



# Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias (Ingeniería Matemática)

Modelación de un centro de llamadas de dos etapas

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias (Ingeniería Matemática)

Presenta:

**Juan Antonio Villeda Reséndiz**

Dirigido por:

**Dr. Eduardo Castaño Tostado**

SINODALES

Dr. Eduardo Castaño Tostado

Presidente

Dr. Mario Santana Cibrian

Secretario

M. en C. Wilfrido Jacobo Paredes García

Vocal

Dr. Eric Moreno Quintero

Suplente

Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo

Suplente

Dr. Aurelio Domínguez González

Director de la Facultad

Firma

Firma

Firma

Firma

Firma

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña

Directora de Investigación y Posgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Querétaro

México

Enero 2018

# Resumen

En un centro de llamadas *inbound* se reciben llamadas, mientras que en uno *outbound* se marcan. Se dice que un centro de llamadas *outbound* tiene dos etapas si en algún punto las llamadas son transferidas con otros agentes para continuar el servicio. Estos centros de llamadas son comunes, sin embargo, están escasamente descritos en la literatura. En esta tesis se modela un centro de llamadas *outbound* de dos etapas suponiendo que la segunda etapa es como un centro de llamadas *inbound* para emplear un modelo de tasa de llegada oculta usado en centros de llamadas *inbound*. Se utilizan modelos SARIMA para diagnosticar si es adecuado usar el modelo de tasas ocultas. Los datos disponibles son de un centro de llamadas local que necesita ser modelado en la búsqueda de reducir las llamadas abandonadas.

(**Palabras clave:** Centro de llamadas, call center, inbound, outbound, tasa de llegada oculta, serie de tiempo, SARIMA, pronóstico de personal, procesos de conteo)

# Summary

An *inbound* call center receives phone calls while an *outbound* call center dials phone calls. It is said that an outbound call center has two stages if at some time the calls are transferred to another agents in order to continue the service. This kind of call center is pretty common, nevertheless, there are almost no articles published about them. In this work a two stages outbound call center is modeled assuming that the second stage is an inbound call center in order to use a hidden arrival-rate model employed in inbound call centers. SARIMA models are used to diagnose if it is appropriate to use the hidden arrival-rate model. The available data are from a local call center that needs to be modeled in the search to reduce abandoned calls.

(**Key words:** Call center, inbound, outbound, hidden arrival-rate, time series, SARIMA, workforce forecast, count process)

*Dedicado a los misfits que han hecho progresar al mundo.*

# Agradecimientos

La vida es una aventura demasiado interesante y diversa, en un momento puedes estar en agujero y seguir escarbando, en otro instante viviendo un momento de plenitud, para luego seguir un periodo de monotonía. En ese camino sueles encontrar toda clase de personas; grandes amigos, compañeros, gente con similitudes, gente con diferencias, gente buena, gente mala, todo es sorpresa.

En octubre de 2011 obtuve el grado de licenciatura y de ahí mi vida ha dado tantos giros que ahora simplemente les doy la bienvenida.

En 2012 de forma totalmente sorpresiva entré a trabajar a la Dirección de Vinculación Social de la UAQ por invitación de Gonzalo Guajardo con quien estoy muy agradecido por darme el primer trabajo formal que he tenido y la experiencia edificante que obtuve al trabajar ahí, particularmente la perspectiva que obtuve de algunos problemas sociales que suceden en la región al participar en el programa Verano Intensivo; creo que a la fecha no hay semana en que no lo recuerde, también agradezco la calidad humana que me brindo.

En verano de 2013 seguí con mi camino y entre al programa de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Probabilidad y Estadística de CIMAT, esta fue una etapa muy intensa e interesante que viví, por un lado agradezco a los maestros del programa de ahí que me ofrecieron un formación sólida que me permitió continuar por el camino de la probabilidad y estadística. En ese periodo hice grandes amigos, sin ellos CIMAT habría sido tan gris; gracias Rafael, Sofia, Edgar Jorge, Alex, Yoandra, dos Lilis y Edith por permitirme acompañarlos. Nunca había logrado lazos tan grandes en tan poco tiempo.

Por un año viví en la casa de mis sueños, una casa en una calle paralela a un arroyo lleno de árboles y agua cristalina; ese recuerdo lo atesoro, y en él están Patricia, Nicolas, Ana y Carlos, la familia que me acogió en su casa. Cosas duras pasaron y no pude continuar en el programa en probabilidad y estadística, fue un momento extraño que habría sido muy miserable sin mis amigos y sin las palabras que me brindaron sin tener que hacerlo el Dr. Rogelio Ramos, el Dr. Roberto Gómez, el Dr. Juan Carlos Pardo, la Dra. Eloisa Díaz-Frances y el Dr. Eduardo Castaño, esas palabras me ayudaron a continuar.

En otoño de 2014 dejé la ciudad de Guanajuato y regresé a Querétaro confundido, pero con el objetivo de continuar, ahí comenzó mi reconstrucción. Nunca había sentido de una forma tan cercana el apoyo de mi familia, particularmente de mi madre, continuar habría sido difícil sin ello.

Fue un interesante momento para aprender más sobre mí mismo.

Aprendí nuevas cosas en CIMAT y afiné otras, así que decidí que era momento de transmitir lo que sabía, por ello al percatarme que ahora había licenciatura en Actuaría, le escribí al coordinador de aquel momento Antonio Villanueva para ver si necesitaban profesor para la materia de procesos estocásticos y así fue como inició otra etapa en mi vida en enero de 2015: profesor en la UAQ.

Dar clases de procesos estocásticos y probabilidad, convivir con mis estudiantes y portar algo para la formación de jóvenes fue una forma de sanar emocionalmente después de los ratos que había pasado. Mientras tanto en varias ocasiones platiqué con Roberto Gómez y finalmente me

convenció de entrar en agosto de 2015 a la maestría en ingeniería matemática.

Durante el periodo que estuve en la maestría en probabilidad y estadística tuve beca así que me encontraba en ese momento como un deudor ante CONACyT, por diversos motivos consideré que era algo que necesitaba enmendar, entonces Alma, Isaac y Pepe entraron al rescate para ayudarme a restituir la beca; esos son grandes amigos. Como ahora ya no era deudor de CONACyT fui acreedor a tenerla beca de nuevo, entonces durante el periodo de maestría en el UAQ me dediqué a ahorrar todo lo que pude para restituir lo que me prestaron Alma, Isaac y Pepe, tengo que decir que no fue algo trivial.

Eventualmente me topé por ahí con la Dra. Josefina Ricardo Garcell del INB, fue una grata coincidencia, es bello encontrar a personas que son consideradas con los demás a pesar del rango social o académico que tengan y que te motivan a ser mejor; fue una lástima no haber podido concretar un proyecto con ella.

La vida mejoraba, la maestría iba bien, seguía dando clases de procesos estocásticos en la licenciatura en actuaría y entonces después de poco más de un año de estar separados me reencontré con el amor de mi vida: Sara. Las circunstancias fueron bizarras, pero lo que importa es que estamos juntos y que también Babas, Wero Jr. y Gorgeous regresaron.

Terminó el 2015 con algunos baches no significativos e inicio el segundo semestre de la maestría, este fue un poco pesado porque no fue algo inmediato el encontrar mi tema de tesis, al final rescaté un problema que me había encontrado por ahí durante el Primer Taller de Solución de Problemas de Vinculación LMA. Para mi suerte a pesar de toda el caos que yo puedo ser el Dr. Castaño me ofreció su invaluable apoyo para dirigir mi proyecto de tesis. Ese semestre también fue en el que por fin logré tener una conexión con mis compañeros de la maestría Marco, Tanis, Gabriela y Hugo, la maestría fue todavía mejor.

Seguí dando clases en la licenciatura en actuaría, ahora fue probabilidad dos y con ellos me topé con un grupo de estudiantes maravillosos a quienes considero son hasta el momento el hito más importante en mi vida docente por lo que han logrado y saber que aporté un poco en ello.

Luego otro semestre inició y vinieron nuevos compañeros a la maestría: Silvana, Gerardo y Jaime, personas muy interesantes con quienes inmediatamente me identifiqué y a quienes traté de ayudar para que la parte burocrática de la maestría les resultara más ligera que a mí.

Ese tercer semestre de la maestría también significó seguir trabajando en la tesis y particularmente aprender cosas por mi cuenta como series de tiempo. Eso lo aprendí en una materia-seminario que sin las facilidades de Wilfrido no se habría logrado.

La clase en actuaría ahora fue procesos estocásticos y mis alumnos continuaron poniéndose a la altura de las circunstancias, también en ese semestre debuté en la licenciatura en matemáticas aplicas donde un grupo de entusiastas estudiantes (Yesenia, Verónica, Valeria, Ricardo y Pepe) solicitaron que les impartiera procesos estocásticos.

Pero entonces llegó el 2017 y el último semestre de la maestría inició de manera implacable, la maestría estaba por terminar y al principio del periodo el proyecto no se veía claro. Afortunadamente en la última semana de clases logre finalizar el proyecto y tener una sensación de logro. Además finalicé la deuda que tenía con Alma, Isaac y Pepe; fue un gran cierre.

Me convertí en egresado de la maestría, de nuevo me sentía completo, no había una sombra que oscureciera mis pensamientos, ahora solo faltaba redactar la tesis para terminar. Como también tenía que subsistir seguí dando clases y por primera vez en dos años pude dar más de ocho horas, ahora impartí las clases de probabilidad, procesos estocásticos y análisis de series de tiempo (si lo aprendí ahora había que transmitirlo) en la licenciatura en actuaría, además ahora gracias al Dr. Eduardo Castaño debuté en la Facultad de Química impartiendo métodos estadísticos y por primera vez fui sinodal en dos tesis de licenciatura (hola Yesenia y Pepe).

El tiempo siguió y terminé la tesis, punto que no habría logrado sin el apoyo y comprensión de mis sinodales: Dr. Eduardo Castaño, Dr. Eric Moreno, Dr, Roberto Augusto Gómez, M. en C. Wilfrido Paredes y Dr. Roberto Gómez.

Ahora me encuentro aquí dos años y medio después de un quiebre, agradecido con la vida y reflexionando que nunca me había sentido tan pleno como ahora. Por ello agradezco infinitamente a todas las personas que mencioné anteriormente.

También deseo agradecer a Gerardo, Héctor por ser mis grandes amigos de toda la vida.

Agradezco a todos las personas que me he topado en estos años y han dejado algo grato en mi como Iván, Oscar, Maite, David, Verónica, Mario, Wendolin, Ricardo, Yesenia, Gilberto, Carlos, Miguel Ángel, Hiroshi, Daniela, Nain, Felipe, Manuel.

Galleta gracias por recibirme invariablemente con esa felicidad reanimadora cada que regresaba a casa.

No puedo olvidar a la Facultad de Ingeniería y su personal académico y administrativo (¡Hola Lupita!) que hicieron de mi estancia como estudiante de posgrado algo placentero, en verdad quedo en deuda.

Además agradezco a la Universidad Autónoma de Querétaro por haber ofrecido una educación y por la labor social que realiza.

Agradezco también infinitamente a todos los contribuyentes nacionales cuyos impuestos hicieron posible que el CONACyT me otorgara un beca, ahora tengo el compromiso de regresar ese apoyo a la sociedad, de momento hago mi pequeño aporte compartiendo con mis estudiantes lo poco que conozco.

Finalmente y no menos importante agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme otorgado el apoyo 424697 por el concepto de beca de manutención. Sin los esfuerzos que este organismo realiza la educación de posgrado sería sólo un sueño para muchos como yo, en verdad gracias.

Estoy seguro que olvido a varios, pido perdón por las omisiones.

Cada mañana es un milagro.

Antonio Villeda,  
24 de noviembre de 2017.

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Descripción del problema . . . . .	2
1.2. Motivación . . . . .	2
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	3
<b>2. Antecedentes, fundamentación teórica y objetivos</b>	<b>4</b>
2.1. Procesos estocásticos . . . . .	4
2.1.1. Procesos de conteo . . . . .	4
2.1.2. Teoría de colas . . . . .	6
2.2. Series de tiempo: modelo ARIMA . . . . .	8
2.2.1. Conceptos básicos de series de tiempo . . . . .	8
2.2.2. Modelos ARIMA . . . . .	15
2.3. Centros de llamadas . . . . .	24
2.3.1. Conceptos básicos . . . . .	24
2.3.2. Problemas principales de los centros de llamadas . . . . .	25
2.3.3. ¿Cómo se han estudiado los centros de llamadas? . . . . .	26
2.3.4. El modelo de Shen y Gans: una propuesta de solución a los problemas de un centro de llamadas inbound . . . . .	27
2.4. Objetivos . . . . .	34
<b>3. Descripción del problema</b>	<b>35</b>
3.1. Perspectivas del problema . . . . .	35
3.1.1. Modelo administrativo . . . . .	35
3.1.2. Modelo matemático . . . . .	37
3.2. La base de datos . . . . .	39
3.3. Un centro de llamadas inbound dentro de un centro de llamadas outbound y el modelo de Shen y Gans . . . . .	40
<b>4. Resultados</b>	<b>41</b>
4.1. Análisis descriptivo de la base de datos . . . . .	41
4.2. Modelo SARIMA . . . . .	46
4.2.1. Excluir ceros estructurales . . . . .	49
4.2.2. Imputar ceros estructurales . . . . .	55
4.3. Interpretación y comparación de modelos . . . . .	63
4.4. Conclusiones . . . . .	64
<b>5. Perspectivas futuras</b>	<b>65</b>





# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Descripción del problema

En los centros de llamadas de México dedicados a la venta de servicios es común encontrarse un tipo de centro con dos etapas, en la primera un agente ofrece vía telefónica la venta de un servicio a un cliente potencial y si éste acepta la oferta su llamada es transferida, en una segunda etapa, a otro agente que solicita sus datos y son validados para evaluar si la transacción puede llevarse a cabo. Como la segunda etapa tiene menos agentes que la primera regularmente en algún momento del día se satura, ocasionando que algunos de los clientes potenciales que se encuentran en espera se impacienten y abandonen la llamada antes de que un agente de la segunda etapa conteste. El abandono de una llamada después de que el cliente potencial decidió comprar el producto y antes de que sus datos sean validados implica que se pierde la comisión por la venta, se desecha el trabajo realizado por el agente de la primera etapa implicando un desperdicio de recursos en el centro de llamadas. Aunque posteriormente se contacte al cliente potencial que abandonó, generalmente cambian de parecer y ya no adquieren el producto.

### 1.2. Motivación

Al estudiar la literatura se observó que este tipo de centro de llamadas con dos etapas apenas ha sido descrito, se sabe que hay centros de llamadas similares en diversas regiones del mundo, pero no se han estudiado con seriedad como anotan Woo y Chan (2010), haciendo necesario el proponer alguna metodología analítica para mejorar su administración. Así que una parte de la motivación de este trabajo es estudiar los centros de llamadas con dos etapas, delimitar claramente las condiciones que presentan y modelar su comportamiento para ofrecer pronósticos con el fin de mejorar su administración.

### Origen del problema

En 2015 como un esfuerzo para que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Querétaro realizaran labores de vinculación con el sector productivo un grupo de egresados de la licenciatura, estudiantes de la maestría en ingeniería matemática y docentes se organizaron para organizar una taller similar a los *Grupos de Estudio con la Industria y Cursos de Matemáticas Industriales* que en la década de los 90s y principios de los 2000's organizó la Sociedad Matemática Mexicana inspirada por el modelo de *Grupo de Estudio con la Industria*

creado en la Universidad de Oxford en 1968 (Fitt y Martinez-Vila, 1996). En el modelo de grupo de estudio con la industria se realiza una investigación previa donde se contacta a una organización con algún problema para identificar la necesidad de una intervención con herramientas matemáticas y si el problema lo amerita se forma el grupo de estudio con la industria integrado por matemáticos y representantes de la organización, el grupo dedica una semana a buscar una solución al problema y posteriormente se realizan reportes de las actividades trabajadas durante la semana y se comparte con la organización que tiene el problema.

Los organizadores del taller contactaron a una empresa local del ramo de centro de llamadas con un problema presente en sus operaciones y así la actividad se cristalizó en el primer *Taller de Solución de problemas de vinculación LMA* llevado a cabo en la semana entre el 20 y 24 de julio de 2015. El taller reunió a estudiantes y profesores de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y también a estudiantes de la Maestría en Ingeniería Matemática, sólo se logró entender matemáticamente una parte del problema, se tomó conciencia de que no se trataba de algo simple, que para abordarlo eran necesarias algunos conceptos y técnicas matemáticas sofisticados tales como modelos de series de tiempo, teoría de colas, optimización estocástica, entre otras.

El taller finalizó, se comprendió mejor el problema, pero no se solucionó, así que otra parte de la motivación de este trabajo es retomar el problema planteado en el taller y aportar algo para su solución.

### 1.3. Estructura de la tesis

Esta tesis consta de cinco capítulos. En el capítulo dos se desarrollan los antecedentes y la fundamentación teórica para poder abordar el problema, particularmente se definen conceptos básicos sobre los centros de llamadas, los problemas principales de los centros de llamadas, se estudia el modelo desarrollado por Shen y Huang (2008) para pronosticar el volumen de llamadas recibidas y también el modelo de Gans et al. (2015) que usa el modelo anterior para estimar la cantidad óptima de personal para reducir los abandonos. Adicionalmente se presentan conceptos básicos de la teoría de procesos estocásticos, teoría de colas y modelaje de series de tiempo. Al final de este capítulo se establecen los objetivos del proyecto.

En el capítulo tres se hace una descripción amplia del problema considerando tres perspectivas con distintos niveles de complejidad: modelo administrativo, técnico y matemático. Posteriormente se expone como debe adaptarse el modelo de Shen y Huang (2008) al tipo de centro de llamadas que se tiene.

En el capítulo cuatro se expone el análisis descriptivo que se realizó a la base de datos. Luego para el número de llamadas transferidas a la etapa de validación se identifica, estima e interpreta un modelo de series de tiempo SARIMA y también el modelo de Shen y Huang (2008). Finalmente se comparan los modelos obtenidos y se establecen las conclusiones.

En el capítulo cinco se comentan las perspectivas futuras de este trabajo, particularmente cómo utilizar los modelos presentados en el capítulo anterior para estimar la cantidad de personal óptima para la etapa de validación y así ofreciendo un camino para completar la solución de este problema.

# Capítulo 2

## Antecedentes, fundamentación teórica y objetivos

Para estudiar algunos modelos de la dinámica de un centro de llamadas será necesario definir algunas ideas básicas sobre procesos estocásticos, teoría de colas y modelaje de series de tiempo.

### 2.1. Procesos estocásticos

Esta sección es un resumen de los capítulos 5 y 8 de Ross (2010) y el capítulo 4 de Rincón (2012).

#### 2.1.1. Procesos de conteo

**Definición 1** *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$  parametrizada por un conjunto  $T$ , definidas sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y que toman valores en un espacio medible  $(S, \Sigma)$  llamado espacio de estados. El conjunto  $T$  que indexa la familia de variables aleatorias puede ser continuo o discreto y típicamente representa tiempo. Si  $T = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  se dice que es un proceso a tiempo discreto y este tipo de proceso se denotará por  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ . Si  $T = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$  se dice que es un proceso a tiempo continuo y este tipo de proceso se denotará por  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ .*

Un proceso estocástico se puede considerar como una variable aleatoria definida sobre un lapso (intervalo de tiempo) o bien una sucesión de variables aleatorias indexadas sobre un lapso.

**Definición 2** *Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de conteo si  $X_t$  representa el número total de ciertos eventos de interés que han ocurrido hasta el tiempo  $t$ . Su espacio de estados es  $S = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .*

**Definición 3** *Un proceso de conteo  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  se dice que es un proceso Poisson de tasa  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$  si:*

I  $X_0 = 0$ .

II  $X_t$  tiene incrementos independientes, esto es, para cualesquiera  $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  tales que  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  se tiene que  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son variables aleatorias independientes.

III  $X_t$  tiene incrementos estacionarios, particularmente para cualquier  $s, t \geq 0$  se tiene  $X_{t+s} - X_s \sim \text{Poisson}(\lambda s)$ , es decir

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_t = i) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

A este proceso Poisson también se le suele llamar proceso Poisson homogéneo o simple.

Por otra parte si  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso Poisson de tasa  $\lambda$  y se define  $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como el proceso que indica los tiempos en que ocurre el  $n$ -ésimo evento de interés, con  $W_0 = 0$ , entonces los tiempos de espera entre cada evento de interés o salto son  $T_n = W_n - W_{n-1}$  para  $n \in \mathbb{N} - 0$  y se puede los  $T_n$  tienen distribución exponencial de tasa  $\lambda$  y son independientes. Este modelo es útil para modelar las llegadas a un sistema tales como filas, paquetes de información en una red o el número de autobuses que han pasado por una parada. La tasa  $\lambda$  se puede interpretar como la velocidad de las llegadas, mientras más grande sea habrá más llegadas en cierto periodo de tiempo. El hecho de que el proceso sea homogéneo o estacionario se debe a que los tiempos de espera se mantienen con la misma ley de probabilidad durante todo el proceso, es decir, no hay una degradación o cambio en el sistema. Esto no es siempre realista, entonces en caso de que el sistema presente degradación o tenga cambios en sus condiciones que dependan del tiempo se puede hacer una corrección en el modelo y así definir el proceso Poisson no homogéneo.

**Definición 4** Sea  $\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función positiva y localmente integrable. Un proceso de conteo  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  se dice que es un proceso Poisson no homogéneo de tasa  $\lambda(t)$  si:

I  $X_0 = 0$ .

II  $X_t$  tiene incrementos independientes.

III Para cualquier  $t \geq 0$  y cuando  $h \rightarrow 0$  se tiene

a)  $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 1) = \lambda(t)h + o(h)$ ,

b)  $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 2) = o(h)$ ,

donde  $o(h)$  es tal que  $\frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

Con esto se tiene la posibilidad de que el proceso no sea homogéneo, es decir, que la velocidad en que se presentan los eventos de interés no sea constante en el tiempo. Con estos cambios el proceso no homogéneo sigue asociado a la distribución Poisson como se observa en las siguientes proposiciones.

**Proposición 1** Sea  $X_t$  un proceso Poisson no homogéneo de tasa  $\lambda(t)$ , entonces  $X_t \sim \text{Poisson}(\Gamma(t))$ , donde

$$\Gamma(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

**Proposición 2** Sean  $X_t$  un proceso Poisson no homogéneo de tasa  $\lambda(t)$  y  $s, t \geq 0$ , entonces  $X_{t+s} - X_s \sim \text{Poisson}(\Gamma(t+s) - \Gamma(s))$ .

Cuando los eventos de interés aparecen con una gran variabilidad un modelo más adecuado es el proceso Poisson doblemente estocástico o mixto, donde la tasa también es una variable aleatoria.

**Definición 5** Sea  $\Lambda$  una variable aleatoria positiva con función de distribución  $F(\lambda)$ . Un proceso de conteo  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  se dice es un proceso Poisson doblemente estocástico o mixto con variable mezclante  $\Lambda$  si para cada entero  $n \geq 1$ , cada sucesión de enteros no negativos  $k_1, \dots, k_n$  y cualesquiera tiempos  $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n$  se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_1} - X_{s_1} = k_1, X_{t_2} - X_{s_2} = k_2, \dots, X_{t_n} - X_{s_n} = k_n) \\ = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{[\lambda(t_i - s_i)]^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(t_i - s_i)} dF(\lambda). \end{aligned}$$

Es importante observar que cuando la variable aleatoria  $\Lambda$  es una variable aleatoria degenerada, es decir, constante sobre algún valor particular  $\lambda > 0$ , el proceso Poisson doblemente estocástico se reduce a un proceso Poisson y también si la variable aleatoria  $\Lambda$  depende del tiempo resulta ser un proceso estocástico, es decir,  $\{\Lambda_t\}_{t \geq 0}$  entonces se le llama proceso de Cox.

### 2.1.2. Teoría de colas

Una cola es un modelo para sistemas donde clientes llegan a una instalación para recibir un servicio, en el lugar hay varios servidores para atender a los clientes, cada servidor tarda cierto tiempo en despachar al cliente. Los clientes que llegan a la instalación y no son atendidos inmediatamente esperan en una cola hasta ser atendidos. Existen varios tipos de colas, aquí se mencionarán los más básicos.

**Definición 6** En una cola denotada por  $A/S/k$  el tiempo de interarribo al sistema entre dos clientes consecutivos tiene distribución  $A$  y hay  $k$  servidores homogéneos funcionando al mismo tiempo cuyos tiempos de servicio tienen distribución  $S$ . Los clientes se forman en una fila con espacio infinito conforme van llegando y si algún servidor está libre éste atenderá a un cliente de tal manera que el primero que llegó será el primero en ser atendido. Los clientes nunca abandonan la fila.

**Definición 7** En una cola denotada por  $A/S/k + P$  el tiempo de interarribo al sistema entre dos clientes consecutivos tiene distribución  $A$  y hay  $k$  servidores homogéneos funcionando al mismo tiempo cuyos tiempos de servicio tienen distribución  $S$ . Los clientes se forman en una fila con espacio infinito conforme van llegando y si algún servidor está libre éste atenderá a un cliente de tal manera que el primero que llegó será el primero en ser atendido. Los clientes pueden abandonar la fila en cualquier momento, así que considerando que los clientes son homogéneos el tiempo de paciencia que un cliente está dispuesto a esperar tiene distribución  $P$ .

En la teoría de colas clásica las distribuciones más comunes para los tiempos de interarribo, los tiempos de servicio y los tiempos de paciencia son la degenerada en algún valor positivo, la exponencial y la Erlang. Cuando se usa la distribución degenerada en algún valor  $d > 0$  significa que los tiempos de interarribo, de servicio o de paciencia siempre toman el valor  $d$  y los procesos de llegada, de servicio o de paciencia son determinísticos, en tal caso a la distribución se le asigna el término  $D$  por determinístico. Cuando la distribución de los tiempos de interarribo, de servicio o de paciencia es exponencial significa que el proceso de conteo de las llegadas, el proceso de

conteo de los servicios o el proceso de conteo de los abandonos es un proceso Poisson, en tal caso a la distribución se le asigna la letra  $M$  por ser un proceso de Markov o sin memoria. Cuando la distribución de los tiempos de interarribo, de servicio o de paciencia es Erlang de parámetro  $c$  a la distribución se le asigna la letra  $E_c$ . Finalmente se usa la letra  $G$  cuando se desea considera una distribución general para los tiempos de interarribo, de servicio o de paciencia.

Las colas que comúnmente han sido estudiadas son  $M/M/1$ ,  $M/G/1$ ,  $G/M/1$ ,  $M/M/k$ ,  $G/M/k$ ,  $M/G/k$  y  $M/M/k + M$ .

## 2.2. Series de tiempo: modelo ARIMA

Esta sección es un resumen de los capítulos 1 y 3 de Shumway y Stoffer (2015).

### 2.2.1. Conceptos básicos de series de tiempo

En el análisis de series de tiempo se estudian fenómenos que cambian con el tiempo, particularmente uno de los fines que se persigue es estimar modelos que capturen el comportamiento del fenómeno, en ocasiones se pueden realizar pronósticos precisos, pero en otros casos sólo se puede capturar el comportamiento cualitativo del fenómeno. Así que para entender qué es una serie de tiempo se introducirá su concepto de manera precisa.

**Definición 8** Una serie de tiempo es un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  a tiempo discreto, con  $T = \mathbb{Z}$  o  $T \subset \mathbb{Z}$  regularmente, donde la variable aleatoria  $X_t$  corresponde al valor que la serie toma al tiempo  $t$ . Se usa el término serie de tiempo indiscriminadamente para denotar al proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  o a una realización del proceso  $X_t(\omega)$ , el contexto indicará cuál es el caso.

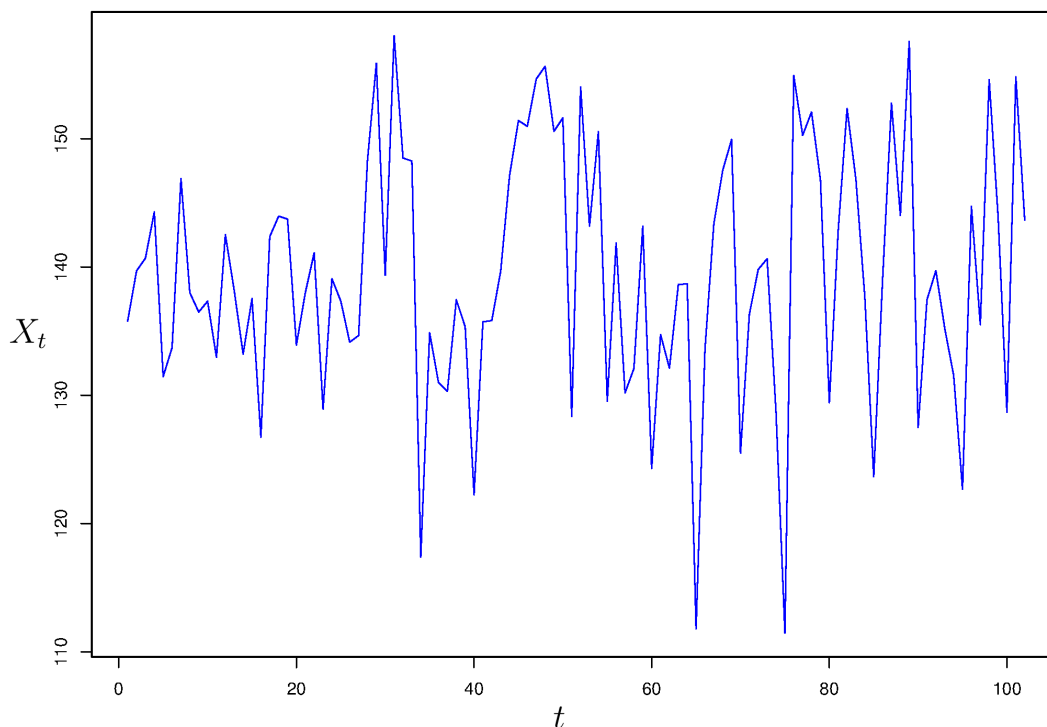


Figura 2.1: Serie de tiempo  $X_t$  en los tiempos  $t \in \{1, 2, \dots, 100\}$ .

En la Figura 2.1 hay un ejemplo de una serie de tiempo en los tiempos  $t \in \{1, 2, \dots, 100\}$ . La perspectiva que se tomará para entender las series de tiempo es la teoría que George Box y Gwilym Jenkins crearon.

### Medidas de dependencia: autocorrelación y correlación cruzada

Existen varias funciones resultado de aplicar a la serie de tiempo los operadores clásicos de esperanza propuestos en teoría de probabilidad, entre ellos la función media, la función de



autocovarianza, la función de autocorrelación, la función covarianza cruzada y la función de correlación cruzada. Estas son de gran utilidad para caracterizar a la serie de tiempo.

**Definición 9** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. La función media de  $X_t$  se define como

$$\mu_{X_t} = \mathbb{E}(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} s dF_{X_t}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} s f_{X_t} ds.$$

Si no existe confusión sobre a qué serie de tiempo se hace referencia se puede suprimir el subíndice y escribir  $\mu_t$  en lugar de  $\mu_{X_t}$ .

**Definición 10** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo con media  $\mu_t$ . La función de autocovarianza de  $X_t$  se define como

$$\gamma_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)],$$

para todo  $s, t \in T$ . Si no existe confusión sobre a qué serie de tiempo se hace referencia se puede suprimir el subíndice y escribir  $\gamma(s, t)$  en lugar de  $\gamma_X(s, t)$ .

**Definición 11** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo con función de autocovarianza  $\gamma_X(s, t)$ . La función de autocorrelación (ACF por sus siglas en inglés) de  $X_t$  se define como

$$\rho_X(s, t) = \frac{\gamma_X(s, t)}{\sqrt{\gamma_X(s, s)\gamma_X(t, t)}},$$

para todo  $s, t \in T$ . Si no existe confusión sobre a qué serie de tiempo se hace referencia se puede suprimir el subíndice y escribir  $\rho(s, t)$  en lugar de  $\rho_X(s, t)$ .

Las funciones de autocovarianza y autocorrelación sirven para medir la relación que tiene una serie de tiempo consigo misma en diferentes tiempos, particularmente la relación lineal.

**Definición 12** Sean  $\{X_t\}_{t \in T}$ ,  $\{Y_t\}_{t \in T}$  series de tiempo con medias  $\mu_{X_t}$ ,  $\mu_{Y_t}$ , respectivamente. La función de covarianza cruzada entre las series  $X_t$  y  $Y_t$  se define como

$$\gamma_{X,Y}(s, t) = \text{Cov}(X_s, Y_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu_{X_s})(Y_t - \mu_{Y_t})],$$

para todo  $s, t \in T$ .

**Definición 13** Sean  $\{X_t\}_{t \in T}$ ,  $\{Y_t\}_{t \in T}$  series de tiempo con función de covarianza cruzada  $\gamma_{X,Y}(s, t)$ . La función de correlación cruzada (CCF por sus siglas en inglés) entre las series  $X_t$  y  $Y_t$  se define como

$$\rho_{X,Y}(s, t) = \frac{\gamma_{X,Y}(s, t)}{\sqrt{\gamma_X(s, s)\gamma_Y(t, t)}},$$

para todo  $s, t \in T$ .

