Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Contractibilidad en niveles de Whitney de una gráfica finita

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta

Pablo Álvarez Domínguez

Dirigido por:
MC Roberto Torres Hernández

Querétaro, Qro. a mayo de 2025

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Contractibilidad en niveles de Whitney de una gráfica finita

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta

Pablo Álvarez Domínguez

Dirigido por

MC Roberto Torres Hernández

MC Roberto Torres Hernández
Presidente

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López
Secretario

Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga
Vocal

MDM Carmen Sosa Garza
Suplente

Dr. Raúl Escobedo Conde
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Mayo de 2025
México

A mis padres,
por todo su apoyo y cariño.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi familia, y sobre todo a mis papás, por todo el apoyo que me han brindado no solamente durante la carrera y la elaboración de este trabajo, sino durante toda la vida, aún cuando no siempre fuera claro o no entendieran lo que hacía y a lo que me quiero dedicar.

Agradezco también a todos mis amigos, desde los que hice en secundaria y preparatoria, porque me ayudaron a pasar los difíciles primeros semestres de carrera en plena pandemia, hasta los que hice la carrera, porque me hicieron sentir bienvenido y apreciado en la comunidad de matemáticos de la universidad.

Finalmente, agradezco a mis profesores, y sobre todo al M. en C. Roberto Torres, por todas las contribuciones que hicieron a mi desarrollo como matemático, y todo el apoyo que me dieron para tener las herramientas que me permitieron realizar este trabajo.

Muchas gracias a todos los que me llevaron a ser el matemático y la persona que soy el día de hoy.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo realizar una investigación matemática en el área de la topología de conjuntos, más específicamente dentro de la teoría de continuos e hiperespacios. Nos enfocaremos en los niveles de Whitney para el hiperespacio de subcontinuos de la familia de las gráficas finitas.

Las gráficas finitas son una familia particular de continuos, es decir, espacios métricos compactos, conexos y con más de un punto. Éstas se obtienen a partir de la unión de una cantidad finita de arcos (espacios homeomorfos al intervalo $[0,1]$), cuidando que el espacio que resulte de dicha unión sea conexo.

Los niveles de Whitney de un continuo son subespacios de alguno de sus hiperespacios, los cuales son espacios topológicos al ser dotados con la métrica de Hausdorff. Los niveles de Whitney se suelen definir en alguno de los siguientes hiperespacios:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

En estos espacios se definen las funciones de Whitney, las cuales se utilizan para medir el tamaño de los elementos del hiperespacio. Si μ es una función de Whitney, los niveles de Whitney son conjuntos de la forma $\mu^{-1}(t)$, es decir, se interpretan como la colección de los elementos del hiperespacio del mismo tamaño.

La propiedad topológica que nos interesa estudiar es la contractibilidad, que se interpreta como la deformación continua de un espacio a un punto, y se define a partir de una homotopía entre la función identidad y una función constante.

En este trabajo estudiaremos la relación entre algunas características de las gráficas finitas y la posible contractibilidad de algunos de sus niveles de Whitney. De forma particular, nos interesa probar que la contractibilidad de una gráfica es equivalente a la de sus niveles chicos, y que existe una relación entre la contractibilidad de los niveles grandes y que la gráfica tenga un punto de corte (un punto que de ser removido del espacio genera una disconexión).

Palabras clave: Contractibilidad, gráfica finita, hiperespacios, niveles de Whitney.

Abstract

This work has the objective of conducting a mathematical research in the field of point set topology, and specifically in continuum and hyperspace theory. We will focus on the Whitney levels for the hyperspace of subcontinua of the family of finite graphs.

Finite graphs are a particular family of continua, that is, metric, compact and connected spaces with more than one point. These are obtained from the union of a finite amount of arcs (spaces homeomorphic to the interval [0,1]), with care that the space resulting of such union is connected.

The Whitney levels of a continuum are subspaces of some of its hyperspaces, which are topological spaces when given the Hausdorff metric. Whitney levels are usually defined in one of the following hyperspaces:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ is closed and non-empty}\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ is connected}\}.$$

In this spaces one defines Whitney functions, which are used to measure the size of the elements of the hyperspace. If μ is a Whitney function, Whitney levels are sets of the form $\mu^{-1}(t)$, that is, they are interpreted as the collection of elements of the hyperspace with the same size.

The topological property which we are interested in studying is contractibility, which is interpreted as the continuous deformation of a space to a point, and it is defined from a homotopy between the identity function and a constant function.

In this work we will study the relationship between some characteristics of finite graphs and the posible contractibility of some of its Whitney levels. In particular, we are interested in proving that the contractibility of a graph is equivalent to that of its small levels, and that there exists a relationship between the contractibility of large levels and the graph having a cut-point (a point which when removed from the space generates a disconnection).

Keywords: Contractibility, finite graph, hyperspaces, Whitney levels.

Introducción

La teoría de hiperespacios es un área de la topología general que se ocupa de estudiar espacios topológicos obtenidos a partir de colecciones de subconjuntos de un espacio topológico base. Esta área surge de manera casi simultánea con la formalización de la topología moderna a partir del concepto de espacio topológico, lo cual se da a manos del matemático alemán Felix Hausdorff a principios del siglo XX. Esta teoría, enfocada de forma particular en el estudio de los hiperespacios de continuos, empezó a desarrollarse en México en la década de 1980, y desde entonces la escuela mexicana de hiperespacios se ha vuelto una de las más grandes y fuertes del mundo.

El presente trabajo, inspirado en resultados obtenidos por matemáticos mexicanos en [8] y [9], aunado a mi interés personal por la topología algebraica, tiene por objetivo estudiar la posible contractibilidad de ciertos hiperespacios de continuos, es decir, trataremos de aplicar un concepto de topología algebraica a la teoría de hiperespacios. De forma particular, los continuos en los que estamos interesados son las denominadas gráficas finitas, y sus hiperespacios en los que nos enfocaremos son sus niveles de Whitney.

La contractibilidad es una propiedad topológica que se estudia en topología algebraica y que implica ciertas propiedades deseables en un espacio topológico, como por ejemplo, la conexidad por trayectorias. Es un concepto fundamental porque describe a los espacios más simples que se estudian en esta rama de la topología, y por esta misma razón también ha sido estudiada dentro de la teoría de hiperespacios anteriormente. Incluso hay resultados al respecto que se consideran fundamentales en el área, y que por esta misma razón se incluyen en textos introductorios, como en el caso de [5, Capítulo 9].

Dividiremos este trabajo en dos partes, la primera de las cuales estará enfocada en presentar los preliminares de topología general y algebraica necesarios para el desarrollo de la teoría de hiperespacios que se hará posteriormente. El primer capítulo presentará los conceptos, propiedades y resultados más básicos de topología que se utilizarán de manera recurrente a lo largo de la tesis. Para este capítulo se asume que el lector está familiarizado con los fundamentos de la teoría de conjuntos y de lógica.

El segundo capítulo se enfocará en topología algebraica, abordando dos temas importantes. En primer lugar, se presentarán los preliminares de teoría de homotopía necesarios para introducir el concepto de contractibilidad, así como resultados de esta misma área que se utilizarán en la prueba de los teoremas sobre hiperespacios que nos interesan. Asimismo, habrá una sección dedicada a complejos simpliciales en la que se desarrolla su construcción y se enuncian algunas de sus propiedades más importantes, debido a que este concepto tiene una fuerte relación con algunos hiperespacios que se estudiarán más adelante.

El tercer y último capítulo de la primera parte presenta algunos conceptos y resultados relativos a espacios métricos, para después iniciar el estudio de la teoría de continuos. Los conceptos y resultados que aquí se presenten serán aquellos que sean importantes para entender la construcción de los hiperespacios, más que los que se consideran importantes en esta área. También se presenta un breve estudio de las gráficas finitas, pues son los espacios que utilizaremos como base para los hiperespacios de nuestro interés.

La segunda parte es la que está enfocada en la teoría de hiperespacios. El primer capítulo de esta parte, cuarto de la tesis, se ocupará de definir los hiperespacios y de presentar sus propiedades más importantes. En el quinto capítulo nos enfocamos completamente en los niveles de Whitney, que son el principal espacio de nuestro interés, con importante énfasis en los niveles de Whitney de gráficas finitas y en su estructura.

Finalmente, en el sexto capítulo presentaremos los teoremas que nos dan las condiciones bajo las cuales ciertos niveles de Whitney de gráficas finitas son contráctiles, además de un resultado íntimamente ligado con la posible solución de un problema abierto presentado en [8, Pregunta 3.5]. Este problema abierto es de nuestro interés porque se trata del recíproco de uno de los teoremas que presentaremos en este capítulo. Los teoremas que probaremos establecen lo siguiente:

1. Una gráfica finita es contráctil si y sólo si sus niveles de Whitney chicos son contráctiles.

2. Si una gráfica finita tiene un punto de corte, entonces sus niveles de Whitney grandes son contráctiles.

Parte I

Preliminares de topología

Capítulo 1

Topología general

Empezamos nuestro estudio introduciendo las nociones más importantes de topología en las cuales nos apoyaremos a lo largo de este trabajo. Además de las definiciones y resultados más básicos, presentamos las propiedades topológicas en que más nos vamos a apoyar, así como algunos espacios que se construyen mediante otros espacios topológicos y que también nos serán muy útiles.

1.1. Espacios topológicos

Para empezar nuestro estudio, introduciremos el concepto más importante y del cual se desprenden prácticamente todos los siguientes.

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X se llama una **topología de** X si satisface los siguientes axiomas:

1. X y $\emptyset$ pertenecen a $\mathcal{T}$.
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama **espacio topológico**, y a los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama **conjuntos abiertos**. En caso de que se sobreentienda cuál es la topología de X, diremos simplemente que X es un espacio topológico.

Un primer comentario que es importante hacer respecto a esta definición es que cualquier conjunto no vacío admite al menos una topología. De hecho, cuando nuestro conjunto X tiene más de un elemento, existen al menos dos topologías de X, a saber, la colección $\mathcal{I} = \{\emptyset, X\}$, y la colección de todos los subconjuntos de X, denotada por $\mathcal{D}$. A estas topologías se les llama topología indiscreta y topología discreta de X, respectivamente. El hecho de que estas colecciones son topologías es prácticamente trivial a partir de la definición.

Las topologías anteriores no resultan tan interesantes, pero son los primeros ejemplos de topologías que surgen de manera natural. Más adelante presentaremos más formas de encontrar nuevas topologías de un conjunto, con la más importante siendo la topología métrica, a la cual dedicaremos un capítulo completo. Por lo pronto, podemos mencionar que esta topología es la que usualmente se le da a los espacios $\mathbb{R}^n$, misma razón por la que, en este contexto, se le llamará también la topología usual. Adelantamos que a los espacios que se les da una topología de esta forma también se les llama espacios métricos.

Tan sólo la definición de topología es suficiente para empezar a definir muchos conceptos de lo más útiles, de los cuales además se desprende rápidamente una gran variedad de resultados. El primero de estos conceptos posee una dualidad importante con el de conjunto abierto.

Definición 1.2. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es **cerrado** si $X \setminus A$ es abierto.

Utilizando fundamentos de teoría de conjuntos, inmediatamente obtenemos nuestro primer resultado sobre conjuntos cerrados que solamente requiere de la definición de topología y de las leyes de De Morgan.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio topológico. Entonces $\emptyset$ y X son cerrados, y las uniones finitas e intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.*

Claramente la clasificación de los subconjuntos de un espacio topológico como abiertos o cerrados no es exhaustiva, pero existe una forma de asociar a cada subconjunto del espacio, tanto un abierto como un cerrado que podríamos decir son "casi" el mismo que dicho subconjunto. Presentamos en primer lugar a dicho conjunto cerrado.

Definición 1.3. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Definimos la **cerradura de** A, a la cual denotamos por $\overline{A}$, como la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a A. A los elementos de $\overline{A}$ se les llama **puntos adherentes de** A.

A partir de la proposición 1.1 podemos ver que la cerradura de cualquier conjunto A es un conjunto cerrado. Además, es claro que está contenida en cualquier cerrado que contenga a A, por lo que se dice que la cerradura es el cerrado "más pequeño" que contiene a A, lo cual tiene sentido si pensamos que la contención de conjuntos define un orden. En este sentido, es natural que la cerradura de un conjunto nos permita caracterizar a los conjuntos cerrados de la siguiente manera.

Proposición 1.2. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.*

Demostración. Notemos que si $A = \overline{A}$, por lo anterior tenemos que A es cerrado. Supongamos entonces que A es cerrado, y veamos que coincide con su cerradura. Es claro que $A \subseteq \overline{A}$, y como A es un conjunto cerrado que se contiene a sí mismo, tenemos que $\overline{A} \subseteq A$, con lo que concluimos que $A = \overline{A}$. $\square$

Las demostraciones en teoría de conjuntos suelen trabajar con un solo elemento del conjunto a la vez, por lo que aunque la proposición anterior sea muy útil para determinar si un conjunto es cerrado, necesitamos de una herramienta que nos permita caracterizar a los puntos adherentes de un conjunto. Afortunadamente, el siguiente teorema nos proporciona precisamente lo que buscamos.

Teorema 1.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in X$ es punto adherente de A si y sólo si para todo U abierto en X tal que $p \in U$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Notemos en primer lugar que si $x \in A$ entonces es claro tanto que es un punto adherente como que todo abierto que lo contiene intersecta a A. Supongamos entonces que $x \notin A$. Si $x \notin \overline{A}$, entonces tenemos que el abierto $X \setminus \overline{A}$ contiene a x, y claramente $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$. Por otro lado, si existiera un abierto U que contiene a x y tal que $U \cap A = \emptyset$, tendríamos entonces que $X \setminus U$ es un cerrado que contiene a A, por lo que $\overline{A} \subseteq X \setminus U$, y entonces es claro que $x \notin \overline{A}$. $\square$

Aprovechamos este breve estudio de la cerradura de un conjunto para introducir un concepto relacionado que nos será muy útil más adelante, pero que por lo pronto no exploramos.

Definición 1.4. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es **denso en** X si $\overline{A} = X$.

La cerradura de un conjunto es un concepto muy importante y lo estaremos usando de forma recurrente. El concepto prácticamente dual con conjuntos abiertos no es tan útil por si mismo, sino que su fuerza viene cuando se relaciona con otros dos conceptos que ahora presentamos.

Definición 1.5. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$.

1. Decimos que x es **punto interior de** A si existe U abierto en X tal que $x \in U \subseteq A$.
2. Decimos que x es **punto frontera de** A si para todo U abierto en X con $x \in U$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus A)$.
3. Decimos que x es **punto exterior de** A si existe U abierto en X tal que $x \in U \subseteq X \setminus A$.

A los conjuntos de estos puntos se les llama **interior, frontera y exterior de** A, y se les denota por A°, ∂A y $\text{ext}(A)$, respectivamente.

Las primeras propiedades que se obtienen inmediatamente de las definiciones anteriores es que los tres conjuntos que introdujimos son disjuntos entre sí, y además inducen una clasificación exhaustiva de los elementos del espacio. Sin embargo, esto no necesariamente implica que generen una partición, pues puede pasar que para algún conjunto dado, alguno de su interior, su frontera o su exterior sean vacíos.

Por otra parte, es fácil ver que tanto el interior como el exterior de un conjunto son abiertos. De hecho, de forma similar a lo que sucede con la cerradura, podemos pensar en el interior de un conjunto A como en el abierto más grande contenido en A, lo que a su vez implica que todo abierto contenido en A está también contenido en su interior. Una situación similar sucede con el exterior de un conjunto y su complemento. Una última propiedad que vale la pena mencionar por su similitud con la cerradura, es que se puede caracterizar a un conjunto abierto a partir de su interior, pues se tiene que un conjunto es abierto si y sólo si coincide con su interior.

Ahora, siendo que estamos entendiendo al exterior de un conjunto como el abierto más grande contenido en su complemento, y a la cerradura como el cerrado más pequeño que lo contiene, la dualidad entre abiertos y cerrados sugiere que existe una relación importante entre estos conceptos, lo cual efectivamente resulta ser cierto.

Teorema 1.2. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$.*

Demostración. Notemos que como $\text{ext}(A)$ es abierto, tenemos que $X \setminus \text{ext}(A) = A^\circ \cup \partial A$ es cerrado. Además, por definición tenemos que $\text{ext}(A) \subseteq X \setminus A$, lo que implica que $A \subseteq A^\circ \cup \partial A$, y entonces por propiedades de la cerradura tenemos que $\overline{A} \subseteq A^\circ \cup \partial A$. Por otra parte, si tomamos $x \in A^\circ \cup \partial A$ tenemos por definición que todo abierto que contiene a x también debe intersectar a A, lo que por el teorema 1.1 nos dice que $x \in \overline{A}$, y por lo tanto $A^\circ \cup \partial A \subseteq \overline{A}$. Por lo anterior, concluimos que $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$. $\square$

Hasta ahora hemos relacionado a los subconjuntos de un espacio topológico con los elementos de la topología y los demás conceptos que de ellos se desprenden, pero esta no es la única forma de estudiarlos a los ojos de la topología. Posiblemente la forma más natural es preguntarnos por ellos mismos como espacio topológico, y la forma más sencilla de hacer esto es dotarlos de una topología a partir de la del espacio que lo contiene.

Definición 1.6. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Definimos la **topología relativa de** Y, o **topología de subespacio de** Y, como la colección

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}.$$

Para poder trabajar de esta forma con un subconjunto de un espacio topológico, es importante primero asegurarnos de que efectivamente se trata de un espacio topológico.

Proposición 1.3. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subseteq X$. La topología relativa de Y es una topología de Y.*

Demostración. En primer lugar, como $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, tenemos entonces por definición que $Y \cap \emptyset = \emptyset, Y \cap X = Y \in \mathcal{T}_Y$, por lo que $\mathcal{T}_Y$ satisface el primer axioma de topología.

Ahora, sea $\{Y \cap U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una subcolección arbitraria de elementos de $\mathcal{T}_Y$. Tenemos entonces que

$$\bigcup_{\alpha \in J} (Y \cap U_\alpha) = Y \cap \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right),$$

por lo que la unión de los elementos de la subcolección se puede expresar como la intersección de Y con un elemento de $\mathcal{T}$, y entonces por definición pertenece a $\mathcal{T}_Y$.

Finalmente, si $Y \cap U_1, \ldots, Y \cap U_n \in \mathcal{T}_Y$, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} (Y \cap U_i) = Y \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right),$$

por lo que un argumento análogo al anterior nos permite concluir que esta intersección pertenece a $\mathcal{T}_Y$.

Por todo lo anterior, concluimos que $\mathcal{T}_Y$ es una topología de Y. □

Antes de seguir, es importante mencionar que no todas las propiedades que pueda tener un conjunto se heredan cuando pasamos a considerarlas dentro de un subespacio o viceversa. Por ejemplo, un conjunto puede ser abierto en el subespacio, pero no serlo en el espacio que lo que contiene. Esto solo coincide necesariamente cuando el subespacio es un subconjunto abierto del espacio original, y una situación análoga sucede con los conjuntos cerrados.

El siguiente concepto que vamos a introducir es uno cuyo objetivo principal podríamos decir es simplificar la forma en que trabajamos en un espacio topológico.

Definición 1.7. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una **base de $\mathcal{T}$** si para cualquier $U \in \mathcal{T}$ y para todo $p \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B \subseteq U$. A los elementos de $\mathcal{B}$ se les llama **abiertos básicos de $\mathcal{T}$**.

El objetivo de una base es no tener que describir a todos los abiertos que conforman una topología, pues en ocasiones esto puede llegar a ser un tanto difícil. En su lugar, más bien describimos a unos pocos abiertos, a partir de los cuales se genera toda la topología. Esto es útil porque en todos los teoremas que hemos trabajado hasta ahora, y que trabajaremos más adelante, en lugar de trabajar con todos los abiertos, nos podemos enfocar específicamente en los básicos, y todos los resultados siguen siendo válidos de esta forma.

Este concepto también es útil porque nos da una forma de generar nuevas topologías de un conjunto. En lugar de verificar que una colección de subconjuntos satisface los axiomas de topología para obtener una topología, basta con enfocarse en una colección más pequeña y verificar que se satisfacen las condiciones del siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de un conjunto no vacío X. Si $\mathcal{B}$ satisface que*

1. *para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, y*

2. *para todo $x \in X$ que se encuentra en la intersección de dos elementos B_1, B_2 de $\mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,*

entonces $\mathcal{B}$ es una base para alguna topología de X.

Demostración. Sea $\mathcal{T}$ la colección de todas las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$. Por la primer hipótesis sobre $\mathcal{B}$, tenemos que la unión de todos los elementos de $\mathcal{B}$ es igual a X, y entonces $X \in \mathcal{T}$. Por otro lado, como la unión vacía de elementos de $\mathcal{B}$ es igual al vacío, tenemos que $\emptyset \in \mathcal{T}$. Esto nos dice que $\mathcal{T}$ satisface el primer axioma de topología. El segundo axioma se satisface de manera trivial a partir de la definición de $\mathcal{T}$.

Para probar que se satisface el tercer axioma de topología basta con considerar dos elementos $U, V \in \mathcal{T}$ y probar que $U \cap V \in \mathcal{T}$, pues el caso de la intersección de cualquier cantidad finita de elementos de $\mathcal{T}$ se sigue por inducción. Supongamos que $U = \bigcup_{i \in J_1} B_i$ y $V = \bigcup_{j \in J_2} B_j$. Entonces tenemos que

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i \in J_1} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J_2} B_j \right) = \bigcup_{i \in J_1} \left(B_i \cap \bigcup_{j \in J_2} B_j \right) = \bigcup_{i \in J_1} \bigcup_{j \in J_2} B_i \cap B_j,$$

por lo que si $x \in U \cap V$, entonces $x \in B_i \cap B_j$ para algún $i \in J_1$ y algún $j \in J_2$. Luego, por hipótesis existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq B_i \cap B_j \subseteq U \cap V$, a partir de lo cual es fácil ver que $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} B_x$, y por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Por todo lo anterior tenemos que $\mathcal{T}$ es una topología de X, y a partir de la hipótesis es inmediato que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$. $\square$

A pesar de la utilidad del teorema anterior, existe una forma mucho más sencilla de definir una topología en un conjunto, la cual involucra otro concepto similar al de base.

Definición 1.8. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{S}$ es una **subbase de $\mathcal{T}$** si la colección de conjuntos que son intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ forman una base de $\mathcal{T}$.

Las subbases son para una base muy similares a lo que las bases son para la topología, aunque nosotros no las usaremos tanto como las bases. La principal utilidad que tienen es que cualquier colección de subconjuntos de un conjunto es una subbase para una topología, por lo que es realmente sencillo encontrar topologías a partir de una subbase. Lo único que se hace para probar este hecho, es que la colección de intersecciones finitas de elementos de una subbase satisface las hipótesis del teorema anterior. Esta demostración se puede encontrar en [11, Teorema 6.2].

Para probar este hecho se trabaja bajo la convención de que la intersección vacía de subconjuntos da el total del conjunto. Algunos autores, en lugar de hacer esto, ponen la condición de que la unión de los elementos de la subbase sea el total del conjunto, como por ejemplo en [14, Sección 2.2].

Los últimos conceptos básicos que introduciremos en esta sección son dos de los llamados axiomas de separación. Estos axiomas son propiedades que tienen algunos espacios topológicos de separar a sus elementos mediante conjuntos abiertos. Nosotros solamente introduciremos dos de ellos, que son los que utilizaremos más adelante.

Definición 1.9. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un **espacio de Hausdorff** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen abiertos ajenos U, V en X tales que $x \in U$ y $y \in V$.

El ser Hausdorff es una propiedad fundamental para muchos resultados, como iremos viendo más adelante. Los resultados que hasta ahora hemos desarrollado no se ven afectados si se les añade la hipótesis de que el espacio sea Hausdorff, pero hay otros para los que juega un papel fundamental.

Definición 1.10. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un **espacio normal** si para todo par de cerrados ajenos F_1 y F_2 en X, existen abiertos ajenos U y V en X tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$.

El axioma de normalidad es uno que utilizaremos mucho menos que el de ser Hausdorff en este trabajo, pero aún así tendrá algunas aplicaciones importantes. Por lo pronto, presentamos un teorema relacionado con la normalidad que usaremos más adelante.

Teorema 1.4. *Sea X un espacio normal. Entonces para todo par de conjuntos F y U tales que F es cerrado, U es abierto y $F \subseteq U$, existe un abierto V de X tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Sea $F' = X \setminus U$, que es cerrado. Claramente se tiene que $F \cap F' = \emptyset$, así que por la normalidad de X podemos tomar dos abiertos ajenos V y V' en X tales que $F \subseteq V$ y $F' \subseteq V'$. Notemos que como estos conjuntos son ajenos, se tiene que $V \subseteq X \setminus V'$, y como $X \setminus V'$ es cerrado por definición, utilizando propiedades de la cerradura tenemos que $V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus V'$. Por otra parte, como $F' \subseteq V'$, tenemos que $X \setminus V' \subseteq X \setminus F' = U$. Por lo tanto, concluimos que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. $\square$

1.2. Continuidad

El siguiente paso en nuestro estudio de preliminares topológicos se basa en las interacciones entre espacios. Esto lo hacemos mediante funciones, pero no estamos interesados en cualquier función. Queremos estudiar funciones que se comporten de buena manera con la topología de los espacios que relacionan. Es para esto que introducimos el concepto de continuidad de una función.

Definición 1.11. Sean X y Y espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es **continua** si para todo U abierto en Y, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Un primer comentario que se puede hacer acerca de este concepto es que, gracias a la dualidad entre abiertos y cerrados, también puede ser enunciada en términos de conjuntos cerrados.

Proposición 1.4. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si para todo F cerrado en Y, se tiene que $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que f es continua, y sea $F \subseteq Y$ cerrado. Entonces $Y \setminus F$ es abierto, por lo que por la continuidad de f tenemos que $f^{-1}(Y \setminus F)$ es abierto en X. Pero como $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$, entonces $X \setminus (X \setminus f^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$ es cerrado. La otra implicación se prueba de manera análoga. $\square$

Siendo que estamos reduciendo la cantidad de funciones que nos interesa estudiar al proponer la condición de continuidad, es natural preguntarse si al operar de forma natural con ellas, es decir, componiéndolas, el resultado también resulta ser una función continua. Afortunadamente para nosotros, la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

Teorema 1.5. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas. Entonces $h = g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Demostración. Tomemos $U \subseteq Z$ abierto. Por continuidad de g tenemos que $g^{-1}(U)$ es abierto en Y, y entonces por continuidad de f tenemos que $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X. Luego, como tenemos que $h^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(U) = (f^{-1} \circ g^{-1})(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$, esto significa que $h^{-1}(U)$ es abierto, y entonces h es continua. $\square$

La anterior no es la única forma de combinar funciones continuas para obtener una nueva función continua. El siguiente lema nos da una forma muy útil de hacerlo, y que utilizaremos de forma recurrente.

Lema 1.1 (Del pegado)**.** *Sean X y Y subespacios cerrados del espacio topológico $X \cup Y$, y sea Z un espacio topológico. Sean $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \cap Y$. Entonces la función $f \cup g : X \cup Y \to Z$ dada por $(f \cup g)(x) = f(x)$ si $x \in X$ y $(f \cup g)(x) = g(x)$ si $x \in Y$ es continua.*

Demostración. Sea $F \subseteq Z$ cerrado. Es claro a partir de la definición de $f \cup g$ que $(f \cup g)^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$. Ahora, por la continuidad de f y g, tenemos que $f^{-1}(F)$ y $g^{-1}(F)$ son cerrados en X y Y, respectivamente. Pero como X y Y son cerrados en $X \cup Y$, esto significa que $f^{-1}(F)$ y $g^{-1}(F)$ también son cerrados en $X \cup Y$, por lo que $(f \cup g)^{-1}(F)$ es unión de cerrados, y por lo tanto cerrado. A partir de lo anterior, y por la proposición 1.4 concluimos que $f \cup g$ es continua. $\square$

Cabe mencionar que el lema anterior también vale cuando los subespacios son abiertos y la prueba es análoga, solo sin la necesidad de utilizar la proposición 1.4.

La definición de continuidad trabaja con imágenes inversas de conjuntos, por lo que naturalmente surge la pregunta de cómo son las funciones que satisfacen la misma definición pero con imágenes directas. Este es un concepto que, aunque no es tan fuerte como el de continuidad, también es importante de estudiar. Se puede definir un concepto análogo para el caso de conjuntos cerrados, aunque ya no es equivalente como con la continuidad.

Definición 1.12. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es **abierta** si para todo abierto U en X, se tiene que $f(U)$ es abierto en Y.

Como mencionamos al principio de la sección, la continuidad nos ayuda a estudiar interacciones entre espacios topológicos. La forma más importante en que se da esta interacción es cuando se puede relacionar a los elementos de los dos espacios de forma biyectiva, y ademas se respetan las topologías, de forma que ambos espacios resultan ser esencialmente el mismo desde una perspectiva topológica.

Definición 1.13. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que X y Y son **homeomorfos**, lo cual denotamos por $X \cong Y$, si existe una función $h : X \to Y$ continua y biyectiva cuya inversa también es continua. A la función h se le llama **homeomorfismo**.

Es fácil ver que un homeomorfismo es también una función abierta y cerrada, por lo que tiene mucho sentido que sea la función que mejor respeta la topología de los espacios que relaciona. Como mencionamos, la idea de que dos espacios sean homeomorfos la interpretamos como que son el mismo de acuerdo a sus propiedades topológicas. Esto hace que sea natural intentar clasificar a los espacios mediante homeomorfismos, así que podemos definir una relación en el conjunto de espacios topológicos a partir de este concepto, la cual nos ayude a separar los espacios de forma adecuada. Esto significa que tenemos que verificar que esta relación es de equivalencia.

Proposición 1.5. *La relación de homeomorfismo define una relación de equivalencia en el conjunto de los espacios topológicos.*

Demostración. Si X es un espacio topológico, entonces la función identidad Id_X es trivialmente continua y es su propia inversa, por lo que $X \cong X$, y la relación es reflexiva.

Si X y Y son espacios topológicos y $h : X \to Y$ es homeomorfismo, entonces $h^{-1} : Y \to X$ también es homeomorfismo, por lo que $Y \cong X$ y la relación es simétrica.

Sean X, Y y Z espacios topológicos y $h_1 : X \to Y,\ h_2 : Y \to Z$ homeomorfismos, de modo que $X \cong Y$ y $Y \cong Z$. Consideremos la función $h = h_2 \circ h_1 : X \to Z$, que es continua por ser composición de funciones continuas. Además, sabemos que su inversa es $h^{-1} = (h_2 \circ h_1)^{-1} = h_1^{-1} \circ h_2^{-1}$, que también es continua por la misma razón. Luego, h es un homeomorfismo, por lo que $X \cong Z$, y la relación es transitiva.

Por lo anterior, concluimos que la relación de homeomorfismo es una relación de equivalencia. □

Utilizando el concepto de homeomorfismo y la relación que induce entre los espacios topológicos se puede empezar a nombrar ciertas clases de equivalencia de espacios que tienen ciertas propiedades importantes. Ejemplificamos esto mediante el siguiente concepto.

Definición 1.14. Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo $I = [0, 1]$ con la topología heredada por la topología métrica en $\mathbb{R}$.

Es importante recalcar de esta definición que a partir de ahora reservaremos la letra I para denotar estrictamente al intervalo.

Los arcos son espacios muy importantes por ciertas propiedades que aún no hemos definido. Además, se puede probar que para cualquier arco L, existen dos puntos $x, y \in L$ tales que para cualquier homeomorfismo $h : I \to L$ se tiene que $h(\{0, 1\}) = \{x, y\}$. Estos puntos son de vital importancia para la estructura del arco, y se les llama extremos de L. Más adelante ahondaremos en el estudio de estos espacios conforme definamos sus propiedades.

Para terminar esta sección introducimos un concepto muy similar al de homeomorfismo, pero que trabaja con subespacios de un espacio topológico.

Definición 1.15. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que X se puede **encajar en** Y si existe un subespacio Z de Y homeomorfo a X. Si $f : X \to Z$ es un homeomorfismo, decimos que es un **encaje de** X **en** Y, y esto lo denotamos por $f : X \hookrightarrow Y$.

La idea de encajar un espacio en otro es útil porque, cuando esto es posible, podemos imaginarnos que uno de los conjuntos es un subespacio del otro, de forma que se vuelve más sencillo trabajar con ellos.

1.3. Propiedades topológicas

En la sección anterior introdujimos el concepto de homeomorfismo y dijimos que nos ayuda a clasificar espacios porque respeta sus estructuras topológicas. Siguiendo con esta idea, existen propiedades que también son respetadas por los homeomorfismos, y por eso reciben el siguiente nombre.

Definición 1.16. Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ es una **propiedad topológica** o un **invariante topológico** si cada que dos espacios X y Y son homeomorfos y X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces Y también tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Los ejemplos más triviales de propiedades topológica son el ser abierto o cerrado, pues precisamente en este tipo de conjuntos se encuentra la estructura del espacio. Otro ejemplo de una propiedad topológica es uno que ya introdujimos con anterioridad.

Teorema 1.6. *Ser espacio de Hausdorff es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean X y Y espacios homeomorfos, donde X es Hausdorff, y sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Tomemos dos puntos distintos $x, y \in Y$. Como X es Hausdorff, existen abiertos ajenos U y V de X tales que $h^{-1}(x) \in U$ y $h^{-1}(y) \in V$. Luego, como h es un homeomorfismo, y por lo tanto una función abierta, tenemos que $h(U)$ y $h(V)$ son abiertos en Y, y además son ajenos ya que h es biyectiva. Luego, como claramente $x \in h(U)$ y $y \in h(V)$, concluimos que Y es Hausdorff. $\square$

Las propiedades topológicas son herramientas muy poderosas para determinar cuándo dos conjuntos no son homeomorfos, pues es más sencillo revisar si dos conjuntos poseen una propiedad, a analizar las funciones entre ellos. A nosotros nos interesan de forma particular dos propiedades topológicas que son posiblemente las más importantes, y que estudiamos a continuación.

1.3.1. Compacidad

La compacidad es una propiedad muy importante, pero no tan intuitiva. De hecho, existen varios conceptos relacionados con la compacidad, que históricamente también han sido llamados compacidad, y que incluso se presentan como la definición de compacidad en ciertos textos cuando resultan ser equivalentes en un concepto específico. Uno de estos lo presentaremos cuando estudiemos espacios métricos. Por lo pronto nos ocuparemos solamente de la definición que ya es estándar, pero primero necesitamos algunos conceptos previos.

Definición 1.17. Sea X espacio topológico. Una colección $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de subconjuntos de X se llama una **cubierta de** X si $X \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} G_\alpha$. En particular, si los elementos de $\mathcal{G}$ son abiertos, a $\mathcal{G}$ se le llama **cubierta abierta de X**. Si existe una subcolección propia de $\mathcal{G}$ que también es cubierta de X, decimos que $\mathcal{G}$ es **reducible**, y a la subcolección se le llama **subcubierta**.

Al juntar las ideas de la definición anterior, obtenemos la definición de compacidad.

Definición 1.18. Sean X espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es **compacto en** X si cualquier cubierta abierta de A es reducible a una subcubierta finita.

Notemos que hemos definido la compacidad para un subconjunto de un espacio topológico, pero nada nos impide hacerlo para el espacio completo, lo cual sería un caso particular de la definición que presentamos. Esto realmente es indiferente, pues como veremos a continuación, la compacidad no depende de si el espacio está contenido en otro.

Teorema 1.7. *Sean X espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A es compacto en X si y sólo si es compacto en sí mismo con la topología relativa.*

Demostración. Supongamos en primera instancia que A es compacto en X. Tomemos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una cubierta de A cuyos elementos son abiertos en A. Para cada $\alpha \in J$, sea U'_α abierto en X tal que $U_\alpha = U'_\alpha \cap A$. Entonces tenemos que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J}(U'_\alpha \cap A) = A \cap \bigcup_{\alpha\in J} U'_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} U'_\alpha,$$

lo que significa que $\{U'_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una cubierta abierta de A en X. Luego, por compacidad podemos tomar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in J$ de modo que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U'_{\alpha_i}$, y entonces tenemos que

$$A \subseteq A \cap \bigcup_{i=1}^{n} U'_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n}(U'_{\alpha_i} \cap A) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i},$$

lo que prueba que $\mathcal{U}$ fue reducible a una subcubierta finita, y A es compacto con su topología relativa.

Supongamos ahora que A es compacto con su topología relativa. Tomemos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una cubierta abierta de A en X. Tenemos entonces que

$$A \subseteq A \cap \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J}(U_\alpha \cap A),$$

lo que significa que $\{U_\alpha \cap A\}_{\alpha \in J}$ es una cubierta abierta de A en su topología relativa. Luego, por compacidad existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in J$ que satisfacen

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\alpha_i} \cap A) = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i},$$

lo que significa que $\mathcal{U}$ fue reducible a una subcubierta finita, y entonces A es compacto en X. $\square$

Como ya mencionamos, nuestro principal interés en la compacidad radica en que es una propiedad topológica. Esto no lo probaremos directamente, sino que nos enfocamos en una propiedad aún más fuerte.

