aislados $B(x_n, r_n) \bigcap (X - \{x_n\}) \neq \varnothing$ en consecuencia $U \bigcap (X - \{x_n\}) \neq \varnothing$.

b. Caso 2: U no contiene a x_n.
Como U no contiene a x_n y es no vacío existe $x_k \in U$ con $x_k \neq x_n$, luego existe $r_k \in \mathbb{R}$ tal que $B(x_k, r_k) \subseteq U$. Luego como $\{x_k\}$ no es abierto, $B(x_k, r_k)$ intersecta a U en puntos distintos de x_k y x_n. Entonces,

$$B(x_k, r_k) \bigcap (X - \{x_n\}) \neq \varnothing.$$

Por lo tanto, $X - \{x_n\}$ es denso. Luego por el teorema de categoría de Baire $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X - \{x_n\})$ es un conjunto denso. Lo cual es una contradicción puesto que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X - \{x_n\}) = \varnothing$. $\square$

Aplicación 2

No existe una función continua en los racionales y discontinua en los irracionales.

Lema 16. *El conjunto de los números racionales en* $[0,1]$ *no es un conjunto* G_δ.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{Q}\bigcap[0,1]$ es un conjunto G_δ. Entonces, $\mathbb{Q}\bigcap[0,1] = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$ donde $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección de abiertos. Entonces, $\mathbb{I}\bigcap[0,1] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {U_i}^C$. Luego, por lema 10 inciso A) U_i^C es denso en ninguna parte por lo que $\left(\overline{{U_i}^C}\right)^C = U_i$ es denso.

Sea $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una numeración de los números racionales en $[0,1]$. Notemos que $U_i - \{q_i\}$ es denso. Luego, por el teorema de categoría de Baire $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(U_i - \{q_i\})$ es denso. Sin embargo, esto es una contradicción en virtud de la siguiente igualdad $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(U_i - \{q_i\}) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i \bigcap[0,1]\bigcap\mathbb{I}$ $= \mathbb{Q}\bigcap[0,1]\bigcap\mathbb{I} = \varnothing$. $\square$

Lema 17. *Sea f una función real-valuada definida para todos los números reales. Entonces, el conjunto de puntos donde f es continua es un conjunto* G_δ.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y C el conjunto de continuidad de f. Si $x \in C$ entonces para todo número natural n existe $\delta_{n,x} > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_{n,x}$, entonces $|f(x) - f(y)|$ $< \frac{1}{n}$. Sea $U_n = \bigcup_{x\in C}\left(x - \frac{\delta_{n,x}}{2}, x + \frac{\delta_{n,x}}{2}\right)$ y $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Claramente $C \subseteq U$. Veamos que $U \subseteq C$. Sean $x_0 \in U$, $\epsilon > 0$ dado y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} < \epsilon$. Como $x_0 \in U_N$ existe $x_1 \in C$ tal que $x_0 \in \left(x_1 - \frac{\delta_{N,x_1}}{2}, x_1 + \frac{\delta_{N,x_1}}{2}\right)$. Sea $\delta =$ $\frac{\delta_{N,x_1}}{2} - |x_1 - x_0|$. Luego, si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|x - x_1| \leq |x - x_0| + |x_0 - x_1| < 2\delta \leq \delta_{N,x_1}$. Así, $|f(x) - f(x_1)| < \frac{1}{N}$.

Por otra parte $|x_1 - x_0| < \frac{\delta_{N,x_1}}{2} < \delta_{N,x_1}$. Entonces $|f(x_1) - f(x_0)| < \frac{1}{N}$. Por lo tanto, si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_0)| \\ &< \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $U = C$. En consecuencia C es un conjunto G_δ. $\square$

Aplicación 2. *No existe una función real valuada en* $[0,1]$*, continua en los racionales y discontinua en los irracionales.*

Demostración. Supongamos que existe una función real valuada en $[0,1]$, continua en los racionales y discontinua en los irracionales. Entonces, por el lema anterior los racionales son un conjunto G_δ. Lo cual es una contradicción debido a que el conjunto de racionales en [0,1] no es un conjunto G_δ (por el lema 16). Por lo tanto, no existe una función real valuada continua en los racionales y discontinua en los irracionales.

Sin embargo, si existe una función continua en los irracionales y discontinua en los racionales, por ejemplo la función :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

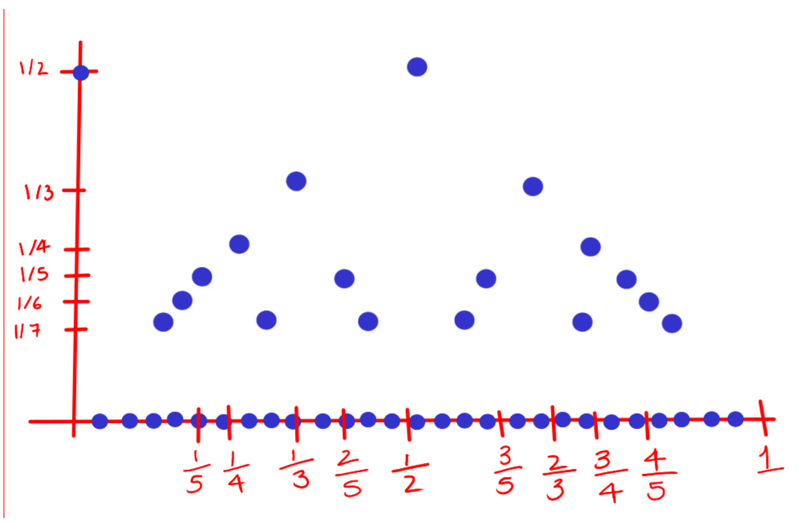

Figura 2: Gráfica de la función $f(x)$. Creación propia.

Demostración. Se afirma que para cualquier número a, con $0 < a < 1$, $f(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a a.

Sean $\epsilon > 0$ y N un número natural tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Definamos $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{1}{N} \cdots, \frac{N-1}{N}\right\}$. Notemos que $f(x) \geqslant \frac{1}{N}$, si y sólo si $f(x) \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{N}\right\}$ y esto ocurre solamente si $x \in A$. Sea $\delta < \min_{y \in A-\{a\}} |y-a|$. Si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $x \notin A$

por lo que $f(x) < \frac{1}{N} < \epsilon$. Por lo tanto, $f(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a a, donde a es cualquier número $0 < a < 1$. Por lo tanto, f es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. $\square$

Aplicación 3

Si una familia de funciones continuas en un espacio métrico está acotada en cada punto, entonces existe un conjunto donde la familia está acotada por una constante global.

Aplicación 3. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas y real valuadas en un espacio métrico X. Supongamos que para cada $x \in X$ existe $M_x \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leqslant M_x$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces, existe $U \subseteq X$ abierto no vacío y una constante M tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$ $\forall x \in U$.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos $E_{m,f} = \{x : |f(x)| \leqslant m\}$ y $E_m = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} E_{m,f}$. Como f es continua $E_{m,f}$ es cerrado y en consecuencia E_m es cerrado.

Para cada $x \in X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leqslant m$ para toda $f \in \mathcal{F}$, es decir para cada $x \in X$ existe un número natural m tal que $x \in E_m$ por lo que $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$. Luego por corolario 2 existe $m_* \in \mathbb{N}$ tal que E_{m_*} no es denso en ninguna parte, por ende $Int\left(\overline{E_{m_*}}\right) = Int\left(E_{m_*}\right) \neq \varnothing$ por lo que E_{m_*} contiene una bola abierta U. Para cada $x \in U$ se cumple que $|f(x)| \leqslant m_*$ para toda $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Bajo las hipótesis de esta aplicación se puede demostrar que existe $U \subseteq X$ denso y abierto tal que para cada $x \in U$ existe una vecindad V en la cual $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada. Originalmente en la aplicación se tiene que **para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ existe $\boldsymbol{M_x} \in \mathbb{R}$ tal que $|\boldsymbol{f(x)}| \leqslant \boldsymbol{M_x}$ para toda $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$** y finalmente se concluye que existe un conjunto U abierto donde **existe $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}$ tal que $|\boldsymbol{f(x)}| \leqslant \boldsymbol{M}$ para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$** . Se puede apreciar un intercambio de los cuantificadores lógicos, esto también ocurre en las aplicaciones 7 y 11. $\square$

Aplicación 4

Las funciones continuas y nunca diferenciables existen. Además, la mayoría de las funciones continuas no son diferenciables en ningún punto de su dominio.

Definición 22. Sea $\boldsymbol{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$, $C[0,1]$ es un espacio métrico completo con la distancia supremo. La **distancia supremo** denotada por $|\ .\ |_\infty$ se define como,

$$| \ f - g \ |_\infty = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - g(x)| \text{ donde } f, g \in C[0,1].$$

Definición 23. Una **función poligonal** $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cuyo dominio es dividido en un número finito de subintervalos disjuntos. En cada subintervalo, φ es una línea recta. Es decir, si P es una partición del intervalo $[a,b]$ dada por $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Entonces,

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_1 x + c_1 & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ m_2 x + c_2 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ m_n x + c_n & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

donde m_i son las pendientes y y c_i las intersecciones con el eje y de cada segmento lineal en los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Los puntos x_i donde φ cambia de pendiente se denominan **puntos de quiebre**.

Lema 18. *Cualquier función $f \in C[0,1]$ puede ser aproximada por una función poligonal φ con un error menor a ϵ y φ puede ser aproximada con un error menor a ϵ por una función poligonal ψ cuya derivada lateral por la derecha es mayor que n en valor absoluto para cualquier punto.*

Demostración. Sean $f \in C[0,1]$ y $\epsilon > 0$. Por continuidad uniforme de f existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una partición de $[0,1]$ tal que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \delta$ y sea φ la función poligonal que une $f(x_i)$ con $f(x_{i+1})$ para toda $0 \leq i < n$.

Demostremos que $|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon$ para toda x. Notemos que dado $x \in [0,1]$ existe $0 \leq i \leq n$ tal que, $|x - x_{i-1}| < \delta$. Luego,

$$\begin{aligned} &|f(x) - \varphi(x)| = | \ f(x) - f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1}) + \varphi(x_{i-1}) - \varphi(x)| \\ &\leq |f(x) - f(x_{i-1}) \ | + |f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})| + |\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x)| < \\ &\frac{\epsilon}{2} + 0 + |\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x)| = \frac{\epsilon}{2} + m_i |x_{i-1} - x| \, . \end{aligned}$$

Donde m_i es el valor absoluto de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $\varphi(x_{i-1})$ y $\varphi(x_i)$ por lo que

$$m_i = \left|\frac{\varphi(x) - \varphi\left(x_{i-1}\right)}{x - x_{i-1}}\right| = \left|\frac{\varphi\left(x_i\right) - \varphi\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}}\right| = \left|\frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}}\right|.$$

Remplazando el valor de m_i tenemos,

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi(x)| &\leq \frac{\epsilon}{2} + m_i\left|x_{i-1} - x\right| = \frac{\epsilon}{2} + \left|\frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_i - 1\right)}{x_i - x_i - 1}\right|\left|x_{i-1} - x\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, f puede ser aproximada por una función poligonal φ con un error menor a ϵ.

Finalmente, demostremos que si φ es una función poligonal en $[0,1]$ entonces esta puede ser aproximada con un error menor a ϵ por una función poligonal ψ cuya derivada lateral por la derecha es mayor que n en valor absoluto para cualquier punto.

Sean $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Como φ es una función poligonal en $[0,1]$ existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_k\}$ de $[0,1]$ tal que los puntos de P son los puntos de quiebre de φ.

Luego, sea δ un número real positivo tal que $\left|m - \frac{2\epsilon}{\delta}\right| \geqslant n$ y $\left|m + \frac{2\epsilon}{\delta}\right| \geqslant n$. Donde m es la pendiente de la recta que coincide con la función φ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Definimos una partición P_i del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de la siguiente manera, $P_i = \{y_0 := x_i, y_1, y_2, y_3, \ \ldots, y_n := x_{i+1}\}$ donde la longitud de cada subintervalo es constante y denotada por $\Delta y_i = \delta$. Con esta partición, definimos los puntos de quiebre de la función ψ como,

$$\psi(y_i) = \begin{cases} \varphi(y_i) - \epsilon & \text{si } i \text{ es par.} \\ \varphi(y_i) + \epsilon & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Luego, si i es par

$$\begin{aligned} \left|\frac{\psi\left(y_{i+1}\right) - \psi\left(y_i\right)}{\Delta y_i}\right| &= \left|\frac{\varphi\left(y_{i+1}\right) + \epsilon - \varphi\left(y_i\right) + \epsilon}{\Delta y_i}\right| = \left|\frac{\varphi\left(y_{i+1}\right) - \varphi\left(y_i\right)}{\Delta y_i} + \frac{2\epsilon}{\Delta y_i}\right| \\ &= \left|m + \frac{2\epsilon}{\Delta y_i}\right| = \left|m + \frac{2\epsilon}{\delta}\right| \geqslant n. \end{aligned}$$

Por otra parte, si i es impar

$$\left|\frac{\psi\left(y_{i+1}\right)-\psi\left(y_i\right)}{\Delta y_i}\right|=\left|\frac{\varphi\left(y_{i+1}\right)-\epsilon-\varphi\left(y_i\right)-\epsilon}{\Delta y_i}\right|=\left|\frac{\varphi\left(y_{i+1}\right)-\varphi\left(y_i\right)}{\Delta y_i}-\frac{2\epsilon}{\Delta y_i}\right|$$
$$=\left|m-\frac{2\epsilon}{\delta}\right|\geqslant n.$$

Así, $\left|\frac{\psi(y_{i+1})-\psi(y_i)}{\Delta y_i}\right| \geq n$. Esto implica que la derivada por la derecha de ψ en cualquier punto, es mayor o igual que n en valor absoluto. $\square$

Aplicación 4. *El conjunto de funciones continuas y no diferenciables en* $[0,1]$ *es un conjunto denso en* $C[0,1]$.