Si existe una relación entre dos series de tiempo, las funciones de covarianza cruzada y correlación cruzada sirven para medir la relación lineal que existe entre las dos series de tiempo.

Las funciones de autocovarianza, autocorrelación, covarianza cruzada y correlación cruzada cumplen las siguiente propiedades:

$$\begin{aligned} \gamma_X(t, s) &= \gamma_X(s, t), \\ \rho_X(t, s) &= \rho_X(s, t), \\ \gamma_{X,Y}(t, s) &= \gamma_{Y,X}(s, t), \\ \rho_{X,Y}(t, s) &= \rho_{Y,X}(s, t). \end{aligned}$$

Más adelante estas propiedades serán de utilidad para estudiar series de tiempo estacionarias.

El ruido está considerado como sonido inarticulado, es decir, sonido que no muestra algún patrón particular y por ello es ininteligible. En el contexto de procesos estocásticos el *ruido blanco* se entiende como un proceso estocástico que no presentan un patrón específico es simplemente un evento puramente aleatorio.

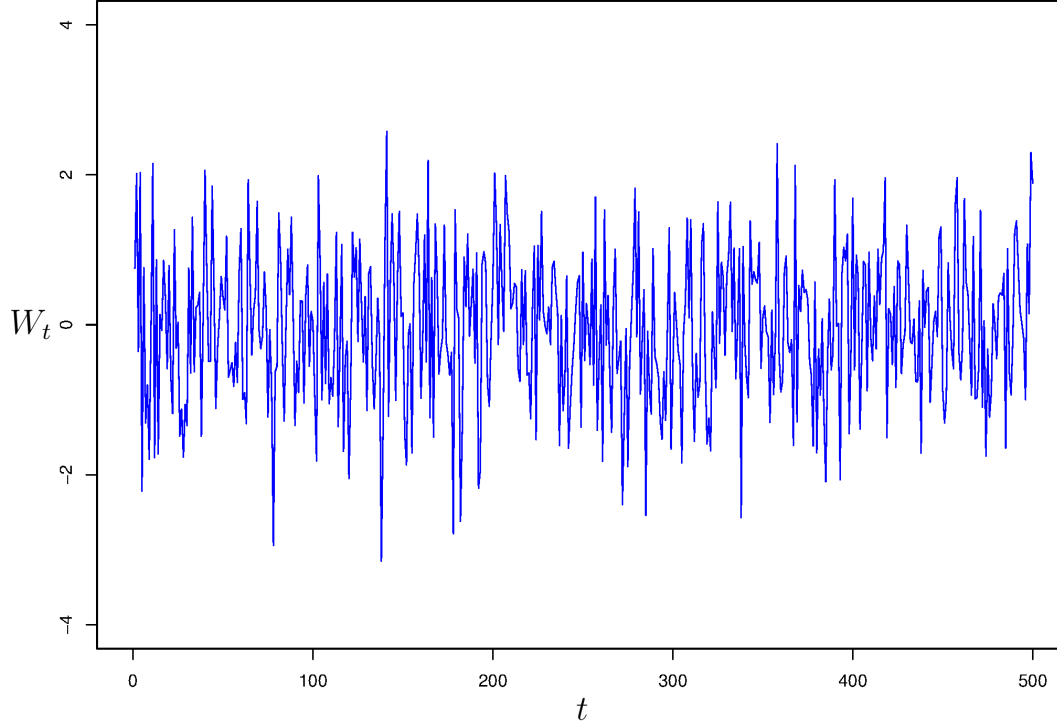


Figura 2.2: Realización de un ruido blanco  $W_t \sim \text{IID } N(0, 1)$  en los tiempos  $t \in \{1, 2, \dots, 500\}$ .

**Definición 14** Sea  $\{W_t\}_{t \in T}$  un proceso estocástico. Se dice que  $W_t$  es un ruido blanco si  $\mathbb{E}(W_t) = 0$ ,  $\mathbb{V}(W_t) = \sigma_W^2 < \infty$  para todo  $t \in T$  y  $W_t$  es una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas, es decir,  $\rho_W(s, t) = 0$  para todo  $s, t \in T$ ,  $\mathbb{E}(W_t) = 0$ . En general se denota como  $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma_W^2)$ . Si  $W_t$  es una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas se denota como  $W_t \sim \text{WNIID}(0, \sigma_W^2)$  y si  $W_t$  es una sucesión de variables aleatorias normales independientes denota como  $W_t \sim \text{IID } N(0, \sigma_W^2)$ .

El ruido blanco es un concepto fundamental para la teoría de series de tiempo, esencialmente al procesar una serie de tiempo se busca dejar en términos de un ruido blanco. En la Figura 2.2 se observa la realización de un ruido blanco  $W_t \sim \text{IID } N(0, 1)$  en los tiempos  $t \in \{1, 2, \dots, 500\}$ .

## Series de tiempo estacionarias

La teoría de procesos estocásticos no es simple y menos hacer inferencia en procesos estocásticos, así que será necesario acotar el tipo de series de tiempo que se trabajarán y por ello se introducirá el concepto de serie de tiempo estacionaria.

**Definición 15** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  es estrictamente estacionaria si para cualquier colección de tiempo  $t_1, \dots, t_n \in T$  y para cualquier  $h \in \mathbb{Z}$  tal que  $t_1+h, \dots, t_n+h \in T$

los vectores aleatorios  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  y  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$  tiene la misma distribución, esto es,

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(c_1, \dots, c_n) &= \mathbb{P}(X_{t_1} \leq c_1, \dots, X_{t_n} \leq c_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_1+h} \leq c_1, \dots, X_{t_n+h} \leq c_n) = F_{X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}}(c_1, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Al tiempo  $h$  se le denominará lag o retraso.

La estacionariedad u homogeneidad es una propiedad importante para los procesos estocásticos pues garantiza que el proceso tiene cierta regularidad a lo largo del tiempo, sin embargo la estacionariedad estricta es un supuesto muy fuerte para trabajar con datos reales, por lo que se establecerá una definición un poco más relajada.

**Definición 16** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  débilmente estacionaria si

- I  $\mathbb{V}(X_t) < \infty$  para todo  $t \in T$ ,
- II la función media  $\mu_t = \mathbb{E}(X_t)$  es constante y no depende del tiempo  $t$  y
- III la función de autocorrelación  $\gamma(s, t)$  depende en  $s$  y  $t$  solamente a través de su diferencia absoluta  $|s - t|$ .

En adelante el término estacionario se referirá a débilmente estacionario; si un proceso es estacionario en un sentido estricto se usará el término estrictamente estacionario.

Es difícil estudiar un proceso estocástico y más a partir de sus realizaciones por ello la perspectiva clásica de Box y Jenkins se avoca a trabajar con series de tiempo estacionarias o series de tiempo que mediante algunas transformaciones se hacen estacionarias, por ello se retomarán las funciones de autocovarianza, autocorrelación, covarianza cruzada y correlación cruzada para el caso de series de tiempo estacionarias.

**Definición 17** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo estacionaria con media  $\mu$ . La función de autocovarianza de la serie de tiempo estacionaria  $X_t$  se define como

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathbb{E}[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)],$$

para todo  $t \in T$  y  $h \in \mathbb{Z}$  tal que  $t + h \in T$ . Si no existe confusión sobre a qué serie de tiempo se hace referencia se puede suprimir el subíndice y escribir  $\gamma(h)$  en lugar de  $\gamma_X(h)$ .

**Definición 18** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo estacionaria con función de autocovarianza  $\gamma_X(h)$ . La función de autocorrelación (ACF por sus siglas en inglés) de  $X_t$  se define como

$$\rho_X(0) = \frac{\gamma_X(t+h, t)}{\sqrt{\gamma_X(t+h, t+h)\gamma_X(t, t)}} = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}, \quad (2.1)$$

para todo  $t \in T$  y  $h \in \mathbb{Z}$  tal que  $t + h \in T$ . Si no existe confusión sobre a qué serie de tiempo se hace referencia se puede suprimir el subíndice y escribir  $\rho(h)$  en lugar de  $\rho_X(h)$ .

**Definición 19** Sean  $\{X_t\}_{t \in T}$ ,  $\{Y_t\}_{t \in T}$  series de tiempo estacionarias con medias  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$ , respectivamente. La función de covarianza cruzada entre  $X_t$  y  $Y_t$  se define como

$$\gamma_{X,Y}(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, Y_t) = \mathbb{E}[(X_{t+h} - \mu_X)(Y_t - \mu_Y)], \quad (2.2)$$

para todo  $t \in T$  y  $h \in \mathbb{Z}$  tal que  $t + h \in T$ .

**Definición 20** Sean  $\{X_t\}_{t \in T}$ ,  $\{Y_t\}_{t \in T}$  series de tiempo estacionarias con función de covarianza cruzada  $\gamma_{X,Y}(h)$ . La función de correlación cruzada (CCF por sus siglas en inglés) entre las series de tiempo estacionarias  $X_t$  y  $Y_t$  se define como

$$\rho_{X,Y}(h) = \frac{\gamma_{X,Y}(h)}{\sqrt{\gamma_X(0)\gamma_Y(0)}},$$

para todo  $t \in T$  y  $h \in \mathbb{Z}$  tal que  $t+h \in T$ .

Para series de tiempo estacionarias las funciones de autocovarianza, autocorrelación, covarianza cruzada y correlación cruzada cumplen las siguiente propiedades:

$$\begin{aligned}\gamma_X(-h) &= \gamma_X(h), \\ \rho_X(-h) &= \rho_X(h), \\ \gamma_{X,Y}(-h) &= \gamma_{Y,X}(h), \\ \rho_{X,Y}(-h) &= \rho_{Y,X}(h).\end{aligned}$$

Otro tipo concepto importante para la teoría de series de tiempo es el de proceso lineal.

**Definición 21** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  es un proceso lineal si

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j}, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty, \quad (2.3)$$

donde  $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma_W^2)$ .

Es importante observar que un proceso lineal puede depender del pasado y del futuro, si  $X_t$  es un proceso lineal y  $\psi_j = 0$  para  $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$  entonces  $X_t$  no depende del futuro, sólo depende del pasado y se dirá que  $X_t$  es causal.

**Definición 22** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  es un proceso Gaussiano si para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y cualquier colección de tiempos  $t_1, \dots, t_n$  el vector  $\mathbf{X} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$  tiene distribución normal multivariada.

A pesar de que una serie de tiempo  $\{X_t\}_{t \in T}$  no sea estacionaria en ocasiones se pueden hacer modificaciones de ésta para estacionarizarla. Cuando la media no es constante, pero depende del tiempo, se puede usar el operador diferencia para buscar estacionarizarla; dicho operador se estudiará más adelante cuando se estudien los modelos ARMA. Si la media tiene algún otro comportamiento que puede ajustarse en función del tiempo, digamos  $g(t)$  se suele hacer ese ajuste con los datos y se resta a la serie de tiempo original, esto es  $\tilde{X}_t = X_t - \hat{g}(t)$  y esta última es la que se modela. Si el problema es que la varianza es muy variable a través del tiempo, entonces las transformaciones  $\tilde{X}_t = \log(X_t)$ ,  $\tilde{X}_t = \log(X_t + \alpha)$ , para cierto  $\alpha$  y  $\tilde{X}_t = \sqrt{X_t}$  pueden servir para hacer estacionaria la serie de tiempo. Si estas transformaciones fallan se puede aplicar una transformación de la familia de las transformaciones de Box-Cox

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} (X_t^\lambda - 1) / \lambda & \lambda \neq 0, \\ \log X_t & \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Hay métodos para seleccionar la  $\lambda$  más efectiva para que además  $\tilde{X}_t$  tenga una distribución normal, pero el discutir ello se sale de los alcance de este trabajo.

## Estimación de la correlación

Las funciones de autocovarianza, autocorrelación, covarianza cruzada y correlación cruzada son muy importantes para describir el comportamiento de una serie de tiempo, sin embargo para determinarlas es necesario contar con expresión explícita para la serie de tiempo, sin embargo, en la práctica muy raras ocasiones se presenta tal expresión a priori, sólo se tiene observaciones. Por ello es vital contar con una forma de estimar estas funciones a partir de los datos. Una vez estimadas estas funciones se puede comenzar a caracterizar la serie de tiempo cruzando la información que aportan las versiones muestrales con las funciones de modelos de series de tiempo conocidas. Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo y  $X_1, \dots, X_n$  son observaciones en los tiempos  $1, \dots, n$ . En la perspectiva básica de la estadística se supone las observaciones son independientes e idénticamente distribuidos (IID). Esta idea se desecha para la perspectiva de las series de tiempo, pues se considera que se está observando la evolución de un fenómeno en el tiempo, entonces es razonable pensar que las observaciones  $X_1, \dots, X_n$  no son independientes y por tanto pueden, por ejemplo, estar correlacionadas. Así  $X_1, \dots, X_n$  constituyen una sola realización del proceso y en realidad se busca hacer estadística con una sola observación, en este punto es cuando el concepto de estacionariedad entrara al rescate para realizar las estimaciones. Si  $X_t$  es estacionaria su función media es una constante  $\mu_X$  y es posible estimar usando la media muestral

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t.$$

Con la función media constante estimada ahora es posible estimar las funciones de autocovarianza, autocorrelación, covarianza cruzada y correlación cruzada.

**Definición 23** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo estacionaria y  $X_1, \dots, X_n$  una realización de  $X_t$ . Se define la función autocovarianza muestral como

$$\hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{t+h} - \bar{X})(X_t - \bar{X}), \quad (2.5)$$

con  $\hat{\gamma}_X(-h) = \hat{\gamma}_X(h)$  para  $h = 0, 1, \dots, n-1$ . Si no existe confusión sobre qué serie de tiempo se hace referencia se puede suprimir el subíndice y escribir  $\hat{\gamma}(h)$  en lugar de  $\hat{\gamma}_X(h)$ .

**Definición 24** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo estacionaria y  $X_1, \dots, X_n$  una realización de  $X_t$  cuya función de autocovarianza muestral es  $\hat{\gamma}_X(h)$ . Se define la función autocorrelación muestral como

$$\hat{\rho}_X(h) = \frac{\hat{\gamma}_X(h)}{\hat{\gamma}_X(0)}, \quad (2.6)$$

con  $\hat{\rho}_X(h) = \hat{\rho}_X(-h)$  para  $h = 0, 1, \dots, n-1$ . Si no existe confusión sobre qué serie de tiempo se hace referencia se puede suprimir el subíndice y escribir  $\hat{\rho}(h)$  en lugar de  $\hat{\rho}_X(h)$ .

**Definición 25** Sean  $\{X_t\}_{t \in T}$ ,  $\{Y_t\}_{t \in T}$  series de tiempo estacionarias y  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  una realización de  $X_t$  y  $Y_t$ , respectivamente. Se define la función covarianza cruzada muestral como

$$\hat{\gamma}_{X,Y}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{t+h} - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}), \quad (2.7)$$

con  $\hat{\gamma}_{X,Y}(-h) = \hat{\gamma}_{Y,X}(h)$  para  $h = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Definición 26** Sean  $\{X_t\}_{t \in T}$ ,  $\{Y_t\}_{t \in T}$  series de tiempo estacionarias y  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  una realización de  $X_t$  y  $Y_t$ , respectivamente, cuya función de covarianza cruzada muestral es  $\hat{\gamma}_{X,Y}(h)$ . Se define la función correlación cruzada muestral como

$$\hat{\rho}_{X,Y}(h) = \frac{\hat{\gamma}_{X,Y}(h)}{\hat{\gamma}_{X,Y}(0)}, \quad (2.8)$$

con  $\hat{\rho}_{X,Y}(-h) = \hat{\rho}_{Y,X}(h)$  para  $h = 0, 1, \dots, n-1$ .

Anteriormente se mencionó que el ruido blanco tiene un papel sumamente importante para las series de tiempo, así que es importante caracterizarlo. Las dos siguientes proposiciones serán útiles ya que permitirán saber si la ACF o la CCF para ciertas series de tiempo son significativas o no, pues estos resultados permiten construir intervalos de confianza para ACF si la serie de tiempo es un ruido blanco IID o para la CCF si alguna de las series es ruido blanco IID.

**Proposición 3** Sean  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo y  $X_1, \dots, X_n$ , una realización de  $X_t$  y  $\hat{\rho}_W(h)$  su ACF muestral. Si  $X_t \sim \text{WNIID}(0, \sigma_X^2)$  y  $\mathbb{E}(X_t^4) < \infty$  entonces

$$\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h) \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad (2.9)$$

es decir, para  $n$  suficientemente grande

$$\hat{\rho}_W(h) \approx N\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad h \in \{0, \dots, H\}, \quad (2.10)$$

donde  $H$  es arbitrario, pero fijo y “ $\approx$ ” significa aproximadamente.

**Proposición 4** Sean  $\{X_t\}_{t \in T}$ ,  $\{Y_t\}_{t \in T}$  dos series tiempo independientes y  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  una realización de  $X_t$  y  $Y_t$ , respectivamente y  $\hat{\rho}_{X,Y}(h)$  su CCF muestral. Si  $X_t \sim \text{WNIID}(0, \sigma_X^2)$  o  $Y_t \sim \text{WNIID}(0, \sigma_Y^2)$  entonces

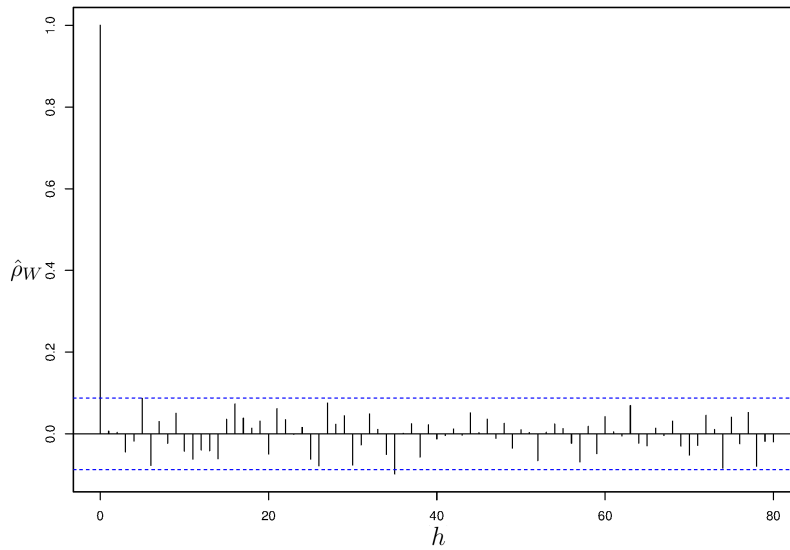
$$\sqrt{n}\hat{\rho}_{X,Y}(h) \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad (2.11)$$

es decir, para  $n$  suficientemente grande

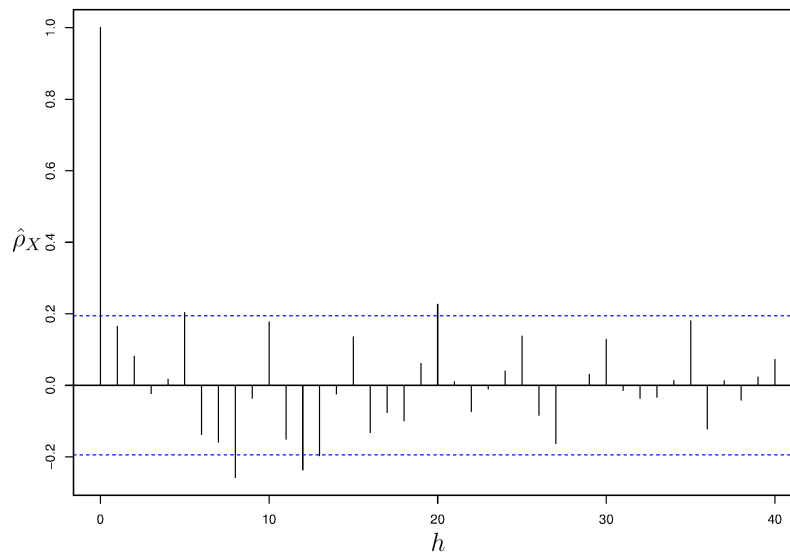
$$\hat{\rho}_W(h) \approx N\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad h \in \{0, \dots, H\}, \quad (2.12)$$

donde  $H$  es arbitrario, pero fijo.

La Figura 2.3 presenta gráficamente la ACF muestral del ruido blanco de la Figura 2.2 y la ACF muestral de la serie de tiempo de la Figura 2.1, en ambas gráficas se muestra una banda delimitada por líneas azules punteadas, dichas líneas están determinadas por los valores  $\pm 2\sqrt{(n)}$  de acuerdo a (2.10) que indica el intervalo de confianza al 95% para un ruido blanco IID, los valores de la función que salen de dicha banda se pueden considerar como estadísticamente significativos.



(a)



(b)

Figura 2.3: La Figura 2.3a es la gráfica de la ACF muestral del ruido blanco de la Figura 2.2 para  $h \in \{0, 1, \dots, 80\}$  y la Figura 2.3b es la gráfica de la ACF muestral de la serie de tiempo de la Figura 2.1  $h \in \{0, 1, \dots, 40\}$ . Los valores que salen de las bandas determinadas por las líneas punteadas azules son significativos de acuerdo a (2.10).

### 2.2.2. Modelos ARIMA

Los modelos autoregresivos integrados de media móvil (ARIMA por su siglas en inglés) se pueden considerar de una forma vaga como relaciones de recurrencia con variables aleatorias en esta subsección y son una opción para modelar una serie de tiempo estacionaria o que se puede hacer estacionaria. Estos modelos junto con la metodología para identificarlos constituyen la perspectiva de Box y Jenkins (Box et al., 1994; Box y Jenkins, 1970).

## Modelos ARMA

Para construir el modelo ARIMA primero se establecerán conceptos básicos que serán fundamentales.

**Definición 27** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo, se define el operador retrospectivo (*backshift* en inglés)  $B$  como

$$BX_t = X_{t-1}$$

y se puede extender como

$$B^k X_t = X_{t-k}. \quad (2.13)$$

También se define el operado prospectivo (*forward-shift* en inglés)  $B^{-1}$  como

$$B^{-1} X_t = X_{t+1}.$$

**Definición 28** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. El operador que genera una diferencia de orden  $d$  se define como

$$\nabla^d = (1 - B)^d$$

y al aplicarlo a  $X_t$  se obtiene la diferencia de orden  $d$

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t. \quad (2.14)$$

El operador diferencia de orden  $d$  será de gran utilidad pues al aplicarlo adecuadamente a una serie de tiempo que no es estacionaria se puede estacionarizar en su media, ya sea porque presente algún comportamiento donde la media no es constante y depende del tiempo linealmente o bien porque la varianza depende del tiempo. También cuando la serie de tiempo presente un comportamiento estacional en la media, esto es cada  $d$  unidades de tiempo se tenga un patrón periódico el operador  $\nabla^d$  ayudará a simplificar este comportamiento no aleatorio.

**Definición 29** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  sigue un modelo autorregresivo de orden  $p$ , abreviado como  $AR(p)$ , si  $X_t$  estacionaria y dela forma

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + W_t, \quad (2.15)$$

cuando  $\mathbb{E}(X_t) = 0$ , o bien cuando  $\mathbb{E}(X_t) = \mu \neq 0$

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \phi_2 (X_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + W_t,$$

o escrito como

$$X_t = \alpha - \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + W_t, \quad (2.16)$$

donde  $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma_W^2)$ ,  $\phi_i \in \mathbb{R}$  es constante, para  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\phi_p \neq 0$  y  $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)$ .

**Definición 30** El operador autorregresivo se define como

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B + \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p. \quad (2.17)$$

**Definición 31** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  sigue un modelo de media móvil de orden  $q$ , abreviado como  $MA(Q)$ , si  $X_t$  es estacionaria y de la forma

$$X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \theta_2 W_{t-2} + \cdots + \theta_q W_{t-q}, \quad (2.18)$$

donde  $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma_W^2)$ ,  $\theta_i \in \mathbb{R}$  es constante, para  $i \in \{1, \dots, q\}$  y  $\theta_q \neq 0$ .



**Definición 32** El operador de media móvil se define como

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q. \quad (2.19)$$

**Definición 33** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  sigue un modelo autorregresivo de media móvil de orden  $p, q$ , abreviado como ARMA  $(p, q)$ , si  $X_t$  es estacionaria y de la forma

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t + \theta_1 W_{t-1} + \theta_2 W_{t-2} + \dots + \theta_q W_{t-q}, \quad (2.20)$$

cuando  $\mathbb{E}(X_t) = 0$ , o bien cuando  $\mathbb{E}(X_t) = \mu \neq 0$

$$X_t = \alpha - \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t + \theta_1 W_{t-1} + \theta_2 W_{t-2} + \dots + \theta_q W_{t-q}, \quad (2.21)$$

donde  $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma_W^2)$ ,  $\sigma_W^2 > 0$ ,  $\phi_i, \theta_j \in \mathbb{R}$  son constantes, para  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $j \in \{1, \dots, q\}$ ,  $\phi_p, \theta_q \neq 0$  y  $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ . Los parámetros  $p$  y  $q$  son llamados orden autorregresivo y orden de media móvil, respectivamente.

Hay tres problemas que pueden presentar los modelos ARMA

- I parámetros redundantes en el modelo,
- II modelos AR estacionarios vistos como procesos lineales que dependen del futuro y
- III modelos MA que no son únicos

Para evitar estos problemas son necesarias restricciones extras y algunas definiciones adicionales.

**Definición 34** Los polinomios AR y MA se definen como

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p, \quad \phi_p \neq 0, \quad (2.22)$$

y

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q, \quad \theta_q \neq 0, \quad (2.23)$$

respectivamente, donde  $z \in \mathbb{C}$ .

Dado un modelo ARMA  $(p, q)$ , se detectará si este tiene parámetros redundantes si al factorizar los polinomios AR y MA resulta que hay factores en común, esto es, tienen raíces en común. Para encontrar el modelo ARMA simplificado hay que eliminar esos términos en común. Así, para evitar el primer problema al menos de manera teórica se hace el supuesto de que los polinomios AR y MA no tiene factores en común. En la práctica esto es un tanto problemático pues al estimar los parámetros del modelo no necesariamente se obtienen los coeficientes  $\theta_i$  y  $\phi_j$  verdaderos, así que la factorización de los polinomios AR y MA y reducción de términos redundantes no es directa, al construir y estimar estos modelos debe tener especial cuidado y el proceso se torna un tanto artesanal.

**Definición 35** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  ARMA  $(p, q)$ . Se dice que  $X_t$  es causal si  $\{X_t\}_{t \in T}$  se puede reescribir como un proceso lineal unilateral, esto es,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j W_{t-j} = \psi(B) W_t, \quad (2.24)$$

donde  $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  y se fija  $\psi_0 = 1$ .

Para evitar el segundo problema de la no causalidad se usa la siguiente proposición.

**Proposición 5** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  ARMA  $(p, q)$ , entonces  $X_t$  es causal si, y sólo si  $\phi(z) \neq 0$  para  $|z| \leq 1$ . Los coeficientes del proceso lineal de (2.24) pueden determinarse solucionando la expresión

$$\phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \quad |z| \geq 1.$$

Para evitar el tercer problema se requiere una definición extra.

**Definición 36** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  ARMA  $(p, q)$ . Se dice que  $X_t$  es invertible si  $\{X_t\}_{t \in T}$  se puede reescribir como

$$\pi(B) X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j W_{t-j} = W_t, \quad (2.25)$$

donde  $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$  y se fija  $\psi_0 = 1$ .

Entonces para garantizar que un modelo MA es único se usa la siguiente proposición.

**Proposición 6** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  ARMA  $(p, q)$ , entonces  $X_t$  es invertible si, y sólo si  $\theta(z) \neq 0$  para  $|z| \leq 1$ . Los coeficientes  $\pi_i$  de  $\pi(B)$  en (2.25) pueden determinarse solucionando la expresión

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \frac{\phi(z)}{\theta(z)}, \quad |z| \geq 1.$$

Un resultado crucial e interesante es que si  $X_t$  sigue un modelo MA  $(q)$  entonces su ACF muestral  $\hat{\rho}_X(h)$  para  $h > q$  no es significativa en términos de (2.10), es decir,  $\hat{\rho}_X(h)$  se corta después de  $q$ . Mientras que si  $X_t$  sigue un modelo AR  $(p)$  su ACF muestral  $\hat{\rho}_X(h)$  desaparecen gradualmente su magnitud. Sería de gran utilidad contar con un dispositivo que caracterice a los modelos AR  $(p)$  como sucede con la ACF muestral para los MA  $(q)$  y que también permita que se distingan de los ARMA  $(p, q)$ . Así es como se origina la función de autocorrelación parcial.

**Definición 37** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo estacionaria. La función de autocorrelación parcial (PACF por sus siglas en inglés) de  $X_t$  se define como

$$\phi_{11} = \text{Corr}(X_{t+1}, X_t) = \rho_X(1) \quad (2.26)$$

y

$$\phi_{hh} = \text{Corr}(X_{t+h} - \hat{X}_{t+h}, X_t - \hat{X}_t), \quad h \geq 2, \quad (2.27)$$

donde

$$\hat{X}_{t+h} = \beta_1 X_{t+h-1} + \beta_2 X_{t+h-2} + \cdots + \beta_{h-1} X_{t+1}, \quad \hat{X}_t = \beta_1 X_{t+1} + \beta_2 X_{t+2} + \cdots + \beta_{h-1} X_{t+h-1}, \quad (2.28)$$

que son las regresiones lineales estimadas de  $X_{t+h}$  en función de  $X_{t+h-1}, X_{t+h-2}, \dots, X_{t+1}$  y de  $X_t$  en función de  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}$ , respectivamente. Estos coeficientes son los mismos por la propiedad de estacionariedad. Si  $\mathbb{E}(X_t) = 0$  se reemplaza  $X_t$  con  $X_t - \mu$ .

	AR ( $p$ )	MA ( $q$ )	ARMA ( $p, q$ )
ACF	Desaparece gradualmente	Se corta después de $h = q$	Desaparece gradualmente
PACF	Se corta después de $h = p$	Desaparece gradualmente	Desaparece gradualmente

Tabla 2.1: Caracterización de modelos AR, MA y ARMA mediante su ACF muestral y PCF.

Por la forma en que fueron construidos los terminos  $(X_{t+h} - \widehat{X}_{t+h})$  y  $(X_t - \widehat{X}_t)$  no están correlacionados con  $\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}$ . Esencialmente la PACF,  $\phi_{hh}$ , es la correlación entre  $X_{t+h}$  y  $X_t$  eliminado su dependencia lineal en  $\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}$  para cada uno.

Ahora cuando  $X_t$  sigue un modelo AR ( $p$ ) entonces su PACF  $\phi_{hh}$  para  $h > p$  no es significativa en términos de (2.10), es decir,  $\phi_{hh}$  se corta después de  $p$ . Mientras que si  $X_t$  sigue un modelo MA ( $q$ ) su PACF  $\phi_{hh}$  desaparece gradualmente su magnitud. Adicionalmente con ayuda de la ACF muestral y la PACF es posible caracterizar a los procesos que pueden ser modelados por un ARMA, pues si  $X_t$  sigue un modelo ARMA ( $p, q$ ) entonces tanto la ACF muestral  $\widehat{\rho}_X(h)$  como la PACF  $\phi_{hh}$  desaparecen gradualmente su magnitud. Esta caracterización se resume en la Tabla 2.1.

## Modelos ARIMA

Nunca los supuestos de estacionariedad se cumplirán en una serie de tiempo, ya sea que la media dependa del tiempo o bien que la varianza no se mantenga exactamente constante a lo largo del tiempo, entre otras situaciones, sin embargo, no todo está perdido y el operador diferencia  $\nabla^d$  puede resultar útil para resarcir estos problemas en la media y la serie de tiempo ahora sí pueda ser modelada mediante un modelo ARMA, así es como se define un nuevo modelo transformado.

**Definición 38** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  sigue un modelo autorregresivo integrado de media móvil de orden  $p, d, q$ , abreviado como ARIMA ( $p, d, q$ ), si

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

sigue un modelo ARMA ( $p, q$ ). En general, el modelo se escribe como

$$\phi(B) (1 - B)^d X_t = \theta(B) W_t, \quad (2.29)$$

cuando  $\mathbb{E}(\nabla^d X_t) = 0$ , o bien cuando  $\mathbb{E}(\nabla^d X_t) = \mu \neq 0$

$$\phi(B) (1 - B)^d X_t = \delta + \theta(B) W_t, \quad (2.30)$$

donde  $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma_W^2)$ ,  $\phi(B)$  es un polinomio AR de orden  $p$  y  $\theta(B)$  es un polinomio MA de orden  $q$  y  $\delta = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ .

