

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en ciencias
Ingeniería Matemática

Generalización del Teorema de Fermat-Torricelli y caminos mínimos.

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Ingeniería Matemática)

Presenta: LMA Marco Antonio Rojas Tapia
Dirigido por: Dr. Jesús Jerónimo Castro

Dr. Jesús Jerónimo Castro
Presidente

Firma

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López
Secretario

Firma

Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez
Vocal

Firma

M en C Víctor Antonio Aguilar Arteaga
Suplente

Firma

M en C Luisa Ramírez Granados
Suplente

Firma

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Enero 2018
México

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad

Dra. en C. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Directora de Investigación y Posgrado

Resumen

Se presentará una nueva solución al problema de Fermat-Torricelli sobre conjuntos convexos, también se presenta un algoritmo para encontrar geoméricamente la solución a este problema. Además también se demuestran algunos resultados interesantes derivados de los teoremas obtenidos.

(Palabras clave: Mínimo, Fermat, punto, geometría, optimización)

Summary

We will see a new solution to Fermat-Torricelli's problem applied to convex sets, also an algorithm to find geometrically the solution to this problem. Besides we will show some interesting results derived from the theorems obtained.

(**Key words:** minimum, Fermat, point, geometry, optimization)

Dedicatoria y Agradecimientos

Dedico esta tesis a todas aquellas personas que me apoyaron durante estos dos años de maestría, sin ellos no lo hubiera logrado.

Agradezco a mi familia el apoyo que me dieron para poder realizar este sueño que tengo desde muy pequeño, a mis padres por exigirme seguir estudiando y ser una persona preparada, a mis hermanas Claudia y Fabiola por estar ahí cuando más las necesitaba aunque ellas no lo supieran. Gracias al Dr. Jerónimo por dejarme ser su tesista nuevamente, sus enseñanzas desde que tomé el curso de geometrías me han ayudado a crecer como matemático y como persona. A mis sinodales, maestros y mi coordinador, el Dr. Robertito, por hacer todo lo posible en apoyarme a pesar de mis irresponsabilidades. A la maestra Paty por darme la oportunidad de dar clases en la Facultad de Ingeniería. Y finalmente gracias a los contribuyentes mexicanos que hicieron posible que CONACYT pudiera otorgarme una beca y así obtener el grado de Maestro.

Contenido

Resumen	I
Summary	III
1. Introducción	1
2. El punto de Fermat-Torricelli	3
2.1. El punto de Fermat para tres puntos.	3
2.2. El punto de Fermat para n puntos con peso.	10
2.3. Elipses como solución al problema de Fermat	13
3. El punto de Fermat para tres conjuntos convexos.	19
3.1. Elipses Generalizadas.	19
3.2. Propiedades del punto de Fermat para tres convexos.	23

3.3. Ejemplos sencillos del punto de Fermat para tres convexos.	29
3.4. Triángulos formados por el punto de Fermat.	31
4. Una forma de encontrar el punto de Fermat para tres conjuntos convexos. 37	
4.1. Propuesta de algoritmo y convergencia.	37
4.2. Programación y algunos ejemplos.	39
4.2.1. Ejemplos geométricos sencillos.	47

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo de tesis se presentará la investigación realizada entre 2015 y 2017 durante mi estancia en la Maestría en Ciencias (Ingeniería Matemática.) Los programas computacionales utilizados para llevar a cabo esta investigación fueron: Mathematica 10, Geogebra 5, Ipe, TexMaker y Microsoft Word.

Un problema conocido en el área de geometría y optimización es *el punto de Fermat*, el cual se puede interpretar en la vida real como la localización de un almacén en un mapa de tal manera que quede lo más cerca posible a tres poblaciones. Abordaremos este problema desde dos perspectivas: considerar a las poblaciones como puntos y considerarlas como conjuntos convexos.

En el primer capítulo se presenta el problema original del punto de Fermat, así como la solución que dio Torricelli a este problema. También veremos una primera generalización de este problema tomando n puntos cualesquiera, cada uno con un peso asignado y las propuestas de solución que dieron algunos matemáticos para este problema. Finalmente se da una solución totalmente geométrica a estos problemas usando propiedades conocidas de las elipses.

Las aportaciones teóricas de este trabajo se presentan en el segundo capítulo. Primero se define el concepto de elipse generalizada para conjuntos convexos y se da una demostración más formal a la existente para algunas propiedades de esta nueva elipse, estas propiedades nos ayudan a demostrar un Teorema muy importante. Luego se plantea el problema del punto de Fermat para tres convexos así como la demostración de un par de Teoremas que nos ayudan a encontrar este punto y unos ejemplos sencillos para entender la utilidad de estos Teoremas. Finalmente se muestran resultados matemáticamente interesantes que surgen a partir de haber encontrado el punto de Fermat para tres conjuntos convexos.

Finalmente en el tercer capítulo se presenta la parte más importante de este trabajo, la cual es un algoritmo geométrico para encontrar el punto de Fermat para tres conjuntos convexos basándonos en los Teoremas demostrados en el capítulo dos. De este algoritmo se obtiene una sucesión de puntos muy especiales la cual demostraremos que converge al punto de Fermat deseado, así como otros resultados de menor importancia pero que son muy útiles para definir la sucesión.

Capítulo 2

El punto de Fermat-Torricelli

En este capítulo se hará un análisis del punto de Fermat-Torricelli, primero como fue que surgió este problema y la solución que dió Torricelli así como algunas propiedades de este punto. También abordaremos el problema de Fermat-Weber con un Teorema demostrado por Pierre Varignon y su uso en la mesa de Varignon. Finalmente veremos una propiedad característica de la elipse conocida como la propiedad óptica de la elipse.

2.1. El punto de Fermat para tres puntos.

Un problema clásico de geometría y optimización es el *punto de Fermat*, el cual es un punto que minimiza la suma de distancias hacia tres puntos dados en el plano. Este problema fue planteado por el matemático francés Pierre de Fermat y resuelto por Evangelista Torricelli, un matemático italiano contemporáneo a Fermat.

La historia nos dice que Fermat le mandó una carta con el problema a Torricelli en forma de reto quien logra resolverlo y da una condición para este punto, de aquí que el punto se le conozca como el *punto de Fermat-Torricelli*, sin embargo el resultado fue publicado por un alumno de Torricelli llamado Vincenzo Viviani, tiempo después de la muerte de Torricelli.

Podemos representar este problema en la vida real de la siguiente forma:

Supongamos que se quiere poner un almacén que suministre alimentos a tres poblaciones, Suponiendo que los gastos de construcción y transporte son proporcionales a la distancia por recorrer y que las 3 poblaciones necesiten la misma cantidad de alimentos. ¿Dónde se debe poner el almacén de tal manera que quede lo más cerca posible de las tres poblaciones para que lo gastos de transporte y construcción de la carretera sea lo menor posible?

Para encontrar la solución a este problema, primero demostraremos el siguiente lema que usaremos en varios teoremas más adelante.

Lema 2.1.1 *El punto de Fermat de un triángulo cerrado $\triangle \bar{ABC}$ está en la frontera o en el interior del triángulo..*

Demostración.

Sea P un punto fuera del triángulo $\triangle \bar{ABC}$ y sin pérdida de generalidad supongamos que está en el semiplano formado por AB que no contiene al triángulo $\triangle ABC$, luego consideremos el segmento PC y sea Q la intersección de este segmento con el segmento AB . Claramente $PC > QC$, además $BA = BQ + QA$ y $BA < PA + PB$ entonces $BQ + QA < PA + PB$ y por lo tanto

$$AQ + BQ + CQ < AP + BP + CP,$$

es decir, para cualquier P que esté fuera del triángulo $\triangle \bar{ABC}$ siempre habrá un punto en la frontera de $\triangle ABC$ cuya suma de distancias a los vértices sea menor que la suma de distancias desde P , que a su vez será menor o igual a la distancia desde un punto en el interior de $\triangle ABC$. \square

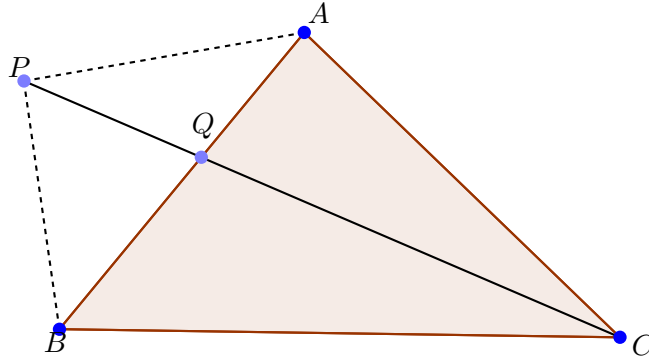


Fig. 1. Suma desde un punto fuera del triángulo.

El siguiente Teorema nos dirá como encontrar ese punto (almacén) y después veremos una propiedad característica de él.

Teorema 2.1.1 *Sea $\triangle abc$ un triángulo que no tenga ángulos mayores a 120° . Entonces el punto F que minimiza la suma de distancias hacia los vértices del triángulo $\triangle abc$ es la intersección de los segmentos XC y BY , donde X y Y son los vértices del triángulo equilátero exterior sobre los lados AB y AC , respectivamente.*

Demostración. Sea F un punto tal que la suma $FA + FB + FC$ sea mínima. Obtenemos el triángulo $\triangle BC'F'$ al girar el triángulo $\triangle ABF$ 60° , como los triángulos anteriores son congruentes, entonces

$$BF = BF', BA = BC', AF = C'F'.$$

Claramente, el triángulo $\triangle BFF'$ es equilátero pues $BF = BF'$ y estos segmentos forman un ángulo de 60° , entonces $FF' = BF$

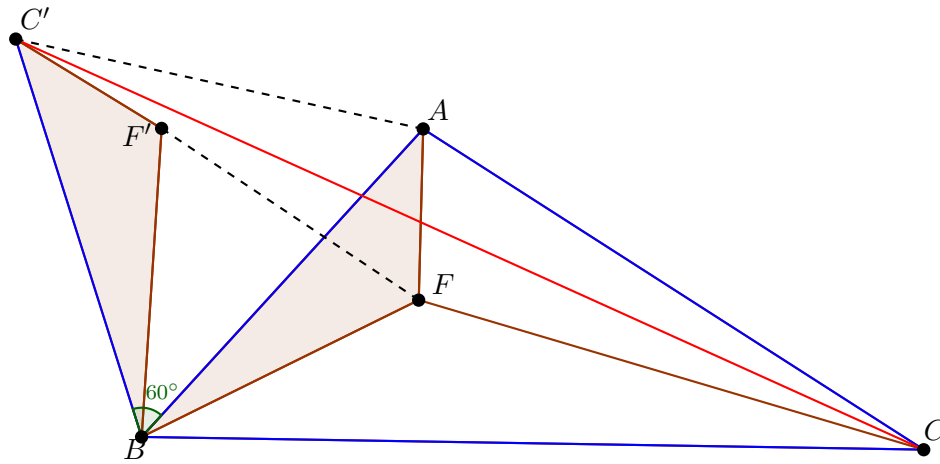


Fig. 2. Construcción de Torricelli.

Con esta construcción podemos cambiar la suma $FA + FB + FC$ por $C'F + F'F + FC$, que es el camino desde C' hasta C pero el camino más pequeño entre C' y C es el segmento que los une, entonces el punto F tiene que estar sobre el segmento $C'C$. Más aún, el triángulo $\triangle BC'A$ es equilátero pues $BC' = BA$ y estos segmentos forman un ángulo de 60° , entonces el punto F tiene que estar sobre el segmento $C'C$ donde C' es el vértice del triángulo equilátero exterior con lado AB .

Haciendo una construcción similar a la anterior sobre el lado AC , tenemos que el punto F debe estar en el segmento $B'B$ donde B' es el vértice del triángulo equilátero con lado AC . Por lo tanto F tiene que estar en la intersección de los segmentos $B'B$ y $C'C$. \square

Teorema 2.1.2 Sea F el punto de Fermat de un triángulo $\triangle ABC$ que no tenga ángulos mayores a 120° , entonces

$$\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$$

Demostración. Por el Teorema anterior sabemos que el punto de Fermat F para el triángulo $\triangle ABC$ es la intersección de los segmentos $B'B$ y $C'C$, además tracemos el segmento AF

Llamemos α y β a los ángulos $\angle BAF$ y $\angle FAC$, respectivamente. Luego $\angle C'AC = \angle BAB' = 60 + \alpha + \beta$ y además $BA = C'A$ y $AC = AB'$, entonces los triángulos $\triangle AC'C$ y $\triangle AB'B$ son congruentes. Se sigue que $\angle CC'A = \angle ABB'$, entonces el cuadrilátero $AFBC'$ es cíclico, análogamente $AFCB'$ es un cuadrilátero cíclico.