Demostración. Sea $F_n=\left\{f \mid \text{existe } x_0 \in [0,1-\frac{1}{n}] \text{ y } \mid f(x)-f\left(x_0\right) \mid \leqslant n\left(x-x_0\right) \text{ para toda } x \in x \in [x_0,1)\right\}$. Demostremos las siguientes afirmaciones,

a. F_n es un conjunto cerrado de $C[0,1]$.

   Demostración. Sea $\{f_k\} \subseteq F_n$ tal que f_k converge a f. Veamos que $f \in F_n$.

   Sea $\epsilon>0$. Como f_k converge a f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geqslant N$ entonces $|f_k-f|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$.

   Luego como $f_N \in F_n$ existe $x_0 \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ tal que $|f_N(x)-f_N\left(x_0\right)| \leq n\left(x-x_0\right)$ para toda $x_0 \leq x<1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|f(x)-f\left(x_0\right)| &=\mid f(x)-f\left(x_0\right)+f_N(x)-f_N(x)+f_N\left(x_0\right)-f_N\left(x_0\right) \mid \\
&=\mid -f_N(x)+f(x)-f\left(x_0\right)+f_N\left(x_0\right)+f_N(x)-f_N\left(x_0\right) \mid \\
&\leq |f_N(x)-f(x)|+|f_N\left(x_0\right)-f\left(x_0\right) \mid+|f_N(x)-f_N\left(x_0\right)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}+n\left(x-x_0\right)=\epsilon+n\left(x-x_0\right) \text{ para toda } x \in [x_0,1]
\end{aligned}$$

   Luego, si $\epsilon \longrightarrow 0$ entonces $|f(x)-f\left(x_0\right)| \leqslant n\left(x-x_0\right)$ para toda $x \in [x_0,1]$. Por lo tanto, $f \in F_n$.

   $\square$

b. F_n es un conjunto denso en ninguna parte.

Demostración. Supongamos que F_n no es un conjunto nunca denso. Esto ocurre si y solo si $\text{Int}F_n \neq \varnothing$. Entonces, existe $f_0 \in F_n$ tal que $B(f_0, r_0) \subseteq F_n$ para algún $r_0 > 0$. Sea $\epsilon < r_0$. Luego por el lema anterior existen funciones poligonales φ y ψ tales que la derivada de ψ por la derecha es mayor que n y además, $|f_0 - \varphi|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ y $|\varphi - \psi|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Por ende $|f_0 - \psi|_\infty = |f_0 - \varphi + \varphi - \psi|_\infty \leq |f_0 - \varphi|_\infty + |\varphi - \psi|_\infty < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon < r_0$. Por lo tanto, $\psi \in F_n$ por lo que existe, $0 \leq x_0 \leq 1 - \frac{1}{n}$ y $|\psi(x_0) - \psi(x)| \leq n(x - x_0)$ para toda $x_0 \leq x \leq 1$;

$$\frac{|\psi(x) - \psi(x_0)|}{(x - x_0)} \leqslant n \text{ para toda } x_0 \leq x \leq 1.$$

Entonces, $\lim_{x \to x_o^+} \frac{|\psi(x) - \psi(x_0)|}{x - x_0} \leq n$, lo cual es una contradicción. $\square$

c. Sea D el conjunto de funciones continuas con derivada por la derecha finita en al menos un punto de $[0, 1]$. Entonces, D es un conjunto de primera categoría.

Demostración. Veamos que si $f \in D$ entonces, $f \in F_N$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Como $f \in D$ existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $|f'_+(x_0)| = \left|\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq k$ para algún número natural k. Por lo que para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta$ entonces,

$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_+(x_0)\right| < \epsilon$. Luego, $|f_+(x_0)| + \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_+(x_0)\right| < \epsilon + |f_+(x_0)|$.

Por consiguiente, para $0 < x - x_0 < \delta$ se tiene

$$\left|f_+(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_+(x_0)\right| < \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_+(x_0)\right| +$$

$$|f_+(x_0)| < \epsilon + |f_+(x_0)| < \epsilon + k = k + 1. \text{ Por lo tanto, } \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|$$

$$< k + 1, \text{ siempre que } 0 < x - x_0 < \delta.$$

Sea $x_0 + \delta \leq x \leq 1$ entonces, por el teorema de los valores extremos existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq M \text{ para todo } x_0 + \delta \leq x \leq 1$$

Sea $N = \max\{M, k+1\}$. Por lo tanto, $f \in F_N$. Entonces, $D \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es un conjunto de primera categoría. De este modo, D es un conjunto de primera categoría. $\square$

d. Veamos que D^C es denso

Demostración. Como D es un conjunto de primera categoría entonces, D^C es residual. Así que por el lema 8 existe un conjunto G_δ denso contenido en D^C. Por lo tanto, D^C es denso. Notemos que D^C es el conjunto de funciones no diferenciables y continuas en $[0, 1]$. □

□

Esta aplicación del teorema de categoría de Baire es muy importante. De acuerdo a la introducción de [26] por un largo periodo de tiempo se pensaba que las funciones continuas y nunca diferenciables no existían. Se creía que para cada curva continua era posible encontrar la pendiente en todos los puntos, salvo en un número finito. Esto parecía coincidir con la intuición: una línea podía tener algunos trozos irregulares, pero siempre habría algunas secciones que eran "suaves". También se menciona que el físico y matemático francés André-Marie Ampère (1775-1836) publicó este pensamiento como un resultado formal (véase [1]), sin tomar en cuenta lo que sucedía cuando las secciones se volvían infinitamente pequeñas. A mediados del siglo XIX, casi todos los libros de texto de cálculo citaban la demostración de Ampère. Sin embargo, en 1872 Karl Weierstrass sorprendió a la comunidad matemática publicando por primera vez una función continua nunca diferenciable dada por

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

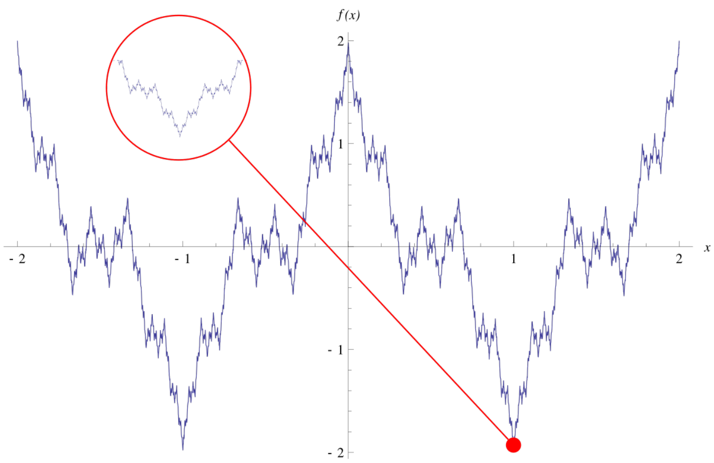

Figura 3: Función de Weierstrass generada con Mathematica [7].

Esta función es difícil de visualizar tanto así que solo con la llegada de las computadoras fue posible representarla gráficamente. En [25] se menciona que las funciones continuas y nunca diferenciables visualizadas con ayuda de un software como Mathematica parecen tener derivadas en ciertos puntos. Parece ser que la continuidad tiende a ocultar la no diferenciabilidad. En este texto se explica a detalle porque la existencia de estas funciones es no intuitiva. El teorema de Baire demuestra que para nuestra sorpresa estas funciones contra-intuitivas son la regla y no la excepción.

Aplicación 5

Si una función, definida sobre el producto de espacios métricos completos, es continua en cada variable de manera separada, entonces existe un subconjunto del espacio producto donde la función es continua.

Aplicación 5. *Sean (X,ρ), (Y,σ) y (Z,τ) espacios métricos completos y $f : X \times Y \to Z$ una función continua en cada variable de manera separada. Entonces, existe un conjunto G_δ y denso $W \subseteq X \times Y$ tal que f es continua en W.*

Demostración. Como f es continua en cada variable de manera separada entonces,

$$f(\cdot, y) : X \to Z$$

es continua para cada $y \in Y$ y

$$f(x, \cdot) : Y \to Z$$

es continua para cada $x \in X$. A continuación, demostraremos las siguientes afirmaciones

a. Sea $y_0 \in Y$. Definimos el conjunto,

$$F_{m,n} = \left\{ x \in X : \tau\left[f(x,y), f\left(x, y_0\right)\right] \leq \frac{1}{m} \text{ para toda } y \text{ con } \sigma\left(y, y_0\right) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Entonces, cada conjunto $F_{m,n}$ es cerrado y

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{m,n}.$$

Demostración. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Fm,n$ tal que x_k converge a x.

Como $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq F_{m,n}$ entonces, para toda y con $\sigma(y, y_0) \leq \frac{1}{n}$ se cumple que $\tau[f(x_k, y), f(x_k, y_0)] \leq \frac{1}{m}$. Luego, por continuidad de $f(\cdot, y)$ para cada $y \in Y$ se tiene que para $\epsilon_0 > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que si $\rho(x_k, x) < \delta_0$ entonces, $\tau[f(x_k, y), f(x, y)] < \epsilon_0$ y $\tau[f(x_k, y_0), f(x, y_0)] < \epsilon_0$.

Por otra parte x_k converge a x por lo que para δ_0 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geqslant N$ se cumple que $\rho(x_k, x) < \delta_0$ esto implica que

$$\tau[f(x_k, y), f(x, y)] < \epsilon_0 \text{ y } \tau[f(x_k, y_0),\ f(x, y_0)] < \epsilon_0.$$

Luego, si $k \geqslant N$

$$\begin{aligned}
&\tau[f(x, y), f(x, y_0)] \leqslant \tau[f(x, y), f(x_k, y)] + \tau[f(x_k, y), f(x_k, y_0)] + \\
&\tau[f(x_k, y_0), f(x, y_0)] < \epsilon_0 + \frac{1}{m} + \epsilon_0 = 2\epsilon_0 + \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Si $\epsilon_0 \longrightarrow 0$ se tiene que $\tau[f(x, y), f(x, y_0)] \leq \frac{1}{m}$. Por lo tanto, $x \in F_{m,n}$ por consiguiente, $F_{m,n}$ es cerrado.

Finalmente, sea $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$. Por continuidad de $f(x, \cdot)$ para cada $x \in X$. Para m existe $\delta_m > 0$ tal que si $\sigma(y, y_0) < \delta_m$ entonces, $\tau[f(x, y), f(x, y_0)] < \frac{1}{m}$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\frac{1}{N} < \delta_m$ entonces, para toda $y \in Y$ tal que $\sigma(y, y_0) < \frac{1}{N} < \delta_m$ se tiene que $\tau[f(x_k, y), f(x_k, y_0)] \leq \frac{1}{m}$. Consecuentemente, $x \in F_{N,m} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,m}$. Por lo tanto, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,m}$. □

b. Sea $U_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} IntF_{m,n}$. Entonces, U_m es un subconjunto denso de X y para toda $x \in U_m$ existe una vecindad V de (x, y_0) en $X \times Y$ tal que

$$\tau[f(p), f(x, y_0)] \leq \frac{1}{m}$$

para todo $p \in V$.

Demostración. Por lema 9 U_m es un conjunto residual denso de X. Sea $x \in U_m$ entonces $x \in IntF_{m,N}$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Como $IntF_{m,N}$ es abierto existe W abierto con $x \in W \subseteq IntF_{m,N}$. Luego existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{N}$ y $B\left(y_0, \frac{1}{k}\right) \subseteq$

Y. Sea $V = W \times B\left(y_0, \frac{1}{k}\right)$. V es una vecindad de (x, y_0) en $X \times Y$ y claramente

$$\tau\left[f(p), f\left(x, y_0\right)\right] \leq \frac{1}{m}$$

para todo $p \in V$. $\square$

c. Sea $G = \bigcap U_m$. Entonces G es un conjunto G_δ denso en X y f es continua en (x, y_0) para cada $x \in G$.

Demostración. Como U_m es abierto y denso para cada $m \in \mathbb{N}$ entonces por el teorema de categoría de Baire G es un conjunto G_δ denso. Luego f es continua en (x, y_0) para cada $x \in G$. Dado que por hipótesis $f(\cdot, y) : X \to Z$ es continua para cada $y \in Y$ en particular para y_0. $\square$

d. Existe $W \subseteq X \times Y$ donde W es un conjunto G_δ denso y además f es continua en W.