## Modelo SARIMA

En ocasiones los fenómenos que se pretenden modelar con series de tiempo tienen efectos cíclicos que no tienen un componente aleatorio, por ejemplo en registros económicos se puede apreciar que se repite cada año en los mismo meses comportamientos similares, de igual forma sucede para registro de fenómenos naturales y los efectos de las estaciones del año. Estos efectos cíclicos o estacionales tienen una naturaleza determinística y para tener una mejor aproximación del

fenómeno es necesario incluir estos efectos en el modelo o técnicamente retirarlos de los datos para modelar exclusivamente la parte aleatoria desconocida. Es así como nacen los modelos estacionales autorregresivos integrados de media móvil.

**Definición 39** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. El operador de diferencia estacional de orden  $s$  y orden  $D$  se define como

$$\nabla_s^D X_t = (1 - B^s)^D X_t, \quad (2.31)$$

donde  $s, D \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .

**Definición 40** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo. Se dice que  $X_t$  sigue un modelo multiplicativo estacional autorregresivo integrado de media móvil de orden  $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ , abreviado como SARIMA  $(p, q, d) \times (P, Q, D)_s$ , si

$$\Phi_P(B^s) \phi(B) \nabla_s^D \nabla^d X_t = \delta + \Theta_Q(B^s) \theta(B) W_t, \quad (2.32)$$

donde  $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma_W^2)$ ,  $\Phi(B^s)$  es un polinomio AR de orden  $P$  evaluado en  $B^s$ ,  $\phi(B)$  es un polinomio AR de orden  $p$ ,  $\Theta_Q(B^s)$  es un polinomio MA de orden  $Q$  evaluado en  $B^s$  y  $\theta(B)$  es un polinomio MA de orden  $q$ .

## Pronóstico de series de tiempo

Uno de los fines de los modelos de series de tiempo es pronosticar futuros valores de la serie de tiempo dados valores vistos hasta el presente, es decir, si  $\{X_t\}_{t \in T}$  es una serie de tiempo que sigue un modelo conocido,  $X_1, \dots, X_n$  son observaciones de  $X_t$  en  $\{1, \dots, n\}$  y se desea pronosticar  $X_{n+m}$ . Si  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_1\}$  y  $g(\mathbf{X})$  es una función de las observaciones  $\mathbf{X}$ , el pronóstico se obtiene minimizando el error cuadrático medio

$$\mathbb{E} [(X_{n+m} - g(\mathbf{X}))^2], \quad (2.33)$$

cuyo mínimo se alcanza en la esperanza condicional

$$\widehat{X}_{n+m} = \mathbb{E}(X_{n+m} | \mathbf{X}). \quad (2.34)$$

Para simplificar el modelo sólo serán considerados los predictores que funciones lineales de los datos, es decir,

$$\widehat{X}_{n+m} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k, \quad (2.35)$$

donde  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . Es muy importante observar que los valores  $\alpha_k$  dependen de  $n$  y  $m$  y pueden ser diferentes para cada  $n$  y  $m$  particulares. Los valores  $\alpha_k$  serán determinados de acuerdo al siguiente resultado.

**Proposición 7** Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo estacionaria. Dadas las observaciones  $X_1, \dots, X_n$ , el mejor predictor lineal,  $\widehat{X}_{n+m} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$ , de  $X_{n+m}$ ,  $m \geq 1$ , se encuentra solucionando el sistema

$$\mathbb{E} \left[ \left( X_{n+m} - \widehat{X}_{n+m} \right) X_k \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.36)$$

donde  $X_0 = 1$ , para  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

A estas ecuaciones se les suele llamar ecuaciones de predicción. Si  $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ , la primera ecuación, cuando  $k = 0$  implica que

$$\mathbb{E}(\widehat{X}_{n+m}) = \mathbb{E}(X_{n+m}) = \mu, \quad \text{o bien} \quad \alpha_0 = \mu \left( 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \right)$$

y así la forma de mejor predictor lineal cambia a

$$\widehat{X}_{n+m} = \mu + \sum_{k=1}^n \alpha_k (X_k - \mu).$$

Sin pérdida de generalidad se considera el caso cuando  $\mu = 0$ , que implica  $\alpha_0 = 0$ . Particularmente se estudiará el caso cuando se desea predecir el siguiente paso en el tiempo  $X_{n+1}$  dadas las observaciones  $X_1, \dots, X_n$ . Entonces el mejor predictor lineal toma la forma

$$\widehat{X}_{n+1} = \phi_{n,1}X_n + \phi_{n,2}X_{n-1} + \dots + \phi_{n,n}X_1, \quad (2.37)$$

para declarar la dependencia en  $n$  el coeficiente  $\alpha_k$  de (2.35) es  $\phi_{n,n+1-k}$ , para  $k = 1, \dots, n$  y entonces considerando la proposición 7, los coeficientes  $\phi_{n,1}, \phi_{n,2}, \dots, \phi_{n,n}$  satisfacen que

$$\mathbb{E} \left[ \left( X_{n+1} - \sum_{j=1}^n \phi_{n,j} X_{n+1-j} \right) X_{n+1-k} \right] = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

o bien,

$$\sum_{j=1}^n \phi_{n,j} \gamma(k-j) = \gamma(k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.38)$$

y escrito en forma matricial

$$\mathbf{\Gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\gamma}_n, \quad (2.39)$$

donde  $\mathbf{\Gamma}_n = \{\gamma(k-j)\}_{j,k=1}^n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $\boldsymbol{\phi}_n = (\phi_{n,1}, \dots, \phi_{n,n})^T \in \mathbb{R}^n$  y  $\boldsymbol{\gamma}_n = (\gamma(1), \dots, \gamma(n))^T \in \mathbb{R}^n$ .

La matriz  $\mathbf{\Gamma}_n$  es no negativa definida, si  $\mathbf{\Gamma}_n$  es singular hay muchas soluciones para (2.39), pero el teorema de proyección en espacios de Hilbert garantiza que la solución es única. Si  $\mathbf{\Gamma}_n$  no es singular entonces los elementos de  $\boldsymbol{\phi}_n$  son únicos y están dados por

$$\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n. \quad (2.40)$$

Para un modelo ARMA el hecho de que  $\sigma_w^2 > 0$  y que  $\gamma(h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow \infty$  es suficiente para garantizar que  $\mathbf{\Gamma}_n$  es positiva definida. Así

$$\widehat{X}_{n+1} = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{X}. \quad (2.41)$$

El error cuadrático medio del predictor del siguiente paso es

$$P_{n+1}^n = \mathbb{E} \left[ \left( X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1} \right)^2 \right] = \gamma(0) - \boldsymbol{\gamma}_n^T \mathbf{\Gamma}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n. \quad (2.42)$$

Técnicamente con la ecuación (2.40) se soluciona el problema de estimar el mejor predictor lineal del paso siguiente en un modelo ARMA, sin embargo, cuando  $n$  es grande esta solución se vuelve computacionalmente no viable pues ya que se debe invertir la matriz  $\mathbf{\Gamma}_n$  que es una dimensión grande. Eso hace necesarios otros métodos de pronóstico alternativos que no sean computacionalmente intensivos, particularmente se cuenta con el algoritmo de Durbin-Levinson y el algoritmo de innovación.

**Proposición 8 (El algoritmo de Durbin-Levinson)** Las ecuaciones (2.40) y (2.42) se pueden solucionar de manera iterativa como sigue:

$$\phi_{0,0} = 0, \quad P_1^0 = \gamma(0). \quad (2.43)$$

Para  $n \geq 1$ ,

$$\phi_{n,n} = \frac{\rho(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{n-1,k} \rho(n-k)}{1 - \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{n-1,k} \rho(k)}, \quad P_{n+1}^n = P_n^{n-1} (1 - \phi_{n,n}^2), \quad (2.44)$$

donde  $\rho(h)$  es la función autocorrelación de la serie de tiempo y para  $n \geq 2$ ,

$$\phi_{n,k} = \phi_{n-1,k} - \phi_{n,n} \phi_{n-1,n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.45)$$

**Proposición 9 (El algoritmo de innovación)** El predictor del siguiente paso,  $\widehat{X}_{n+1}$  y error cuadrático medio,  $P_{n+1}^n$ , se pueden estimar iterativamente como

$$X_1^0 = 0, \quad P_1^0 = \gamma(0) \quad (2.46)$$

$$\widehat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (X_{n+1-j} - X_{n+1-j}^{n-j}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.47)$$

$$P_{n+1}^n = \gamma(0) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 P_{j+1}^j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.48)$$

donde, para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ,

$$\theta_{n,n-j} = \frac{\gamma(n-j) - \sum_{k=0}^{j-1} \theta_{j,j-k} \theta_{n,n-k} P_{k+1}^k}{P_{j+1}^j}. \quad (2.49)$$

Un consecuencia importante del algoritmo de Durbin-Levinson es el siguiente.

**Proposición 10 (Solución iterativa para la PACF)** La PACF de un proceso estacionario  $X_t$  se puede obtener de manera iterativa mediante (2.44) como  $\phi_{n,n}$ , para  $n = 1, 2, \dots$

Originalmente se buscaba estimar el mejor predictor lineal para  $X_{n+m}$  dados los datos  $X_1, \dots, X_n$ , entonces considerando (2.35) y (2.37) el predictor de  $m$  tiempos adelante es

$$\widehat{X}_{n+m} = \phi_{n,1}^{(m)} X_n + \phi_{n,2}^{(m)} X_{n-1} + \dots + \phi_{n,n}^{(m)} X_1, \quad (2.50)$$

donde  $\phi_{n,1}^{(m)}, \phi_{n,2}^{(m)}, \dots, \phi_{n,n}^{(m)}$  satisfacen la ecuación de predicción

$$\sum_{j=1}^n \phi_{n,j}^{(m)} \mathbb{E}(X_{n+1-j} X_{n+1-k}) = \mathbb{E}(X_{n+m} X_{n+1-k}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.51)$$

o bien

$$\sum_{j=1}^n \phi_{n,j}^{(m)} \gamma(k-j) = \gamma(m+k-1), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.52)$$

y de nuevo se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{\Gamma}_n \phi_n^{(m)} = \boldsymbol{\gamma}_n^{(m)}, \quad (2.53)$$

donde  $\phi_n^{(m)} = (\phi_{n,1}^{(m)}, \dots, \phi_{n,n}^{(m)})^T \in \mathbb{R}^n$  y  $\boldsymbol{\gamma}_n^{(m)} = (\gamma(m), \dots, \gamma(m+n-1))^T \in \mathbb{R}^n$ .

## Estimación de modelos ARMA

Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una serie de tiempo que sigue un modelo ARMA  $(p, q)$  Gaussiano, causal, e invertible. Suponiendo que se han identificado de alguna forma los parámetros autorregresivo  $p$  y de media móvil  $q$  y se cuenta con las observaciones  $X_1, \dots, X_n$ , ahora lo idóneo es determinar los parámetros  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  y  $\sigma_W^2$ .

Si  $X_t$  fuera un proceso AR  $(p)$  entonces

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t$$

particularmente se puede usar el método de momentos para realizar las estimaciones de los parámetros  $\theta_1, \dots, \theta_p$ , ello se le dará nombre a un par de ecuaciones estudiadas anteriormente.

**Definición 41** Las ecuaciones de Yule-Walker son

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \dots + \phi_p \gamma(h-p), \quad h = 1, 2, \dots, p, \quad (2.54)$$

$$\sigma_W^2 = \gamma(0) - \phi_1 \gamma(1) - \dots - \phi_p \gamma(p) \quad (2.55)$$

o en forma matricial

$$\mathbf{\Gamma}_p \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\gamma}_p, \quad \sigma_W^2 = \gamma(0) - \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\gamma}_p, \quad (2.56)$$

donde  $\mathbf{\Gamma}_p = \{\gamma(k-j)\}_{j,k=1}^p \in M_{p \times p}(\mathbb{R})$ ,  $\boldsymbol{\phi}_p = (\phi_1, \dots, \phi_p)^T \in \mathbb{R}^p$  y  $\boldsymbol{\gamma}_p = (\gamma(1), \dots, \gamma(p))^T \in \mathbb{R}^p$ .

Para estimar  $\boldsymbol{\phi}$  se reemplaza  $\gamma(h)$  con  $\hat{\gamma}(h)$  y se usa el método de momentos, que esencialmente es solucionar las ecuaciones

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p, \quad \hat{\sigma}_W^2 = \hat{\gamma}(0) - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p. \quad (2.57)$$

A estos estimadores se les suele llamar estimadores de Yule-Walker. Para realizar los cálculos más fácilmente es conveniente usar la ACF en lugar de la función de autocovarianza, factorizando  $\hat{\gamma}(0)$  quedan como

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{R}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\rho}}_p, \quad \hat{\sigma}_W^2 = \hat{\gamma}(0) \left[ 1 - \hat{\boldsymbol{\rho}}_p^T \hat{\mathbf{R}}_p^{-1} \hat{\boldsymbol{\rho}}_p \right], \quad (2.58)$$

donde  $\mathbf{R}_p = \{\hat{\rho}(k-j)\}_{j,k=1}^p \in M_{p \times p}(\mathbb{R})$  y  $\hat{\boldsymbol{\rho}}_p = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(p))^T \in \mathbb{R}^p$ . Para modelos AR  $(p)$  los estimadores de Yule-Walker presentan algunas propiedades útiles.

**Proposición 11** Sean  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  y  $\hat{\sigma}_W^2$  los estimadores de Yule-Walker para  $\boldsymbol{\phi}$  y  $\sigma_W^2$ , entonces

$$\sqrt{n} \left( \hat{\boldsymbol{\phi}} - \boldsymbol{\phi} \right) \xrightarrow{D} N_p \left( \mathbf{0}, \sigma_W^2 \mathbf{\Gamma}_p^{-1} \right), \quad \hat{\sigma}_W^2 \xrightarrow{P} \sigma_W^2. \quad (2.59)$$

El algoritmo de Durvin-Levinson también puede ser empleado para calcular  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  sin tener que invertir  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p$  o  $\hat{\mathbf{R}}_p$  usando  $\hat{\gamma}(h)$ . Al usar este algoritmo también se estima la PACF muestral como  $\hat{\phi}_{hh}$  y se tiene otra propiedad.

**Proposición 12** Para un proceso AR  $(p)$  causal se tiene

$$\sqrt{n} \hat{\phi}_{hh} \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad \text{para } h > p, \quad (2.60)$$

Cuando se tiene un modelo  $AR(p)$  la convergencia en distribución de los estimadores de Yule-Walker establecida en (2.59) indica que son óptimos asintóticamente, pero si son usados para modelos MA o ARMA no se tiene esa optimalidad pues estos procesos son no lineales en los parámetros, por ello se recurre al método de máxima verosimilitud para realizar las estimaciones. Supóngase que  $X_t$  sigue un modelo ARMA  $(p, q)$  Gaussiano, sea  $\boldsymbol{\beta} = (\mu, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)^T$  el vector que contiene los parámetros del modelo. Entonces dadas las observaciones  $X_1, \dots, X_n$  la función de verosimilitud es

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_W^2) = f(X_1, \dots, X_n) = \prod_{t=1}^n f(X_t | X_{t-1}, \dots, X_1). \quad (2.61)$$

Y como  $X_t$  es un proceso Gaussiano se tiene que  $X_t | X_{t-1}, \dots, X_1 \sim N(X_t^{t-1}, P_t^{t-1})$ . Anteriormente se consideró que  $P_t^{t-1} = \gamma(0) \prod_{j=0}^{t-1} (1 - \phi_{jj}^2)$  y para un modelo  $AR(p)$  se tiene que  $\gamma(0) = \sigma_W^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$ , entonces se puede reescribir  $P_t^{t-1}$  como

$$P_t^{t-1} = \sigma_W^2 \left\{ \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \right] \left[ \prod_{j=0}^{t-1} (1 - \phi_{jj}^2) \right] \right\} = \sigma_W^2 r_t,$$

donde

$$r_t = \left\{ \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \right] \left[ \prod_{j=0}^{t-1} (1 - \phi_{jj}^2) \right] \right\}.$$

Particularmente obsérvese que  $r_{t+1} = (1 - \phi_{t,t}^2) r_t$  con  $r_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$ , entonces la función de verosimilitud (2.61) se transforma en

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_W^2) = (2\pi\sigma_W^2)^{-n/2} [r_1(\boldsymbol{\beta}) r_2(\boldsymbol{\beta}) \cdots r_n(\boldsymbol{\beta})]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{S(\boldsymbol{\beta})}{2\sigma_W^2} \right], \quad (2.62)$$

donde

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^n \left[ \frac{(X_t - X_t^{t-1}(\boldsymbol{\beta}))^2}{r_t(\boldsymbol{\beta})} \right] \quad (2.63)$$

y se supone que  $X_t^{t-1}$  y  $r_t$  son funciones de  $\boldsymbol{\beta}$ . También se tiene la función de logverosimilitud

$$l(\boldsymbol{\beta}) = \log [n^{-1} S(\boldsymbol{\beta})] + n^{-1} \sum_{t=1}^n \log [r_t(\boldsymbol{\beta})]. \quad (2.64)$$

La estimación de  $\boldsymbol{\beta}$  se realiza empleando métodos numéricos como los métodos de Newton-Rampson o de Gauss-Newton.

## 2.3. Centros de llamadas

### 2.3.1. Conceptos básicos

Los centros de llamadas son empresas del sector de servicios que operan vía telefónica, se han convertido en el contacto primario entre los prestadores de servicios y sus clientes (Shen, 2010), básicamente son oficinas centralizadas usadas con el propósito de recibir o transmitir un



gran volumen de llamadas telefónicas. Los tipos de centros de llamadas más comunes son *inbound* y *outbound*. Un centro de llamadas *inbound* recibe llamadas de clientes que tratan de obtener productos o servicios vía telefónica, por ejemplo el servicio de atención a clientes de un banco o de un proveedor de televisión de paga, el servicio de contacto para comprar productos exhibidos en televisión o bien un contacto de emergencia tal como “066” o “911” o una compañía de seguros en caso de un siniestro. Un centro de llamadas *outbound* realiza llamadas a personas que se encuentran en un directorio, suelen ser una parte fundamental de los estudios de opinión o de mercado realizando encuestas telefónicas, también suelen dedicarse al telemarketing, esto es, ofrecer productos o servicios a clientes potenciales.

En un centro de llamadas inbound el camino común que sigue una llamada inicia cuando el cliente marca el número de contacto para obtener un servicio, el servicio para ese número es proveído por un centro de llamadas, entonces una vez conectada, el cliente usualmente se encuentra con la voz de una unidad de respuesta interactiva. En la unidad de respuesta interactiva el cliente puede realizar algunas transacciones de autoservicio que en ocasiones terminan el servicio ahí. En caso de que el cliente aún necesite hablar con un agente, si alguno se encuentra disponible y éste es capaz de ejecutar el trabajo solicitado, entonces el cliente será transferido al agente para tener servicio inmediatamente; de lo contrario, el cliente se une a una fila invisible de clientes en espera. Eventualmente el cliente es atendido por un agente o se impacienta y abandona la llamada antes de obtener servicio (Brown et al., 2005; Shen, 2010).

En un centro de llamadas outbound el camino que sigue una llamada inicia en un sistema automático de marcado que selecciona un número telefónico dentro de una base de datos que contiene directorios de clientes potenciales, entonces el sistema marca el número y si alguien contesta la llamada automáticamente es conectada con un agente que ofrecerá un producto, servicio o realizará una encuesta (De Freitas Filho et al., 2007).

Los aspectos más importantes que tienen influencia en un centro de llamadas son el nivel de satisfacción de los clientes y la reducción del costo de operaciones. Mientras más satisfecho esté un cliente con el servicio, mayor ganancia la compañía obtendrá y también si se realiza un manejo adecuado de la carga de trabajo para el personal se puede reducir el costo de operaciones, pero un exceso o escasez de agentes usualmente afectarán las condiciones del centros de llamadas. En el caso de un centro de llamadas inbound tener una cantidad inferior a la óptima de agentes telefónicos puede hacer que los clientes no vuelvan a usar el servicio del centro de llamadas por una mala experiencia al esperar (Chuchual et al., 2010). En el caso de lo centros de llamadas outbound se necesita no ser tan insistente con el número de llamadas a los mismos clientes para reducir los niveles de rechazo (De Freitas Filho et al., 2007).

### **2.3.2. Problemas principales de los centros de llamadas**

Los tres principales problemas del negocio de centro de llamadas son:

1. Pronosticar la cantidad de personal necesario para operar óptimamente.
2. Reducir el número de llamadas abandonadas por los clientes potenciales.
3. Analizar la paciencia de los clientes potenciales.

Estos problemas están intrínsecamente relacionados (Gans et al., 2003; Mandelbaum, 2006) por lo que la solución de uno de ellos aporta a la solución de los de más. Particularmente el pronosticar la cantidad de personal necesario para operar óptimamente es de primera necesidad, específicamente

en un centro de llamadas inbound entre el 60 % y 80 % del presupuesto para operaciones se dedica a pagar el sueldo de los operadores (Chuchual et al., 2010; Aksin et al., 2007).

### 2.3.3. ¿Cómo se han estudiado los centros de llamadas?

En un intento para solucionar estos problemas en los primeros trabajos que se acercaron seriamente a estos temas se descubrió que para realizar un buen trabajo, esto es, ofrecer una solución o al menos entender mejor los problemas, los científicos de datos necesitan datos de mejor calidad que los que la industria ofrece. Cerca de los inicios de la década del 2,000 en la práctica los centros de llamadas sólo hacían reportes que resumían lo que había sucedido en el día por intervalos de 15 o 30 minutos y no contaban con información más específica de cada llamada (Brown et al., 2005). Así que el primer cambio inducido en la industria por estos estudios fue la mejora de las herramientas para monitorear el sistema, se hizo notoria la necesidad de contar con registros de llamada por llamada. Entonces Trofimov et al. (2006) desarrollaron y compartieron un software llamado DataMOCCA que tomaba en cuenta todas estas consideraciones para que los gerentes de los centros tomaran conciencia de qué datos eran necesarios para tener un mejor control del sistema.

La misión del proyecto DataMOCCA es recolectar, preprocesar, organizar, analizar y distribuir datos completos de las transacciones de un centro de llamadas. El núcleo de DataMOCCA es un sistema de bases de datos diseñado para realizar análisis de los eventos llamada por llamada junto con la interfase SEESTAT que facilita la exploración empírica y el análisis estadístico de los datos. Una versión pública del sistema completo con DataMOCCA y SEESTAT puede descargarse del centro SEE de Technion (el Instituto Tecnológico de Israel) (Shen, 2010). A pesar de la distribución gratuita de DataMOCCA actualmente la mayoría de los centros de llamadas siguen teniendo pobres reportes de sus actividades.

La descripción simple que se ha hecho de las operación de un centro de llamadas sugieren que pudieran modelarse como sistemas de colas tales como  $M/M/1$ ,  $M/G/1$  o  $G/G/1$ , descritos por Ross (2010), pero no es tan simple como eso. En el caso de un centro de llamadas inbound se puede contar el número de clientes que llaman, esto es, modelar la llegada de las llamadas, pero de acuerdo con Avramidis et al. (2004) y Shafae et al. (2012) la naturaleza de los procesos de llegada en un centro de llamadas siguen las siguientes tres propiedades:

- I Los volúmenes de llamadas varían significativamente sobre el tiempo (las llegadas tiene una tasa variable).
- II La varianza de los volúmenes de llegadas es mucho mayor que sus medias (sobre-dispersión de los datos).
- III La dependencia entre los volúmenes de llegadas en periodos de tiempo sucesivos de un mismo día es fuerte (correlación positiva fuerte).

Así que las propiedades descritas arriba para un centro de llamadas violan las suposiciones para un proceso Poisson pues la propiedad (I) dice que la tasa no es homogénea sobre el tiempo y la propiedad (II) dice que hay sobre-dispersión, de tal manera que la media y la varianza no serán la misma sobre un intervalo de tiempo como en la distribución Poisson y finalmente la propiedad (III) indica que no hay independencia entre los intervalos cercanos de tiempo, pero el proceso Poisson supone que tiene intervalos no sobrepuestos independientes (Shafae et al., 2012). Por tanto un proceso Poisson simple no es adecuado para modelar un centro de llamadas, entonces los modelos

tradicionales de teoría de colas resultan no útiles ante la complejidad de los fenómenos que ocurren dentro de los centros de llamadas.

Entonces es factible que un proceso Poisson no homogéneo tenga un mejor desempeño frente al problema de variabilidad al contar con una tasa mezclante variable y en el caso de los periodos de variación por horas, días, semanas o meses pueden ser manejados mediante una función mezclante adecuada  $\lambda(t)$  que se adapte a estos periodos (Shafae et al., 2012).

Entonces lo que se necesita es estimar la función  $\lambda(t)$ . La tasa variable  $\lambda(t)$  ha sido considerada como una función constante sobre periodos de tiempo (Henderson, 2003) y también ha sido considerada como una función lineal estimada a través de mínimos cuadrados, mínimos cuadrados ponderados iterativamente y estimadores de máxima verosimilitud (Massey et al., 1996); incluso de han considerado aproximaciones polinomiales para  $\lambda(t)$  estimadas con técnicas de máxima verosimilitud (Kao y Chang, 1988).

En el caso de que la variabilidad sea mayor que la que se espera en un proceso Poisson no homogéneo, es mejor pensar en un proceso Poisson donde la tasa también es una variable aleatoria, dicho proceso se le conoce como Proceso Poisson doblemente estocástico, mixto y si la tasa no sólo es una variable aleatoria sino que también es un proceso estocástico se le conoce como proceso de Cox. Dicha aproximaciones han sido estudiadas por (Gans et al., 2015) y (Shafae et al., 2012), particularmente el modelo de los primeros es muy conveniente pues ofrece una manera de lidiar con los registros por intervalos clásicos de un centro de llamadas, dicho modelo está sustentado en los modelos auto-regresivos para pronosticar el proceso estocástico de la tasa, la optimización estocástica y la inferencia Bayesiana para pronosticar el volumen de personal necesario para operar en márgenes óptimos.

Por otra parte, el trabajo que se ha realizado en el caso de centros de llamadas outbound se ha concentrado en que los marcadores automáticos sean los más rápidos posibles para evitar dejar en espera a un cliente potencial. Estos sistema de marcado ha llegado a un gran nivel de sofisticación por lo que se puede considerar que el problema ha sido resuelto Shen (2010).

#### **2.3.4. El modelo de Shen y Gans: una propuesta de solución a los problemas de un centro de llamadas inbound**

De los múltiples trabajos que se han realizado para enfrentar los principales problemas de los centros de llamadas inbound las propuestas expuesta en Gans et al. (2015) y Shen y Huang (2008) son particularmente interesantes. En Shen y Huang (2008) se propone un modelo que pronostica el volumen de llamadas que se reciben a lo largo del día, mientras que en Gans et al. (2015) se usa el modelo Shen y Huang (2008) para alimentar un modelo que pronostica el personal necesario a lo largo del día para reducir los abandonos de los clientes que esperan a que un operador tome su llamada. Además estos modelos toman en cuenta que la mala práctica de que los centros de llamadas tengan registros pobres sigue presente en la industria, particularmente la de tener exclusivamente registros por lapsos a lo largo del día, así que están construidos para recibir este tipo de datos, pero toman en consideración la evidencia empírica que han aportado los estudios de centros de llamadas donde se tienen registros llamada por llamada para hacer supuestos más cercanos a la realidad.

Una cola  $M/M/n + M$  o también conocida como modelo Erlang-A modela una fila donde llegan individuos y el tiempo entre llegadas es exponencial de tasa  $\lambda$ , dichos tiempos entre llegada son independientes, cuando llegan al inicio de la fila hay  $n$  servidores que los atienden, cada servidor tiene tiempos de servicio exponenciales de tasa  $\mu$ , también los tiempos de servicio son independientes, y los individuos formados en la fila la abandonan antes de ser atendidos y el

tiempo entre cada abandono es exponencial de tasa  $\theta$ , también los tiempos entre abandono son independientes. Técnicamente un modelo  $M/M/n + M$  representa tres procesos Poisson que interactúan, el primero es la fila y tiene tasa  $\lambda$ , el segundo proceso Poisson es el conteo de las personas que abandonan y tiene tasa  $\theta$  y el tercer proceso Poisson es el de las personas que fueron finalmente atendidas por el servidor y tiene tasa  $n\mu$ .

Según Gans et al. (2015) una cola  $M/M/n + M$  es un modelo relativamente razonable para modelar el centro de llamadas, pues las llamadas que son transferidas del área de labor de ventas se forman en una fila, algunas llamadas son abandonadas y el resto entran el área de validación donde tardan cierto tiempo en ser atendidas, aunque la experiencia de los supervisores del centro de llamadas indica que al menos la tasa de las llegadas a la fila de espera no son uniformes a lo largo del día, aunque se puede esperar que para tiempos cercanos las tasas sean cercanas y además se ha observado que el comportamiento del sistema del centros de llamadas tiene comportamiento estacional por días y por horas del día, es decir, presenta patrones similares entre los mismo días de la semana y entre los mismos lapsos del día. Aún con la variabilidad el proceso puede relacionarse con un proceso Poisson homogéneo si se condiciona como Shafae et al. (2012) resalta en la siguiente proposición.

**Proposición 13** *Sea  $\Lambda$  una variable aleatoria positiva con función de distribución  $F(\lambda)$  y  $X_t$  un proceso Poisson doblemente estocástico con variable mezclante  $\Lambda$ , entonces condicionando a  $\Lambda = \lambda$  el proceso  $X_t$  es un proceso Poisson homogéneo de tasa  $\lambda$ , esto es*

$$\{X_t \mid \Lambda = \lambda\} \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

También más adelante será de utilidad el siguiente resultado descrito por Brown et al. (2009).

**Proposición 14** *Suponga que  $\gamma \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , con  $\lambda$  determinista. Entonces para  $\lambda$  suficientemente grande  $Y = \sqrt{\gamma + 1/4}$  tiene aproximadamente una distribución normal con media  $\sqrt{\lambda}$  y varianza  $1/4$ .*

### Pronóstico del volumen de llamadas recibidas

Para un cierto día  $d$  sean  $\{S_t^{(d)} : t \geq 0\}$  el proceso de conteo de las llamadas recibidas en el centro de llamadas hasta el tiempo  $t$  y  $\{A_t^{(d)} : t \geq 0\}$  el proceso de conteo de las llamadas que son abandonadas hasta el tiempo  $t$  y  $\{V_t^{(d)} : t \geq 0\}$  el proceso de conteo de las llamadas que fueron contestadas y fueron servidas hasta el tiempo  $t$ . Se considera que los tiempos de servicio para cada operador son homogéneos en el tiempo, es decir, todos ellos son exponenciales de tasa  $\mu$ , por tanto  $V_t^{(d)} \sim \text{Poisson}(n\mu t)$  y también los tiempos entre abandono son homogéneos, esto es, en cualquier momento del horario de operación todos ellos son exponenciales de tasa  $\theta$ , por tanto  $A_t^{(d)} \sim \text{Poisson}(\theta t)$ . En el caso del proceso  $S_t$  considera que sigue un proceso Poisson doblemente estocástico con tasa mezclante  $\Lambda_t^{(d)}$ , de hecho  $S_t$  se considera un proceso de Cox y entonces  $\Lambda_t^{(d)}$  es otro proceso estocástico a tiempo continuo, pero se hace el supuesto de que se mantiene estable localmente, es decir, es una variable aleatoria que conserva el mismo valor en lapsos de tamaño razonable y se comporta más como un proceso estocástico a tiempo discreto.

Sean  $[0, T]$  el tiempo de operación diario del centro de llamadas,  $d \in \mathcal{D} = \{1, \dots, D\}$  el índice que señala el día dentro de un periodo de  $D$  días de actividad,  $i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, I\}$  el índice que indica un lapso (intervalo de tiempo) en un día de tal manera que  $I \times m = T$ , donde  $m$  es el

tamaño de los lapsos,  $l_d = \{0, 1, \dots, 6\}$  es el día de la semana del día  $d$  con  $0 = \text{lunes}$ ,  $6 = \text{domingo}$  y  $\gamma_{d,i} = S_{im}^{(d)} - S_{(i-1)m}^{(d)}$  son los conteos del proceso  $S_t^{(d)}$  para el día  $d$  en el lapso  $i$ .

Considerando la proposición 13 y el supuesto de estabilidad del proceso, en el día  $d$  en el lapso  $i$ , es decir, en  $[(i-1)m, im)$  el proceso  $S_t^{(d)}$  mantiene el mismo valor de la tasa, entonces  $\gamma_{d,i} = S_{im}^{(d)} - S_{(i-1)m}^{(d)} \sim \text{Poisson} \left( m\Lambda_{im}^{(d)} \right)$ . Sean  $\Lambda_{d,i} = m\Lambda_{im}^{(d)}$  y  $\Lambda_d = (\Lambda_{d,1}, \dots, \Lambda_{d,I})$ . Con esta información en mano y recordando la proposición 14 la transformación  $Y_{d,i} = \sqrt{\gamma_{d,i} + 1/4}$  ( $d \in \mathcal{D}, i \in \mathcal{I}$ ) tiene aproximadamente distribución normal de media  $\sqrt{\Lambda_{d,i}}$  y varianza  $1/4$ .