Como $\angle BC'A = 60$ entonces $\angle BFA = 120^\circ$, de igual manera $\angle CFA = 120^\circ$ y por lo tanto $\angle BFC = 120^\circ$ \square

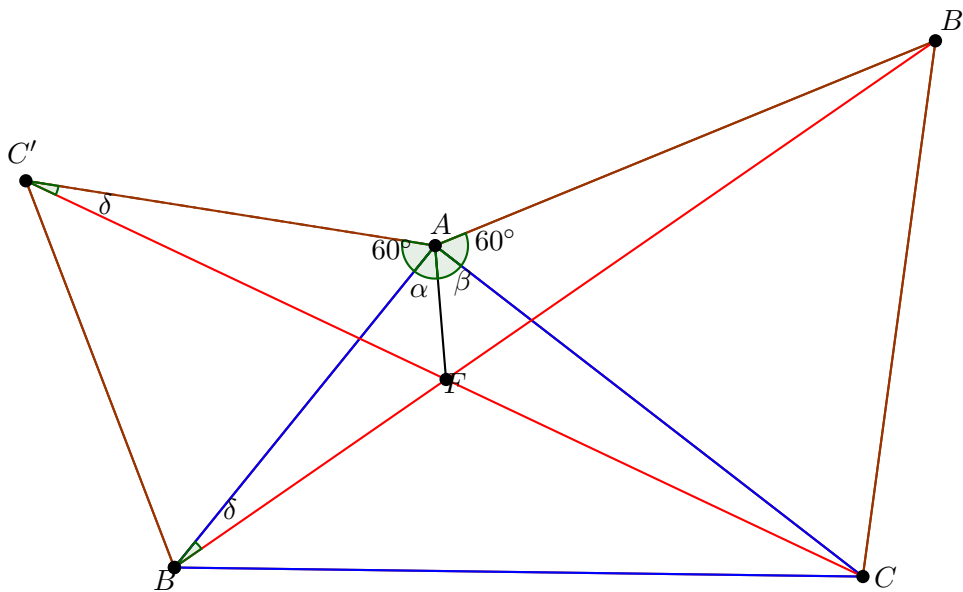


Fig. 3. Cuadrilateros cíclicos.

Ahora nos preguntamos ¿Qué pasa si en el triángulo $\triangle abc$ hay un ángulo mayor o igual a 120° ?

Una primera opción es hacer una construcción similar a la del Teorema 1, primero veremos que sucede para un triángulo con un ángulo exactamente igual a 120° .

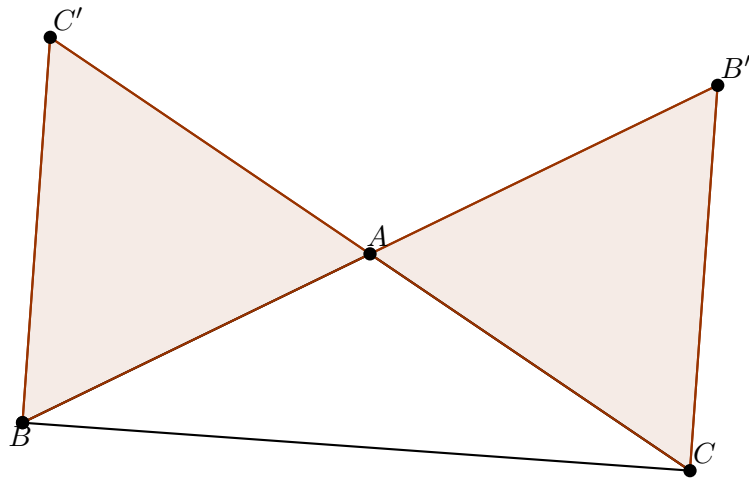


Fig. 4. Triángulo con un ángulo de 120° .

Podemos observar que para este caso la construcción sí funciona, pues por el Lema 1 sabemos que el punto de Fermat de un triángulo tiene que estar en la frontera o en el interior del triángulo, de hecho la intersección de los segmentos $B'B$ y $C'C$ es A , ahora veremos que sucede para un triángulo con un ángulo mayor estrictamente que 120° .

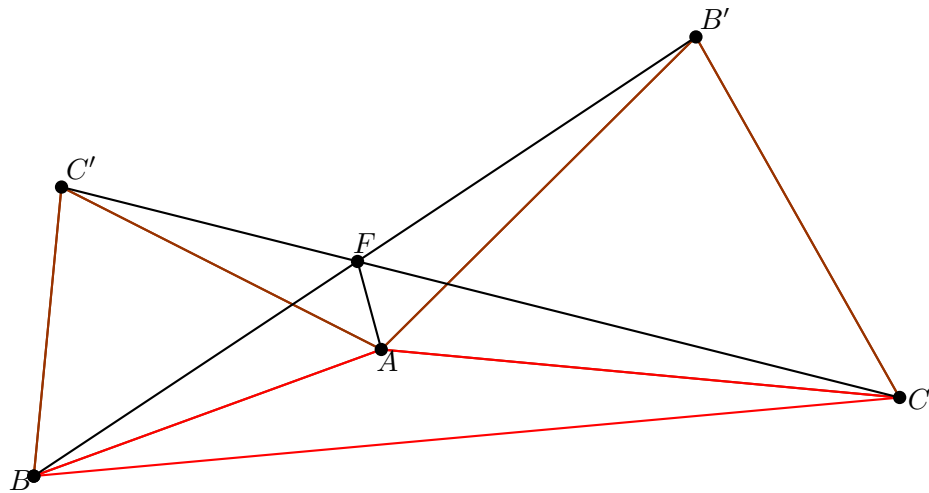


Fig. 5.

Si pudieramos aplicar la misma construcción a este nuevo triángulo $\triangle ABC$ observamos que el punto F obtenido queda fuera del triángulo $\triangle ABC$ y por el

Lema 1 este no puede ser punto de Fermat para el triángulo, ya que queda fuera de este. El siguiente Teorema nos dirá cuál es el punto de Fermat para este tipo de triángulos.

Teorema 2.1.3 *El punto de Fermat para un triángulo $\triangle ABC$ que contiene un ángulo mayor o igual a 120° es el vértice donde se forma ese ángulo.*

Demostración.

Supongamos que el punto que minimiza la suma de distancias hacia los vértices es un punto P dentro del triángulo $\triangle ABC$ que no sea A entonces,

$$PA + PB + PC < AB + AC.$$

Además, $\angle BPC > \angle BAC > 120^\circ$ entonces $\angle BPA, \angle APC < 120^\circ$.

Luego, el segmento AP parte el ángulo $\angle BAC$ en dos partes, donde alguno de los ángulos $\angle BAP$ o $\angle PAC$ es menor de 120° , supongamos sin pérdida de generalidad que $\angle BAP < 120^\circ$.

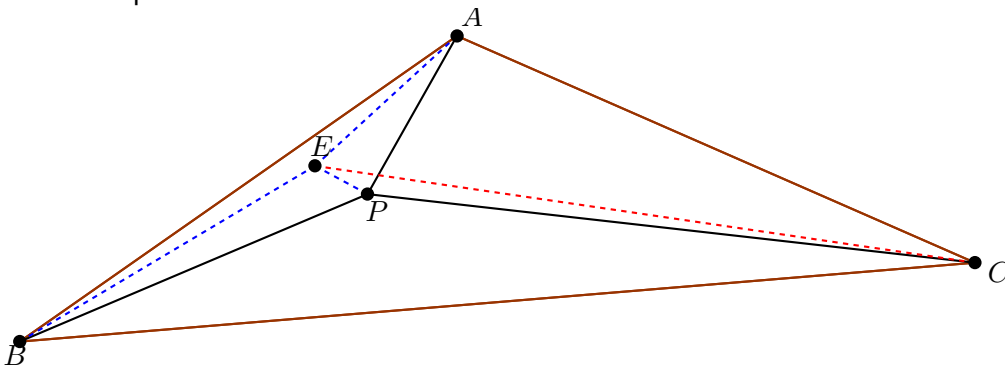


Fig. 6. Punto de Fermat para un triángulo con un ángulo mayor a 120° .

Por lo anterior, el triángulo $\triangle APB$ no contiene ángulos mayores a 120° entonces podemos encontrar el punto F de Fermat para este triángulo y tenemos que $AF + BF + FP < AP + PB$ y $FC < PF + PC$ entonces:

$$AF + BF + FC < AF + BF + FP + PC < AP + PB + PC.$$

Contradicción con que P sea el punto que minimiza la suma de distancias hacia los vértices, por lo tanto A es el punto de Fermat del triángulo $\triangle ABC$. \square

Teorema 2.1.4 Sea F el punto de Fermat de un triángulo $\triangle ABC$ que no tiene ángulos mayores a 120° , entonces las perpendiculares a los segmentos AF , BF y CF forman un triángulo equilátero.

Demostración. Sean GH , HI y GI los segmentos perpendiculares a AF , FC y FB , respectivamente. Consideremos el cuadrilátero $AFCH$, como $\angle AFC = 120^\circ$ y $\angle FAH = \angle FCH = 90^\circ$, entonces $\angle AHC = 60^\circ$. Análogamente para los cuadriláteros $AFBG$ y $BFCI$ tenemos que $\angle BGA = \angle BIC = 60^\circ$, por lo tanto el triángulo $\triangle GHI$ es equilátero. \square

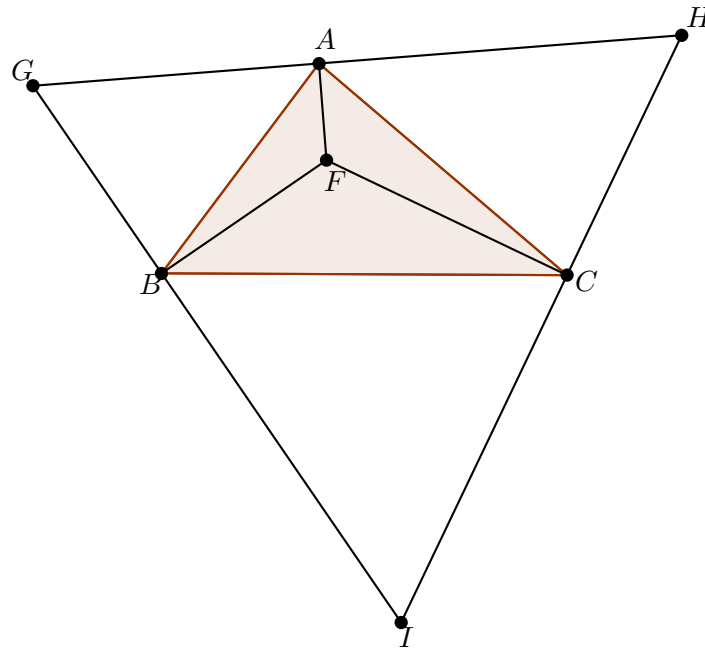


Fig. 7. Propiedad del punto de Fermat.

2.2. El punto de Fermat para n puntos con peso.

Podemos preguntarnos ahora ¿Qué pasa si en lugar de tres poblaciones (puntos) en el plano, ahora se tienen n poblaciones (puntos)? ¿Y qué pasa si algunos

tienen diferente demanda que otros?

Este problema se le atribuye al economista Alfred Weber, quien lo popularizó en 1909, debido a la revolución industrial de esa época y fue por esto que ahora se le conoce como el *problema de Fermat-Weber*, sin embargo, Weber no fue el primero que lo resolvió. En 1687, poco más de 200 años antes que Weber, Pierre Varignon formuló y resolvió el problema en su tratado *Nouvelle mécanique* como el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1 *Dadas varias fuerzas concurrentes, el momento resultante de las distintas fuerzas es igual al momento de la resultante de ellas, aplicada en el punto de concurrencia.*

Demostración.

Sean $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ un conjunto de n fuerzas concurrentes en los puntos A_1, A_2, \dots, A_n . El momento resultante respecto a un punto O es:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{OA}_i \times \vec{F}_i$$

Luego, los vectores \vec{PA}_i y \vec{F}_i son paralelos, entonces $\vec{PA}_i \times \vec{F}_i = 0$

Para cada momento individual se tiene lo siguiente:

$$\vec{OA}_i \times \vec{F}_i = (\vec{OP} + \vec{PA}_i) \times \vec{F}_i = \vec{OP} \times \vec{F}_i$$

Y para la resultante tenemos:

$$M_O = \sum_i \vec{OP} \times \vec{F}_i = \vec{OP} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{OP} \times \vec{F}$$

□

La aplicación de este Teorema al problema de Fermat-Weber es llamado la mesa de Varignon, que consiste en lo siguiente:

- 1) Sobre una tabla (plano) se hacen taladros en las posiciones correspondientes a los puntos iniciales.
- 2) Se pasa una cuerda por cada uno de estos agujeros, uniendo el extremo que queda encima de la tabla de cada una de las cuerdas en un nudo común.
- 3) A cada uno de los extremos restantes se le ata una pesa de masa proporcional a la ponderación del punto correspondiente.
- 4) Suponiendo condiciones ideales en la tabla (ausencia de rozamiento, agujeros en la tabla infinitamente pequeños, etc.), el lugar donde se equilibre el nudo será el punto que minimiza la suma de distancias con peso a los puntos iniciales.

El nudo es el punto que minimiza la distancia gracias al siguiente teorema.

Teorema 2.2.2 Sean A_1, A_2, \dots, A_n puntos en el plano con pesos w_1, w_2, \dots, w_n . La posición final del nudo de la máquina de Varignon cuando ésta queda en reposo coincide con el punto que minimiza la suma de distancias a los puntos con peso A_1, A_2, \dots, A_n .

Demostración. Sea P el plano del suelo y supóngase que la máquina está separada paralelamente de P a una distancia h . Sea l_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, la longitud desde el nudo hasta la pesa correspondiente y h_i la distancia de la pesa al plano P .

Cuando el sistema se deja libre, tenderá a situarse en la posición de mínima energía, entonces la posición de equilibrio en la máquina de Varignon será aquella donde la energía potencial total sea mínima y la energía potencial del sistema está dada por $E_p = \sum_{i=1}^m w_i h_i$. Sea A el punto de la tabla sobre el que se encuentra el nudo en un instante determinado.

Tenemos entonces:

$$l_i = d(Q, A_i) + (h - h_i) \Leftrightarrow h_i = d(Q, A_i) + (h - l_i).$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía potencial, se tiene:

$$\begin{aligned}
 E_p &= \sum_{i=1}^n w_i \dot{h}_i = \sum_{i=1}^n w_i [d(Q, A_i) + (h - l_i)] \\
 &= \sum_{i=1}^n w_i D(Q, A_i) + \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i
 \end{aligned}$$

como el segundo término de la última suma es una constante, el punto F sobre el que se sitúa el nudo cuando el sistema tiene mínima energía potencial es también el punto que minimiza la función $\sum_{i=1}^n w_i D(Q, A_i)$, que es precisamente el óptimo para el problema de Fermat.