Demostración. Sean d una métrica del espacio $X \times Y$ y W el conjunto donde f es continua. Por inciso anterior $W \neq \varnothing$ pues $G \times \{y_0\} \subseteq W$. Para todo $p \in W$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_{n,p} > 0$ tal que si $d(p, q) < \delta_{n,p}$ entonces $\tau[f(q), f(p)] < \frac{1}{n}$. Sea $U_n = \bigcup_{p \in W}(p - \delta_{n,p}, p + \delta_{n,p})$ y $U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Claramente $W \subseteq U$ sin embargo, veamos que $U \subseteq W$. Sean $p_0 \in U$, $\epsilon > 0$ dado y $N \in \mathbb{N}$ con $\frac{2}{N} < \epsilon$. Como $p_0 \in U_N$ existe $p_1 \in W$ con $p_0 \in (p_1 - \delta_{N,p_1}, p_1 + \delta_{N,p_1})$.

Sea $\delta = \delta_{N,\, P_1} - d\left(p_1, p_0\right) \cdot$ Luego, si $d\left(p_0, p\right) < \delta$ entonces, $d\left(p_0, p\right) < \delta \leq \delta_{N,\, p_1}$ por lo que $\tau[f(p_0), f(p)] < \frac{1}{N}$.
Por otra parte $d\left(p_1, p_0\right) < \delta_N, p_1$ y por lo tanto, $\tau\left[f\left(p_1\right), f\left(p_0\right)\right] < \frac{1}{N}$

Por lo tanto, para todo $p_0 \in U$ y $\epsilon > 0$. Si $d\left(p_0, p\right) < \delta$ entonces,

$$\tau\left[f(p), f\left(p_0\right)\right] \leqslant \tau[f(p), f\left(p_1\right)] + \tau\left[f\left(p_1\right), f\left(p_0\right)\right] < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \epsilon.$$

Por consiguiente, f es continua en p_0 y $W = U$. Así pues, W es un conjunto G_δ. Finalmente, veamos que W es denso, sea $V \subseteq X \times Y$ un conjunto abierto y no vacío. Como V no es vacío existe $(x_0, y_0) \in V$. Luego $G \times \{y_0\} \bigcap V \neq \varnothing$, dado que por el inciso anterior G es denso. Luego, como $G \times \{y_0\} \subseteq W$ se tiene que $W \bigcap V \neq \varnothing$ de manera que W es denso. $\square$

$\square$

Este resultado se puede generalizar para un número finito de múltiples variables. La continuidad en cada variable por separado no garantiza la continuidad en el producto completo, pero este teorema asegura que se puede encontrar un conjunto denso en el producto donde la función es continua.

Aplicación 6

No existe una función continua y biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Definición 24. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es **disconexo** si existen U, V abiertos ajenos tales que $A \bigcap U \neq \varnothing$, $A \bigcap V \neq \varnothing$ y $A \subseteq U \bigcup V$. Si A no es disconexo decimos que es **conexo**.

Definición 25. Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. **La función f es abierta** si para todo conjunto U abierto en X, $f(U)$ es abierto.

Definición 26. Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces, f es un **homeomorfismo** si se cumple lo siguiente

- La función f es biyectiva.
- La función f es continua.
- La función inversa de f, $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es continua.

Observemos que todo homeomorfismo es una función abierta a causa del teorema 1.

Lema 19. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $A \subseteq X$ y $x \in IntA$, entonces $f(x) \in Intf(A)$.*

Demostración. Como $x \in lntA$ existe un conjunto U abierto de X con $x \in U \subseteq A$ por lo que $f(x) \in f(U) \subseteq f(A)$. Dado que f es un homeomorfismo, f es una función abierta. Entonces, $f(U)$ es abierto y por lo tanto $f(x) \in \ Int \ f(A)$. $\square$

Lema 20. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $A \subseteq X$ y x es un punto aislado de X, entonces $f(x)$ es un punto aislado de Y.*

Demostración. Dado que x es un punto aislado de X, se tiene $\{x\}$ es abierto. Luego, como f es homeomorfismo $f(\{x\})$ es abierto y $f(\{x\}) = \{f(x)\}$. Por lo tanto, $f(x)$ es un punto aislado de Y. $\square$

De este lema es fácil concluir que si (X, τ), (Y, τ') son espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Entonces, si X no contiene puntos aislados, Y tampoco tiene puntos aislados.

Lema 21. *Sean (X, τ), (Y, τ') espacios topológicos, $K \subseteq X$ compacto y $f : K \longrightarrow f(K) \subseteq Y$ una función. Si f es continua e inyectiva y (Y, τ') es un espacio T_2 entonces, la función inversa de f, $f^{-1} : f(K) \longrightarrow K$ es continua. Es decir, f es un homeomorfismo.*

Demostración. La demostración de este lema puede consultarse en [48, p. 154].

□

Lema 22. *Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ es una función continua e inyectiva, entonces $g([a, b])$ es un conjunto cerrado nunca denso de $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Como g es continua e inyectiva, el espacio $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana es un espacio topológico T_2 y además $[a, b]$ es compacto; resulta que $g : [a, b] \to g([a, b])$ es un homeomorfismo por el lema 21. Esto implica que $g([a, b])$ es conexo.

Veamos que $g([a, b])$ es nunca denso en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $g([a, b])$ no es nunca denso, entonces existe $x_0 \in Intg([a, b])$. Entonces, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon_0) \subseteq g([a, b])$. Si $x_0 = g(a)$ o $x_0 = g(b)$ existe $B(x, \epsilon) \subseteq B(x_0, \epsilon_0) \subseteq g([a, b])$ tal que $x \neq x_0$ y $g(a),\ g(b) \notin B(x, \epsilon)$. Esto se debe a que, de acuerdo a la observación del lema 20, x_0 no es un punto aislado de $g([a, b])$. Por lo tanto, existen $x \in Intg([a, b])$ tal que $x \neq g(a),\ g(b)$ y $\epsilon > 0$ tal que $g(a),\ g(b) \notin B(x, \epsilon) \subseteq g([a, b])$.

El conjunto $g([a, b]) - \{x\}$ es conexo. Para ver esto último, supongamos lo contrario, entonces existen U_0 y V_0 abiertos disjuntos y no vacíos, tal que $g([a, b]) - \{x\} \subseteq U_0 \cup V_0$. Además, el conjunto $g([a, b]) - \{x\}$ es abierto en $g([a, b])$. Esto implica que existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos en $g([a, b])$ tal que $g([a, b]) - \{x\} = U \cup V$. Puesto que $B(x, \epsilon) - \{x\}$ es conexo, dicho conjunto debe estar contenido en U o V. Supongamos que $B(x, \epsilon) - \{x\} \subseteq U$. Así que, $U \bigcup B(x, \epsilon) \subseteq U \bigcup \{x\}$ por lo que $U \bigcup B(x, \epsilon) = U \bigcup \{x\}$. Luego,

$$g([a, b]) = \left(U \bigcup \{x\}\right) \bigcup V = \left(U \bigcup B(x, \epsilon)\right) \bigcup V \quad \text{y}$$
$$\left(U \bigcup B(x, \epsilon)\right) \bigcap V = \varnothing.$$

Esto contradice el hecho de que $g([a, b])$ es conexo. Así $g([a, b]) - \{x\}$ es conexo.

Luego, como $g^{-1} : g([a,b]) \to [a,b]$ es un homeomorfismo, el conjunto $g^{-1}(g([a,b]) - \{x\})$ es conexo en $[a,b]$. Además, como x es un punto interior de $g([a,b])$ tal que $x \neq g(a),\ g(b)$; por el lema 19 $c := g^{-1}(x) \in Int[a,b] - \{a,b\} = (a,b)$. Por lo tanto,

$$g^{-1}(g([a,b]) - \{x\}) = [a,b] - \{c\}$$

es conexo. Sin embargo, esto es una contradicción, pues $[a,b] - \{c\}$ es disconexo. De este modo el conjunto $g([a,b])$ es nunca denso en $\mathbb{R}^2$. $\square$

Aplicación 6. *No existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continua y biyectiva.*

Demostración. Supongamos que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ biyectiva y continua. Dado que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]$ y que f es biyectiva tenemos que

$$\mathbb{R}^2 = f(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f([-n,n]).$$

Luego, por lema anterior, $f([-n,n])$ es un conjunto cerrado nunca denso de $\mathbb{R}^2$ entonces $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico completo de primera categoría, esto no es posible dado el corolario 2 . De esta forma, no existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ biyectiva y continua. $\square$

Aplicación 7

Una función con derivadas de todos los ordenes es un polinomio si para toda derivada existe un punto donde esta se anula.

Lema 23. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in I$ existe $\delta_x > 0$ para el cual $f|_{(x-\delta_x, x+\delta_x)}$ es un polinomio. Entonces $f|_I$ es un polinomio.*

Demostración. Sean $x_0 \in I$, $g = f|_{(x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0})}$ y $B = \{x \in I$ donde $f|_{(x-\delta_x,x+\delta_x)} = g\}$. Como $x_0 \in B$, $B \neq \varnothing$. Luego, veamos que B es abierto. Sea $x \in B$ y $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$. Entonces, $(x-\delta_x, x+\delta_x) \bigcap (y-\delta_y, y+\delta_y)$ es un intervalo no vacío. Así, si $h = f \mid (y-\delta_y, y+\delta_y)$, se tiene que g y h coinciden en $(x-\delta_x, x+\delta_x) \bigcap (y-\delta_y, y+\delta_y)$. De ahí que $g = h$, por tanto $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subseteq B$. Así que B es abierto.

Ahora probemos que B es cerrado

Sea $x \in B^C$ entonces, $f|_{(x-\delta_x,x+\delta_x)} = h \neq g$. Dado $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$ se prueba de manera análoga que $f|_{(y-\delta_y y+\delta_y)} = h \neq g$. Por lo tanto, $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subseteq B^C$ y B^C es abierto.

Como B es abierto, cerrado y no vacío y además I es conexo , se tiene que $B = I$. De modo que $f|_I$ es un polinomio.

$\square$

Aplicación 7. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivadas de todos los ordenes. Si para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$ entonces, f es un polinomio. Es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ donde para toda $x \in \mathbb{R}$, $f^{(N)}(x) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f no es un polinomio y sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid$ para todo intervalo $x \in (a,b)$ y $f|_{(a,b)}$ no es un polinomio $\}$. Luego, $A^C = \{x \in \mathbb{R} \mid$ existe un intervalo $x \in (a,b)$, $f\ |_{(a,b)}$ sí es polinomio $\}$. Es evidente que A^C es abierto y además $A^C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ donde I_n es un intervalo abierto y $I_n \bigcap I_m = \varnothing$ para toda $n \neq m$. Por el lema anterior $f|_{I_n}$ es un polinomio para toda $n \in \mathbb{N}$.
El conjunto A es cerrado y no vacío dado que si para toda $x \in \mathbb{R}$ existe un intervalo $x \in (a,b)$ donde $f|_{(a,b)}$ es polinomio entonces por el lema anterior $f|_{\mathbb{R}}$ es polinomio, lo cuál es una contradicción.

Asimismo A^C es denso. Sea (a,b) un intervalo abierto y $A_n = \left\{x \in [a,b] \mid f^{(n+1)}(x) = 0\right\}$. Notemos que A_n es cerrado y $[a,b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Entonces, por el corolario 2 existe N tal que $Int\,(A_N) \neq \varnothing$. De ahí que existe un intervalo $(c,d) \subseteq A_N \subseteq [a,b]$. Luego, $f^{(N+1)}(x) = 0$ en (c,d) por lo que, $f|_{(c,d)}$ es un polinomio de grado menor o igual a N. Así, $(c,d) \subseteq (a,b) \bigcap A^C$. Por lo tanto, A^C es denso.

Por otra parte el conjunto A no tiene puntos aislados. Para probar esto, supongamos lo contrario. Por consiguiente existe $x_0 \in A$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) - \{x_0\}) \bigcap A = \varnothing.$$

Por lo tanto, $(x_0 - \epsilon, x_0)$, $(x_0, x_0 + \epsilon) \subseteq A^C \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Luego, $(x_0 - \epsilon, x_0) \subseteq I_{n_1}$ y $(x_0, x_0 + \epsilon) \subseteq I_{n_2}$. Además $f|_{(x_0-\epsilon,x_0)} = g$ y $f|_{(x_0,x_0+\epsilon)} = h$ donde g y h son polinomios. Sea $m = \max\{\text{grado}(g), \text{grado}(h)\}$. Claramente,

$$f^{(m+1)}\Big|_{(x_0-\epsilon,x_0)} = 0 = f^{(m+1)}\Big|_{(x,x_0+\epsilon)}.$$

Luego, por continuidad $f^{(m+1)}\,(x_0) = 0$. Así que $f^{(m+1)}|_{(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)} = 0$. De este modo f es un polinomio en $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Sin embargo, esto es una contradicción pues $x_0 \in$

$(x_0 - \epsilon, \;\; x_0 + \epsilon)$. Finalmente, A no tiene puntos aislados.