Teorema 1.8. *Sean X y Y espacios topológicos tales que X es compacto y sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta abierta de $f(X)$. Entonces tenemos que $\mathcal{U}' = \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ es una cubierta abierta de X, pues por continuidad $f^{-1}(U_\alpha)$ es abierto en X para todo $\alpha \in J$, y para cada $x \in X$ tenemos que $f(x) \in U_\alpha$ para algún α, por lo que $x \in f^{-1}(U_\alpha)$, y entonces $\mathcal{U}'$ cubre a X. Luego, por compacidad podemos tomar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ tales que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})$, y entonces tenemos que

$$f(X) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

Por lo tanto, hemos reducido a $\mathcal{U}$ a una subcubierta finita, y entonces concluimos que $f(X)$ es compacto. $\square$

De este teorema se desprende inmediatamente el resultado que nos interesa.

Corolario 1.1. *La compacidad es una propiedad topológica.*

Probablemente el ejemplo más sencillo de un espacio compacto son los espacios finitos, pues para cada cubierta basta tomar un elemento por cada punto del espacio para obtener una subcubierta finita. Otro ejemplo no tan sencillo, pero que es bien conocido, es el intervalo I. Este ejemplo nos es muy útil para conocer más espacios compactos utilizando el teorema anterior. Otra forma de obtener ejemplos de espacios compactos a partir de un espacio compacto es fijarse en algunos de sus subespacios, pues aunque no todos serán compactos, basta que tengan una propiedad muy sencilla para que afirmemos su compacidad.

Teorema 1.9. *Sean X un espacio compacto y $F \subseteq X$ cerrado. Entonces F es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta abierta de F. Entonces $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta de X, pues $X \setminus F$ es abierto por definición, y tenemos que

$$X = F \cup (X \setminus F) \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in j} U_\alpha \right) \cup (X \setminus F).$$

Luego, por la compacidad de X podemos tomar $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in J$ tales que $X \subseteq (\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \cup (X \setminus F)$, lo que nos permite concluir que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$, ya que F y $X \setminus F$ son disjuntos. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ fue reducible a una subcubierta finita, y entonces concluimos que F es compacto. □

De este teorema podemos ver que existe una fuerte relación entre conjuntos compactos y cerrados. Como veremos a continuación, esta relación es aún más fuerte en espacios de Hausdorff.

Teorema 1.10. *Sean X un espacio de Hausdorff y $A \subseteq X$ compacto. Entonces A es cerrado.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus A$. Para cada $a \in A$, sean U_a, V_a abiertos disjuntos tales que $x \in U_a$ y $a \in V_a$. Es claro que $\{V_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A, así que por compacidad existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$. Sea $U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$, que es abierto y contiene a x. Supongamos que existe $y \in U \cap A$. Entonces $y \in V_{a_i}$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, pero por definición de U también tenemos que $y \in U_{a_i}$, lo cual contradice el hecho de que U_{a_i} y V_{a_i} son disjuntos. Luego, $x \in U \subseteq X \setminus A$, por lo que x es punto interior de $X \setminus A$, y al haber sido x arbitrario, esto nos permite concluir que todos los puntos de $X \setminus A$ son puntos interiores. Por lo tanto, $X \setminus A$ es abierto, y entonces A es cerrado. □

Estos dos teoremas nos dicen que cuando estamos trabajando en un espacio compacto de Hausdorff, hablar de conjuntos cerrados y conjuntos compactos es equivalente. Esto es importante para nosotros, pues más adelante nos dedicaremos exclusivamente a este tipo de espacios. No solamente esto, sino que también de ellos se desprende el siguiente resultado que será muy importante.

Teorema 1.11. *Sean X un espacio compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función continua e inyectiva, entonces $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Notemos que la única condición que nos falta para verificar que f es un homeomorfismo es la continuidad de $f^{-1} : f(X) \to X$. Para esto, tomemos $F \subseteq X$ cerrado. Como X es compacto, entonces F también es compacto. Además, como f es biyectiva, tenemos que $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$, así que por la continuidad de f tenemos que $(f^{-1})^{-1}(F)$ es compacto. Luego, como $f(F) \subseteq Y$ y Y es Hausdorff, tenemos que $f(F)$ es cerrado, lo que prueba que f^{-1} es continua, y por lo tanto f es un homeomorfismo. □

Para terminar este primer acercamiento a los espacios compactos, presentamos una última forma de obtener espacios compactos a partir de algunos ya dados.

Teorema 1.12. *Sea X un espacio topológico, y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$ compactos. Entonces $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta abierta de A. Como $A_i \subseteq A$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $\mathcal{U}$ también es una cubierta de A_i para cada i. Luego, por compacidad podemos tomar n subcubiertas finitas $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ de $\mathcal{U}$ tales que $\mathcal{U}_i$ es una cubierta de A_i para cada i. Sea $\mathcal{U}' = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$, que es finito, y afirmamos también es una cubierta de A.

Sea $a \in A$. Entonces $a \in A_i$ para algún, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, lo que significa que pertenece a un elemento de $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}$. Con esto se prueba que que $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$, por lo que hemos reducido a $\mathcal{U}$ a una subcubierta finita, y por lo tanto concluimos que A es compacto. □

1.3.2. Conexidad

La siguiente propiedad topológica en la que nos queremos enfocar, la conexidad, es bastante más intuitiva, e incluso su definición es natural cuando pensamos en la forma en que usamos los abiertos en los axiomas de separación precisamente para separar elementos del espacio. En este caso, la idea que queremos transmitir mediante la conexidad es que un espacio tiene "un sólo pedazo", el cual no puede ser separado mediante abiertos.

Definición 1.19. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es **disconexo** si existen dos abiertos no vacíos U y V en X tales que $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$, $A \subseteq U \cup V$ y $U \cap V \subseteq X \setminus A$. En ese caso, decimos que los abiertos U y V generan una **separación de** A. Si A no es disconexo, decimos que es **conexo**.

Cabe mencionar que esta no es la única forma de definir la conexidad. La otra definición más común que se puede encontrar en la literatura involucra el concepto de conjuntos separados, el cual no presentaremos en este trabajo debido a que no nos será de utilidad. El lector interesado puede consultar esta definición alternativa en [16, Definición 2.45].

El hecho de que la definición de conexidad sea presentada de forma negativa hace que la forma de trabajar con espacios conexos no sea directa, es decir, lo que se hace en la mayoría de los teoremas es trabajar con espacios disconexos, ya sea que esto signifique trabajar con la contrapositiva del teorema, o por contradicción. Podemos ejemplificar esto a partir de nuestro siguiente teorema, el cual nos dice que, similarmente a la compacidad, la conexidad no depende de en qué espacio esté contenido un subespacio conexo.

Teorema 1.13. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A es conexo en X si y sólo si A es conexo en sí mismo con la topología relativa.*

Demostración. Supongamos primero que A no es conexo con su topología relativa. Esto significa que existen U y V abiertos en A que lo separan. Sean $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $U = A \cap U'$ y $V = A \cap V'$. Tenemos entonces que $A \subseteq U \cup V \subseteq U' \cup V'$, y además el hecho de que $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$ implica que $A \cap U' \neq \emptyset \neq A \cap V'$. Además, tenemos que $(U' \cap V') \cap A = (U' \cap A) \cap (V' \cap A) = U \cap V = \emptyset$, esto último debido a que $U, V \subseteq A$ pero su intersección debe estar fuera de A, con lo que debe ser vacía. Lo anterior significa que U' y V' son una separación de A, y por lo tanto A es disconexo en X.

Supongamos ahora que A es disconexo en X, y tomemos dos abiertos U y V en X que separan a A. Sean $U' = U \cap A$ y $V' = V \cap A$, que son abiertos en A, y además no vacíos por la definición de separación. Más aún, se tiene que son disjuntos, pues de lo contrario tendríamos que $\emptyset \neq U' \cap V' = (U \cap V) \cap A$, que sabemos no es cierto. Finalmente, como $A \subseteq U \cup V$, en particular se tiene que $A \subseteq (U \cup V) \cap A = U' \cap V'$, por lo que tenemos que U' y V' son una separación de A en sí mismo, y por lo tanto A es disconexo con su topología relativa. $\square$

Notemos que el teorema anterior nos permite replantear la definición de conexidad, o más bien, de espacio disconexo, considerándolo como un espacio topológico que no está contenido propiamente en otro. Según la idea que presentamos en este teorema, un espacio es disconexo si puede ser expresado como la unión de dos abiertos no vacíos y ajenos. Cuando trabajemos con un espacio que no está contenido en otro, será esta la definición a la que recurramos.

A pesar de que el teorema anterior nos dice que la conexidad depende solamente de la topología relativa del conjunto, esto no significa que sea una propiedad que se aísle de las propiedades del espacio. En particular, podemos ver esto en el siguiente teorema.

Teorema 1.14. *Sean X un espacio disconexo, U y V una separación de X, y $B \subseteq X$ conexo. Entonces $B \subseteq U$ o $B \subseteq V$.*

Demostración. Supongamos que $B \cap U \neq \emptyset$ y $B \cap V \neq \emptyset$. Como $X = U \cup V$, tenemos que $B \subseteq U \cup V$, por lo que para que U y V no separen a B se debe tener que $B \cap (U \cap V) \neq \emptyset$, lo cual no es posible dado que U y V son ajenos porque separan a X. Por lo tanto, alguno de $B \cap U$ o $B \cap V$ debe ser vacío, lo que implica que $B \subseteq U$ o $B \subseteq V$. □

Como mencionamos anteriormente, la forma de definir la conexidad no es única. Otra de las posibles definiciones la presentamos a continuación como una caracterización que nos será muy útil más adelante.

Teorema 1.15. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es conexo si y sólo si los únicos conjuntos abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que X es conexo, pero que existe un conjunto no vacío $U \subsetneq X$ que es abierto y cerrado en X. Sea $V = X \setminus U$, que es abierto por ser U cerrado. Entonces es claro que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cup V$, y como ambos U y V son no vacíos, tenemos que generan una separación de X, contradiciendo su conexidad.

Supongamos ahora que los únicos subconjuntos de X abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X, pero que existen dos conjuntos U y V abiertos que separan a X. Notemos que entonces dichos conjuntos son ajenos, y como separan a X, tenemos que $U \cup V = X$. Luego, esto significa que $X \setminus V = U$, por lo que tenemos que U es abierto y cerrado a la vez. Claramente $U \neq \emptyset$ por hipótesis, lo que implica que $U = X$. Pero entonces $V = X \setminus U = \emptyset$, lo cual es una contradicción, y por lo tanto X es conexo. □

Recordemos como en el teorema 1.12 presentamos una forma de obtener nuevos conjuntos compactos a partir de la unión de compactos. Para la conexidad se puede hacer una cosa similar, aunque las hipótesis naturalmente serán diferentes.

Teorema 1.16. *Sean X espacio topológico y $\{A_i\}_{i \in J}$ una colección de subconjuntos conexos de X. Si $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$, entonces $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que A no es conexo, y sean U y V una separación de A. Tomemos $p \in \bigcap_{i \in J} A_i$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $p \in U$, lo que a su vez implica que $p \notin V$. Esto significa que $A_i \cap U \neq \emptyset$ para todo $i \in J$, y entonces por el teorema 1.14 tenemos que $A_i \subseteq U$ para todo $i \in J$. Luego, esto implica que $A \subseteq U$, pero entonces tenemos que $(U \cap V) \cap A = V \cap (U \cap A) = V \cap A \neq \emptyset$, lo cual contradice que U y V separan a A. Por lo tanto, concluimos que A es conexo. □

Con el teorema anterior obtuvimos nuevas formas de obtener espacios conexos, pero para poder aplicarlo, lo primero que necesitamos es conocer algunos ejemplos. Los más sencillos son los espacios de un solo punto, pues en su topología no existen dos abiertos no vacíos. Para buscar algún ejemplo más complicado, nuevamente recurrimos a I como un ejemplo sencillo de un espacio conexo. De hecho, se puede probar que todos los conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ con la topología usual son los intervalos. Una prueba de este hecho se puede encontrar en [16, Teorema 2.47]. El siguiente teorema nos presenta otra forma sencilla de obtener conjuntos conexos a partir de otros ya conocidos.

Teorema 1.17. *Sean X espacio topológico y $A \subseteq X$ conexo. Si $B \subseteq X$ es tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo. En particular, $\overline{A}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que B no es conexo, y sean U y V una separación de B. Por el teorema 1.14, tenemos que $A \subseteq U$ o $A \subseteq V$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \subseteq U$. Entonces tenemos que $A \cap V = \emptyset$, por lo que $A \subseteq X \setminus V$, el cual es cerrado, y entonces por propiedades de la cerradura tenemos que $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \subseteq X \setminus V$. Pero esto significa que $B \cap V = \emptyset$, lo cual no puede ser porque U y V separan a B. A partir de esta contradicción concluimos que B es conexo. □

Todavía nos falta el teorema importante que justifica la inclusión de la conexidad en esta sección. Al igual que con la compacidad, el hecho de que la conexidad es una propiedad topológica es más bien consecuencia de un teorema más fuerte.

Teorema 1.18. *Sean X y Y espacios topológicos tales que X es conexo y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(X)$ no es conexo, y sean U y V abiertos en $f(X)$ que lo separan. Por la continuidad de f tenemos que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X, y además es claro que $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Más aún, como U y V son disjuntos, tenemos que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ también lo son, lo que por definición significa que son una separación de X. Como esto no es posible al ser X conexo, concluimos que $f(X)$ también debe ser conexo. □

Corolario 1.2. *La conexidad es una propiedad topológica.*

Aún en un espacio disconexo hay subespacios conexos que vale la pena estudiar. Estos subespacios que nos interesan son los que consideramos como los "más grandes" en el sentido de que no están contenidos en otro subespacio conexo. Para decir esto de manera formal, introducimos un concepto relativo a las relaciones de orden que no es realmente necesario, pero que será muy útil más adelante, y entonces consideramos que vale la pena empezar a trabajar con él.

Definición 1.20. Sea Y un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $a \in Y$ se llama **maximal** si no existe un elemento $y \in Y$ diferente de a tal que $a \leq y$.

Definición 1.21. Sean X un espacio topológico y $C \subseteq X$. Decimos que C es una **componente conexa de** X, o simplemente **componente**, si es maximal en el conjunto de los subespacios conexos de X ordenado por contención.

Sobre las componentes de un espacio se puede decir mucho, tanto de su propia estructura topológica, como de la que inducen en el espacio que las contiene. Lo primero que veremos es una consecuencia inmediata de un teorema que ya probamos.

Proposición 1.6. *Las componentes de un espacio topológico son cerradas.*

Demostración. Sea X un espacio topológico, y sea C una componente de X. Por el teorema 1.17 tenemos que $\overline{C}$ también es conexo, pero entonces C está contenido en otro espacio conexo, lo que por su maximalidad implica que $C = \overline{C}$, y entonces C es cerrado. □

Ahora veremos cómo es la estructura de un espacio relativo a sus componentes. Lo primero que veremos es que las componentes inducen una partición del espacio. Esto normalmente se suele hacer mediante relaciones de equivalencia, pero para nosotros bastará con ver que son disjuntas dos a dos.

Proposición 1.7. *Las componentes de un espacio topológico son disjuntas dos a dos.*

Demostración. Sean C_1 y C_2 componentes distintas de un espacio topológico X. Supongamos que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, lo que por el teorema 1.16 significa que $C_1 \cup C_2$ es conexo. Pero como $C_1, C_2 \subseteq C_1 \cup C_2$, por la maximalidad de las componentes tenemos que $C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2$, lo que contradice el hecho de que las componentes son distintas. Por lo tanto, concluimos que las componentes son disjuntas. □

Al haber partido el espacio mediante componentes, es lógico pensar que esto también separa algunos elementos del espacio cuando hablamos de conexidad. Esto es precisamente lo que probamos en el siguiente resultado.

Teorema 1.19. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ conexo. Entonces A está contenido en una componente de X.*

Demostración. Supongamos que A intersecta a dos componentes C_1 y C_2 de X. Por el teorema 1.16 tenemos que $A \cup C_1$ es conexo, y entonces por el mismo teorema $(A \cup C_1) \cup C_2$ es conexo. Pero como es claro que $C_1, C_2 \subseteq A \cup C_1 \cup C_2$, por la maximalidad de las componentes tenemos que $C_1 = A \cup C_1 \cup C_2 = C_2$, lo que significa que en realidad A solamente intersecta a una componente de X, y entonces está contenido en dicha componente. $\square$

Hasta ahora hablando de conexidad hemos tratado solamente con conjuntos, que entendemos que están conectados en el sentido de que tienen un solo "pedazo", o podemos decir también componente. Existen otras nociones de conectar elementos, que son útiles para definir otras nociones de conexidad. Probablemente la más sencilla de estas ideas es mediante la cual conectamos puntos en el espacio.

Definición 1.22. Sea X un espacio topológico, y sean $x, y \in X$. Una **trayectoria de** x **a** y es una función continua $f : [0,1] \to X$, donde $[0,1]$ tiene la topología usual, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Como el ser conexo es una propiedad del espacio, y no de sus elementos, definimos una propiedad del espacio que significa poder conectar todos sus puntos.

Definición 1.23. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **conexo por trayectorias** si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una trayectoria de x a y. Si además de esto, existe una trayectoria de x a y cuya imagen es un arco, decimos que X es **arcoconexo**.

A primera vista tal vez no es claro si esta definición introduce un concepto comparable con el de conexidad. El siguiente teorema nos muestra que de hecho es un concepto más fuerte.

Teorema 1.20. *Sea X un espacio conexo por trayectorias. Entonces X es conexo.*

Demostración. Sea $p \in X$. Para cada $x \in X$, sea f_x una trayectoria de x a p. Por el teorema 1.18 tenemos que $f_x([0,1])$ es conexo para cada $x \in X$, y además $p \in f_x([0,1])$ para todo $x \in X$, por lo que $\bigcap_{x \in X} f_x([0,1]) \neq \emptyset$. Luego, por el teorema 1.16 tenemos que $\bigcup_{x \in X} f_x([0,1])$ es conexo, pero es claro que $\bigcup_{x \in X} f_x([0,1]) = X$, por lo que concluimos que X es conexo. $\square$

Respecto a la comparación de la conexidad por trayectorias y la arcoconexidad, es claro de la definición que todo espacio arcoconexo es también conexo por trayectorias, pero resulta ser que el recíproco no siempre es cierto. Sin embargo, existe una condición muy sencilla bajo la cual estas propiedades son equivalentes.

Teorema 1.21. *Sea X un espacio de Hausdorff que es conexo por trayectorias. Entonces X es arcoconexo.*

La demostración de este teorema va más allá del alcance que pretendemos dar a este trabajo, pero un bosquejo de la misma, así como un contraejemplo de un espacio conexo por trayectorias que no es arcoconexo, se pueden encontrar en [5, pág. 92].

Mencionaremos ahora brevemente otro concepto de conexidad al que haremos alusión más adelante, pero que en realidad no será muy importante, por lo que no estudiaremos teoremas relativos a él.

Definición 1.24. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **localmente conexo** si para todo $x \in X$ y para todo U abierto en X con $x \in U$, existe V abierto y conexo en X tal que $x \in V \subseteq U$.

Para terminar esta sección, presentamos un teorema que es más bien utilizando en análisis, pero que a nosotros también nos será útil.

Teorema 1.22 (Del valor intermedio)**.** *Sean X un espacio conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual. Si $x, y \in X$ son tales que $f(x) < f(y)$, entonces para todo $a \in [f(x), f(y)]$ existe $z \in X$ tal que $f(z) = a$.*

Demostración. Como X es conexo y f es continua, por el teorema 1.18 tenemos que $f(X)$ es conexo. Luego, como $f(X) \subseteq \mathbb{R}$, y los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son intervalos, tenemos que $f(X)$ es un intervalo. En particular, como $f(x), f(y) \in f(X)$, esto nos dice que $[f(x), f(y)] \subseteq f(X)$, por lo que para todo $a \in [f(x), f(y)] \subseteq f(X)$ debe existir $z \in X$ con $f(z) = a$. $\square$

1.4. Espacios a partir de otros espacios

Una idea que utilizamos en más de una ocasión en la sección anterior fue la de obtener, a partir de conjuntos que tienen a propiedad que estudiamos, ya sea compacidad o conexidad, nuevos conjuntos que también la tienen. Podemos utilizar una idea similar a partir de espacios topológicos, es decir, utilizar espacios que ya conocemos para formar nuevos espacios. Existe varias maneras de hacer esto, pero nosotros presentaremos dos particularmente simples que nos serán de utilidad.

1.4.1. Espacios producto

La idea de un producto cartesiano es conocida en múltiples ramas de las matemáticas, por lo que es natural que en topología también se estudie. Lo primero que necesitamos es la noción más general de producto de conjuntos, para después dotarlos de una topología.

Definición 1.25. Sea $\{X_i\}_{i\in J}$ una colección de conjuntos, y sea $X = \bigcup_{i\in J} X_j$. Definimos el **producto cartesiano** de los espacios X_i, con $i \in J$, como la colección de funciones $x : J \to X$ tales que $x(i) \in X_i$ para cada $i \in J$, y lo denotamos por $\prod_{i\in J} X_i$. Si $x(i) = a_i \in X_i$ para cada i, denotamos al elemento $x \in \prod_{i\in J} X_i$ por $(a_i)_{i\in J}$.

La idea presentada en la definición anterior es equivalente a la más simple en que se define un un producto de n conjuntos como una colección de n-adas ordenadas. Sin embargo, como esta idea no se puede generalizar cuando el conjunto de índices no es ordenado, recurrimos a esta nueva definición.

Ahora, existen varias maneras de dotar a un producto cartesiano de una topología, algunas de las cuales coinciden bajo ciertas condiciones. Nosotros nos enfocaremos solamente en la más usual, la cual hace uso de ciertas funciones especiales.

Definición 1.26. Sea $\prod_{i\in J} X_i$ un producto cartesiano de conjuntos. Para cada $i \in J$, definimos la **i-ésima función proyección** como la función $\pi_i : \prod_{i\in J} X_i \to X_i$ dada por $\pi_i((a_i)_{i\in J}) = a_i$.

Desde su definición se ve que las proyecciones son una forma útil y directa de relacionar a un producto con cada uno de sus factores. Por esta razón resulta deseable que resulten continuas con la topología con que dotemos al producto cartesiano. Luego, una forma sencilla de asegurarse de que esto pase es definir la topología en términos de las imágenes inversas de estas funciones, como haremos a continuación.

Definición 1.27. Sea $X = \prod_{i\in J} X_i$ un producto cartesiano de espacios topológicos. Definimos la **topología producto** en X como la topología generada por los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde $U \subseteq X_i$ es abierto. En otras palabras, la colección $\{\pi_i^{-1}(U_i) : U_i \text{ es abierto en } X_i, i \in J\}$ es una subbase de la topología producto en X.

Por la forma en que está definida, la topología producto es un caso en el que es más fácil trabajar solamente con abiertos básicos que con todos los abiertos. Por esta razón, es conveniente describirlos de forma más precisa. Consideremos entonces un espacio producto $\prod_{i\in J} X_i$. Si fijamos $i \in J$, y tomamos $U_i \subseteq X_i$, a partir de la definición de imagen inversa obtenemos que $\pi_i^{-1}(U_i) = \prod_{j\neq i} X_j \times U_i$, por lo que ahora sabemos expresar a los elementos de la subbase como un producto. Luego, sabemos de la definición de subbase que los abiertos básicos son intersecciones finitas de los elementos de la subbase, así que si tomamos $i_1, i_2, \ldots, i_n \in J$ y $U_{i_k} \subseteq X_{i_k}$ abiertos para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que los abiertos básicos son de la forma

$$\left(\prod_{j \neq i_1} X_j \times U_{i_1}\right) \cap \left(\prod_{j \neq i_2} X_j \times U_{i_2}\right) \cap \cdots \cap \left(\prod_{j \neq i_n} X_j \times U_{i_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_k} X_i.$$

A partir de esto, podemos empezar a obtener propiedades de los espacios producto.

Lo primero que queremos estudiar son a las funciones proyecciones. Como ya mencionamos, la topología producto fue definida de forma que estas funciones resultaran continuas, pero esta no es la única propiedad que tienen.

Teorema 1.23. *Las funciones proyecciones en un espacio producto son continuas y abiertas.*

Demostración. Sea $X = \prod_{i \in J} X_i$ un espacio producto, y sea π_i una función proyección. Por la construcción de la topología producto, tenemos que π_i es continua. Tomemos un abierto básico $B = \prod_{k=1}^{n} U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_k} X_i$ de la topología producto. Entonces tenemos que

$$\pi_i(B) = \begin{cases} X_i, & i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \\ U_i, & i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \end{cases},$$

por lo que concluimos que π_i es abierta. □

Probablemente la mayor utilidad que tienen las funciones proyecciones, es que simplifican mucho el estudio de la continuidad de funciones cuyo codominio es un espacio producto.

Teorema 1.24. *Sean $X = \prod_{i \in J} X_i$ un espacio producto y Y un espacio topológico. Una función $f : Y \to X$ es continua si y sólo si la función $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ es continua para cada función proyección π_i.*

Demostración. Notemos que si la función f es continua, por la continuidad de las proyecciones y el teorema 1.5 tenemos que $\pi_i \circ f$ es continua para cada $i \in J$.

Supongamos ahora que $\pi_i \circ f$ es continua para cada función proyección π_i. Tomemos un elemento S en la subbase de la topología producto. Entonces tenemos que $S = \pi_i^{-1}(U_i)$ para algún $i \in J$, donde $U_i \subseteq X_i$ es abierto. Luego, por la continuidad de $\pi_i \circ f$, tenemos que $(\pi_i \circ f)^{-1}(U_i) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = f^{-1}(S)$ es abierto en Y, por lo que concluimos que f es continua. □

Ahora queremos empezar a buscar propiedades de un espacio producto. La forma más natural de hacerlo es preguntándose qué propiedades de los espacios factor se conservarán en el producto. La primer propiedad que buscamos de este modo es una muy sencilla.

Teorema 1.25. *Sea $\{X_i\}_{i\in J}$ una colección de espacios de Hausdorff. Entonces el espacio $X = \prod_{i\in J} X_i$ es un espacio de Hausdorff con la topología producto.*

Demostración. Sean $(a_i)_{i\in J}, (b_i)_{i\in J} \in X$ distintos. Entonces debe existir $i_0 \in J$ tal que $a_{i_0} \neq b_{i_0}$, y como X_{i_0} es un espacio de Hausdorff, podemos tomar dos abiertos disjuntos U y V en X_{i_0} tales que $a_{i_0} \in U$ y $b_{i_0} \in V$. Consideremos entonces los conjuntos $\pi_{i_0}^{-1}(U), \pi_{i_0}^{-1}(V) \subseteq X$, que son abiertos por la continuidad de las proyecciones, y como $U \cap V \neq \emptyset$, entonces también son disjuntos. Además, se tiene que $(a_i)_{i\in J} \in \pi_{i_0}^{-1}(U)$ y $(b_i)_{i\in J} \in \pi_{i_0}^{-1}(V)$, por lo que concluimos que X es Hausdorff. □

De forma natural nos podemos preguntar ahora por las otras dos propiedades topológicas que hemos estudiado, que son la compacidad y la conexidad. Para ambos casos se tiene una respuesta positiva, aunque sus demostraciones ya no son tan sencillas, e involucran muchas ideas que no hemos presentado, por lo que las omitiremos.

Teorema 1.26. *El producto de espacios conexos es conexo.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [14, Teorema 3.1.6].

Teorema 1.27 (Tychonoff)**.** *El producto de espacios compactos es compacto.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [14, Teorema 5.1.1].

1.4.2. Espacios cociente

La siguiente forma en que queremos construir nuevos espacios topológicos requiere solamente de que conozcamos un espacio previo. La idea aquí será identificar puntos del espacio como uno solo para obtener un nuevo espacio. De forma similar a los espacios productos, utilizaremos una función para poder definir la topología del nuevo espacio, aunque aquí definimos dicha función antes de presentar el conjunto que queremos topologizar.

Definición 1.28. Sean X y Y espacios topológicos y $q : X \to Y$ una función sobreyectiva. Decimos que q es una **función cociente** si $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto en X.

En la definición anterior el espacio Y ya contaba con su propia topología antes de definir la función cociente, lo que puede causar que sea difícil de ver cómo nos ayuda una función cociente a topologizar un espacio. Nuestra intención más bien es utilizar funciones sobreyectivas para definir topologías que hagan que dichas funciones sean funciones cociente.

Definición 1.29. Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $q : X \to Y$ una función sobreyectiva. A la topología de Y que hace a q función cociente se le llama **topología cociente**.

No es difícil ver que la topología cociente existe para cualquier conjunto, pues basta definir que los abiertos son aquellos que satisfacen la propiedad enunciada en la definición de función cociente, y luego probar que efectivamente forman una topología. Luego, podemos definir un conjunto en términos del espacio, y dotarlo de la topología cociente para obtener el espacio en que estamos interesados.

Definición 1.30. Sea $\mathcal{P}$ una partición de un espacio topológico X, y sea $q : X \to \mathcal{P}$ dada por $q(x) = [x]$, donde $[x]$ representa la clase de equivalencia de x en la partición $\mathcal{P}$. Notemos que dicha función es sobreyectiva. Al espacio $\mathcal{P}$ con la topología cociente inducida por q se le llama **espacio cociente de** X.

Ya tenemos entonces el espacio con el que queremos trabajar. La idea de este espacio es que identifica varios puntos del espacio como un mismo punto, pero manteniendo, en la medida de lo posible, la estructura topológica del espacio original mediante la función cociente. Esto se puede hacer en gran medida gracias a que, a partir de su definición, las funciones cociente son continuas. Esto implica que, por ejemplo, el teorema 1.18 nos garantiza que el cociente de un espacio es conexo, y de forma similar para los espacios compactos. Es claro entonces que, de forma similar a las proyecciones, las funciones cociente son de vital importancia para trabajar con estos espacios. De hecho, en este mismo tenor, el primer resultado que probaremos respecto de las funciones cociente es muy similar a uno de las proyecciones.

Teorema 1.28. *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $q : X \to Y$ función cociente y $f : Y \to Z$ una función. Entonces f es continua si y sólo si $f \circ q$ es continua.*

Demostración. Si f es continua, como por definición tenemos que q es continua, al aplicar el teorema 1.5 tenemos que $f \circ q$ es continua.

Supongamos ahora que $f \circ q$ es continua. Tomemos $U \subseteq Z$ abierto. Entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en Y si y sólo si $q^{-1}(f^{-1}(U))$ es abierto en X. Pero tenemos que

$q^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ q)^{-1}(U)$, el cual es abierto por la continuidad de $f \circ q$, así que por lo anterior $f^{-1}(U)$ es abierto, y por lo tanto f es continua. $\square$

Este teorema tiene muchas consecuencias muy importantes. A nosotros en particular nos interesa utilizarlo para obtener el siguiente resultado.

Teorema 1.29. *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $q : X \to Y$ función cociente y $g : X \to Z$ una función continua que es constante en $q^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$. Entonces g induce una función continua $f : Y \to Z$ tal que $f \circ q = g$.*

Demostración. Para definir la función f, para cada punto $y \in Y$ tomemos $x \in q^{-1}(y)$, y definamos $f(y) = g(x)$. Notemos que como g es constante en $q^{-1}(y)$, entonces f está bien definida. Además, si tomamos $x \in X$ tenemos que $(f \circ q)(x) = f(q(x)) = g(x)$, por lo que tenemos que $f \circ q = g$. Luego, como g es continua por hipótesis, al aplicar el teorema anterior concluimos que f es continua. $\square$

El teorema anterior es el que será más útil para nosotros, pero en términos de importancia, probablemente el siguiente resultado es el que más se destaca, el cual habla de la unicidad de los espacios cociente, salvo homeomorfismos. Además, este teorema es una primera muestra de la utilidad que tendrá el teorema anterior.

Teorema 1.30. *Sean X y Y espacios topológicos y $q : X \to Y$ función cociente. Sea $Y^* = \{q^{-1}(y) : y \in Y\}$ con la topología cociente. Entonces $Y \cong Y^*$.*

Demostración. Sea $q^* : X \to Y^*$ la función cociente que lleva a todo punto de x a su clase de equivalencia. Notemos que q^* satisface las hipótesis del teorema anterior por la definición de Y^*, así que induce una función continua $f : Y \to Y^*$, la cual está dada por $h(y) = q^{-1}(y)$. De manera similar, tenemos que q induce una función continua $g : Y^* \to Y$ dada por $g(q^{-1}(y)) = y$. Claramente estas funciones son inversas, por lo que al ser continuas tenemos que son homeomorfismos, y por lo tanto $Y \cong Y^*$. $\square$

Para terminar, discutiremos un poco sobre un espacio cociente que utilizaremos en particular. Para esto, tomemos un espacio topológico X, y $A \subseteq X$. Denotamos por X/A a la colección $\{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{A\}$, que es una partición de X, y lo consideramos con la topología cociente. Por lo que mencionamos anteriormente, interpretamos este espacio como el mismo espacio X, pero con el subconjunto A colapsado a un punto. Es fácil ver que la función cociente $q : X \to X/A$ restringida a $X \setminus A$ resulta ser un homeomorfismo, por lo que el espacio X/A puede llegar a ser muy similar a X. De hecho, esta similitud nos será muy útil cuando el espacio A tiene una propiedad que introduciremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Topología algebraica

Pasamos ahora a introducir los conceptos y resultados de topología algebraica que aplicaremos a la teoría de hiperespacios.

El concepto principal que abordaremos es el de contractibilidad, el cual podemos encontrar en la literatura matemática dentro de la rama de la topología algebraica conocida como teoría de homotopía. Por esto mismo, definiremos también lo que son las homotopías, los espacios homotópicamente equivalentes y los retractos, al tiempo que presentamos algunos resultados que nos ayudarán a entender cómo trabajar con estos conceptos.

Presentaremos también el concepto de complejo simplicial, que es un conjunto de espacios sencillos llamados simplejos, los cuales se utilizan para construir otros espacios más complicados llamados poliedros. Estos nos ayudarán más adelante a entender el comportamiento de algunos de los hiperespacios en los que estamos interesados. Los presentamos en este capítulo debido a que tienen propiedades relacionadas con la contractibilidad que nos serán de vital importancia.

2.1. Homotopía

Podemos pensar en la teoría de homotopía como las matemáticas de la deformación continua, la cual se puede dar entre funciones continuas o espacios topológicos, los principales objetos de estudio de la topología. Mientras que el concepto de homeomorfismo nos daba a entender cuándo dos espacios eran esencialmente iguales de acuerdo a la topología general, a los ojos de la teoría de homotopía nos permitimos considerar a dos objetos como el mismo cuando existe una forma de deformar a uno en el otro, lo cual presenta una nueva clasificación, tanto de espacios como de funciones. El primer objeto que vamos a estudiar con este objetivo son las funciones continuas.

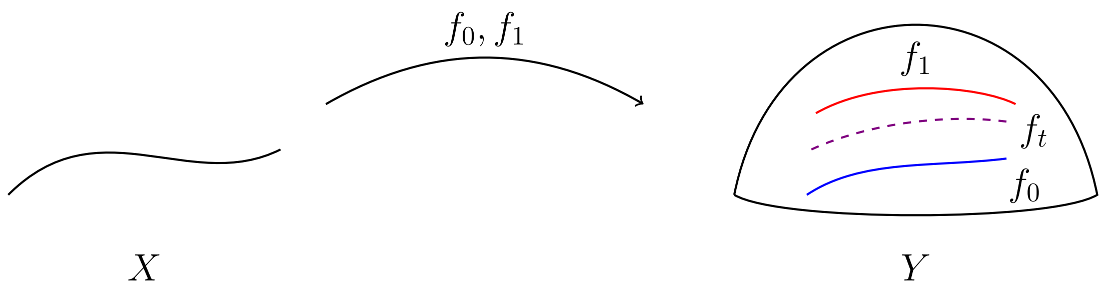

Figura 2.1: Homotopía entre dos funciones.

Definición 2.1. Sean X y Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Decimos que f y g son **homotópicas**, lo cual denotamos por $f \simeq g$, si existe una función $F : X \times I \to Y$ continua que satisface $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A dicha función F se le llama **homotopía entre f y g**.

De esta definición podemos pensar en la variable $t \in I$ como una variable de tiempo, que nos indica el comportamiento de la deformación de la función en cada momento. A partir de este razonamiento, podemos notar que cada valor de t nos determina una función continua $f_t : X \to Y$, dada por $f_t(x) = F(x, t)$. Algunos autores se refieren a esta colección de funciones como una familia continua de funciones que depende del parámetro t, debido a la continuidad de la homotopía. De esta manera, en el tiempo $t = 0$ empezamos con la función f, y al dejar que t recorra su dominio llegamos a la función g cuando $t = 1$. De hecho, incluso se puede llegar a definir la homotopía a partir de esta familia continua. Nosotros no presentaremos tal definición, aunque sí utilizaremos la existencia de esta familia más adelante. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 2.1.

Antes de presentar algunos resultados que se desprenden de esta primer definición, es importante mencionar que no siempre es necesario presentar dos funciones continuas para definir una homotopía. En general, podemos pensar que una homotopía es una función continua F que va del producto de un espacio topológico con I a otro espacio topológico. Al presentar dicha función, se sobreentiende que es una homotopía entre las funciones f_0 y f_1.

Ahora, como habíamos mencionado que la homotopía nos ayuda a clasificar funciones, es natural mostrar que se trata de una relación de equivalencia.

Proposición 2.1. *La homotopía define una relación de equivalencia entre funciones.*

Demostración. Sean X y Y espacio topológicos, y sean $f, g, h : X \to Y$ funciones continuas. En primer lugar, es claro que la familia $\{f_t\}_{t \in I}$, donde $f_t = f$ para todo

$t \in I$, define una homotopía de f consigo misma, lo que significa que $f \simeq f$, y la relación es reflexiva.