Ahora con estos ingredientes en mano se establece el siguiente proceso de tasas de llegada oculto:

$$\begin{aligned} Y_{d,i} &= \sqrt{\Lambda_{d,i}} + \varepsilon_{d,i}, \quad \varepsilon_{d,i} \sim N(0, \sigma^2), \\ \sqrt{\Lambda_{d,i}} &= \omega_d \vartheta_{l_d,i}, \quad \vartheta_{l_d,i} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^I \vartheta_{l_d,i} = 1, \\ \omega_d - \alpha_{l_d} &= \beta (\omega_{d-1} - \alpha_{l_{d-1}}) + \eta_d \quad \eta_d \sim N(0, \phi^2). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Donde  $\omega_d$  es la tasa total de llegadas para el día  $d$  (en la escala de raíz cuadrada como la de  $Y_{d,i}$ ),  $\alpha_{l_d}$  es un ajuste para centrar en cero en el día de la semana  $l_d$ ,  $\vartheta_{l_d,i}$  es la fracción de la tasa de llegada diaria que es aportada durante el intervalo  $i$  en el día de la semana  $l_d$  y  $\Lambda_{d,i}$  es la tasa de llegada para el intervalo  $i$  en el día  $d$  en la escala natural. Como  $Y_{d,i} \sim N(\sqrt{\Lambda_{d,i}}, 1/4)$ , entonces  $\mathbb{E}(Y_{d,i}) \approx 1/4$ . Este modelo está construido para usar datos en la forma de los típicos reportes de un centro de llamadas, es decir, para reportes de datos que que dividen el día en lapsos y tiene el registro de lo que sucedió en dicho periodo.

El modelo de predicción (2.65)  $\omega_d - \alpha_{l_d}$  que se encuentra en la escala de la transformación raíz cuadrada sigue un modelo AR(1) con su respectivo ruido blanco dado por  $\eta_d \sim N(0, \phi^2)$ , y entonces las variables aleatorias de la sucesión  $\omega_d$  son normales, así las variables aleatorias de la sucesión  $\{\omega_d \vartheta_{l_d,i} \mid i = 1, \dots, I\}$  de las tasas en los lapsos en un día también también son normales. Además cada día de la semana tiene su propio perfil de las proporciones de llegadas para cada lapso ( $\vartheta_{l_d,1}, \dots, \vartheta_{l_d,I}$ ) y con ello el modelo toma a cuenta el comportamiento estacional del arribo de las llamadas. Finalmente se debe tener en consideración que las tasas de llegada  $\Lambda_{d,i}$  nunca son observadas, realmente están ocultas, sólo se manifiestan a través de  $Y_{d,i}$ .

Así se modela el proceso de las tasas de llegada como un modelo normal o Gaussiano AR(1) oculto mediante los conteos observados bajo una transformación que siguen una distribución normal. A un modelo como este se le suele llamar modelo gaussiano de espacio de estados y sus componentes se pueden estimar mediante métodos de máxima verosimilitud. Los datos que se tienen son la sucesión  $\{y_{d,i}\}$  que corresponden a  $\sqrt{\gamma_{d,i} + 1/4}$ , donde  $\gamma_{d,i}$  son los conteos de llamadas recibidas en el lapso  $i$  y es posible proporcionar estimadores para  $\omega_d$ ,  $\alpha_{l_d}$  y  $\vartheta_{l_d,i}$  que sean insesgados con varianza ligeramente más grande que la de los estimadores de máxima verosimilitud, pero computacionalmente menos intensivos que los de máxima verosimilitud (Brown et al., 2005), estos estimadores son:

$$\hat{\omega}_d = \sum_{i=1}^I Y_{d,i}, \quad \hat{\alpha}_{l_d} = \frac{\sum_{\{d': l_{d'}=l_d\}} \sum_i Y_{d',i}}{|\{d' : l_{d'} = l_d\}|}, \quad \hat{\vartheta}_{l_d,i} = \frac{\sum_{\{d': l_{d'}=l_d\}} Y_{d',i}}{\sum_{\{d': l_{d'}=l_d\}} \sum_i Y_{d',i}}, \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, I. \quad (2.66)$$

Con los valores estimados ahora se puede obtener el coeficiente de la autorregresión  $\hat{\beta}$  mediante regresión lineal y los estimadores  $\hat{\sigma}^2$  y  $\hat{\phi}^2$  se obtienen de la suma de cuadrados de los residuales de la regresión. Entonces ya se tienen los elementos para hacer una predicción de la distribución de las tasas de llegada y de las llegadas para los siguientes  $h$  días, desde el día  $D$  hasta el día  $D+h$ , las tasas de llegada predichas se denotará por  $\omega_{D,D+h}$  y de acuerdo con Gans et al. (2015) están caracterizadas por la siguiente proposición.

**Proposición 15** *La distribución de  $\omega_{D,D+h}$ ,  $h \geq 1$ , es normal con media  $\zeta_{D,D+h}$  y varianza  $\psi_{D,D+h}^2$ , donde*

$$\zeta_{D,D+h} = \widehat{\alpha}_{l_{D+h}} + \widehat{\beta}^h (\widehat{\omega}_D - \widehat{\alpha}_{l_D}) \quad \text{y} \quad \psi_{D,D+h}^2 = \widehat{\phi}^2 \sum_{d=0}^{h-1} \widehat{\beta}^{2d}. \quad (2.67)$$

### Pronóstico del personal para reducir abandonos

Con los pronósticos de las llamadas recibidas y de las tasas de llegada de las llamadas de los siguientes  $h$  días se tiene material para hacer un pronóstico para los siguientes  $h$  días sobre el personal del área de validación necesario para reducir los abandonos; dicha estimación se hará empleando programación lineal estocástica. Para facilitar el planteamiento del programa lineal es necesario hacer menos compleja a la variable aleatoria  $\omega_d$  u  $\omega_{D,D+h}$  por ello se hará un discretización de ésta reduciendo el soporte de la variable aleatoria a un conjunto discreto y finito, el procedimiento usado por Gans et al. (2015) se le conoce como cuadratura Gaussiana.

### Cuadratura Gaussina

Se considera un día cualquiera, así que se puede prescindir del índice  $d$  en  $\omega_d$ ,  $\vartheta_{l_d}$ ,  $\Lambda_{d,i}$  y dejarlos como  $\omega$ ,  $\vartheta_l$ ,  $\Lambda_i$ . De los resultados citados anteriormente puede suponerse que la tasa durante el  $i$ -ésimo lapso satisface

$$\Lambda_i = (\omega \vartheta_i)^2, \quad (2.68)$$

donde  $\omega \sim N(\zeta, \psi^2)$  y en el caso del pronóstico a partir del día  $D$  y hasta el día  $D+h$  se tiene  $\omega_{D,D+h} \sim N(\zeta_{D,D+h}, \psi_{D,D+h}^2)$ , entonces la distribución de  $\Lambda_i$  es analítica y es una variable aleatoria continua; para hacer más sencillo el trabajo se usa una aproximación discreta construyendo una variable aleatoria alternativa  $\omega^*$  para la cual  $\omega^* = \omega_k$  con probabilidad  $p_k$ ,  $k \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ , tal que  $\omega^*$  y  $\omega$  tienen iguales los primeros  $2K-1$  momentos.

Para entender el proceso de discretización sean  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $\mu_k = \mathbb{E}(Z^k)$  para  $k = 1, \dots, 2K-1$  sus primeros  $2K-1$  momentos y sea  $Z^*$  una variable aleatoria discreta tal que  $\mathbb{P}(Z^* = z_k) = r_k$ , para  $k = 1, \dots, K$ . Los primeros  $2K-1$  momentos de  $Z^*$  son

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \dots + r_k &= 1, \\ r_1 z_1 + r_2 z_2 + \dots + r_k z_k &= \mu_1, \\ r_1 z_1^2 + r_2 z_2^2 + \dots + r_k z_k^2 &= \mu_2, \\ r_1 z_1^3 + r_2 z_2^3 + \dots + r_k z_k^3 &= \mu_3, \\ &\vdots \\ r_1 z_1^{2K-1} + r_2 z_2^{2K-1} + \dots + r_k z_k^{2K-1} &= \mu_{2K-1}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

Sea  $q(z)$  un polinomio tal que

$$q(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_K) = \sum_{k=0}^K q_k z^k. \quad (2.70)$$

Obsérvese que  $q(z_k) = 0$  para  $k = 1, \dots, K$  y se impone  $q_K = 1$ . Ahora multiplicando la primera ecuación de (2.69) por  $q_0$ , la segunda por  $q_1$  y así hasta multiplicar la ecuación  $K+1$ -ésima y sumando estos productos se tiene

$$\sum_{k=0}^K q_k \mu_k = 0.$$

De forma similar la ecuación  $K + 2$ -ésima de (2.69) se multiplica por  $q_1$ , la ecuación  $K + 3$ -ésima por  $q_2$  y así hasta multiplicar la ecuación  $2K - 1$  por  $q_k$  y sumando estos productos se tiene

$$\sum_{k=0}^K q_k \mu_{k+1} = 0.$$

Tomando todo esto en consideración se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} q_0 + \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 + \cdots + \mu_{K-1} q_{K-1} &= -\mu_K, \\ \mu_1 q_0 + \mu_2 q_1 + \mu_3 q_2 + \cdots + \mu_K q_{K-1} &= -\mu_{K+1}, \\ \mu_2 q_0 + \mu_3 q_1 + \mu_4 q_2 + \cdots + \mu_{K+1} q_{K-1} &= -\mu_{K+2}, \\ &\vdots \\ \mu_{K-1} q_0 + \mu_K q_1 + \mu_{K+1} q_2 + \cdots + \mu_{2K-2} q_{K-1} &= -\mu_{2K-1}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

En este último sistema los coeficientes  $\mu_k$ ,  $k = 1, \dots, 2K - 1$ , son conocidos así que al resolverlo se obtienen  $q_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , obteniendo las raíces  $z_k$  del polinomio (2.70) y finalmente se soluciona el sistema (2.69) para obtener las probabilidades  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , así se completa el proceso de discretización de la variable aleatoria  $Z$ , es decir, se construyó una variable aleatoria  $Z^*$  que coincide con los primeros  $2K - 1$  momentos de  $Z$  y esto constituye la cuadratura de la variable aleatoria  $Z$ .

En el caso presente no se tienen variables aleatorias normales estándar pues  $\omega \sim N(\zeta, \phi^2)$  y  $\omega_{D,D+h} \sim N(\zeta_{D,D+h}, \phi_{D,D+h}^2)$ , pero estas variables aleatorias están relacionadas con una normal estándar mediante las transformaciones  $\omega = \zeta + \phi Z$  y  $\omega_{D,D+h} = \zeta + \phi_{D,D+h} Z$  y las discretizaciones serán

$$\begin{aligned} \omega^* &= \omega_k \text{ con probabilidad } p_k, & \text{donde } \omega_k &= \zeta + \phi z_k, \\ \omega_{D,D+h}^* &= \omega_k \text{ con probabilidad } p_k, & \text{donde } \omega_k &= \zeta_{D,D+h} + \phi_{D,D+h} z_k \end{aligned}$$

Si  $K = 1$ , se tiene  $p_1 = 1$  y la variable aleatoria  $Z^*$  es una degenerada, en tal caso se toma  $z_1 = \sqrt{\zeta^2 + \phi^2}$  en lugar de  $\zeta$  de lo contrario no se garantiza que la media corresponda para  $\Lambda_i$  pues  $\Lambda_i = (\omega \vartheta_i)$ .

Con la cuadratura hecha para algún  $K$  que sea conveniente, ahora Gans et al. (2015) propone a partir de (2.68) la relación

$$\Lambda_i^* = \lambda_{i,k} = \omega_k^2 \vartheta_i^2 \quad \text{con probabilidad } p_k, k \in \mathcal{K}. \quad (2.72)$$

## Programación lineal estocástica

Ahora siguiendo a Gans et al. (2015) y Mandelbaum y Zeltyn (2007) se establece un programa lineal estocástico para estimar el número de empleados en el área de validación.

Para el proceso de conteo de llamadas  $S_t$  en el intervalo  $i$  se propuso una tasa  $\lambda_{i,k}$  con probabilidad  $p_k$ , mientras que el proceso de servicio  $V_t$  tiene tiempos de atención exponencial de tasa  $\mu$  para cada servidor y el proceso de abandono  $A_t$  tiene tiempos de espera entre abandonos exponenciales de tasa  $\theta$ , si  $n_i$  es el número de operadores disponibles entonces bajo los supuestos hechos, la fracción de clientes potenciales que abandonan la cola antes ser atendidos en el área de

validación  $f(\lambda_i, \mu, \theta, n_i)$  según Mandelbaum y Zeltyn (2007) es:

$$f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, n_i) = \frac{1 + (\lambda_{i,k} - n_i\mu) E}{\epsilon + \lambda E}, \quad \text{donde}$$

$$E = \left( \frac{e^{\lambda_{i,k}/\theta}}{\theta} \right) \left( \frac{\theta}{\lambda_{i,k}} \right)^{\frac{n_i\mu}{\theta}} \gamma \left( \frac{n_i\mu}{\theta}, \frac{\lambda_{i,k}}{\theta} \right), \quad (2.73)$$

$$\epsilon = \frac{\sum_{j=0}^{n_i-1} (1/j!) (\lambda_{i,k}/\mu)^j}{1/(n_i-1)! (\lambda_{i,k}/\mu)^{n_i-1}}$$

Sea  $h$  el número de días durante los cuales se tendrá personal pronosticado, que para simplificar se supondrá que  $h = 1$ , aunque se pueden tener más días. Ahora suponga que es posible conocer y contar todos los horarios factibles para tener personal, entonces sea  $\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$  el conjunto que indexa todos los posibles horarios de trabajo. Para el intervalo  $i \in \mathcal{I}$  y el horario  $j \in \mathcal{J}$  sea

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el horario } j \in \mathcal{J} \text{ tiene un agente para contestar llamadas durante} \\ & \text{el intervalo } i \in \mathcal{I}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que señala si el horario  $j$  tiene agentes para responder en el lapso  $i$ . También sean  $x_j, c_j$  el número de agentes en el horario  $j$  y el costo de asignar un agente al horario  $j \in \mathcal{J}$  respectivamente, entonces las variable  $\{x_j \mid j \in \mathcal{J}\}$  serán sobre las que se tiene control. Para el lapso  $i$  el número de agentes disponibles en total será  $n_i = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{i,j} x_j$ , así el número esperado de clientes potenciales que abandonan durante el lapso  $i$  en el escenario  $k$  de la discretización de  $\omega$  es  $\lambda_{ik} f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, n_i)$ . Sea  $\alpha^*$  una cota superior del número promedio de abandonos durante el periodo de pronóstico, entonces se puede plantear un programa lineal estocástico para responder encontrar la cantidad de personal idónea.

$$\begin{aligned} & \text{mín } \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j x_j \\ \text{sujeto a } & \sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \lambda_{ik} f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{i,j} x_j) = \alpha_i, \quad i \in \mathcal{I} \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \leq \alpha^* \bar{\lambda} \\ & x_j \in \mathbb{Z}^+, \quad j \in \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde  $\bar{\lambda} = \sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_{i,k}$  es el número esperado de llegadas durante el tiempo pronosticado,  $\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \lambda_{ik} f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{i,j} x_j)$  es el número esperado de llamadas abandonadas en el lapso  $i$  y  $\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i$  es el número esperado de llamadas abandonadas durante todo el día.

También  $f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, n_i)$  puede ser no lineal con respecto de  $n_i$  causando que el programa estocástico (2.74) no sea simple de solucionar, afortunadamente Armony et al. (2009) mostró que si  $\mu \geq \theta$  entonces  $f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, n_i)$  es no creciente sobre  $n_i$  y con diferencias decrecientes (discretamente convexa). Gans et al. (2015) comenta que tener  $\mu \geq \theta$  es lo común y que una cota superior para  $\theta$  para un día se obtiene de sumar todas las llamadas abandonadas y dividirlo entre la suma de los tiempos de servicio de los que no abandonaron.

Entonces si  $\mu \geq \theta$  es posible usar una transformación para reemplazar la restricción no lineal con una serie de más restricciones lineales que proporcionan una cota inferior para  $f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, n_i)$ , así para cada  $i \in \mathcal{I}$  y  $n \in \mathbb{N}$  se definen la pendiente  $m_{i,n}$  y los interceptos  $b_{i,n}$  como:

$$\begin{aligned} m_{i,n} &= \sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \lambda_{i,k} [f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, n) - f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, n-1)], \\ b_{i,n} &= \sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \lambda_{i,k} f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, n) - n m_{i,n}, \end{aligned} \quad (2.75)$$



donde  $m_{i,0} = -\mu$  y  $b_{i,0} = \sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \lambda_{i,k}$ . Entonces las  $I$  restricciones que definen los  $\alpha_i$  en (2.74) son remplazadas con

$$\left( \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{i,j} x_{i,j} \right) m_{i,n} + b_{i,n} \leq \alpha_i, \quad n \in \mathcal{N}_i,$$

donde  $\mathcal{N}_i = \{0, \dots, N_i\}$  y  $N_i$  es suficientemente grande para que el conteo esperado de abandonos sea prácticamente 0, esto es,  $\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k \lambda_{i,k} f(\lambda_{i,k}, \mu, \theta, N_i) \approx 0$ . Así el programa estocástico (2.74) se transforma en el programa lineal (sin parte estocástica)

$$\begin{aligned} & \text{mín } \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j x_j \\ \text{sujeto a } & \left( \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{i,j} x_{i,j} \right) m_{i,n} + b_{i,n} \leq \alpha_i, \quad i \in \mathcal{I}, n \in \mathcal{N}_i \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \leq \alpha^* \lambda \\ & x_j \in \mathbb{Z}^+, \quad j \in \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

### Actualización del pronóstico

Con el pronóstico del personal requerido para los días  $D+1, \dots, D+h$ , si  $d \in \{D+1, \dots, D+h\}$ , ya han pasado los días  $D+1, \dots, d-1$  y para el día  $d$  se tiene la realización del proceso  $S^{(d)}$  en los lapsos  $1, \dots, \hat{i}$  se puede hacer una actualización del pronóstico con la información nueva. Para pronosticar el personal del día  $d$  se aplica el procedimiento antes descrito y este pronóstico también puede ser actualizado para los lapsos  $\hat{i}, \dots, I$  mediante técnicas de inferencia bayesiana. Entonces es necesario actualizar el pronóstico de las tasas de llegada  $\Lambda_{d,i}$  para  $i \in \{\hat{i}, \dots, I\}$  que equivale a actualizar  $\omega_d$  y  $\vartheta_{l_d,i}$  para  $i \in \{\hat{i}, \dots, I\}$  en el modelo autorregresivo (2.65), este se puede llevar a cabo gracias a los siguientes dos resultados derivados de inferencia Bayesiana.

**Proposición 16** *Si la distribución inicial para el día  $d$  es  $\omega_{d-1,d} \sim \mathbb{N}(\zeta_{d-1,d}, \psi_{d-1,d}^2)$  y en el día se han observado los conteos  $\{y_{d_i} \mid i \in \{\hat{i}, \dots, I\}\}$ . Sean*

$$\alpha_{\hat{i},d} = \sum_{i=1}^{\hat{i}} \vartheta_{l_d,i} y_{d,i} \quad \text{y} \quad \nu_{\hat{i},d} = \sum_{i=1}^{\hat{i}} \vartheta_{l_d,i}^2, \quad (2.77)$$

entonces la distribución posterior de  $\omega_{d,\hat{i},d}$  es normal con media  $\zeta_{d,\hat{i},d}$  y varianza  $\psi_{d,\hat{i},d}$ , donde

$$\begin{aligned} \zeta_{d,\hat{i},d} &= \frac{\psi_{d-1,d}^2 a_{d,\hat{i}} + \sigma^2 \zeta_{d-1,d}}{\psi_{d-1,d}^2 \nu_{d,\hat{i}} + \sigma^2}, \\ \psi_{d,\hat{i},d} &= \frac{\sigma^2 \psi_{d-1,d}^2}{\psi_{d-1,d}^2 \nu_{d,\hat{i}} + \sigma^2}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

**Proposición 17** *Dada la distribución posterior para el día  $d$ ,  $\omega_{d,d} \sim \mathbb{N}(\zeta_{d,d}, \psi_{d,d}^2)$ , la distribución inicial para el día  $d+1$  es  $\omega_{d,d+1} \sim \mathbb{N}(\zeta_{d,d+1}, \psi_{d,d+1}^2)$  con*

$$\begin{aligned} \zeta_{d,d+1} &= \alpha_{l_{d+1}} + \beta (\zeta_{d,d} - \alpha_{l_d}) \\ \psi_{d,d+1}^2 &= \beta^2 \psi_{d,d}^2 + \phi^2. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Con estos resultados al alcance se estiman de nuevo las entradas para (2.74) y (2.76), se hace la cuadratura nuevamente de  $\omega$  y se pronostica de nuevo el personal necesario con el programa lineal.

## 2.4. Objetivos

Con los antecedentes establecidos ahora se expresan los objetivos de este trabajo.

### Objetivo general

Identificar y estimar un modelo predictivo para el comportamiento del número de llamadas transferidas al área de validación.

### Objetivos particulares

1. Identificar y estimar un modelo de series de tiempo SARIMA para predecir el número de llamadas transferidas al área de validación.
2. Procesar los datos de acuerdo al modelo de Shen y Huang (2008), identificar si es adecuado para el registro del número de llamadas transferidas al área de validación y estimar el modelo.
3. Comparar los modelos de series de tiempo SARIMA y el de Shen y Huang (2008) estimados.

# Capítulo 3

## Descripción del problema

### 3.1. Perspectivas del problema

En el capítulo 1 se describió de manera sintética el centro de llamadas de interés y el problema que presenta, ahora se ofrece una descripción más completa del sistema que lo constituye bajo la perspectiva del administrador y otra bajo la óptica de un matemático considerando al centro de llamadas como un sistema.

#### 3.1.1. Modelo administrativo

La Figura 3.1 es un diagrama de la forma en que son procesadas las llamadas en el centro de llamadas desde la perspectiva de su administrador. La idea es que existe un producto que se desea ofrecer por medio de llamadas a clientes potenciales, entonces en primera instancia hay un marcador automático que extrae un número telefónico de un directorio, en ese momento hay  $m$  agentes de ventas trabajando y si alguno indica que está disponible, automáticamente se marca el número y cuando la llamada es respondida por un cliente potencial esta es transferida a un agente en el área de labor de ventas. En este paso el agente expone el producto; sus cualidades, ventajas y resuelve las dudas que el cliente potencial pueda presentar. El tiempo que requiere la labor de venta es aleatorio y muy variable ya que depende de las características del cliente potencial y el operador de ventas, la etapa termina cuando el cliente potencial decide adquirir o rechazar el producto. Si el cliente potencial rechazó el producto se registra el rechazo y se finaliza la llamada, si en cambio decide adquirir el producto se hace un registro de la venta y la llamada es transferida al área de validación. Si algún agente de validación está disponible la llamada es atendida inmediatamente, en caso contrario la llamada entra a una fila de espera donde se quedará hasta que los  $l - 1$  clientes potenciales que están adelante sean atendidos o abandonen la llamada y un operador de validación se encuentre disponible. Esencialmente se trata de una fila donde se atiende primero al primero que llega, sin embargo, los clientes en ella pueden abandonar la llamada mientras esperan. En el área de validación hay  $n$  agentes de validación, su trabajo es validar los datos de los clientes potenciales, entre los aspectos que verifican se encuentran los datos bancarios y si el cliente realmente puede adquirir el producto. La validación es un proceso más homogéneo; a todos los clientes se les solicitan los mismos datos, aunque el tiempo de validación es aleatorio pero menos variable que el tiempo en la labor de ventas. Al final de la validación se registra que la llamada completó el proceso de validación y entonces la compra del producto puede ser rechazada o aprobada, en ambos casos se realiza un registro y se finaliza la llamada.

El administrador del centro de llamadas desea que todas las llamadas de los clientes potenciales

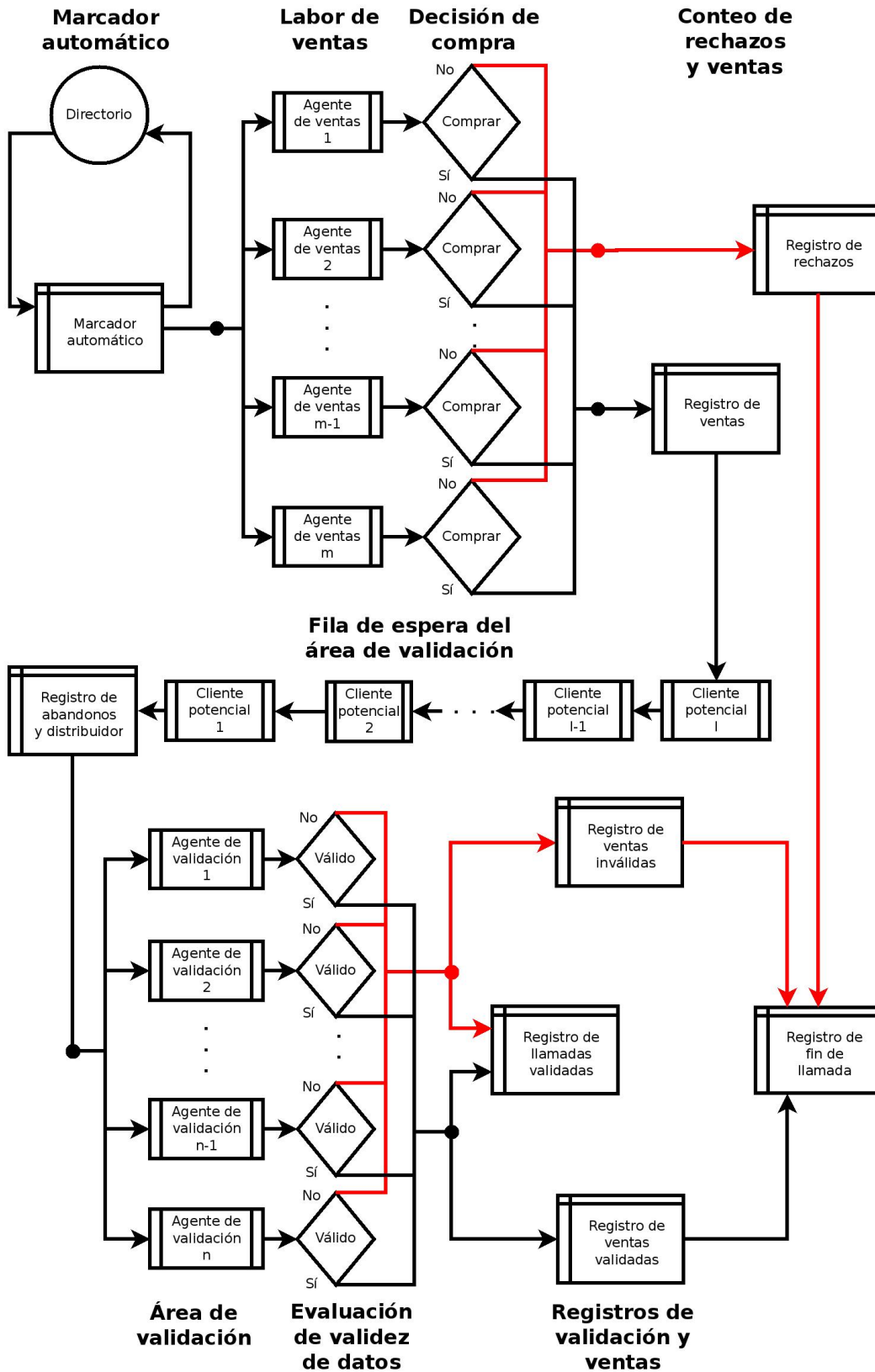


Figura 3.1: Diagrama del centro de llamadas desde la perspectiva del administrador.

que decidieron adquirir el producto o servicio completan la etapa de validación pues significa que concretarán más ventas y eso se traduce en ganancias para el centro de llamadas pues cada venta que realizan significa una comisión que les paga el proveedor del producto o servicio. Para que el centro de llamadas sea rentable el número de agentes de validación debe ser menor que el número de agentes de ventas, es decir  $n < m$ , esto repercute en que en ciertos momentos del día el área de validación se satura y el tiempo de espera para los clientes en la fila se hace muy largo y algunos abandonan la llamada.

Para evitar el abandono de los clientes en la fila lo único que puede hacer el administrador es cambiar el número de agentes de validación, sin embargo, cuando esto sucede ya han ocurrido muchos abandonos. Además el administrador no se puede dar el lujo de tener agentes de validación desocupados, lo idóneo sería contar con un pronóstico de cómo serán las ventas a lo largo del día para planear cómo deben distribuirse los agentes de validación en el día.

### 3.1.2. Modelo matemático

La Figura 3.1 es un diagrama de la forma en que son procesadas las llamadas en el centro de llamadas desde la perspectiva de un matemático modelándolo como un sistema.

Dados un día  $d$  y un tiempo  $t$ , la combinación del marcador automático y el área de labor de ventas se puede considerar como una cola  $G/G/m$ , mientras que la combinación de la fila de espera para entrar al área de validación y el área de validación se puede considerar como una cola  $G/G/n + G$ , es decir una cola con una fila con abandono y  $n$  servidores.

El marcador automático genera la fila de donde llegan los clientes mientras que en el área de labor de ventas cada agente es un servidor, así que está constituida por  $m$  servidores. El agente de ventas usa todas las habilidades comunicativas que tiene para presentar al cliente las características y bondades del producto que promociona para que adquiera el producto. Es razonable considerar que los vendedores no son homogéneos, cada agente de ventas se representa en el diagrama  $\lambda_{i,t}^{(d)}$ , para  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Al final de la labor de ventas el cliente decide si adquiere o no el producto, si lo rechaza se registra que no desea el producto y se finaliza la llamada, pero si acepta adquirir el producto entonces el proceso  $S_t^{(d)}$  incrementa en una unidad. El proceso de conteo  $\left\{S_t^{(d)}\right\}_{t \geq 0}$  cuenta los clientes potenciales que aceptaron adquirir el producto hasta el tiempo  $t$  en el día  $d$ ;  $S$  es por *sales*, ventas en inglés.

Luego la llamada es transferida al área de validación, entra a una fila de espera que será la fila de espera de la otra cola. Si hay operadores de validación disponibles y nadie en la fila la llamada es transferida inmediatamente, en caso contrario el cliente potencial deberá esperar. Los clientes tienen cierta tolerancia para esperar que sean atendidos en el área de validación, el tiempo que están dispuestos a esperar antes de colgar es aleatorio y tiene cierta distribución, cada cliente formado en la fila será representado como  $\theta_{i,t}^{(d)}$  para  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Al final de la fila de espera, antes de que las llamadas entren al área de validación se tiene el proceso  $\left\{A_t^{(d)}\right\}_{t \geq 0}$  que cuenta el número de abandonos en la fila de espera hasta el tiempo  $t$  en el día  $d$ .

El área de validación está constituida por  $n$  agentes que serán representados por  $\mu_{i,t}^{(d)}$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , al final de la validación la venta es aprobada o rechazada, si es rechazada se hace el registro y la llamada termina, si la venta es aprobada la venta se registra y la llamada termina, en ambos casos el proceso  $\left\{V_t^{(d)}\right\}_{t \geq 0}$  cuenta el número de llamadas que completaron la validación hasta el tiempo  $t$  en el día  $d$ .