Sea $B_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0\right\}$ entonces,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ y } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \bigcap B_n$$

Como B_n es cerrado en $\mathbb{R}$ se tiene que $A \bigcap B_n$ es cerrado en A y por corolario 2 existe N tal que $A \bigcap B_N$ tiene interior no vacío en A. En consecuencia existe un intervalo (a, b) tal que $\varnothing \neq (a, b) \bigcap A \subseteq A \bigcap B_N$. Sea $x \in (a, b) \bigcap A$. Luego como $x \in A$ y A no tiene puntos aislados, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (a, b) \bigcap A$ tal que $x_n \neq x$ y x_n converge a x. Notemos que,

$$f^{(N+1)}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(N)}(x) - f^{(N)}(x_n)}{x - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - 0}{x - x_n} = 0$$

ya que $x_n, x \in (a, b) \bigcap A \subseteq (a, b) \bigcap B_N$. Por lo tanto, $f^{(N+1)}(x) = 0$ para todo $x \in (a, b) \bigcap A$. Inductivamente

$$f^{(m)}(x) = 0 \text{ para todo } x \in (a, b) \bigcap A \text{ y } m > N. \tag{1}$$

Consideremos$(a, b) \bigcap A^C = (a, b) \bigcap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$. Como A^C es denso esta intersección es no vacía. Entonces, $(a, b) \bigcap I_m \neq \varnothing$ para algún $m \in \mathbb{N}$ por lo que $(a, b) \bigcap I_m = (c, d)$.

Supongamos que c y $d \in A^C$. Como $(a, b) \bigcap I_m = (c, d)$ entonces c ó $d \in I_m$, sin perdida de generalidad sea $d \in I_m$. Luego, como $c \in A^C$ se tiene que $c \in I_{n_c}$ para algún $n_c \in \mathbb{N}$. Si $m \neq n_c$, $I_m \bigcap I_{n_c} = \varnothing$. Esto no puede ser pues (c, d) es un intervalo. Por consiguiente, $m = n_c$ y c, $d \in I_m$ por lo que $[c, d] \subseteq I_m$. Debido a que $(a, b) \bigcap I_m = (c, d)$ y $[c, d] \subseteq I_m$ entonces, $(a, b) = (c, d)$. Esto es una contradicción pues $(c, d) \subseteq I_m \subseteq A^C$ y $(a, b) \bigcap A \neq \varnothing$. Por lo tanto, c o $d \in A$.

Sin perdida de generalidad supóngase que $c \in A$. En (c, d), f es un polinomio de grado k pues $(c, d) \subseteq I_m$. Notemos que c es punto límite de (c, d) por lo que existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq (c, d)$ tal que x_n converge a c entonces, por continuidad $f^{(k)}(c) \neq 0$. Luego, puesto que, $c \in (a, b) \cap A$ y $f^{(k)}(c) \neq 0$ entonces, por (1) $k < N$.

De este modo, en

$$(c,d)\ f \text{ es un polinomio de grado } N. \qquad (2)$$

Finalmente, por (1) y (2) $f^{(N)}(x) = 0$ en (a,b). Por lo tanto, f es un polinomio en (a,b) esto contradice que $(a,b)\bigcap A \neq \varnothing$. De manera que f es polinomio en $\mathbb{R}$. $\square$

Esta aplicación es conocida como el teorema de Corominas-Sunyer resultado de dos matemáticos catalanes Ernest Corominas i Vigneaux y Ferran Suyer i Balaguer. En [50] se menciona que este resultado tiene interesantes relaciones con análisis, álgebra, geometría, etc. En este libro se discuten algunas de esas relaciones, principalmente todas de relación geométrica. Por ejemplo en las páginas 35 y 36 el autor menciona que sería interesante estudiar la relación del teorema de Corominas-Sunyer con una conjetura que involucra al fractal más popular, el conjunto de Maldebroth. Dicha conjuntura enuncia que el conjunto de Maldebroth es localmente conexo.

Aplicación 8

Variante del teorema de Casorati-Weierstrass.

Definición 27. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ es un **dominio**, si es abierto y conexo.

Definición 28. Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es **diferenciable en $\boldsymbol{z_0 \in A}$** si el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. A dicho límite se le llama la **derivada** de f en z_0 y se le denota por $f'(z_0)$. Si f es diferenciable en todo punto de A, diremos que f es **analítica** u **holomorfa** en A. Una función se llamará **holomorfa en un punto**, si es diferenciable en una bola abierta que contiene al punto. Una **singularidad** de la función f es un punto en el cual f no es holomorfa.

Teorema 10. ***Teorema de Laurent*** *Sean $R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f : B(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $z \in B(z_0, R) - \{z_0\}$, entonces*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Esta serie converge uniformemente en $B(z_0, r)$ donde $0 < r \leq R$. Además, los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

donde $0 < r \leq R$.

La demostración de este teorema puede verificarse en [21, p. 199].

Definición 29. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $f : A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si el punto $z_0 \notin A$ y existe $r > 0$ que satisface $B(z_0, r) - \{z_0\} \subseteq A$, entonces diremos que z_0 es una **singularidad aislada** de f.

Luego, por el teorema de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

para todo $z \in B(z_0, r) - \{z_0\} \subseteq A$. De este modo se clasifica a las singularidades aisladas como

a. Si $b_n = 0$ para todo n, diremos que z_0 es una **singularidad removible** de f.

b. Si $k \geq 1$ tal que $b_k \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo$n \geq k$, diremos que f tiene un **polo de orden *k*** en z_0.

c. Si $b_n \neq 0$ para una cantidad infinita de valores de n, diremos que z_0 es una **singularidad esencial**de f.

Teorema 11. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con una singularidad aislada en z_0. Entonces,*

a. El límite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe si y sólo f tiene una singularidad removible en z_0.

b. El límite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ vale infinito si y sólo si f tiene un polo de algún orden k en z_0.

c. El límite $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe ni vale infinito si y sólo si f tiene una singularidad esencial.

La demostración del teorema puede consultarse en [18, p. 100].

Teorema 12. ***Teorema de Casorati-Weierstrass.*** *Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ dominio y $a \in G$. Si $f : G - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa con una singularidad esencial en a entonces, para todo $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a a y además la sucesión $f(z_n)$ converge a w.*

Este teorema también puede enunciarse de esta manera. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ dominio y $a \in G$. Si $f : G - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa con una singularidad esencial en a entonces, para cualquier bola $B(a, r) \subseteq G$, $f(B(a, r) - \{a\})$ es denso en $\mathbb{C}$.

La demostración del teorema puede consultarse en [18, p. 99].

Teorema 13. *Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función no constante holomorfa entonces f es una función abierta.*

La demostración del teorema puede consultarse en [18, p. 140].

Aplicación 8. *Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ dominio y $a \in G$. Si $f : G - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa con una singularidad esencial en a. Entonces, existe $X \subseteq \mathbb{C}$ denso tal que para toda bola abierta $B(a, r) \subseteq G$, $X \subseteq f(B(a, r) - \{a\})$.*

Demostración. La función f no es constante, dado que si esta lo fuera entonces $\{a\}$ sería una singularidad removible. Como f es no constante y es holomorfa entonces, f es una función abierta por el teorema anterior. De ahí que para toda $B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subseteq G$, $f\left(B\left(a, \frac{1}{n}\right) - \{a\}\right)$ es abierto y denso (por el teorema de Casorati-Weierstrass). Luego, por el teorema de categoría de Baire $X = \bigcap_{n \in N} f\left(B\left(a, \frac{1}{n}\right) - \{a\}\right)$ es denso.

Finalmente, sean $B(a, r) \subseteq G$ y $x \in X$. Dado que $x \in X$, $x \in f\left(B\left(a, \frac{1}{N}\right) - \{a\}\right)$ para $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < r$. Por consiguiente, $x \in f\left(B\left(a, \frac{1}{N}\right) - \{a\}\right) \subseteq f(B(a, r) - \{a\})$ y por lo tanto $X \subseteq f(B(a, r) - \{a\})$. □

Esta aplicación es otra versión del teorema de Casorati-Weierstrass. Ambas versiones son esencialmente lo mismo. Sin embargo, lo interesante de esta versión es la introducción de un conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$ denso especifico que siempre esta contenido en la imagen de cualquier bola abierta centrada y agujerada en a. Ambas versiones del teorema comparten la misma idea fundamental: la función f con una singularidad esencial en a tiene un comportamiento muy errático y toma valores en casi todo $\mathbb{C}$ en cualquier vecindad de a.

Aplicación 9

Existe una función continua y no monótona.

Aplicación 9. *Existe una función continua y no monótona en todo subintervalo de $[0, 1]$.*

Demostración. Sea I un intervalo cerrado de $[0,1]$. Definimos $A(I)$ como el conjunto de las funciones continuas que son crecientes en I y $B(I)$ como el conjunto de las funciones continuas que son decrecientes en I.

Veamos que el conjunto $A(I)$ es cerrado en $C[0,1]$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A(I)$ tal que f_n converge a f y $[a,b] \subseteq I$. Como $a \leq b$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A(I)$ entonces, $f_n(a) \leq f_n(b)$ para toda n. Así que, $f(a) \leq f(b)$ y $A(I)$ es cerrado.

Asimismo, veamos que $A(I)$ es nunca denso. Supongamos que $A(I)$ no es nunca denso. Entonces, existe $f \in IntA(I)$. Sea $\epsilon > 0$. Por continuidad de f existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{4}$. Sea $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de I con n par tal que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \text{mín}\left\{\delta, \frac{\ell(I)}{2}\right\}$. Sea φ la función poligonal que une $f(x_0)$ con $f(x_1)+\frac{\epsilon}{4}, f(x_1)+\frac{\epsilon}{4}$ con $f(x_2) \ldots, f(x_{n-1})+\frac{\epsilon}{4}$ con $f(x_n)$. Luego, si $x \in I$ existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Si $x = x_{i-1}$ o $x = x_i$, entonces $\varphi(x) = f(x)$ o $\varphi(x) = f(x) + \frac{\epsilon}{4}$ por lo que

$$|f(x)-\varphi(x)| = |f(x)-f(x)| = 0 \text{ o } |f(x)-\varphi(x)| = |f(x)-f(x)+\frac{\epsilon}{4}| = \frac{\epsilon}{4}.$$

En ambos casos $|f(x)-\varphi(x)| < \epsilon$. Ahora, supongamos que $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

Definimos $m_i = \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_{i-1})}{x-x_i}\right| = \left|\frac{\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right|$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&|f(x)-\varphi(x)| =| f(x)-f(x_{i-1})+f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})+\varphi(x_{i-1}) \\
&-\varphi(x)| \leq |f(x)-f(x_{i-1})\,|+|f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})|+|\varphi(x_{i-1})-\varphi(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{4}+|f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})|+m_i\,|x_{i-1}-x_i| = \frac{\epsilon}{4}+|f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})|+ \\
&\left|\frac{\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right| |x_{i-1}-x_i| \leq \frac{\epsilon}{4}+|f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})|+|\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})| \\
&= \frac{\epsilon}{4}+|f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})|+|\,f(x_i)+\frac{\epsilon}{4}-f(x_{i+1})\,| \\
&= \frac{\epsilon}{4}+|f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})|+\frac{\epsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Si i es impar $\varphi(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, por lo que

$$\frac{\epsilon}{4}+|f(x_{i-1})-\varphi(x_{i-1})|+\frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalmente, en el caso de que i sea par se tiene que $\varphi\left(x_{i-1}\right)=f\left(x_{i-1}\right)+\frac{\epsilon}{4}$ entonces,

$$\frac{\epsilon}{4}+\left|f\left(x_{i-1}\right)-\varphi\left(x_{i-1}\right)\right|+\frac{\epsilon}{4}=\frac{3\epsilon}{4}.$$

Luego, definimos

$$h(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{si} \quad x\in I\\ f(x) & \text{si} \quad x\notin I\end{cases}$$

Claramente h es continua en $[0,1]$ y no monótona. Como ϵ fue arbitrario entonces toda bola abierta $B(f,\epsilon)$ contiene una función h no monótona, lo cuál es una contradicción pues $f\in IntA(I)$. Por lo tanto, $A(I)$ es nunca denso. Análogamente, el conjunto $B(I)$ es nunca denso.

Sea S el conjunto de todos los intervalos cuyos extremos son números racionales. Entonces, el conjunto $E=\bigcup_{I_n\in S} A\left(I_n\right)\bigcup B\left(I_n\right)$ es de primera categoría.

Supongamos que toda función continua $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ es monótona en algún intervalo. Entonces, por la densidad de los números racionales f es monótona en $I_m\subseteq S$ para algún $m\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, $C[0,1]\subseteq E$ en consecuencia $C[0,1]=E$. Esto no puede ser dado que E es un conjunto de primera categoría. De este modo, podemos concluir que existe una función $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y no monótona en todo intervalo de $[0,1]$.

$\square$

Nota. *Como E es un conjunto de primera categoría entonces, E^C es residual. Así que por el lema 8 existe un conjunto G_δ denso contenido en E^C. Por lo tanto, E^C es denso. Notemos que E^C es el conjunto de funciones continuas y no monotonas.*

Es intuitivo pensar que una función continua en un intervalo es monotona en alguna subregión, es decir, que existen intervalos donde la función "sube" o "baja" constantemente. Sin embargo, una función continua que no es monótona en ningún intervalo contradice esta intuición básica y nos lleva a reconsiderar cómo funcionan las funciones continuas más allá de lo intuitivo. Nuevamente con el teorema de categoría de Baire se demuestra que estas funciones tan raras son la regla y no la excepción.