Por otra parte, si $f \simeq g$ y F es una homotopía entre ellas, entonces la función $\hat{F} : X \times I \to Y$ dada por $\hat{F}(x,t) = F(x, 1-t)$ es una homotopía, y satisface

$$\hat{F}(x,0) = F(x,1) = g(x), \quad \hat{F}(x,1) = F(x,0) = f(x),$$

por lo que $g \simeq f$, y la relación es simétrica.

Finalmente, si también $g \simeq h$ y G es una homotopía entre ellas, entonces la función $H : X \times I \to Y$ dada por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

resulta ser continua por el lema del pegado, y además satisface

$$H(x,0) = F(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = G(x,1) = h(x),$$

lo que significa que $f \simeq h$, y entonces la relación es transitiva.

Por lo anterior, concluimos que la homotopía define una relación de equivalencia entre funciones. □

Una pregunta natural respecto a la homotopía entre funciones es cómo se comporta respecto a la composición, la operación natural entre funciones. Afortunadamente, la composición de funciones homotópicas con funciones continuas resulta en funciones homotópicas. Este resultado los introducimos como un lema, pues será fundamental para poder clasificar espacios topológicos mediante homotopías.

Lema 2.1. *Sean $f_0, f_1 : X \to Y$ y $g_0, g_1 : Y \to Z$ funciones continuas tales que $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$. Entonces $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Demostración. Sean F una homotopía entre f_0 y f_1 y G una homotopía entre g_0 y g_1. Definamos la función $H : X \times I \to Z$ por $H(x,t) = G(F(x,t),t)$. Esta función es continua, y además satisface que

$$H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x)),$$
$$H(x,1) = G(F(x,1),1) = G(f_1(x),1) = g_1(f_1(x)),$$

así que es una homotopía entre $g_0 \circ f_0$ y $g_1 \circ f_1$, y por lo tanto $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. □

Habiendo definido la homotopía entre funciones, podemos pasar ahora a la clasificación de espacios topológicos. La idea detrás de esta clasificación es esencialmente la misma a la del concepto de homeomorfismo, pero utilizando los conceptos que acabamos de introducir.

Definición 2.2. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que X y Y son **homotópicamente equivalentes** si existen dos funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. En este caso escribimos $X \simeq Y$, y a las funciones f, g las llamamos **equivalencias homotópicas**. También se dice que f es **inversa homotópica** de g, y viceversa.

Podemos pensar que este concepto generaliza la idea de espacios homeomorfos, pues por la reflexividad de la homotopía tenemos que un homeomorfismo y su inversa resultan ser también inversas homotópicas, y entonces los espacios homeomorfos son también homotópicamente equivalentes. Esto además resultará muy importante cuando hablemos de contractibilidad, porque nos dice que las propiedades que se preservan bajo equivalencias homotópicas también son invariantes topológicos.

Al igual que antes, si queremos pensar en la equivalencia homotópica como una forma de clasificar espacios, es natural mostrar que se trata de una relación de equivalencia entre espacios.

Proposición 2.2. *La equivalencia homotópica define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios topológicos.*

Demostración. Sean X, Y y Z espacios topológicos. El hecho de que $X \simeq X$ es trivial, pues claramente Id_X es su propia inversa homotópica, así que la relación es reflexiva. De forma similar, si $X \simeq Y$ es claro que $Y \simeq X$, pues la existencia de las inversas homotópicas $f : X \to Y$ $g : Y \to X$ implica que se satisface la definición de que $Y \simeq X$, y entonces la relación es simétrica.

Supongamos ahora que $X \simeq Y$ y $Y \simeq Z$, y sean $f_1 : X \to Y, g_1 : Y \to X$ y $f_2 : Y \to Z, g_2 : Z \to Y$ las inversas homotópicas respectivas de cada caso. Consideremos entonces las funciones $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$ y $g = g_1 \circ g_2 : Z \to X$. Utilizando el lema 2.1, tenemos que

$$f \circ g = (f_2 \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2) = f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2 \simeq f_2 \circ Id_Y \circ g_2 = f_2 \circ g_2 \simeq Id_Z,$$
$$g \circ f = (g_1 \circ g_2) \circ (f_2 \circ f_1) = g_1 \circ (g_2 \circ f_2) \circ f_1 \simeq g_1 \circ Id_Y \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \simeq Id_X.$$

Esto nos dice que f y g son inversas homotópicas, por lo que $X \simeq Z$, y la relación es transitiva.

Por lo anterior, concluimos que la equivalencia homotópica es una relación de equivalencia entre espacios topológicos. $\square$

2.1.1. Retractos

Ahora introduciremos el concepto de retracto de un espacio topológico, que es un subconjunto del espacio que comparte algunas características con él. Usualmente este concepto se presenta en la teoría de homotopía porque al juntarlos, se desprende un concepto más fuerte que son los retractos de deformación. Nosotros no introduciremos este segundo concepto, pues no nos será de utilidad, pero mencionamos los retractos en esta sección para respetar el orden que siguen la mayoría de los textos de topología algebraica.

Definición 2.3. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un **retracto de** X si existe una función continua $r : X \to A$ que satisface $r\big|_A = Id_A$. A dicha función se le llama **retracción**.

Como es natural pensar, muchas de las propiedades que poseen los retractos dependen en gran medida de las propiedades del espacio en que se encuentran. A continuación presentamos una propiedad de retractos de espacios de Hausdorff que nos será útil más adelante.

Teorema 2.1. *Sea X un espacio de Hausdorff y $Y \subseteq X$ un retracto de X. Entonces Y es cerrado.*

Demostración. Si $Y = X$, el resultado es trivial. Supongamos que $X \setminus Y \neq \emptyset$, y tomemos $x \in X \setminus Y$. Sea $r : X \to Y$ una retracción. Como $x \notin Y$, tenemos que $r(x) \neq x$, así que existen U y V abiertos ajenos tales que $x \in U$ y $r(x) \in V$. Luego, como $V \cap Y$ es abierto en Y, por la continuidad de r tenemos que $r^{-1}(V \cap Y)$ es abierto en X, y entonces $U' = r^{-1}(V \cap Y) \cap U$ también es abierto en X. Además, es claro que $x \in U'$.

Supongamos que existe $y \in U' \cap Y$. Entonces tenemos que $r(y) = y$, y como $y \in r^{-1}(V \cap Y)$, esto significa que $y \in V$, lo cual no es posible pues $y \in U$, y $U \cap V = \emptyset$. Luego, $x \in U' \subseteq X \setminus Y$, por lo que x es punto exterior de Y, y al haber sido arbitrario, podemos concluir que $X \setminus Y = \text{ext(Y)}$. Esto implica que $X \setminus Y$ es abierto, y por lo tanto Y es cerrado. $\square$

Del concepto de retracto se desprenden muchos otros conceptos importantes, como por ejemplo el ya mencionado retracto de deformación. A nosotros nos interesan de forma particular algunos conceptos exclusivos a espacios métricos, que aunque aún no hemos estudiado, con lo que hemos mencionado sobre que son un caso particular de espacio topológico basta para entender las siguientes definiciones y teoremas.

Definición 2.4. Sea K un espacio métrico compacto. Decimos que K es un **retracto absoluto**, lo cual escribimos como AR, si para cualquier espacio métrico X en el que K pueda ser encajado, dicho encaje es un retracto de X.

Para la siguiente definición es necesario introducir antes el concepto de extensión de una función.

Definición 2.5. Sean X y Y espacios topológicos, y sea $A \subseteq X$. Decimos que una función $f : X \to Y$ **extiende** a una función $g : A \to Y$ si $f\big|_A = g$.

Definición 2.6. Sea K un espacio métrico compacto. Decimos que K es un **extensor absoluto**, lo cual escribimos como AE, si para cualquier función continua $f : B \to K$, donde B es un subespacio cerrado de un espacio métrico X, existe una función continua $g : X \to K$ que extiende a f.

Aunque la definición anterior parece no tener relación alguna con el concepto de retracto, a partir del siguiente teorema veremos que está íntimamente relacionada.

Teorema 2.2. *Sea K un espacio métrico compacto. Entonces K es un AR si y sólo si es un AE.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [7, Teorema 9.1].

2.1.2. Contractibilidad

A lo largo de este capítulo hemos discutido a la teoría de homotopía como el estudio de las deformaciones. Dentro de este contexto, uno puede preguntarse por algún tipo de deformación en específico, y eso es precisamente lo que nos lleva a definir la contractibilidad. Entendiendo que contraer a un objeto es hacerlo más pequeño, nuestro objetivo al hablar de contraer un espacio es hacerlo tan pequeño como sea posible, lo cual equivaldría a reducirlo a un solo punto.

Definición 2.7. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **contráctil** si la función identidad es homotópica a una función constante de X en sí mismo, es decir, si existe una homotopía $F : X \times I \to X$ que satisface $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$, donde $x_0 \in X$ es algún punto fijo. En este caso, a la homotopía F se le llama **contracción de X**.

Intuitivamente, podemos interpretar que una contracción nos describe el movimiento que realiza cada punto del espacio hasta llegar al punto al que se está contrayendo el espacio, que en la definición anterior sería el punto x_0. Ahora bien, si estamos entendiendo este concepto como que hay una forma de mover a todos los puntos del espacio para contraerlo, es lógico pensar que cualquier punto del espacio sirve como punto final de la contracción. Esto resulta ser cierto, y lo probamos formalmente a continuación.

Proposición 2.3. *Si X es un espacio contráctil y $x_0 \in X$, entonces existe una contracción $\hat{F}$ de X tal que $\hat{F}(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $F : X \times I \to X$ una contracción de X, y sea $x' \in X$ tal que $F(x, 1) = x'$ para todo $x \in X$. Definamos la función $\hat{F} : X \times I \to X$ dada por

$$\hat{F}(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 2-2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Notemos que

$$F(x, 2t)\big|_{t=\frac{1}{2}} = F(x, 1) = x', \quad F(x_0, 2-2t)\big|_{t=\frac{1}{2}} = F(x_0, 1) = x',$$

así que por el lema del pegado $\hat{F}$ es continua. Además, para cualquier $x \in X$ tenemos que

$$\hat{F}(x, 0) = F(x, 0) = x, \quad \hat{F}(x, 1) = F(x_0, 0) = x_0,$$

por lo que $\hat{F}$ es la contracción deseada. □

Otra forma de interpretar la proposición anterior y que involucra la formalidad de la definición, es que la función identidad es homotópica a cualquier función constante de X en sí mismo.

Ahora bien, si estamos pensando en la contractibilidad como una deformación de un espacio, por la forma en que introdujimos el concepto de equivalencia homotópica es natural pensar que éste puede tener una relación importante con el concepto de contractibilidad. En efecto, resulta ser que existe una caracterización de los espacios contráctiles en términos de la equivalencia homotópica.

Teorema 2.3. *Un espacio topológico X es contráctil si y sólo si es homotópicamente equivalente a un espacio de un solo punto.*

Demostración. Sea $Y = \{p\}$. Notemos que existe una única función $f : X \to Y$, que es la función constante dada por $f(x) = p$ para todo $x \in X$. De manera similar, es fácil ver que cualquier función $g : Y \to X$ debe ser constante al tener Y un único elemento.

Supongamos primero que X es contráctil, y tomemos $x_0 \in X$. Consideremos la función $g : Y \to X$ dada por $g(p) = x_0$. Por una parte, es evidente que $f \circ g = Id_Y$, pues es la única función de Y en sí mismo. Por otro lado, tenemos que $g \circ f : X \to X$ es la función constante que manda todos los elementos de X a x_0, que por la definición de contractibilidad es homotópica a la función identidad en X, es decir, $g \circ f \simeq Id_X$. Luego, esto quiere decir que f y g son inversas homotópicas, y por lo tanto $X \simeq Y$.

Supongamos ahora que $X \simeq Y$, y sea $g : Y \to X$ la inversa homotópica de f. Entonces tenemos que $g \circ f \simeq Id_X$, pero por lo anterior sabemos que $g \circ f$ es una función constante. Luego, esto significa que la identidad en X es homotópica a una función constante, y por definición concluimos que X es contráctil. □

A partir de este teorema vemos que la contractibilidad es una propiedad que se conserva bajo equivalencias homotópicas, por lo que utilizando el comentario que hicimos anteriormente, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.1. *La contractibilidad es una propiedad topológica.*

Cabe mencionar que para muchos autores de topología algebraica, la caracterización anterior es de hecho la definición de contractibilidad, es decir, definen un espacio contráctil como aquel que es homotópicamente equivalente a un espacio de un solo punto. Sin embargo, también se puede encontrar la definición que hemos presentado en varios textos de topología, y tiene la utilidad de que permite definir también lo que es una contracción, lo cual no resulta tan directo partiendo de la caracterización que hemos probado.

Tenemos entonces que los espacios contráctiles están relacionados desde el punto de vista de la equivalencia homotópica, por lo que sabemos que entre ellos existen funciones que son equivalencias homotópicas. En general no es sencillo describir el comportamiento de las equivalencias homotópicas, pues pueden ser muy variados, pero para espacios contráctiles esta situación es muy sencilla.

Teorema 2.4. *Sean X y Y espacios contráctiles. Entonces cualquier función continua $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua, y tomemos una función $g : Y \to X$ constante. Notemos que entonces $f \circ g : Y \to Y$ y $g \circ f : X \to X$ son ambas

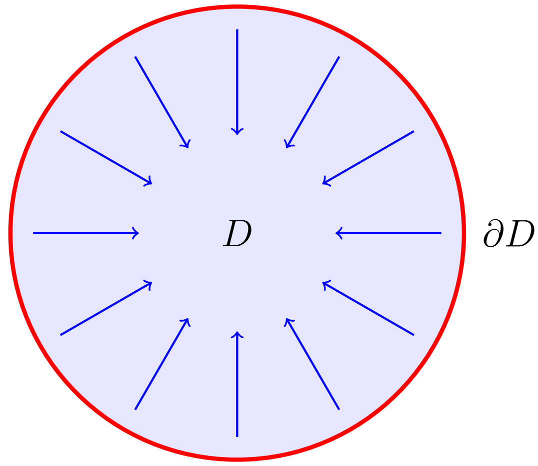

Figura 2.2: Subespacio no contráctil de un espacio contráctil.

funciones constantes, por lo que a partir de la proposición 2.3 tenemos que ambas son homotópicas a la función identidad en sus respectivos espacios. Luego, tenemos que f y g son inversas homotópicas, y por lo tanto f es una equivalencia homotópica. $\square$

Uno podría pensar que dado un espacio contráctil X, cualquier subespacio Y de X también resulta ser contráctil, pues basta restringir el dominio de una contracción de X para obtener una contracción de Y. Sin embargo, el problema con este razonamiento es que la homotopía que resulta de restringir el dominio de la contracción no necesariamente tiene a Y como codominio, por lo que no necesariamente será una contracción de Y. Esto no significa que esta idea sea inútil, de hecho existe, y se llama contractibilidad relativa, aunque nosotros no la exploraremos en este trabajo.

Resulta entonces que no todo subespacio de un espacio contráctil es contráctil, y existen muchos ejemplos al respecto. En la figura 2.2 podemos encontrar un ejemplo de esta situación, donde tenemos un disco D, que es contráctil de acuerdo a la acción señalada por las flechas, pero su frontera no lo es, lo cual intuitivamente podemos atribuir a que al remover el interior del disco se genera un agujero que impide la deformación. Sin embargo, para el caso particular de los subespacios que son retractos del espacio que los contiene, la contractibilidad sí resulta ser una propiedad que se hereda al subespacio.

Teorema 2.5. *Sea X un espacio contráctil y sea $Y \subseteq X$ un retracto de X. Entonces Y es contráctil.*

Demostración. Sean $r : X \to Y$ una retracción, $y_0 \in Y$ y $F : X \times I \to X$ una contracción de X a y_0. Consideremos la función $G = r \circ F\big|_{Y \times I} : Y \times I \to Y$, es decir, $G(y,t) = r(F(y,t))$. Esta función es continua por ser composición de funciones continuas. Además, para cualquier $y \in Y$ se satisface que

$$G(y,0) = r(F(y,0)) = r(y) = y, \quad G(y,1) = r(F(y,1)) = r(y_0) = y_0,$$

que junto con la continuidad prueba que G es una contracción de Y. Por lo tanto, concluimos que Y es contráctil. $\square$

Más adelante daremos más ejemplos de espacios contráctiles conforme vayamos definiendo los espacios que nos interesa estudiar.

2.1.3. Propiedad de extensión de homotopía

Hasta ahora hemos presentado todos los conceptos necesarios para hablar de contractibilidad de espacios, pero realmente no tenemos muchas herramientas más allá de la definición para determinar cuando un espacio es contráctil. Podemos decir que esto se debe, en parte, al hecho de que tampoco tenemos cómo determinar que dos espacios son homotópicamente equivalentes, exceptuando la directa aplicación de la definición. Por esta razón, ahora presentaremos dos resultados que nos ayudan a determinar equivalencia homotópica, el primero de un espacio con un espacio cociente, y el segundo entre dos espacios con ciertos subespacios homotópicamente equivalentes entre sí.

Estos resultados se basan en la propiedad de extensión de homotopía, para la cual será importante el concepto de extensión de una función que introdujimos en la definición 2.5. Debido a que de aquí en adelante mencionaremos con frecuencia el concepto de pares de espacios, es importante aclarar que cuando digamos que (X, A) es un par, entonces $A \subseteq X$.

Definición 2.8. Sean X y Y espacios topológicos, y sea $A \subseteq X$. Decimos que el par (X, A) tiene la **propiedad de extensión de homotopía** si para cualquier homotopía $F : A \times I \to Y$ y cualquier función $f : X \to Y$ tales que $f\big|_A = f_0$, existe una homotopía $G : X \times I \to Y$ que extiende a F y tal que $g_0 = f$.

Aunque la definición anterior sea bastante intuitiva, realmente no es sencilla de aplicar, pues es difícil tomarse todas las homotopías de un subespacio y todas las funciones del espacio que lo contiene, y verificar que se pueden extender. Afortunadamente para nosotros, el siguiente teorema nos proporciona una forma considerablemente más sencilla de verificar que un par de espacios tiene la propiedad de extensión de homotopía.

Es importante mencionar que aunque este resultado es cierto para cualquier espacio topológico, nosotros nos restringimos solamente al caso de los espacios de Hausdorff para simplificar la demostración, y porque cuando lo utilicemos más adelante será solamente para este tipo de espacios.

Teorema 2.6. *Sean X un espacio de Hausdorff y $A \subseteq X$. El par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía si y sólo si $Y = X \times \{0\} \cup A \times I \subseteq X \times I$ es un retracto de $X \times I$.*

Demostración. Supongamos primero que (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía. Entonces la función identidad $Id_Y : Y \to Y$ puede ser extendida a una función continua $r : X \times I \to Y$, la cual claramente es una retracción, y entonces Y es un retracto de $X \times I$.

Supongamos ahora que Y es un retracto de $X \times I$. Por el teorema 2.1 tenemos que Y es cerrado, así que si $x \in X \setminus A$, entonces existe $U \subseteq X \times I$ abierto tal que $(x, \frac{1}{2}) \in U$ y $U \cap Y = \emptyset$. Luego, si $\pi : X \times I \to X$ es la función proyección, por el teorema 1.23 tenemos que $\pi(U)$ es abierto, y además contiene a x. Además, si existiera $a \in A \cap \pi(U)$, tendríamos que $(a, t) \in Y \cap U$ para algún $t \in I$, lo cual sabemos no es cierto, y entonces $\pi(U) \cap A = \emptyset$. Esto prueba que $x \in \text{ext}(A)$, con lo que $X \setminus A$ es abierto, y por lo tanto A es cerrado.

Sean Z un espacio topológico, $F : A \times I \to Z$ una homotopía y $f : X \to Z$ una función tal que $f_0 = f\big|_A$. Como $A \times I$ y $X \times \{0\}$ son cerrados, por el lema del pegado la función unión $F \cup f : Y \to Z$ es continua. Luego, si $r : X \times I \to Y$ es una retracción, se puede ver que la función $G = (F \cup f) \circ r : X \times I \to Z$ es una homotopía que extiende a $F \cup f$, y por lo tanto el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía. □

Podemos ahora probar uno de los resultados que mencionamos previamente que nos da un criterio para equivalencia homotópica. Este resultado es bastante lógico para la intuición, pues en esencia nos dice que si dentro de un espacio colapsamos un subespacio contráctil a un solo punto, el espacio que resulta es homotópicamente equivalente al espacio original.

Teorema 2.7. *Sea (X, A) un par con la propiedad de extensión de homotopía y tal que A es contráctil. Entonces la función cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Denotemos a los elementos de X/A como $q(x) = \overline{x}$ cuando $x \in X \setminus A$, y $q(x) = \overline{A}$ cuando $x \in A$. Sea $F : X \times I \to X$ una homotopía que extiende una contracción de A, y tal que $f_0 = Id_X$. Definamos la función $\overline{F} : X/A \times I \to X/A$ dada por $\overline{F}(\overline{x}, t) = q(F(x,t))$, donde $x \in q^{-1}(\overline{x})$. Notemos que dicha función está bien definida, pues si $\overline{x} \neq \overline{A}$, entonces $q^{-1}(\overline{x})$ contiene un solo punto, y no hay ambigüedad en la definición de la función, mientras que como $F(a,t) \in A$ para todo $a \in A$ ya que F extiende una contracción de A, tenemos que $q(F(a,t)) = \overline{A}$ para todo $a \in A$ y $t \in I$, y entonces $\overline{F}(\overline{A}, t) = \overline{A}$ para todo t.

Notemos que de la definición de $\overline{F}$ se tiene que $q \circ f_t = \overline{f}_t \circ q$. Esto nos ayuda a probar la continuidad de $\overline{F}$ en su primera entrada, pues si tomamos $U \subseteq X/A$ abierto, lo anterior nos dice que $f_t^{-1}(q^{-1}(U)) = q^{-1}(\overline{f}_t^{-1}(U))$, y como q y f_t son ambas continuas, tenemos que $q^{-1}(\overline{f}_t^{-1}(U))$ es abierto. Luego, por la definición de topología cociente, $\overline{f}_t^{-1}(U)$ es abierto, y entonces $\overline{f}$ es continua en su primera entrada. Ahora, si $t \in I$ y $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en I tal que $t_n \to t$, por la continuidad de F y de q tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{F}(\overline{x}, t_n) = \lim_{n\to\infty} q(F(x,t_n)) = q\left(\lim_{n\to\infty} F(x,t_n)\right) = q(F(x,t)) = \overline{F}(\overline{x}, t),$$

y entonces $\overline{F}$ es continua en su segunda entrada. Por lo tanto, $\overline{F}$ es continua.

Ahora, como $f_1\big|_A$ es constante debido a que $F\big|_{A\times I}$ es una contracción de A, por el teorema 1.29 tenemos que f_1 induce una función continua $g : X/A \to X$ que satisface $g \circ q = f_1$. Además, para cualquier $\overline{x} \in X/A$ tenemos que

$$(q \circ g)(\overline{x}) = (q \circ g)(q(x)) = q((g \circ q)(x)) = q(f_1(x)) = \overline{f}_1(\overline{x}),$$

lo que significa que $q \circ g = \overline{f}_1$. Luego, utilizando las homotopías F y $\overline{F}$ tenemos que

$$g \circ q = f_1 \simeq f_0 = Id_X, \quad q \circ g = \overline{f}_1 \simeq \overline{f}_0 = Id_{X/A},$$

por lo que g y q son inversas homotópicas, y por lo tanto $X \simeq X/A$. □

A continuación presentamos el segundo teorema para el que se utiliza la propiedad de extensión de homotopía, aunque aquí no mostraremos cómo es que se utiliza. Aunque este teorema difiere sustancialmente en sus hipótesis del lema del pegado, recibe un nombre similar debido a que su conclusión es muy similar.

Teorema 2.8 (Lema del pegado para equivalencias homotópicas). *Sean X y Y espacios topológicos, $X_1, X_2 \subseteq X$ y $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ tales que $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$, y $A = X_1 \cap X_2$, $B = Y_1 \cap Y_2$. Si existe una función continua $h : X \to Y$ tal que $h(X_i) \subseteq Y_i$, con $h\big|_{X_i} : X_i \to Y_i$ siendo una equivalencia homotópica para $i \in \{1,2\}$,* *y* $h\big|_A : A \to B$ *también es una equivalencia homotópica, entonces* $h : X \to Y$ *es una equivalencia homotópica.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [2, Teorema 7.4.1].

2.2. Complejos simpliciales

En esta sección construiremos los espacios topológicos conocidos como poliedros, los cuales son de vital importancia en la topología algebraica debido a sus distintas propiedades. Las que mencionaremos a continuación nos serán útiles a nosotros cuando queramos trabajar con hiperespacios que, como probaremos en su momento, resultarán ser homeomorfos a poliedros.

Esta construcción pasa por una serie de conceptos geométricos, algunos de los cuales también tienen ciertas propiedades importantes desde el punto de vista topológico. Como veremos, los poliedros se definen como un subespacio del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, para lo cual no solamente será importante conocer sus propiedades como espacio topológico, sino también algunos conceptos de álgebra lineal que nos permitan estudiar a $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial.

Iniciamos nuestro camino hacia la construcción de los poliedros involucrando en primer lugar a un concepto de geometría analítica.

Definición 2.9. Sea $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$, donde $m \geq n$. Decimos que A es **geométricamente independiente** si los únicos escalares $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0,$$

son $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En ese caso también se dice que los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son **geométricamente independientes**.

Mediante un poco de álgebra se obtiene fácilmente que la definición anterior es equivalente a que los vectores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ sean linealmente independientes. Como consecuencia de la definición que presentamos nosotros, el orden con que se nombra a los vectores no es importante en esta definición alternativa, por lo que no existe ninguna ambigüedad en presentar ésta como la definición formal.

Habiendo entonces esta relación entre los conceptos de independencia, es natural esperar que alguno de ellos sea más fuerte que el otro. En efecto, esto resulta ser cierto, y lo presentamos a continuación como un lema cuya demostración omitimos ya que se da trivialmente de la definición anterior.

Lema 2.2. *Si un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente, entonces es geométricamente independiente.*

Otro resultado que se da de forma trivial cuando se involucra el álgebra lineal en la definición de independencia geométrica, pero que de igual forma es muy importante, es el siguiente.

Lema 2.3. *Cualquier subconjunto de un conjunto geométricamente independiente es también geométricamente independiente.*

Es claro de la definición que un conjunto de un solo punto siempre es geométricamente independiente, y de igual forma con la segunda definición se obtiene que todos los conjuntos de dos puntos también lo son. A partir de tres puntos el concepto deja de ser trivial, aunque geométricamente se sigue tratando de conceptos muy conocidos para conjuntos con pocos puntos. Por ejemplo, los conjuntos de tres y cuatro puntos son geométricamente independientes si sus puntos son no colineales y no coplanares, respectivamente.

De la misma forma que en el álgebra lineal se utilizan los conjuntos linealmente independientes como base para generar un espacio vectorial, nosotros utilizaremos los conjuntos geométricamente independientes para definir un espacio, en este caso topológico, el cual es el siguiente paso hacia la construcción de los poliedros. Estos espacios también resultan ser de interés desde la perspectiva geométrica, pues pueden ser pensados como la generalización de los triángulos y los tetraedros. De ahí que la idea de ser geométricamente independientes generalice los conceptos de puntos no colineales y no coplanares.

Definición 2.10. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ puntos geométricamente independientes. Definimos el **simplejo de dimensión** n, al cual denotamos por σ_n, como el conjunto

$$\sigma_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i \text{ y } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

A los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se les llama **vértices** de σ_n, y se dice que **generan** a σ_n. Cuando no sea necesario indicar la dimensión del simplejo, omitiremos el subíndice y lo denotaremos simplemente por σ.

En la literatura también se puede encontrar la definición de simplejo como el conjunto de combinaciones convexas de un conjunto geométricamente independiente, esto debido a que a una combinación lineal que satisface las condiciones de la definición

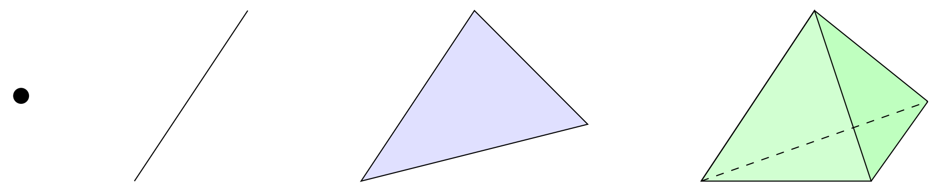

Figura 2.3: Ejemplos de simplejos de dimensión 0, 1, 2 y 3 (izquierda a derecha).

se le llama de este modo. También es importante mencionar que a los coeficientes de una combinación convexa se les llama las coordenadas baricéntricas del punto en cuestión. Un punto que resulta muy importante dentro de un simplejo es aquel que todas sus coordenadas baricéntricas son iguales. Dicho punto recibe el nombre de baricentro del simplejo, y se le denota por $\hat{\sigma}_n$.

Como cabría esperar de una generalización, los casos particulares de simplejos de dimensión 2 y 3 son precisamente triángulos y tetraedros, respectivamente. Este hecho no lo probamos, pues no son las características geométricas de los simplejos en las que estamos interesados, sino en las topológicas. Sin embargo, sigue siendo conveniente describir cómo se ve un simplejo en todas las dimensiones que podamos visualizar. Para la dimensión 0 es claro de la definición que se trata de conjuntos de un solo punto, y para la dimensión 1 no es difícil convencerse que se trata del segmento de recta que une a los dos vértices del simplejo. En la figura 2.3 se presentan ejemplos de estos casos.

Es prácticamente inmediato de la definición que los vértices de un simplejo lo determinan completamente, es decir, dos simplejos son el mismo espacio si y sólo si coinciden en todos sus vértices. Otra forma de interpretar este hecho es que existe un único conjunto de puntos geométricamente independientes que genera al simplejo, y precisamente se trata del conjunto de vértices del simplejo. Debido a la importancia que tienen los vértices en la definición del simplejo, también se utiliza la notación $\sigma_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ para denotar al simplejo cuando se quiere enfatizar cuáles son sus vértices.

Siguiendo con la idea geométrica que hay detrás de los triángulos y los tetraedros, los conceptos de lado y cara son considerablemente importantes para definir a estas figuras y cuerpos. Luego, es natural pensar que en nuestro intento por generalizarlos definamos también un concepto que generalice a los lados y caras. En este sentido, el lema 2.3 nos permite presentar la siguiente definición.

Definición 2.11. Sea σ un simplejo. Al simplejo generado por algunos de los vértices de σ se le llama una **cara de** σ.

Es importante aclarar que en esta definición, contrario a la idea geométrica, el simplejo σ completo es también una de sus caras, pues se permite que todos los vértices de σ sean "algunos" de los vértices. A las caras de σ diferentes de σ se les llama caras propias.

Pasemos ahora a las propiedades topológicas de los simplejos. En la definición de simplejo no dotamos a estos conjuntos de una topología, aunque los definimos como un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Luego, es natural pensar que vamos a estudiarlos como subespacio topológico de $\mathbb{R}^m$, y esto es precisamente lo que haremos. Sin embargo, como no estamos interesados en los simplejos como espacio topológico en sí, sino más bien como una herramienta que nos llevará a la construcción de otro espacios, omitiremos las demostraciones de los resultados que no vayamos a utilizar fuertemente más adelante. Iniciamos con probablemente el resultado más importante de los que presentaremos.

Teorema 2.9. *Los simplejos de la misma dimensión son homeomorfos entre sí.*

De este teorema se puede decir aún más, y es que los complejos resultan ser linealmente homeomorfos, es decir, existe un homeomorfismo lineal entre ellos. Habiendo dicho esto, no podemos ahora no presentar tal homeomorfismo. Con esta idea en mente, y conociendo la importancia que tienen los vértices de un simplejo, es natural pensar que dados simplejos $\sigma_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ y $\tau_n = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$, el homeomorfismo h entre ellos está dado por

$$h\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i,$$

y efectivamente, dicha función resulta ser un homeomorfismo.

Por otra parte, un resultado que a nosotros nos resultará de lo más importante, y que por tanto probamos, es que los simplejos son contráctiles. En la figura 2.4 mostramos la acción de la contracción que proponemos en la demostración de este teorema.

Teorema 2.10. *Los simplejos son espacios contráctiles.*

Demostración. Sea $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Utilizando la independencia lineal de β se obtiene que el conjunto $A = \beta \cup \{0\}$ es un conjunto geométricamente independiente, por lo que sus puntos determinan un simplejo, digamos σ_n. Denotemos por e_0 al vector 0 para simplificar la notación. Proponemos a la función $F : \sigma_n \times I \to \sigma_n$ dada por $F(x, t) = (1 - t)x$ como contracción de σ_n.

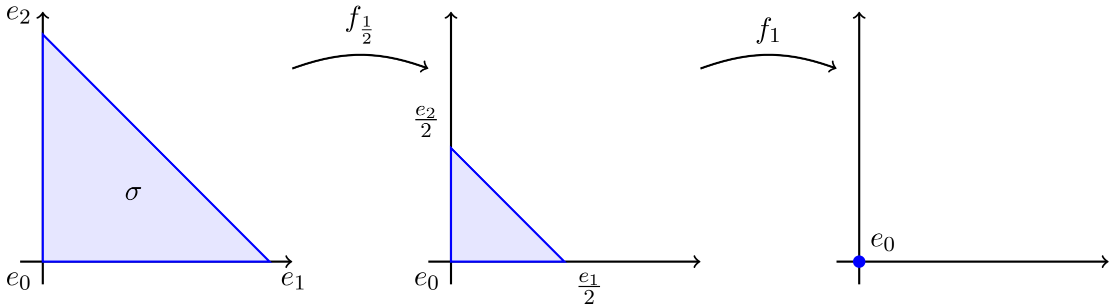

Figura 2.4: Acción de la contracción de un simplejo de dimensión 2.

En primer lugar, debemos verificar que $F(x,t) \in \sigma_n$ para todo $x \in \sigma_n$ y para todo $t \in I$. Sean $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \in \sigma_n$ y $t \in I$. Tenemos entonces que

$$F(x,t) = (1-t)x = \sum_{i=0}^{n} (1-t)\lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (1-t)\lambda_i e_i.$$

Para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $\hat{\lambda_i} = (1-t)\lambda_i$, y sea $\hat{\lambda_0} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda_i}$. Es claro entonces que $F(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \hat{\lambda_i} e_i$, y que $\sum_{i=0}^{n} \hat{\lambda_i} = 1$, por lo que resta verificar que $\hat{\lambda_i} \geq 0$ para todo i para concluir que $F(x,t) \in \sigma_n$. Como $t \in I$, tenemos que $1 - t \geq 0$, y como $\lambda_i \geq 0$ para todo i, entonces $\hat{\lambda_i} = (1-t)\lambda_i \geq 0$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por otra parte, es claro que $\hat{\lambda_i} \leq \lambda_i$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ya que $1 - t \leq 1$, lo que implica que $\sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1$, y de esta desigualdad se obtiene que $\hat{\lambda_0} \geq 0$. Por lo tanto, $F(x,t) \in \sigma_n$.

Ahora, es claro que F es continua, y tenemos que satisface

$$F(x,0) = (1-0)x = x, \quad F(x,1) = (1-1)x = 0,$$

por lo que por definición es una contracción de σ_n, y entonces σ_n es contráctil.

Aplicando el teorema 2.9 y el corolario 2.1, concluimos que los simplejos son espacios contráctiles. $\square$

Resulta entonces que los simplejos poseen la propiedad que más estamos interesados en estudiar, que es la contractibilidad. Sin embargo, esto no es todo, pues también poseen las otras propiedades que más hemos discutido hasta ahora: la compacidad y la conexidad. Esto es importante porque, como veremos cuando empecemos a estudiar hiperespacios, significa que los simplejos comparten propiedades topológicas con los hiperespacios de nuestro interés. Esto nos puede sugerir de qué forma utilizaremos a los simplejos más adelante, aunque comentaremos esta situación más adelante cuando los simplejos sean requeridos en el contexto de los hiperespacios.

A partir de la teoría que hemos desarrollado en torno a los simplejos, estamos listos para dar el siguiente paso hacia la construcción de los poliedros.

Definición 2.12. Un **complejo simplicial** K es una colección finita de simplejos que satisface las siguientes propiedades:

1. Si $\sigma \in K$ y τ es una cara de σ, entonces $\tau \in K$.

2. Si $\sigma, \tau \in K$, entonces $\sigma \cap \tau$ es vacío o es una cara común de σ y τ.

Lo primero que notamos de esta nueva definición es que, a excepción del caso de dimensión 0, un simplejo por si mismo no conforma un complejo simplicial. Sin embargo, no es difícil convencerse dado un simplejo σ, la colección de las caras de σ, incluido el mismo σ forman un complejo simplicial. Este complejo es importante, y se le denota por $K(\sigma)$. Otro complejo simplicial importante que está relacionado con un simplejo dado es el conjunto de las caras propias de σ, es decir, $K(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. A este complejo se le llama la frontera de σ, y se le denota por $\dot{\sigma}$.