Este centro de llamadas es un sistema con dos colas en serie con multiservidores, la primera

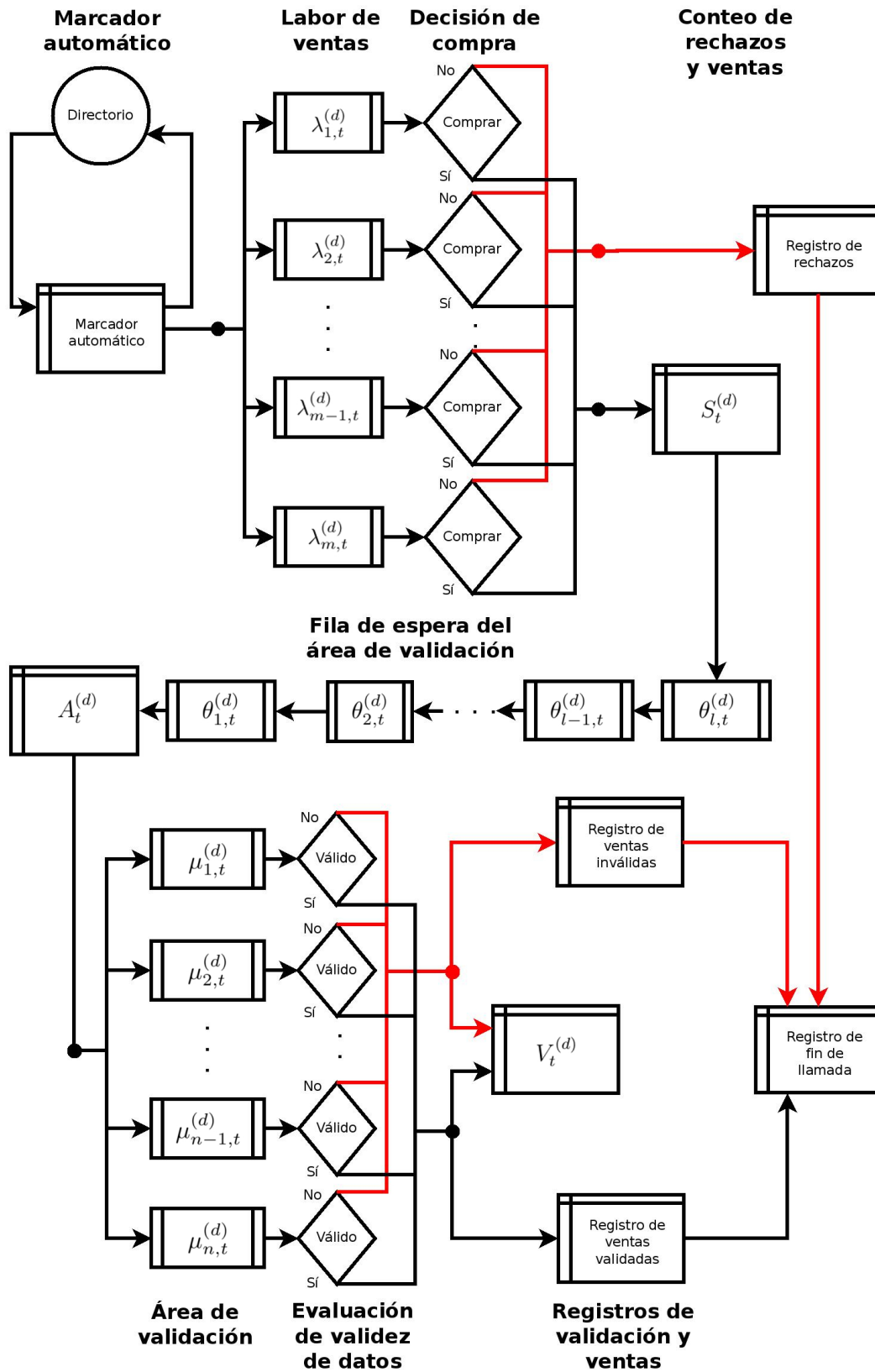


Figura 3.2: Diagrama del centro de llamadas desde la perspectiva de un matemático modelándolo como un sistema.

cola es  $G/G/m$  y la segunda es  $G/G/n + G$ , de ahí la idea de que es un centro de llamadas de dos etapas.

## 3.2. La base de datos

En el centro de llamadas se trabaja de lunes a sábado. De lunes a viernes las operaciones telefónicas se realizan entre las 9:00 y las 19:00 horas y los sábados las operaciones se realizan entre las 9:00 y las 14:00 horas, en ambos casos se suele extender el periodo ligeramente para terminar de realizar validaciones.

Para abordar este problema se cuenta con dos grandes series de datos, la primera contiene registros del 22 diciembre de 2014 al 30 de junio de 2015, excluyendo los días 24, 25 de diciembre de 2014, 1 de enero, 2 de febrero, 16 de marzo, 3, 4 de abril, 1, 2, 16 y 30 de mayo de 2015 por ser festivos y la semana comprendida entre el 16 y el 22 de abril de 2015 por causas desconocidas.

El periodo laboral diario es dividido en lapsos de 15 minutos, en cada lapso se tienen los siguientes datos: campaña (hay dos campañas, cada una ofrece un producto), número de llamadas transferidas al área de validación, número de llamadas contestadas en el área de validación, porcentaje de llamadas transferidas exitosamente, tiempo promedio de abandono durante la espera en la fila para entrar al área de validación, tiempo promedio que tardan en contestar, tiempo promedio de validación, tiempo promedio que una llamada pasa en el área de labor de ventas y el área de validación sin considerar el tiempo de espera, número de llamadas abandonadas con tiempos mayores a 10 segundos, tiempo promedio total de una llamada considerando labor de ventas, espera en la fila para entrar a validación y validación, tiempo promedio en espera. Hay más registros, pero estos son los más relevante.

Esta base de datos es el típico reporte de un centro de llamadas, donde no se guarda información de llamada por llamada, ello hace más complejo realizar inferencia al respecto del sistema (Shen, 2010).

La otra base de datos que se cuenta son registros de llamada por llamada de los meses de abril, mayo y junio de 2015. Este registro contienen un número de identificación de la llamada, claves de los agentes de ventas y de validación, hora de inicio de labor de ventas, hora de transferencia a área de validación, hora de inicio de validación y hora de final de validación, tiempo de labor de ventas, tiempo de espera, campaña, producto, tipo de agente de ventas, tipo de agente de validación, entre otros. Este tipo de registro es más útil para poder hacer inferencia. Es poco común que un centro de llamadas conserve este tipo de datos tan completos, esto ha sido parte de lo que ha hecho que los trabajos de estimación de personal sean complejos, pero desafortunadamente para este caso no se cuenta con datos sobre el tiempo de abandono de las llamadas que fueron terminadas durante el tiempo de espera antes de entrar al área de validación. También es importante notar que no se cuenta con información de cuántos operadores de ventas y operadores de validación hay en cada lapso, pero éstos se pueden inferir para los periodos de abril a junio de 2015 usando los identificadores de los operadores.

Es importante mencionar que en este centro de llamadas se tienen dos campañas, es decir, dos productos diferentes. Dado que el centro de llamadas dedicó más recursos a la primera campaña, particularmente un mayor número de agentes de ventas será considerada sólo la primera campaña.

### **3.3. Un centro de llamadas inbound dentro de un centro de llamadas outbound y el modelo de Shen y Gans**

Los administradores del centro de llamadas consideran que se trata de un centro de llamadas outbound y no va más allá de ello, pero al observarlo detenidamente se puede apreciar que el marcador automático y el área de labor de ventas forman por sí solos un centro de llamadas outbound, mientras que la fila de espera y el área de validación se pueden considerar como otro centro de llamadas, un centro de llamadas inbound.

Así se tiene un centro de llamadas inbound dentro de un centro de llamadas outbound, donde el outbound opera a su máxima capacidad. Entonces el problema de encontrar el número óptimo de agentes de validación para reducir los abandonos con el tipo de reportes de datos disponible es el mismo problema que se expone en Gans et al. (2015) y Shen y Huang (2008), donde además se aporta una solución. Dicho problema y solución fueron expuesto en el capítulo 2.

El centro de llamadas abordado en esta tesis opera de lunes a viernes de 9:00 a 19:00, es decir 10 horas o bien, 600 minutos. Se puede considerar que opera en el periodo  $[0, 600]$  cuyos lapsos de 15 minutos son 40 mientras que los sábados opera de 9:00 a 14:00 horas, es decir, en el periodo  $[0, 300]$  cuyos lapsos de 15 minutos son 20.



# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Análisis descriptivo de la base de datos

En la estadística y las matemáticas aplicadas existe una máxima que dice “si a un modelo le introduces basura vas a obtener basura,” esto significa que el desempeño de un modelo está subordinado a la calidad de los datos que se le introducen, así que antes de iniciar la estimación de un modelo es necesario garantizar que los datos son fiables, esto es particularmente vital cuando los datos no se obtuvieron de primera mano.

Todos los análisis y procesamiento de datos hechos en este trabajo se realizaron con el lenguaje de programación especializado en estadística R y particularmente para el análisis de series de tiempo se usó el paquete *Applied Statistical Time Series Analysis* (ASTSA) versión 1.7, auxiliarmente para la edición de la base de datos se usó el editor de hoja de cálculo Libre Office Calc.

Este trabajo partió de la base de datos de los reportes que dividen al día en lapsos de 15 minutos, en un principio constaba de 17,458 datos multivariados con 12 entradas de interés cada uno, es decir, 209,472 datos simples; una cantidad considerable. En un principio se comenzó con el análisis descriptivo de la base de datos y al ir avanzando aparecieron ciertas inconsistencias que mostraban que este centro de llamadas se alejaba del comportamiento típico que reportan los artículos, particularmente alejándose de un comportamiento con media estacionaria. Al inicio se consideró que se trataba de un caso diferente a lo reportado en la literatura, pero al realizar un cuidadoso análisis de la base de datos se descubrió que había 5,345 datos multivariados duplicados. Se suprimieron estos datos y la base corregida resultó de 12,111 datos multivariados de dimensión 12, reduciendo la base de datos en aproximadamente 30%. Este error debió ser ocasionado por una mala transferencia de la base de datos original, no resultó simple descubrirlo, fue una tarea muy laboriosa, que requirió mucho tiempo.

En el centro de llamadas se tienen dos campañas, es decir, se ofrecen dos productos, pero por practicidad sólo se consideró una campaña; el análisis descriptivo y en general los métodos sólo aplicaron a la campaña 1.

Sea  $\gamma_{d,i}$  es el número de llamadas transferidas al área de validación en el día  $d \in \{1, \dots, D\}$  (más adelante se establecerá el valor de  $D$ ) durante el lapso  $i$  de 15 minutos, para  $i = 1, 2, \dots, 40$  si el día es entre semana, es decir si  $l_d = 0, 1, 2, 3, 4$  o  $i$ , para  $i = 1, 2, \dots, 20$  si el día es entre sábado, es decir si  $l_d = 5$  y los lapsos 1, 20, 40 corresponden a los periodos de tiempo 9:00-9:15 horas, 13:45 - 14:00 horas, 18:45 - 19:00, respectivamente.

En la Figura 4.1 se muestran las series de tiempo encimadas de los conteos  $\gamma_{d,i}$  a largo del día de la semana comprendida entre el lunes 9 y el sábado 14 de febrero de 2015, estos datos no son

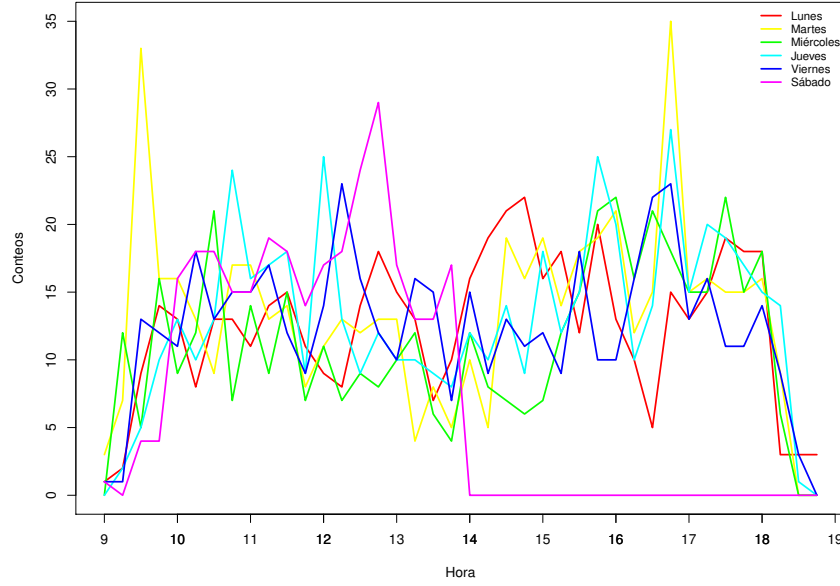


Figura 4.1: Gráfica de conteos por lapso de las llamadas transferidas al área de validación de la semana del lunes 9 al sábado 14 de febrero de 2015.

continuos, pero para facilitar la visualización se grafican como líneas. La Figura 4.2 muestra la serie de tiempo de los conteos a largo del día en las dos semanas comprendidas entre el lunes 9 y el sábado 21 de febrero de 2015; a este tipo de gráfico les suelen llamar “stack graph” o “Joyplot”, la serie de tiempo inferior corresponde al 14 de febrero y la serie de tiempo superior al 21 de febrero. Ambos gráficos muestran que los conteos  $\gamma_{d,i}$  son muy variables, que los días de lunes a viernes mantienen un patrón similar, mientras que los sábados donde se labora sólo de 9 a 14 horas hay un patrón diferente.

Los administradores del centro de llamadas comentaron que el comportamiento del centro de llamadas es similar entre los mismos días de la semana, es decir en el conjunto  $\{d' \in \{1, \dots, D\} : l_{d'} = l_d\}$ , por ejemplo todos los días martes el centro de llamadas tiene patrones similares, así que se puede considerar que el centro de llamadas tiene un comportamiento estacional.

Para explorar el comportamiento estacional en la Figura 4.3 se muestran todas las series de tiempo, pero encimándolas por día de la semana. De esas gráficas se observa que el sábado es un día que cualitativamente es muy diferente a los demás debido a que opera menos tiempo y los demás días tienen un comportamiento más similar entre sí. También alcanza a relucir que entre diferentes días de la semana hay patrones ligeramente diferentes o más dispersos, por ejemplo los lunes entre las 9 y 11 horas son menos dispersos que los miércoles en esa mismo horario, o los martes se ven más dispersos que los miércoles entre las 16 y 18 horas. Entonces sí es razonable considerar la que existe estacionalidad semanal como afirman los administradores. Para cristalizar los argumentos anteriores en la Figura 4.4a se muestran las series de tiempo de los promedios de los conteos entre los mismos días de la semana, esto es,

$$\bar{\gamma}_{l_d,i} = \frac{\sum_{\{d' \in \{1, \dots, D\} : l_{d'} = l_d\}} \gamma_{d',i}}{|\{d' \in \{1, \dots, D\} : l_{d'} = l_d\}|},$$

de estas gráficas se puede concluir que en general los días entre semana tienen un patrón más similar entre sí que con los sábados, pero que observando detenidamente los promedios de los días

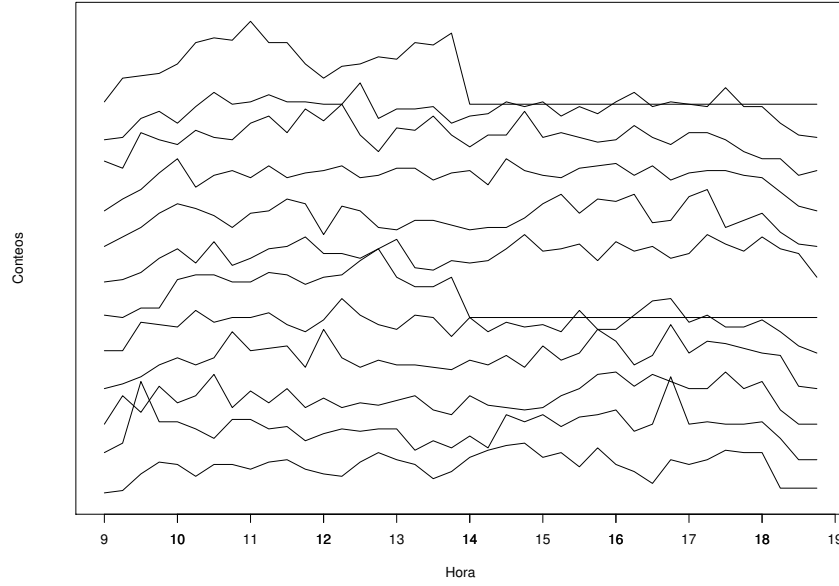


Figura 4.2: Gráfica apilada de conteos  $\gamma_{d,i}$  por lapso de las llamadas transferidas al área de validación de las dos semanas comprendidas entre el lunes 9 y el sábado 21 de febrero de 2015.

entre semana tienen un patrón ligeramente diferente, por ejemplo el promedio de los viernes queda por debajo de todos los demás días entre las 17 y 19 horas, lo cual es razonable considerando que en el país muchas personas dedican las tardes del viernes al ocio, eso dificulta que una llamada sea atendida. Por otra parte la Figura 4.4b muestra las series de tiempo de las desviaciones estándar de los conteos entre los mismos días de la semana, esto es,

$$S(\gamma_{l_d,i}) = \sqrt{\frac{\sum_{\{d' \in \{1, \dots, D\} : l_{d'} = l_d\}} (\gamma_{d',i} - \bar{\gamma}_{d,i})^2}{|\{d' \in \{1, \dots, D\} : l_{d'} = l_d\}| - 1}}$$

Ahí se puede apreciar que no son homogéneas a lo largo del día, entre diferentes días de la semana tampoco son iguales, pero se mantienen en valores dentro del intervalo [3, 6].

Estas observaciones resultan similares a las hechas en Gans et al. (2015) y Shen y Huang (2008) cuando reportan el análisis exploratorio de los datos de los centros de llamadas que trabajaron, esto también da indicio de que podría ser razonable considerar el modelo (2.65) y realizar las transformaciones de los conteos por lapso  $Y_{d,i} = \sqrt{\gamma_{i,d} + 1/4}$ . Cuando se hagan referencias a esta transformación se dirá que los datos están en la escala de la raíz.

Las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 son equivalentes a las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3, respectivamente, pero en escala de la raíz; la transformación desde el punto de vista de series de tiempo deja intacto el efecto estacional semanal, pero reduce drásticamente la variabilidad absoluta de la serie a lo largo del día, esto particularmente se observa al considerar que las gráficas en las Figuras 4.2 y 4.6 están en la misma escala, pero al observar las Figuras 4.8a y 4.8b se aprecia que la transformación hace algo más, pues en su escala actual se observa que las series de tiempo de las medias por días de la semana se encuentran más cercanas y las series de tiempo de las desviaciones estándar en secciones donde eran más grande se redujeron relativamente y donde eran más pequeñas aumentaron relativamente, dejando las variabilidad más estacionarizadas y más similares entre sí.

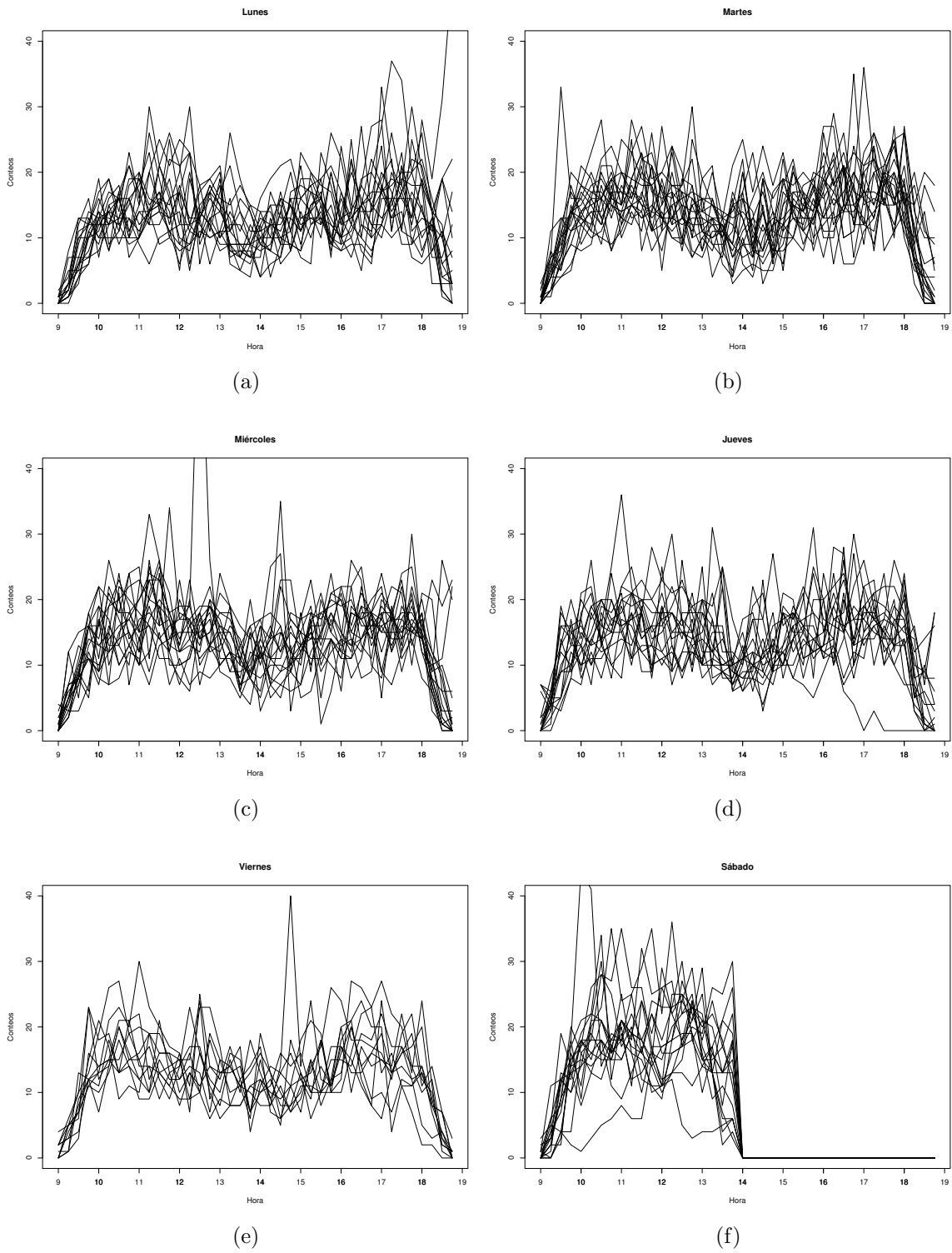
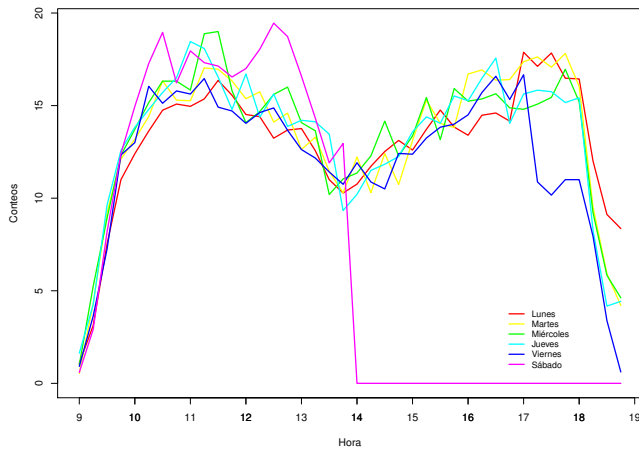
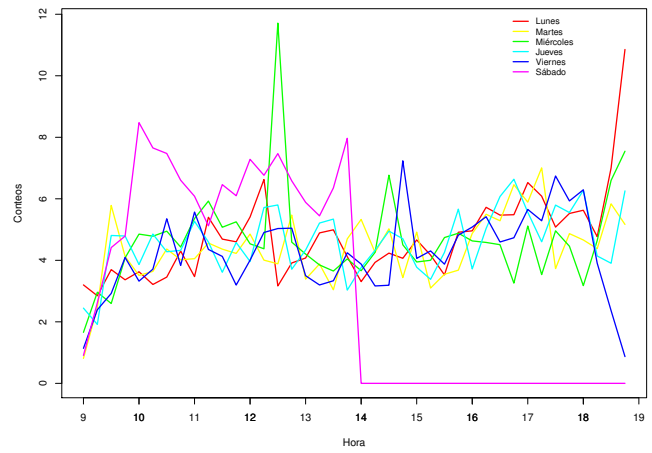


Figura 4.3: Las gráficas corresponden a las series de tiempo de los conteos  $\gamma_{d,i}$  a lo largo del día encimadas por cada día de la semana.



(a)



(b)

Figura 4.4: La Figura 4.4a son la medias de los conteos dejando fijos día de la semana y lapso y la Figura 4.4b son las desviaciones estándar de los conteos dejando fijos día de la semana y lapso.

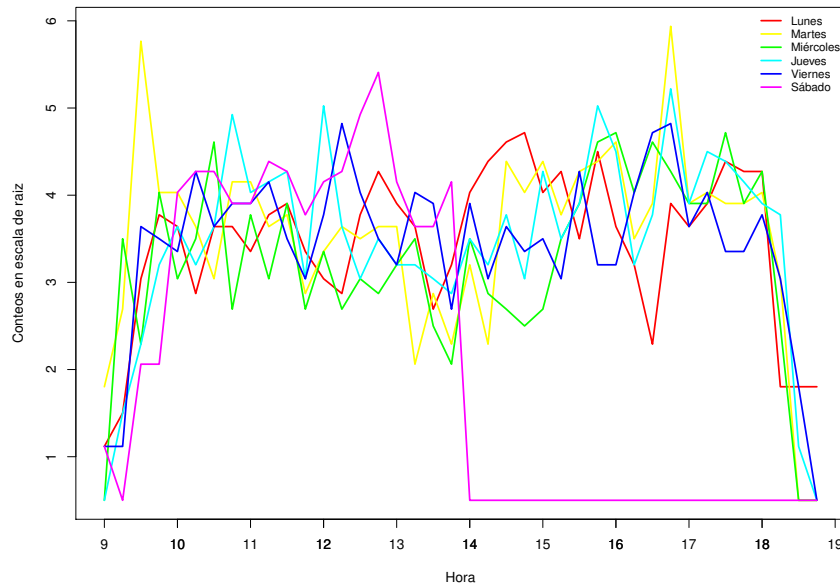


Figura 4.5: Gráfica de conteos por lapso en escala de la raíz de las llamadas transferidas al área de validación de la semana del lunes 9 al sábado 14 de febrero de 2015.

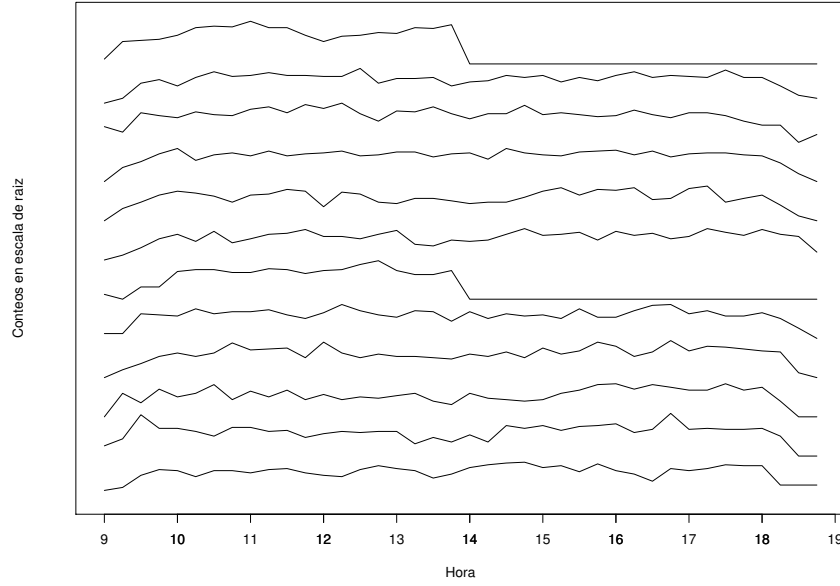


Figura 4.6: Gráfica apilada de conteos  $Y_{d,i}$  por lapso en escala de la raíz de las llamadas transferidas al área de validación de las dos semanas comprendidas entre el lunes 9 y el sábado 21 de febrero de 2015.

Todos estas observaciones dan evidencia de que se pueden proseguir con el modelo (2.65), entonces recordando la descripción del centro de llamadas desde el punto de vista matemático del capítulo 3 se consideran tres procesos involucrados:

$\left\{ S_t^{(d)} \right\}_{t \geq 0}$  : cuenta los potenciales clientes que aceptaron adquirir el producto hasta el tiempo hasta el tiempo  $t$  en el día  $d$ ,

$\left\{ A_t^{(d)} \right\}_{t \geq 0}$  : cuenta el número de abandonos en la fila de espera hasta el tiempo  $t$  en el día  $d$ ,

$\left\{ V_t^{(d)} \right\}_{t \geq 0}$  : cuenta el número de llamadas que completaron la validación hasta el tiempo  $t$  en el día  $d$ .

Estos procesos serán los mismos que se presentan para construir el modelo (2.65).

## 4.2. Modelo SARIMA

Por las similitud cualitativa de los conteos de lunes a viernes se encontrará un modelo exclusivo para estos días excluyendo el sábado siguiendo (2.65).

Recordando lo comentado en la descripción de la base de datos en el capítulo 3 hay días completos sin registro porque fueron feriados u alguna otra razón, a un día con registros de esta naturaleza se les llamará *cero estructural*. En Shen y Huang (2008) se comenta que las semanas con ceros estructurales deben ser excluidas.

En la base de datos son ceros estructurales los días 24, 25 de diciembre de 2014, 1 de enero, 2 de febrero, 16 de marzo, 3, 4 de abril, 1, 2, 16 y 30 de mayo de 2015 y la semana comprendida

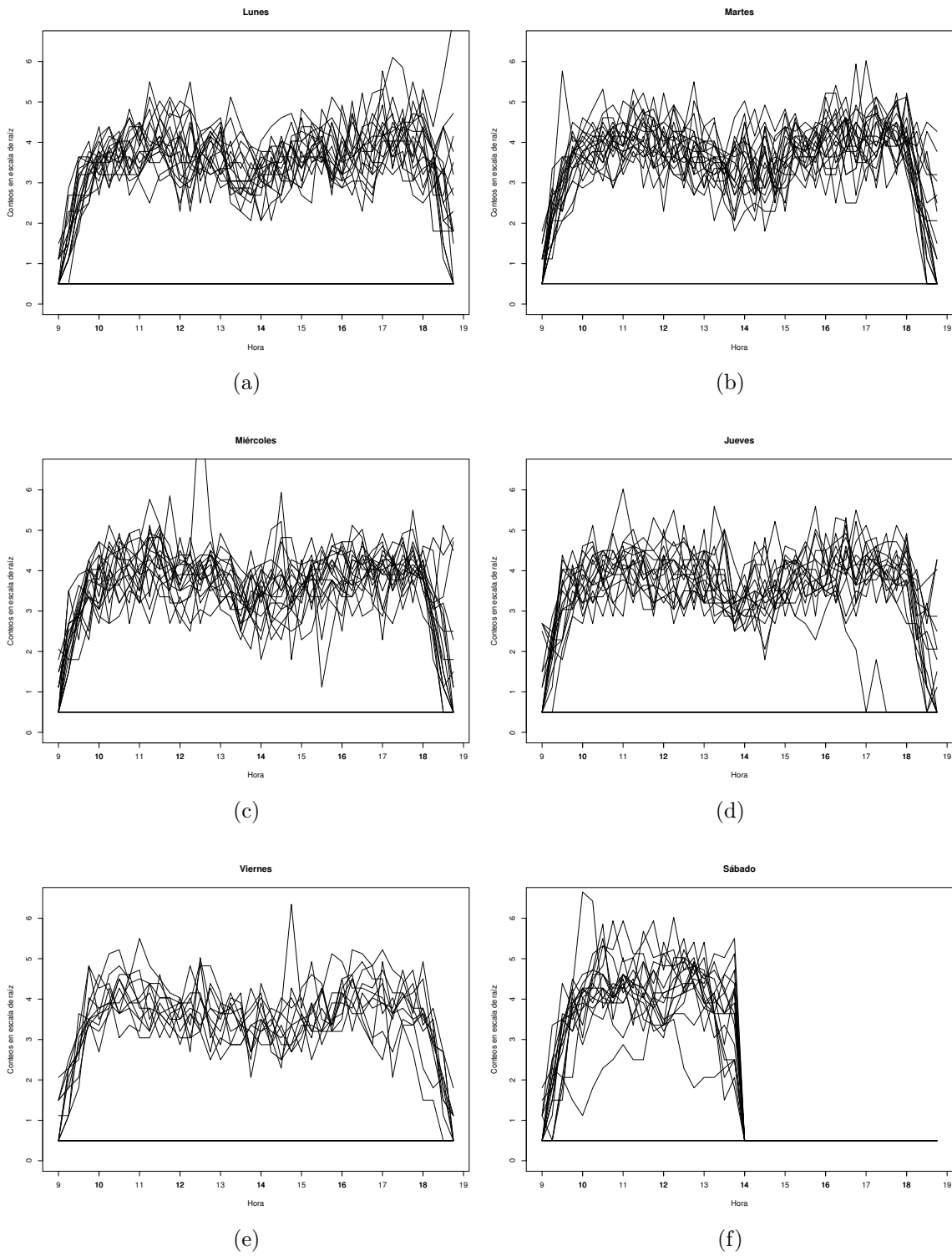


Figura 4.7: Las gráficas corresponden a las series de tiempo de los conteos  $Y_{d,i}$  a lo largo del día encimadas por cada día de la semana.