Aplicación 10

Existencia de una función continua con un conjunto denso de máximos locales propios.

Definición 30. Sea $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diremos f posee un **máximo local propio** en $x\in[0,1]$ si existe una vecindad de x, V_x tal que $f(y)<f(x)$ para todo $y\in V_x-\{x\}$.

Aplicación 10. *Existe una función continua con un conjunto denso de máximos locales propios.*

Demostración. Para cada función continua en [0,1] f, sean $MLP(f)$ el subconjunto de [0,1] formado por todas los máximos locales propios de f y $M[0,1]=\{f\in C[0,1]|\ MLP(f)$ es denso en $[0,1]\}$.
Veamos que $M[0,1]$ es residual. Sea I un intervalo cerrado de $[0,1]$, definimos $G(I)=\{f\in C[0,1]|$ existe $x\in Int(I)$ tal que $f(x)>f(y)$ para toda $y\in I-\{x\}\}$. Sea I_0 un intervalo cerrado contenido en $Int(I)$ y definimos $V(I,I_0)=\{f\in C[0,1]|\ \sup\{f(x)|x\in I_0\}>\sup\{f(x)|x\in I-IntI_0\}\}$.

Ahora, probemos que $G(I)$ es denso en $C[0,1]$. Sean $f\in C[0,1]$ y $\delta>0$. Luego, como $f\in C[0,1]$ y I es compacto, existe $z=\sup\{f(y)|\ y\in I\}$. En consecuencia, existe $(a,b)\subseteq I$ tal que $z-\epsilon<f(x)<\epsilon+z$ para toda $x\in(a,b)$. Definimos,

$$g(x)=\begin{cases}\frac{2(z+\epsilon-f(a))}{b-a}(x-a)+f(a) & \text{si}\quad a<x<\frac{a+b}{2}\\ z+\epsilon & \text{si}\quad x=\frac{a+b}{2}\\ \frac{-2(z+\epsilon-f(b))}{b-a}(x-b)+f(b) & \text{si}\quad \frac{a+b}{2}<x<b\end{cases}$$

Claramente $g\in G(I)$ y $z-\epsilon\leqslant g(x),f(x)\leqslant z+\epsilon$ para todo $x\in(a,b)$ por lo que $-2\epsilon<f(x)-g(x)<2\epsilon$ para toda $x\in(a,b)$. Por lo tanto, $|f-g|_\infty<2\epsilon$. Como ϵ fue arbitrario $G(I)$ es un conjunto denso.

Probemos que $V(I,I_0)$ es un conjunto abierto. Sean $f\in V(I,I_0)$, $B(f,\epsilon)$ una bola abierta con radio $\epsilon=\frac{1}{3}(\sup\{f(x)\mid x\in I_0\}-\sup\{f(x)\mid x\in I-IntI_0\})$ y $g\in B(f,\epsilon)$.

Sean $z_1=\sup\{f(x)\mid x\in I-I_0\}$ y $z_2=\sup\{f(x)\mid x\in I_0\}$. Entonces, $\sup\{g(x)\mid x\in I-I_0\}\leq z_1+\epsilon$ y $\sup\{g(x)\mid x\in I_0\}\geqslant z_2-\epsilon$. Luego,

$$\begin{aligned}&\sup\{g(x)\mid x\in I_0\}-\sup\{g(x)\mid x\in I-I_0\}\\ &>z_2-\epsilon-z_1-\epsilon=3\epsilon-2\epsilon=\epsilon>0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sup\{g(x)\mid x\in I_0\}>\sup\{g(x)\mid x\in I-I_0\}$ y por ende $g\in V(I,I_0)$. Es decir, $V(I,I_0)$ es un conjunto abierto.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $G_n(I) = \bigcup \{V\left(I, I_0\right) \mid I_0$ es un intervalo cerrado con $I_0 \subseteq IntI$ y $\ell\left(I_0\right) < 1/n\}$, $G_n(I)$ es un conjunto abierto. Demostremos que $G(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n(I)$.

"$\supseteq$"Sea $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n(I)$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un intervalo cerrado $I_n \subseteq I$ tal que $\ell\left(I_n\right) < 1/n$ y $\sup\{f(x) \mid x \in I_n\} > \sup\{f(x) \mid x \in I - I_n\}$. Gracias a esto último y a que $\ell\left(I_n\right)$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito se cumple que $I_m \subseteq I_n$ para toda $m > n$. Luego, por la propiedad de la intersección finita existe un único elemento $x_* \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subseteq IntI$. Es decir, x_* es el único punto máximo de f en $IntI$. Por lo tanto, $f \in G(I)$.

"$\subseteq$"Sea $f \in G(I)$ entonces, existe $x \in IntI$ tal que $f(x) > f(y)$ para todo $y \in I - \{x\}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un intervalo cerrado I_n cuyo punto medio es x y además $\ell\left(I_n\right) < 1/n$. Claramente,

$$\sup\{f(x)|\, x \in I_n\} > \sup\{f(x)|\, x \in I - IntI_n\}.$$

Entonces, $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n(I)$. Así, $G(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n(I)$ y $G(I)$ es un conjunto G_δ denso en $C[0,1]$.

Finalmente, sea $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una enumeración de todos los intervalos cerrados con extremos racionales. Luego, $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} G\left(J_m\right)$ es un conjunto G_δ denso en $C[0,1]$. Notemos que $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} G\left(J_m\right) \subseteq M[0,1]$, es decir una función que tiene un máximo local propio en cada intervalo cerrado con extremos racionales tiene un conjunto de máximos locales propios denso. Luego por el lema 8 $M[0,1]$ es residual. Así pues, $(M[0,1])^C$ es de primera categoría. Si no existiera una función continua con un conjunto denso de máximos locales propios entonces, $(M[0,1])^C = C[0,1]$. Esto es una contradicción. Como $C[0,1]$ no es de primera categoría, es imposible tener que $C[0,1] = (M[0,1])^C$ y por lo tanto existe una función con un conjunto denso de máximos locales propios.

Como $(M[0,1])^C$ es un conjunto de primera categoría entonces, $M[0,1]$ es residual. Así que por el lema 8 existe un conjunto G_δ denso contenido en $M[0,1]$. Por lo tanto, $M[0,1]$ es denso. Notemos que $M[0,1]$ es el conjunto de funciones continuas con un conjunto denso de máximos locales propios. $\square$

Una función con un conjunto denso de máximos locales "oscila"de manera tan extrema que tiene un máximo local en cada intervalo, no importa cuán pequeño este sea. Esta característica es difícil de visualizar, normalmente se piensa que los máximos locales son aislados y no tan frecuentes.

El teorema de categoría de Baire se utiliza a menudo para demostrar la existencia de objetos matemáticos contra-intuitivos sin exhibir uno en especifico. Prueba de esto, son esta aplicación y las aplicaciones 4 y 9. El método empleado en estás aplicaciones parece similar. En un espacio métrico completo X se quiere demostrar la existencia de un objeto "extraño" x que satisface la propiedad P. Primero se prueba que $\{x \in X : P(x) \text{ no se cumple}\}$ es un conjunto de primera categoría y por lo tanto X no puede ser igual a todo ese conjunto. Así el objeto x que satisface la propiedad P existe. Además, este objeto no es la excepción sino la regla puesto que $\{x \in X : P(x) \text{ se cumple}\}$ es residual y por el lema 8 existe un conjunto G_δ denso contenido en $\{x \in X : P(x) \text{ se cumple}\}$.

Es importante resaltar que el desarrollo teórico de las siguientes aplicaciones se basa fuertemente en "Introductory Functional Analysis with Applications" de Kreyszig [9].

Aplicación 11

Teorema de acotación uniforme.

Recordemos que un **espacio vectorial** V **sobre un campo** F consiste en un conjunto en el que están definidas dos operaciones, la adicción de vectores y la multiplicación por escalares. A los elementos del campo F se le denominan **escalares**. En cambio los elementos del espacio vectorial V se les conoce como **vectores**.

La **adicción de vectores** es una función que a cada par de vectores $x,\ y \in V$ le asocia un elemento único $\mathrm{x}+\mathrm{y}$ en V. Este elemento es llamado suma de los vectores x y y. La adicción de vectores debe cumplir las siguientes propiedades

A) Para todo $x,\ y \in V$ se cumple que $\mathrm{x}+\mathrm{y}=\mathrm{y}+\mathrm{x}$ (conmutatividad de la adición).

B) Para todo $x,\ y$ y $z \in V$ se cumple que $(\mathrm{x}+\mathrm{y})+\mathrm{z}=\mathrm{x}+(\mathrm{y}+\mathrm{z})$ (asociatividad de la adición).

C) Existe un elemento en V llamado 0 tal que $\mathrm{x}+0=\mathrm{x}$ para toda x en V.

D) Para cada elemento $x \in V$, existe un elemento $y \in V$ tal que $\mathrm{x}+\mathrm{y}=0$.

La **multiplicación por escalares** asocia con cada vector $x \in V$ y escalar $\alpha \in F$ un elemento único αx en V. Este elemento es llamado producto de α y x. La multiplicación por escalares debe cumplir lo siguiente

A) Existe el elemento $1 \in F$ tal que para cada elemento $x \in V$, $1\mathrm{x} = \mathrm{x}$.

B) Para todo $\alpha,\ \beta \in F$ y $x \in V$, $(\alpha\beta)\mathrm{x} = \alpha(\beta\mathrm{x})$ (asociatividad de la multiplicación).

C) Para cada $\alpha \in F$ y cada par de elementos $x,\ y \in V$, $\alpha(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \alpha\mathrm{x} + \alpha\mathrm{y}$ (propiedad distributiva respecto a la suma vectorial).

D) Para cada $\alpha,\ \beta \in F$ y cada par de elementos $x,\ y \in V$, $(\mathrm{a}+\mathrm{b})\mathrm{x} = \mathrm{ax}+\mathrm{bx}$ (propiedad distributiva respecto a la suma escalar).

Si $F = \mathbb{R}$ entonces, se dice que V es un **espacio vectorial real** y V es un **espacio vectorial complejo** si $F = \mathbb{C}$.

Definición 31. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Una **norma** es una función $||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface que para todo $x,\ y \in V$ y $\alpha \in F$

A) $||x|| \geq 0$.

B) Se tiene que $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$.

C) $||\alpha x|| = |\alpha|\ ||x||$.

D) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Una norma en V genera una métrica d en X, conocida como la **métrica inducida por la norma**. Esta se define como

$$d(x, y) = ||x - y|| \text{ para todo } x,\ y \in V.$$

Un **espacio normado** V es un espacio vectorial con una norma definida en el, este se denota como $(V, ||.||)$ o simplemente V. Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo (completo con la métrica inducida por la norma).

Proposición 2. *Sean V un espacio vectorial sobre un campo F y $||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma en V. Entonces, la norma es una función continua, es decir $x \to \|x\|$ es una función continua de $(x, \|\cdot\|)$ a $\mathbb{R}$.*

Demostración. Notemos que la propiedad D) de la definición anterior implica que $|\ \|y\| - \|x\|\ | \leq \|y - x\|$. Dado que

$$\|x\| = \|y - x - y\| \leq \|y - x\| + \|y\|$$
$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

por lo cuál,

$$-\|y - x\| \quad \leq \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \text{ es decir, } |\ \|y - \|x\|\ | \leq \|y - x\|.$$

Luego, de esta propiedad se deriva que la norma es una función continua. Demostremos esto, sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{1}{N}$. Si $\|x - x_0\| < \frac{1}{N}$ entonces, $\big|\ \|x\| - \|x_0\|\ | \leqslant \|x - x_0\| < \frac{1}{N} < \epsilon$. Por lo tanto, la norma es una función continua.

□

Definición 32. Un **operador lineal $\boldsymbol{T}$** es una función cuyo dominio es un espacio vectorial $\boldsymbol{X}$ sobre un campo $\boldsymbol{F}$ y el rango de $\boldsymbol{T}$ es un espacio vectorial sobre el mismo campo. Además para todo $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{F}$

A) $\boldsymbol{T(x + y) = T(x) + T(y)}$.

B) $\boldsymbol{T(\alpha x) = \alpha T(x)}$.

Si $\boldsymbol{\alpha = 0}$ en la propiedad B) entonces, obtenemos esta igualdad $\boldsymbol{T(0) = 0}$.

Definición 33. Sean $(X, ||\cdot||_X)$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. El operador T es **acotado** si existe un número real c tal que para todo $x \in X$

$$||T(x)||_Y \leq c||x||_X. \tag{1}$$

Si $x \neq 0$ (dado que $T0 = 0$) se tiene que,

$$\frac{||T(x)||_Y}{||x||_X} \leq c.$$

Entonces,

$$\sup_{x \in V - \{0\}} \frac{||T(x)||_Y}{||x||_X} \leq c$$

por lo que el número c más pequeño que cumple (1) para $x \neq 0$ es,

$$||T|| = \sup_{x \in V - \{0\}} \frac{||T(x)||_Y}{||x||_X}$$

A $||T||$ se le asigna el nombre de **norma del operador $\boldsymbol{T}$**. Si $V = \{0\}$ se define $||T|| = 0$. Remplacemos $c = ||T||$ en (1), se obtiene

$$||T(x)||_Y \leq ||T||\ ||x||_X.$$

Proposición 3. *Sean $(X, ||\cdot||_X)$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado. Entonces, se cumple lo siguiente*

a.