2.3. Elipses como solución al problema de Fermat

Supongamos que tenemos dos poblaciones cerca del mar y se quiere poner un puerto sobre la curva que dibuja la playa para que de abasto a ese par de poblaciones ¿Dónde se debe poner el puerto para que la suma de distancias hacia las poblaciones sea mínima? ¿Qué condiciones debe cumplir ese punto?

Definición 2.3.1 *La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es una constante λ , llamado parámetro de la elipse.*

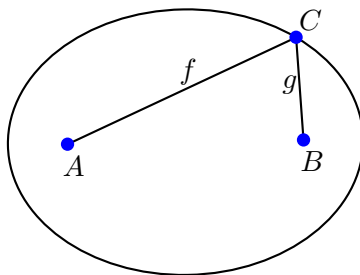


Fig. 8. Elipse.

Para dar una primera respuesta a la pregunta que se hizo al principio de esta sección simplemente basta con trazar la elipse que tiene como focos a las poblaciones y aumentar el parámetro de la elipse hasta que toque por primera vez a la curva de la playa y ese punto de contacto será la solución. Sin embargo, podemos encontrar ese punto de otra forma sin que tengamos que trazar toda la elipse y eso lo haremos con el siguiente Teorema conocido como *la propiedad óptica de la elipse* en la que nos enfocaremos pues nos ayudará más adelante.

Teorema 2.3.1 *Sea P un punto sobre la elipse con focos F_1, F_2 y consideremos la recta tangente l en el punto P . Entonces los ángulos que se forman con los segmentos F_1P y F_2P con la recta tangente en P son iguales.*

Demostración.

Como l es la bisectriz del ángulo formado por las rectas que pasan por F_1P y F_2P entonces $\alpha = \beta$.

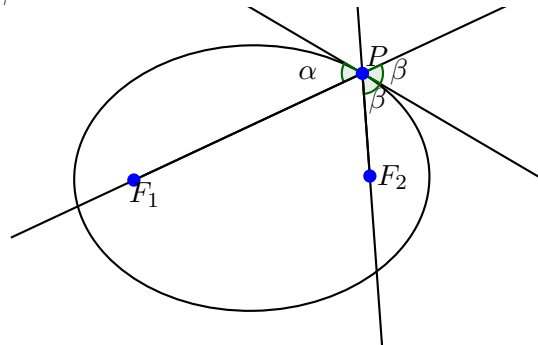


Fig. 9. Propiedad de la reflexión en la elipse.

Teorema 2.3.2 *Sea γ una curva simple cerrada tal que para cada punto P sobre la curva se tiene que los ángulos que se forman con la línea soporte en P y los segmentos PF_1 y PF_2 son iguales, donde F_1 y F_2 son puntos fijos en el interior de la curva γ . Entonces $PF_1 + PF_2 = cte \forall P \in \gamma$ y por lo tanto γ es una elipse.*

Demostración.

Podemos parametrizar a los puntos de la curva γ como $P(t) = (x(t), y(t))$ y definimos el siguiente par de funciones:

$$S_1(t) = \sqrt{(x(t) - x_1)^2 + (y(t) - y_1)^2}$$

$$S_2(t) = \sqrt{(x(t) - x_2)^2 + (y(t) - y_2)^2},$$

donde $F_1 = (x_1, y_1)$ y $F_2 = (x_2, y_2)$.

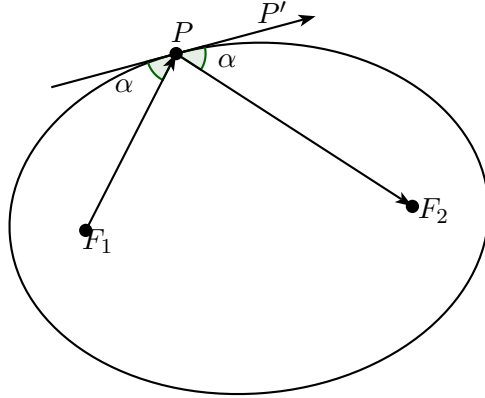


Fig. 10, Propiedad óptica de la elipse.

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= \frac{1}{\|PF_1\|} ((x(t) - x_1)x'(t) + (y(t) - y_1)y'(t)) \\ &= \frac{1}{\|PF_1\|} = \langle \vec{P} - \vec{F}_1, P' \rangle = \|P'\| \cos \alpha \end{aligned}$$

Análogamente, $\frac{dS_2}{dt} = -\|P'\| \cos \alpha$, entonces $\frac{d(S_1+S_2)}{dt} = 0$ y por lo tanto $S_1 + S_2$ es constante para cualquier $P \in \gamma$. \square

Con esta caracterización de la elipse podemos encontrar de otra forma el punto donde se debe poner el puerto para que la suma de distancias hacia las poblaciones sea mínima, pues basta con buscar el punto sobre la curva de la playa tal que los ángulos que se forman con la tangente en ese punto y los segmentos que van de las poblaciones a ese punto sean iguales.

Sin embargo puede suceder que en lugar de tener dos poblaciones se tengan tres o más, para dar solución a este problema definiremos la elipse con varios focos.

Definición 2.3.2 Sean x_1, x_2, \dots, x_n n puntos fijos en el plano. Llamaremos elipse n -focal con parámetro λ al conjunto:

$$E_n(\lambda) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y - x_1\| + \|y - x_2\| + \dots + \|y - x_n\| = \lambda\}$$

Para dar solución al problema ahora con n poblaciones basta con trazar la elipse n -focal y aumentar el parámetro de esta hasta que toque por primera vez a la curva que genera la playa y el punto de contacto será la solución.

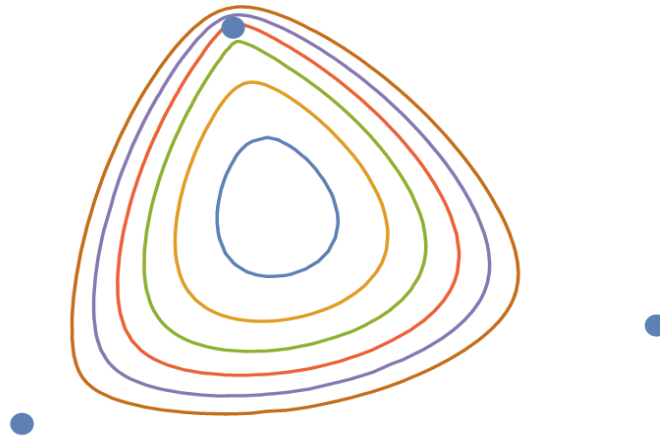


Fig. 11. Elipse trifocal.

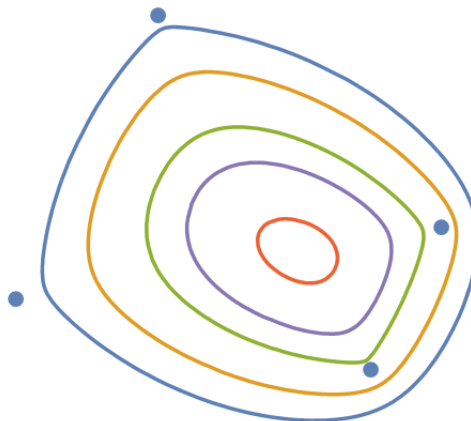


Fig. 12. Elipse 4-focal.

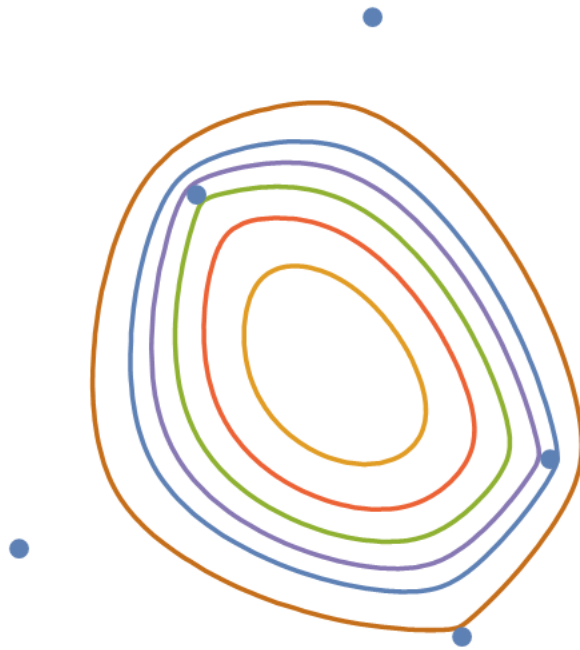


Fig. 13. Elipse 5-focal.

En las figuras anteriores podemos ver ejemplos de elipses n -focales con varios parámetros, observe que, a diferencia de la elipse con dos focos, existen elipses trifocales en el interior del triángulo formado por los focos. Sin embargo es importante señalar que se pueden construir dichas elipses siempre y cuando el parámetro de esta sea mayor o igual a la suma mínima obtenida del punto de Fermat de los focos.

Capítulo 3

El punto de Fermat para tres conjuntos convexos.

En el capítulo anterior considerábamos a las ciudades o lugares como puntos, sin embargo, sabemos que en la vida real estos no son puntos sino algo más "gordo", es decir, estas locaciones se pueden representar mejor como conjuntos de dimensión 2 y por simplicidad, como conjuntos convexos 2-dimensionales.

3.1. Elipses Generalizadas.

Para poder resolver el problema de Fermat para convexos en el plano primero extenderemos el concepto de elipse hacia conjuntos convexos.

Definición 3.1.1 Sean K_1 y K_2 conjuntos convexos en el plano, llamaremos *elipse generalizada* con focos en K_1 y K_2 y parámetro λ al lugar geométrico de puntos Y tales que la suma $Yp_1(Y) + Yp_2(Y) = \lambda$, donde $p_i(Y)$ es el punto

más cercano a Y en el convexo K_i y λ una constante real. La denotaremos como $E(K_1, K_2, \lambda)$

Un ejemplo muy sencillo para ver la elipse generalizada es poner como focos a dos círculos K_1 y K_2 con centro O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 , respectivamente:

Primero, tracemos la elipse con focos en los centros de los círculos O_1 y O_2 y consideremos un punto Y sobre ella. Luego el punto más cercano a Y en el círculo K_1 es la intersección del círculo con el segmento YO_1 , de igual manera el punto más cercano a Y en el círculo K_2 es la intersección del círculo con el segmento YO_2 . Además $YO_1 + YO_2 = c_1$, donde c_1 es el parámetro de la elipse, pero $YO_1 = Yp_1(Y) + p_1(Y)O_1$ y $YO_2 = Yp_2(Y) + p_2(Y)O_2$.

Entonces

$$\begin{aligned} c_1 &= YO_1 + YO_2 = Yp_1(Y) + p_1(Y)O_1 + Yp_2(Y) + p_2(Y)O_2 \\ &= Yp_1(Y) + r_1 + Yp_2(Y) + r_2. \end{aligned}$$

Ahora sea $c_2 = c_1 - r_1 - r_2$, entonces $Yp_1(Y) + Yp_2(Y) = c_2$, donde c_2 es constante, por lo tanto la elipse generalizada con focos en los círculos K_1 y K_2 y parámetro c_2 es la misma que la elipse con focos en O_1 y O_2 con parámetro $c_1 = c_2 + r_1 + r_2$.

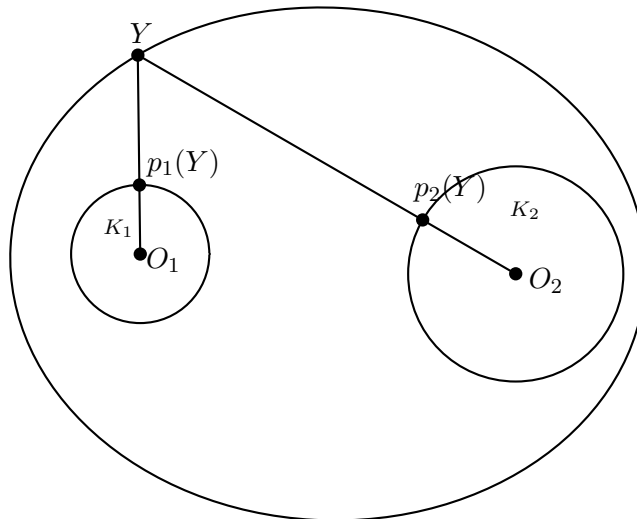


Fig. 14. Elipse generalizada de dos círculos.

Claramente la elipse generalizada de dos círculos es un conjunto convexo y además cumple la propiedad óptica de la elipse, pues es la misma elipse que se forma desde los centros de los círculos. ¿Existirá algún par de curvas que su elipse generalizada no sea un conjunto convexo? ¿Y qué no tenga la propiedad óptica de la elipse?

Teorema 3.1.1 Sean K_1 y K_2 conjuntos convexos en el plano, entonces el conjunto $E(K_1, K_2) = \{x : p_1(x) + p_2(x) \leq \lambda\}$ es un conjunto convexo.

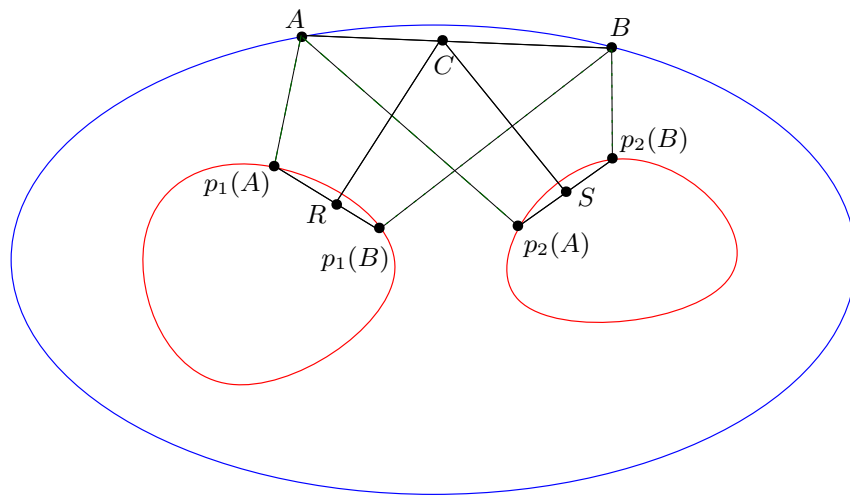


Fig. 15. Elipse generalizada para dos convexos.