Cuando hablemos de un subcomplejo de un complejo simplicial nos referiremos a un subconjunto de un complejo simplicial que es a su vez un complejo simplicial. Luego, de forma similar a como anteriormente nos referimos a pares de espacios, podemos hablar ahora de pares simpliciales, los cuales constan de dos complejos simpliciales K y L tales que $L \subseteq K$, y de igual forma lo denotamos por (K, L). Algunos de estos subcomplejos son muy importantes, y además nos serán útiles más adelante, por lo que los definimos a continuación.

Definición 2.13. Sea K un complejo simplicial. Si $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos el **$r$-esqueleto de** K, al cual denotamos por K^r, como la colección de todos los simplejos en K de dimensión a lo más r.

Nosotros ya conocemos un ejemplo de un r-esqueleto, pues en el caso particular en que $K = K(\sigma_n)$ para algún simplejo σ_n, se puede ver que $K^{n-1} = \dot{\sigma}_n$. Este concepto además es útil porque permite definir la dimensión de un complejo simplicial K como el mínimo r tal que $K^r = K$, o lo que es lo mismo, la máxima dimensión de los simplejos de K. Otro subcomplejo de un complejo simplicial que utilizaremos más adelante es el siguiente.

Definición 2.14. Sea K un complejo simplicial, y sea σ un simplejo en K. Definimos la **estrella de σ en** K, la cual denotamos por $\operatorname{St}\sigma$, como la colección de simplejos τ de K tales que σ es una cara de τ.

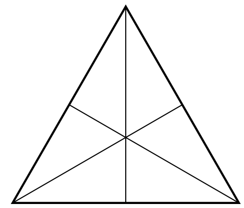

Figura 2.5: Subdivisión baricéntrica de un simplejo de dimensión 2.

Otro complejo simplicial relacionado con un solo simplejo σ es el que se llama la subdivisión baricéntrica, y que se denota por Sdσ. Su definición es un poco complicada y requiere de varios conceptos que no hemos presentado, pero la idea es sencilla. Simplemente se trata considerar los baricentros de las caras de un simplejo como nuevos vértices, y unirlos para generar nuevas caras. En el caso sencillo de la dimensión 2, esto se ve como en la figura 2.5. Es importante mencionar que la subdivisión baricéntrica se puede generalizar a cualquier complejo simplicial K, simplemente como la unión de las subdivisiones baricéntricas de todos sus simplejos, y de forma análoga se denota por $\operatorname{Sd} K$.

Es importante hacer notar que no estamos considerando a un complejo simplicial como un espacio topológico. Sin embargo, todo complejo simplicial tiene asociado un espacio topológico natural, que es precisamente el espacio en el que estamos interesados.

Definición 2.15. Sea K un complejo simplicial. Definimos el **poliedro de** K, al cual denotamos por $|K|$, como el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ que pertenecen a al menos un simplejo de K, equipado con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Algunos poliedros muy sencillos son aquellos que se relacionan con un complejo simplicial que se define a partir de un simplejo. Por ejemplo, es fácil ver que si σ es un simplejo, se tiene que $|K(\sigma)| = \sigma$, y de la misma manera $|\operatorname{Sd}\sigma| = \sigma$. Este último hecho también vale para subdivisiones baricéntricas de complejos más generales, es decir, $|\operatorname{Sd} K| = |K|$ para cualquier complejo simplicial K. El poliedro $|\dot{\sigma}_n|$ también es un espacio bastante conocido, pues se puede probar que es homeomorfo a la esfera de dimensión $n-1$, que se define como el conjunto $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Podríamos haber definido a un poliedro como la unión finita de simplejos, pues el espacio que resulta de la definición anterior puede ser expresado de tal forma. Además, como ya mencionamos, se tiene que $|K(\sigma)| = \sigma$ para cualquier simplejo σ, por lo que parece un poco innecesario haber pasado por el concepto de complejo simplicial. Sin embargo, el utilizar la herramienta de los complejos simpliciales permite definir muchas más propiedades topológicas en los poliedros que las que se tendrían

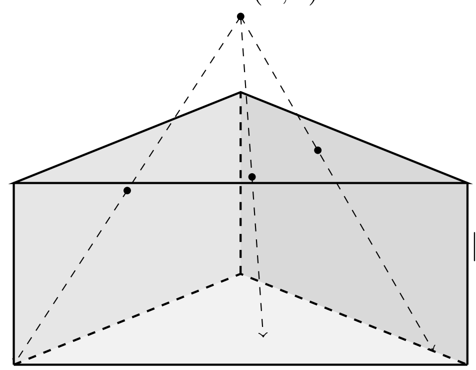

Figura 2.6: Retracción de $\sigma \times I$ a $|\dot{\sigma}| \times I \cup \sigma \times \{0\}$.

al hablar simplemente de una unión de simplejos, además de que la estructura de un complejo simplicial nos da información muy valiosa respecto a las intersecciones de los simplejos.

Los poliedros tienen muchas propiedades topológicas que los hacen espacios muy importantes. Respecto a las más sencillas, es claro que son espacios métricos como subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y también son compactos, lo que se puede ver a partir del teorema 1.12, aunque ya no necesariamente son conexos. Muchas de las propiedades que tienen van mucho más allá del alcance que les pretendemos dar en este trabajo, por lo que no las mencionaremos, pero pueden ser consultadas en varios textos de topología algebraica, como lo son [2], [3], [12] o [13]. Para nosotros, probablemente la propiedad más importante que tienen es la siguiente, para la cual no presentaremos una demostración completa, sino solamente la idea principal. Una demostración completa se puede encontrar en [12, Teorema 2.4.1].

Teorema 2.11. *Sea (K, L) un par simplicial. Entonces el par $(|K|, |L|)$ tiene la propiedad de extensión de homotopía.*

Demostración. Notemos que para cada simplejo σ en K, existe una retracción $\rho_\sigma : \sigma \times I \to |\dot{\sigma}| \times I \cup \sigma \times \{0\}$, a saber, la proyección desde el punto $(\hat{\sigma}, 2)$ que se muestra en la figura 2.6. Sea $M^r = |K^r| \cup |L|$. Utilizando el lema del pegado, se puede construir una retracción $\rho_r : M^r \times I \cup K \times \{0\} \to M^{r-1} \times I \cup K \times \{0\}$ utilizando las retracciones ρ_σ de los simplejos correspondientes en cada caso. Componiendo cada una de estas retracciones, se obtiene finalmente una retracción $\rho : |K| \times I \to |K| \times \{0\} \cup |L| \times I$, lo que por el teorema 2.6 significa que $(|K|, |L|)$ tiene la propiedad de extensión de homotopía. $\square$

Capítulo 3

Espacios métricos

Como mencionamos al inicio del primer capítulo, un espacio métrico es un caso particular de un espacio topológico, en el cual la topología se define a partir de una función llamada métrica, o distancia. Esta topología tiene la bondad de que posee varias propiedades deseables, como los axiomas de separación, y además permite caracterizar algunos de los conceptos que estudiamos en el primer capítulo de otras formas, proporcionándonos así nuevas herramientas para trabajar en estos espacios. Para poder empezar a trabajar en los espacios métricos, lo primero que necesitamos es definir lo que es una métrica.

Definición 3.1. Sea X un conjunto no vacío. Una **métrica** (o **distancia**) en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$, con $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Al par (X, d) se le llama **espacio métrico**.

Es importante recalcar que a la tercera propiedad de la definición anterior se le llama desigualdad del triángulo. En $\mathbb{R}^n$, a partir de las propiedades de los números reales se puede definir la siguiente métrica.

Definición 3.2. La **métrica euclidiana** es la métrica definida en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Teniendo entonces la función que nos ayudará a construir la topología, pasamos a definir los conjuntos a partir de los cuales definiremos la topología.

Definición 3.3. Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $p \in X$, $\epsilon > 0$. Definimos el conjunto

$$B_d(p, \epsilon) = \{x \in X : d(x, p) < \epsilon\},$$

al cual se le llama **bola abierta con centro en** p **y radio** ϵ. En caso de que no haya confusión de qué métrica se está utilizando, escribiremos simplemente $B(p, \epsilon)$.

Para muchos autores es suficiente con definir las bolas abiertas para obtener la topología métrica, pues se puede probar que son una base para una topología. Nosotros queremos ser un poco más específicos que eso, y reformular algunas definiciones del primer capítulo en términos de bolas para que nos sea claro cómo es que las usaremos en adelante. En primer lugar, y en cierto modo al revés de como lo hicimos antes, definimos lo que es un abierto a partir de los elementos básicos que son las bolas.

Definición 3.4. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que el conjunto A es **abierto en** X si para cada $x \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq A$.

Esta definición no causa conflicto alguno con la definición de abierto que dimos en el primer capítulo, pues como veremos a continuación, estos son precisamente los elementos de la topología métrica.

Teorema 3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. La colección de conjuntos abiertos en X forman una topología de X.*

Demostración. El hecho de que X es abierto es trivial, y $\emptyset$ es abierto por vacuidad, así que se cumple el primer axioma de topología.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de abiertos en X, y tomemos $x \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ arbitrario. Luego, $x \in U_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in J$, por lo que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq U_{\alpha_0}$. Pero como $U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, entonces por transitividad $B(x, \epsilon) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, lo que prueba que $\bigcup_{\alpha \in J} U\alpha$ es abierto, y se cumple el segundo axioma de topología.

Ahora, sean $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X, y tomemos $x \in \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Entonces $x \in U_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que existen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ tales que $B(x, \epsilon_k) \subseteq U_k$ para cada k. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. Luego, para cada k tenemos que $B(x, \epsilon) \subseteq B(x, \epsilon_k) \subseteq U_k$, con lo que $B(x, \epsilon) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Esto prueba que $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ es abierto, y por lo tanto se cumple el tercer axioma de topología.

Al haber probado que se cumplen los tres axiomas de la definición de topología, podemos concluir que la colección de abiertos en X forma una topología. $\square$

Por la forma en que hemos procedido, aún no es claro que las bolas sean conjuntos abiertos, lo cual es clave si queremos ver que son una base de la topología métrica, así que probamos esto a continuación.

Proposición 3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $x \in X$, y sea $\epsilon > 0$. Entonces $B(x, \epsilon)$ es abierto en X.*

Demostración. Tomemos un punto $y \in B(x, \epsilon)$, y sea $\delta = \epsilon - d(x, y)$. Si $z \in B(y, \delta)$, entonces tenemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = d(x, y) + \epsilon - d(x, y) = \epsilon,$$

lo que significa que $z \in B(x, \epsilon)$, y entonces $B(y, \delta) \subseteq B(x, \epsilon)$. Por lo tanto, $B(x, \epsilon)$ es abierto en X. □

El siguiente paso lógico en nuestro estudio de la topología métrica sería probar de manera formal que las bolas abiertas son una base de la topología métrica, pero esto realmente se desprende inmediatamente de la nueva definición de abierto que dimos, por lo que en realidad este hecho es más bien un corolario del teorema anterior.

Corolario 3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. La colección de bolas abiertas en X forman una base de la topología métrica.*

Una pregunta que surge de forma natural tras haber introducido la topología métrica es si dado un espacio topológico cualquiera, es posible encontrar una métrica que induzca la topología del espacio. La respuesta a esta pregunta es negativa, con el contraejemplo más sencillo siendo la topología indiscreta, que a excepción del caso trivial de un espacio de un solo punto, nunca proviene de una métrica. Los casos de espacios para los que sí se puede encontrar una métrica que induzca su topología son importantes y reciben su propio nombre.

Definición 3.5. Sea $(X.\mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que X es **metrizable** si existe una métrica d en X tal que la topología de (X, d) es $\mathcal{T}$.

Un detalle importante al respecto de los espacios metrizables es que no necesariamente existe una única métrica que induzca su topología. Por ejemplo, se puede probar que si (X, d) es un espacio métrico y c es una constante positiva, entonces cd también es una métrica en X, y las topologías de (X, d) y (X, cd) son iguales. Este es sólo uno de muchos ejemplos de cómo se pueden encontrar diferentes métricas para un mismo espacio que induzcan la misma topología.

Es importante mencionar que a pesar de que como espacio topológico no hay diferencia en qué métrica se use, algunas propiedades de los espacios métricos que no son invariantes topológicos sí cambian dependiendo de la métrica que se utilice. Esto es importante sobre todo cuando se utilizan los espacios métricos dentro de otros contextos, como por ejemplo el análisis. El ejemplo más sencillo de esto es la siguiente propiedad.

Definición 3.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es **acotado** si existe $M > 0$ tal que $d(x, y) \leq M$ para todo par de puntos $x, y \in X$. En ese caso, definimos el **diámetro** de X como el número

$$\operatorname{diám} X = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Es fácil ver que, utilizando la métrica euclidiana, $\mathbb{R}^n$ no es un espacio acotado. Sin embargo, se puede probar que para cualquier espacio topológico metrizable, existe una métrica bajo la cual el espacio es acotado, y que induce la topología del espacio. Una prueba de esto se puede encontrar en [14, Teorema 2.9.1]. Una propiedad muy similar, y que nos será muy útil más adelante, es la siguiente.

Definición 3.7. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es **totalmente acotado** si para todo $\epsilon > 0$, existe una cubierta finita de X cuyos elementos son bolas abiertas de radio ϵ.

Podemos pensar que el ser totalmente acotado es una generalización de ser acotado, pues se puede probar que todo conjunto totalmente acotado es también acotado.

La forma en que trabajaremos con espacios métricos no cambiará mucho respecto a los conceptos más básicos. La principal diferencia será que ahora daremos un mucho mayor protagonismo a las bolas abiertas que lo que antes le dábamos a los abiertos básicos. Esto significa que cuando busquemos abiertos con ciertas propiedades, específicamente trataremos de encontrar bolas abiertas alrededor de un centro, lo que a su vez supone encontrar radios de las bolas. De forma similar, cuando queramos verificar que una propiedad se satisface para todo abierto, simplemente probaremos que toda bola satisface la propiedad, lo que nuevamente se reduce a trabajar con cualquier radio $\epsilon > 0$.

Para ejemplificar lo que acabamos de mencionar, reformularemos un teorema con el que ya hemos trabajado para el caso específico de espacios métricos.

Proposición 3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $E \subseteq X$ y sea $x \in X$. Entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si $B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$.*

Elegimos este resultado porque a partir de él podemos obtener que un espacio métrico satisface varios axiomas de separación. Nosotros solamente probaremos que satisface los que introdujimos en las definiciones 1.9 y 1.10. Ilustramos la demostración en la figura 3.1.

Teorema 3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es un espacio de Hausdorff y normal.*

Demostración. Para ver que X es Hausdorff, tomemos dos puntos distintos $x, y \in X$, y sea $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2}$. Consideremos los abiertos $U = B(x, \epsilon)$ y $V = B(y, \epsilon)$. Es claro que $x \in U$ y $y \in V$. Supongamos ahora que existe $z \in U \cap V$. Entonces tenemos que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \epsilon + \epsilon = 2\frac{d(x, y)}{2} = d(x, y),$$

lo cual claramente es una contradicción. Por lo tanto, $U \cap V = \emptyset$, y entonces concluimos que X es Hausdorff.

Tomemos ahora dos cerrados F_1 y F_2 en X ajenos. Para cada $x \in F_1$, definamos $\epsilon_x = \frac{1}{2} \operatorname{ínf}\{d(x, y) : y \in F_2\}$. Notemos que si $\epsilon_x = 0$ para algún $x \in F_1$, tendríamos que para todo $\epsilon > 0$ existe $y \in F_2$ tal que $d(x, y) < \epsilon$, o lo que es lo mismo, $B(x, \epsilon) \cap F_2 \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$. Por la proposición 3.2, esto significaría que $x \in \overline{F_2} = F_2$, contradiciendo el hecho de que F_1 y F_2 son disjuntos. Luego, $\epsilon_x > 0$. Sea $U = \bigcup_{x \in F_1} B(x, \epsilon_x)$. De forma análoga, definamos $V = \bigcup_{y \in F_2} B(y, \epsilon_y)$. Es claro que U y V son abiertos, y además $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Supongamos que existe $z \in U \cap V$. Entonces existen $x \in F_1$ y $y \in F_2$ tales que $z \in B(x, \epsilon_x)$ y $z \in B(y, \epsilon_y)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\epsilon_x \leq \epsilon_y$. Luego, tenemos que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \epsilon_x + \epsilon_y \leq 2\epsilon_x = \operatorname{ínf}\{d(x, y) : y \in F_2\},$$

que claramente es una contradicción, así que tenemos que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, concluimos que X es normal. $\square$

Dentro de la prueba del teorema anterior obtuvimos un resultado que será muy importante más adelante, por lo que lo introducimos a continuación como un corolario, aunque resaltamos que no es consecuencia del teorema, sino de la demostración.

Corolario 3.2. *Sean (X, d) un espacio métrico, $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$. Entonces $\operatorname{ínf}\{d(x, y) : y \in F\} > 0$.*

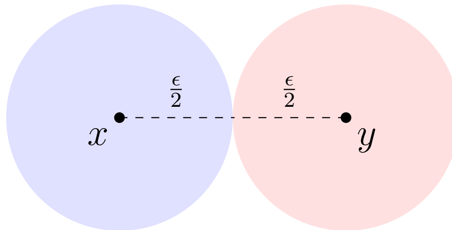

Figura 3.1: Los espacios métricos son Hausdorff.

El que los espacios métricos satisfagan los axiomas de separación es útil no sólo porque los teoremas que ya hemos probado donde se utilizan, sino por otros más que iremos presentando más adelante. Por lo pronto presentamos el siguiente que es válido para cualquier espacio normal de la forma en que lo enunciamos, pero que para espacios métricos vale en un caso más general.

Teorema 3.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ cerrado y disconexo. Entonces existen dos abiertos disjuntos U y V de X que separan a A.*

Demostración. Como A es disconexo, podemos expresarlo como unión de dos abiertos no vacíos y ajenos en A, digamos $A = A_1 \cup A_2$. Esto significa que $A_1 = A \setminus A_2$ y $A_2 = A \setminus A_1$, por lo que tenemos que A_1 y A_2 también son cerrados en A, y al ser A cerrado en X, tenemos que A_1 y A_2 son cerrados en X. Luego, como son cerrados ajenos y X es normal, existen abiertos U y V de X tales que $A_1 \subseteq U$ y $A_2 \subseteq V$. Esto implica que $U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$, y además $A \subseteq U \cup V$, por lo que concluimos que U y V forman una separación de A. $\square$

La forma en que se puede generalizar este teorema en espacios métricos es que no es necesario que el conjunto disconexo sea cerrado. Sin embargo, como nosotros solamente usaremos este resultado para el caso de conjuntos cerrados y disconexos, nos es suficiente presentarlo de la forma en que lo hicimos.

A continuación presentamos la que probablemente será la mayor diferencia entre un espacio métrico y un espacio topológico general, que es la forma en que se trabaja la continuidad de funciones. La definición de continuidad que presentaremos para espacios métricos es considerablemente más sencilla porque trabaja con un solo punto a la vez, en lugar de con todo un conjunto abierto. Esto hace que sea particularmente útil cuando se trabaja con espacios métricos en análisis.

Definición 3.8. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos, y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es **continua en** $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que satisface $d_1(x, x_0) < \delta$, se tiene que $d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Si f es continua en x para todo $x \in X$, decimos simplemente que es **continua**.

A simple vista, esta definición difiere mucho de la definición 1.11, por lo que es de lo más importante asegurarnos de que no estamos introduciendo un concepto completamente nuevo bajo un nombre que ya hemos utilizado anteriormente.

Proposición 3.3. *La definición de continuidad en espacios métricos es equivalente a la definición en espacios topológicos.*

Demostración. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos, y sea $f : X \to Y$ una función. Supongamos primero que f es continua de acuerdo a la definición 1.11. Sea $x \in X$, y sea $\epsilon > 0$. Como f es continua y $B_{d_2}(f(x), \epsilon)$ es abierto en Y, tenemos que $f^{-1}(B_{d_2}(f(x), \epsilon))$ es abierto en X. Denotemos a este conjunto por U para simplificar la notación. Luego, como claramente $x \in U$, existe $\delta > 0$ tal que $B_{d_1}(x, \delta) \subseteq U$. Esto significa que si $y \in X$ es tal que $d(x, y) < \delta$, entonces $y \in U$, con lo que $f(y) \in B_{d_2}(f(x), \epsilon)$, y entonces $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$. Por lo tanto, f es continua en x, y al haber sido $x \in X$ arbitrario, concluimos que f es continua de acuerdo a la definición 3.8.

Supongamos ahora que f es continua de acuerdo a la definición 3.8. Sea $U \subseteq Y$ abierto, y tomemos $x \in f^{-1}(U)$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $B_{d_2}(f(x), \epsilon) \subseteq U$, que existe por ser U abierto, y sea $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ satisface que $d_1(x, y) < \delta$, entonces $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$. Esto significa que $f(y) \in B_{d_2}(f(x), \epsilon) \subseteq U$, por lo que $y \in f^{-1}(U)$. Luego, tenemos que $B_{d_1}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$, lo que prueba que $f^{-1}(U)$ es abierto, y por lo tanto f es continua de acuerdo a la definición 1.11. □

3.1. Sucesiones

Las sucesiones son un objeto matemático que se estudia principalmente en análisis, pero que pueden ser estudiadas también dentro de la topología, pues su comportamiento depende fuertemente de la topología del espacio en que se definen. Nos serán de vital importancia porque permiten caracterizar varios conceptos que utilizaremos recurrentemente a lo largo de este trabajo. Las presentamos en este capítulo porque son de mayor utilidad cuando se definen en un espacio métrico.

Definición 3.9. Sea X un conjunto. Una **sucesión en** X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Al valor de dicha función en n se le llama el n**-ésimo término** de la sucesión, y se le denota por $f(n) = x_n$. A la sucesión se le denota simplemente por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Notemos que en realidad las sucesiones no requieren de una topología para ser definidas. La topología entra hasta el siguiente concepto, que prácticamente es la razón por la que vale la pena estudiar sucesiones.

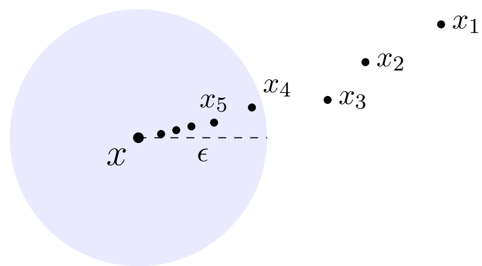

Figura 3.2: Convergencia de una sucesión.

Definición 3.10. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Decimos que la sucesión **converge** a un elemento $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. En ese caso, escribimos $x_n \to x$, o $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, y al elemento x lo llamamos **límite de la sucesión**. En caso contrario, decimos que la sucesión **diverge**.

Para no generar ambigüedad con la notación introducida en la definición anterior, probamos el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *El límite de una sucesión convergente en un espacio métrico es único.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d), y sean $x, x' \in X$ tales que $x_n \to x$ y $x_n \to x'$. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N$ y $n' \geq N'$, entonces $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(x_{n'}, x') < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, si $n \geq \max\{N, N'\}$, tenemos que

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, concluimos que $d(x, x') = 0$, y por lo tanto $x = x'$. □

La idea de la convergencia de una sucesión es que sus elementos se van acercando cada vez más al elemento que llamamos límite. Esta idea intuitiva se ve apoyada por el siguiente resultado que es inmediato de la definición de convergencia, y la ilustramos en la figura 3.2.

Proposición 3.5. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Entonces $x_n \to x \in X$ si y sólo si $d(x_n, x) \to 0$ en $\mathbb{R}$.*

Para poder ir presentando todos los resultados en los que queremos involucrar sucesiones habrá que introducir todavía más conceptos, pero por lo pronto el concepto de convergencia ya es suficiente para presentar las siguientes caracterizaciones de conjuntos cerrados y de continuidad.

Teorema 3.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $E \subseteq X$. Entonces E es cerrado si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$, se tiene que $x \in E$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que E es cerrado, y tomemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$, y tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x, x_n) < \epsilon$. Esto significa que $x_n \in B(x, \epsilon)$, así que $B(x, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$. Luego, como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, concluimos que $x \in \overline{E} = E$.

Supongamos ahora que para cualquier sucesión en E que converge en X, el límite pertenece a E, y tomemos $x \in \overline{E}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un elemento $x_n \in E$ tal que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Es claro entonces que $d(x_n, x) \to 0$, que por la proposición 3.5 significa que $x_n \to x$. Luego, tenemos que $x \in E$ por hipótesis, con lo que $\overline{E} \subseteq E$, y entonces $E = \overline{E}$. Por lo tanto, E es cerrado. $\square$

Teorema 3.5. *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos, sea $f : X \to Y$ una función, y sea $x \in X$. Entonces f es continua en x si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \to x$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.*

Demostración. Supongamos primero que f es continua en x, y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$. Sea $\epsilon > 0$, y tomemos $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ satisface que $d_1(x, y) < \delta$, entonces $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$. Como $x_n \to x$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d_1(x_n, x) < \delta$. Por lo anterior, esto implica que si $n \geq N$, entonces $d_2(f(x_n), f(x)) < \epsilon$, y entonces por definición concluimos que $f(x_n) \to f(x)$.

Supongamos ahora que f no es continua x. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in X$ con $d_1(x, x_\delta) < \delta$ y $d_2(f(x), f(x_\delta)) \geq \epsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in B_{d_1}(x, \frac{1}{n})$ tal que $d_2(f(x), f(x_n)) \geq \epsilon$. Entonces tenemos que $d_1(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$, con lo que $x_n \to x$, pero como $B_{d_2}(f(x), \epsilon) \cap \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, es claro que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$, por lo que no es cierto que $f(x_n) \to f(x)$ para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \to x$. $\square$

Nuestro siguiente paso será estudiar cómo nos ayudan las sucesiones a caracterizar conjuntos compactos. Presentaremos dos caracterizaciones, la primera de las cuales requiere de un concepto nuevo.

Definición 3.11. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d), y sea $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{N}$ tal que $n_i < n_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. A la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ se le llama **subsucesión de** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

De forma un tanto lógica, la convergencia de una sucesión está íntimamente ligada con la de sus subsucesiones mediante el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d), y sea $x \in X$. Entonces $x_n \to x$ si y sólo si toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

Demostración. En primer lugar, notemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de sí misma, por lo que si toda subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, en particular $x_n \to x$.

Supongamos ahora que $x_n \to x$, y tomemos una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea $\epsilon > 0$, y tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. Notemos que la sucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ satisface que $n_k \geq k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, por lo que si $k \geq N$, tenemos entonces que $n_k \geq k \geq N$, y entonces $d(x_{n_k}, x) < \epsilon$. Por lo tanto, $x_{n_k} \to x$. $\square$

Con la idea de subsucesión podemos presentar ya la primera de las caracterizaciones de compacidad que necesitamos. Esta caracterización es muy útil en análisis, e incluso en algunos textos de esta área se puede encontrar como la definición de compacidad. Nosotros realmente solo la utilizaremos para poder probar la segunda caracterización que presentaremos, la cual utilizaremos fuertemente más adelante.

Teorema 3.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

La demostración de este teorema requiere de varios conceptos que no hemos desarrollado, por lo que remitimos al lector interesado a [14, Teorema 3.7.4] para dicha demostración.

La segunda caracterización de compacidad que nos interesa requiere de aún más conceptos y resultados previos, el primero de los cuales presentamos a continuación.

Definición 3.12. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es **de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

El concepto de sucesión de Cauchy es muy similar el de convergencia en el sentido de que habla de que los elementos de la sucesión se vuelven muy cercanos, en este caso entre sí, y a un punto límite para sucesiones convergentes. Claramente la idea de cercanía a un punto límite debe implicar cercanía entre los elementos de la sucesión, por lo que no es de extrañar que se dé el siguiente resultado.

Proposición 3.6. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, si $n, m \geq N$, tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

por lo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. □

El recíproco de esta proposición no siempre es cierto. Por ejemplo, mediante el teorema 3.4 podemos ver que en cualquier subconjunto no cerrado de un espacio métrico existen sucesiones de Cauchy que no convergen. Los espacios donde todas las sucesiones de Cauchy convergen son muy importantes, y reciben su propio nombre.

Definición 3.13. Un espacio métrico (X, d) se dice **completo** si toda sucesión en X que es de Cauchy converge en X.

Anteriormente vimos que la convergencia de una sucesión está ligada con la de sus subsucesiones. Para las sucesiones de Cauchy, esta relación es aún más fuerte.

Lema 3.1. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo límite de la subsucesión.*

Demostración. Supongamos que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a un elemento $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$, y tomemos $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_1$ entonces $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$, y si $n, m \geq N_2$, entonces $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego, si $n, k \geq \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

con lo que se prueba que $x_n \to x$. □

Con las ideas que acabamos de presentar podemos probar la caracterización de compacidad en la que estamos interesados.

Teorema 3.8. *Un espacio métrico es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Supongamos en primer lugar que X es compacto, y sea $\epsilon > 0$. Sea $\mathcal{U} = \{B(x, \epsilon)\}_{x \in X}$, que claramente es una cubierta abierta de X. Por compacidad de X, $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita, es decir, X tiene una cubierta finita cuyos elementos son bolas abiertas de radio ϵ, por lo que X es totalmente acotado por definición.

Por otra parte, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X, por el teorema 3.7, tenemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente. Luego, por el lema 3.1 tenemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo límite que esta subsucesión, por lo que al haber sido una sucesión de Cauchy arbitraria en X, concluimos que X es completo.

Supongamos ahora que X es totalmente acotado y completo. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Consideremos una cubierta finita de X por bolas de radio 1. Entonces alguna de estas bolas, llamémosla B_1, satisface que $x_n \in B_1$ para infinitos n. Sea $J_1 \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto de dichos índices, es decir, $n \in J_1$ si y sólo si $x_n \in B_1$. Considerando ahora una cubierta por bolas de radio $\frac{1}{2}$, tenemos que alguna de ellas, digamos B_2, contiene a x_n para infinitos $n \in J_1$. De manera análoga, definimos el conjunto $J_2 \subseteq J_1$ tal que $n \in J_2$ si y sólo si $x_n \in B_2$. Continuando con este proceso, obtenemos una sucesión de conjuntos infinitos $J_k \subseteq \mathbb{N}$ tales que $J_{k+1} \subseteq J_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y con la propiedad de que $n \in J_k$ si y sólo si $x_n \in B_k$, donde cada B_k es una bola abierta de radio $\frac{1}{k}$, respectivamente.

Ahora construiremos una sucesión creciente en $\mathbb{N}$. Tomemos $n_1 \in J_1$. Ahora, dado un elemento $n_k \in J_k$, como J_{k+1} es infinito, podemos tomar $n_{k+1} \in J_{k+1}$ tal que $n_{k+1} > n_k$. Este proceso inductivo nos proporciona una sucesión creciente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$, lo que a su vez nos permite obtener una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Sea $\epsilon > 0$, y tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} < \epsilon$. Si $n, m \geq N$, por la construcción anterior tenemos que $x_n, x_m \in B_N$, así que si $x \in X$ es el centro de B_N, tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \epsilon,$$

lo que prueba que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Luego, como X es completo, tenemos que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge en X, así que por el teorema 3.7 concluimos que X es compacto. $\square$

Además de la utilidad que tendrá este teorema más adelante, por lo pronto nos da un corolario que será bastante útil.

Corolario 3.3. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces X es acotado.*

3.2. Continuos

En este capítulo hemos delimitado los espacios que estamos estudiando al pedir que sean metrizables. El siguiente paso en este proceso de delimitación será también pedir que sean compactos y conexos. Este tipo de espacios es tan importante que recibe su propio nombre.

Definición 3.14. Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y con más de un punto.

De esta definición es importante mencionar que algunos autores omiten la condición de que el espacio tenga más de un punto para poder considerarlo como un continuo, reemplazándola por pedir que simplemente sea no vacío. En su lugar, introducen el siguiente concepto para hacer la distinción.

Definición 3.15. Decimos que un conjunto no vacío es **no degenerado** si tiene más de un punto. En caso contrario decimos que es **degenerado**, **singular** o **unipuntual**.

Existen varias clasificaciones para los continuos según las propiedades topológicas que poseen. En algunos casos se estudian a los continuos de acuerdo a la presencia o ausencia de una propiedad, como en el caso de los continuos descomponibles e indescomponibles, y en otros casos simplemente se trata de estudiar qué propiedades adicionales resultan a partir de una propiedad específica, como en el caso de los continuos localmente conexos, llamados continuos de Peano. Estas clasificaciones y propiedades se estudian en la rama de la topología general naturalmente llamada teoría de continuos.

Siendo que existe toda una rama de la topología que se dedica a estudiar estos espacios, es natural pensar que existen muchos ejemplos de continuos. Probablemente los más comunes son los que pueden ser clasificados como gráficas finitas, que precisamente resultan ser los continuos en los que estamos interesados en este trabajo. No presentaremos ejemplos de otro tipo de continuos, con excepción del cubo de Hilbert, debido a que no pretendemos estudiarlos, pero referimos al lector interesado a [15, Capítulo 1] para dichos ejemplos.

Antes de presentar algunos ejemplos de gráficas finitas e introducirnos en su estudio, presentaremos el concepto de continuo universal y daremos un ejemplo, el anteriormente mencionado cubo de Hilbert.

Definición 3.16. Un continuo X se dice que es **universal** si para cualquier continuo Y, existe un encaje $f : Y \hookrightarrow X$.

Definición 3.17. Un **cubo de Hilbert** es cualquier espacio homeomorfo al espacio producto

$$\mathcal{Q} = I^{\infty} = \prod_{n=1}^{\infty} [0,1]_n.$$

Para poder empezar a trabajar con el cubo de Hilbert, primero es importante conocer cómo son sus elementos. De la definición de espacio producto sabemos que éstos son funciones cuyo dominio es el conjunto de índices del producto. Pero en este caso dicho conjunto es $\mathbb{N}$, así que por definición tenemos que estas funciones son de hecho sucesiones en $[0, 1]$.

Claramente, el hecho de que el cubo de Hilbert es un continuo universal no es nada trivial, y hace falta probarlo, empezando por el hecho de que efectivamente se trata de un continuo. Esto también es importante probarlo, pues aunque es sabido que el producto de espacios compactos es compacto por el teorema de Tychonoff, y de forma similar para la conexidad, en la definición no se le da su topología a partir de una métrica, por lo que hay que asegurarse de que se trata de un espacio metrizable. Este primer resultado lo presentamos a continuación.

Proposición 3.7. *La función $d : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$d((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

es una métrica que induce la topología producto en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.

Demostración. Antes de verificar que la función d sea una métrica, es necesario asegurarse de que está bien definida. Para simplificar la notación, denotemos por x, y, z a los elementos $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{Q}$, respectivamente. Si consideramos que x y y son elementos arbitrarios de $\mathcal{Q}$, entonces $x_n, y_n \in [0, 1]$ para todo n, lo que significa que $|x_n - y_n| \leq 1$ para todo n, y entonces $0 \leq \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ para todo n. Luego, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge por ser una serie geométrica con razón $\frac{1}{2}$, por criterio de comparación tenemos que $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ converge, y entonces la función d está bien definida.

En primer lugar, es claro que $|x_n - y_n| \geq 0$ para todo n por propiedades del valor absoluto, por lo que es inmediato que

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \geq 0.$$

Además, tenemos que

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = 0 \Leftrightarrow \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = 0 \quad \forall n \Leftrightarrow x_n = y_n \quad \forall n \Leftrightarrow x = y,$$

con lo que d satisface el primer axioma de métrica.

Por otra parte, notemos que

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|y_n-x_n|}{2^n}=d(y,x),$$

y se satisface el segundo axioma de métrica.

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-z_n+z_n-y_n|}{2^n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x_n-z_n|}{2^n}+\frac{|z_n-y_n|}{2^n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-z_n|}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z_n-y_n|}{2^n}=d(x,z)+d(z,y),\end{aligned}$$

por lo que también se satisface la desigualdad del triángulo. Todo lo anterior nos permite concluir que d es una métrica para $\mathcal{Q}$.

Para ver que d induce la topología producto en $\mathcal{Q}$, debemos probar que los abiertos con la topología producto son también abiertos con la topología métrica de $\mathcal{Q}$, y viceversa. Tomemos primero un abierto básico de la topología producto, digamos

$$U=\prod_{j=1}^{k}U_{n_j}\times\prod_{n\neq n_j}[0,1]_n,$$

donde cada U_{n_j} es abierto en $[0,1]_{n_j}$. Tomemos un elemento $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in U$, y para cada $j\in\{1,2,\ldots,k\}$ sea $\epsilon_j>0$ tal que $B(x_{n_j},\epsilon_j)\subseteq U_{n_j}$. Sea $\epsilon=\text{mín}\{\frac{\epsilon_j}{2^{n_j}}:1\leq j\leq k\}$. Si $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B(x,\epsilon)$, por definición tenemos que $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n}<\epsilon$, y como cada sumando es no negativo, esto implica que $\frac{|x_n-y_n|}{2^n}<\epsilon$ para todo n. En particular, tenemos que $\frac{|x_{n_j}-y_{n_j}|}{2^{n_j}}<\epsilon\leq\frac{\epsilon_j}{2^{n_j}}$ para cada $j\in\{1,\ldots,k\}$, lo que significa que $|x_{n_j}-y_{n_j}|<\epsilon_j$, y entonces $y_{n_j}\in B(x_{n_j},\epsilon_j)$. Esto prueba que $y\in U$, por lo que $B(x,\epsilon)\subseteq U$, y por lo tanto U es abierto con la métrica d.