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|_Y.$$

b.

$$||T|| = \sup_{x \in V - \{0\}} \frac{||T(x)||_Y}{||x||_X} \text{ *es una norma.*}$$

La demostración puede verificarse en [9, p. 92].

Lema 24. *Sean $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal.*

a. T es continuo si y solo si es acotado.

b. Si T es continuo en un punto entonces, es continuo.

La demostración puede verificarse en [9, p. 97].

Lema 25. *Sean X, Y espacios vectoriales ambos reales o complejos y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces, si T^{-1} existe, es un operador lineal.*

La demostración puede verificarse en [9, p. 88].

Aplicación 11.

Teorema 14. ***Teorema de acotación uniforme:*** *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach , $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio normado y $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales acotados, $T_n : X \to Y$. Si $\|T_n(x)\|_Y$ es acotado para cada $x \in X$ es decir para cada $x \in X$ existe $c_x \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_n(x)\|_Y \leq c_x$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para la sucesión $\{\|T_n\|_Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_n\|_Y \leq c$.*

Demostración. Sea $A_k = \{x \in X : \|T_n(x)\|_Y \leq k \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}$. Demostremos que el conjunto A_k es cerrado. Sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq A_k$ una sucesión convergente a x. Como T_n es un operador lineal acotado entonces, T_n es continuo por lo que $T_n(x_m)$ converge a $T_n(x)$. Luego, como la norma es una función continua $\|T_n(x_m)\|_Y$ converge a $\|T_n(x)\|_Y$. Finalmente, como $\|T_n(x_m)\|_Y \leqslant k$ se tiene que $\|T_n(x)\|_Y \leqslant k$. De esta manera $x \in A_k$ y por lo tanto, A_k es un conjunto cerrado.

Dado que para cada $x \in X$ existe $c_x \in \mathbb{R}$ donde $\|T_n(x)\|_Y \leq c_x$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que, para $x \in X$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_k$. Por consiguiente, $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Por el lema 11 existe $k_0 \in \mathbb{N}$ con $Int\,(A_{k_0}) \neq \varnothing$. Por lo cuál existe $x_0 \in A_{k_0}$ tal que $B\,(x_0, r) \subseteq A_{k_0}$.

Sea $x \in X$ con $x \neq 0$. Definamos $z = x_0 + \alpha x$ con $\alpha = \frac{r}{2\|x\|_X}$. Luego, $\|z - x_0\|_X = \|\alpha x\|_X = \frac{r}{2}$ por lo que $z \in B\,(x_0, r) \subseteq A_{k_0}$. En consecuencia, $\|T_n(z)\|_Y \leqslant k_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y además $\|T_n(x_0)\|_Y \leq k_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como $z = x_0 + \alpha x$ entonces, $x = \frac{1}{\alpha}\,(z - x_0)$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\|T_n(x)\|_Y = \left\|T_n\left(\frac{1}{\alpha}\,(z - x_0)\right)\right\|_Y = \left\|\frac{1}{\alpha}T_n\,(z - x_0)\right\|_Y \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\,[\|T_n(z)\|_Y + \|T_n\,(x_0)\|_Y] \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}(k_0 + k_0) = \frac{2\|x\|_X}{r}(2k_0) = \frac{4}{r}\|x\|_X k_0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n(x)\|_Y \leq \frac{4}{r}k_0.$$

□

Vale la pena subrayar que existe una demostración que no utiliza el teorema de Baire ni ningún lema relacionado. Esta prueba es más sencilla que la demostración presentada aquí, es sorprendente que esta no fue descubierta antes. La prueba en cuestión puede consultarse en [17].

Aplicación 12

Teorema de la función abierta.

Definición 34. Sea X un espacio vectorial sobre un campo F. Si $A \subseteq X$, $w \in X$ y $\alpha \in F$ se define

a. $\boldsymbol{\alpha A = \{x \in X \mid x = \alpha a, a \in A\}}$.

b. $\boldsymbol{A + w = \{x \in X \mid x = a + w, a \in A\}}$.

Lema 26. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado y sobreyectivo. Denot por $B_X(x_0, r)$ a la bola abierta contenida en X con centro x_0 y radio r y denotemos por $B_Y(y_0, r)$ a la bola abierta contenida en Y con centro y_0 y radio r. Entonces, existe una bola abierta $B_Y(0, r) \subseteq T\,(B_X(0, 1))$.*

Demostración. Primero demostremos que $\overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$ contiene una bola abierta. Para cualquier $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in nB_X\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_X\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Como T es sobreyectivo y lineal,

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Luego, como Y es un espacio métrico completo por el corolario 2 existe $k_0 \in \mathbb{N}$ con $Int\left(\overline{k_0T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}\right) \neq \varnothing$. En consecuencia, $B_Y\left(y_0, r\right) \subseteq \overline{k_0T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$. Esto implica que $B_Y\left(y_0, \frac{r}{k_0}\right) \subseteq \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$. Así $\overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$ contiene una bola abierta.

Luego,

$$B_Y\left(y_0, \frac{r}{k_0}\right) - y_0 = B_Y\left(0, \frac{r}{k_0}\right) \subseteq \overline{T\left(B_x\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)} - y_0. \tag{1}$$

Ahora probemos que $\overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)} - y_0 \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$. Sea $y \in \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)} - y_0$ entonces, $y + y_0 \in \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$. Como $y_0, y + y_0 \in \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$ existen $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$ sucesiones tales que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y_0 y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $y_0 + y$ por el teorema 2. Además, $u_n = T(w_n)$ y $v_n = T(z_n)$ donde $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Luego,

$$\|w_n - z_n\|_X \leq \|w_n\|_X + \|z_n\|_X < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Por lo que $\{w_n - z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_X(0,1)$. De este modo $\{T(w_n - z_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(B_X(0,1))$ y $T(w_n - z_n) = T(w_n) - T(z_n) = u_n - v_n \longrightarrow y$. Por lo tanto,

$$y \in \overline{T(B_X(0,1))}.$$

Dado que $\overline{T\left(B_X\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)} - y_0 \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$, de (1) obtenemos que

$$B_Y\left(0,\frac{r}{k_0}\right) \subseteq \overline{T\left(B_X\left(0,1\right)\right)}. \tag{2}$$

Sea $B_n = B_X\left(0,\frac{1}{2^n}\right)$. Como T es lineal $\overline{T(B_n)} = \frac{1}{2^n}\overline{T(B_X(0,1))}$. Luego, por (2)

$$U_n = B_Y\left(0,\frac{r}{k_0 2^n}\right) \subseteq \frac{1}{2^n}\overline{T(B_X(0,1))} = \overline{T(B_n)}. \tag{3}$$

Finalmente, demostremos que

$$U_1 \subseteq T(B_X(0,1)).$$

Sea $y \in U_1$. Entonces $y \in \overline{T(B_1)}$ por (3). Así que existe $v_1 \in T(B_1)$ tal que $\|y - v_1\|_Y < \frac{r}{k_0 2^2}$. Luego, $y - v_1 \in U_2 \subseteq \overline{T(B_2)}$ por (3). Así que existe $v_2 \in T(B_2)$ tal que $\|y - v_1 - v_2\|_Y < \frac{r}{k_0 2^3}$. Luego, $y - v_1 - v_2 \in U_3 \subseteq \overline{T(B_3)}$ por (3). Así que existe $v_3 \in T(B_3)$ tal que $\|y - v_1 - v_2 - v_3\|_Y < \frac{r}{k_0 2^4}$. Implementando este método recursivo, en el k-ésimo paso resulta que

$$y - \sum_{n=1}^{k-1} v_n \in U_k \subseteq \overline{T(B_k)} \text{ por (3) y además existe } v_k \in T(B_k) \text{ tal que}$$

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{k} v_n \right\|_Y < \frac{r}{k_0 2^{k+1}}.$$

Dado que $v_k \in T(B_k)$, $v_k = T(x_k)$ con $x_k \in B_k$. Remplazamos $v_k = T(x_k)$ en la desigualdad anterior

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{k} v_k \right\|_Y = \left\| y - \sum_{n=1}^{k} T(x_k) \right\|_Y < \frac{r}{k_0 2^{k+1}}.$$

Si $z_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ entonces,

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{k} v_k \right\|_Y = \left\| y - \sum_{n=1}^{k} T(x_k) \right\|_Y = \|y - T(z_k)\|_Y < \frac{r}{k_0 2^{k+1}}. \tag{4}$$

Ya que $x_k \in B_k$ se cumple que $\|x_k\|_X < \frac{1}{2^k}$. Si $k > m$, $\|z_k - z_m\|_X \leq \sum_{n=m+1}^{k} \|x_k\|_X < \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{2^n}$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, entonces $\{z_k\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto debe converger a algún punto $x \in X$. Además $x \in B_X(0,1)$ dado que $\|z_k\|_X \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_X < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Finalmente, como T es acotado entonces, es continuo por el lema 24. Esto implica que $T(z_n)$ converge a $T(x)$ y por (4) $T(x) = y$. De manera que $y \in T\left(B_X(0,1)\right)$. Por lo tanto, $B_X\left(0, \frac{r}{k_0 2}\right) \subseteq T\left(B_X(0,1)\right)$. $\square$

Aplicación 12.

Teorema 15. ***Teorema de la función abierta:*** *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado. Si T es biyectivo entonces, T^{-1} es continuo y T es una función abierta.*

Demostración. Sean $A \subseteq X$ un conjunto abierto y no vacío y $y \in T(A)$ con $y = T(x)$ para algún $x \in A$. Como A es abierto existe $B_X(x,r) \subseteq A$. Por lo tanto, $B_X(0,r) \subseteq A - x$. Luego, $B_X(0,1) \subseteq \frac{1}{r}(A - x)$. Por el lema 26 existe

$$B_X\left(0, r^*\right) \subseteq T\left(B_X(0,1)\right) \subseteq T\left[\frac{1}{r}(A - x)\right] = \frac{1}{r}\left[T(A) - T(x)\right].$$

En consecuencia $B_X\left(T(x), r^* r\right) \subseteq T(A)$. Por lo tanto, $T(A)$ es un conjunto abierto. De este modo T es una función abierta. Finalmente, por el teorema 1, T^{-1} es continuo y por tanto acotado a causa del lema 24. $\square$

Aplicación 13

Teorema de la gráfica cerrada.

Definición 35. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. El operador lineal T es **cerrado** si su **gráfica** $\boldsymbol{\mathcal{G}(T) = \{(x, y) \mid x \in V, y = T(x)\}}$

es cerrado en el espacio normado $X \times Y$ donde las dos operaciones algebraicas del espacio vectorial $X \times Y$ están definidas como

$$\begin{aligned}
&(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)
\end{aligned}$$

para todo (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X \times Y$ y α escalar. **La norma del espacio vectorial $\boldsymbol{X \times Y}$** se define como

$$\boldsymbol{\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.}$$

Proposición 4. *Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach. Entonces, $(X \times Y, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times Y$ una sucesión de Cauchy donde $z_n = (x_n, y_n)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y < \epsilon \tag{1}$$

Por lo que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en X y Y respectivamente. Por consiguiente, x_n converge a $x \in X$ y y_n converge a $y \in Y$. Esto implica que z_n converge a $z = (x, y) \in X \times Y$ por (1). Así, $(X \times Y, \|\cdot\|)$ es completo. □

Aplicación 13.

Teorema 16. ***Teorema de la gráfica cerrada:*** *Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal cerrado. Entonces T es un operador acotado.*

Demostración. Sean $\mathcal{G}(T)$ cerrado en $X \times Y$. Entonces, $\mathcal{G}(T)$ es un subespacio completo por el teorema 3. Consideremos la función $P : \mathcal{G}(T) \longrightarrow X$ tal que $P(x, T(x)) = x$. Puede verificarse que P es lineal y biyectiva. Además, P es un operador lineal acotado dado que

$$\|P(x, T(x))\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|T(x)\|_Y = \|(x, T(x))\|.$$

Puesto que P es biyectiva entonces P^{-1} existe y es lineal por el lema 25. Dado que $\mathcal{G}(T), X$ son completos aplicamos el teorema de la función abierta resultando que P^{-1} es acotado es decir $\|(x, T(x))\| \leq b\|x\|_X$ para algún $b \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$.

Luego,

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|x\|_X = \|(x, T(x))\| \leq b\|x\|_X$$

para todo $x \in X$ es decir T es acotado. $\square$

El teorema de la función abierta es rápidamente demostrado con ayuda del lema 26. Este lema utiliza el teorema de categoría de Baire. Finalmente, el teorema de la gráfica cerrada es una consecuencia inmediata del teorema de la función abierta. Estas 3 últimas aplicaciones son fácilmente encontradas en cualquier libro elemental de análisis funcional. En [4, p. 126] el autor opina que son principios básicos en la teoría de operadores lineales entre espacios de Banach. Por otra parte, en [9, p. 209] se menciona que estas aplicaciones son piedras angulares de la teoría de los espacios de Banach y menciona aplicaciones de estos teoremas.