Demostración.

Sean A, B puntos en E tales que $p_1(A) + p_2(A) = \lambda$ y $p_1(B) + p_2(B) = \lambda$ y sea C un punto en el segmento AB , entonces $C = At + (1 - t)B$ para algún $t \in [0, 1]$. Consideremos los segmentos $p_1(A)p_1(B)$ y $p_2(A)p_2(B)$ y los puntos $R = p_1(A)t + (1 - t)p_1(B)$ y $S = p_2(A)t + (1 - t)p_2(B)$. Tenemos que

$$\|C - R\| = t\|A - p_1(A)\| + (1 - t)\|B - p_1(B)\|$$

$$\|C - S\| = t\|A - p_2(A)\| + (1 - t)\|B - p_2(B)\|,$$

Luego, $\|C - R\| + \|C - S\| = t\lambda + (1 - t)\lambda = \lambda$ y como $\|C - p_1(C)\| + \|C - p_2(C)\| \leq \|C - R\| + \|C - S\|$, entonces $\|C - p_1(C)\| + \|C - p_2(C)\| \leq \lambda$. Por lo tanto E es un conjunto convexo. \square

Teorema 3.1.2 *La elipse generalizada $E(K_1, K_2, \lambda)$ tiene la propiedad óptica de la elipse.*

Demostración.

Sea $x \in E(K_1, K_2, \lambda)$, consideremos la recta l que es bisectriz de los rayos $p_1(x)x$ y $p_2(x)x$. Ahora sea $p'_2(x)$ el punto reflejado de $p_2(x)$ respecto a l , se demostrará que la recta l es tangente a $E(K_1, K_2, \lambda)$ y para esto basta con demostrar que cualquier punto $y \in l$ está fuera de la elipse generalizada.

Luego,

$$\begin{aligned} \|p_1(x) - y\| + \|p_2(x) - y\| &= \|p'_1(x) - y\| + \|p_2(x) - y\| \\ &> \|p_2(x) - p'_1(x)\| \\ &= \|p_2(x) - x\| + \|p'_1(x) - x\| \\ &= \|p_2(x) - x\| + \|p_1(x) - x\| = \lambda \end{aligned}$$

Entonces l es la tangente de $E(K_1, K_2, \lambda)$ en el punto x , además como es bisectriz de los rayos $xp_1(x)$ y $xp_2(x)$ y usando la misma idea que en la demostración del Teorema 1.3.1, se sigue que $E(K_1, K_2, \lambda)$ tiene la propiedad óptica de la elipse. \square

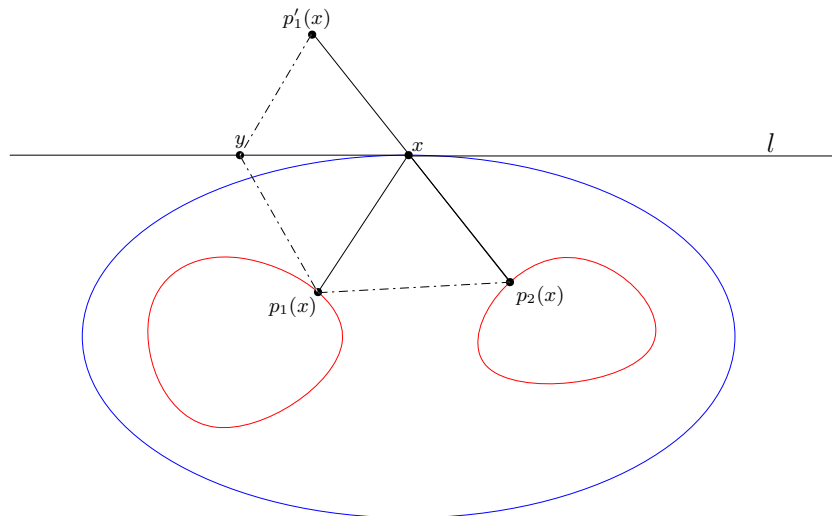


Fig. 16. Propiedad óptica de la elipse.

Con esto podemos encontrar la solución al problema de localizar un puerto sobre la playa que esté lo más cerca posible a un par de poblaciones, simplemente tenemos que trazar la elipse generalizada con focos en las poblaciones y aumentar el parámetro λ hasta que toque por primera vez a la curva que genera la playa.

3.2. Propiedades del punto de Fermat para tres convexos.

Supongamos que tenemos tres conjuntos convexos en el plano y queremos encontrar cual es el punto que minimiza la suma de distancias hacia los convexos ¿Qué propiedades tiene este punto? ¿Cumplirá algo similar al caso para puntos? ¿Cómo se puede encontrar? Para dar respuesta a estas preguntas primero tenemos que recordar un caso que se mencionó en la primera sección.

El primer problema al que nos enfrentamos es que no hay una manera de definir un triángulo dados tres conjuntos convexos y por tanto no podemos distinguir los casos cuando tengamos o no un ángulo mayor o igual a 120° , por lo tanto empezaremos a resolver este problema con la siguiente definición.

Definición 3.2.1 *Dados tres conjuntos convexos en el plano, decimos que forman una configuración de Fermat si $K_i \cap K_j = \emptyset \forall i, j \in [3]$, y $\forall x_1 \in K_1, x_2 \in K_2, x_3 \in K_3$, el triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$ no tiene un ángulo $\geq 120^\circ$.*

Teorema 3.2.1 *Sean K_1, K_2, K_3 en \mathbb{R}^2 , tres conjuntos convexos que forman una configuración de Fermat. Entonces, $x \in \mathbb{R}^2$ minimiza la suma*

$$f(y) = \|p_1(y) - y\| + \|p_2(y) - y\| + \|p_3(y) - y\|,$$

para $y \in \mathbb{R}^2$ si y sólo si

$$\angle p_1(x) x p_2(x) = \angle p_2(x) x p_3(x) = \angle p_3(x) x p_1(x)$$

Demostración: \Rightarrow) Supongamos que x minimiza la suma

$$f(y) = \|p_1(y) - y\| + \|p_2(y) - y\| + \|p_3(y) - y\|,$$

para $y \in \mathbb{R}^2$. Luego, consideremos el punto de Fermat x_0 del triángulo formado por $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, se sabe que para este punto

$$\angle p_1(x) x_0 p_2(x) = \angle p_2(x) x_0 p_3(x) = \angle p_3(x) x_0 p_1(x)$$

y además minimiza la suma de distancias hacia $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, sin embargo x ya era el mínimo la suma de distancias hacia $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$. Por lo tanto $x = x_0$ y

$$\angle p_1(x) x p_2(x) = \angle p_2(x) x p_3(x) = \angle p_3(x) x p_1(x)$$

□

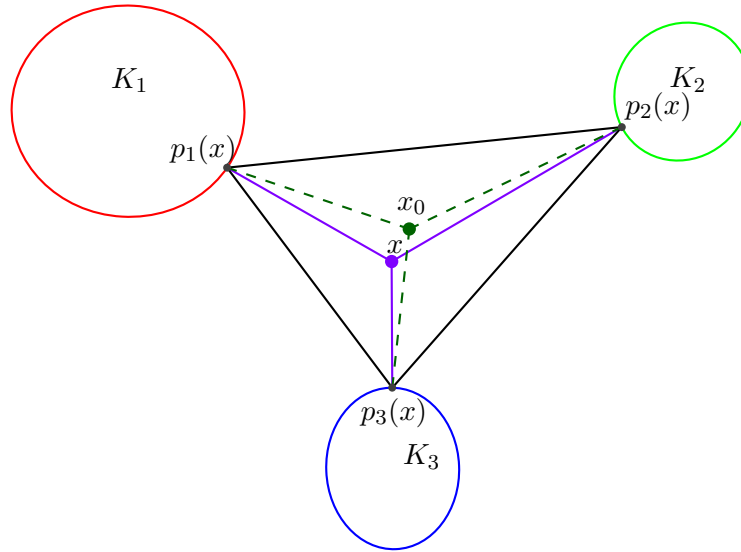


Fig. 17. Punto de Fermat para tres convexos. (Ida)

⇐) Supongamos ahora que

$$\angle p_1(x)xp_2(x) = \angle p_2(x)xp_3(x) = \angle p_3(x)xp_1(x)$$

y consideremos el triángulo equilátero $\triangle abc$ del Teorema 1.1.4 que contiene a x . Ya sabemos por el Lema 1.1.1 que de los puntos fuera del triángulo $\triangle abc$ se obtiene una suma mayor que la que se obtiene desde x , ahora analizaremos los puntos en el interior del triángulo y probaremos que de cualquiera de ellos obtendremos una suma mayor o igual (segmentos en la frontera del convexo) que x .

Sea y en interior del triángulo $\triangle abc$, tracemos el segmento perpendicular desde y hasta cada uno de los lados y tracemos los puntos $p_1(y), p_2(y), p_3(y)$, claramente

$$p_1(y) + p_2(y) + p_3(y) \geq |y, ab| + |y, bc| + |y, ca|.$$

Por el Teorema de Viviani tenemos que: $|y, ab| + |y, bc| + |y, ca| = \|p_1(x) - x\| + \|p_2(x) - x\| + \|p_3(x) - x\|$. Por lo tanto

$$p_1(y) + p_2(y) + p_3(y) \geq p_1(x) + p_2(x) + p_3(x).$$

□

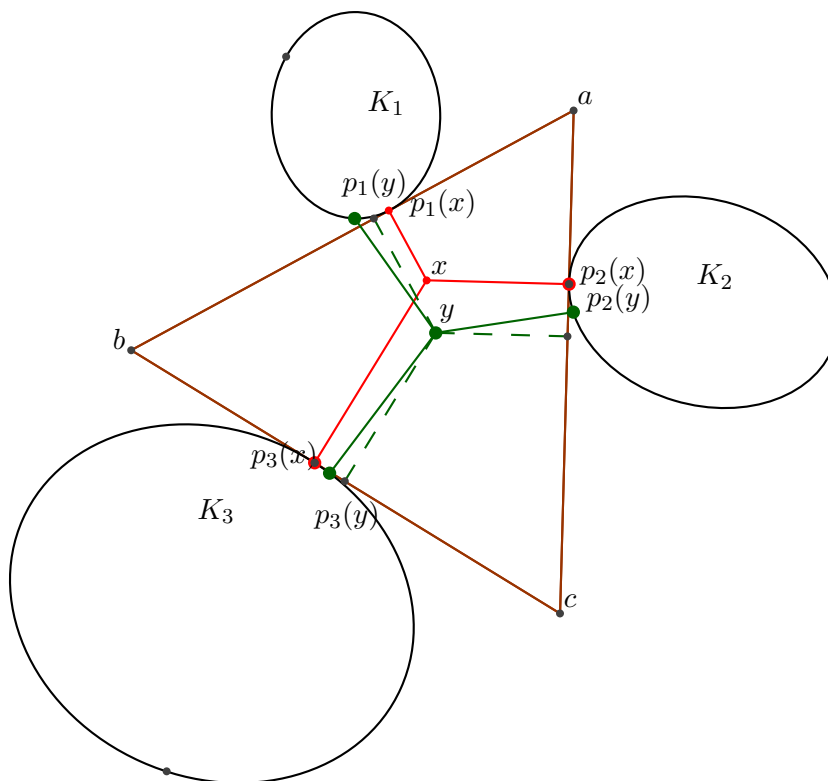


Fig. 18. Punto de Fermat para tres convexos. (Vuelta)

Teorema 3.2.2 Si con elipses generalizadas el mínimo se obtiene con un $\triangle abc$ con $\angle bac \geq 120^\circ$, entonces a es el punto de Fermat-Torricelli de K_1, K_2, K_3 .

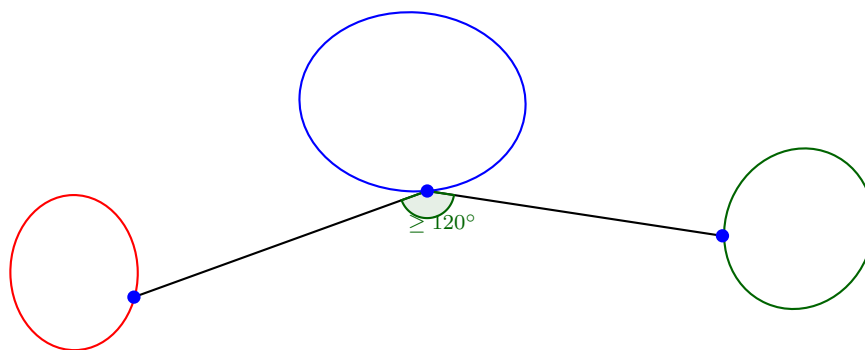


Fig. 19. Caso especial punto de Fermat.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $k_1 \in \partial K_1$ es el punto donde $\angle p_2(k_1)k_1p_3(k_1) \geq 120^\circ$ y la suma $\|p_2(k_1) - k_1\| + \|p_3(k_1) - k_1\|$ sea la mínima. También consideremos el triángulo $\triangle def$ cuyos lados son tangentes a los conjuntos convexos en $k_1, p_2(k_1)$ y $p_3(k_1)$, respectivamente. Dado que el punto k_1 se obtuvo de la elipse generalizada de K_2, K_3 , el ángulo $\angle p_2(k_1)k_1d = \angle p_3(k_1)k_1e = \alpha$, además los segmentos $k_1p_2(k_1)$ y $k_1p_3(k_1)$ son perpendiculares a los segmentos df y ef , respectivamente.