Tomemos un abierto V con la métrica d, y $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in V$. Sea $\epsilon>0$ tal que $B(x,\epsilon)\subseteq V$, y sea $m\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\epsilon}{2}$. Para cada $n<m$, sea $\epsilon_n=\frac{2^{n-1}\epsilon}{m-1}$, y sea $B=\prod_{n=1}^{m-1}B(x_n,\epsilon_n)\times\prod_{n=m}^{\infty}[0,1]_n$, que claramente contiene a x, y es un abierto básico de la topología producto. Luego, si $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B$, tenemos que

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{|x_n-y_n|}{2^n}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n}\leq\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\epsilon_n}{2^n}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\&=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{2^n}\frac{2^{n-1}\epsilon}{m-1}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\sum_{n=1}^{m-1}\frac{\epsilon}{2(m-1)}+\frac{\epsilon}{2}=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,\end{aligned}$$

así que $y \in B(x, \epsilon)$, y entonces $x \in B \subseteq B(x, \epsilon) \subseteq V$, por lo que concluimos que V es un abierto en la topología producto. $\square$

Uno podría preguntarse cuál es la necesidad de probar que la topología inducida por la métrica en el cubo de Hilbert resulta ser la topología producto. Ciertamente, podríamos empezar a trabajar con él simplemente sabiendo que se trata de un espacio métrico. Sin embargo, muchas de las demostraciones que presentaremos a continuación se simplificarán bastante debido a que podremos aplicar varios de los resultados que desarrollamos en la sección 1.4.1, lo cual solamente será posible debido a que probamos que la topología del cubo de Hilbert es la topología producto. La primera de estas demostraciones es una que ya hemos insinuado anteriormente.

Teorema 3.9. *El cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$ es un continuo no degenerado.*

Demostración. Debido a que $I = [0, 1]$ es no degenerado, es claro que $\mathcal{Q}$ también lo es. Además, por la proposición anterior tenemos que es un espacio métrico. Finalmente, al ser un producto de espacios compactos y conexos, por los teoremas 1.27 y 1.26 tenemos que también es compacto y conexo. Por lo tanto, $\mathcal{Q}$ es un continuo. $\square$

Queremos probar ahora que el cubo de Hilbert es efectivamente un continuo universal. Este resultado realmente no es difícil, pero primero requerimos de un lema importante que utilizaremos en la demostración.

Lema 3.2. *Todo espacio métrico compacto tiene un subconjunto denso numerable.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la cubierta abierta $\mathcal{B}_n = \{B(x, \frac{1}{n})\}_{x \in X}$ de X. Por compacidad, cada una de estas cubiertas tiene una subcubierta finita, digamos $\mathcal{B}'_n = \{B(x_i^n, \frac{1}{n})\}_{i=1}^{k_n}$. Denotemos por $A_n = \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{k_n}^n\}$ a la colección de centros de las bolas en $\mathcal{B}'_n$, y sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, el cual es un conjunto numerable al ser la unión numerable de conjuntos finitos.

Tomemos $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Como $\mathcal{B}'_n$ es una cubierta de X, tenemos que $x \in B(x_j^n, \frac{1}{n})$ para algún $j = 1, 2, \ldots, k_n$. Pero esto significa que $d(x, x_j^n) < \frac{1}{n} < \epsilon$, por lo que tenemos que $x_j^n \in B(x, \epsilon)$, es decir, $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Luego, $x \in \overline{A}$, lo que nos permite concluir que $\overline{A} = X$, y por lo tanto A es un subconjunto denso y numerable de X. $\square$

Teorema 3.10. *Sea X un continuo. Entonces existe una función $f : X \to \mathcal{Q}$ tal que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ un subconjunto denso y numerable de X. Supongamos que la métrica d de X satisface que $d(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$. Esto lo podemos hacer multiplicando cualquier métrica que induzca la topología de X por la constante $\frac{1}{\text{diám}\, X}$, pues esto no afecta a la topología de X.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to I$ dada por $f_n(x) = d(x, x_n)$. Para ver que estas funciones son continuas, tomemos $x \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Tomemos $\delta = \epsilon$, y $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(x, x_n) \leq d(x, y) + d(y, x_n)$, es decir, $f_n(x) - f_n(y) \leq d(x, y)$, y de forma análoga $f_n(y) - f_n(x) \leq d(x, y)$. Luego, de estas desigualdades tenemos que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq d(x, y) < \delta = \epsilon,$$

por lo que f_n es continua en x, y al haber sido x arbitrario, concluimos que f_n es continua para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definamos ahora la función $f = (f_n)_{n=1}^{\infty} : X \to \mathcal{Q}$, es decir $f(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ para todo $x \in X$. Si π_n denota la función proyección de $\mathcal{Q}$ en su n-ésima coordenada, tenemos entonces que $\pi_n \circ f = f_n$ para toda n, por lo que f es continua por el teorema 1.24. Para ver que esta función también es inyectiva, tomemos $x, y \in X$ distintos, y sea $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2}$. Por la densidad de A, existe $x_n \in A$ con $d(x, x_n) < \epsilon$. Luego, utilizando la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(x, x_n) + d(x_n, y) \geq d(x, y) = 2\epsilon > d(x, x_n) + \epsilon,$$

por lo que $d(x, x_n) < \epsilon < d(y, x_n)$, y entonces $f_n(x) \neq f_n(y)$, con lo que $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto, tenemos que la función f es inyectiva, y entonces por el teorema 1.11 concluimos que f es un homeomorfismo en su imagen. $\square$

La propiedad anterior es de lo más importante, y la usaremos fuertemente más adelante, pero probablemente lo que nos será más útil para los propósitos de este trabajo, es que en el cubo de Hilbert tenemos nuestro primer ejemplo formal de un espacio contráctil.

Teorema 3.11. *El cubo de Hilbert $\mathcal{Q} = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]$ es contráctil.*

Demostración. Proponemos como contracción de $\mathcal{Q}$ a la función $F : \mathcal{Q} \times I \to \mathcal{Q}$ dada por $F((x_n)_{n=1}^{\infty}, t) = ((1 - t)x_n)_{n=1}^{\infty}$. En primer lugar, notemos que el codominio de F efectivamente es el cubo de Hilbert, pues como $t \in I$, entonces $0 \leq 1 - t \leq 1$, y por lo tanto $(1 - t)x_n \in I$ para todo n. Por otra parte, para todo elemento $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{Q}$

tenemos que

$$F((x_n)_{n=1}^{\infty},0) = ((1-0)x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty},$$
$$F((x_n)_{n=1}^{\infty},1) = ((1-1)x_n)_{n=1}^{\infty} = (0)_{n=1}^{\infty},$$

por lo que solo resta verificar la continuidad para asegurar que se trata de una contracción. Esto lo haremos mediante sucesiones convergentes.

Fijemos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{Q}$, y sea $((x_n^j)_{n=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{Q}$ que converge a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Notemos que esto quiere decir que $(x_n^j)_{j=1}^{\infty}$ converge a x_n cuando $j \to \infty$. Entonces

$$\lim_{j\to\infty} F((x_n^j)_{n=1}^{\infty},t) = \lim_{j\to\infty}((1-t)x_n^j)_{n=1}^{\infty} = ((1-t)x_n)_{n=1}^{\infty} = F((x_n)_{n=1}^{\infty},t),$$

por lo que F es continua en su primera entrada. Ahora, si fijamos $t \in I$ y tomamos $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en I que tiende a t, entonces tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} F((x_n)_{n=1}^{\infty},t_j) = \lim_{j\to\infty}((1-t_j)x_n)_{n=1}^{\infty} = ((1-t)x_n)_{n=1}^{\infty} = F((x_n)_{n=1}^{\infty},t),$$

lo que prueba la continuidad en la segunda entrada de F. Luego, tenemos que F es continua, por lo que efectivamente se trata de una contracción de $\mathcal{Q}$, y por lo tanto $\mathcal{Q}$ es contráctil. $\square$

Terminamos esta sección previa al estudio de las gráficas finitas presentando un par de conceptos que serán fundamentales para los teoremas que pretendemos desarrollar más adelante.

Definición 3.18. Sea X un continuo. Un **punto de corte** es un punto $p \in X$ tal que $X \setminus \{p\}$ es disconexo. Un punto que no es de corte se llama **punto de no corte**.

Los conceptos de puntos de corte y puntos de no corte resultan de lo más importantes en la teoría de continuos, y existen muchos teoremas que se basan fuertemente en ellos. A nosotros no nos atañen dichos resultados por el momento, pero nuevamente referimos al lector interesado a [15, Capítulo 6] para conocer más al respecto.

3.2.1. Gráficas finitas

Como ya hemos mencionado anteriormente, queremos dedicar una sección de nuestro estudio de los continuos a las gráficas finitas, pues es en sus hiperespacios en los que estamos interesados principalmente. Iniciaremos mencionando algunas de sus

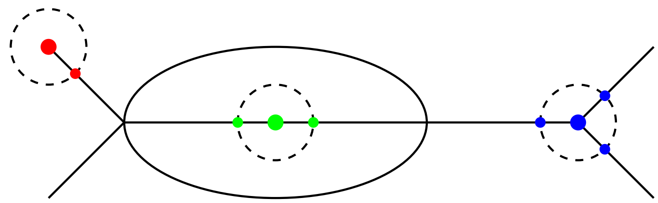

Figura 3.3: Puntos de orden 1, 2 y 3 en una gráfica finita.

propiedades, para luego introducir varios conceptos que nos ayudarán a conocer su estructura. Naturalmente, presentamos en primer lugar la definición de gráfica finita, la cual se apoya fuertemente en el hecho de que los arcos son continuos, que aunque no es algo que hayamos mencionado hasta ahora, sabemos que es cierto por lo que desarrollamos en el primer capítulo de este trabajo.

Definición 3.19. Una **gráfica finita** es un continuo que puede ser expresado como una unión finita de arcos, donde cada dos de éstos se intersectan a lo más en sus extremos.

Probablemente la propiedad más importante que tienen las gráficas finitas es que son localmente conexas, es decir, son continuos de Peano, lo que a su vez implica que son arcoconexas por [15, Teorema 8.23].

Claramente la forma de expresar a una gráfica finita como unión de arcos no tiene por qué ser única. Por ejemplo, el intervalo $I = [0, 1]$ es una gráfica finita al ser él mismo un arco, y ésta ya es una expresión que satisface la definición. Sin embargo, también podemos escribir $I = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$, y esta expresión también satisface la definición. Naturalmente, la manera en que expresamos a una gráfica finita afectará la forma en que trabajamos con ella, así que para cada gráfica trataremos de encontrar la expresión que involucre la menor cantidad de elementos posible. Para hacer esto, introducimos el siguiente concepto, el cual ilustramos en la figura 3.3.

Definición 3.20. Sean G una gráfica finita, $p \in G$ y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que p **es de orden** n **en** G si para todo abierto U de G tal que $p \in U$, existe un abierto V con $p \in V \subseteq U$ y tal que $|\partial V| = n$. Dependiendo del valor de n, el punto p recibe alguno de los siguientes nombres:

1. Si $n = 1$, decimos que p es un **extremo** o **punto terminal de** G.

2. Si $n = 2$, decimos que p es un **punto ordinario de** G.

3. Si $n \geq 3$, decimos que p es un **punto de ramificación de** G.

A los puntos que no son ordinarios también se les llama **vértices de** G.

La noción de orden se define en general para cualquier subconjunto de un espacio topológico, y es un tanto diferente a la que presentamos debido a que el orden de un conjunto puede ser cualquier cardinal. Nosotros la presentamos de esta manera debido a que solo estamos interesados en el orden de los puntos, y que se puede probar que para gráficas finitas, éste siempre es igual a un número natural.

Notemos que para el caso del intervalo, el concepto de extremo coincide con el que habíamos introducido previamente bajo el mismo nombre. Esto nos permite hacer una interpretación geométrica del concepto de orden para los vértices, pues podemos pensar que el orden de un vértice v representa a la cantidad de arcos de G que tienen a v como extremo. Por otra parte, podemos pensar que un punto p es ordinario si existe una forma de expresar a la gráfica como unión de arcos que satisfaga la definición y tal que p es un punto interior de uno de esos arcos. Con esta idea en mente, no es difícil convencerse de que toda gráfica finita tiene un número finito de vértices.

A partir de la nomenclatura que acabamos de darle a los puntos de una gráfica, podemos empezar a limitar la cantidad de arcos que se unen para formar una gráfica finita. Como esto se hará utilizando fuertemente los puntos de ramificación de la gráfica, primero necesitamos comentar sobre las gráficas que no tienen puntos de ramificación. La primera de estas gráficas ya la conocemos, pues se trata del intervalo. Como el intervalo mismo es un arco, es claro que solo se requiere de un arco para satisfacer la definición. A continuación definimos otra gráfica finita que no tiene puntos de ramificación.

Definición 3.21. Una **curva cerrada simple** es cualquier espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}.$$

Es fácil convencerse que S^1 no es un arco, por lo que ciertamente estamos trabajando con un espacio topológicamente diferente del intervalo. Para verificar que efectivamente S^1 es una gráfica finita, consideremos a los conjuntos $L_1 = \{(x, y) \in S^1 : y \geq 0\}$ y $L_2 = \{(x, y) \in S^1 : y \leq 0\}$. Se puede ver que ambos L_1 y L_2 son arcos cuyos extremos son los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, y tales que $L_1 \cup L_2 = S^1$, por lo que S^1 es una gráfica finita.

Notemos que la elección de los extremos de L_1 y L_2 no juega un papel importante en este hecho, por lo que podríamos haber elegido cualesquiera dos puntos de S^1 para que fueran los extremos de los dos arcos que conforman a S^1. Además, acabamos de mostrar la cantidad mínima de arcos que se requieren para expresar a

S^1 como unión de arcos es 2, pues si fuera solo uno tendríamos que $S^1 \cong I$, que como ya mencionamos, no es cierto.

Las dos gráficas anteriores resultan ser las únicas que no tienen puntos de ramificación. Una prueba de este hecho puede ser encontrada en [15, Proposición 9.5]. Luego, podemos pasar a estudiar el resto de gráficas finitas y los arcos que las conforman. Para esto necesitamos del siguiente concepto.

Definición 3.22. Sea G una gráfica finita con al menos un punto de ramificación, y sea $H \subseteq G$. Decimos que H es un **segmento de** G si es una curva cerrada simple que contiene solamente un vértice de G, o si es un arco tal que sus extremos son vértices de G y sus demás puntos son puntos ordinarios de G.

Para generalizar la idea de segmento a todas las gráficas finitas, diremos que los arcos y las curvas cerradas simples tienen un solo segmento, que es la gráfica en cuestión.

Notemos que cada gráfica debe tener una cantidad finita de segmentos, y además se puede probar que todo punto de una gráfica G pertenece a al menos un segmento de G, lo que significa que G puede ser expresada como unión de sus segmentos. Claramente dicha expresión no siempre resulta ser una unión de arcos que satisfaga la definición, pero precisamente es la que nos ayudará a trabajar con gráficas finitas de ahora en adelante. La forma en que varios autores trabajan con esta expresión es asociando cada segmento con un intervalo de manera natural, pero permiten que los extremos de dicho intervalo "coincidan" cuando el segmento en cuestión es una curva cerrada simple.

A continuación presentaremos algunos ejemplos de gráficas finitas que nos serán muy útiles más adelante, y que por la misma razón incluso nombraremos. Cabe mencionar que existen más gráficas finitas con nombre debido a su utilidad en otras áreas de estudio, como las que se definen en [15, Definición 9.32].

Definición 3.23. Un **árbol** o **gráfica acíclica** es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

Los árboles son espacios muy importantes porque ayudan a estudiar la estructura interna de otros espacios, aunque nosotros no los utilizaremos con este fin. Un resultado muy importante sobre los árboles es que sus únicos puntos de no corte son sus puntos terminales. Una prueba de este hecho se puede encontrar en [15, Proposición 9.27]. A nosotros en particular nos interesan estos espacios porque resultan ser espacios contráctiles, como probamos a continuación, e ilustramos en la figura 3.4.

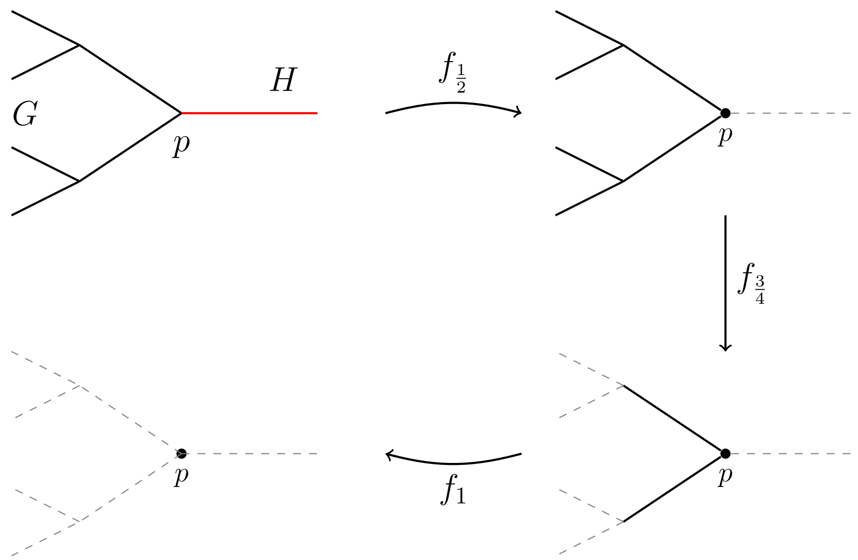

Figura 3.4: Contractibilidad de un árbol.

Teorema 3.12. *Los árboles son espacios contráctiles.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de puntos terminales del árbol. Como no existen árboles con un solo punto terminal, para el caso base se trata del intervalo, que es el único árbol con dos puntos terminales. Para ver que es contráctil, consideramos la función $F : I \times I \to I$ dada por $F(x,t) = (1-t)x$, que es continua, y satisface $F(x,0) = x$ y $F(x,1) = 0$ para todo $x \in I$. Luego, F es una contracción de I, y por lo tanto I es contráctil.

Supongamos ahora que todos los árboles con n puntos terminales son contráctiles, y sea T un árbol con $n+1$ puntos terminales. Sea H un segmento de T que contiene un punto terminal, y sea $G = (T \setminus H) \cup \{p\}$, donde p es el extremo de H que no es un punto terminal de G. Entonces G es un árbol con n puntos terminales, por lo que según la hipótesis de inducción es contráctil, y H también es contráctil por el pie de la inducción, ya que es un arco. Luego, existen contracciones F_1 y F_2 de G y H, respectivamente, tales que $F_1(x,1) = F_2(y,1) = p$ para todo $x \in G$ y para todo $y \in H$. Podemos suponer además que $F_2(p,t) = p$ para todo $t \in I$, definiéndola de forma similar a la contracción del caso base. Definamos la función $F : T \times I \to T$ como sigue:

$$F(x,t) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in G \text{ y } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ F_2(x,2t), & \text{si } x \in H \text{ y } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ F_1(x,2t-1), & \text{si } x \in G \text{ y } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ F_1(p,2t-1), & \text{si } x \in H \text{ y } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esta función satisface las hipótesis del lema del pegado, por lo que es continua, y además se tiene que

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, 1) = p$$

para todo $x \in T$. Luego, F es una contracción de T, por lo que T es contráctil.

Con esto se completa la inducción, y por lo tanto concluimos que los árboles son contráctiles. □

Es importante mencionar que un resultado parecido a un recíproco del teorema anterior es cierto, en el sentido de que si una gráfica finita es contráctil, entonces necesariamente es un árbol. Será importante considerar este resultado más adelante, aunque su demostración la omitimos.

Un ejemplo particular de un árbol es la siguiente gráfica.

Definición 3.24. Un n**-odo** es un árbol que tiene un solo punto de ramificación y n segmentos, donde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

Vale la pena haber definido esta gráfica porque nos permite dar una caracterización para el orden de un punto de ramificación que permite una interpretación geométrica más intuitiva. Se puede hacer algo similar con los demás puntos de la gráfica, pero esto no es compatible con nuestra definición de n-odo. Esta caracterización dice que un punto p es de orden n si y sólo si para todo abierto U que lo contenga, existe un conjunto cerrado $F \subseteq U$ con $p \in F$ que es homeomorfo a un n-odo y tal que p se corresponda con el punto de ramificación de dicho n-odo.

Por otro lado, también estamos interesados en gráficas que no tienen puntos de corte, que por lo anterior sabemos no pueden ser árboles, así que contendrán circunferencias. En particular, las siguientes gráficas son de nuestro interés.

Definición 3.25. Sea $m \geq 3$, y sean $L_1, L_2, \ldots, L_m$ arcos con extremos v_1 y v_2, tales que $L_i \cap L_j = \{v_1, v_2\}$ si $i \neq j$. La gráfica finita $G(m) = \bigcup_{i=1}^{m} L_m$ recibe el nombre de m**-theta**.

Algunos ejemplos de las gráficas que acabamos de definir están presentados en la figura 3.5.

Para finalizar este capítulo, debemos hacer un comentario sobre los subcontinuos de una gráfica. El resultado más importante que se tiene respecto de este tema es que todo subcontinuo no degenerado de una gráfica finita es también una gráfica finita, lo cual se prueba en [15, Corolario 9.10.1]. Este hecho nos puede llevar a llamar subgráfica a cualquier subcontinuo de una gráfica, pero debemos mencionar que dicho término está reservado para algunos subcontinuos particulares de la gráfica.

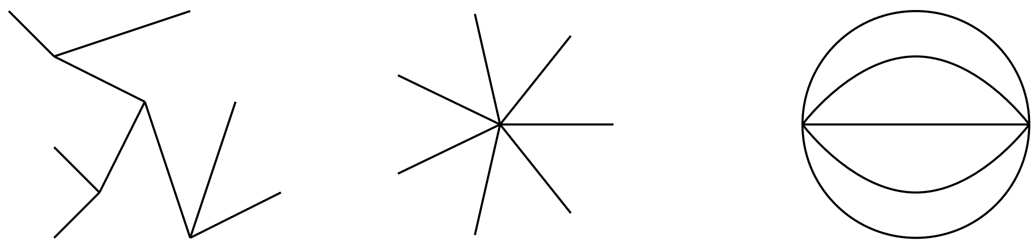

Figura 3.5: Ejemplos de un árbol, un 7-odo y una 5-theta (de izquierda a derecha).

Definición 3.26. Sea G una gráfica finita. Una **subgráfica de** G es una gráfica finita que se obtiene a partir de la unión de algunos segmentos de G, o es un conjunto unipuntual que consta de un vértice de G. Al conjunto de subgráficas de G se le denota por $SG(G)$.

Parte II

Hiperespacios y niveles de Whitney

Capítulo 4

Hiperespacios

En este capítulo empezamos el estudio de los hiperespacios, y en particular de los hiperespacios de continuos. Muchos de los conceptos y resultados que presentaremos a continuación pueden ser definidos para espacios más generales, pero nosotros los adaptaremos para el caso específico en que trabajamos con un continuo por ser éste el caso de nuestro interés. Cuando sea relevante, mencionaremos cómo cambia la situación en el caso general. Empezamos definiendo el concepto de hiperespacio.

Definición 4.1. Sea X un continuo. A las familias de subconjuntos cerrados y no vacíos de X con alguna característica en especial se les llama **hiperespacios de** X, y de forma general se les denota por $\mathcal{H}(X)$. En particular, definimos los siguientes hiperespacios:

$$\begin{gathered}
2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\
C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\
F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\
C_K(X) = \{A \in C(X) : K \subseteq A\}, \quad \text{donde } K \in 2^X.
\end{gathered}$$

Estos hiperespacios reciben los nombres de **hiperespacio de cerrados**, **hiperespacio de subcontinuos**, n**-ésimo producto simétrico** e **hiperespacio de contención para** K, respectivamente. Para simplificar la notación del hiperespacio de contención, en el caso en que K tenga un solo punto, digamos $K = \{p\}$, denotaremos al hiperespacio por $C_p(X)$.

Cuando en la literatura se trabaja con un espacio X que no necesariamente es compacto, el hiperespacio de cerrados se denota por $CL(X)$, y 2^X se define como la colección de subconjuntos compactos de X. Sin embargo, cuando X es compacto,

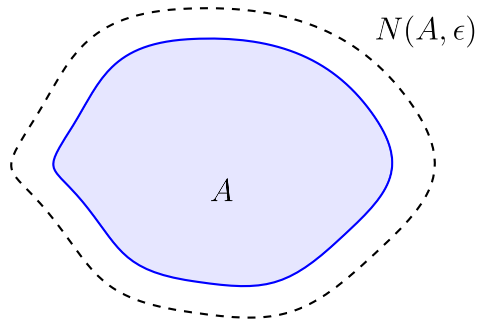

Figura 4.1: Conjunto A y $N(A, \epsilon)$ alrededor de él.

como el caso de los continuos, es fácil ver por el teorema 1.9 que $CL(X) = 2^X$, así que usualmente se trabaja con esta segunda notación.

Nuestro interés en los hiperespacios radica en las propiedades que tienen como espacio topológico, por lo que es importante dotarlos de una topología. Esta topología es la que en la literatura se llama la topología de Vietoris, y se puede definir en el hiperespacio de cualquier espacio topológico. Sin embargo, para el caso de los hiperespacios de un espacio métrico compacto, como lo son los continuos, esta topología resulta ser metrizable a partir de una métrica que se define utilizando la del espacio base, por lo que nosotros definiremos esta métrica para darle su topología al hiperespacio. Antes de hacerlo, requerimos de un nuevo concepto importante.

Definición 4.2. Sean X un continuo con métrica d, $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Definimos la **nube de radio ϵ alrededor de A** como el conjunto

$$N(A, \epsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

Intuitivamente podemos pensar que una nube consiste en "inflar" un conjunto, de forma que se le añaden los puntos cercanos a él, como se muestra en la figura 4.1. Algunos autores también llaman a este conjunto bola abierta generalizada, pues es fácil ver que para conjuntos unipuntuales coincide con el de la definición 3.3. Este nombre alternativo se vuelve mucho más lógico cuando notamos que una nube es una unión de bolas, como veremos a continuación en un resultado que se obtiene inmediatamente de la definición, y que por esta razón omitimos su demostración.

Proposición 4.1. *Sean X un continuo, $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Se tiene que*

$$N(A, \epsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon).$$

A pesar de que este conjunto representa una bola alrededor de un conjunto, no nos permite definir la topología del hiperespacio a partir de él, pues sus elementos no son subconjuntos cerrados del continuo X. Sin embargo, son precisamente lo que necesitamos para definir la métrica en los hiperespacios.

Definición 4.3. Sea X un continuo con métrica d. Definimos la **métrica de Hausdorff** en el hiperespacio 2^X como la función $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(B, \epsilon) \text{ y } B \subseteq N(A, \epsilon)\}.$$

En caso de que no haya ambigüedad sobre la métrica del continuo, la métrica de Hausdorff se denotará simplemente por H.

Algunos autores recomiendan no omitir el subíndice d en la notación de la métrica debido a que dos métricas distintas en X, aunque induzcan la misma topología en X, pueden generar métricas de Hausdorff que induzcan topologías diferentes en el hiperespacio, y puede suceder que ninguna de éstas sea la topología de Vietoris. Sin embargo, esto solamente sucede si la topología de Vietoris no es metrizable, lo cual no ocurre cuando el espacio base es un continuo, por lo que a nosotros no nos preocupará esta situación. Para un estudio más completo de esta situación, referimos al lector a [7, Sección 3].

Para poder empezar a trabajar con el hiperespacio como espacio topológico, primero es necesario verificar que la métrica de Hausdorff no solo es una métrica, sino que también está bien definida.

Proposición 4.2. *Sea X un continuo con métrica d. Entonces la métrica de Hausdorff H está bien definida y es efectivamente una métrica para el hiperespacio 2^X.*

Demostración. Sean $A, B, C \in 2^X$. Para simplificar la notación, definamos el conjunto

$$E(A, B) = \{\epsilon > 0 : A \subseteq N(B, \epsilon) \text{ y } B \subseteq N(A, \epsilon)\},$$

de modo que $H(A, B) = \text{ínf}\, E(A, B)$. Notemos que para cualesquiera par de puntos $p, q \in X$ se tiene $d(p, q) < \text{diám}\, X + 1$, de donde se sigue que $A \subseteq N(B, \text{diám}\, X + 1)$ y $B \subseteq N(A, \text{diám}\, X + 1)$. Luego, tenemos que $\text{diám}\, X + 1 \in E(A, B)$, por lo que $E(A, B) \neq \emptyset$. Además, de la definición de $E(A, B)$ es claro que 0 es cota inferior del conjunto. Notemos que con esto no solamente se prueba la buena definición de H al mostrar que $E(A, B)$ es no vacío y acotado inferiormente, sino que también se prueba que $H(A, B) \geq 0$ para cualesquiera $A, B \in 2^X$.

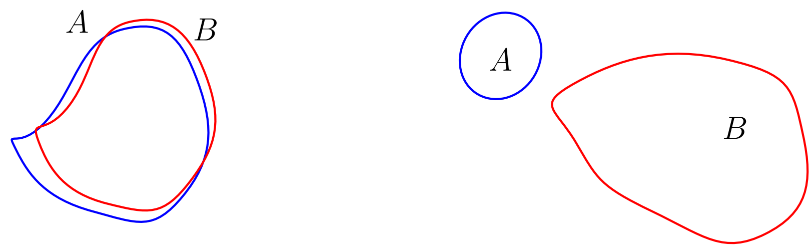

Figura 4.2: Conjuntos cercanos (izquierda) y alejados (derecha).

Ahora, dado $\epsilon > 0$ es claro que $A \subseteq N(A, \epsilon)$, de donde $E(A, A) = (0, \infty)$, y entonces $H(A, A) = \inf E(A, A) = 0$. Ahora bien, si $H(A, B) = 0$, por propiedades del ínfimo tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \epsilon$. Esto significa que $A \subseteq N(B, \delta)$, así que si tomamos $a \in A$, tenemos que existe $b \in B$ con $d(a, b) < \delta < \epsilon$, o lo que es lo mismo, $B(a, \epsilon) \cap B \neq \emptyset$. Como esto es válido para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $a \in \overline{B} = B$, lo que nos permite concluir que $A \subseteq B$. De manera análoga se prueba que $B \subseteq A$, y por lo tanto $A = B$. Por lo anterior tenemos que se cumple el primer axioma de métrica.

Por otra parte, la simetría de la función H se da directamente de la definición, por lo que no hay nada que probar para ver que se cumple el segundo axioma de métrica.

Finalmente, para probar la desigualdad del triángulo, notemos que para cualesquiera $A, B \in 2^X$ se tiene que $H(A, B) + \epsilon \in E(A, B)$ para todo $\epsilon > 0$. Esto nos dice que $A \subseteq N(B, H(A, B) + \epsilon)$, por lo que si tomamos $a \in A$, tenemos que existe $b \in B$ con $d(a, b) < H(A, B) + \epsilon$. De forma análoga, podemos tomar $c \in C$ tal que $d(b, c) < H(B, C) + \epsilon$. Luego, tenemos que

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < H(A, B) + H(B, C) + 2\epsilon,$$

lo que significa que $a \in N(C, H(A, B) + H(B, C) + 2\epsilon)$, y como $a \in A$ fue arbitrario, tenemos que $A \subseteq N(C, H(A, B) + H(B, C) + 2\epsilon)$. Mediante un argumento análogo se prueba que $C \subseteq N(A, H(A, B)+H(B, C)+2\epsilon)$, así que por la definición de H tenemos que $H(A, C) < H(A, B) + H(B, C) + 2\epsilon$. Luego, al ser esto válido para todo $\epsilon > 0$, concluimos que $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$, así que se cumple la desigualdad del triángulo.

Por todo lo anterior, concluimos que H es una métrica para 2^X. $\square$

Normalmente cuando trabajamos con una métrica nos interesa poder decir cuándo la distancia entre dos elementos del espacio métrico es menor que un número dado para poder hablar de cercanía. Retomando la idea intuitiva que mencionamos sobre "inflar" un conjunto, la métrica de Hausdorff dice que dos conjuntos son cercanos cuando hay que inflarlos poco para que se cubran mutuamente, lo cual significa que deben tener formas similares y estar en posiciones cercanas, como se muestra en la figura 4.2. Además, las propiedades del ínfimo nos permiten dar una caracterización de esta situación que se desprende inmediatamente de la definición, y que además resulta muy útil.

Proposición 4.3. *Sea X un continuo, sea $\epsilon > 0$ y sean $A, B \in 2^X$. Entonces $H(A,B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(B,\epsilon)$ y $B \subseteq N(A,\epsilon)$.*

Con lo anterior hemos probado que los hiperespacios de un continuo son espacios métricos, y por lo tanto topológicos. Conviene, sin embargo, mencionar brevemente cómo se trabaja con la topología de Vietoris en los hiperespacios de un espacio topológico más general, no solamente para aclarar la diferencia entre ambas situaciones, sino también porque algunas de estas ideas nos serán útiles más adelante.

Para cualquier espacio topológico X, la topología de Vietoris se define como la topología más pequeña en 2^X tal que los conjuntos $\{A \in 2^X : A \subseteq U\}$ son abiertos para cada U abierto en X, y de forma análoga para los cerrados. Teniendo esta definición, se prueba que existe una base para esta topología, cuyos elementos están definidos en términos de abiertos de X, y se les llama vietóricos. Para nosotros no es importante probar que la topología inducida por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Vietoris, por lo que referimos al lector interesado en una prueba de este hecho a [7, Teorema 3.1]. Sin embargo, los vietóricos sí nos serán de utilidad, por lo que los definimos a continuación.

Definición 4.4. Sea X un continuo, y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$. Definimos el **vietórico** de estos conjuntos como el subconjunto del hiperespacio dado por

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ y } A \cap A_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Algunos vietóricos de particular importancia son los de la forma $\langle U \rangle$ y $\langle X, U \rangle$, donde U es abierto. Es claro a partir de la definición que estos representan a la colección de subconjuntos cerrados de U y a la colección de cerrados que intersectan a U, respectivamente. Para ilustrar esto, en la figura 4.3 podemos ver que $A_i \in \langle U_i \rangle$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, y además tenemos que $A_3 \in \langle X, U_2 \rangle$ y $A_4, A_6 \in \langle X, U_5 \rangle$. Más aún, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{6} A_i \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_6 \rangle$.

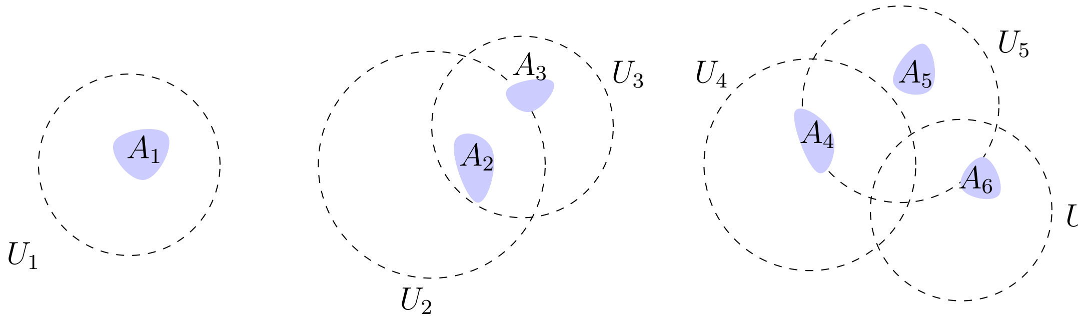

Figura 4.3: Ejemplos de elementos de un vietórico.

Estos vietóricos que mencionamos son importantes porque, como veremos a continuación, todos los demás pueden expresarse en términos de éstos. Omitimos la demostración del siguiente lema, ya que se obtiene inmediatamente de la definición de vietórico.

Lema 4.1. *Sea X un continuo, y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$. Entonces se tiene que*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \langle X, A_i \rangle \right)$$

Ahora, como mencionamos anteriormente, los vietóricos nos serán de utilidad más adelante, por lo que, aunque no probaremos que forman una base de la topología, sí queremos ver que son abiertos. Utilizando el lema anterior, basta con ver que los vietóricos de la forma $\langle U \rangle, \langle X, U \rangle$ son abiertos para obtener este resultado.

Lema 4.2. *Sea X un continuo con métrica d y sea U abierto en X. Entonces los vietóricos $\langle U \rangle$ y $\langle X, U \rangle$ son abiertos en 2^X con la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Notemos en primer lugar que si $U = X$, entonces es inmediato que $\langle U \rangle = \langle X, U \rangle = 2^X$, por lo que ambos vietóricos son abiertos. Supongamos entonces que $U \neq X$.

Tomemos $A \in \langle U \rangle$, y sea $\epsilon = \text{ínf}\{d(a, x) : a \in A, x \in X \setminus U\}$. Notemos que como A y $X \setminus U$ son cerrados disjuntos, tenemos que $\epsilon > 0$. Sea $B \in B_H(A, \epsilon)$. Por la proposición 4.3 tenemos que esto significa que $B \subseteq N(A, \epsilon)$. Notemos que entonces $B \cap X \setminus U = \emptyset$, pues de lo contrario tendríamos que para un $b \in X \setminus U$, existe $a \in A$ con $d(a, b) < \epsilon$, que contradice la forma en que definimos a ϵ. Luego, tenemos que $B \subseteq U$, lo que significa que $B \in \langle U \rangle$. A partir de esto concluimos que $B_H(A, \epsilon) \subseteq \langle U \rangle$, y por lo tanto $\langle U \rangle$ es abierto en X.

Tomemos ahora $A \in \langle X, U \rangle$. Esto significa que existe un punto $p \in A \cap U$, y como U es abierto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(p, \epsilon) \subseteq U$. Sea $B \in B_H(A, \epsilon)$.