XI Comentarios sobre aplicaciones actuales

El teorema de Baire es un resultado con un gran número de aplicaciones. Ejemplo de esto es el siguiente anexo, donde se recopilaron trabajos del 2000 al 2024 donde se cita dicho teorema. En [53], se utiliza el teorema de categoría de Baire y conceptos derivados de él para abordar el tema de los "soft sets". Los cuales sirven para modelar la incertidumbre y son útiles en muchos campos diferentes, como la toma de decisiones, el análisis de datos, la previsión, la simulación, la evaluación de la calidad del sonido y la minería de reglas [53].

Además, [XXXV] destaca que, en el contexto de la computabilidad, el teorema de Baire sirve como ejemplo de un teorema clásico que presenta diversas interpretaciones computacionales. En [I] se emplea el teorema de Baire para demostrar el teorema de bang-bang, un resultado clásico en la teoría de control lineal. Por otro lado, el teorema de Baire también tiene aplicaciones en las áreas de estadística y probabilidad, como puede observarse en [IX] y [XXXIV]. Ejemplos de su relación con la topología son los artículos [XIV], [XI] y [XXII], mientras que [XXIX] contempla su vínculo con análisis funcional. Además, se encuentra presente en sistemas dinámicos [XVI], en el artículo [V] puede verse una relación interdisciplinaria del teorema de categoría de Baire con teoría de grafos, teoría de la medida y teoría de grupos. Los documentos [XIX] y [XVIII] asocian el teorema de categoría de Baire con análisis matemático.

Es interesante que artículos recientes empleen el teorema de categoría de Baire o conceptos derivados de este. Esto subraya su versatilidad y su importancia en múltiples disciplinas dentro de las matemáticas.

XII Resultados y discusión

A lo largo de este trabajo se repasan conceptos que se ven en un curso básico de topología, análisis matemático y análisis funcional. Generando así un medio para que los estudiantes fortalezcan sus conocimientos. En la sección de espacios de Baire se obtuvieron ejemplos de espacios topológicos que recalcan la importancia de las hipótesis en la generalización del teorema de Baire para espacios topológicos. El espacio de los números reales con la métrica euclidiana el cuál es un espacio de Baire no compacto. El espacio de los números reales con la topología $\tau = \mathcal{C} \bigcup \{U \subseteq \mathbb{R} | 1 \notin U\}$ donde $\mathcal{C} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U^C$ es finito$\}$, es un espacio de Baire no metrizable.

En la sección de aplicaciones se obtuvieron los siguientes resultados

- Aplicación 1: Un espacio métrico completo sin puntos aislados es no numerable, la demostración de esta aplicación es sencilla y establece una conexión entre la completitud y la no numerabilidad de espacios métricos.
- Aplicación 2: No existe una función continua en los racionales y discontinuas en los irracionales. Con el teorema de categoría de Baire se puede mostrar que si una función fuera continua en todos los racionales, esta continuidad no se "rompe" al restringirse en los irracionales, lo que imposibilita la existencia de tal función. Sin embargo, después se expone una función que es continua en los irracionales y discontinua en los racionales.
- Aplicación 3: Si una familia de funciones continuas en un espacio métrico está acotada en cada punto, entonces existe un conjunto donde la familia está acotada por una constante global. Este resultado permite extender propiedades locales (acotación en cada punto) a propiedades globales en un subconjunto abierto. Lo cuál es especialmente útil en situaciones donde se requiere controlar el comportamiento de funciones en dominios más amplios.
- Aplicación 4: Las funciones continuas y nunca diferenciables existen. Además, la mayoría de las funciones continuas no son diferenciables en ningún punto de su dominio. Esta aplicación es especialmente interesante por el impacto histórico que tuvieron estas funciones, esto puede observarse en los antecedentes de este trabajo. En los antecedentes se exponen comentarios de matemáticos famosos hacia dichas funciones. Expresando sorpresa y lo poco intuitivo de estas funciones. Por un largo tiempo se pensaba que las funciones continuas y nunca diferenciables no existían. Parece intuitivo afirmar que

una curva continua puede tener trozos irregulares pero siempre habrá algunos intervalos donde es “suave”, donde la función solamente aumenta o disminuye o permanece constante. Y por tanto, existe la derivada en estos intervalos. Sin embargo, en aquella época no se había pensado en el caso donde los intervalos se vuelven infinitamente pequeños. En esta aplicación se utiliza el teorema de categoría de Baire para demostrar de una forma no constructiva la existencia de funciones continuas nunca diferenciables. A pesar de lo difícil que es imaginar estas funciones, para nuestra sorpresa estas constituyen la mayoría de las funciones continuas.

- Aplicación 5: Si una función, definida sobre el producto de espacios métricos completos, es continua en cada variable de manera separada, entonces existe un subconjunto del espacio producto donde la función es continua. La continuidad separada no implica automáticamente la continuidad global en el producto, pero este resultado establece un puente que permite extender la continuidad a un subconjunto del producto.

- Aplicación 6: No existe una función continua y biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Este resultado está vinculado al teorema de invariancia de la dimensión en topología, el cual establece que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es biyectiva y continua, entonces $m = n$. En [27] se menciona que este resultado es muy obvio, sin embargo la prueba formal es complicada. Dicha prueba se le atribuye a Brouwer cerca del año 1910. Este teorema era un problema abierto importante en el siglo 19.

- Aplicación 7: Una función con derivadas de todos los ordenes es un polinomio si para toda derivada existe un punto donde esta se anula. Este resultado me pareció interesante por su similitud con este: una función con derivadas de todos los ordenes es un polinomio si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que la n-ésima derivada se anula en cualquier punto.

- Aplicación 8: Variante del teorema de Casorati-Weierstrass. Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ dominio y $a \in G$. Si $f : G - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa con una singularidad esencial en a. Esta aplicación es otra versión del teorema de Casorati-Weierstrass. Ambas versiones son prácticamente iguales. Sin embargo, esta versión nos dice que existe un conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$ especifico que siempre esta contenido en la imagen de cualquier bola abierta centrada y agujerada en a.

- Aplicación 9: Existe una función continua y no monótona y Aplicación 10: Existencia de una función continua con un conjunto denso de máximos locales propios. Ambas aplicaciones son ejemplos del uso del teorema de categoría de Baire para demostrar de manera no constructiva la existencia de objetos matemáticos extraños. La demostración de estas aplicaciones siguen una idea similar a la demostración de la aplicación 4. Esto se discute en la página 60.

- Aplicación 11: Teorema de acotación uniforme, Aplicación 12: Teorema de la función abierta y Aplicación 13: Teorema de la gráfica cerrada. Estas aplicaciones son muy famosas, se suelen encontrar en cualquier libro de análisis funcional, [9, p. 209] se refiere a estas aplicaciones como piedras angulares de la teoría de los espacios de Banach y menciona varias aplicaciones de estos teoremas. Mientras que [47, p. 1] se refiere a estas aplicaciones como los 3 grandes teoremas de análisis funcional, [15] los llama teoremas fundamentales del análisis funcional y menciona que tienen aplicaciones en la divergencia de series de Fourier, en el teorema de representación de Riesz. Además [15] examina dos aplicaciones en física: el problema del momento y el ascenso de un cohete. Menciona que el alcance de estas aplicaciones va más allá del análisis funcional y están presentes en otras ramas de las matemáticas como análisis armónico y ecuaciones diferenciales.

XIII Conclusiones

A lo largo de la tesis, se han introducido conceptos que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas abordan en sus cursos de topología y análisis matemático. De esta manera, se presenta un repaso para ellos y una vía para consolidar lo aprendido. Las aplicaciones presentadas se basan en esos conceptos, logrado que estas sean accesibles para los estudiantes. Ellos encontrarán en este estudio un ejemplo tangible de cómo conceptos de dos ramas de las matemáticas logran relacionarse. Logrando así el objetivo de presentar a los estudiantes un ejemplo interesante en donde 2 ramas de las matemáticas se fusionan, así como exhibir aplicaciones del teorema de categoría de Baire en el análisis matemático y analizar la teoría necesaria para decodificar esto.

Sin embargo, este trabajo también ha tenido limitaciones. Aunque se ha analizado la relación entre el teorema de Baire y la topología, el trabajo no abarca otras áreas de las matemáticas donde también podría ser aplicable. Otra limitación es la siguiente, a pesar de que el trabajo está dirigido a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, no se ha implementado ni evaluado el impacto de la enseñanza del teorema de Baire en el aula. Este trabajo puede servir como un medio eficaz para consolidar los conocimientos en topología y análisis matemático entre los estudiantes, a través de un teorema interesante con un gran número de aplicaciones, como es el teorema de Baire. Además, ayuda a introducir tres teoremas fundamentales en análisis funcional: el teorema de acotación uniforme, el teorema de la función abierta y el teorema de la gráfica cerrada. No solo se fortalece la comprensión teórica, sino que también se puede captar el interés por sus diversas aplicaciones.

VIII Anexo

[I] A. Bressan, M. Mazzola y K. T. Nguyen, “The bang–bang theorem via Baire category: a dual approach”, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, vol. 23, art. 46, 2016. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s00030-016-0400-3.

[II] A. Chang, M. Csörnyei, K. Héra, y T. Keleti, “Small unions of affine subspaces and skeletons via Baire category”, *Advances in Mathematics*, vol. 328, pp. 801–821, 2018. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.02.009.

[III] A. J. Lohwater, “Some function-theoretic results involving Baire category”, en *Topics in Analysis*, O. Lehto, I. S. Louhivaara y R. Nevanlinna, Eds. vol. 419, Lecture Notes in Mathematics. Berlín, Heidelberg: Springer, 1974. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/BFb0064733.

[IV] A. Machowski, “A generalization of the Open Mapping Theorem and a possible generalization of the Baire Category Theorem”, *Topology and its Applications*, vol. 335, 108594, 2023. ISSN 0166-8641. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.topol.2023.108594.

[V] A. Marks y S. Unger, “Baire measurable paradoxical decompositions via matchings”, *Advances in Mathematics*, vol. 289, pp. 397-410, 2016. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.aim.2015.11.034.

[VI] A. V. Osipov, “Baire property of space of Baire-one functions”, arXiv, 26 Jul. 2024. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.15496.

[VII] D. Amir y M. Hoyrup, “Comparing computability in two topologies”, *The Journal of Symbolic Logic*, pp. 1-19, 2023. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1017/jsl.2023.17.

[VIII] D. O’Regan y R. P. Agarwal, *Set Valued Mappings with Applications in Nonlinear Analysis*, Taylor & Francis, London, 2002. ISBN 0-415-28424-4.

[IX] F. Durante, et al., “On the size of subclasses of quasi-copulas and their Dedekind–MacNeille completion”, *Mathematics*, vol. 8, no. 12, p. 2238, 2020. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.3390/math8122238.

[X] F. Durante, J. Fernández-Sánchez, y C. Ignazzi, “Baire category results for stochastic orders”, *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*, vol. 116, p. 188, 2022. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s13398-022-01324-3.

[XI] G. A. Asmat Medina, “The Banach-Mazur game and products of Baire spaces”, Tesis de licenciatura, Univ. Sao Paulo, 2020. [En línea]. Disponible en: https://hdl.handle.net/20.500.12390/2234.

[XII] I. Bárány y M. Laczkovich, “Magic mirrors, dense diameters, Baire category”, arXiv:1403.0246 [math.MG], 2 Mzo. 2014. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.1403.0246.

[XIII] I. Kalantari y L. Welch, “Density and Baire category in recursive topology”, *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 50, no. 4-5, pp. 381–391, Ag. 2004. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1002/malq.200310106.

[XIV] J. Cao y H. J. K. Junnila, “When is a Volterra space Baire?”, *Topology and its Applications*, vol. 154, no. 2, pp. 527-532, 2007. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.topol.2006.05.009.

[XV] J. Fenecios and A. Racca, “Equivalence of Lebesgue’s theorem and Baire characterization theorem”, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 28, no. 2, 2022.

[XVI] J. R. Choksi y V. S. Prasad, “Approximation and Baire category theorems in ergodic theory”, in *Measure Theory and its Applications*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1983, pp. 94-113, Nov. 2006. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/BFb0099849.

[XVII] K. Kermedis, “Some weak forms of the Baire category theorem”, *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 49, no. 4, pp. 369–374, May 2003. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1002/malq.200310039.

[XVIII] L. Ľubica y D. Holý, “Pointwise convergence of quasicontinuous mappings and Baire spaces”, *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol. 41, no. 6, pp. 1883–94, 2011. [En línea]. Disponible en: http://www.jstor.org/stable/44240013.

[XIX] M. Goldstern, J. Schmeling y R. Winkler, “Further Baire results on the distribution of subsequences”, arXiv:math/0407295 [math.NT], 22 Nov. 2007. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0407295.

[XX] P. Hieronymi, “An analogue of the Baire category theorem”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 78, no. 1, pp. 207-213, Mar. 2013. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.2178/jsl.7801140.

[XXI] P. Zakrzewski, “On absolutely Baire nonmeasurable functions”, *Georgian Mathematical Journal*, vol. 26, no. 4, pp. 483-487, 2019. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2044.