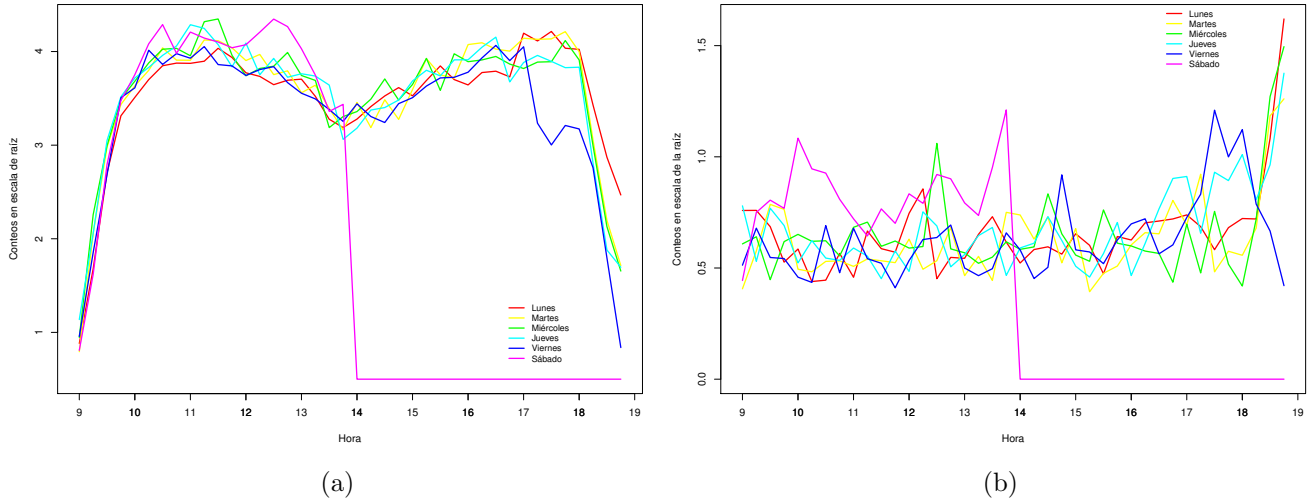


Figura 4.8: La Figura 4.8a son la medias de los conteos en escala de la raíz dejando fijos día de la semana y lapso y la Figura 4.8b son las desviaciones estándar de los conteos es escala de la raíz dejando fijos día de la semana y lapso.

entre el 16 y el 22 de abril de 2015. Si esto se se sigue al pie de la letra serán excluidas 10 semanas con ceros estructurales, es decir dos meses y medio, cantidad considerable de registros. Entonces para minimizar la exclusión de registros como la semana con ceros estructurales entre el 16 y el 22 de abril de 2015 comienza en jueves y termina en miércoles, se excluyen directamente estos días, mientras que para los otros se toman en cuenta dos estrategias:

1. Se excluyen siete semanas, éstas son las que contienen los días 24, 25 de diciembre de 2014, 1 de enero, 2 de febrero, 16 de marzo, 3, 4 de abril, 1, 2 de mayo de 2015. Las semanas con el 16 y 30 de mayo no son excluidas porque éstos días son sábado y el modelo es para días entre semana. A Esta estrategia se le identificará como “excluir ceros estructurales”.
2. Se excluyen las dos primeras semanas que tienen los días 24, 25 de diciembre de 2014 y 1 de enero de 2015. Considerando el efecto estacional semanal y que también debe haber un efecto estacional por lapso se calculan las medias de los conteos en el mismo lapso de los días anteriores al cero estructural que tienen el mismo día de la semana (se incluyen los sábados), es decir,

$$\hat{\gamma}_{d,i} = \frac{\sum_{\{d': l_{d'}=l_d, d' < d\}} \gamma_{d',i}}{|\{d' : l_{d'} = l_d, d' < d\}|} \quad (4.1)$$

y se imputa el cero estructural con esta estimación. A esta estrategia se le identificará como “imputar ceros estructurales”

En ambas estrategias se excluyen las dos primeras semanas para que tengan un inicio homogéneo pues en la segunda estrategia para calcular las medias son necesarios datos de días previos que coincidan en el día de la semana, pero el 25 de diciembre y el 1 de enero son el mismo día de la semana, lo que hace imposible estimar una media que no sea cero. Ahora se analizará qué sucede con el modelo en cada estrategia.

Al realizar la estimación del modelo para ambas estrategias se considerarán los datos comprendidos hasta el 20 de junio de 2015 para realizar pronósticos y comparar con estos datos excluidos, así el



número de días para la estrategia de excluir ceros estructurales es  $D = 95$ , mientras que para la estrategia de imputar ceros estructurales es  $D = 115$ .

Para continuar con el modelo (2.65) se establece la serie de tiempo

$$\widehat{\omega}_d = \sum_i Y_{d,i}, \quad (4.2)$$

En ese modelo es la tasa total de llegadas para el día  $d$  (en la escala de raíz cuadrada como la de  $Y_{d,i}$ ) u observando la forma en que se estima se puede considerar que son los conteos acumulados en ese día en la escala de la raíz. Si  $\alpha_{l_d}$  son los promedios de los conteos acumulados en la escala de la raíz por día de la semana, se tiene

$$\widehat{\alpha}_{l_d} = \frac{\sum_{\{d': l_{d'} = l_d\}} \sum_i Y_{d',i}}{|\{d' : l_{d'} = l_d\}|}. \quad (4.3)$$

Para los centros de llamadas estudiados en Gans et al. (2015) y Shen y Huang (2008) se reporta que  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d} \sim \text{AR}(1)$ , eso no necesariamente se cumple para los datos que ahora se tienen así que lo más conveniente es ver de primera mano qué sucede con  $\widehat{\omega}_d$  y  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$ .

Se identificará qué tipo de modelos siguen  $\widehat{\omega}_d$  y  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  para concluir si es adecuado emplear el modelo de tasas ocultas (2.65).

Cuando a  $\widehat{\omega}_d$  se le resta  $\widehat{\alpha}_{l_d}$  se está estacionarizando la serie de tiempo de una forma un tanto de primitiva al quitar una tendencia estacional, regularmente esto se hace usando un modelo SARIMA. Además es importante mencionar que en los artículos no se reporta qué sucede con  $\widehat{\omega}_d$  por sí sola, así que esto es una interesante tarea.

### 4.2.1. Excluir ceros estructurales

Las series de tiempo resultado de excluir ceros estructurales se pueden apreciar en la Figura 4.9, la serie de tiempo de conteos totales  $S_T^{(d)}$  está en el panel superior, la serie de tiempo de conteos en escala de la raíz totales  $\widehat{\omega}_d$  está en el panel central y la serie de tiempo de conteos en escala de la raíz totales centrados  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  está en el panel inferior.

La serie de tiempo  $\widehat{\omega}_d$  corre alrededor del valor 140 y  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  está centrada alrededor de 0. Se puede considerar en ambos casos que la media no depende del tiempo y está estacionarizada, mientras que en el caso de la varianza es un tanto complejo comprobar el supuesto de estacionaridad, se tomará como cierto, este es un supuesto fuerte.

#### Identificar modelo para $\widehat{\omega}_d$

Para identificar qué modelo es más adecuado son usadas las funciones de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF). En la Figura 4.10a se muestran para la serie de tiempo  $\widehat{\omega}_d$ . Si se observan detenidamente se notará en ambas que cada cinco días hay un patrón que perdura, particularmente en la ACF confirmando que el patrón estacional debido a los días de la semana sí existe como afirmaron los administradores.

Para continuar buscando el patrón se eliminará el efecto estacional obteniendo  $\nabla_5 \widehat{\omega}_d = \widehat{\omega}_d - \widehat{\omega}_{d-5}$ , que es la diferencia de primer orden uno con retraso cinco. En la Figura 4.10c se muestran las ACF y PACF de  $\nabla_5 \widehat{\omega}_d$ , pero sólo incluyendo lo que sucede cada cinco unidades de tiempo, en estas gráficas se muestra evidente que la parte estacional sigue un modelo de MA(1) debido a que la ACF se corta después del tiempo  $1 \times 5$ , mientras que la PACF desaparece paulatinamente después del tiempo  $1 \times 5$ .

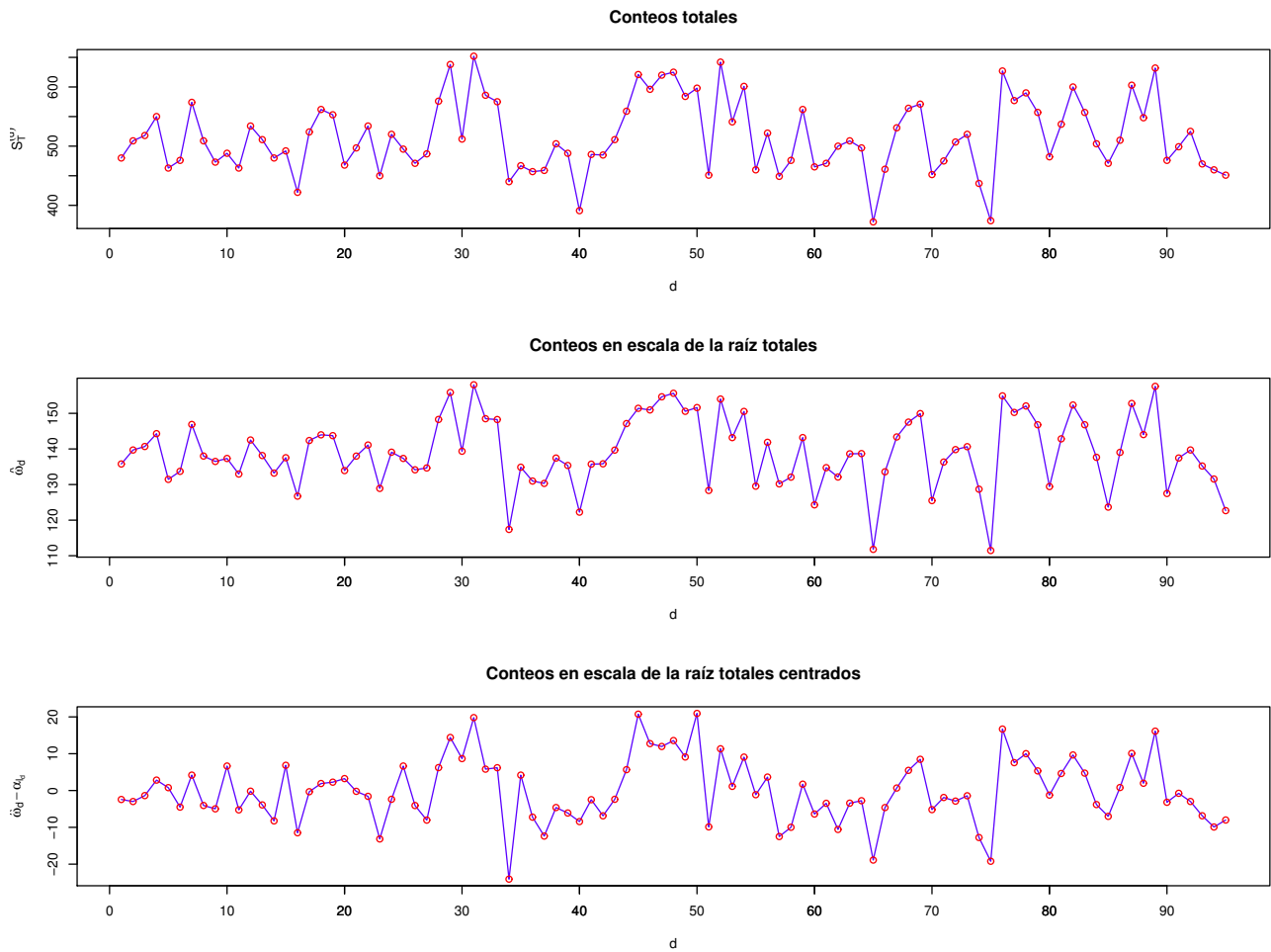


Figura 4.9: Serie de tiempo de conteos totales  $S_T^{(d)}$ , serie de tiempo de conteos en escala de la raíz totales  $\hat{\omega}_d$  y serie de tiempo de conteos en escala de la raíz totales centrados  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_{l_d}$  bajo la estrategia de eliminar ceros estructurales.

Por otra parte la Figura 4.10b muestra las ACF y PACF de  $\nabla_5 \widehat{\omega}_d$ , se aprecia que en los tiempos 1, 2, 5, 7, 12 las funciones son significativas o cercanas a ser significativas y se puede considerar que la parte no estacional del modelo podría seguir los modelos ARMA  $(p, q)$  con  $p, q \in \{1, 2, 5, 7, 12\}$ . En los primeros 20 tiempos la ACF muestra un patrón entre los compartimientos de cinco unidades de tiempo de reducirse paulatinamente, mientras que la PACF más bien tiende a verse muy reducida después de los segundos términos en cada compartimiento de cinco unidades, esto indica que podría ser un modelo AR.

Realizando los ajustes de todos los modelos SARIMA  $(p, 0, q) \times (0, 1, 1)_5$  para los valores  $p, q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  y comparándolos mediante el criterio de información de Akaike (AIC), el criterio de información de Akaike con sesgo corregido (AICc), el criterio Bayesiano de Información (BIC), qué términos del modelo SARIMA resultaron significativos, el análisis de residuales como el de la Figura 4.11 y el principio de parsimonia resultó que el mejor modelo es un SARIMA  $(2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$ , cuya forma es

$$(1 - 0.232650B - 0.219553B^2) (\widehat{\omega}_d - \widehat{\omega}_{d-5}) = (1 + (-0.817436) B^5) W_d, \quad W_d \sim N(0, 75.37111). \quad (4.4)$$

En la Figura 4.11 se muestran cuatro gráficas, la superior es la serie de tiempo de los residuales después de hacer el ajuste del modelo SARIMA  $(2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$ . En las gráficas centrales se muestra la ACF de los residuales y la gráfica Q-Q, y la gráfica inferior muestra los valores  $p$  para los estadísticos de Ljung-Box que toman como hipótesis nula que la ACF de los residuales son de una serie de tiempo que no es ruido blanco. La ACF de los residuales se ve bien, aunque en el retraso 12 aparenta que tiene algo, pero al hacer el ajuste con la parte autorregresiva de orden 12 no se mejoran los resultados. La gráfica Q-Q luce bien para tener normalidad y los estadísticos de Ljung-Box rechazan la hipótesis de que los residuales se alejen del ruido blanco.

### Identificar modelo para $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$

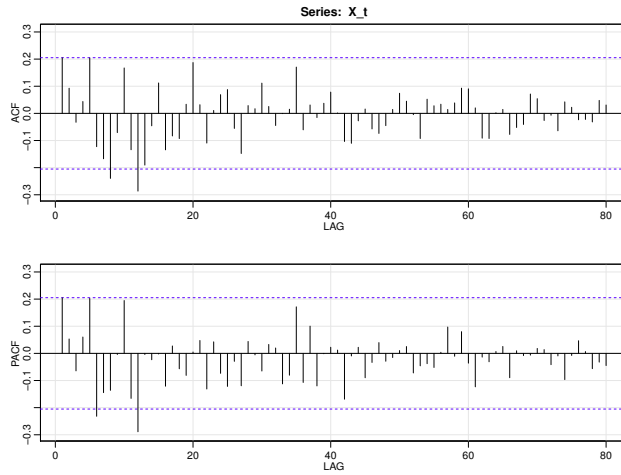
En la Figura 4.12 se muestra la ACF y la PACF para la serie de tiempo centrada  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$ . Ambas parecen significativas en los retrasos 1, 2, 12, y aparentemente la ACF desaparece paulatinamente mientras que la PACF se corta, así que podría ser un modelo AR de algún orden, aunque no está de más explorar modelos ARMA. Realizando los ajustes de todos los modelos ARMA  $(p, q)$  para los valores  $p, q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$  y comparándolos mediante el criterio de información de Akaike (AIC), el criterio de información de Akaike con sesgo corregido (AICc), el criterio Bayesiano de Información (BIC), qué términos del modelo ARMA resultaron significativos, el análisis de residuales como el de la Figura 4.13 y el principio de parsimonia resultó que el mejor modelo es un AR(2), cuya forma es

$$\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d} = 0.207874 (\widehat{\omega}_{d-1} - \widehat{\alpha}_{l_{d-1}}) + 0.199091 (\widehat{\omega}_{d-2} - \widehat{\alpha}_{l_{d-2}}) + W_d, \quad W_d \sim N(0, 66.8700). \quad (4.5)$$

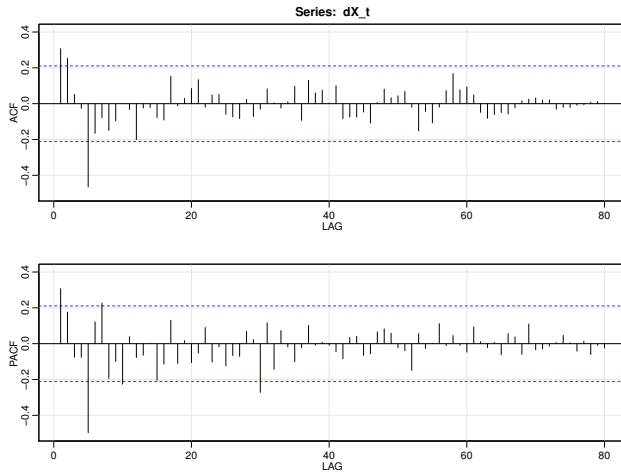
En la Figura 4.13 se realiza el análisis de residuales del modelo AR(2) para  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  y se obtiene resultados similares a los del análisis de residuales del modelo SARIMA  $(2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  para  $\widehat{\omega}_d$ .

### Pronósticos

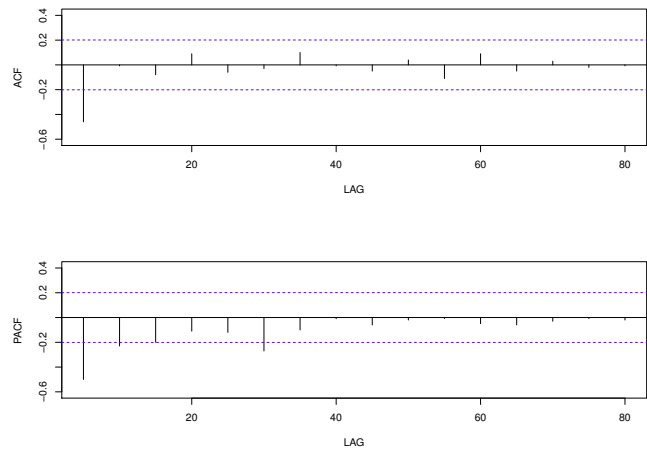
En la Figura 4.14 se muestran los pronósticos realizados con los modelos (4.4) y (4.5) para la última semana completa de la serie de tiempo y se comparan con los datos verdaderos que ocurrieron. En ambos casos las estimaciones no son tan cercanas a los valores que ocurrieron



(a)



(b)



(c)

Figura 4.10: Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, 4.10a es para la serie de tiempo  $\hat{\omega}_d$ , 4.10b es para la serie de tiempo de la diferencia de primer orden con retraso cinco  $\nabla_5 \hat{\omega}_d = \hat{\omega}_d - \hat{\omega}_{d-5}$  y 4.10c es para  $\nabla_5 \hat{\omega}_d$ , pero sólo mostrando cada cinco unidades. Las series de tiempo están bajo la estrategia de eliminar ceros estructurales.

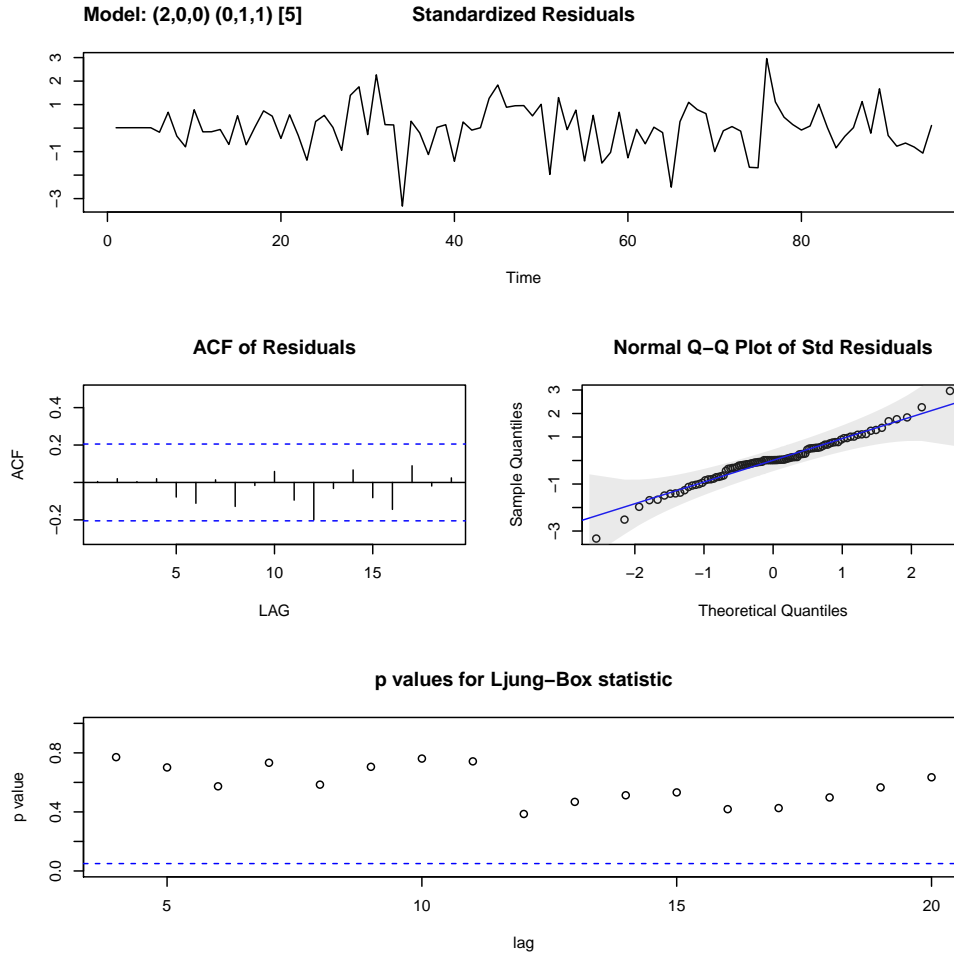


Figura 4.11: Análisis de residuales del modelo SARIMA  $(2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  para  $\hat{\omega}_d$  bajo la estrategia de eliminar ceros estructurales.

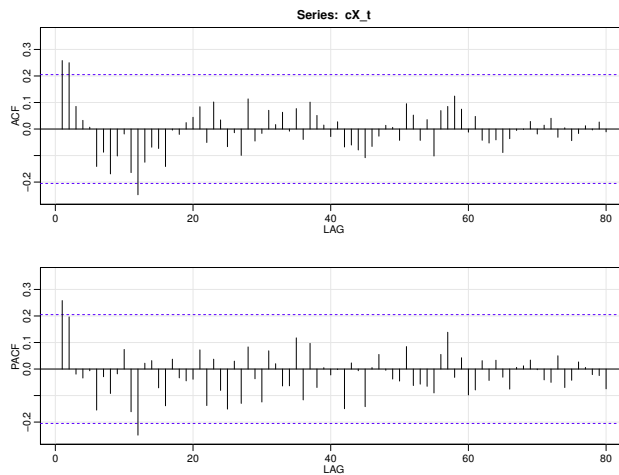


Figura 4.12: Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para la serie de tiempo  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_d$  bajo la estrategia de eliminar ceros estructurales.

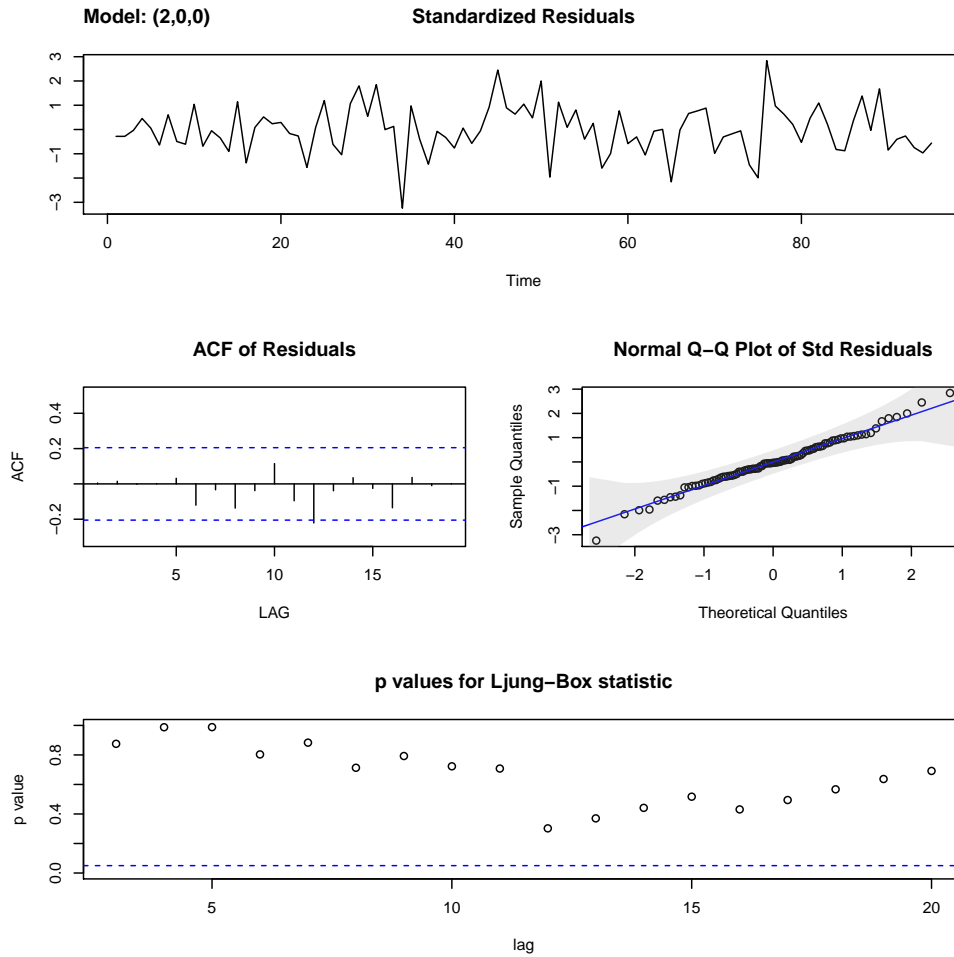


Figura 4.13: Análisis de residuales del modelo AR(2) para  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_{l_d}$  bajo la estrategia de eliminar ceros estructurales.

sin embargo ambas las realizaciones restantes y el pronóstico están contenidos en el intervalo de confianza al 95 % para la serie de tiempo, así que cualitativamente las estimaciones funcionan aunque no son muy precisas. El mejor desempeño lo tiene el pronóstico del modelo SARIMA  $(2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  pues cualitativamente es más cercano a los datos.

### 4.2.2. Imputar ceros estructurales

Las serie de tiempo resultado de imputar los ceros estructurales se pueden apreciar en la Figura 4.15, la serie de tiempo de conteos totales  $S_T^{(d)}$  está en el panel superior, la serie de tiempo de conteos en escala de la raíz totales  $\widehat{\omega}_d$  está en el panel central y serie de tiempo de conteos en escala de la raíz totales centrados  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  está en el panel inferior, en todos casos los ceros estructurales fueron imputados y por ello ahora las series de tiempo tienen 115 registros.

La serie de tiempo  $\widehat{\omega}_d$  corre alrededor del valor 140 y  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  está centrada alrededor de 0. Se puede considerar en ambos casos que la media no depende del tiempo y está estacionarizada, mientras que en el caso de la varianza es un tanto complejo comprobar el supuesto de estacionaridad, se tomará como cierto, este es un supuesto fuerte.

#### Identificar modelo para $\widehat{\omega}_d$

La Figura 4.16a muestra la ACF y PACF para la serie de tiempo  $\widehat{\omega}_d$ , si se observa detenidamente ambas se notará que cada diez días hay un patrón que perdura en ambas, pero es más razonable considerar que es cada cinco días. Entonces para continuar buscando el patrón se eliminará el efecto estacional obteniendo  $\nabla_5 \widehat{\omega}_d = \widehat{\omega}_d - \widehat{\omega}_{d-5}$ , que es la diferencia de primer orden uno con retraso cinco.

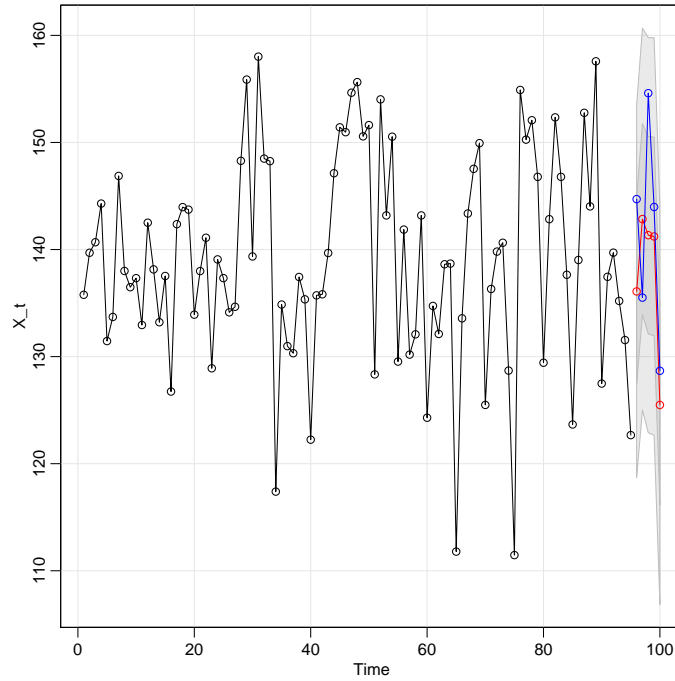
En la Figura 4.16c se muestran las ACF y PACF de  $\nabla_5 \widehat{\omega}_d$ , pero sólo incluyendo lo que sucede cada cinco unidades de tiempo, en estas gráficas se muestra evidente que la parte estacional sigue un modelo de MA (1) debido a que la ACF se corta después del tiempo  $1 \times 5$ , mientras que la PACF desaparece paulatinamente después del tiempo  $1 \times 5$ .

Por otra otra parte la Figura 4.16b muestra las ACF y PACF de  $\nabla_5 \widehat{\omega}_d$ , ahí se aprecia que la ACF tiene un patrón entre los compartimientos de cinco unidades de tiempo de reducirse paulatinamente, mientras que la PACF a cortarse en cada compartimiento de cinco unidades, esto indica que podría ser un modelo AR.

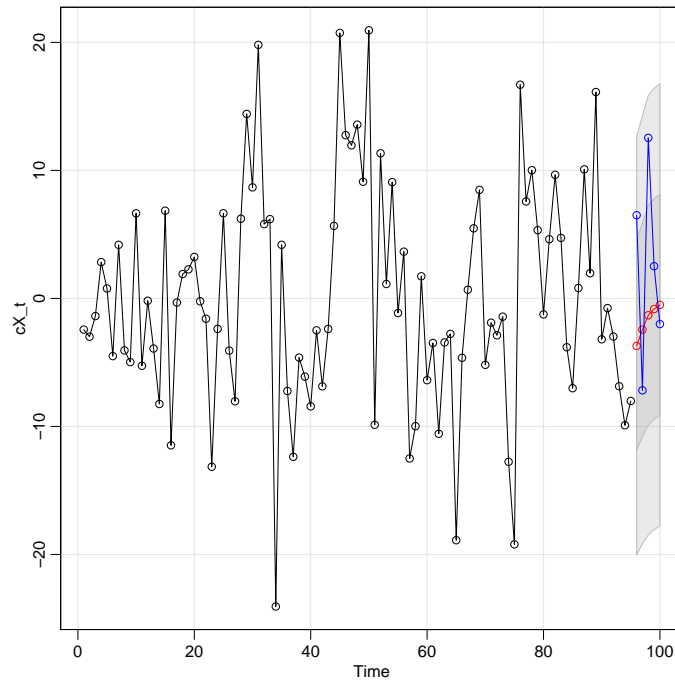
Realizando los ajustes de todos los modelos SARIMA  $(p, 0, q) \times (0, 1, 1)_s$  múltiples valores de  $p, q, s$  y comparándolos mediante el criterio de información de Akaike (AIC), el criterio de información de Akaike con sesgo corregido (AICc), el criterio Bayesiano de Información (BIC), qué términos del modelo SARIMA resultaron significativos, el análisis de residuales como el de la Figura 4.17 y el principio de parsimonia resultó que el mejor modelo es un SARIMA  $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$ , cuya forma es

$$(1 - 0.269451B)(\widehat{\omega}_d - \widehat{\omega}_{d-5}) = (1 + (-0.846311)B^5)W_d, \quad W_d \sim N(0, 82.11545). \quad (4.6)$$

En la Figura 4.17 se muestran el análisis de residuales del ajuste del modelo SARIMA  $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$ . La ACF de los residuales se ve bien, aunque en el retraso 14 aparenta que hay algo, pero al hacer el ajuste con una parte autorregresiva de orden 14 no se mejoran los resultados, la gráfica Q-Q luce bien para tener normalidad y los estadísticos de Ljung-Box rechazan la hipótesis de que los residuales se alejen del ruido blanco.



(a)



(b)

Figura 4.14: Pronósticos para la última semana de las series de tiempo bajo la estrategia de eliminar ceros estructurales. La línea con puntos negra corresponden a la serie de tiempo, la línea con puntos roja corresponden a los pronósticos para los últimos cinco días, la línea con puntos azul corresponden a las realizaciones de esos últimos cinco días, el área gris más sombreada corresponde al intervalo de confianza al 95 % para el pronóstico y el área gris menos sombreada corresponde al intervalo de confianza al 68 % (sumar y restar una desviación estándar) para el pronóstico. 4.14a es para  $\hat{\omega}_d$  con SARIMA  $(2, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  y 4.14b es para  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_{l_d}$  con AR  $(2)$ .