Por la proposición 4.3 tenemos que $A \subseteq N(B, \epsilon)$, lo que significa que existe $b \in B$ con $d(p, b) < \epsilon$, es decir, $b \in B_d(p, \epsilon)$. Luego, como $B_d(p, \epsilon) \subseteq U$, tenemos que $b \in U$, con lo que $B \cap U \neq \emptyset$, y entonces $B \in \langle X, U \rangle$. A partir de esto concluimos que $B_H(A, \epsilon) \subseteq \langle X, U \rangle$, y por lo tanto $\langle X, U \rangle$ es abierto en X. □

Teorema 4.1. *Sea X un continuo, y sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos en X. Entonces el vietórico $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ es abierto en 2^X con la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Como $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ es abierto en X, por el lema 4.2 tenemos que $\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \rangle$ es abierto en 2^X. Además, por el mismo lema tenemos que $\langle X, U_i \rangle$ es abierto en 2^X para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego, aplicando el lema 4.1 tenemos que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\rangle \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \langle X, U_i \rangle \right),$$

es decir, $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ es intersección finita de abiertos, y por lo tanto es abierto. □

Antes de empezar a trabajar con los hiperespacios, discutiremos qué utilidad tendrá cada uno en nuestro estudio. En primer lugar, el hiperespacio de cerrados es útil porque es el hiperespacio más grande que se puede estudiar. Esto es en parte porque en la definición de hiperespacio pedimos que todos los elementos de un hiperespacio sean cerrados, aunque esto tiene una razón de ser más importante. En nuestro caso, esta razón es que si sus elementos no fueran cerrados, la métrica de Hausdorff no necesariamente sería una métrica, como se puede ver en la demostración de la proposición 4.2. Para el caso general en que se utiliza la topología de Vietoris, esto es porque cuando se consideran colecciones de subconjuntos no necesariamente cerrados, la topología de Vietoris carece de propiedades importantes, como se muestra en [7, Ejercicio 1.13]. El omitir el vacío como elemento de un hiperespacio es para facilitar las definiciones que permiten topologizar el hiperespacio.

Por otra parte, el hiperespacio de subcontinuos es importante porque es a partir de él que se definen los niveles de Whitney, que estudiaremos más adelante. Este hiperespacio además tiene la bondad de que sus elementos son más fáciles de conocer debido a su conexidad. Por ejemplo, recordemos de la sección 3.2.1 que todos los elementos no degenerados de $C(G)$ para una gráfica finita G son gráficas finitas. Sin embargo, estos no son todos los elementos de $C(G)$, pues también los conjuntos unipuntuales son compactos y conexos, no solamente en gráficas finitas, sino en cualquier continuo. Notemos además que todo continuo X es un subcontinuo de si mismo, lo que significa que $X \in C(X)$.

Para el producto simétrico, aunque es un hiperespacio muy estudiado y con propiedades importantes, nosotros solo estamos realmente interesados en el caso en que $n = 1$. Esto es porque, como vimos anteriormente, para cualquier continuo X se tiene que $F_1(X) \subseteq C(X)$, y además no resulta difícil ver que $F_1(X) \cong X$. Este hecho es de lo más útil, pues aunque X no esté contenido en ninguno de sus hiperespacios, el poder encajarle en su hiperespacio nos da mucha información sobre la relación que tiene un continuo con cada uno de sus hiperespacios, que en este caso se trata del de subcontinuos.

Finalmente, el hiperespacio de contención nos será útil porque al ser un subespacio del hiperespacio de subcontinuos, nos servirá como herramienta para probar algunos de los resultados relacionados con este último hiperespacio.

Ha llegado entonces el momento de empezar a estudiar algunas propiedades de los hiperespacios de continuos. Podemos considerar que la proposición 4.2 ya nos dio una propiedad importante, y es que los hiperespacios son metrizables. Siguiendo la lógica que hasta ahora hemos seguido en este trabajo, las siguientes propiedades que nos interesa estudiar son la compacidad y la conexidad. Para el primer producto simétrico, ya sabemos que tiene ambas por ser homeomorfo al continuo del que proviene.

Los otros hiperespacios requieren un estudio más extenso, pero podemos adelantar que también son compactos y conexos, lo que significa que todos los hiperespacios que aquí consideramos son continuos. Nos enfocamos en primer lugar en la compacidad, iniciando por el hiperespacio de cerrados, ya que al ser el más grande de todos podemos usar su compacidad para probar la de los demás hiperespacios.

Teorema 4.2. *Sea X un continuo con métrica d. Entonces el hiperespacio 2^X es compacto con la topología inducida por la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Notemos que por el teorema 3.8 tenemos que X es totalmente acotado y completo. Utilizaremos la caracterización de la compacidad dada por este mismo teorema para probar la compacidad de 2^X.

Sea $\epsilon > 0$. Como X es totalmente acotado, existe una cubierta finita de X cuyos elementos son bolas de radio ϵ. Sea Y la colección de los centros de dichas bolas, digamos $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Notemos que $2^Y \subseteq 2^X$ es finito. Consideremos la colección de bolas en 2^X de radio ϵ cuyos centros son los elementos de 2^Y, que también es finita. Para ver que esta colección es una cubierta de 2^X, tomemos $A \in 2^X$. Como Y es finito, para cada $a \in A$ existe $y_a \in Y$ tal que $d(a, y_a) = \text{mín}\{d(a, y) : y \in Y\}$. Notemos que entonces $d(a, y_a) < \epsilon$, pues como $\{B_d(y, \epsilon)\}_{y \in Y}$ es una cubierta de X, tenemos que $a \in B_d(y, \epsilon)$ para algún $y \in Y$, lo que significa que $d(a, y_a) \leq d(a, y) < \epsilon$. Definamos $Y_A = \bigcup_{a \in A} \{y_a\} \in 2^Y$, y probemos que $A \in B_H(Y_A, \epsilon)$.

Tomemos $a \in A$. Por lo anterior tenemos que $d(a, y_a) < \epsilon$, lo que significa por definición que $a \in N(Y_A, \epsilon)$, y entonces concluimos que $A \subseteq N(Y_A, \epsilon)$. Por otra parte, si tomamos $y \in Y_A$, entonces existe $a \in A$ tal que $y = y_a$, y como $d(y_a, a) < \epsilon$, esto prueba que $y_a \in N(A, \epsilon)$, y entonces $Y_A \subseteq N(A, \epsilon)$. Luego, por la proposición 4.3 tenemos que $H(A, Y_A) < \epsilon$, lo que significa que $A \in B_H(Y_A, \epsilon)$, y entonces la colección de bolas de radio ϵ cuyos centros son los elementos de 2^Y es una cubierta de 2^X. Con esto concluimos que 2^X es totalmente acotado.

Para ver que 2^X es completo, tomemos una sucesión de Cauchy $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ en 2^X. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $Y_k = \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n}$, y sea $Y = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k$, que es cerrado por ser intersección de cerrados. Notemos que esto no garantiza que $Y \in 2^X$, pues primero debemos probar que es no vacío.

Sea $\epsilon > 0$. Como $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Fijemos $n \geq N$, y tomemos $a \in A_n$. Por lo anterior tenemos que $A_n \subseteq N(A_m, \frac{\epsilon}{2})$ para cada $m \geq n$, así que existe $b_m \in A_m$ con $d(a, b_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Tenemos entonces una sucesión $(b_m)_{m=n}^{\infty}$ en X, la cual además satisface que $d(b_{m_i}, b_{m_j}) \leq d(b_{m_i}, a) + d(a, b_{m_j}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ cuando $m_i \neq m_j$, lo que significa que es de Cauchy. Luego, como X es completo, existe $b \in X$ tal que $b_m \to b$.

Ahora, notemos que la sucesión $(b_m)_{m=n}^{\infty}$ está en Y_k para cualquier $k \leq n$, y como cada Y_k es cerrado esto implica que $b \in Y_k$ si $k \leq n$. Por otra parte, si $k > n$, entonces la subsucesión $(b_{m_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(b_m)_{m=n}^{\infty}$ dada por $m_j = j + k$, la cual también converge a b, está en Y_k, lo que significa que $b \in Y_k$, nuevamente por ser Y_k cerrado. Luego, tenemos que $b \in Y_k$ para todo k, lo que implica que $b \in Y$, y entonces $Y \neq \emptyset$. Por lo tanto, $Y \in 2^X$. Además, si tomamos $N' \in \mathbb{N}$ tal que $d(b_m, b) < \frac{\epsilon}{2}$ para $m \geq N'$, entonces tenemos que $d(a, b) \leq d(a, b_{N'}) + d(b_{N'}, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, lo que significa que $a \in N(Y, \epsilon)$, y por lo tanto $A_n \subseteq N(Y, \epsilon)$.

Finalmente, para ver que $Y \subseteq N(A_n, \epsilon)$, donde A_n es el conjunto que fijamos anteriormente, tomemos $y \in Y$. Entonces $y \in Y_k$ para todo k, y en particular para $k \geq n$, por lo que para cualquier $\delta > 0$ tenemos que $B_d(y, \delta) \cap \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, así que podemos tomar $z \in B_d(y, \delta) \cap \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Notemos que esto significa que $d(y, z) < \delta$, y además $z \in A_j$ para algún $j \geq k \geq n \geq N$. Luego, como $H(A_j, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$, tenemos que $A_j \subseteq N(A_n, \frac{\epsilon}{2})$, por lo que existe $a \in A_n$ con $d(z, a) < \frac{\epsilon}{2}$. De aquí tenemos que $d(a, y) \leq d(a, z) + d(z, y) < \frac{\epsilon}{2} + \delta$, y como esto vale para todo $\delta > 0$, podemos concluir que $d(a, y) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, con lo que $y \in N(A_n, \epsilon)$, y por lo tanto $Y \subseteq N(A_n, \epsilon)$.

A partir de lo anterior, y utilizando la proposición 4.3, podemos concluir que $H(A_n, Y) < \epsilon$, y como $n \geq N$ fue arbitrario, esto es válido para todo $n \geq N$. Luego, tenemos que $A_n \to Y$, y por lo tanto concluimos que 2^X es completo.

Por el teorema 3.8, concluimos que 2^X es compacto. $\square$

Ahora, como el hiperespacio de subcontinuos lo definimos como un subconjunto del hiperespacio de cerrados, probar su compacidad será mucho más sencillo, pues solamente debemos verificar que es cerrado y podremos utilizar el teorema 1.9 para concluir su compacidad. Una situación análoga se da para el hiperespacio de contención.

Teorema 4.3. *Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $A \in 2^X \setminus C(X)$. Entonces A es disconexo, por lo que existen abiertos U, V de X que separan a A. Además, como X es métrico, por el teorema 3.3 podemos suponer que $U \cap V = \emptyset$. Consideremos entonces el conjunto $\mathcal{U} = \langle U, V \rangle$, que es abierto en 2^X, y por la definición de separación contiene a A. Notemos que si $B \in \mathcal{U}$, por la definición de los vietóricos tenemos que $B \subseteq U \cup V$ y $B \cap U \neq \emptyset \neq B \cap V$, y además sabemos que $\emptyset = U \cap V \subseteq X \setminus B$, lo que siginifica que U y V generan una separación de B, con lo que B es disconexo. Luego, esto nos permite decir que $A \in \mathcal{U} \subseteq 2^X \setminus C(X)$, con lo que A es un punto exterior de $C(X)$.

Al haber sido $A \in 2^X \setminus C(X)$ arbitrario, tenemos que $2^X \setminus C(X) = \operatorname{ext}(C(X))$, por lo que $2^X \setminus C(X)$ es abierto. Luego, por definición tenemos que $C(X)$ es cerrado en 2^X, y como 2^X es compacto, por el teorema 1.9 concluimos que $C(X)$ es compacto. $\square$

Teorema 4.4. *Sean X un continuo y $K \in 2^X$. Entonces $C_K(X)$ es compacto.*

Demostración. Sea $A \in C(X) \setminus C_K(X)$. Entonces $K \nsubseteq A$, lo que significa que existe $p \in K \cap (X \setminus A)$. Para cada $a \in A$, sea U_a abierto en X tal que $a \in U_a$ y $p \notin U_a$, y sea $U = \bigcup_{a \in A} U_a$. Notemos que $p \notin U$, y además $A \subseteq U$, lo que significa que $A \in \langle U \rangle$. Tomemos $B \in \langle U \rangle$, de modo que $B \subseteq U$. Si $B \in C_K(X)$, entonces tendríamos que $p \in K \subseteq B \subseteq U$, que sabemos que no puede ser. Luego, $B \notin C_K(X)$, y entonces $A \in \langle U \rangle \subseteq 2^X \setminus C_K(X)$. Con esto se prueba que A es punto exterior de $C_K(X)$, y entonces $2^X \setminus C_K(X)$ es abierto. Por lo tanto, $C_K(X)$ es cerrado en $C(X)$, el cual es compacto, así que por el teorema 1.9 concluimos que $C_K(X)$ es compacto. $\square$

4.1. Arcos ordenados

Como ya mencionamos, nuestro siguiente objetivo es probar que los hiperespacios que vamos a estudiar son conexos. Esto lo haremos probando que tienen una propiedad aún más importante, que es la arcoconexidad. Además, la estructura que generan algunos de estos arcos es de lo más importante, y como se menciona en [7, Capítulo 4], es el ingrediente fundamental de la teoría de hiperespacios general.

Antes de empezar a estudiar estas cuestiones topológicas, es importante recordar algunas ideas relativas a las relaciones de orden. En particular, nos enfocaremos en las relaciones de orden con las que trabajaremos, que son la de los números reales, y la de contención de conjuntos. Ya hemos estado trabajando con estos órdenes a lo largo de este trabajo, por lo que no nos detendremos a dar las definiciones más básicas, sino que solamente presentaremos aquellos conceptos que hasta ahora no hemos utilizado, pero que a partir de ahora cobrarán una mayor importancia en las demostraciones que desarrollaremos.

En primer lugar, recordemos que un conjunto en el que se ha definido una relación de orden puede ser parcialmente o totalmente ordenado, dependiendo de si todos los elementos del conjunto se pueden comparar. Por ejemplo, el orden de contención de conjuntos hace a los hiperespacios un conjunto parcialmente ordenado, mientras que con el orden de los números reales tenemos que $I = [0,1]$ es un conjunto totalmente ordenado. Sin embargo, aún en los conjuntos parcialmente ordenados existen subconjuntos totalmente ordenados, y en el caso de los hiperespacios, éstos reciben un nombre particular.

Definición 4.5. Sea X un continuo, y sea $\mathcal{N} \subseteq 2^X$. Decimos que $\mathcal{N}$ es una **familia anidada** si es totalmente ordenado, es decir, si para todo par de elementos $A, B \in \mathcal{N}$, se tiene que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

Otro concepto importante que es necesario recordar es el de elemento maximal de un conjunto parcialmente ordenado, el cual introdujimos en la definición 1.20. Dependiendo del conjunto y de la relación de orden, es posible que estos elementos no sean únicos cuando el orden es estrictamente parcial, o incluso puede llegar a suceder que ni siquiera existan, por lo que cuando queramos trabajar con elementos maximales primero es necesario asegurarse de que al menos uno existe. Para esto tenemos el siguiente resultado, el cual recibe el nombre de lema por razones más bien históricas, pero que suele considerarse como cierto de forma axiomática.

Lema 4.3 (Zorn)**.** *Sea Y un conjunto no vacío y parcialmente ordenado. Si todo subconjunto totalmente ordenado de Y tiene una cota superior, entonces existe un elemento maximal en Y.*

Habiendo recordado estos conceptos podemos empezar el camino hacia la prueba de la arcoconexidad de los hiperespacios. La idea general de lo que probaremos en

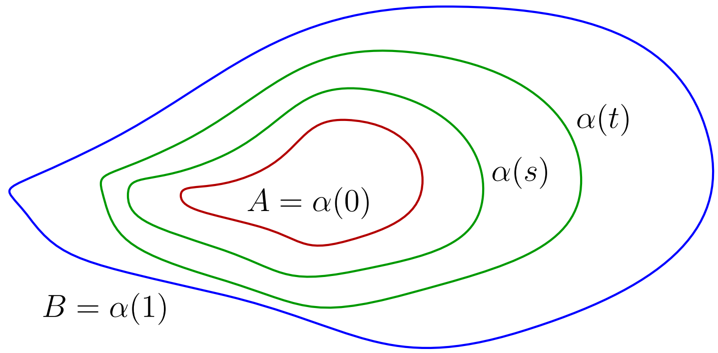

Figura 4.4: Arco ordenado α de A a B, donde $0 < s < t < 1$.

esta sección es que hay una forma de alinear el orden del intervalo $[0, 1]$ con el del hiperespacio. Al combinar estas ideas, obtenemos lo que llamamos un arco ordenado.

Definición 4.6. Sea X un continuo y sea $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X)\}$. Dados dos elementos $A, B \in \mathcal{H}(X)$ tales que $A \subsetneq B$, decimos que una función continua $\alpha : [0, 1] \to \mathcal{H}(X)$ es un **arco ordenado de** A **a** B si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ cada que $0 \leq s < t \leq 1$.

Notemos que en esta definición no estamos llamando arco ordenado a un espacio, sino más bien a una función. Sin embargo, esto no debe causar confusión con el concepto de arco, pues es inmediato de la definición y utilizando el teorema 1.11 que la imagen de esta función efectivamente es un arco. En la literatura se puede encontrar a ambos objetos, tanto la función como el arco, llamados arco ordenado. Nosotros le damos este nombre a la función, como se hace en [5, Definición 6.14], debido a la utilidad que tendrá más adelante, aunque seguiremos la demostración que se presenta en [7, Sección 14].

Un arco ordenado se puede interpretar como una forma de "inflar" un conjunto cerrado continuamente hasta llegar a otro que lo contiene. La diferencia de esta forma de inflar con la que mencionamos cuando definimos las nubes es que ahora vamos pasando por conjuntos cerrados, y no por abiertos. En la figura 4.4 se muestran un par de elementos de un arco ordenado que conecta a dos conjuntos.

La existencia de los arcos ordenados nos ayudará a probar la arcoconexidad de los hiperespacios de un continuo X conectando cada elemento del hiperespacio con el elemento X. Sin embargo, esto no significa que todos los elementos del hiperespacio puedan ser conectados mediante arcos ordenados, pues hay algunas restricciones para su existencia. La primera de estas restricciones se da en la definición, pues para que exista un arco ordenado entre dos elementos del hiperespacio, es necesario al menos que uno de ellos esté contenido en el otro. Como veremos más adelante, para el caso del hiperespacio de subcontinuos esta condición es suficiente, pero no lo es para el hiperespacio de cerrados.

La prueba de la existencia de los arcos ordenados no es sencilla, y de hecho requiere de algunos preliminares que hasta ahora no hemos cubierto, por lo que a continuación los mencionamos. El primero de ellos es un concepto de teoría de hiperespacios que además va a ser vital para definir los niveles de Whitney en el siguiente capítulo, y que podemos interpretar como una función que nos ayuda a medir los "tamaños" de los elementos del hiperespacio.

Definición 4.7. Sean X un continuo y $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X)\}$. Una **función de Whitney** es una función continua $\mu : \mathcal{H}(X) \to [0, \infty)$ que satisface lo siguiente:

1. $\mu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in X$,
2. $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

El hecho de que estas funciones existen fue probado por primera ver por Hassler Whitney en [17] y [18]. Nosotros no probaremos que cualquier continuo admite funciones de Whitney, pero referimos al lector a [5, Teorema 5.3] y [7, Teorema 13.4] para dos construcciones distintas de funciones de Whitney. Además, es posible construir nuevas funciones de Whitney a partir de otras, pues se puede probar que el producto y las combinaciones lineales con coeficientes positivos de funciones de Whitney son también funciones de Whitney.

Un hecho importante sobre las funciones de Whitney que se desprende inmediatamente de la definición es que alcanzan su máximo en el elemento X del hiperespacio, y además es el único en el que lo hacen. Esto implica que $\mu(X) > 0$, por lo que considerando el comentario anterior, la función $\nu = \frac{\mu}{\mu(X)}$ es una función de Whitney que además satisface $\nu(X) = 1$. Como esto se puede hacer para cualquier función de Whitney, algunos autores piden como condición adicional en la definición que $\mu(X) = 1$. Esto a nosotros no nos será de importancia, así que omitiremos la condición, pero lo mencionamos para aclarar las discrepancias que puedan existir con la literatura.

Lo siguiente que necesitamos es un teorema muy popular en la teoría de continuos, que aunque nosotros solamente usaremos como resultado previo para probar un teorema más adelante, tiene muchas aplicaciones en esta rama de la topología.

Teorema 4.5 (De los golpes en la frontera)**.** *Sea X un espacio de Hausdorff que es compacto y conexo, y sea U un abierto propio y no vacío de X. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap \partial U \neq \emptyset$.*

En [15, Capítulo 5] se pueden encontrar tres teoremas distintos con este mismo nombre, pues todos presentan conclusiones similares, y son también importantes en la teoría de continuos. Nosotros estamos presentando el primero de estos teoremas, pues es el que nos ayudará para demostrar el siguiente teorema. Su demostración no es relevante para nosotros, principalmente porque requiere muchos más preliminares que no hemos desarrollado, por lo que solamente presentaremos un bosquejo de la misma.

La idea de la demostración es proceder por contradicción, para lo que se supone que $K \cap \partial U = \emptyset$. Esto permite aplicar el teorema del cable cortado, que se presenta también en [15, Teorema 5.2], el cual da condiciones bajo las cuales se tiene que dos conjuntos son separados. Mediante esta separación de K y ∂U, se induce también una separación del espacio X, contradiciendo así la conexidad de X.

A partir de los resultados y conceptos que hemos mencionado estamos listos para proceder a la construcción de los arcos ordenados. Nuestro objetivo será mostrar que existe una familia anidada en el hiperespacio que es un arco, para luego parametrizarla mediante un arco ordenado como lo definimos anteriormente. Podemos entonces pensar que la idea detrás de la construcción es obtener una cantidad no numerable de elementos del hiperespacio ordenados continuamente. En este sentido, es muy importante en primer lugar probar que entre cualesquiera dos subcontinuos anidados, existe uno intermedio, por lo que eso es lo primero que probamos a continuación.

Teorema 4.6. *Sea X un continuo y sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Demostración. Sea $p \in B \setminus A$. Como B es normal, por el teorema 1.4 podemos tomar un abierto U de B tal que $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B \setminus \{p\}$, donde $\overline{U}$ representa la cerradura de U relativa al espacio B. Por el teorema 1.19, tenemos que A está contenido en una componente de $\overline{U}$, llamémosle C. Claramente $p \notin C$, lo que significa que $C \subsetneq B$.

Por otro lado, al ser U abierto tenemos que $U \cap \partial U = \emptyset$, lo que implica que $A \cap \partial U = \emptyset$ ya que $A \subseteq U$. Luego, como $C \cap \partial U \neq \emptyset$ por el teorema de los golpes en la frontera, esto significa que $A \neq C$, así que junto con lo anterior podemos concluir que $A \subsetneq C \subsetneq B$. Además, tenemos que C es cerrado y conexo por ser una componente, lo que junto con la compacidad de B nos dice por el teorema 1.9 que C es compacto, y por lo tanto $C \in C(X)$. □

Es pertinente mencionar que el teorema anterior es válido para espacios de Hausdorff no necesariamente métricos, pero nosotros lo adaptamos a espacios métricos por ser nuestro caso de interés.

Podríamos ahora proceder directamente a probar la existencia de los arcos ordenados, pero para simplificar la demostración, la separaremos en varios lemas, siguiendo también la estructura que se sigue en [7, Sección 14]. El primero de estos lemas nos indica cómo utilizaremos las funciones de Whitney en la construcción.

Lema 4.4. *Sean X un continuo, $\mathcal{H}(X) \in \{2^X, C(X)\}$, y $\mu : \mathcal{H}(X) \to [0, \infty)$ una función de Whintey. Si $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}(X)$ es una familia anidada que es compacta, entonces $\nu = \mu\big|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to [0, \infty)$ es un homeomorfismo en su imagen.*

Demostración. Notemos que ν es una función continua con dominio compacto y cuyo codominio es un espacio de Hausdorff, por lo que de acuerdo al teorema 1.11 solamente nos hace falta probar que es inyectiva. Para esto, tomemos $A, B \in \mathcal{N}$ tales que $\nu(A) = \nu(B)$, y supongamos que $A \neq B$. Como $\mathcal{N}$ es una familia anidada, entonces alguno de los dos conjuntos debe estar contenido en el otro. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \subsetneq B$. Luego, como ν es función de Whitney, de la definición tenemos que $\nu(A) < \nu(B)$, lo cual contradice nuestra hipótesis que $\nu(A) = \nu(B)$. De aquí concluimos que $A = B$, y entonces ν es inyectiva. Por lo tanto, aplicando el teorema 1.11 concluimos que $\nu : \mathcal{N} \to \nu(\mathcal{N})$ es un homeomorfismo. $\square$

A partir del lema anterior y de la definición de arco ordenado podemos conjeturar que el espacio que queremos construir es una familia anidada. Más aún, necesitaremos que los extremos del arco pertenezcan a la familia anidada, y que sean cotas de la familia, una inferior y otra superior. Para poder decir esto de manera sencilla, introducimos el siguiente concepto.

Definición 4.8. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ con $A \subsetneq B$. Una familia anidada $\mathcal{N} \subseteq 2^X$ se dice que **va de A a B** si $A, B \in \mathcal{N}$ y $A \subseteq N \subseteq B$ para todo $N \in \mathcal{N}$.

Con esta definición tenemos más claro qué es lo que queremos construir. Sin embargo, es fácil ver que no cualquier familia anidada nos sirve. De forma intuitiva, podemos pensar que necesitamos una familia anidada en la que no se puedan meter más continuos intermedios, para asegurar, entre otras cosas, la conexidad del espacio. Para esto es que utilizaremos el concepto de elemento maximal, pues si consideramos a una familia anidada maximal dentro del conjunto de las familias anidadas, podemos entender que ya no hay forma de añadirle más elementos. Esto además tiene el beneficio de que nos permite empezar a obtener propiedades de la familia anidada, como veremos en el siguiente lema.

Lema 4.5. *Sea X un continuo, y sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{M} \subseteq C(X)$ es una familia anidada maximal de A a B, entonces $\mathcal{M}$ es compacto.*

Demostración. Sea $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{M}$ tal que $M_n \to M$ para algún elemento $M \in C(X)$, y consideremos el conjunto $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{M\}$, el cual afirmamos es también una familia anidada. Para probar esto, solamente es necesario ver que para cualquier $N \in \mathcal{M}$ se tiene que $M \subseteq N$ o $N \subseteq M$. Tomemos entonces un elemento $N \in \mathcal{M}$, para el cual debe suceder que $M_n \subseteq N$ para infinitos n, o $N \subseteq M_n$ para infinitos n.

En el primer caso, podemos construir una subsucesión $(M_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $M_{n_k} \subseteq N$ para todo k. Esto significa que $(M_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(N)$, que es compacto, y entonces es cerrado por el teorema 1.10. Luego, como $M_{n_k} \to M$ por el teorema 3.6, podemos concluir que $M \in C(N)$ por el teorema 3.4, lo que significa que $M \subseteq N$.

Para el segundo caso construimos una subsucesión $(M_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $N \subseteq M_{n_k}$ para todo k, lo que significa que $(M_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C_N(X)$. Luego, por un argumento análogo al del caso anterior, utilizando la compacidad de $C_N(X)$ obtenemos que $M \in C_N(X)$, es decir, $N \subseteq M$.

Con lo anterior hemos probado que $\mathcal{M}'$ es una familia anidada. Además, notemos que como caso particular de los casos anteriores se obtiene que $A \subseteq M \subseteq B$, por lo que $\mathcal{M}'$ es una familia anidada de A a B. Luego, por la maximalidad de $\mathcal{M}$ tenemos que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$, y entonces $M \in \mathcal{M}$. Por lo tanto, utilizando el teorema 3.4 obtenemos que $\mathcal{M}$ es cerrado, y por el teorema 1.9 concluimos que $\mathcal{M}$ es compacto. $\square$

Teniendo los dos lemas anteriores, podemos proceder a probar que esta familia maximal es precisamente el tipo de espacio que nos interesa, es decir, un arco.

Lema 4.6. *Sea X un continuo, y sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{M} \subseteq C(X)$ es una familia anidada maximal de A a B, entonces $\mathcal{M}$ es un arco de A a B.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney, y sean $t_0, t_1 \in [0, \infty)$ tales que $t_0 = \mu(A)$ y $t_1 = \mu(B)$. A partir de la definición de función de Whitney es fácil ver que $t_0 < t_1$, y más aún, $\mu(\mathcal{M}) \subseteq [t_0, t_1]$. Notemos que como $\mathcal{M}$ es compacto por el lema 4.5 y μ es continua, entonces $\mu(\mathcal{M})$ es compacto. Supongamos que $\mu(\mathcal{M}) \neq [t_0, t_1]$, que por su compacidad significa que existen $s_0, s_1 \in \mu(\mathcal{M})$ tales que $\mu(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$.

Sean $M_0, M_1 \in \mathcal{M}$ tales que $\mu(M_0) = s_0$ y $\mu(M_1) = s_1$. Como $\mathcal{M}$ es una familia anidada, utilizando la definición de función de Whitney se obtiene que $M_0 \subsetneq M_1$, por lo que podemos aplicar el teorema 4.6 para obtener que existe $N \in C(X)$ tal que $M_0 \subsetneq N \subsetneq M_1$. Consideremos la colección $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{N\}$, la cual afirmamos es una familia anidada. Para probar esto, solamente es necesario ver que para cualquier $M \in \mathcal{M}$ se tiene que $M \subseteq N$ o $N \subseteq M$.

Tomemos $M \in \mathcal{M}$, y supongamos que $M \neq M_0, M_1$, pues para estos elementos de $\mathcal{M}$ ya tenemos que se dan alguna de las contenciones. Al ser $\mathcal{M}$ una familia anidada, tenemos tres casos: $M \subsetneq M_0 \subsetneq N$, $N \subsetneq M_1 \subsetneq M$, o $M_0 \subsetneq M \subsetneq M_1$. En los primeros dos casos no hay nada que probar, por lo que supongamos que se da el tercero. Por la definición de función de Whitney tenemos que $s_0 = \mu(M_0) < \mu(M) < \mu(M_1) = s_1$, lo cual contradice que $\mu(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. Esto significa que no se puede dar el tercer caso, y entonces hemos probado que $\mathcal{M}'$ es una familia anidada.

Por otro lado, como $A \subseteq M_0 \subsetneq N \subsetneq M_1 \subseteq B$, tenemos que $\mathcal{M}'$ es una familia anidada de A a B, así que por la maximalidad de $\mathcal{M}$ tenemos que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$, es decir $N \in \mathcal{M}$. Sin embargo, como $M_0 \subsetneq N \subsetneq M_1$ tenemos que $s_0 = \mu(M_0) < \mu(N) < \mu(M_1) = s_1$, así que nuevamente tenemos una contradicción con el hecho de que $\mu(\mathcal{M}) \cap (s_0, s_1) = \emptyset$. A partir de esta contradicción concluimos que $\mu(\mathcal{M}) = [t_0, t_1]$, y entonces por el lema 4.4 tenemos que $\mathcal{M} \cong [t_0, t_1]$, es decir, $\mathcal{M}$ es un arco. $\square$

Hasta ahora hemos probado cómo es el espacio que queremos construir, y sus propiedades, pero aún nos hace falta lo más importante, que es asegurar su existencia. Como estamos trabajando con un elemento maximal, es natural pensar, como mencionamos anteriormente, que el lema de Zorn jugará un papel fundamental en la demostración de este hecho.

Lema 4.7. *Sea X un continuo, y sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe una familia anidada maximal de A a B en $C(X)$.*

Demostración. Sea Λ el conjunto de todas las familias anidadas de A a B en $C(X)$. Notemos que este conjunto es no vacío, ya que $\{A, B\} \in \Lambda$, y además está parcialmente ordenado a partir de la contención de conjuntos. Sea $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ totalmente ordenado, y sea $\mathcal{N}_0 = \bigcup_{\mathcal{N} \in \Lambda_0} \mathcal{N}$. Es claro entonces que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_0$ para todo $\mathcal{N} \in \Lambda_0$. Luego, para asegurar que $\mathcal{N}_0$ es una cota superior de Λ_0, solo resta verificar que $\mathcal{N}_0 \in \Lambda$.

Por una parte, ya que $A, B \in \mathcal{N}$ para todo $\mathcal{N} \in \Lambda$, es claro que $A, B \in \mathcal{N}_0$. Sean $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_0$. Entonces existen $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \Lambda_0$ tales que $N_1 \in \mathcal{N}_1$ y $N_2 \in \mathcal{N}_2$. Como Λ_0 es totalmente ordenado, se tiene que $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$ o $\mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{N}_1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2$. Esto significa que $N_1 \in \mathcal{N}_2$, por lo que como $\mathcal{N}_2$ es una familia anidada, entonces tenemos que $N_1 \subseteq N_2$ o $N_2 \subseteq N_1$. Con esto se prueba que $\mathcal{N}_0$ es una familia anidada, y entonces $\mathcal{N}_0 \in \Lambda$.

Lo anterior implica que se satisfacen las hipótesis del lema de Zorn, así que al aplicarlo concluimos que existe una familia anidada maximal de A a B en $C(X)$. $\square$

Por los teoremas anteriores, hemos obtenido la existencia de un arco que además es una familia anidada con un elemento mínimo y un elemento máximo. Lo único que resta por hacer es verificar que dicho arco se puede parametrizar por medio de un arco ordenado, y de esta forma obtendremos el teorema sobre la existencia de los arcos ordenados en el hiperespacio de subcontinuos.

Teorema 4.7. *Sea X un continuo, y sean $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ una función de Whitney. Por el lema 4.7 tenemos que existe una familia maximal $\mathcal{M}$ de A a B, la cual además es un arco por el lema 4.6. Más aún, utilizando el lema 4.4 y la definición de función de Whitney tenemos que $\nu = \mu\big|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [\mu(A), \mu(B)]$ es un homeomorfismo que satisface $\nu(M_1) < \nu(M_2)$ cuando $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ son tales que $M_1 \subsetneq M_2$. Recíprocamente, si $s < t$ entonces se tiene que $\nu^{-1}(s) \subsetneq \nu^{-1}(t)$.

Sea $h : [0, 1] \to [\mu(A), \mu(B)]$ un homeomorfismo tal que $h(0) = \mu(A)$ y $h(1) = \mu(B)$. Entonces h es creciente, es decir, $h(s) < h(t)$ siempre que $s < t$. Luego, si consideramos la función $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ dada por $\alpha(s) = \nu^{-1}(h(s))$, es fácil verificar a partir de lo anterior que $\alpha(0) = A$, $\alpha(B) = 1$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ cuando $s < t$. Por lo tanto, α es un arco ordenado de A a B. □

Este teorema por si mismo ya es de lo más importante, pues los arcos ordenados son una herramienta de lo más útil en la teoría de hiperespacios. Por lo pronto, nosotros mostraremos su utilidad al utilizarlos para probar el teorema que prometimos desde el inicio de esta sección, y que también tiene su propia gran importancia.

Teorema 4.8. *Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es arcoconexo.*

Demostración. Sean $A, B \in C(X)$. Si alguno de estos elementos es igual a X, entonces los podemos conectar mediante un arco ordenado. Supongamos que este no es el caso, y sean $\alpha, \beta : [0, 1] \to C(X)$ arcos ordenados de A y B a X, respectivamente. Consideremos la función $\gamma : [0, 1] \to C(X)$ dada por

$$\gamma(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2 - 2s), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Esta función es continua por el lema del pegado, y además satisface que $\gamma(0) = A$ y $\gamma(1) = B$. Esto prueba que $C(X)$ es conexo por trayectorias, y como también es un espacio de Hausdorff, por el teorema 1.21 concluimos que es arcoconexo. □

Como también mencionamos al inicio de esta sección, el objetivo de probar la arcoconexidad de los hiperespacios era poder concluir que son conexos, lo cual se da inmediatamente del teorema 1.20.

Corolario 4.1. *Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es conexo.*

Más adelante solo utilizaremos la conexidad del hiperespacio de subcontinuos y los arcos ordenados en este hiperespacio, por lo que no entraremos en tanto detalle como hasta ahora para presentar las pruebas de la arcoconexidad de los otros hiperespacios, sino que solamente comentaremos las ideas generales de las demostraciones, aprovechando además su similitud con la demostración del teorema 4.8.

Como mencionamos anteriormente, para el hiperespacio de cerrados no es suficiente tomar dos conjuntos tal que uno esté contenido en el otro para asegurar que existe un arco ordenado entre ellos. Afortunadamente, se conoce una condición necesaria y suficiente para la existencia de los arcos ordenados en este hiperespacio, cuya demostración se puede encontrar en [7, Teorema 15.3] o en [5, Teorema 6.15].

Lema 4.8. *Sea X un continuo, y sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y sólo si toda componente de B intersecta a A.*

A partir del lema anterior ya se puede probar la arcoconexidad del hiperespacio de cerrados para cualquier continuo.

Teorema 4.9. *Sea X un continuo. Entonces 2^X es arcoconexo.*

Demostración. Notemos que por el lema 4.8 tenemos que para cualquier elemento $A \in 2^X$ existe un arco ordenado de A a X en 2^X. Luego, procediendo de forma análoga a la demostración del teorema 4.8 se obtiene que 2^X es arcoconexo. □

Del mismo modo que antes, este teorema nos sirve para obtener la conexidad del hiperespacio.