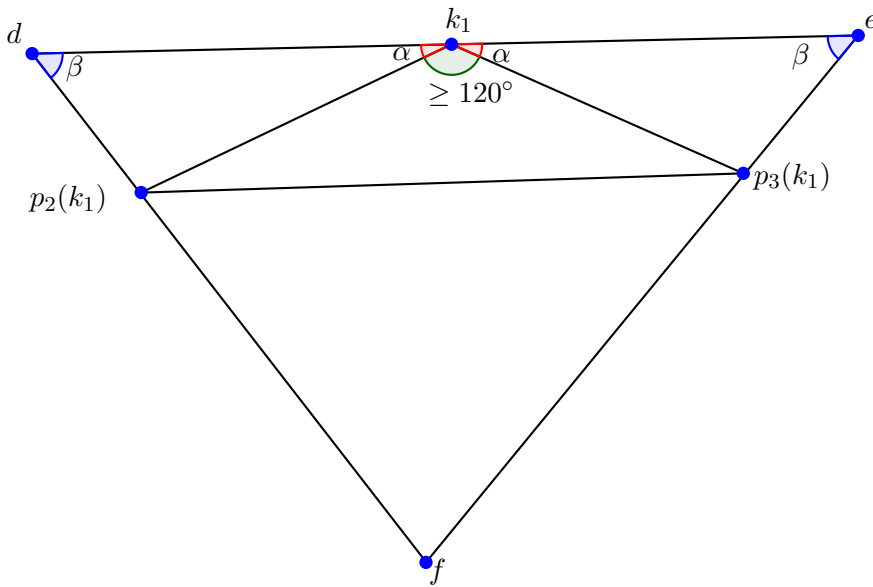


Fig. 19. Existencia de un ángulo mayor o igual a 120°

Entonces, el ángulo $\angle k_1ep_3(k_1) = \angle p_2(k_1)dk_1 = \beta$, pues los triángulos $\triangle p_2(k_1)k_1d$ y $\triangle p_3(k_1)k_1e$ son semejantes.

Tenemos entonces un par de casos, cuando $\beta = 60^\circ$ y cuando $\beta > 60^\circ$

Caso 1: $\beta = 60^\circ$

Este es el caso más sencillo ya que el triángulo $\triangle def$ es equilátero y por el Teorema de Viviani $\|k_1 - p_2(k_1)\| + \|k_1 - p_3(k_1)\|$ es mínimo.

Supongamos ahora que $\beta \geq 60^\circ$, se demostrará que desde cualquier otro punto se obtiene una suma mayor que la que se obtiene desde k_1 .

Para este caso tendremos un par de subcasos, el primero es considerar puntos fuera del triángulo $\triangle edf$, pero ya se demostró anteriormente en el Lema 1.1.1. El segundo caso es ver que sucede con los puntos dentro del triángulo $\triangle edf$.

Sea x un punto en el interior del triángulo $\triangle def$, se quiere demostrar que la suma de los segmentos perpendiculares desde x hacia los lados del triángulo es mayor que la que se obtiene desde k_1 , es decir, se quiere demostrar: $h_1 + h_2 + h_3 > c + b$

Tracemos un segmento jk paralelo a ed que pase por x y toque a los lados ef y df . Como el triángulo $\triangle jkf$ es isósceles entonces $h_2 + h_3 = |j, kf|$. Ahora, tracemos un segmento paralelo jl a df , tenemos que el triángulo $\triangle dlj$ también es isósceles y además $|j, dl| = h_1$, entonces $|d, jl| < h_1$.

Por otro lado, ya teníamos que el triángulo $\triangle edf$ es isósceles, entonces $|e, df| = c + b$ pero con lo anterior también $|d, ef| = |d, jl| + |j, kf| = |d, jl| + h_2 + h_3 < h_1 + h_2 + h_3$, por lo tanto $c + b < h_1 + h_2 + h_3$ \square

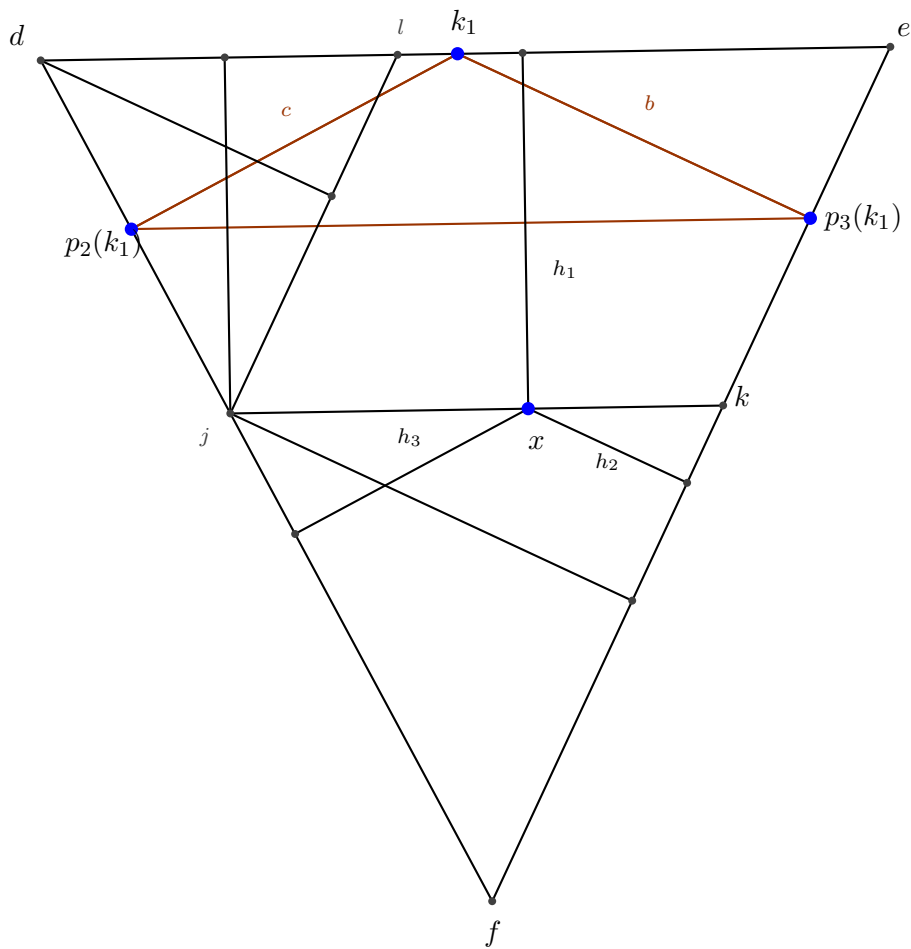


Fig. 20. $\beta > 60^\circ$

3.3. Ejemplos sencillos del punto de Fermat para tres convexos.

Un primer ejemplo es considerar los lados de un triángulo equilátero como nuestros convexos, podemos encontrar el punto de Fermat para estos segmentos

de una forma muy sencilla y usando el teorema 2.2.1 de la sección anterior. Sea $\triangle ABC$ el triángulo equilátero mencionado y sea F un punto en el interior del triángulo, tracemos los segmentos FM, FN, FO perpendiculares a los lados AB, BC, CA , respectivamente, M, N, O son los puntos más cercanos a F en cada lado del triángulo.

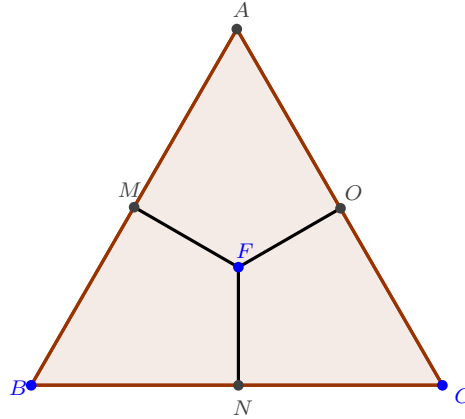


Fig. 21. Punto de Fermat para los segmentos de un triángulo equilátero.

Es fácil ver que $\angle MFO = \angle MFN = \angle NFO = 120^\circ$, pues la suma de ángulos internos del cuadrilátero $MFOA$ debe ser 360° . Entonces por el Teorema 2.2.1 F es el punto de Fermat de los segmentos AB, BC, AC y como consideramos a F como cualquier punto en el interior del triángulo, entonces todo el interior del triángulo es solución. De aquí se sigue el conocido Teorema de Viviani: las alturas de un triángulo equilátero es una constante.

Un ejemplo donde podremos encontrar el punto de Fermat de una forma muy sencilla es con tres círculos. Primero consideremos tres puntos A, B, C en el plano tales que no formen un ángulo mayor o igual a 120° y obtenemos el punto de Fermat F de estos tres puntos. Ahora, tracemos un círculo S_1 de radio ϵ_1 centrado en A de modo que no contenga al punto F , sabemos que $p_1(F)$ es la intersección de la circunferencia de S_1 con el segmento AF , entonces por el Teorema 2.2.1 tenemos que F es punto de Fermat de S_1, B y C . De igual manera si trazamos los círculos S_2 y S_3 de radio ϵ_2 y ϵ_3 y centrados en B y C , respectivamente, de tal manera que no contengan al punto F , entonces por el Teorema 2.2.1 F será el punto de Fermat de S_1, S_2 y S_3 .

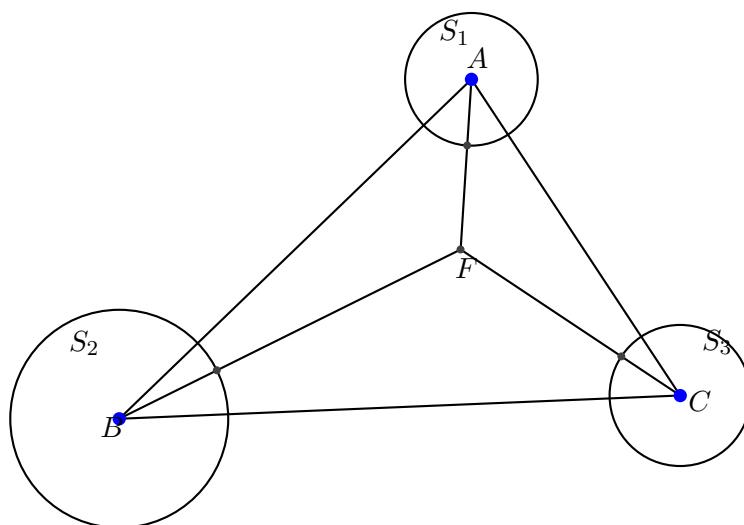


Fig. 22. Punto de Fermat para tres círculos.

3.4. Triángulos formados por el punto de Fermat.

Un resultado conocido en geometría para triángulos equiláteros es el Teorema de Viviani que dice lo siguiente:

Teorema 3.4.1 (*Viviani*) *La suma de distancias desde un punto x hacia cada uno de los lados de un triángulo equilátero $\triangle abc$ es igual a la altura del triángulo.*

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y sea D un punto en el interior de este. Llamaremos d_1, d_2, d_3 a las distancias desde D hacia AB, BC, AC , respectivamente, entonces:

$$|\triangle ABC| = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{d_1 \cdot AB}{2} + \frac{d_2 \cdot BC}{2} + \frac{d_3 \cdot AC}{2},$$

entonces, simplificando la ecuación anterior $h = d_1 + d_2 + d_3$. □

Lo que se quiere demostrar ahora es el inverso del Teorema de Viviani, es decir:

Teorema 3.4.2 (Inverso de Viviani) *Si la suma de distancias, con signo, hacia los lados de un triángulo $\triangle abc$ desde cada uno de los puntos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$, no alineados, son iguales, entonces $\triangle abc$ es equilátero.*

Para demostrar este teorema primero analizaremos algunos lugares geométricos que tienen que ver con triángulos.

Dado un punto P_0 en un triángulo $\triangle abc$ ¿Cuál es el lugar geométrico de puntos P tales que $|DP_0E| + |FP_0G| = |DPE| + |FPG|$? donde DE y FG son segmentos en AB y AC , respectivamente.

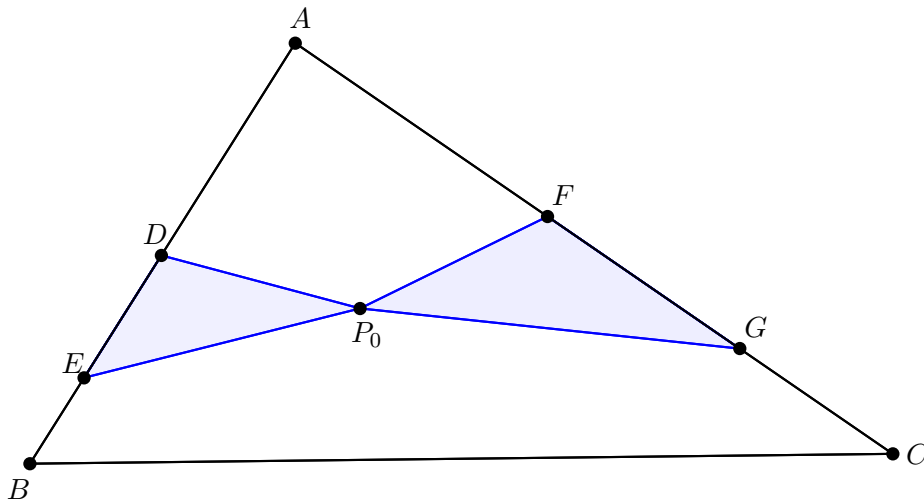


Fig. 23. Lugar geométrico área de dos triángulos.

Sean $AX = DE$ y $AY = FG$ segmentos sobre AB y AC , respectivamente, se demostrará que un segmento paralelo a XY en P_0 es el lugar geométrico antes mencionado.