[XXII] R. Heckmann, “Spatiality of countably presentable locales (proved with the Baire category theorem)”, *Mathematical Structures in Computer Science*, vol. 25, no. 7, pp. 1607-1625, 2015. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1017/S0960129513000418.

[XXIII] S. Bakshi, “Set of points of continuity and maximally discontinuous extensions”, *Reson*, vol.

27, pp. 131–142, 2022. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s12045-022-1298-1.

[XXIV] S. Basu yand A. C. Pramanik, “A Kuratowski theorem revisited”, *arXiv*, vol. 2309.17258v2, 6 Ag. 2024. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.17258.

[XXV] S. Basu yand A. C. Pramanik, “On non-Baire rare sets in category bases”, *arXiv*, 2 Sep. 2024. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.01430.

[XXVI] S. Saito, “Knot points of typical continuous functions and Baire category in families of sets of the first class”, University of London, University College London, 2007. [Tesis doctoral]. Disponible en: https://www.proquest.com/openview/6be6fb2fe1aac8a245b64968226234dd/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2026366.

[XXVII] S. Sanders, “Big in Reverse Mathematics: measure and category”, arXiv:2303.00493 [math.LO], Mzo.2023. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.00493.

[XXVIII] S. Sanders, “On the computational properties of the Baire Category Theorem”, arXiv:2210.05251 [math.LO], Oct. 2022. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.05251.

[XXIX] S. Todorcevic, “Biorthogonal systems and quotient spaces via Baire category methods”, *Math. Ann.*, vol. 335, pp. 687-715, jul. 2006. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s00208-006-0762-7.

[XXX] S. Reich yand A. J. Zaslavski, “Two generic convergence results for infinite products of generalized nonexpansive mappings”, *Symmetry*, vol. 14, no. 3, p. 534, 2022. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.3390/sym14030534.

[XXXI] T. Banakh y L. Wang, “On Baire category properties of function spaces $C'_k(X, Y)$”, arXiv:1903.07127 [math.GN], Mar. 2019. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.07127.

[XXXII] T. Banakh y S. Gabriyelyan, “Baire category properties of some Baire type function spaces”, *Topology and its Applications*, vol. 272, art. no. 107078, 2020. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107078.

[XXXIII] T. Yamazaki, “Some more conservation results on the Baire Category Theorem”, *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 46, no. 1, pp. 105–110, Feb. 2000. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-3870(200001)46:1<105::AID-MALQ105>3.0.CO;2-2.

[XXXIV] T. W. Körner, “Baire Category, Probabilistic Constructions and Convolution Squares”, 13 Ag. 2009. [En línea]. Disponible en: https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=75383547dc07bfa06a294df669861aef05dc0b54.

[XXXV] V. Brattka, M. Hendtlass, y A. P. Kreuzer, “On the uniform computational content of the Baire category theorem”, *Notre Dame J. Formal Logic*, vol. 59, no. 4, pp. 605-636, 2018. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1215/00294527-2018-0016.

[XXXVI] X. Chang, Y. Dong, M. Liu, et al., “Baire category and the relative growth rate for partial quotients in continued fractions”, *Arch. Math.*, vol. 122, pp. 41–46, 2024. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s00013-023-01914-6.

[XXXVII] Z. Ameen y M. H. Alqahtani, “Baire category soft sets and their symmetric local properties”, *Symmetry*, vol. 15, no. 10, art. no. 1810, 2023. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.3390/sym15101810.

[XXXVIII] Z. Shami, “A model theoretic Baire category theorem for simple theories”, arXiv, 6 Nov. 2013. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.0912.2591.

IX Referencias bibliográficas

[1] A. Ampère, "Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque", *J. École Polytech.*, vol. 6, pp. 148-181, 1806.

[2] A. Denjoy, *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*, Gauthier-Villars, 1954.

[3] A. Marijon, "René-Louis Baire", *Annuaire Ass. amicale anc. élèves ENS*, pp. 82-87, 1933.

[4] A. Torchinsky, *Problems in Real and Functional Analysis*, vol. 166, Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2015. ISBN 1470420570, 9781470420574.

[5] "Baire, René Louis", *Diccionario completo de biografía científica*, 15 Ago. 2024. [Accedido: 07-sep-2023]. [En línea]. Disponible en: https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/baire-rene-louis.

[6] B. Jeauffroy y S. Pellerin, "Bulletin de l'Union des Professeurs de Mathématiques et Sciences Physiques", *La revue trimestrielle de l'Union des Professeurs de Spéciales*, vol. 84, no. 233, en. 2011. [Accedido: 15-oct-2023]. [En línea]. Disponible en: https://g.co/kgs/wZ2atMQ.

[7] Eeyore22, "Función de Weierstrass", 26 de octubre de 2008. [Accedido: 26-sep-2023]. [En línea]. Disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:WeierstrassFunction.svg.

[8] E. M. Stein and R. Shakarchi, "Applications of the Baire Category Theorem," in *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, Princeton University Press, 2010. [Online]. Available: https://www.jstor.org/stable/j.ctvcm4hpw.8

[9] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.

[10] "Fotografía de René-Louis Baire, alrededor de 1900. [Accedido: 16-sep-2024]. Disponible en: http://rkbookreviews.wordpress.com/2010/10/12/the-calculus-gallery-summary/

[11] F. Vallejo, "La Semicontinuidad en el Surgimiento de la Teoría de Funciones", *Revista Sigma*, Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño, vol. VII, pp. 15-27, 2008. [Accedido: 11-oct-2023]. [En línea]. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2750327.pdf. [Accedido: 07-sep-2024].

[12] H.L. Royden, *Real Analysis*, 3rd ed. Prentice-Hall, 1988, p. 158.

[13] H. Poincaré, "La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement", *Enseign. Math.*, vol. 1, pp. 157-162, 1899.

[14] H. Winkler, *The Development of Everywhere Continuous, Nowhere Differentiable Functions*. Bachelor's thesis, Dept. of Mathematics and The Honors College, Appalachian State Univ., Boone, NC, USA, May 2021.

[15] J. C. Bastons Garcia, "Fundamental Theorems of Functional Analysis and Applications", Undergraduate Thesis, Faculty of Mathematics, University of Barcelona, Barcelona, Spain, January 18, 2016.

[16] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, 2a ed., vol. 2. Nueva York: Springer-Verlag, 1980.

[17] J. Hennefeld, "A Nontopological Proof of the Uniform Boundedness Theorem", *The American Mathematical Monthly*, vol. 87, no. 3, pp. 217, Mar. 1980. Taylor & Francis, Ltd. en nombre de la Mathematical Association of America. Disponible en: https://www.jstor.org/stable/2321614.

[18] J. L. Taylor, *Complex Variables*, Pure and Applied Undergraduate Texts, vol. 16, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011. ISBN 978-0-8218-6901-7.

[19] J. R. Munkres, *Topología*, 2a ed. Madrid: Pearson Educación, S. A., 2002.

[20] J. Thim, *Continuous Nowhere Differentiable Functions*, Master's thesis, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, 2003.

[21] J. W. Brown y R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, 8a ed. Nueva York, NY, USA: McGraw-Hill Companies, Inc., 2009.

[22] A. Konch, “Non-Baire Proof of Uniform Boundedness Theorem and Its Applications in the Proof of Some Grand Theorems of Functional Analysis”, *Journal of Algebraic Statistics*, vol. 13, no. 1, pp. 621-629, 2022.

[23] K. S. Kumar, R. Thangadurai, y M. Waldschmidt, “Liouville Numbers and Schanuel’s Conjecture”, *arXiv*, 24 Nov. 2023. [Accedido: 21-jun-2024]. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.7154.

[24] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, 1a ed. New York: Springer Science+Business Media, 1983. [Accedido: 21-jun-2024]. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1793-8.

[25] M. Hanson-Colvin, *Everywhere Continuous Nowhere Differentiable Functions*, 2014. Disponible en: https://www.brynmawr.edu/sites/default/files/migrated-files/2014_Hanson-Colvin-1.pdf.

[26] M. Jarnicki y P. Pflug, *Continuous Nowhere Differentiable Functions: The Monsters of Analysis*, Springer Monographs in Mathematics. Cham: Springer International Publishing, 2015. ISBN 978-3-319-12670-8. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-319-12670-8.

[27] nLab, “Topological invariance of dimension”, *nLab*, Ago. 7, 2017. [Accedido: 21-jun-2024]. [En línea]. Disponible en: https://ncatlab.org/nlab/show/topological+invariance+of+dimension

[28] P. Dugac, “Notes et documents sur la vie et l’œuvre de René Baire”, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 15, no. 4, pp.pp. 297-383, 23 Ago. 1976. [Accedido: 07-feb-2018]. [En línea]. Disponible en: http://www.jstor.org/stable/41133455.

[29] R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[30] R. Baire, *Leçons sur les théories générales de l’analyse*, tome I, Principes fondamentaux, Gauthier-Villars, Paris, pp. V-VIII, 242 páginas, 1907.

[31] R. Baire, *Leçons sur les théories générales de l’analyse*, tome II, Variables complexes. Applications géométriques, Gauthier-Villars, Paris, pp. V-VIII, 357 páginas, 1908.

[32] R. Baire, “Lettre à M. Hadamard sur la théorie des ensembles”, *Bull. Soc. math. France*, vol. 33, pp. 263–264, 1905.

[33] R. Baire, “Nouvelle démonstration d’un théorème sur les fonctions discontinues”, *Bull. Soc. math. France*, vol. 28, pp. 173–179, 1900.

[34] R. Baire, “Sur la non-applicabilité de deux continus à n et à n+p dimensions”, *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences. Paris*, vol. 144, pp. 318–321, 1907.

[35] R. Baire, “Sur la théorie des fonctions discontinues”, *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences. Paris*, vol. 129, pp. 1010–1013, 1899.

[36] R. Baire, “Sur la théorie élémentaire des séries”, *L’enseignement math.*, vol. 6, pp. 124–129, 1904.

[37] R. Baire, “Sur la théorie générale des fonctions de variables réelles”, *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences. Paris*, vol. 125, pp. 691–694, 1897.

[38] R. Baire, “Sur le problème de l’intégration au point de vue des variables réelles”, *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences. Paris*, vol. 126, pp. 1700–1703, 1898.

[39] R. Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Bernardoni de C. Rebeschini & Company, 1899. [Accedido: 06-sep-2024]. [En línea]. Disponible en: http://books.google.com/books?id=cS4LAAAAYAAJ&oe=UTF-8.

[40] R. Baire, “Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues”, *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences Paris*, vol. 126, pp. 884–887, 1898.

[41] R. Baire, “Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues”, *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences*, vol. 126, pp. 1621–1623, 1898.

[42] R. Baire, “Sur les séries à termes continus et tous de même signe”, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 32, pp. 125–128, 1904.

[43] R. Baire, “Sur l’origine de la notion de semi-continuité”, *Bull. Soc. math. France*, vol. 55, pp. 141–142, 1927.

[44] R. Baire, *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité*, Paris: Vuibert et Nony, 1905. [Accedido: 06-sep-2024]. [En línea]. Disponible en: https://archive.org/details/thoriedesnombre00bairgoog.

[45] R. Baire, "Une simplification dans l'enseignement des séries", *L'enseignement math.*, vol. 7, pp. 42–43, 1905.

[46] R. DiMartino y W. O. Urbina, "Excursiones a conjuntos similares al conjunto de Cantor", *La Gaceta de la RSME*, vol. 21, no. 3, pp. 527–542, 2018.

[47] S. Kesavan, "A note on the grand theorems of functional analysis", Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Madras, Chennai - 600 036. [Accedido: 06-sep-2024]. Disponible en: https://www.imsc.res.in/~kesh/trinity.pdf.

[48] S. Lipschutz, *General Topology*, Schaum's Outline Series. Nueva York: McGraw-Hill Book Company.

[49] S. Vesneske, *Continuous, nowhere differentiable functions*, Department of Mathematics, Whitman College, Walla Walla, WA 99362, 2019.

[50] V. Navarro, *Matemàtiques en temps difícils: el teorema de Corominas-Sunyer*, Lliçó Inaugural del Curs Acadèmic 2020-2021, Facultat de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Barcelona, 7 oct. 2020. Edicions de la Universitat de Barcelona. Disponible en: http://hdl.handle.net/2445/172661.

[51] W. Brito, *El teorema de categoría de Baire y aplicaciones*, Consejo de Publicaciones de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2011.

[52] "Your favourite application of the Baire category theorem", Math Stack Exchange, 2014. [Accedido: 21-jun-2023]. [En línea]. Disponible en: https://math.stackexchange.com/questions/165696/your-favourite-application-of-the-baire-category-theorem.

[53] Z. Ameen y M. H. Alqahtani, "Baire category soft sets and their symmetric local properties", *Symmetry*, vol. 15, no. 10, art. no. 1810, 2023. [En línea]. Disponible en: https://doi.org/10.3390/sym15101810.

[54] Z. González García, *El teorema de categoría de Baire en F-espacios*, Trabajo Fin de Grado, Universidad de La Laguna, Facultad de Ciencias, Grado en Matemáticas, La Laguna, España, 2018.

[55] Z. Kong, L. Wang, and Z. Wu, "Application of fuzzy soft set in decision making problems based on grey theory", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol.

236, no. 6, pp. 1521-1530, 2011. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.09.016.