Corolario 4.2. *Sea X un continuo. Entonces 2^X es conexo.*

Para el hiperespacio de contención no es necesario ningún resultado que no hayamos cubierto, en parte importante debido a que lo definimos como un subespacio del hiperespacio de subcontinuos. Luego, podemos proceder a presentar los resultados de conexidad relativos a este hiperespacio de la misma forma que para los anteriores.

Teorema 4.10. *Sean X un continuo y $K \subseteq X$ compacto. Entonces $C_K(X)$ es arcoconexo.*

Demostración. Notemos que si $A, B \in C_K(X)$ y α es un arco ordenado de A a B en $C(X)$, entonces para todo $s \in [0,1]$ se tiene que $K \subseteq A \subseteq \alpha(s)$, lo que significa que α es un arco ordenado en $C_K(X)$. A partir de este hecho y procediendo de forma análoga a la demostración del teorema 4.8, se obtiene la arcoconexidad de $C_K(X)$. $\square$

Corolario 4.3. *Sean X un continuo y $K \subseteq X$ compacto. Entonces $C_K(X)$ es conexo.*

Para terminar este capítulo, presentamos una última propiedad de algunos de los hiperespacios que hemos estudiado, y que será muy importante en el siguiente capítulo.

Definición 4.9. Sea X un espacio conexo. Decimos que X es **unicoherente** si para cada par de subconjuntos cerrados y conexos A, B de X tales que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Podemos interpretar la unicoherencia como una de las muchas formas en que la topología detecta agujeros, aunque esta interpretación no es perfecta, pues se puede probar que S^2 es unicoherente, pero entendemos que tiene un agujero en su interior. Esta idea se ve más clara cuando hablamos de espacios planos, pues el ejemplo más sencillo de un espacio que no es unicoherente es S^1. Esto lo podemos ver cuando escribimos $S^1 = L_1 \cup L_2$ como en la sección 3.2.1, donde cada L_i es un arco, y su intersección es un conjunto disconexo de dos elementos.

Otros ejemplos de espacios unicoherentes son los árboles, que de hecho se pueden definir equivalentemente como gráficas finitas unicoherentes. Esto es consecuencia del teorema [15, Teorema 10.35]. Además, estos ejemplos están más apegados a la idea que mencionamos de no tener agujeros.

Este concepto nos es útil debido al siguiente teorema.

Teorema 4.11. *Sea X un continuo. Entonces los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son unicoherentes.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [7, Teorema 19.8].

Capítulo 5

Niveles de Whitney

A partir de ahora trabajaremos principalmente con el hiperespacio de subcontinuos de un continuo X. De este hiperespacio estamos específicamente interesados en sus niveles de Whitney, que podrían ser interpretados como las colecciones de subcontinuos del mismo "tamaño" de X. Recordemos que en la definición 4.7 introdujimos el concepto de función de Whitney, la cual interpretábamos como una función que mide el tamaño de los subconjuntos de X. Luego, dada la interpretación que pretendemos darle a los niveles de Whitney, la siguiente definición es natural.

Definición 5.1. Sea $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio del continuo X. Un **nivel de Whitney para** $\mathcal{H}(X)$ es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$, donde $\mu : \mathcal{H}(X) \to [0, \infty)$ es una función de Whitney para $\mathcal{H}(X)$, y $t \in (0, \mu(X))$.

En la definición anterior, algunos autores permiten que $t \in [0, \mu(X)]$. Sin embargo, los espacios $\mu^{-1}(0)$ y $\mu^{-1}(\mu(X))$ son bien conocidos, pues es prácticamente inmediato de la definición de función de Whitney que $\mu^{-1}(0) = F_1(X)$ y $\mu^{-1}(\mu(X)) = \{X\}$ para cualquier función de Whitney μ, por lo que realmente no tiene caso estudiar estos conjuntos con el resto de los niveles de Whitney. En adelante, cuando introduzcamos un nivel de Whitney como $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$, se deberá entender que μ es una función de Whitney, y que $t \in (0, \mu(X))$.

En el caso particular de los niveles de Whitney para $C(X)$, la motivación principal para estudiarlos es su estructura como espacio topológico, o más específicamente, como subespacio de $C(X)$, y es que resulta que los niveles de Whitney son continuos no degenerados para cualquier continuo X, lo cual no necesariamente sucede con otros hiperespacios. Nuestro primer objetivo en esta sección será probar este hecho. En primer lugar, trataremos con la cardinalidad de un nivel de Whitney, viendo que se trata de conjuntos no degenerados.

Lema 5.1. *Sea X un continuo. Entonces los niveles de Whitney para $C(X)$ son no vacíos y no degenerados.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney para $C(X)$. Como $0 < t < \mu(X)$, por teorema del valor intermedio sabemos que existe $A \in C(X)$ con $\mu(A) = t$, es decir, $A \in \mathcal{A}$, y entonces $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Notemos que $A \neq X$, pues de lo contrario tendríamos que $t = \mu(A) = \mu(X)$, que sabemos que no es cierto, y entonces podemos tomar un punto $p \in X \setminus A$. Sea α un arco ordenado de $\{p\}$ a X, y consideremos la función $\mu \circ \alpha : [0,1] \to [0, \mu(X)]$, que es continua. Nuevamente podemos aplicar el teorema del valor intermedio para determinar que existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$, lo que significa que $\alpha(s) \in \mathcal{A}$. Luego, como $p \in \alpha(s)$, tenemos que $A \neq \alpha(s)$, y entonces $\mathcal{A}$ es no degenerado. $\square$

Un hecho importante de los niveles de Whitney para $C(X)$ y que se obtiene como corolario de la prueba anterior es que la unión de sus elementos es igual a X, ya que el punto p que se tomó en la demostración era arbitrario en $X \setminus A$. Esto lo podemos enunciar también de la siguiente manera.

Corolario 5.1. *Sea $\mathcal{A}$ un nivel de Whitney del continuo X. Entonces para todo $p \in X$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A$.*

Antes de probar que los niveles de Whitney son continuos, estudiaremos la estructura de otros espacios, conocidos como bloques de Whitney, que nos ayudarán a probar la conexidad de los niveles. No los introducimos formalmente debido a que solamente serán una herramienta auxiliar, pero vale la pena mencionar que también son un objeto de estudio interesante dentro de la teoría de hiperespacios.

Lema 5.2. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Para todo $t \in (0, \mu(X))$, los conjuntos $\mathcal{A}_t = \mu^{-1}([0,t])$ y $\mathcal{B}_t = \mu^{-1}([t, \mu(X)])$ son continuos.*

Demostración. Es claro que ambos conjuntos $\mathcal{A}_t$ y $\mathcal{B}_t$ son uniones de niveles de Whitney, así que por el lema anterior tenemos que son no vacíos. Además, como $\mathcal{A}_t, \mathcal{B}_t \subseteq C(X)$, tenemos que son subespacios de un espacio métrico, y entonces también son métricos. Por otra parte, como los intervalos $[0,t]$ y $[t, \mu(X)]$ son cerrados en $\mathbb{R}$, por la continuidad de μ tenemos que $\mu^{-1}([0,t]) = \mathcal{A}_t$ y $\mu^{-1}([t, \mu(X)]) = \mathcal{B}_t$ son también cerrados, y entonces por el teorema 1.9 son compactos.

Supongamos ahora que $\mathcal{A}_t$ es disconexo, y tomemos dos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ que formen una separación de $\mathcal{A}_t$. Notemos que $F_1(X) \subseteq \mathcal{A}_t$, por lo que como $F_1(X)$ es conexo, por el teorema 1.14 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $F_1(X) \subseteq$

$\mathcal{U}$. Sea $A \in \mathcal{A}_t \cap \mathcal{V}$, y tomemos $p \in A$. Notemos que $\{p\} \subsetneq A$, pues de lo contrario tendríamos que $A \in F_1(X) \subseteq \mathcal{U}$, así que podemos tomar un arco ordenado α de $\{p\}$ a A. Entonces $\alpha(I)$ es conexo y satisface que $\alpha(I) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \neq \alpha(I) \cap \mathcal{V}$, pues $\{p\} \in \alpha(I) \cap \mathcal{U}$ y $A \in \alpha(I) \cap \mathcal{V}$. Esto contradice el teorema 1.14, y por lo tanto concluimos que $\mathcal{A}_t$ es conexo.

Ahora, tomemos $A, B \in \mathcal{B}_t$, y sean α y β arcos ordenados de A y B a X, respectivamente. Definamos la función $\gamma : [0,1] \to \mathcal{B}_t$ por

$$\gamma(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2-2s), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

que es continua por el lema del pegado. Luego, es fácil ver que γ es una trayectoria de A a B, así que $\mathcal{B}_t$ es conexo por trayectorias, y por el teorema 1.20 concluimos que $\mathcal{B}_t$ es conexo.

Por todo lo anterior, tenemos que $\mathcal{A}_t$ y $\mathcal{B}_t$ son continuos. □

Teorema 5.1. *Los niveles de Whitney son continuos.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney para $C(X)$. En primer lugar, como $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, entonces es un subespacio de un espacio métrico, por lo que también es métrico. Por otra parte, como $\{t\} \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado, por la continuidad de μ tenemos que $\mu^{-1}(\{t\}) = \mathcal{A}$ también es cerrado, y por el teorema 1.9 y la compacidad de $C(X)$ podemos concluir que $\mathcal{A}$ es compacto.

Finalmente, como sabemos que $\mu(X)$ es el máximo de la función de Whitney μ, es fácil ver que $C(X)$ puede ser expresado como la unión de los subcontinuos del lema anterior, es decir, $C(X) = \mu^{-1}([0,t]) \cup \mu^{-1}([t, \mu(X)])$. Luego, como $C(X)$ es unicoherente por el teorema 4.11, podemos concluir que la intersección de estos continuos, es decir, $\mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t, \mu(X)]) = \mu^{-1}(t) = \mathcal{A}$, es conexo. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{A}$ es un continuo. □

Los resultados anteriores aplican solo para el hiperespacio de subcontinuos, pero esto no significa que éste sea el único hiperespacio cuyos niveles de Whitney vale la pena investigar. Para nosotros, los niveles del hiperespacio de contención serán también muy importantes, pues al ser éste subconjunto del hiperespacio de subcontinuos, sus niveles de Whitney serán subconjuntos de los niveles de Whitney del hiperespacio de subcontinuos. La principal importancia de estos niveles se debe al siguiente teorema, en el cual además introducimos una nueva notación que nos ayude a distinguir entre los niveles de cada hiperespacio.

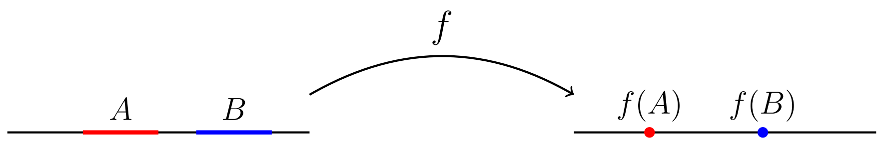

Figura 5.1: Homeomorfismo del nivel de $C(I)$ a I.

Teorema 5.2. *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, y $t \in (0, \mu(X))$. Si $E \in C(X)$ es tal que $\mu(E) \leq t$, entonces el nivel de Whitney*

$$C_E(X, \mu, t) = \{A \in \mu^{-1}(t) : E \subseteq A\}$$

es un AR.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [7, Teorema 66.4].

5.1. Niveles de gráficas finitas

Pasamos ahora a enfocar nuestro estudio de los niveles de Whitney al caso en que el continuo con el que estamos trabajando es una gráfica finita. En primer lugar, consideraremos los niveles de las gráficas más simples, que son el intervalo y la circunferencia, pues éstos son espacios bastante conocidos. La función del siguiente teorema se ilustra en la figura 5.1.

Teorema 5.3. *Los niveles de Whitney para $C(I)$ son arcos.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney para $C(I)$. Definamos la función $f : \mathcal{A} \to I$ por $f(A) = \text{mín}\, A$. Si $A, B \in \mathcal{A}$ son tales que $f(A) = f(B)$, entonces tenemos que son de la forma $A = [a, x], B = [a, y]$, con $a, x, y \in I$. Luego, esto significa que $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$, pero como $\mu(A) = \mu(B)$, entonces ambas contenciones se cumplen, y por lo tanto $A = B$. Esto prueba que f es inyectiva.

Sean $A = [a, b] \in \mathcal{A}$, y $\epsilon > 0$. Tomemos $\delta = \epsilon$. Si $B = [c, d] \in \mathcal{A}$ es tal que $H(A, B) < \delta$, entonces tenemos que $A \subseteq N(B, \delta)$ y $B \subseteq N(A, \delta)$, por lo que se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$a - \delta < c \leq d < b + \delta, \quad c - \delta < a \leq b < d + \delta.$$

Luego, de estas desigualdades tenemos que $|f(A) - f(B)| = |a - c| < \delta = \epsilon$, y por lo tanto f es continua.

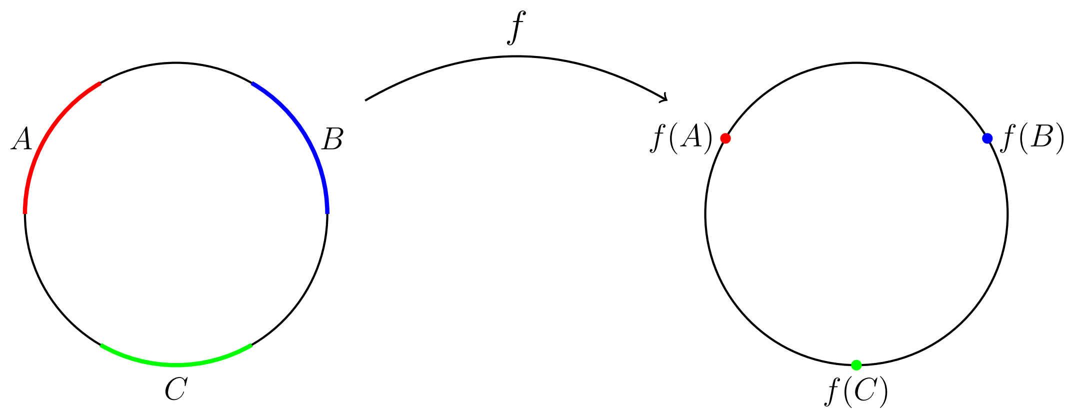

Figura 5.2: Homeomorfismo del nivel de $C(S^1)$ a S^1.

Como $\mathcal{A}$ es compacto por el teorema 5.1 e I es Hausdorff, aplicando el teorema 1.11 concluimos que f es un homeomorfismo, y por lo tanto $\mathcal{A} \cong f(\mathcal{A})$. Ahora, esto implica que $f(\mathcal{A})$ es un subcontinuo no degenerado de I, lo que significa que $f(\mathcal{A})$ es un arco, y por lo tanto $\mathcal{A}$ es un arco. $\square$

La demostración del teorema sobre los niveles de la circunferencia es muy similar a la del teorema anterior, por lo que omitiremos los detalles que sean similares. Esta demostración se ilustra en la figura 5.2.

Teorema 5.4. *Los niveles de Whitney para $C(S^1)$ son curvas cerradas simples.*

Demostración. Si $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ es un nivel de Whitney de $C(S^1)$, definimos la función $f : \mathcal{A} \to S^1$ tal que a cada elemento de $\mathcal{A}$ le asigna su punto medio. Con un argumento similar al del teorema anterior se puede probar que esta función es continua e inyectiva, por lo que por el teorema 1.11 tenemos que $\mathcal{A} \cong f(\mathcal{A})$. Luego, debemos probar que $f(\mathcal{A}) = S^1$, es decir, que f es sobreyectiva, para obtener la conclusión del teorema.

Tomemos un punto $p = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in S^1$, y sea $\alpha : [0,1] \to C(S^1)$ dada por

$$\alpha(s) = \{(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi) \in S^1 : \theta - s\pi \leq \phi \leq \theta + s\pi\}.$$

Se puede probar que α es un arco ordenado de $\{p\}$ a S^1 tal que p es el punto medio de $\alpha(s)$ para todo $s \in I$, por lo que aplicando el teorema del valor intermedio a la función $\mu \circ \alpha$ obtenemos que existe $s_0 \in I$ tal que $\mu(\alpha(s_0)) = t$, o lo que es lo mismo, que existe $A = \alpha(s_0) \in \mathcal{A}$ tal que $f(A) = p$. Luego, tenemos que f es sobreyectiva, así que $\mathcal{A} \cong S^1$, y por lo tanto $\mathcal{A}$ es una curva cerrada simple. $\square$

Los dos casos que hemos presentado son particularmente especiales no solamente por el hecho de que los niveles de Whitney son homeomorfos al continuo del que provienen, sino también porque todos los niveles son homeomorfos entre sí, cosa que no ocurre en general. Este es el caso para el resto de las gráficas finitas, aunque en [6, Teorema 2] se prueba que sólo existe un número finito de niveles topológicamente diferentes. Nosotros enfocaremos nuestro estudio en dos de estos tipos de niveles.

Definición 5.2. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney para $C(G)$, donde G es una gráfica finita. Decimos que $\mathcal{A}$ es un

1. **nivel chico** si $0 < t < \text{mín}\{\mu(H) : H \text{ es un segmento de } G\}$.
2. **nivel grande** si $\text{máx}\{\mu(H) : H \text{ es una subgráfica propia de } G\} < t < \mu(G)$.

La definición anterior no es de interés para las gráficas que tienen solo un segmento, pues es claro que para los arcos todos los niveles son chicos y grandes, y para las curvas cerradas simples ni siquiera está bien definido lo que es un nivel grande, ya que no tienen subgráficas propias. En adelante supondremos que todas las gráficas finitas con las que trabajemos tendrán al menos dos segmentos, para que valga la pena utilizar estas definiciones, aunque para el siguiente capítulo volveremos a considerar tanto a los arcos como a las curvas cerradas simples bajo la convención de que todos sus niveles son chicos y grandes, debido a que los teoremas que presentaremos entonces valen bajo esta convención.

Lo primero que queremos ver de los niveles chicos y grandes es que cada uno de ellos son homeomorfos entre sí, es decir, los niveles chicos son homeomorfos entre sí y los niveles grandes son homeomorfos entre sí. Para esto requerimos de un concepto y un resultado que se introducen en [6].

Definición 5.3. Sea X un continuo y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ niveles de Whitney para $C(X)$. Un elemento $C \in C(X)$ se dice que **se encuentra entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$** si existen $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que $A \subseteq C \subseteq B \neq A$ o $B \subseteq C \subseteq A \neq B$.

Lema 5.3. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ niveles de Whitney para $C(G)$, donde G es una gráfica finita. Si ningún elemento de $SG(G) \cup F_1(G)$ se encuentra entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

La demostración de este lema se puede encontrar en [6, pág. 145].

Teorema 5.5. *Para una gráfica finita G, los niveles chicos y los niveles grandes para $C(G)$ son homeomorfos entre sí, respectivamente.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ niveles de Whitney para $C(G)$, y sean μ y ν funciones de Whitney tales que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ y $\mathcal{B} = \nu^{-1}(s)$, con $t, s > 0$. Como tenemos que $\mu(C) = \nu(C) = 0$ para todo $C \in F_1(G)$, entonces es imposible que $A \subseteq C$ o $B \subseteq C$

para cualesquiera $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, ya que $\mu(A), \nu(B) > 0$. Esto significa que ningún elemento de $F_1(G)$ se encuentra entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ambos niveles chicos. Si $C \in SG(G)$, entonces existe un segmento H de G tal que $H \subseteq C$, y entonces $\mu(H) \leq \mu(C)$ y $\nu(H) \leq \nu(C)$. Luego, por definición tenemos que $t < \mu(C)$ y $s < \nu(C)$ para todo $C \in SG(G)$, por lo que es imposible que $C \subseteq A$ o $C \subseteq B$ para cualesquiera $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, no hay elementos de $SG(G) \cup F_1(G)$ que se encuentren entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y por el lema 5.3 concluimos que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son niveles grandes. Notemos primero que $G \in SG(G)$ no se encuentra entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, pues si existiera $A \in \mathcal{A}$ tal que $G \subseteq A$, esto significaría que $A = G$, y entonces $\mu(G) = t$, que contradice la definición de nivel grande, y de manera análoga para los elementos de $\mathcal{B}$. Ahora, si $C \in SG(G) \setminus \{G\}$, por definición de nivel grande tenemos que $\mu(C) < t$ y $\nu(C) < s$, lo que implica que no existen $A \in \mathcal{A}$ o $B \in \mathcal{B}$ tales que $A \subseteq C$ o $B \subseteq C$, pues de lo contrario tendríamos que $t = \mu(A) \leq \mu(C)$ o $s = \nu(B) \leq \nu(C)$. Luego, en este caso tampoco existen elementos de $SG(G) \cup F_1(G)$ que se encuentren entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y nuevamente por el lema 5.3 concluimos que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. $\square$

Ahora, para poder trabajar con estos conjuntos, es importante conocer cómo son sus elementos. Los niveles chicos son bastante fáciles de caracterizar, pues sus elementos son todos arcos o n-odos. Este hecho lo probamos de una forma un poco más general, pues queremos también relacionar los elementos del nivel con algunos elementos de la gráfica.

Proposición 5.1. *Sean G una gráfica finita y $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel chico para $C(G)$. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces A está contenido en un segmento de G, o contiene solamente un punto de ramificación de G.*

Demostración. Tomemos $A \in \mathcal{A}$. Si A está contenido en un segmento de G, no hay nada que probar. Supongamos entonces que este no es el caso. Es claro entonces que A debe contener al menos un punto de ramificación de G, pues de lo contrario sería disconexo. Supongamos que contiene dos puntos de ramificación, y llamémosles v_1 y v_2. Como A es arcoconexo, podemos tomar una trayectoria $f : [0,1] \to A$ de v_1 a v_2 y tal que $f([0,1])$ es un arco. Luego, como G tiene una cantidad finita de puntos de ramificación, también $f([0,1])$ debe contener una cantidad finita de puntos de ramificación de G, es decir, existen $s_1, s_2, \ldots, s_n \in [0,1]$ tales que $f(s_i)$ es un punto de ramificación, y $f(s)$ no es punto de ramificación si $s \neq s_i$ para cada $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $s_i < s_j$ si $i < j$. Esto significa que $H = f([s_1, s_2])$ es un arco cuyos extremos son puntos de ramificación de G, y que todos sus demás puntos son ordinarios. Por definición esto significa que H es un segmento de G, y además claramente $H \subseteq A$, por lo que tenemos que $\mu(H) \leq \mu(A) = t$, contradiciendo el hecho de que A es un elemento de un nivel chico. Por lo tanto, A contiene solamente un punto de ramificación de G. $\square$

Esta proposición no solamente describe completamente a los elementos de un nivel chico, sino que además nos permite saber cómo son sus intersecciones con los segmentos de la gráfica, algo que será de vital importancia cuando trabajemos con ellos.

Corolario 5.2. *Sean G una gráfica finita y $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel chico para $C(G)$. Si $A \in \mathcal{A}$ y H es un segmento de G tal que $A \cap H \neq \emptyset$, entonces $A \cap H$ es conexo, y por lo tanto es un arco o un conjunto unipuntual.*

Los elementos de un nivel grande no son tan fáciles de describir como los de un nivel chico, pues tienen formas más variadas, pero aún así podemos decir bastante respecto a su relación con los elementos de la gráfica.

Proposición 5.2. *Sean G una gráfica finita y $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel grande para $C(G)$. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces A intersecta a todos los segmentos de G, y las componentes de $G \setminus A$ contienen a lo más un vértice de G.*

Demostración. Tomemos $A \in \mathcal{A}$. Sean $L_1, L_2, \ldots, L_n$ los segmentos de G. Supongamos que A no intersecta a todos los segmentos de G. Digamos sin pérdida de generalidad que $A \cap L_i \neq \emptyset$ para $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y $A \cap L_i = \emptyset$ para $i \in \{k+1, k+2, \ldots, n\}$, donde $1 \leq k < n$. Sea $H = \bigcup_{i=1}^{k} L_i$. Entonces es fácil ver que H es una subgráfica de G, y además $A \subseteq H$, por lo que tenemos que $t = \mu(A) \leq \mu(H)$, lo que contradice que A sea un elemento de un nivel grande. Por lo tanto, $A \cap L_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Por otra parte, sea C una componente de $G \setminus A$. Si C contiene dos puntos de ramificación de G, por un argumento análogo al de la proposición anterior se prueba que C contiene un segmento de G lo cual contradice lo que acabamos de probar. Por lo tanto, C no contiene dos puntos de ramificación de G. $\square$

La figura 5.3 ilustra algunos ejemplos de los teoremas anteriores.

El siguiente paso para conocer la estructura de los niveles será la construcción de un modelo, lo cual entendemos como un subespacio de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo al nivel.

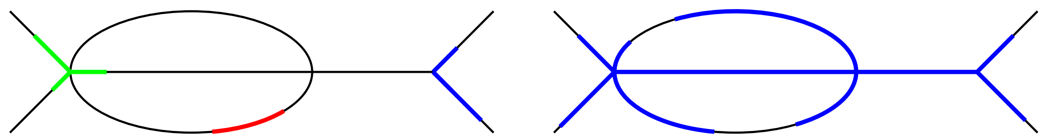

Figura 5.3: Elementos de un nivel chico (izquierda) y de un nivel grande (derecha).

Lamentablemente, esto no es fácil de hacer para cualquier nivel de cualquier gráfica, por lo que nosotros solo construiremos modelos para niveles chicos. A pesar de que se conocen modelos para niveles grandes de algunas gráficas finitas, no los presentaremos debido a que no serán útiles para los resultados que pretendemos obtener respecto a estos niveles.

La construcción del modelo no solamente ayudará a entender la estructura del nivel a partir de una perspectiva geométrica, sino que también nos permitirá aplicar resultados que desarrollamos previamente. De forma particular, podremos utilizar varios resultados de la sección 2.2, pues como veremos, los niveles chicos son homeomorfos a poliedros. De hecho, en [10, Proposición 2.4] se demuestra que cualquier nivel de una gráfica finita es homeomorfo a un poliedro.

Podemos construir el modelo fijando una función de Whitney que nos convenga y fijando un valor de t, pues por el teorema 5.5 tendremos que nuestro modelo será homeomorfo a cualquier nivel chico de la gráfica. Para hacer esto, también fijaremos una gráfica finita G diferente del intervalo y de la circunferencia, esto para que tenga sentido hablar de niveles chicos. Supongamos que $G = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$, donde cada L_j es un segmento de G, y definimos la siguiente función para dicha gráfica.

Definición 5.4. Sean $\nu_1 : 2^I \to [0, \infty)$ y $\nu_2 : 2^{S^1} \to [0, \infty)$ funciones de Whitney, y sean h_j homeomorfismos de L_j en I o S^1, según corresponda, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Para cada $A \in C(G)$, sea $J(A) \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $j \in J(A)$ si y sólo si $A \cap L_j \neq \emptyset$. Sea $\delta : \{L_1, \ldots, L_m\} \to \{1, 2\}$ dada por $\delta(L_j) = 1$ si L_j es un arco, y $\delta(L_j) = 2$ si L_j es una curva cerrada simple.

Definimos la función $\mu : C(G) \to [0, \infty)$ por

$$\mu(A) = \sum_{j \in J(A)} \nu_{\delta(L_j)}(h_j(A \cap L_j)).$$

La idea detrás de la definición de esta función es poder analizar el tamaño de un subcontinuo de G a partir de los tamaños de sus intersecciones con los segmentos de la gráfica. Esto resulta ser particularmente útil cuando dichas intersecciones son los segmentos del subcontinuo. Antes de ver cómo se expresa esta idea de manera formal, debemos asegurarnos de que μ es efectivamente una función de Whitney.

Proposición 5.3. *La función μ de la definición anterior es una función de Whitney para $C(G)$.*

Demostración. La continuidad de μ es consecuencia de la continuidad de ν_1, ν_2 y de cada h_j. Tomemos un punto $p \in G$. Notemos que $\{p\} \cap L_j = \{p\}$ para todo $j \in J(\{p\})$, por lo que $|h_j(\{p\})| = 1$ para todo $j \in J(\{p\})$. Luego, como ν_1 y ν_2 son funciones de Whitney, tenemos que

$$\mu(\{p\}) = \sum_{j \in J(\{p\})} \nu_{\delta(L_j)}(h_j(\{p\} \cap L_j)) = \sum_{j \in J(\{p\})} \nu_{\delta(L_j)}(h_j(\{p\})) = \sum_{j \in J(\{p\})} 0 = 0,$$

y por lo tanto se satisface la primera condición de la definición de función de Whitney.

Sean $A, B \in C(G)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces tenemos que $A \cap L_j \subseteq B \cap L_j$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, lo que además implica que $J(A) \subseteq J(B)$. Esto significa que

$$h_j(A \cap L_j) \subseteq h_j(B \cap L_j) \quad \forall j \in J(A), \tag{5.1}$$

y como ν_1 y ν_2 son funciones de Whitney, tenemos que

$$\nu_{\delta(L_j)}(h_j(A \cap L_j)) \leq \nu_{\delta(L_j)}(h_j(B \cap L_j)) \quad \forall j \in J(A). \tag{5.2}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(A) = \sum_{j \in J(A)} \nu_{\delta(L_j)}(h_j(A \cap L_j)) &\leq \sum_{j \in J(A)} \nu_{\delta(L_j)}(h_j(B \cap L_j)) \\ \leq \sum_{j \in J(B)} \nu_{\delta(L_j)}(h_j(B \cap L_j)) &= \mu(B), \end{aligned} \tag{5.3}$$

con lo que hemos obtenido que $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Supongamos que $\mu(A) = \mu(B)$. Entonces las desigualdades en 5.3 deben ser todas igualdades, lo que a su vez implica que las desigualdades en 5.2 son también igualdades. Como ν_1 y ν_2 son funciones de Whitney, esto no podría ser si las contenciones en 5.1 fueran estrictas, por lo que también se dan las igualdades en estos conjuntos, y entonces tenemos que $A \cap L_j = B \cap L_j$ para todo $j \in J(A)$, ya que cada h_j es homeomorfismo. Ahora, si $J(A) = J(B)$, tendríamos que

$$A = \bigcup_{j \in J(A)} A \cap L_j = \bigcup_{j \in J(A)} B \cap L_j = \bigcup_{j \in J(B)} B \cap L_j = B,$$

que no es cierto pues tomamos a estos conjuntos de forma que $A \subsetneq B$. Luego, tenemos que $J(B) \setminus J(A) \neq \emptyset$, pues ya teníamos que $J(A) \subseteq J(B)$, así que podemos tomar $j_0 \in J(B) \setminus J(A)$. Notemos que como ν_1 y ν_2 son no negativas, utilizando las igualdades en 5.3 tenemos que

$$\nu_{\delta(L_j)}(h_j(B \cap L_j)) = 0 \quad \forall j \in J(B) \setminus J(A), \tag{5.4}$$

lo cual implica que $|h_{j_0}(B \cap L_{j_0})| = 1$, es decir, $B \cap L_{j_0} = \{p\}$ para algún $p \in G$.

Notemos que necesariamente p debe ser un punto de ramificación de G, o de lo contrario B sería disconexo, con lo que $|J(\{p\})| > 1$. Además $p \notin A$, ya que de lo contrario $A \cap L_{j_0} \neq \emptyset$, que no es cierto pues $j_0 \notin J(A)$. Ahora, si existiera $j_1 \in J(A) \cap J(\{p\})$, por lo anterior tendríamos que $p \in B \cap L_{j_1} = A \cap L_{j_1}$, que contradice lo que acabamos de probar. Luego, $J(A) \cap J(\{p\}) = \emptyset$, así que por la ecuación 5.4 tenemos que $B \cap L_j = \{p\}$ para todo $j \in J(\{p\})$.

Finalmente, es fácil ver que p es un punto interior de $\bigcup_{j \in J(\{p\})} L_j$, por lo que existe un abierto U de G tal que $p \in U \subseteq \bigcup_{j \in J(\{p\})} L_j$. Pero entonces tenemos que $U \cap B = \{p\}$ es abierto en la topología relativa de B, y también sabemos que es cerrado, lo que por el teorema 1.15 implica que B es disconexo. Como esto es una contradicción, se debe tener que $\mu(A) \neq \mu(B)$, y por lo tanto concluimos que $\mu(A) < \mu(B)$.

Por lo anterior, concluimos que μ es una función de Whitney para $C(G)$. $\square$

Como ya adelantamos, podemos apreciar la utilidad de esta función en los casos en que las intersecciones de un subcontinuo A con los segmentos de G son también segmentos de A, pues esto nos permite obtener el tamaño de A a partir de los tamaños de sus segmentos. Ya que estamos construyendo esta función con el objetivo de analizar niveles chicos, probaremos este resultado solamente para el caso en que un subcontinuo es como los mencionados en la proposición 5.1, pues es para este caso que lo usaremos más adelante.

Lema 5.4. *La función μ de la definición 5.4 satisface*

$$\mu(A) = \sum_{j \in J(A)} \mu(A \cap L_j)$$

cuando $A \in C(G)$ contiene a lo más un punto de ramificación de G.

Demostración. Supongamos primero que A no contiene puntos de ramificación de G. Entonces $A \subseteq L_{j_0}$ para algún $j_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, lo que significa que $J(A) = \{j_0\}$ y que $A \cap L_{j_0} = A$. Luego, $\sum_{j \in J(A)} \mu(A \cap L_j) = \mu(A \cap L_{j_0}) = \mu(A)$, y se cumple la igualdad deseada.

Supongamos ahora que A contiene un punto de ramificación de G, y llamémosle p. Para simplificar la notación, sea $A_j = A \cap L_j$ para cada $j \in J(A)$. Notemos que $A_i \cap L_j = \{p\}$ para $i, j \in J(A)$ con $i \neq j$, por lo que $\nu_{\delta(L_j)}(h_j(A_i \cap L_j)) = \nu_{\delta(L_j)}(h_j(\{p\})) = 0$ por ser ν_1 y ν_2 funciones de Whitney. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J(A)} \mu(A \cap L_j) &= \sum_{j \in J(A)} \sum_{i \in J(A_j)} \nu_{\delta(L_j)}(h_i(A_j \cap L_i)) = \sum_{j \in J(A)} \nu_{\delta(L_j)}(h_j(A_j \cap L_j)) \\ &= \sum_{j \in J(A)} \nu_{\delta(L_j)}(h_j(A \cap L_j)) = \mu(A), \end{aligned}$$

y por lo tanto también en este caso se cumple la igualdad. $\square$

Estamos listos para empezar la construcción del modelo de un nivel chico. Como ya mencionamos, el espacio que obtendremos será un poliedro, por lo que construiremos el modelo por partes, obteniendo cada uno de los simplejos que conforman el complejo simplicial que da pie al poliedro. Para esto, fijaremos un nivel chico $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$, en el que supondremos que $t < 1$, lo cual podemos hacer sin problema gracias a la definición de nivel chico. Recordemos nuevamente que gracias al teorema 5.5 esto no afectará el modelo, el cual funcionará para cualquier nivel chico de $C(G)$.

En primer lugar, consideraremos a los elementos del nivel que están contenidos en un segmento de G. Notemos que esto no excluye a todos los subcontinuos en el nivel que contienen puntos de ramificación, pues hay algunos que satisfacen ambas condiciones. Para convencerse de la existencia de estos subcontinuos, basta con tomar un arco ordenado de un punto de ramificación a un segmento que lo contenga y aplicar el teorema del valor intermedio como lo hicimos al inicio de este capítulo para encontrarlos.

Para cada segmento L, sea

$$\mathcal{A}_L = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq L\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Es claro que $\mathcal{A}_L = \nu^{-1}(t)$, donde $\nu = \mu\big|_{C(L)}$. Luego, por los teorema 5.3 y 5.4 tenemos que $\mathcal{A}_L$ es un arco o una curva cerrada simple, dependiendo de si L es un arco o una curva cerrada simple, respectivamente.

Para el caso en que $\mathcal{A}_L$ es un arco, esto significa que también es homeomorfo a un simplejo de dimensión 1, por lo que cada uno de estos conjuntos aporta un simplejo de dimensión 1 junto con sus vértices, que son sus caras propias, a nuestro complejo simplicial. No es difícil convencerse de que estos vértices representan a los elementos de $\mathcal{A}_L$ que contienen a los extremos de L.

Ahora, para cuando $\mathcal{A}_L$ es una curva cerrada simple, recordemos de la sección 2.2 que esto significa que es homeomorfo al poliedro de la frontera de un simplejo de dimensión 2, la cual consta de tres vértices y los tres segmentos que los unen. Necesitamos entonces añadir estos elementos a nuestro complejo simplicial, pero todavía es importante analizar qué elementos del nivel se corresponden los puntos de estos simplejos.

Notemos que como L es una curva cerrada simple, todos los elementos de $\mathcal{A}_L$ son arcos, así que en particular hay dos de ellos que contienen al punto de ramificación de G contenido en L como uno de sus extremos. A estos dos elementos de $\mathcal{A}_L$ los relacionaremos con dos de los vértices que hemos añadido al complejo simplicial. El tercero de los vértices se corresponderá con un elemento de $\mathcal{A}_L$ que no contiene al punto de ramificación, es indiferente con cuál. Luego, habiendo hecho estas asignaciones, es fácil ver que uno de los simplejos de dimensión 1 representa a todos los elementos de $\mathcal{A}_L$ que contienen al punto de ramificación de G.