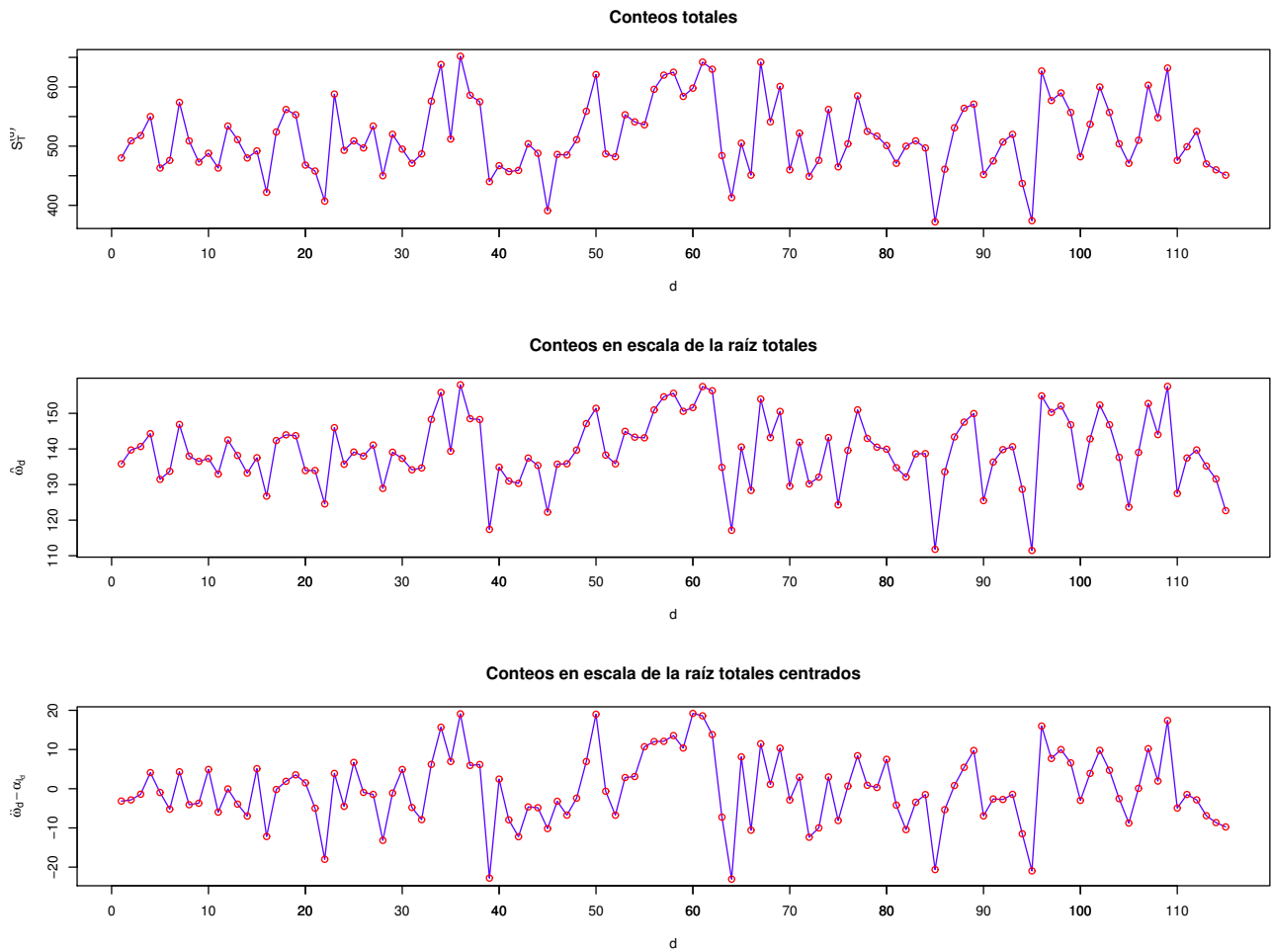
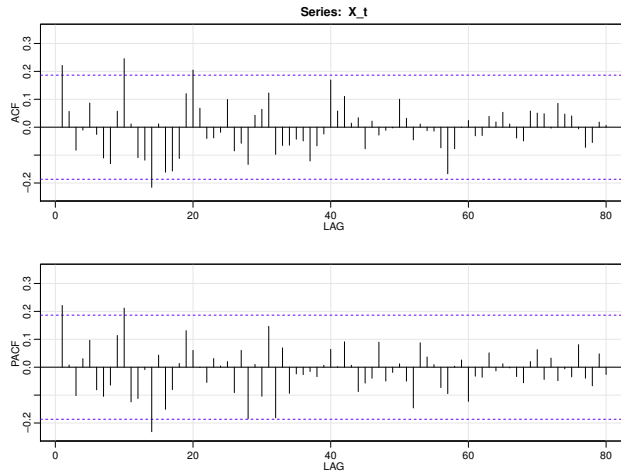
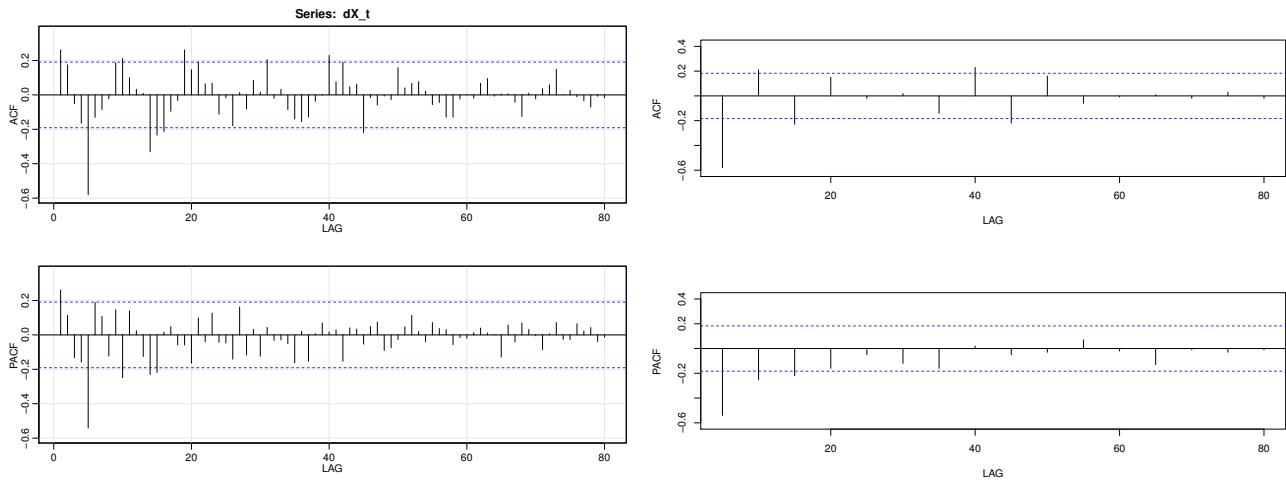


Figura 4.15: Serie de tiempo de conteos totales  $S_T^{(d)}$ , serie de tiempo de conteos en escala de la raíz totales  $\hat{\omega}_d$  y serie de tiempo de conteos en escala de la raíz totales centrados  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_d$  bajo la estrategia de imputar ceros estructurales.



(a)



(b)

(c)

Figura 4.16: Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, 4.16a es para la serie de tiempo  $\hat{w}_d$ , 4.16b es para la serie de tiempo de la diferencia de primer orden con retraso cinco  $\nabla_5 \hat{w}_d = \hat{w}_d - \hat{w}_{d-5}$  y 4.16c es para  $\nabla_5 \hat{w}_d$ , pero sólo mostrando cada cinco unidades. Las series de tiempo están bajo la estrategia de imputar ceros estructurales.

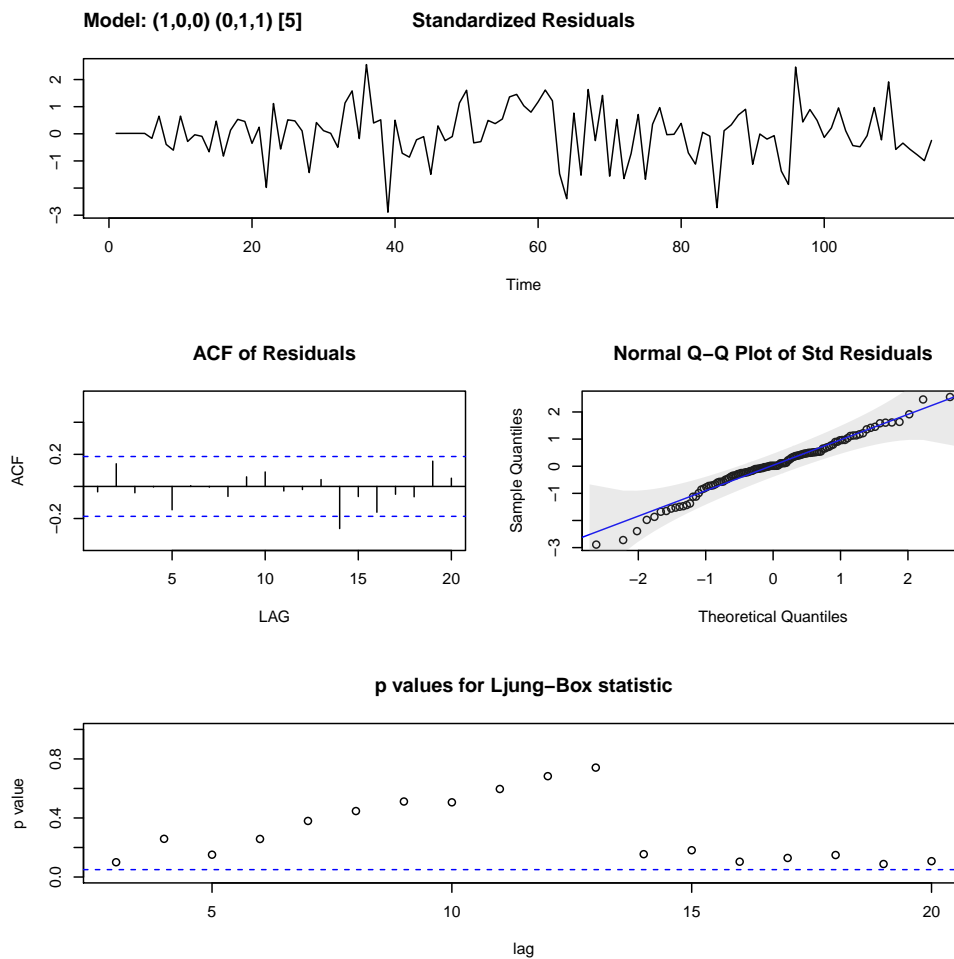


Figura 4.17: Análisis de residuales del modelo SARIMA  $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  para  $\hat{\omega}_d$  bajo la estrategia de imputar ceros estructurales.

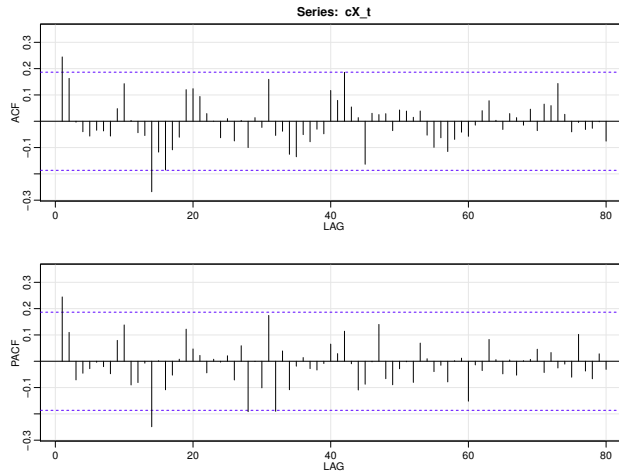


Figura 4.18: Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para la serie de tiempo  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  bajo la estrategia de imputar ceros estructurales.

### Identificar modelo para $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$

En la Figura 4.18 se muestra la ACF y la PACF para la serie de tiempo centrada  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$ , observándolas ambas parecen significativas en los retrasos 1 y 14, y que aparentemente la ACF desaparece paulatinamente mientras que la PACF se corta, así que podría ser un modelo AR de algún orden, aunque no está de más explorar modelos ARMA. Realizando los ajustes de todos los modelos ARIMA  $(p, q)$  para los valores  $p, q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$  y comparándolos mediante el criterio de información de Akaike (AIC), el criterio de información de Akaike con sesgo corregido (AICC), el criterio Bayesiano de Información (BIC), qué términos del modelo ARMA resultaron significativos, el análisis de residuales como el de la Figura 4.19 y el principio de parsimonia resultó que el mejor modelo es un AR(1), este modelo es

$$\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d} = 0.245165 (\widehat{\omega}_{d-1} - \widehat{\alpha}_{l_{d-1}}) + W_d, \quad W_d \sim N(0, 74.50662). \quad (4.7)$$

En la Figura 4.19 se realiza el análisis de residuales del modelo AR(1) para  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  y se obtiene resultados similares a los del análisis de residuales del modelo SARIMA  $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  para  $\widehat{\omega}_d$ .

### Pronósticos

En la Figura 4.20 se muestran los pronósticos realizados con los modelos (4.6) y (4.7) para la última semana completa de la serie de tiempo y se comparan con los datos verdaderos que ocurrieron.

En ambos sucedió lo mismo que cuando se eliminaron las semanas con ceros estructurales, las estimaciones no son tan cercanas a los valores que ocurrieron sin embargo ambas las realizaciones restantes y el pronóstico están contenidos en el intervalo de confianza al 95% para la serie de tiempo, así que cualitativamente las estimaciones funcionan aunque no son muy precisas. El mejor desempeño lo tiene el pronóstico del modelo SARIMA  $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  pues cualitativamente es más cercano a los datos.

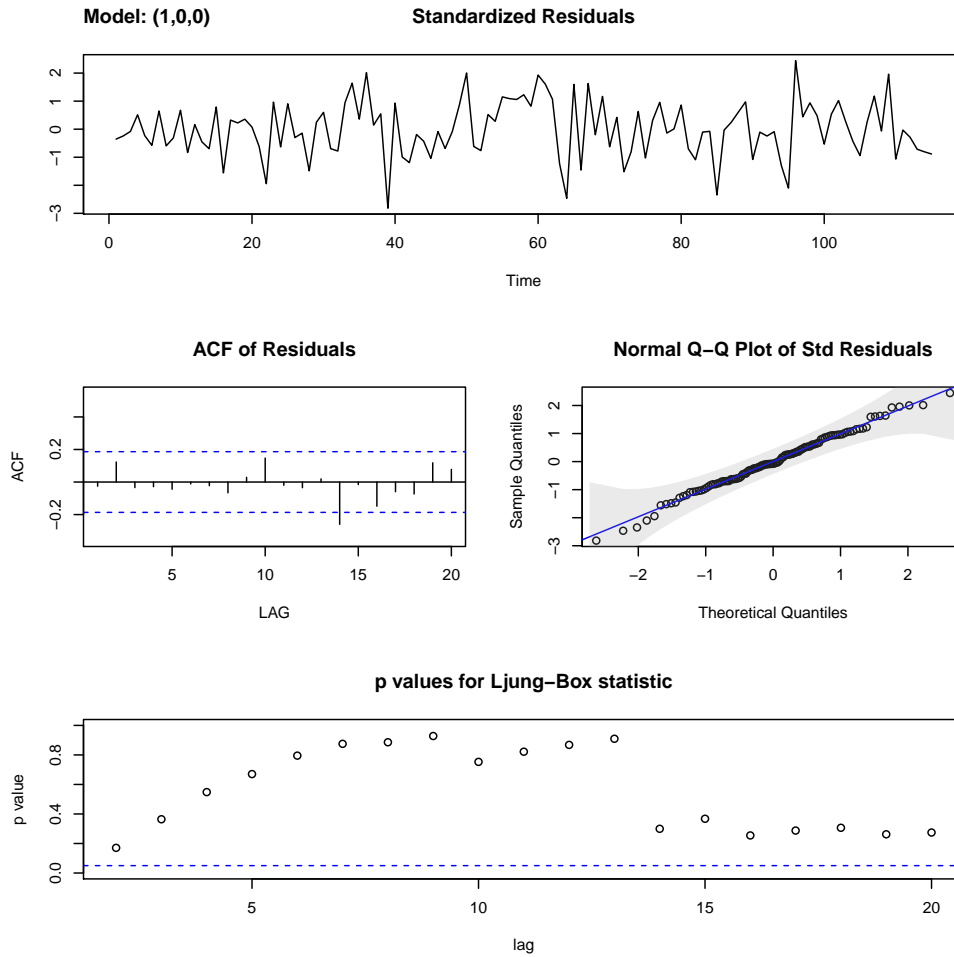
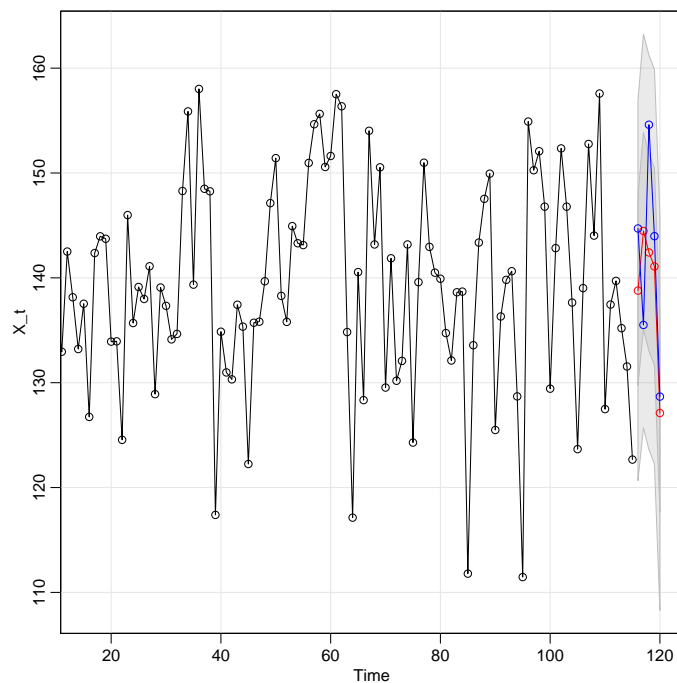
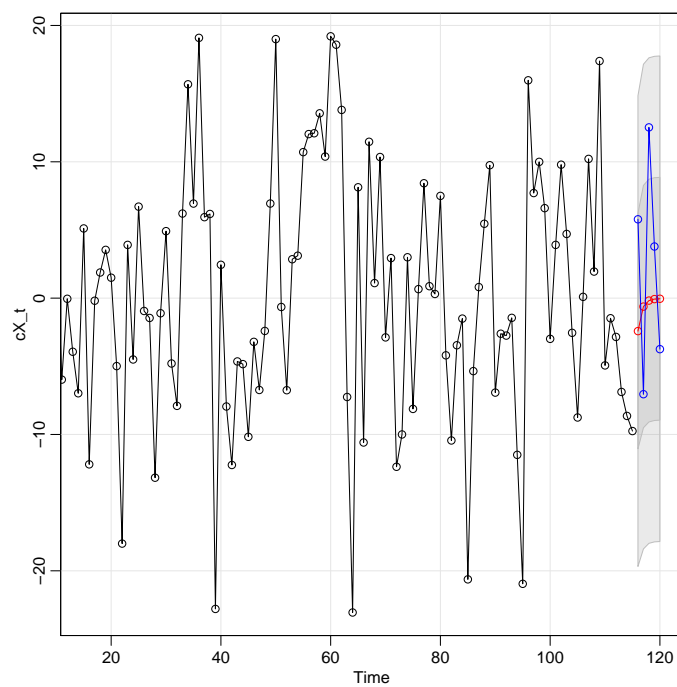


Figura 4.19: Análisis de residuales del modelo AR(1) para  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_{l_d}$  bajo la estrategia de imputar ceros estructurales.



(a)



(b)

Figura 4.20: Pronósticos para la última semana de las series de tiempo bajo la estrategia de imputar ceros estructurales. La línea con puntos negra corresponden a la serie de tiempo, la línea con puntos roja corresponden a los pronósticos para los últimos cinco días, la línea con puntos azul corresponden a las realizaciones de esos últimos cinco días, el área gris más sombreada corresponde al intervalo de confianza al 95 % para el pronóstico y el área gris menos sombreada corresponde al intervalo de confianza al 68 % (sumar y restar una desviación estándar) para el pronóstico. 4.20a es para  $\hat{\omega}_d$  con SARIMA  $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  y 4.20b es para  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_{l_d}$  con AR(1).

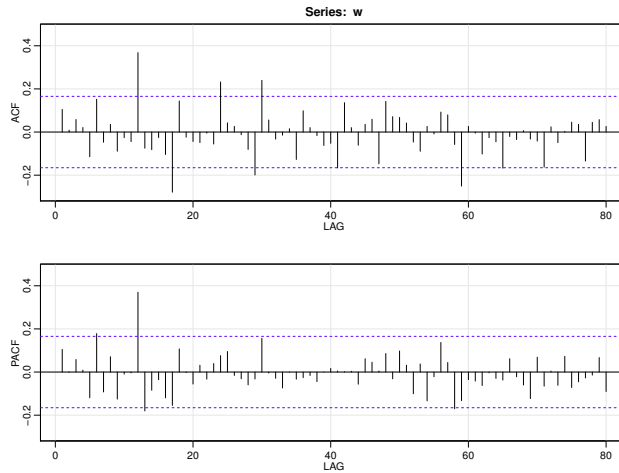


Figura 4.21: Funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial para serie de tiempo  $\zeta_d$  bajo la estrategia de imputar ceros estructurales, está muestra un efecto que se presenta cada dos semanas, es decir, cada quincena.

### ¿Y los sábados?

Algo interesante sucede si se consideran los sábados en la serie de tiempo. Para hacerlos comparables con los otros día de la semana los conteos en la escala de la raíz totales  $\widehat{\omega}_d$  son divididos entre el número de horas de operación respectiva en el centro de llamadas, es decir

$$\zeta_d = \begin{cases} \widehat{\omega}_d/10 & \text{si } l_d \neq 5, \\ \widehat{\omega}_d/5 & \text{si } l_d = 5 \end{cases} \quad (4.8)$$

Entonces al observar la ACF y PACF de la serie de tiempo  $\zeta_d$  en la Figura 4.21 se puede ver claramente que existe una correlación positiva cada 12 días, es decir, cada quincena. Recordando que buena parte de los asalariados en México se les paga cada quincena, entonces se está observando el efecto que tiene el pago de salarios en las ventas del centro de llamadas. Este fenómeno fue reportado por los administradores del centro de llamadas que indicaron que las ventas se incrementan en los días de paga.

## 4.3. Interpretación y comparación de modelos

Es interesante observar que cuando se imputaron los ceros estructurales el modelo para la serie de tiempo  $\widehat{\omega}_d - \widehat{\alpha}_{l_d}$  coincidió con el reportado en los artículos Gans et al. (2015), Shen y Huang (2008). Además al comprar las ACF y PACF de  $\nabla_5 \widehat{\omega}_d$  en los casos cuando se eliminan los ceros estructurales y cuando se imputan los datos mostradas en las Figuras 4.10b y 4.16b se observa que cuando se imputan los ceros estructurales la ACF tiene una forma más estable similar a la que Shumway y Stoffer (2015) describe para los modelo SARIMA, esto puede ser debido a tres factores:

- Hay más datos en el caso de ceros estructurales imputados.
- Cuando se eliminan las semanas con ceros estructurales se rompe un estructura interna en los datos que no es evidente.

- Los ceros estructurales imputados inducen una estructura que evita que aparezca el término de segundo orden en la parte autorregresiva del modelo.

En busca de tener un modelo útil se considerará que las razones son las dos primeras y entonces lo que se debe hacer con los ceros estructurales es imputarlos y los mejores modelos son SARIMA  $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$  para  $\hat{\omega}_d$  y AR(1)  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_{l_d}$ , además los modelos (4.6) y (4.7) se pueden reescribir respectivamente cómo

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_d &= \hat{\omega}_{d-5} + 0.269451(\hat{\omega}_{d-1} - \hat{\omega}_{d-6}) + W_d - 0.846311W_{d-5}, & W_d &\sim N(0, 82.11545), \\ \hat{\omega}_d &= \hat{\alpha}_{l_d} + 0.245165(\hat{\omega}_{d-1} - \hat{\alpha}_{l_{d-1}}) + W_d, & W_d &\sim N(0, 74.50662).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Y se puede interpretar que lo que se observe hoy está relacionado con lo que se observó hace una semana y la diferencia con lo que se observó el día anterior y lo que se observó el día de la semana anterior al de hoy de la semana previa. Tiene sentido porque en los artículos se propuso el modelo (2.65). Con este modelo estimado ahora se puede proceder a realizar los pronósticos del personal necesario para reducir los abandonos.

## 4.4. Conclusiones

Respecto del centro de llamadas y sus modelos se tienen las siguientes conclusiones:

- Los pronósticos realizados para la última semana a partir de los modelos SARIMA y AR estimados no son tan buenos al compararlos con la realización de esos días, sin embargo, cualitativamente se parecen. El objetivo de estos es modelar el volumen de las llamadas transferidas, no pronosticarlos directamente pues se busca completar el modelo (2.65), tarea que se ha logrado, ahora es inmediato estimar las tasas ocultas y proseguir con la labor para estimar el personal óptimo que reducirá los abandonos según lo expuesto por Gans et al. (2015).
- La serie de tiempo  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_{l_d}$  resultó que también sigue un modelo AR(1) justo como los centros de llamadas que reportaron Gans et al. (2015), Shen y Huang (2008). A pesar de que parece una forma no muy técnica de desestacionalizar  $\hat{\omega}_d$ , resultó que es muy cercano al modelo más específico SARIMA  $(1, 0, 0) \times (0, 1, 1)_5$ . La ganancia de usar el modelo AR(1) es que es más simple, casi igual de bueno y completa el modelo inicial que alimenta al estimación del personal óptimo para reducir abandonos.

Referente al análisis de series de tiempo se tienen las siguientes conclusiones:

- Identificar y estimar un modelo SARIMA para una serie de tiempo no es una tarea fácil comparada con realizar una identificación y estimación de un modelo lineal como una regresión simple o una regresión logística, involucra varias tareas que a ratos tienen una naturaleza artesanal considerando la prueba y el error, no son inmediatos como suele suceder con otras técnicas, además es raro que los pronósticos sean precisos, pero cualitativamente se desempeñan bien para indicar qué comportamiento podría seguir la serie de tiempo en el futuro.



# Capítulo 5

## Perspectivas futuras

El modelo (2.65) es

$$\begin{aligned} Y_{d,i} &= \sqrt{\Lambda_{d,i}} + \varepsilon_{d,i}, \quad \varepsilon_{d,i} \sim N(0, \sigma^2), \\ \sqrt{\Lambda_{d,i}} &= \omega_d \vartheta_{l_d,i}, \quad \vartheta_{l_d,i} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^I \vartheta_{l_d,i} = 1, \\ \omega_d - \alpha_{l_d} &= \beta (\omega_{d-1} - \alpha_{l_{d-1}}) + \eta_d \quad \eta_d \sim N(0, \phi^2), \end{aligned}$$

donde se estiman  $\omega_d$ ,  $l_d$ , y  $\vartheta_{l_d,i}$  como

$$\hat{\omega}_d = \sum_i Y_{d,i}, \quad \hat{\alpha}_{l_d} = \frac{\sum_{\{d': l_{d'}=l_d\}} \sum_i Y_{d',i}}{|\{d' : l_{d'}=l_d\}|}, \quad \hat{\vartheta}_{l_d,i} = \frac{\sum_{\{d': l_{d'}=l_d\}} Y_{d',i}}{\sum_{\{d': l_{d'}=l_d\}} \sum_i Y_{d',i}}, \quad d = 1, \dots, D, \quad i = 1, \dots, I.$$

Se corroboró que la serie de tiempo  $\hat{\omega}_d - \hat{\alpha}_{l_d}$  puede ser modelada mediante un AR(1) y se estimó el parámetro  $\beta$ , pero también se encontró que la serie de tiempo  $\hat{\omega}_d$  puede ser modelada mediante un SARIMA  $(1, 0, 0) \times (1, 0, 0)_5$ , entonces el modelo (2.65) podría transformarse en

$$\begin{aligned} Y_{d,i} &= \sqrt{\Lambda_{d,i}} + \varepsilon_{d,i}, \quad \varepsilon_{d,i} \sim N(0, \sigma^2), \\ \sqrt{\Lambda_{d,i}} &= \omega_d \vartheta_{l_d,i}, \quad \vartheta_{l_d,i} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^I \vartheta_{l_d,i} = 1, \\ \omega_d &= \omega_{d-5} + \varphi (\omega_{d-1} - \omega_{d-6}) + \eta_d + \theta \eta_{d-5} \quad \eta_d \sim N(0, \phi^2), \end{aligned} \tag{5.1}$$

o bien

$$\begin{aligned} Y_{d,i} &= \sqrt{\Lambda_{d,i}} + \varepsilon_{d,i}, \quad \varepsilon_{d,i} \sim N(0, \sigma^2), \\ \sqrt{\Lambda_{d,i}} &= \omega_d \vartheta_{l_d,i}, \quad \vartheta_{l_d,i} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^I \vartheta_{l_d,i} = 1, \\ (1 - \phi B) (\omega_d - \omega_5) &= (1 + \theta B^5) \eta_d \quad \eta_d \sim N(0, \phi^2), \end{aligned}$$

donde se  $\omega_d$  y  $\vartheta_{l_d,i}$  se estiman de misma forma.

El camino siguiendo (2.65) indica que el siguiente paso es usar este modelo para estimar el personal óptimo para reducir los abandonos, este camino es relativamente directo pues ya se conocen las expresiones que se usaran en la siguiente etapa de acuerdo con Gans et al. (2015), no significa que esto sea un camino simple, pero ya está trazado.

En cambio si se sigue el nuevo modelo (5.1) la ecuación (2.67) de la proposición 15 ya no es necesariamente válida y se debe explorar una forma alternativa para el programa estocástico (2.74) que depende de las distribuciones presentadas en esa proposición.

Otra consideración es que hay problemas similares al de estimar el personal óptimo en el centro de llamadas para reducir los abandonos en otras áreas que no son los centros de llamadas, pero que en el fondo representan lo mismo, por ejemplo, en el área de telecomunicaciones: A lo largo del día se presentan fallas en un sistema de telecomunicaciones que abarca un gran territorio, dichas

fallas no se presentan de manera homogénea a lo largo del día y cambian de acuerdo al día de la semana. Se desea que las fallas sean atendidas lo más rápido posible y que se tenga el personal necesario para lograrlo, pero que el personal disponible para atender las fallas se ocupe la mayor parte del tiempo que labora, entonces el problema es cómo determinar el personal requerido a lo largo del día para atender las fallas lo más pronto posible.