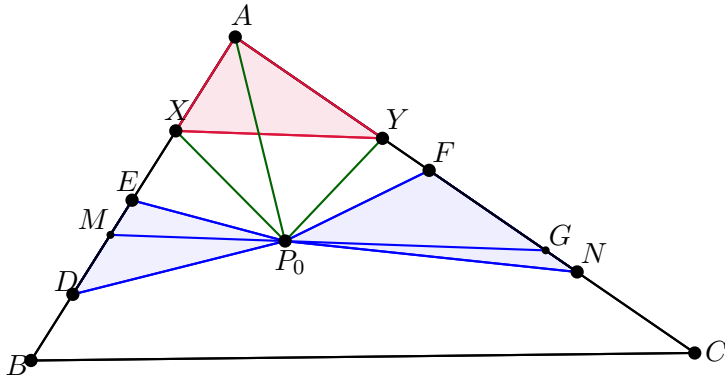


Fig. 24. Área constante.

Claramente, $|AP_0Y| + |AP_0X| = |XAY| + |XP_0Y|$, donde $|XAY|$ es constante. Como $AX = DE$ y $AY = FG$ entonces $|AP_0Y| + |AP_0X| = |DP_0E| + |FP_0G| = |XAY| + |XP_0Y|$, pero $|XAY|$ es constante, entonces la suma $|DP_0E| + |FP_0G|$ solo depende de $|XP_0Y|$ y esta area es constante para todos los puntos sobre $MN \parallel XY$.

Ahora, dado un punto P_0 ¿Cuál es el lugar geométrico de puntos P tales que $|DP_0E| + |FP_0G| + |HP_0I| = |DPE| + |FPG| + |HPI|$? donde DE, FG y HI son segmentos en AB, BC y AC , respectivamente.

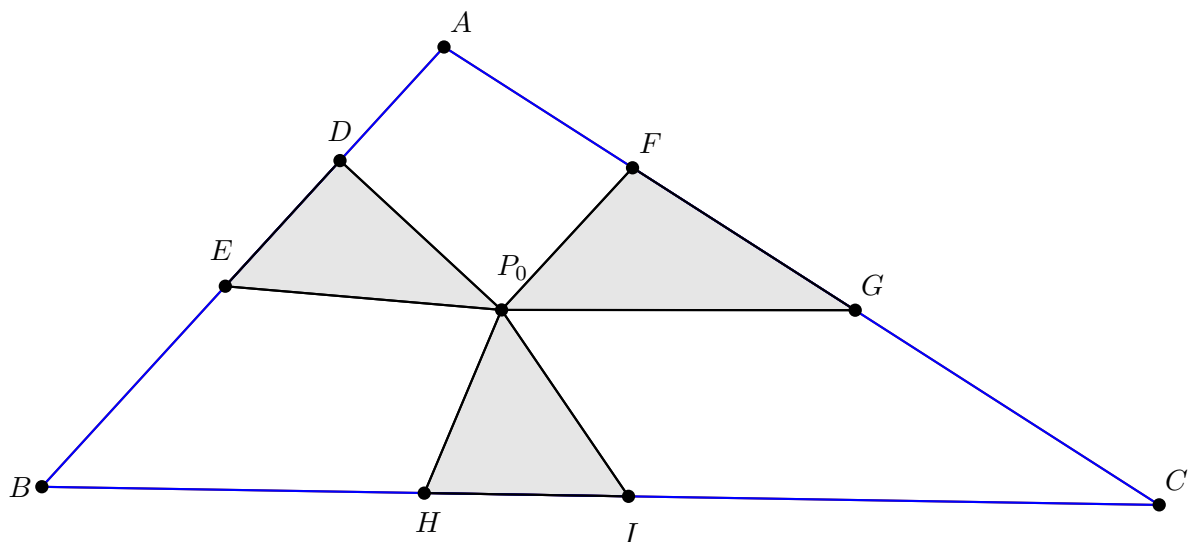


Fig. 25. Lugar geométrico área de tres triángulos.

Usando un resultado en la demostración anterior sabemos que para conocer el lugar geométrico de puntos tales que $|DP_0E| + |FP_0G| = |DPE| + |FPG|$, basta con ver cuando $|XP_0Y|$ es constante, donde X y Y son tales que $AX = DE$ y $AY = FG$. Esto reduce el problema a conocer el lugar geométrico de puntos P tales que $|XP_0Y| + |HP_0I| = |XPY| + |HPI|$. Aplicando el resultado anterior a los segmentos XY y HI sobre el triángulo $\triangle X'YC$, el lugar geométrico buscado es una línea recta paralela a $Y'W$ que pasa por P_0 .

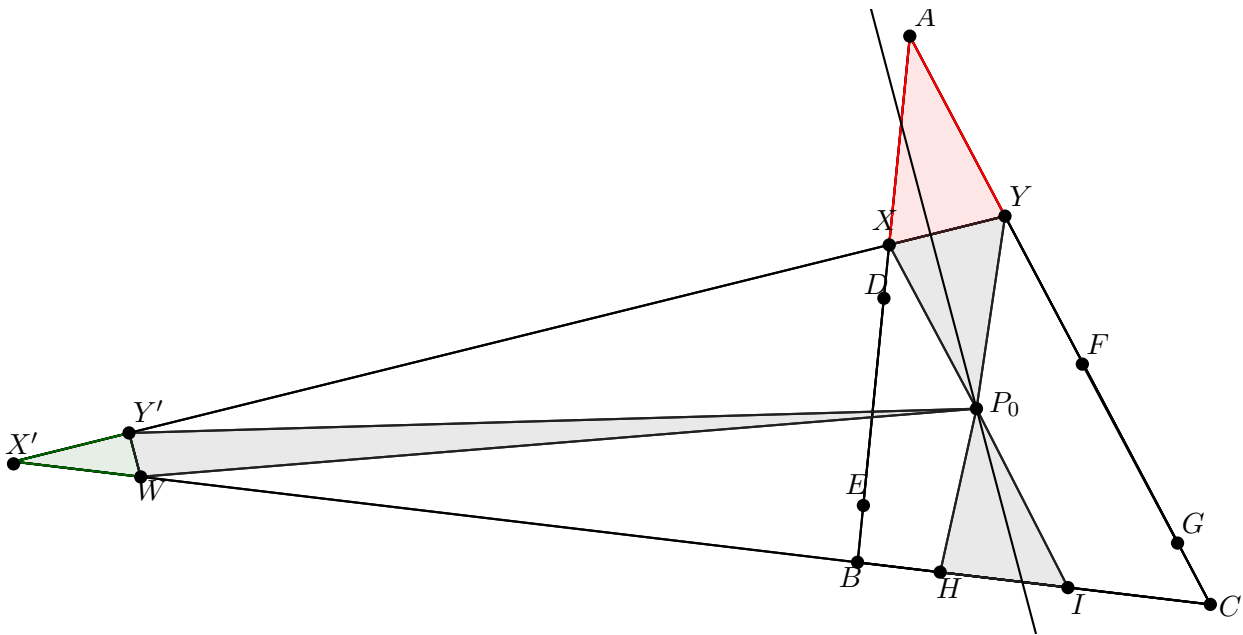


Fig. 26. Aplicando la propiedad anterior.

Demostración inverso de Viviani: Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ y sea $\triangle abc$ un triángulo. Por x_1 pasa una recta l_1 tal que la suma de distancias hacia los lados es una constante h , análogamente existen rectas l_2 y l_3 que pasan por x_2 y x_3 , respectivamente, tales que la suma de distancias hacia los lados es una constante h . Además, , con esto llenamos todo el plano, en particular para a, b, c , es decir todas las alturas del triángulo $\triangle abc$ son iguales y por lo tanto $\triangle abc$ es equilátero. \square

Ahora estudiaremos algunos triángulos equiláteros muy particulares que se relacionan con el punto de Fermat para tres convexos.

En el Teorema 1.1.4 se demostró que para triángulos que no tuvieran ángulos mayores o iguales a 120° que las perpendiculares a los segmentos FC, FB, FA forman un triángulo equilátero. Ahora supongamos que tenemos tres conjuntos convexos, K_1, K_2, K_3 , en posición de Fermat, por el Teorema 2.2.1 el punto x que minimiza la distancia hacia los conjuntos convexos cumple que:

$$\angle p_1(x)xp_2(x) = \angle p_2(x)xp_3(x) = \angle p_3(x)xp_1(x)$$

En particular x es punto de Fermat de los puntos $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, entonces por lo mencionado anteriormente las perpendiculares a los segmentos $xp_1(x), xp_2(x), xp_3(x)$ forman un triángulo equilátero donde cada lado es línea soporte de uno de los convexos. Cuando esto sucede se le conoce como *tripié (tripod.)* Usaremos la definición de Chen(2015).

Definición 3.4.1 *Dada una curva plana cerrada γ , un tripié de γ consiste de tres líneas normales a la curva todas concurrentes en un mismo punto y formando ángulos de $\frac{2\pi}{3}$.*

Podemos cambiar un poco la definición de Chen y en lugar de considerar una curva plana cerrada podemos en cambio considerar tres curvas planas convexas cerradas que estén en posición de Fermat siendo un tripié aquel que conste de tres líneas normales, una a cada curva y que forman ángulos de $\frac{2\pi}{3}$, donde este será el punto de Fermat para los tres convexos gracias al Teorema 2.2.1.

Teorema 3.4.3 *El triángulo equilátero formado por el punto de Fermat de tres conjuntos convexas en posición de Fermat (o bien el tripié de estos tres conjuntos convexas), es el de menor área posible cuyos lados son líneas soporte de los convexos.*

Demostración. El área de un triángulo equilátero se puede poner en términos de la altura de la siguiente manera:

$$|\Delta| = \frac{h^2}{\sqrt{3}},$$

pues el lado se puede poner como $\ell = \frac{2}{\sqrt{3}}h$. El área mínima la podemos obtener entonces al minimizar la altura. Por el Teorema de Viviani podemos minimizar la altura si minimizamos la suma de las perpendiculares desde un punto y el punto que minimiza esa suma es precisamente el punto de Fermat de los tres conjuntos convexas. \square

Capítulo 4

Una forma de encontrar el punto de Fermat para tres conjuntos convexos.

En este capítulo se mostrará una forma de encontrar el punto de Fermat para tres conjuntos convexos usando los teoremas de la sección anterior y la convergencia de una sucesión de puntos muy especial.

4.1. Propuesta de algoritmo y convergencia.

El Teorema 2.2.2 nos proporciona un primer filtro para encontrar el punto de Fermat para tres convexos, pues si al hacer la construcción que se menciona en el teorema obtenemos un ángulo mayor o igual a 120° entonces el vértice donde se forma ese ángulo será el punto de Fermat. Sin embargo, ¿Qué sucede si al hacer esa construcción no hay un ángulo mayor o igual a 120° ? Probaremos que

hay una sucesión especial que converge al punto de Fermat de los tres conjuntos convexos.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de puntos, por simplicidad reescribiremos a los puntos más cercanos de f_i a los convexos K_1, K_2, K_3 de la siguiente forma:

$$x_i = p_1(f_i), y_i = p_2(f_i), z_i = p_3(f_i).$$

Consideremos el punto x_0 tal que, sin pérdida de generalidad, sea el primer punto de contacto entre $E_1(K_2, K_3, \lambda)$ y K_1 , donde $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, además $p_2(x_0) = y_0$ y $p_3(x_0) = z_0$.

Sea f_1 el punto de Fermat de x_0, y_0, z_0 y definamos la sucesión $\{f_n\}_{n=2}$ donde f_i es el punto de Fermat de $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$.

Lema 4.1.1 *La sucesión $\{|x_{i-1} - f_i| + |y_{i-1} - f_i| + |z_{i-1} - f_i|\}_{n=2}$ es decreciente.*

Demostración. Como f_i es el punto de Fermat de $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$ entonces

$$\begin{aligned} |x_{i-1} - f_i| + |y_{i-1} - f_i| + |z_{i-1} - f_i| &< |x_{i-1} - f_{i-1}| + |y_{i-1} - f_{i-1}| + |z_{i-1} - f_{i-1}| \\ &< |x_{i-2} - f_{i-1}| + |y_{i-2} - f_{i-1}| + |z_{i-2} - f_{i-1}|, \end{aligned} \tag{4.1}$$

pues x_{i-1} es el punto más cercano a f_{i-1} en el convexo K_1 y por lo tanto la sucesión es decreciente. \square

Sabemos por Martini[] que la sucesión anterior está acotada por el punto de Fermat para los convexos K_1, K_2, K_3 , pues es donde la suma es mínima y por lo tanto la sucesión anterior converge. Además es una función continua definida en un compacto por lo que alcanza un mínimo, entonces la sucesión converge a ese mínimo que es precisamente el punto de Fermat para los tres conjuntos convexos.

Con todo lo anterior el algoritmo para obtener el punto de Fermat para tres conjuntos convexos queda de la siguiente manera:

- 1) Sea E_i la elipse generalizada $E(K_j, K_l, \lambda_i)$, $i \neq j \neq l, i, j, l \in [3]$.

- 2) Encontramos el parámetro λ_i , para cada i , tal que cada E_i y K_i se toquen por primera vez.
- 3) Sea $\lambda = \min_{i \in [3]} \{\lambda_i\}$ y sea a el punto de contacto correspondiente al valor λ .
- 4) Buscamos el punto de Fermat f_1 para los puntos $p_i(a) = a, p_j(a)$ y $p_l(a)$, $i \neq j \neq l, i, j, l \in [3]$.
- 5) Si $f_1 = a$ entonces por el Teorema 2.2.2, a es el punto de Fermat para los tres convexos. Si $f_1 \neq a$ seguimos con el siguiente paso.
- 6) Buscamos los puntos x_1, y_1, z_1 como se definieron anteriormente.
- 7) Creamos la sucesión $\{f_2, f_3, f_4, \dots\}$ donde f_i es el punto de Fermat de $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$.
- 8) La sucesión anterior converge al punto de Fermat de los tres convexos.