Pasamos ahora a estudiar el resto de elementos del nivel que aún no hemos considerado, que por la proposición 5.1 son aquellos que contienen un punto de ramificación de G. De forma similar al caso anterior, consideramos un punto de ramificación de G a la vez, de forma que podemos considerar los niveles chicos del hiperespacio de contención para cada uno de estos puntos para estudiarlos por separado.

En la demostración consideraremos solamente el caso en que todos los segmentos de G que contienen al punto de ramificación son arcos, para poder proceder de forma más sencilla. Sin embargo, el lema es cierto para cualquier punto de ramificación, sin importar cómo sean los segmentos que lo contengan. Al terminar la demostración mencionaremos cómo cambia para el caso en que también hay segmentos que son curvas cerradas simples que contienen al punto de ramificación.

Lema 5.5. *Sea $v \in G$ un punto de ramificación de G. Entonces $C_v(G, \mu, t)$ es homeomorfo a un simplejo de dimensión $o(v) - 1$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $J(\{v\}) = \{1, 2, \dots, n\}$, donde $3 \leq n \leq m$, y que cada L_j con $j \in J(\{v\})$ es un arco. Notemos que esto significa que $o(v) = n$. Además, tenemos que $J(A) = J(\{v\})$ para todo $A \in C_v(G, \mu, t)$, pues $J(\{v\}) \subseteq J(A)$ ya que $v \in A$, y no puede existir $j_0 \in J(A) \setminus J(\{v\})$, o de lo contrario A contendría un segmento de G, contradiciendo que pertenece a un nivel chico.

Sea $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Como β es linealmente independiente, por el lema 2.2 tenemos que los vectores canónicos generan un simplejo de dimensión $n-1$, llamémosle σ. Definamos la función $f : C_v(G,\mu,t) \to \mathbb{R}^n$ por

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A) e_j, \quad \text{donde } \lambda_j(A) = \frac{1}{t}\mu(A \cap L_j).$$

Es claro que $\lambda_j(A) \geq 0$ para cada j, y además por el lema 5.4 tenemos que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A) = 1$, lo que implica que $f(C_v(G,\mu,t)) \subseteq \sigma$. Para ver que de hecho ambos conjuntos son iguales, tomemos $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in \sigma$. Para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, sea α_j un arco ordenado de $\{h_j(v)\}$ a I. Como $0 \leq \lambda_j \leq 1$ y $0 < t < 1$, aplicando el teorema del valor intermedio a $\nu_1 \circ \alpha_j$ obtenemos que existe $s_j \in [0,1]$ tal que $\nu_1(\alpha_j(s_j)) = t\lambda_j$. Sea $A = \bigcup_{j=1}^{n} h_j^{-1}(\alpha_j(s_j))$, que es conexo por el teorema 1.16, ya que $v \in h_j^{-1}(\alpha_j(s_j))$ para todo j, y es compacto por el teorema 1.12, es decir, $A \in C(G)$. Además, como $t\lambda_j < 1$ para todo j, tenemos que $\alpha_j(s_j) \neq I$, lo que implica que A no contiene más puntos de ramificación de G además de v. Luego, utilizando el lema 5.4 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \sum_{j=1}^{n} \mu(A \cap L_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j^{-1}(\alpha_j(s_j))) = \sum_{j=1}^{n} \nu_1(h_j(h_j^{-1}(\alpha_j(s_j)))) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \nu_1(\alpha_j(s_j)) = \sum_{j=1}^{n} t\lambda_j = t,
\end{aligned}$$

lo que significa que $A \in \mathcal{A}$. Notemos además que en la igualdad anterior obtuvimos que $\mu(A \cap L_j) = t\lambda_j$ para $j \in \{1,\ldots,n\}$, por lo que tenemos que

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t}\mu(A \cap L_j) e_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t} t\lambda_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = x,$$

y entonces $f : C_v(G,\mu,t) \to \sigma$ es sobreyectiva.

Ahora, para ver que f también es inyectiva, tomemos $A, B \in C_v(G,\mu,t)$ tales que $f(A) = f(B)$. Como β es una base de $\mathbb{R}^n$, esto a su vez implica que $\lambda_j(A) = \lambda_j(B)$ para todo j, lo que significa que $\mu(A \cap L_j) = \mu(B \cap L_j)$ para todo j. Notemos que $A \cap L_j$ y $B \cap L_j$ son ambos arcos o conjuntos unipuntuales por el corolario 5.2, y además contienen al extremo v de L_j, lo que implica que necesariamente $A \cap L_j \subseteq B \cap L_j$ o $B \cap L_j \subseteq A \cap L_j$. Luego, como $\mu(A \cap L_j) = \mu(B \cap L_j)$ y μ es función de Whitney, esto implica que de hecho se cumple la igualdad de conjuntos, es decir, $A \cap L_j = B \cap L_j$ para todo j, y por lo tanto

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} A \cap L_j = \bigcup_{j=1}^{n} B \cap L_j = B,$$

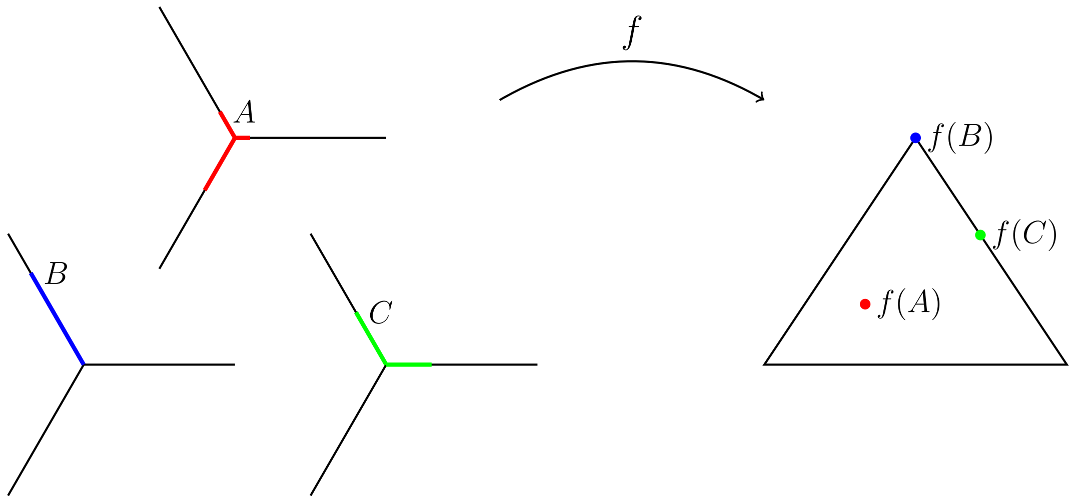

Figura 5.4: Función f en el lema 5.5 para $o(v) = 3$.

con lo que f es inyectiva.

Finalmente, podemos usar el teorema 1.24 para probar que f es continua, ya que $\mathbb{R}^n$ es un espacio producto. Si $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección en la j-ésima coordenada para cada j, directamente de la definición de f se obtiene que si $A \in C_v(G, \mu, t)$, entonces $(\pi_j \circ f)(A) = \lambda_j(A) = \frac{1}{t}\mu(A \cap L_j)$, que es continua debido a la continuidad de μ, y por lo tanto podemos concluir que f es continua.

Luego, al aplicar el teorema 1.11 obtenemos que f es un homeomorfismo, y por lo tanto $C_v(G, \mu, t) \cong \sigma$. $\square$

La demostración para el caso en que algún L_j que contiene a v es una curva cerrada simple es más complicada, porque entonces $|J(\{v\})| \neq o(v)$, así que no podemos definir la función f de la misma manera. Lo que se hace en este caso es que se "divide" al segmento L_j en dos "lados", podemos decir a la "izquierda" y a la "derecha" de v. De esta forma, a las intersecciones de los elementos de $C_v(G, \mu, t)$ con L_j también las dividimos en dos partes, y a cada una la relacionamos con un vértice diferente del simplejo. Tras ajustar estos detalles de manera formal, la demostración sigue de forma análoga a lo que presentamos.

Antes de continuar con la construcción del modelo, es conveniente detenerse a analizar las caras del simplejo del lema anterior para poder trabajar con ellas más adelante. Sabemos que un punto $x \in \sigma$ está en una de sus caras propias si alguna de sus coordenadas baricéntricas vale 0, digamos λ_{j_0}. Si seguimos la construcción realizada en la prueba del lema para obtener un subcontinuo $A \in C_v(G, \mu, t)$ tal que $f(A) = x$, obtenemos que este subcontinuo es tal que $\mu(A \cap L_{j_0}) = 0$, lo que implica que $A \cap L_{j_0} = \{v\}$. En otras palabras, los puntos en las caras propias del simplejo representan a subcontinuos en el nivel cuya intersección con alguno de los arcos que contienen a v consta solamente del vértice v. En particular, para el caso en que x sea uno de los vértices del simplejo, podemos verificar que este punto representa un subcontinuo que está contenido en un segmento de G y contiene a v. Algunos ejemplos de estas situaciones se ilustran en la figura 5.4.

La situación para cuando un segmento L_j que contiene a v es una curva cerrada simple es similar a lo anterior. En este caso, la diferencia es que que una de las coordenadas baricéntricas relacionadas con este segmento sea 0 significa que el elemento del nivel que estamos considerando no intersecta a L_j a uno de los "lados" de v, a excepción del mismo punto v.

A partir del lema anterior obtenemos varios simplejos nuevos que añadir al complejo simplicial, que son aquellos a los que los niveles del hiperespacio de contención de cada uno de los vértices son homeomorfos, junto con cada una de sus caras. La proposición 5.1 nos garantiza que estos son todos los simplejos que necesitamos para construir el poliedro, así que ahora solamente resta analizar las intersecciones de estos simplejos para asegurarnos de que este conjunto de simplejos sí forma un complejo simplicial, y con eso completar el modelo. Para hacer esto de forma más sencilla, introduciremos la siguiente notación:

1. Si $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son los puntos de ramificación de G, denotamos por σ_i al simplejo que corresponde a $C_{v_i}(G, \mu, t)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

2. Para cada segmento L_j de G que sea un arco, denotamos por τ_j al simplejo que corresponde al conjunto $\mathcal{A}_{L_j}$.

3. Para cada segmento L_j de G que sea una curva cerrada simple, denotamos por τ_j, τ_j' y τ_j'' a los simplejos cuya unión corresponde al conjunto $\mathcal{A}_{L_j}$. En particular, τ_j será el simplejo que corresponde a los elementos de $\mathcal{A}_{L_j}$ que contienen al punto de ramificación de G que pertenece a L_j.

Claramente las intersecciones de estos simplejos se darán en los puntos que correspondan a subcontinuos de la gráfica contenidos en un segmento y que contengan un punto de ramificación de G, pues no existen subcontinuos en el nivel chico contenidos en dos segmentos a la vez o que contengan dos puntos de ramificación.

Consideremos primero a un elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que A está contenido en un segmento que es un arco L_j, y que contiene al punto de ramificación v_i. Como vimos anteriormente, este elemento está representado en el simplejo σ_i por uno de sus vértices, y lo mismo sucede con τ_j, por lo que $\sigma_i \cap \tau_j$ consta de un vértice común de los dos simplejos. Esto es compatible con la definición de complejo simplicial.

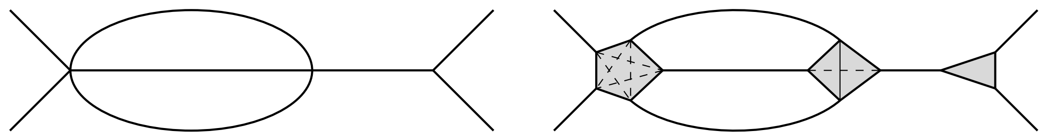

Figura 5.5: Modelo de un nivel chico (derecha) de una gráfica finita (izquierda).

Consideremos ahora un elemento $A \in \mathcal{A}$ contenido en un segmento L_j que es una curva cerrada simple, y que además contiene al punto de ramificación v_i. Por lo que ya mencionamos anteriormente, este elemento está representado por un punto de τ_j, por lo que analizando todos los elementos de este estilo nos damos cuenta de que $\sigma_i \cap \tau_j = \tau_j$. Para que esto esté de acuerdo con la definición de complejo simplicial, necesitamos asegurarnos de que τ_j es una cara de σ_i.

Es fácil ver que esto resulta ser cierto, pues si analizamos las coordenadas baricéntricas de $f(A)$ como hicimos anteriormente, nos damos cuenta de que $f(A) \in \tau_j$ si y sólo si $A \cap L_k = \{v\}$ para todo $k \in J(A)$ con $k \neq j$. Esto implica que el conjunto de puntos en σ_i cuyas únicas coordenadas no nulas corresponden a los vértices asociados a los "lados" de L_j son precisamente los puntos de τ_j, y entonces, por definición, τ_j es una cara de σ_i.

Podemos resumir la construcción que hemos hecho diciendo que para obtener un modelo de un nivel chico, basta con sustituir cada punto de ramificación v de la gráfica por un simplejo de dimensión $o(v) - 1$. Esto lo podemos ver ilustrado en la figura 5.5. Para terminar, daremos formalidad a la construcción que acabamos de hacer al enunciar el teorema que se demuestra a partir de ella, que como mencionamos anteriormente, será un caso particular de [10, Proposición 2.4].

Teorema 5.6. *Sea G una gráfica finita con al menos un punto de ramificación, y sea $\mathcal{A}$ un nivel de Whitney chico para $C(G)$. Entonces existe un complejo simplicial K de dimensión* $\text{máx}\{o(v) - 1 : v$ *es punto de ramificación de* $G\}$ *tal que* $\mathcal{A} \cong |K|$.

Capítulo 6

Teoremas de contractibilidad

En este capítulo terminaremos nuestro estudio al presentar los resultados sobre contractibilidad en niveles de Whitney que nos interesan. Como mencionamos en el capítulo anterior, volvemos a considerar los arcos y las curvas cerradas simples en nuestro estudio bajo la consideración de que todos sus niveles de Whitney son chicos y grandes.

6.1. Teorema para niveles chicos

El primer teorema de contractibilidad que queremos presentar, relativo a niveles chicos, es más bien una consecuencia de un teorema mucho más fuerte que se demuestra en [10, Proposición 2.3]. Nosotros también demostraremos este teorema, pero de una forma considerablemente diferente, utilizando las herramientas que desarrollamos en el capítulo de preliminares de topología algebraica.

Teorema 6.1. *Sea G una gráfica finita, y sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney chico para $C(G)$. Entonces $G \simeq \mathcal{A}$.*

Demostración. Si G es un arco o una curva cerrada simple, por los teoremas 5.3 y 5.4 tenemos que $G \cong \mathcal{A}$, por lo que en particular tenemos que $G \simeq \mathcal{A}$.

Supongamos ahora que G tiene puntos de ramificación, digamos $v_1, v_2, \ldots, v_n$, y sean $H_1, H_2, \ldots, H_m$ sus segmentos. Sea K el complejo simplicial que construimos en el capítulo anterior para probar el teorema 5.6, y sea $h : \mathcal{A} \to |K|$ un homeomorfismo. Por el lema 5.5 tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, hay un simplejo σ_i en K tal que $h(C_{v_i}(G, \mu, t)) = \sigma_i$. De forma similar, para el resto de elementos de K seguiremos la nomenclatura que introdujimos en el capítulo anterior. Sea $L_i = K(\sigma_i) \subseteq K$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de modo que $|L_i| = \sigma_i$.

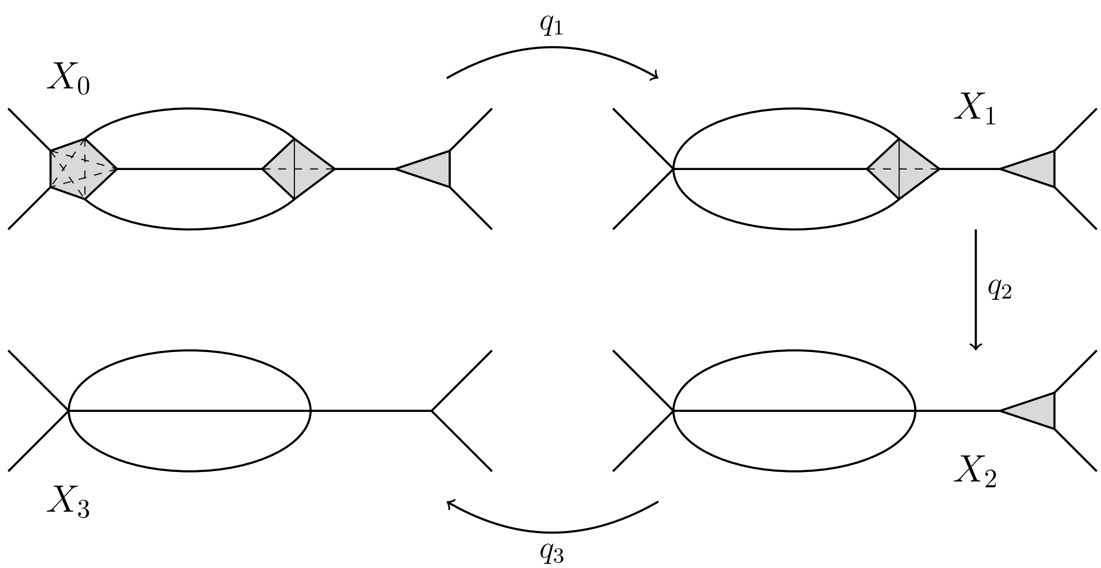

Figura 6.1: Colección de espacios cociente

Notemos que por el teorema 2.10 tenemos que $|L_1|$ es contráctil, y además (K, L_1) es un par simplicial, por lo que $(|K|, |L_1|)$ tiene la propiedad de extensión de homotopía de acuerdo con el teorema 2.11. Luego, aplicando el teorema 2.7 tenemos que $|K| \simeq |K|/|L_1|$. Para simplificar la notación, sean $X_0 = |K|$ y $X_1 = |K|/|L_1|$, y sea $q_1 : X_0 \to X_1$ función cociente.

Notemos que el espacio X_1 también es un poliedro, y además contiene conjuntos homeomorfos a cada σ_i con $i \in \{2, \dots, n\}$ mediante el homeomorfismo $q_1\big|_{X_0 \setminus \sigma_1}$. Por esta razón, abusando de la notación diremos que $q_1(\sigma_i) = \sigma_i$, esto también para poder simplificar la notación más adelante. Luego, de la misma forma de antes tenemos que $(X_1, |L_2|)$ es un par con la propiedad de extensión de homotopía, donde además $|L_2| = \sigma_2$ es contráctil, así que aplicando de nuevo el teorema 2.7 tenemos que $q_2 : X_1 \to X_1/|L_2|$ es una equivalencia homotópica. Nuevamente renombramos al espacio cociente como $X_2 = X_1/|L_2|$.

Continuando con este proceso, obtenemos una colección de espacios cociente $X_0, X_1, \dots, X_n$, cuyas funciones cociente $q_i : X_{i-1} \to X_i$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ también son equivalencias homotópicas, de modo que todos estos espacios son de la misma clase de equivalencia homotópica. Además, por la construcción del complejo simplicial K, es fácil ver que en X_n ya no quedan subespacios homeomorfos a simplejos de dimensión mayor o igual a 2. A partir de esta idea, y de la ilustración en la figura 6.1, nuestro objetivo es probar que de hecho X_n es homeomorfo a G.

Lo primero que hemos de notar para poder probar este hecho es que $q = q_n \circ q_{n-1} \circ \cdots \circ q_1 : X_0 \to X_n$ es una función cociente. Esto además nos dice que X_n es un espacio compacto, pues es cociente de un espacio compacto. Ahora, por la forma en que construimos a $X_0 = |K|$, podemos construir una función continua y sobreyectiva $g : X_0 \to G$ que satisface las siguientes condiciones (retomando la nomenclatura del capítulo anterior):

1. Para cada segmento H_j de G que es un arco, se tiene que $g(\tau_j) = H_j$.
2. Para cada segmento H_j de G que es una curva cerrada simple, si v_i es el punto de ramificación de G que pertenece a H_j, se tiene que $g(\tau_j) = \{v_i\}$ y $g(\tau_j' \cup \tau_j'') = H_j$.
3. Para cada vértice v_i de G, se tiene que $g(\sigma_i) = \{v_i\}$.

Notemos que bajo estas condiciones, $g\big|_{X_0 \setminus (\sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_n)}$ resulta ser un homeomorfismo en su imagen, con su dominio siendo una unión de arcos abiertos, es decir, sin extremos, que además son disjuntos. Además, esto significa que g satisface las hipótesis del teorema 1.29, es decir, es constante en los conjuntos de la forma $q^{-1}(p)$ para todo $p \in X_n$, por lo que induce una función continua $f : X_n \to G$ tal que $f \circ q = g$.

Analicemos la biyectividad de esta nueva función. En primer lugar, tomemos $p \in G$. Como g es sobreyectiva, existe $x \in X_0$ tal que $g(x) = p$, lo que significa que $f(q(x)) = g(x) = p$ y entonces f es sobreyectiva. Tomemos ahora $x, y \in X_n$ tales que $f(x) = p = f(y)$ para algún $p \in G$. Como q es sobreyectiva, podemos tomar $x', y' \in X_0$ tales que $q(x') = x$ y $q(y') = y$. Notemos que lo anterior significa que

$$g(x') = f(q(x')) = f(x) = p = f(y) = f(q(y')) = g(y'),$$

de modo que tenemos dos casos dependiendo del tipo de punto que sea p.

Si p es un punto ordinario o un extremo de G, a partir de la definición de g tenemos que $|g^{-1}(\{p\})| = 1$, por lo que como $x', y' \in g^{-1}(\{p\})$, entonces $x' = y'$, y por lo tanto $x = q(x') = q(y') = y$. Si por el contrario p es un punto de ramificación de G, digamos v_i, entonces tenemos por la definición de g que $x', y' \in \sigma_i$, lo que a su vez implica que $x = q(x') = q(y') = y$. A partir de lo anterior concluimos que f debe ser inyectiva.

Tenemos entonces que f es una función continua y biyectiva. Además, como ya mencionamos, su dominio es un espacio compacto por ser un cociente de un espacio compacto. Por otra parte, tenemos que su contradominio es un espacio métrico, y por lo tanto de Hausdorff. Luego, podemos aplicar el teorema 1.11 para concluir que de hecho f es un homeomorfismo, y por lo tanto $X_n \cong G$. Esto nos dice que, en particular, $X_n \simeq G$, por lo que como $X_0 \simeq X_n$, y además $\mathcal{A} \simeq X_0$ por ser homeomorfos, concluimos que $G \simeq \mathcal{A}$. □

A partir del teorema anterior, la prueba de nuestro teorema se vuelve prácticamente inmediata. Sin embargo, la incluimos de todas formas para darle completitud al presente trabajo.

Teorema 6.2 (De niveles chicos)**.** *Una gráfica finita es contráctil si y sólo si sus niveles de Whitney chicos son contráctiles.*

Demostración. Sea G una gráfica finita, y sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney chico para $C(G)$. Por el teorema 2.3, tenemos que G es contráctil si y sólo si G es homotópicamente equivalente a un espacio de un solo punto, y de la misma manera para $\mathcal{A}$. Pero como $G \simeq \mathcal{A}$ por el teorema 6.1, lo anterior implica por la proposición 2.2 que si G es contráctil, entonces también lo es $\mathcal{A}$, y viceversa. □

A pesar de que la demostración anterior era realmente nuestro objetivo en este trabajo, es conveniente decir algo más al respecto de lo que de él obtenemos. Recordemos que del teorema 3.12 y su recíproco tenemos que las únicas gráficas finitas contráctiles son los árboles. Luego, podemos reformular el teorema anterior a manera de caracterización de los árboles.

Corolario 6.1. *Sea G una gráfica finita. Entonces G es un árbol si y sólo si sus niveles de Whitney chicos son contráctiles.*

6.2. Teorema para niveles grandes

Presentamos ahora nuestro teorema relativo a la contractibilidad de niveles grandes, el cual se puede encontrar en la literatura en [7, Teorema 65.6]. Para poder presentarlo, solamente necesitamos de un resultado más que aún no hemos introducido, pero que probamos a continuación.

Teorema 6.3. *Sea X un continuo con un punto de corte p, y sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu^{-1}(t) = C_p(X, \mu, t)$ para todo t que satisface $\mu(X) - \epsilon < t < \mu(X)$.*

Demostración. Sea p un punto de corte de X, y sea $\{C_\alpha\}_{\alpha \in J}$ la colección de componentes de $X \setminus \{p\}$. Notemos que $\overline{C_\alpha} \in C(X)$ para cada α, pues son continuos por los teoremas 1.9 y 1.17. Sea $t > \sup_{\alpha \in J} \mu(\overline{C_\alpha})$, y supongamos que existe $A \in \mu^{-1}(t)$ tal que $p \notin A$. Entonces $A \subseteq X \setminus \{p\}$, así que al ser conexo tenemos que $A \subseteq C_{\alpha_0} \subseteq \overline{C_{\alpha_0}}$ para algún $\alpha_0 \in J$. Luego,

$$t = \mu(A) \leq \mu(\overline{C_{\alpha_0}}) \leq \sup_{\alpha \in J} \mu(\overline{C_\alpha}) < t,$$

lo cual es claramente una contradicción. Esto nos permite concluir que $p \in A$ para todo $A \in \mu^{-1}(t)$, es decir, $\mu^{-1}(t) \subseteq C_p(X, \mu, t)$, y como $C_p(X, \mu, t) \subseteq \mu^{-1}(t)$ por definición, tenemos que $\mu^{-1}(t) = C_p(X, \mu, t)$. □

El teorema anterior es un poco más general de lo que realmente necesitamos, pero es a partir de él que obtenemos la herramienta que nos falta. Utilizando este teorema junto con los teoremas 5.2 y 5.5, obtenemos inmediatamente el resultado en que estamos interesados.

Corolario 6.2. *Sea G una gráfica finita con un punto de corte. Entonces los niveles de Whitney grandes para $C(G)$ son ARs.*

Ahora sí, estamos listos para presentar el teorema de nuestro interés.

Teorema 6.4 (De niveles grandes)**.** *Sea G una gráfica finita con un punto de corte. Entonces sus niveles de Whitney grandes son contráctiles.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un nivel de Whitney grande para $C(G)$, el cual es un AR por el corolario anterior. Ahora, como $\mathcal{A}$ es un continuo, por el teorema 3.10 existe un encaje $f : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{Q}$ de $\mathcal{A}$ en el cubo de Hilbert. Lo anterior significa que $f(\mathcal{A})$ es un retracto de $\mathcal{Q}$, y como $\mathcal{Q}$ es contráctil, por el teorema 2.5 tenemos que $f(\mathcal{A})$ es contráctil. Por lo tanto, como $f(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A}$, concluimos que $\mathcal{A}$ es contráctil. □

6.2.1. Sobre el recíproco del teorema de niveles grandes

Habiendo presentado el teorema de niveles grandes, es natural preguntarse por la veracidad de su recíproco, como se suele hacer en la investigación matemática. Para nuestro caso, esta pregunta es un problema abierto que fue propuesto por primera ver en [8, Pregunta 3.5] y retomado en [7, Pregunta 65.7]. A pesar de que el problema no ha sido resuelto, existen avances al respecto, uno de los cuales presentamos a continuación, aunque antes necesitamos un resultado que aún no hemos presentado, y cuya demostración es muy similar a la del teorema de niveles grandes. De hecho, se puede incluso decir que el teorema de niveles grandes es una consecuencia de este teorema más general.

Proposición 6.1. *Sea K un AR. Entonces K es contráctil.*

El resultado que pretendemos mostrar a continuación es el de un caso específico de gráficas finitas sin puntos de corte cuyos niveles grandes no son contráctiles. Esto es un avance del problema porque ejemplifica un caso en que la contrapositiva del problema es cierta. Este teorema se puede encontrar en [10, Proposición 2.6].

Teorema 6.5. *Sea $G = G(m)$ una m-theta, con $m \geq 3$, y sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney grande para $C(G)$. Entonces $\mathcal{A} \simeq S^{m-1}$, y por lo tanto no es contráctil.*

Demostración. Sean v_1 y v_2 los vértices de G, y sean $L_1, \ldots, L_m$ sus segmentos. Notemos que si $A \in \mathcal{A}$, entonces alguno de v_1, v_2 debe pertenecer a A, pues por la proposición 5.2 tenemos que $A \cap L_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, y esto sólo es posible si A contiene algún vértice de G. Esto nos dice que $\mathcal{A} = C_{v_1}(G, \mu, t) \cup C_{v_2}(G, \mu, t)$.

Analicemos ahora la intersección de estos niveles de contención. Por un lado, si $A \in C_{v_1}(G, \mu, t) \cap C_{v_2}(G, \mu, t)$, por ser arcoconexo debe contener un arco de v_1 a v_2, pero estos arcos son precisamente los segmentos de G, por lo que estamos diciendo que A debe contener un segmento de G. Recíprocamente, es claro que si $A \in \mathcal{A}$ contiene un segmento de G, entonces también debe contener a sus vértices, por lo que junto con lo anterior tenemos que

$$C_{v_1}(G, \mu, t) \cap C_{v_2}(G, \mu, t) = \bigcup_{i=1}^{m} C_{L_i}(G, \mu, t),$$

lo que nos dice que la colección $\{C_{L_1}(G, \mu, t), \ldots, C_{L_m}(G, \mu, t)\}$ es una cubierta de $C_{v_1}(G, \mu, t) \cap C_{v_2}(G, \mu, t)$.

Para estos otros niveles de contención también estamos interesados en su intersección, aunque no necesariamente de todos a la vez. Para poder hacer esto, tomemos $J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces es claro que $A \in \mathcal{A}$ contiene a L_j para todo $j \in J$ si y sólo si $\bigcup_{j \in J} L_j \subseteq A$, por lo que tenemos que

$$\bigcap_{j \in J} C_{L_j}(G, \mu, t) = C_{\bigcup_{j \in J} L_j}(G, \mu, t).$$

Esto en particular nos dice que $\bigcap_{j=1}^{m} C_{L_j}(G, \mu, t) = C_G(G, \mu, t) = \emptyset$, pero si $|J| \leq m - 1$, entonces $\bigcap_{j \in J} C_{L_j}(G, \mu, t)$ es un AR por el teorema 5.2, y entonces por la proposición anterior es contráctil.

A partir de lo anterior podemos probar que $C_{v_1}(G, \mu, t) \cap C_{v_2}(G, \mu, t) \simeq S^{m-2}$. Para esto, tomemos un simplejo σ de dimensión $m - 1$ con vértices $a_1, \ldots, a_m$, y consideremos la división baricéntrica de la frontera de σ, es decir, el complejo simplicial

$\operatorname{Sd}\dot{\sigma}$. Notemos que la colección $\{|\operatorname{St} a_1|, \dots, |\operatorname{St} a_m|\}$ es una cubierta de $|\dot{\sigma}|$. Además, si J es como antes, esta cubierta satisface que $\bigcap_{j\in J} |\operatorname{St} a_j|$ es un simplejo cuando $|J| \leq m-1$, y entonces contráctil por el teorema 2.10, pero $\bigcap_{j=1}^{m} |\operatorname{St} a_j| = \emptyset$.

Por lo anterior tenemos que las cubiertas $\{C_{L_1}(G,\mu,t), \dots, C_{L_m}(G,\mu,t)\}$ y $\{|\operatorname{St} a_1|, \dots, |\operatorname{St} a_m|\}$ tienen propiedades muy similares, por lo que utilizando esta similitud se pueden construir funciones continuas $f : |\dot{\sigma}| \to C_{v_1}(G,\mu,t) \cap C_{v_2}(G,\mu,t)$ y $g : C_{v_1}(G,\mu,t) \cap C_{v_2}(G,\mu,t) \to |\dot{\sigma}|$ que satisfacen que

$$f\left(\bigcap_{j\in J} |\operatorname{St} a_j|\right) \subseteq \bigcap_{j\in J} C_{L_j}(G,\mu,t) \quad \text{y} \quad g\left(\bigcap_{j\in J} C_{L_j}(G,\mu,t)\right) \subseteq \bigcap_{j\in J} |\operatorname{St} a_j|.$$

A partir de estas propiedades se obtiene que f y g son inversas homotópicas, por lo que concluimos que $C_{v_1}(G,\mu,t) \cap C_{v_2}(G,\mu,t) \simeq S^{m-2}$.

Consideremos ahora la esfera $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Este conjunto lo podemos ver como $S^{m-1} = D_1 \cup D_2$, donde $D_1 = \{(x_1, \dots, x_m) \in S^{m-1} : x_m \geq 0\}$ y $D_2 = \{(x_1, \dots, x_m) \in S^{m-1} : x_m \leq 0\}$. Notemos que estos conjuntos son cerrdos, y además son contráctiles, pues se puede ver que ambos son homeomorfos a $[0,1]^{m-1}$, el cual es contráctil por un argumento análogo al del teorema 3.11. Además, es claro que $D_1 \cap D_2 \cong S^{m-2}$, por lo que existe una función $h : D_1 \cap D_2 \to C_{v_1}(G,\mu,t) \cap C_{v_2}(G,\mu,t)$ que es una equivalencia homotópica.

Notemos que esta función h está definida en un subespacio cerrado de D_1, y como $C_{v_1}(G,\mu,t) \cap C_{v_2}(G,\mu,t) \subseteq C_{v_1}(G,\mu,t)$, podemos redefinir el codominio de h como simplemente $C_{v_1}(G,\mu,t)$. Luego, como $C_{v_1}(G,\mu,t)$ es un AR, por el teorema 2.2 tenemos que existe una extensión $h_1 : D_1 \to C_{v_1}(G,\mu,t)$ de h. Procediendo de forma análoga, obtenemos una función $h_2 : D_2 \to C_{v_2}(G,\mu,t)$ que también extiende a h. Estas funciones satisfacen el lema del pegado, por lo que a partir de ellas podemos obtener una función continua $\tilde{h} : D_1 \cup D_2 \to C_{v_1}(G,\mu,t) \cap C_{v_2}(G,\mu,t)$. Utilizando el hecho de que $C_{v_1}(G,\mu,t) \cap C_{v_2}(G,\mu,t) \subseteq C_{v_1}(G,\mu,t) \cup C_{v_2}(G,\mu,t) = \mathcal{A}$, podemos reescribir lo anterior como $\tilde{h} : S^{m-1} \to \mathcal{A}$.

Analicemos ahora esta nueva función. Por la forma en que definimos a h_1 y h_2, tenemos que $\tilde{h}(D_i) = h_i(D_i) \subseteq C_{v_i}(G,\mu,t)$ para $i \in \{1,2\}$. Además, como cada uno de $D_1, D_2, C_{v_1}(G,\mu,t)$ y $C_{v_2}(G,\mu,t)$ son contráctiles, tenemos que $\tilde{h}\big|_{D_1} = h_1$ y $\tilde{h}\big|_{D_2} = h_2$ son equivalencias homotópicas por el teorema 2.4. Finalmente, como $\tilde{h}\big|_{D_1\cap D_2} = h$ fue definida como una equivalencia homotópica, por todo lo anterior tenemos que $\tilde{h}$ satisface las hipótesis del lema del pegado para equivalencias homotópicas, con lo que obtenemos que ella misma es una equivalencia homotópica, y por lo tanto $\mathcal{A} \simeq S^{m-1}$. $\square$

Un elemento de la demostración anterior que tal vez no quede muy claro es la existencia de las funciones f y g, así como el hecho de que son inversas homotópicas. Esta parte de la demostración se basa fuertemente en unos resultados llamados teoremas de nervios, los cuales requieren de conceptos más avanzados que no hemos desarrollado, y que escapan a los propósitos de nuestro estudio. Por esta razón presentamos la demostración de la forma en que lo hicimos, pero referimos al lector a [1, Corolario 3] para consultar una versión de estos teoremas.

Bibliografía

[1] K. Borsuk. «On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes». En: *Fundamenta Mathematicae* 35.1 (1948), págs. 217-234.

[2] R. Brown. *Elements of Modern Topology*. McGraw-Hill, 1968.

[3] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[4] D. Hinrichsen y J.L. Fernández. *Topología general*. Urmo, S.A. de ediciones, 1977.

[5] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos*. Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[6] A. Illanes. «Whitney blocks in the hyperspace of a finite graph». En: *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 36.1 (1995), págs. 137-147.

[7] A. Illanes y S. B. Nadler Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Marcel Dekker, Inc., 1999.

[8] A. Illanes e I. Puga. «Determining finite graphs by their large Whitney levels». En: *Topology and its Applications* 60.2 (1994), págs. 173-184.

[9] A. Illanes y R. Torres. «The dimension of Whitney levels of a finite graph». En: *Glasnik Matematicki* 32 (1997), págs. 263-273.

[10] H. Kato. «Whitney continua of curves». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 300.1 (1987), págs. 367-381.

[11] S. Lipschutz. *Teoría y problemas de topología general*. McGraw-Hill, 1970.

[12] C. R. F. Maunder. *Algebraic Topology*. Dover Publications, Inc., 1996.

[13] J. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[14] J. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice Hall, 1975.

[15] S. B. Nadler Jr. *Continuum Theory: An Introduction*. Marcel Dekker, Inc., 1992.

[16] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1976.

[17] H. Whitney. «Regular families of curves». En: *Annals of Mathematics* 34.2 (1933), págs. 244-270.

[18] H. Whitney. «Regular Families of Curves, I». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 18.3 (1932), págs. 275-278.