# Capítulo 6

## Apendice: Programas

En este apéndice se incluyen el código de R para obtener todo lo realizado en la tesis, el guión que incluye todo esto se llama `tesis.R`.

```
# Script definitivo de la tesis

# Establecer directorio para guardar graficas
# setwd('/home/mathrocker/Documentos/Posgrado/Maestria/UAQ/Tesis/LaTeX/Tesis/Figuras/Capitulo')

# Analisis fdescriptivo de datos

# Cargar base de datos

# Cargar datos
rm(list = ls(all = TRUE))
X <- read.table('/home/mathrocker/Documentos/Posgrado/Maestria/UAQ/Tesis/Programas/Datos/No')
# Corregir un dato que esta mal
X[X$V11 == 96, 11] = 0

#####
# Campana 1      #
#####

# Extraer campana 1
X_c1 <- X[X$V2 == 'C_1', ]
#####
# Escala normal #
#####
# Graficas de algunos dias
# Espectro
V_l_e <- matrix(data = 0, nrow = 12, ncol = 40)
for(i in 0:11){
  if((i %% 6) != 5 )
```

```

V_l_e[(i + 1), ] <- X_c1[(X_c1$V9 == (42 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41), 12]
if((i %% 6) == 5 )
V_l_e[(i + 1), ] <- c(X_c1[(X_c1$V9 == (42 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21), 12]
}

# Graficas de algunos dias
# Grafica de medias por dias y lapsos
x11()
color <- rainbow(6)
#postscript('Week.eps')
times <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
a_b <- c(min(V_l_e), max(V_l_e))
plot(c(9, 18.75), a_b, type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 5){
lines(times, V_l_e[i + 1, ], col = color[(i%%6) + 1], lwd = 2)
}
legend('topright', legend = c('Lunes', 'Martes', 'Miercoles', 'Jueves', 'Viernes', 'Sabado'),
#dev.off()

# Espectro
x11()
#postscript('Espectro.eps')
times <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
plot(c(9, 18.75), c(a_b[1], (a_b[2] + 15*11)), type = 'n', yaxt='n', xlab = 'Hora', ylab =
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 11){
lines(times, (V_l_e[i + 1, ] + 15*i))
}
#dev.off()

#####
# Graficas encimadas por dias #
#####
times <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
dias <- c('Lunes', 'Martes', 'Miercoles', 'Jueves', 'Viernes', 'Sabado')
for(k in 0:5){
V_l_d <- matrix(data = 0, nrow = 22, ncol = 40)
for(i in 0:21){
if(k < 5){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)
V_l_d[(i + 1), ] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$
print(i + 3)
}
}
if(k == 5){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21)

```

```

V_l_d[(i + 1), 1:20] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)]
print(i + 3)
}
}
}

x11()
#postscript(paste0('0', toString(k), dias[k + 1], '.eps'))
plot(c(9, 18.75), c(0, 40), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos', main = dias[k + 1])
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 21){
if(sum(V_l_d[i + 1, ]) != 0)
lines(times, (V_l_d[i + 1, ]))
}
#dev.off()
}

x11()
#postscript('todo_sin_sabado.eps')
times <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
plot(c(9, 18.75), c(0, 40), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(k in 0:4){
V_l_d <- matrix(data = 0, nrow = 22, ncol = 40)
for(i in 0:21){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)])
V_l_d[(i + 1), ] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)]
print(i + 3)
}
}
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 21){
if(sum(V_l_d[i + 1, ]) != 0)
lines(times, (V_l_d[i + 1, ]))
}
}
#dev.off()

x11()
#postscript('todo.eps')
times <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
plot(c(9, 18.75), c(0, 40), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(k in 0:5){
V_l_d <- matrix(data = 0, nrow = 22, ncol = 40)
for(i in 0:21){
if(k < 5){

```

```

if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)]
V_l_d[(i + 1), ] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$
print(i + 3)
}
}
if(k == 5){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21)]
V_l_d[(i + 1), 1:20] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X
print(i + 3)
}
}
}
for(i in 0 : 21){
if(sum(V_l_d[i + 1, ]) != 0)
lines(timess, (V_l_d[i + 1, ]))
}
}
#dev.off()

## Medias de conteos por dia considerando mismos intervalos
V_l <- matrix(data = 0, nrow = 6, ncol = 40)

# Dias no sabado
for(i in 0 : 4){
for(j in 2 : 41){
V_l[i + 1, j - 1] <- mean(X_c1[(X_c1$V14 == 0) & (X_c1$V10 == i) & (X_c1$V11 == j), 12])
}
}

# Sabado
for(j in 2 : 21){
V_l[6, j - 1] <- mean(X_c1[(X_c1$V14 == 0) & (X_c1$V10 == 5) & (X_c1$V11 == j), 12])
}

# Grafica de medias por dias y lapsos
x11()
color <- rainbow(6)
#postscript('mean_by_day.eps')
plot(c(9, 18.75), c(min(V_l), max(V_l)), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 5){
lines(timess, V_l[i + 1, ], col = color[i + 1], lwd = 2)
}
legend(x = 16.6, y = 4.3, legend = c('Lunes', 'Martes', 'Miercoles', 'Jueves', 'Viernes', 'Sabado'),
#dev.off()

# Desviaciones estandar

```

```

sd_V_1 <- matrix(data = 0, nrow = 6, ncol = 40)

# Dias no sabado
for(i in 0 : 4){
for(j in 2 : 41){
sd_V_1[i + 1, j - 1] <- sd(X_c1[(X_c1$V14 == 0) & (X_c1$V10 == i) & (X_c1$V11 == j), 12])
}
}

# Sabado
for(j in 2 : 21){
sd_V_1[6, j - 1] <- sd(X_c1[(X_c1$V14 == 0) & (X_c1$V10 == 5) & (X_c1$V11 == j), 12])
}

# Grafica de desviaciones estandar por dias y lapsos
x11()
color <- rainbow(6)
#postscript('sd_by_day.eps')
plot(c(9, 18.75), c(min(sd_V_1), max(sd_V_1)), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 5){
lines(times, sd_V_1[i + 1, ], col = color[i + 1], lwd = 2)
}
legend(x = 16.6, y = 12.1, legend = c('Lunes', 'Martes', 'Miercoles', 'Jueves', 'Viernes', 'Sabado'),
#dev.off()

#####
# Escala raiz #
#####
# Graficas de algunos dias
# Espectro
V_l_e <- matrix(data = 0, nrow = 12, ncol = 40)
for(i in 0:11){
if((i %% 6) != 5 )
V_l_e[(i + 1), ] <- X_c1[(X_c1$V9 == (42 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41), 13]
if((i %% 6) == 5 )
V_l_e[(i + 1), ] <- c(X_c1[(X_c1$V9 == (42 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21), 13],
}

# Graficas de algunos dias
# Grafica de medias por dias y lapsos
#x11()
color <- rainbow(6)
#postscript('Week_sq.eps')
a_b <- c(min(V_l_e), max(V_l_e))
times <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
plot(c(9, 18.75), a_b, type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos en escala de raiz')

```

```

axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 5){
lines(timess, V_l_e[i + 1, ], col = color[(i%%6) + 1], lwd = 2)
}
legend('topright', legend = c('Lunes', 'Martes', 'Miercoles', 'Jueves', 'Viernes', 'Sabado'),
#dev.off()

# Espectro
x11()
#postscript('Espectro_sq.eps')
timess <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
plot(c(9, 18.75), c(a_b[1], (a_b[2] + 5*11)), type = 'n', yaxt='n', xlab = 'Hora', ylab =
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 11){
lines(timess, (V_l_e[i + 1, ] + 5*i))
}
#dev.off()

#####
# Graficas encimadas por dias #
#####
timess <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
dias <- c('Lunes', 'Martes', 'Miercoles', 'Jueves', 'Viernes', 'Sabado')
for(k in 0:5){
V_l_d <- matrix(data = 0.5, nrow = 22, ncol = 40)
for(i in 0:21){
if(k < 5){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)])
V_l_d[(i + 1), ] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)]
print(i + 3)
}
}
if(k == 5){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21)])
V_l_d[(i + 1), 1:20] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21)]
print(i + 3)
}
}
}

#x11()
postscript(paste0('0', toString(k), dias[k + 1], '_sq.eps'))
plot(c(9, 18.75), c(0, 6.5), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos en escala de raiz')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 21){
if(sum(V_l_d[i + 1, ]) != 0)
lines(timess, (V_l_d[i + 1, ]))
}

```



```

}
dev.off()
}

x11()
#postscript('todo_sin_sabado_sq.eps')
times <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
plot(c(9, 18.75), c(0, 6.5), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos en escala de raiz')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(k in 0:4){
V_l_d <- matrix(data = 0, nrow = 22, ncol = 40)
for(i in 0:21){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)])
V_l_d[(i + 1), ] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)]
print(i + 3)
}
}
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 21){
if(sum(V_l_d[i + 1, ]) != 0)
lines(times, (V_l_d[i + 1, ]))
}
}
#dev.off()

x11()
#postscript('todo_sq.eps')
times <- seq(from = 9, to = 18.75, by = 10/(41 - 2 + 1))
plot(c(9, 18.75), c(0, 6.5), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos en escala de raiz')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(k in 0:5){
V_l_d <- matrix(data = 0, nrow = 22, ncol = 40)
for(i in 0:21){
if(k < 5){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)])
V_l_d[(i + 1), ] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41)]
print(i + 3)
}
}
if(k == 5){
if(length(X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21)])
V_l_d[(i + 1), 1:20] <- X_c1[(X_c1$V10 == k) & (X_c1$V1 == (3 + i)) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21)]
print(i + 3)
}
}
}
for(i in 0 : 21){

```

```

if(sum(V_l_d[i + 1, ]) != 0)
lines(timess, (V_l_d[i + 1, ]))
}
}
#dev.off()

## Medias de conteos por dia considerando mismos intervalos
V_l <- matrix(data = 0.5, nrow = 6, ncol = 40)

# Dias no sabado
for(i in 0 : 4){
for(j in 2 : 41){
V_l[i + 1, j - 1] <- mean(X_c1[(X_c1$V14 == 0) & (X_c1$V10 == i) & (X_c1$V11 == j), 13])
}
}

# Sabado
for(j in 2 : 21){
V_l[6, j - 1] <- mean(X_c1[(X_c1$V14 == 0) & (X_c1$V10 == 5) & (X_c1$V11 == j), 13])
}

# Grafica de medias por dias y lapsos
x11()
color <- rainbow(6)
#postscript('mean_by_day_sq.eps')
plot(c(9, 18.75), c(min(V_l), max(V_l)), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos en escuela')
axis(side = 1, at = c(9:19))
for(i in 0 : 5){
lines(timess, V_l[i + 1, ], col = color[i + 1], lwd = 2)
}
legend(x = 16.6, y = 1.37, legend = c('Lunes', 'Martes', 'Miercoles', 'Jueves', 'Viernes', 'Sabado'),
#dev.off()

# Desviaciones estandar
sd_V_l <- matrix(data = 0, nrow = 6, ncol = 40)

# Dias no sabado
for(i in 0 : 4){
for(j in 2 : 41){
sd_V_l[i + 1, j - 1] <- sd(X_c1[(X_c1$V14 == 0) & (X_c1$V10 == i) & (X_c1$V11 == j), 13])
}
}

# Sabado
for(j in 2 : 21){
sd_V_l[6, j - 1] <- sd(X_c1[(X_c1$V14 == 0) & (X_c1$V10 == 5) & (X_c1$V11 == j), 13])
}

```

```
}
```

```
# Grafica de desviaciones estandar por dias y lapsos
```

```
x11()
```

```
color <- rainbow(6)
```

```
#postscript('sd_by_day_sq.eps')
```

```
plot(c(9, 18.75), c(min(sd_V_1), max(sd_V_1)), type = 'n', xlab = 'Hora', ylab = 'Conteos e
```

```
axis(side = 1, at = c(9:19))
```

```
for(i in 0 : 5){
```

```
lines(timess, sd_V_1[i + 1, ], col = color[i + 1], lwd = 2)
```

```
}
```

```
legend(x = 16.5, y = 1.69, legend = c('Lunes','Martes','Miercoles','Jueves', 'Viernes', 'Sa
```

```
#dev.off()
```

```
#####
```

```
# Estrategia: excluir ceros estructurales #
```

```
#####
```

```
# Cargar datos
```

```
rm(list = ls(all = TRUE))
```

```
X <- read.table('/home/mathrocker/Documentos/Posgrado/Maestria/UAQ/Tesis/Programas/Datos/N
```

```
# Corregir un dato que esta mal
```

```
X[X$V11 == 96, 11] = 0
```

```
#####
```

```
# Campana 1 #
```

```
#####
```

```
# Extraer campana 1
```

```
X_c1_wz <- X[X$V2 == 'C_1', ]
```

```
#####
```

```
# Filtrar semanas con ceros estructurales #
```

```
#####
```

```
# Ceros estructurales
```

```
# Dias Dia de la semana Semana Inicio semana incompleta
```

```
# 2 2 52 0
```

```
# 3 3 52 0
```

```
# 9 3 1 6
```

```
# 36 0 6 36
```

```
# 72 0 12 72
```

```
# 88 4 14 84
```

```
# 89 5 14* 84
```

```
# 106 4 18 102
```

```
# 107 5 18* 102
```

```
# 119 5 20* 114
```

```
# 131 5 22* 126
```

```
# *Solo se quitaran las semanas donde se pierde un dia entre semana
```

```

X_c1 <- X[(X$V2 == 'C_1') & (X$V1 != '52') & (X$V1 != '1') & (X$V1 != '6') & (X$V1 != '12')]

#####
# Visualizar serie de tiempo #
#####
# Estimar efectos estacionales alfas, se excluyen las semanas 26 y 27 para realizar pronost
alpha_c1 <- vector('numeric', 6)
theta_c1 <- matrix(data = NA, nrow = 40, ncol = 6)
for(i in 0:5){
  if(i %% 6 != 5){
    alpha_c1[i + 1] <- sum(X_c1[(X_c1$V10 == i) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 41) & (X_c1$V
    for(j in 0:39){
      theta_c1[j + 1, i + 1] <- sum(X_c1[(X_c1$V10 == i) & (X_c1$V11 == j + 2) & (X_c1$V1 != '26
    }
  }
  if(i %% 6 == 5){
    alpha_c1[i + 1] <- sum(X_c1[(X_c1$V10 == i) & (X_c1$V11 >= 2) & (X_c1$V11 <= 21) & (X_c1$V
    for(j in 0:19){
      theta_c1[j + 1, i + 1] <- sum(X_c1[(X_c1$V10 == i) & (X_c1$V11 == j + 2) & (X_c1$V1 != '26
    }
  }
}

# Crear matriz para almacenar datos de sumas de sqrt(X + 1/4)
# Sin semanas de Ceros estructurales hay 122 dias, seria tal vez conveniente automatizar e
W_c1 <- matrix(data = NA, nrow = 122, ncol = 5)

# Pasarle los datos
# El primer dia de datos con semanas completas es 12
j = 12
for(i in 0:121){
  if(i %% 6 != 5){
    W_c1[(i + 1), 2] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 41, 13])
    W_c1[(i + 1), 3] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 41, 12])
  }

  if(i %% 6 != 5){
    W_c1[(i + 1), 2] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 41, 13])
    W_c1[(i + 1), 3] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 41, 12])
  }
  if(i %% 6 == 5){
    W_c1[(i + 1), 2] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 21, 13])
    W_c1[(i + 1), 3] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 21, 12])
  }
}
W_c1[(i + 1), 1] <- W_c1[(i + 1), 2] - alpha_c1[i %% 6 + 1]
W_c1[(i + 1), 4] <- j
W_c1[(i + 1), 5] <- j %% 6

```

```

j <- j + 1
if((j == 36) | (j == 72) | (j == 84) | (j == 102))
j <- j + 6
}

# Tres series juntas
x11()
#postscript('time_series_ZE.eps')
par(mfrow = c(3, 1))
tam <-length(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3])/10
# Sumas en escala original
plot(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3], type = 'l', col = 'blue', xlab = 'd', ylab = 'y')
points(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3], col = 'red')
axis(side = 1, at = 10*c(1:tam))
# Sumas en escala de la raiz
plot(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2], type = 'l', col = 'blue', xlab = 'd', ylab = 'y')
points(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2], col = 'red')
axis(side = 1, at = 10*c(1:tam))
#dev.off()
# Sumas en escala de raiz centradas
plot(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 1], type = 'l', col = 'blue', xlab = 'd', ylab = 'y')
points(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 1], col = 'red')
axis(side = 1, at = 10*c(1:tam))
#dev.off()

#####
# Funciones de Autocorrelacion y Autocorrelacion Parcial #
#####

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial para datos originales

X_o_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3]
x11()
#postscript('pacf_datos_originales_ZE.eps')
acf2(X_o_t, 80)
#dev.off()

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial para datos en escala de la raiz

X_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2]
x11()
#postscript('pacf_datos_en_escala_raiz_ZE.eps')
acf2(X_t, 80)
#dev.off()

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial para datos en escala de la raiz cent
cX_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 1]

```

```

x11()
#postscript('pacf_datos_en_escalaraiz_centrados_ZE.eps')
acf2(cX_t, 80)
#dev.off()

#####
# Explorar diferencia #
#####
# Sumas en escala de la raiz
X_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2]
dX_t <- diff(X_t, 5)
# Grafica de diferencia de primer orden con lag 5
x11()
par(mfrow = c(3, 1))
plot(dX_t, type = 'l', col = 'blue', xlab = 'Dia')
points(dX_t, col = 'red')

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial de diferencias de orden 5
x11()
#postscript('diff_pacf_datos_en_escalaraiz_ZE.eps')
acf2(dX_t, 80)
#dev.off()

# Veamos por partes las funciones de autocorrelacion y autocorrelacion parcial solo de la p
x11()
y <- acf2(dX_t, 80)
ts <- 5*(1:16)
lim <- qnorm(c(0.025, 0.975), 0, 1/sqrt(length(X_t)))
#postscript('s_diff_pacf_datos_en_escalaraiz_ZE.eps')
par(mfrow = c(2, 1))
plot(ts, y[ts, 1], ylim = c(-0.61, 0.41), type = 'h', xlab = 'LAG', ylab = 'ACF')
abline(h = 0)
abline(h = lim, lty = 2, col = 'blue')
plot(ts, y[ts, 2], ylim = c(-0.61, 0.41), type = 'h', xlab = 'LAG', ylab = 'PACF')
abline(h = 0)
abline(h = lim, lty = 2, col = 'blue')
#dev.off()
# Sumas en escala original
X_o_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3]
dX_o_t <- diff(X_o_t, 5)
# Grafica de diferencia de primer orden con lag 5
x11()
par(mfrow = c(3, 1))
plot(dX_o_t, type = 'l', col = 'blue', xlab = 'Dia')
points(dX_o_t, col = 'red')

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial de diferencias de orden 5

```

```

x11()
acf2(dX_o_t, 80)

# Veamos por partes las funciones de autocorrelacion y autocorrelacion parcial solo de la p
y <- acf2(dX_o_t, 80)
ts <- 5*(1:16)
lim <- qnorm(c(0.025, 0.975), 0, 1/sqrt(length(X_o_t)))
x11()
par(mfrow = c(2, 1))
plot(ts, y[ts, 1], ylim = c(-0.61, 0.41), type = 'h', xlab = 'LAG', ylab = 'ACF')
abline(h = 0)
abline(h = lim, lty = 2, col = 'blue')
plot(ts, y[ts, 2], ylim = c(-0.61, 0.41), type = 'h', xlab = 'LAG', ylab = 'PACF')
abline(h = 0)
abline(h = lim, lty = 2, col = 'blue')

#####
# Modelos SARIMA #
#####
# Sumas en escala de raiz
X_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2]
# Base
x11()
sarima(X_t, 5, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
# El mejor
x11()
#pdf('SARIMA_200_011_5_ZE.pdf')
sarima(X_t, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
#dev.off()
# Otro
x11()
sarima(X_t, 0, 0, 5, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
# Otro
x11()
sarima(X_t, 0, 0, 2, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
# Otro
x11()
sarima(X_t, 2, 0, 2, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
# Miau
x11()
sarima(X_t, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
# Miau Miau
x11()
sarima(X_t, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
# Miau miua meow
x11()
sarima(X_t, 2, 0, 1, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)

```

```

# Caso importante
x11()
sarima(X_t, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)

# Mejora ajuste, pero no tan buen AIC, AICc y BIC
x11()
sarima(X_t, 12, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)

# Sumas en escala de raiz centradas
cX_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 1]
# primero
x11()
sarima(cX_t, 1, 0, 0, 0, no.constant = TRUE)
# Otro
x11()
sarima(cX_t, 0, 0, 1, no.constant = TRUE)
# El mejor
x11()
#pdf('AR_2_ZE.pdf')
sarima(cX_t, 2, 0, 0, no.constant = TRUE)
#dev.off()
# Miau Miau
x11()
sarima(cX_t, 0, 0, 2, no.constant = TRUE)
# Miau Miau
x11()
sarima(cX_t, 1, 0, 1, no.constant = TRUE)
# otros
x11()
sarima(cX_t, 2, 0, 1, no.constant = TRUE)
# Mejor ajuste, pero no tan buen AIC, AICc y BIC
x11()
sarima(cX_t, 12, 0, 0, no.constant = TRUE)

# Sumas en escala original
X_o_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3]
# Primera opcion
x11()
sarima(X_o_t, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
# Segunda opcion
x11()
sarima(X_o_t, 12, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
# Otro
x11()
sarima(X_o_t, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
#####
# Pronosticos #

```



```
#####
```

```
# Sumas en escala de la raiz
```

```
tX_t <- W_c1[115: 119, 2]
```

```
# El mejor
```

```
x11()
```

```
#pdf('F_SARIMA_200_011_5_ZE.pdf')
```

```
sarima.for(X_t, 5, 2, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
```

```
lines((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
```

```
points((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
```

```
#dev.off()
```

```
# El extra con 12
```

```
x11()
```

```
sarima.for(X_t, 5, 12, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
```

```
lines((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
```

```
points((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
```

```
# Otro de interes
```

```
x11()
```

```
sarima.for(X_t, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
```

```
lines((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
```

```
points((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
```

```
# Sumas en escala de la raiz centradas
```

```
tcX_t <- W_c1[115: 119, 1]
```

```
# El mejor
```

```
x11()
```

```
#pdf('F_AR_2_ZE.pdf')
```

```
# sarima.for(cX_t, 5, 2, 0, 0, no.constant = TRUE) # No funciona sin la constante
```

```
sarima.for(cX_t, 5, 2, 0, 0)
```

```
lines((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
```

```
points((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
```

```
#dev.off()
```

```
# El extra con 12
```

```
x11()
```

```
# sarima.for(cX_t, 5, 12, 0, 0, no.constant = TRUE) # No funciona sin la constante
```

```
sarima.for(cX_t, 5, 12, 0, 0)
```

```
lines((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
```

```
points((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
```

```
# Otro de interes
```

```
x11()
```

```
# sarima.for(cX_t, 5, 1, 0, 0, no.constant = TRUE) # No funciona sin la constante
```

```
sarima.for(cX_t, 5, 1, 0, 0)
```

```
lines((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
```

```
points((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
```

```
# Sumas en escala original
```

```

tX_o_t <- W_c1[115: 119, 3]
# El mejor
x11()
sarima.for(X_o_t, 5, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
lines((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tX_o_t, col = 'blue')
points((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tX_o_t, col = 'blue')
# El extra con 12
x11()
sarima.for(X_o_t, 5, 12, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
lines((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tX_o_t, col = 'blue')
points((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tX_o_t, col = 'blue')

#####
# Estrategia: imputar ceros estructurales #
#####

# Cargar datos
rm(list = ls(all = TRUE))
X <- read.table('/home/mathrocker/Documentos/Posgrado/Maestria/UAQ/Tesis/Programas/Datos/N
# Corregir un dato que esta mal
X[X$V11 == 96, 11] = 0

#####
# Campana 1      #
#####

# Extraer campana 1
X_c1 <- X[(X$V2 == 'C_1') & (X$V1 != '52') & (X$V1 != '1'), ]
X_c1_0 <- X_c1
#####
# Ceros estructurales      #
#####
# Dias Dia de la semana Semana Inicio semana incompleta
# 2 2 52 0
# 3 3 52 0
# 9 3 1 6
# 36 0 6 36
# 72 0 12 72
# 88 4 14 84
# 89 5 14* 84
# 106 4 18 102
# 107 5 18* 102
# 119 5 20* 114
# 131 5 22* 126

#####
# Imputar datos faltantes con promedios del pasado#

```



```

W_c1[(j - 11), 3] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 41, 12])
}
if(j %% 6 == 5){
W_c1[(j - 11), 2] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 21, 13])
W_c1[(j - 11), 3] <- sum(X_c1[X_c1$V9 == j & X_c1$V11 >= 2 & X_c1$V11 <= 21, 12])
}
W_c1[(j - 11), 1] <- W_c1[(j - 11), 2] - alpha_c1[j %% 6 + 1]
W_c1[(j - 11), 4] <- j
W_c1[(j - 11), 5] <- j %% 6
}

# Tres series juntas
x11()
#postscript('time_series_IM.eps')
par(mfrow = c(3, 1))
tam <- length(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3])/10
# Sumas en escala original
plot(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3], type = 'l', col = 'blue', xlab = 'd', ylab
points(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3], col = 'red')
axis(side = 1, at = 10*c(1:tam))
# Sumas en escala de la raiz
plot(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2], type = 'l', col = 'blue', xlab = 'd', ylab
points(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2], col = 'red')
axis(side = 1, at = 10*c(1:tam))
# Sumas en escala de raiz centradas
plot(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 1], type = 'l', col = 'blue', xlab = 'd', ylab
points(W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 1], col = 'red')
axis(side = 1, at = 10*c(1:tam))
#dev.off()
#####
# Funciones de Autocorrelacion y Autocorrelacion Parcial #
#####

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial para datos originales
X_o_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 3]
x11()
#postscript('pacf_datos_originales_IM.eps')
acf2(X_o_t, 80)
#dev.off()

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial para datos en escala de la raiz
X_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2]
x11()
#postscript('pacf_datos_en_escala_raiz_IM.eps')
acf2(X_t, 80)
#dev.off()

```

```

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial para datos en escala de la raiz cent
cX_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 1]
x11()
#postscript('pacf_datos_en_escalaraiz_centrados_IM.eps')
acf2(cX_t, 80)
#dev.off()

#####
# Explorar diferencia #
#####
# Sumas en escala de la raiz
X_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2]
dX_t <- diff(X_t, 5)
# Grafica de diferencia de primer orden con lag 5
x11()
plot(dX_t, type = 'l', col = 'blue', xlab = 'Dia')
points(dX_t, col = 'red')

# Funcion de autocorrelacion y autocorrelacion parcial de diferencias de orden 5
x11()
#postscript('diff_pacf_datos_en_escalaraiz_IM.eps')
acf2(dX_t, 80)
#dev.off()
# Veamos por partes las funciones de autocorrelacion y autocorrelacion parcial solo de la p
x11()
y <- acf2(dX_t, 80)
ts <- 5*(1:16)
lim <- qnorm(c(0.025, 0.975), 0, 1/sqrt(length(X_t)))
#postscript('s_diff_pacf_datos_en_escalaraiz_IM.eps')
par(mfrow = c(2, 1))
plot(ts, y[ts, 1], ylim = c(-0.61, 0.41), type = 'h', xlab = 'LAG', ylab = 'ACF')
abline(h = 0)
abline(h = lim, lty = 2, col = 'blue')
plot(ts, y[ts, 2], ylim = c(-0.61, 0.41), type = 'h', xlab = 'LAG', ylab = 'PACF')
abline(h = 0)
abline(h = lim, lty = 2, col = 'blue')
#dev.off()
#####
# Modelos SARIMA #
#####
# Sumas en escala de raiz
X_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 2]
# El mejor
x11()
#pdf('SARIMA_100_011_5_IM.pdf')
sarima(X_t, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
#dev.off()

```

```

# Mejora ajuste, pero no tan buen AIC, AICc y BIC
x11()
sarima(X_t, 14, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)

# Sumas en escala de raiz centradas
cX_t <- W_c1[W_c1[, 5] != 5 & W_c1[, 4] < 150, 1]
# El mejor
x11()
#pdf('AR_1_IM.pdf')
sarima(cX_t, 1, 0, 0, no.constant = TRUE)
#dev.off()
# Mejora ajuste, pero no tan buen AIC, AICc y BIC# Mejora
x11()
sarima(cX_t, 14, 0, 0, no.constant = TRUE)

#####
# Pronosticos #
#####
# Sumas en escala de la raiz
tX_t <- W_c1[139:143, 2]
# El mejor
x11()
#pdf('F_SARIMA_100_011_5_IM.pdf')
sarima.for(X_t, 5, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
lines((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
points((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
#dev.off()
# Mejora ajuste, pero no tan buen AIC, AICc y BIC
x11()
sarima.for(X_t, 5, 14, 0, 0, 0, 1, 1, 5, no.constant = TRUE)
lines((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')
points((length(X_t) + 1): (length(X_t) + 5), tX_t, col = 'blue')

# Sumas en escala de raiz centradas
tcX_t <- W_c1[139:143, 1]
# El mejor
x11()
#pdf('F_AR_1_IM.pdf')
# sarima.for(cX_t, 5, 1, d = 0, q = 0, no.constant = TRUE) Por alguna razon no funciona si
sarima.for(cX_t, 5, 1, 0, 0)
lines((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
points((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
#dev.off()
# Mejora ajuste, pero no tan buen AIC, AICc y BIC
x11()
# sarima.for(cX_t, 5, 14, 0, 0, no.constant = TRUE) Por alguna razon no funciona sin la co
sarima.for(cX_t, 5, 14, 0, 0)

```

```

lines((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')
points((length(cX_t) + 1): (length(cX_t) + 5), tcX_t, col = 'blue')

#####
# Efecto quincenal      #
#####
W_c1_e <- W_c1

# Escalar informacion
W_c1_e[W_c1_e[, 5] != 5, 1:3] <- W_c1[W_c1[, 5] != 5, 1:3]/10
W_c1_e[W_c1_e[, 5] == 5, 1:3] <- W_c1[W_c1[, 5] == 5, 1:3]/5

# Funcion de autocorrelacion parcial escala de raiz con efecto estacional quincenal
rm(w)
w <- W_c1_e[ , 2]
x11()
#postscript('pacf_quincena_IM.eps')
acf2(w, 80)
#dev.off()

```

# Bibliografía

- Aksin, Z., M. Armony, and V. Mehrotra. 2007. The modern call center: a multi-disciplinary perspective on operations management research. *Production and Operations Management*, 16(6):665–688.
- Armony, M., E. Plambeck, and S. Seshadri. 2009. Sensitivity of optimal capacity to customer impatience in an unobservable M/M/S queue (why you shouldn't shout at the DMV). *Manufacturing & Service Operations Management*, 11(1):19–32.
- Avramidis, A. N., A. Deslauriers, and P. L'Ecuyer. 2004. Modeling daily arrivals to a telephone call Center. *Management Science*, 50(7):896–908.
- Box, G. E. P. and G. M. Jenkins. 1970. *Time series analysis, forecasting, and control*. Holden-Day, Oakland, CA.
- Box, G. E. P., G. M. Jenkins, and G. C. Reinsel. 1994. *Time series analysis, forecasting, and control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 3rd edition.
- Brown, L., T. Cai, R. Zhang, L. Zhao, and H. Zhou. 2009. The root-unroot algorithm for density estimation as implemented via wavelet block thresholding. *Probability Theory and Related Fields*, 146(3):401–433.
- Brown, L., N. Gans, A. Mandelbaum, A. Sakov, H. Shen, S. Zeltyn, and L. Zhao. 2005. Statistical analysis of a telephone call center: a queueing-science perspective. *Journal of the American Statistical Association*, 100(469):36–50.
- Chuchual, P., N. Chongpravatisakul, T. Kusolmanomai, and S. Komolavanij. 2010. Inbound and outbound calls assignment for an efficient call center. *2010 7th International Conference on Service Systems and Service Management, Proceedings of ICSSSM' 10*, 66(0):468–471.
- De Freitas Filho, P. J., G. F. Da Cruz, R. Sea Ra, and G. Steinmann. 2007. Using simulation to predict market behavior for outbound call centers. *Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference*, pages 2247–2251.
- Fitt, A. and R. Martinez-Vila, editors 1996. Grupo de estudio con la industria y cursos en matemáticas industriales. *Comunicaciones: Sociedad Matemática Mexicana*, 17.
- Gans, N., G. Koole, and A. Mandelbaum. 2003. Telephone call centers: tutorial, review, and research prospects. *Manufacturing & Service Operations Management*, 5(2):79–141.
- Gans, N., H. Shen, Y. P. Zhou, N. Korolev, A. McCord, and H. Ristock. 2015. Parametric forecasting and stochastic programming models for call-center workforce schedulings. *Manufacturing & Service Operations Management*, 17(4):571–588.



- Henderson, S. G. 2003. Estimation for nonhomogeneous Poisson processes from aggregated data. *Operations Research Letters*, 31(5):375–382.
- Kao, E. P. C. and S. L. Chang. 1988. Modeling time-dependent arrivals to service systems: a case in using a piecewise-polynomial rate function in a nonhomogeneous Poisson process. *Management Science*, 34(11):1367–1379.
- Mandelbaum, A. 2006. Call centers (centres): research bibliography with abstracts. *Comunicación personal*.
- Mandelbaum, A. and S. Zeltyn. 2007. The M/M/n+G queue: summary of performance measures. Technical report, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel.
- Massey, W. A., G. A. Parker, and W. Whitt. 1996. Estimating the parameters of a nonhomogeneous Poisson process with linear rate. *Telecommunication Systems*, 5(2):361–388.
- Rincón, L. 2012. *Introducción a los procesos estocásticos*. La Prensa de Ciencias, México Distrito Federal.
- Ross, S. 2010. *Introduction to probability models*. Academic Press.
- Shafae, M. S., M. H. Elwany, M. N. Fors, and Y. Abouelseoud. 2012. Stochastic data analysis and modeling of a telephone call center. *Proceedings of the 2012 International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, pages 1340–1349.
- Shen, H. 2010. Statistical analysis of call-center operational data: forecasting call arrivals, and analyzing customer patience and agent service. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, pages 1–10.
- Shen, H. and J. Z. Huang. 2008. Interday forecasting and intraday updating of call center arrivals. *Manufacturing & Service Operations Management*, 10(3):391–410.
- Shumway, R. H. and D. S. Stoffer. 2015. *Time series analysis and its applications*. Springer Text in Statistics. Springer International Publishing, 3th edition.
- Trofimov, V., P. Feigin, A. Mandelbaum, S. Zeltyn, E. Nadjgarov, I. Gavanko, L. Brown, N. Gans, H. Shen, and L. Zhao. 2006. DATA-MOCCA: data model for call center analysis. Technical report, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel.
- Woo, J. and S. Chan. 2010. Outsourcing strategy in two-stage call centers. *Computers & Operations Research*, 37:790–805.