4.2. Programación y algunos ejemplos.

El algoritmo en la sección anterior se programó en *Wolfram Mathematica 10* y a continuación mostraremos el pseudocódigo usando tres curvas particulares como ejemplo.

Empezaremos definiendo un par de funciones que nos ayudarán más adelante, una es la distancia entre dos puntos y la otra la ecuación de una recta.[]

Require: Dos puntos en \mathbb{R}^2 .

Guardar en una función la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos.

Guardar en una función la distancia entre dos puntos.

return $y = mx + b$, $dis(x, y, x_0, y_0) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$

Una parte esencial del algoritmo es calcular el punto de Fermat para tres puntos, lo haremos de la siguiente forma:

Al contrario de como se presentaron en la primera sección los posibles casos para el punto de Fermat, aquí primero comprobamos si hay un ángulo mayor o igual a

120° en alguno de los vértices, si en algún vértice es cierto grafica los tres puntos y marca en rojo el vértice donde está el ángulo mayor o igual a 120° .

Require: Tres puntos $a, b, c \in \mathbb{R}^2$

if el ángulo entre $b - a$ y $c - a$ es mayor o igual a 120° **then**

$pf = a$

else if el ángulo entre $a - b$ y $c - b$ es mayor o igual a 120° **then**

$pf = b$

else if el ángulo entre $a - c$ y $b - c$ es mayor o igual a 120° **then**

$pf = c$

end if

return pf

Si no, empezamos con la construcción de Torricelli, que sería trazar triángulos equiláteros sobre dos de los lados del triángulo $\triangle abc$, pero para fines prácticos nos basta con rastrear el vértice faltante para cada uno de esos triángulos. Para esto rotamos los puntos b y c 60° , respecto al punto a , en sentido a favor y en contra de las manecillas del reloj, pues no sabemos cual de los dos nos servirá. Almacenamos aquellos puntos que estén más lejos de b y c en la rotación correspondiente, pues con esto obtendremos el punto para formar un triángulo equilátero sobre ac y bc , que es lo que se pide en la construcción de Torricelli. Sabemos que el punto más lejano a b y c es el que buscamos gracias al siguiente resultado.

Lema 4.2.1 Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y sea y' la reflexión de y respecto a una recta ℓ . Si $d(x, y') < d(x, y)$ entonces y' está en el mismo semiplano que x y por lo tanto y está en el otro semiplano, donde estos semiplanos son formados por ℓ .

Rotar dos lados del triángulo $\triangle abc$ 60° en sentido de las manecillas y en contra.

Almacenamos aquellos puntos donde la distancia al vértice opuesto sea mayor (e, d)

return e, d

Finalmente, obtenemos las rectas correspondientes y resolvemos el sistema para calcular su intersección pues esta será el punto de Fermat, además graficamos los puntos iniciales de azul y el punto de Fermat de rojo.

Recta que pasa por c, d y recta b, e

Resolvemos el sistema para encontrar el punto de intersección de ambas rectas

return pf , el punto de intersección entre las rectas

Para ejemplificar como funciona el algoritmo y el programa usaremos las siguientes tres curvas

$$\begin{aligned}h(x) &= \sqrt{1-x^2} \\h_1(x) &= (x+4)^2 + 3 \\h_2(x) &= (x-6)^4 + 4\end{aligned}$$

El primer paso del algoritmo es trazar las elipses generalizadas E_i , luego encontrar el parámetro donde se toquen por primera vez cada E_i y K_i para finalmente quedarnos con el de menor parámetro, sin embargo, llevar a cabo todo este proceso sería muy tardado, principalmente trazar la elipse generalizada, afortunadamente podemos darle la vuelta a este problema.

Dado que sólo nos importa un punto de cada elipse generalizada, empezaremos recorriendo cada una de las curvas cada cierto ϵ dado, en nuestro caso daremos $\epsilon = 0,01$. En cada uno de esos puntos calculamos los puntos más cercanos a las otras curvas, almacenamos todos esos puntos y sumas de distancias para al final quedarnos con la más pequeña, hacemos este proceso con cada curva y luego quedarnos con la suma más pequeña de las tres.

Pero se nos presenta aquí un nuevo problema ¿Dónde empezar en cada curva? La respuesta a esta pregunta está en los siguientes resultados.

Lema 4.2.2 Sean K_1, K_2, K_3 cuerpos convexos en el plano y sea $\widehat{m_i n_i}$ un arco en K_i para algún $i \in [3]$. Si q está en $\widehat{m_i n_i}$, entonces $p_j(q)$ está en $\widehat{p_j(m_i) p_j(n_i)}$ para $j \neq i \in [3]$.

Demostración. Supongamos que $p_3(q)$ no está en $\widehat{p_3(m_1) p_3(n_1)}$, entonces el segmento $qp_3(q)$ intersecta al segmento $m_1 p_3(m_1)$ o al segmento $n_1 p_3(n_1)$, supongamos que intersecta al segmento $m_1 p_3(m_1)$ y que el punto de intersección

sea a . Entonces $p_3(a) = p_3(m_1)$, pues la línea soporte en $p_3(m_1)$ es perpendicular al segmento $ap_3(a)$, pero por la misma razón $p_3(a) = p_3(q)$, contradicción con que hay un único punto más cercano a un convexo.

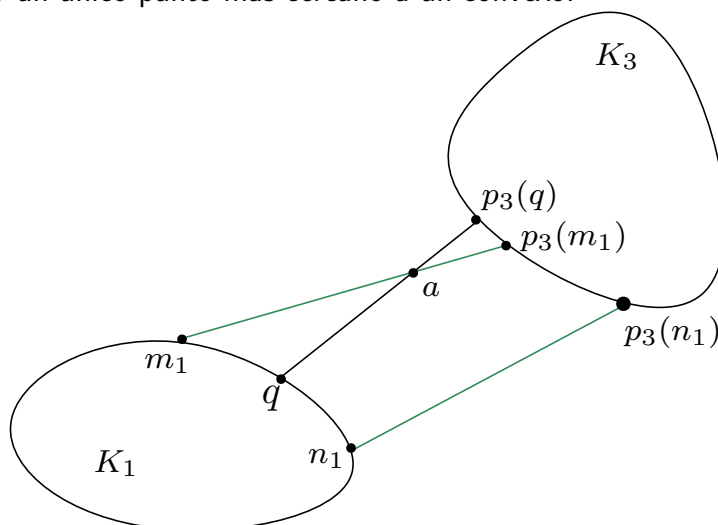


Fig. 26. Parametrización de una curva.

Teorema 4.2.1 *El punto de contacto m_i de la elipse generalizada E_i que toca por primera vez a K_i , está en $\widehat{q_i r_i}$ (en sentido horario), donde q_i y r_i son puntos en K_i más cercanos a K_j y K_l , respectivamente, $i \neq j \neq l$.*

Demostración. Para simplificar la notación haremos el caso para el punto de contacto m_1 , los demás casos son análogos. Supongamos que m_1 es tal que $r_1 \in \widehat{q_1 m_1}$ entonces, por el lema anterior, $q_2 \in p_2(\widehat{m_1})r_2$ y $p_3(m_1)$ está en $q_3 p_3(r_1)$. Es fácil ver que $m_1 p_3(m_1)$ interseca a $q_2 r_1$ en un punto s .

Tenemos que

$$\|p_3(m_1) - s\| + \|n - r_1\| + \|q_2 - s\| < \|p_3(m_1) - m_1\| + \|q_2 - m_1\|,$$

también

$$\|p_3(m_1) - r_1\| + \|q_2 - r_1\| < \|p_3(m_1) - s\| + \|q_2 - r_1\|.$$

Además

$$\|p_3(r_1) - r_1\| + \|q_2 - r_1\| < \|p_3(m_1) - r_1\| + \|q_2 - r_1\|,$$

por lo tanto

$$\|p_3(r_1) - r_1\| + \|q_2 - r_1\| < \|p_3(m_1) - r_1\| + \|q_2 - r_1\|.$$

Lo cual contradice la minimalidad de $\|p_3(m_1) - m_1\| + \|p_2(m_1) - m_1\|$. \square

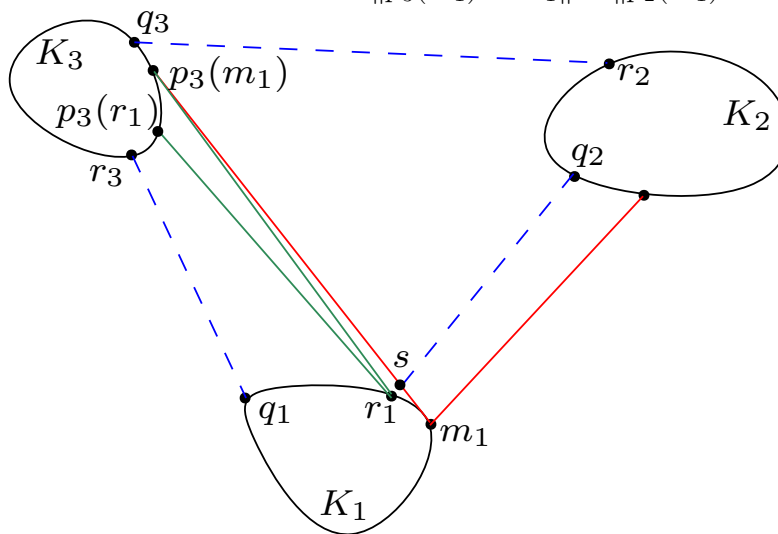


Fig. 27. Arcos donde está el punto de contacto con la elipse generalizada.

Nuestro programa primero buscará los puntos más cercanos entre las curvas para después desde esos puntos buscar los puntos donde por primera vez E_i hace contacto con K_i . La idea que se usó fue considerar la función de distancia como una función de dos variables y usamos la teoría de cálculo multivariable para encontrar el mínimo.

Require: Función distancia entre dos puntos

Derivar la función distancia respecto de x y de s

Resolver el sistema de ecuaciones numéricamente para encontrar los puntos críticos

Obtener los valores de la función en cada punto y quedarnos con los más pequeños para cada función

return u_0 vector que contiene los puntos mínimos entre la primera y segunda curva

El código anterior es para los puntos más cercanos de las curvas particulares de nuestro ejemplo, el mismo código funciona para encontrar el resto de puntos sólo cambiando las funciones y variables que sean necesarias. Los puntos obtenidos para nuestro ejemplo son los siguientes:

```
Out[1]= (-0.72682, 0.68683)
        (-3.47089, 3.27996)
        (0.78378, 0.62104)
        (3.30919, 56.42426)
        (5.31922, 4.2148)
        (3.30919, 56.42426)
```

En este caso tenemos un par repetidos, esto se debe a que dos de las funciones se cortan en ese punto.

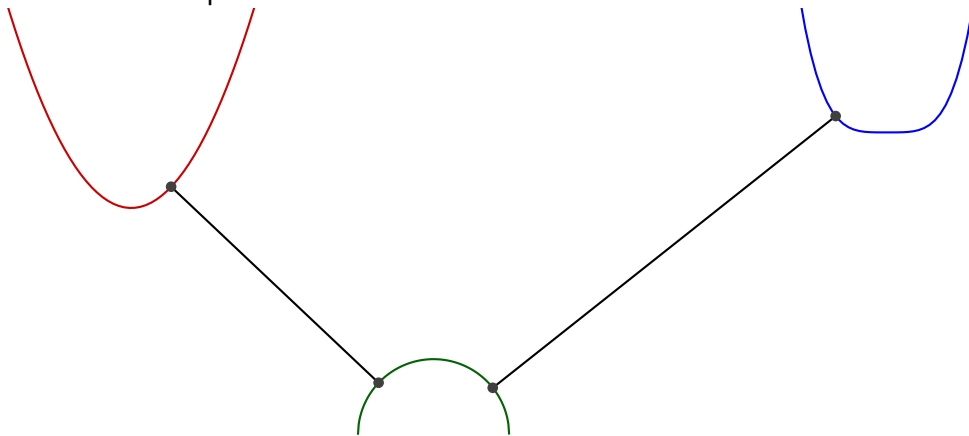


Fig. 28. Aplicando el algoritmo 1.

Ahora ya podemos empezar a recorrer las curvas, el siguiente código funciona para las tres curvas cambiando las variables necesarias:

```
Definimos la función de la distancia entre dos puntos donde se toma un punto
en cada curva
for el punto más cercano a  $h1(x)$  desde  $h(x) : s_1$  to el punto más cercano a
 $h2(x) : s_2$  desde  $h(x)$  do
    encuentra el mínimo de la función distancia evaluada desde  $s_1$  hasta  $s_2$  y
    almacenarlos
```

```
end for
encontrar el mínimo de todos ellos
return l el mínimo para la primera curva
```

Ya que tengamos todos los posibles puntos mínimos, nos buscamos el que de la suma mínima entre todos ellos. El parámetro mínimo se obtiene en los puntos:

```
Out[2]= (0.248184, 0.968713)
        (-3.29779, 3.4931)
        (5.27556, 4.27542)
```

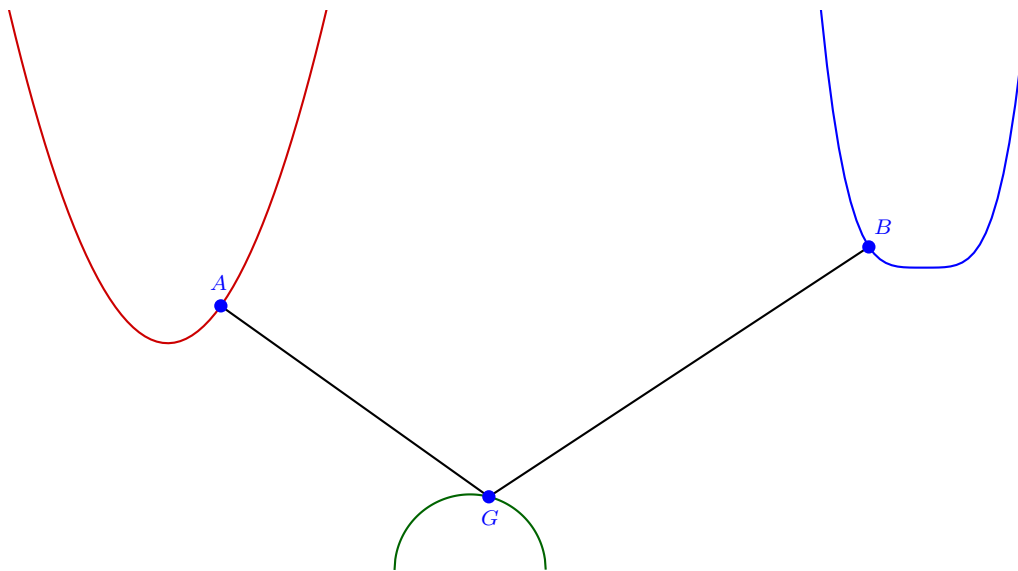


Fig. 29. Aplicando el algoritmo 2.

Si en el mínimo obtenido anteriormente hubiese un ángulo mayor o igual a 120° por el Teorema 2.2.2 ese sería la solución a nuestro problema, como en este caso el ángulo formado por los dos segmentos es menor que 120° calculamos el punto de Fermat depasamos al siguiente paso del algoritmo.

while la diferencia entre ángulo que se forma entre el punto de Fermat obtenido y sus puntos más cercanos a las curvas y 120° sea más pequeño que cierto ϵ dado **do**

Calcular el punto de Fermat de los nuevos puntos en la curva y encontrar los puntos más cercanos al punto de Fermat en cada curva

end while

Cuando se detiene obtenemos los puntos donde el último es el punto de Fermat:

```
Out[3]= (0.0341893, 0.999415)
        (-3.19857, 3.6423)
        (5.22285, 4.36478)
        (0.0551577, 1.61236)
```

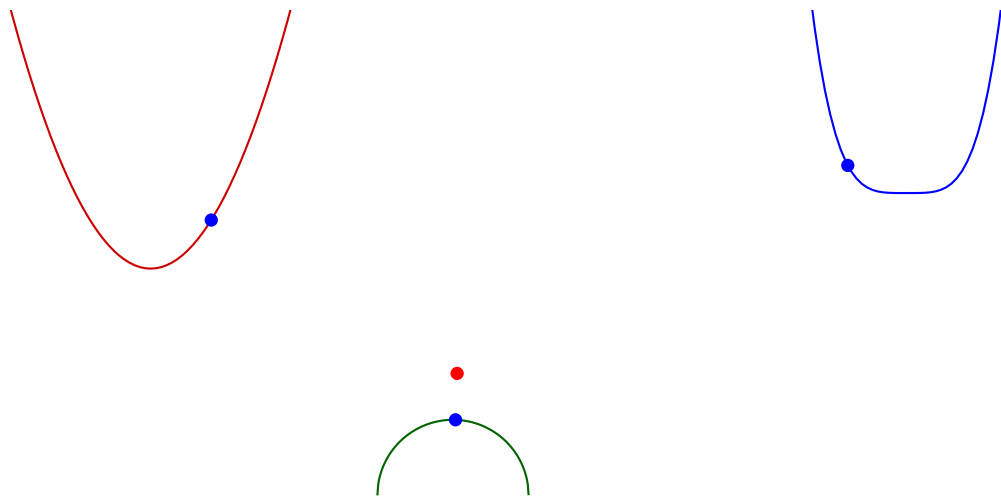


Fig. 30. Punto de Fermat para las tres funciones dadas.

En la siguiente imagen se puede ver la convergencia de los puntos de Fermat.

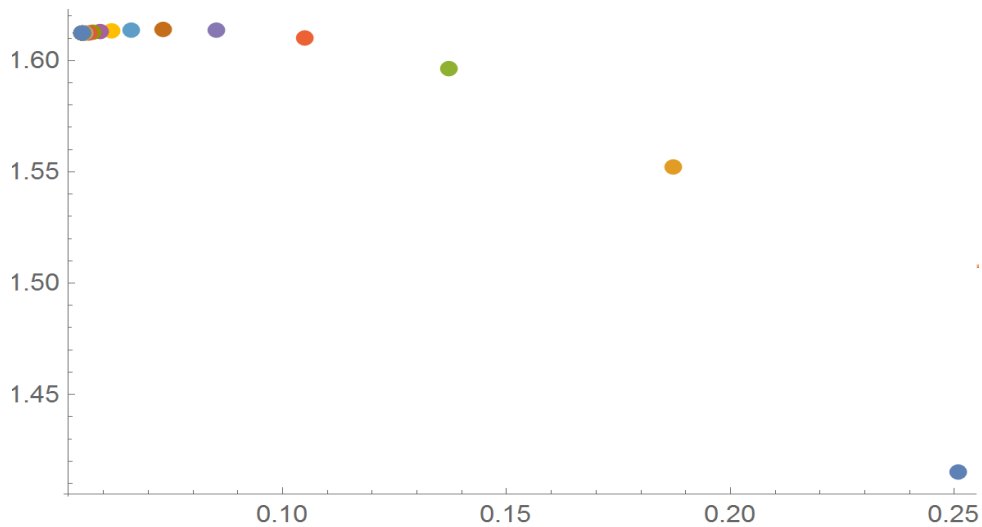


Fig. 31. Sucesión de puntos de Fermat.

4.2.1. Ejemplos geométricos sencillos.

Un buen ejemplo para probar si el algoritmo funciona es aplicarlo al problema original con tres puntos A, B, C . Para este caso las elipses generalizadas son elipses usuales, pero los puntos más cercanos a los puntos A, B, C y el parámetro más pequeño entre las elipses están determinados por los vértices y segmentos del triángulo $\triangle ABC$, por lo que basta con encontrar el punto de Fermat para los puntos A, B, C y por lo tanto el algoritmo funciona para el problema original.

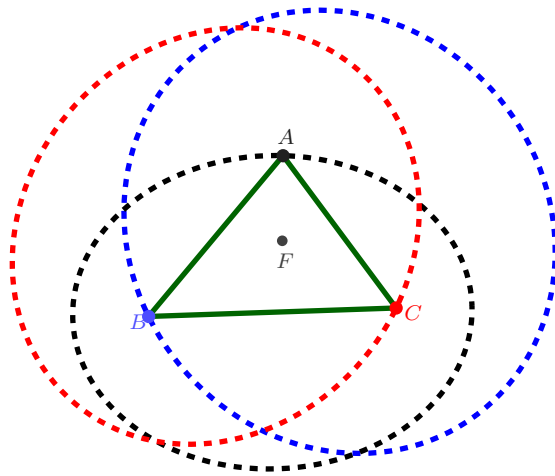


Fig. 32. Aplicando el algoritmo al problema original.

Vimos anteriormente que el punto de Fermat para tres círculos se obtiene con el punto de Fermat de sus centros, en el siguiente ejemplo hemos tomado un punto cualquiera del plano como nuestro punto inicial para el algoritmo y como veremos la sucesión de puntos converge al punto de Fermat obtenido anteriormente.

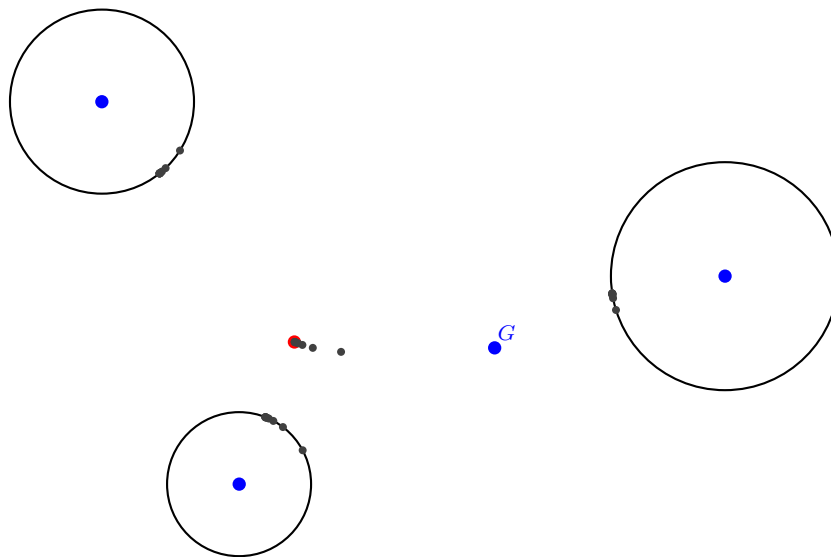


Fig. 33. Aplicando el algoritmo con un punto inicial cualquiera.

Como podemos observar, empezando en el punto G y aplicando el algoritmo vemos como la sucesión converge al punto de Fermat ya conocido, a continuación se presentan más sucesiones empezando de diferentes puntos y todas estas convergen al punto de Fermat.

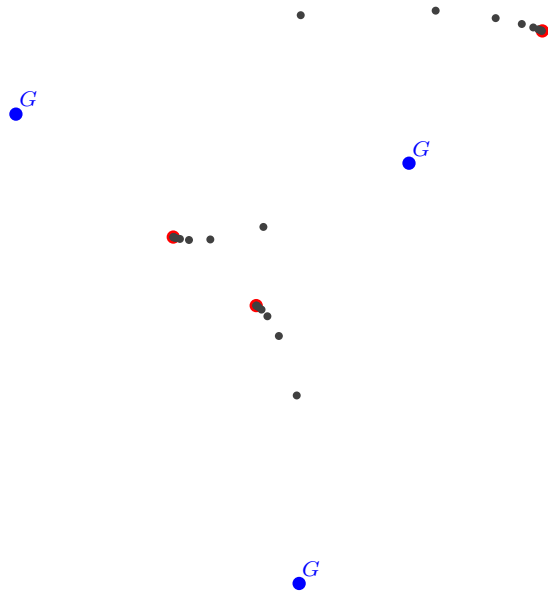


Fig. 33. Convergencia al punto de Fermat desde distintos puntos.

Con esto planteamos la siguiente conjetura:

Conjetura. Sean K_1, K_2, K_3 tres conjuntos convexos en el plano y sea $x \in \mathbb{R}^2$. La sucesión de puntos f_i , donde f_i es el punto de Fermat para los puntos $p_1(f_{i-1}), p_2(f_{i-1}), p_3(f_{i-1})$ y f_1 es el punto de Fermat para $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, converge al punto de Fermat para los tres conjuntos convexos.

Conclusiones

Muchos matemáticos a lo largo de la historia han dado su aportación al problema del punto de Fermat-Torricelli , desde el mismo Torricelli con su demostración clásica para tres puntos, Varignon con su máquina que resuelve el problema de una manera muy visual, Weber y demás matemáticos del siglo XX presentando sus algoritmos y aproximaciones numéricas para encontrar este punto, más reciente, Martini demostrando la existencia del punto de Fermat para cualquier número de conjuntos convexos en cualquier espacio normado y llegando finalmente al día de hoy con una nueva aportación más: cómo encontrar el punto de Fermat para tres conjuntos convexos.

Haciendo uso de conceptos muy simples, como la elipse o el punto de Fermat usual, y generalizándolos hacia conjuntos convexos se han podido demostrar un par de Teoremas que nos dan prácticamente una receta para encontrar el punto de Fermat para tres conjuntos convexos, algo que no es muy común en el ámbito matemático pues la mayoría se queda sólo en la existencia y no dicen cómo encontrarlo.

Al inicio de esta investigación se pensaba que la solución para tres conjuntos convexos iba a ser toda una región, llamándole así *región de Fermat* a la solución de este problema, pero como vimos en el Teorema 2.2.1 la solución a este problema sigue siendo un punto, al igual que en el problema original, es por esto que al punto que minimiza la suma de distancias, ya sea a puntos o convexos, le

llamamos simplemente *el Punto de Fermat*.

El algoritmo presentado en el capítulo tres es muy diferente a los que se han presentado anteriormente para este tipo de problemas, primero porque estos últimos son únicamente para puntos y además que son puramente numéricos, en cambio el que se propone aquí es un algoritmo puramente geométrico

Como se mencionó en el último capítulo, se vió en los ejemplos que no era necesario hacer uso de las elipses generalizadas para empezar el algoritmo, si no que cualquier punto en el plano, siempre y cuando no estuviera en el interior de algún convexo, nos sirve como punto de inicio para el algoritmo. Sin embargo, esto no se ha resuelto en su totalidad por lo que queda como una pregunta abierta.

Otras preguntas que surgieron durante la investigación y quedan como trabajo a futuro son: ¿Qué pasa si los tres conjuntos convexos tienen diferente peso? ¿Se podrá encontrar el punto de Fermat para más de tres conjuntos convexos? ¿Cómo se encontraría el punto de Fermat para tres conjuntos que no sean convexos? ¿Cómo se resolvería este problema sobre una superficie?

Bibliografía

- [1] Abi-Khuzam, F. (2014). *Geometry of the weighted Fermat-Torricelli problem*. Journal of Geometry, 106(3), 443 – 453.
- [2] Abu-Saymeh, S. and Hajja, M. (1997). *On the Fermat-Torricelli Points of Tetrahedra and of Higher Dimensional Simplexes*. Mathematics Magazine, 70(5), 372.
- [3] Abu-Affash, A. and Katz, M. (2009). *Improved bounds on the average distance to the Fermat-Weber center of a convex object*. Information Processing Letters, 109(6), 329 – 333.
- [4] Ayala-Figueroa R.I. (2011) *Métodos Geométricos en problemas de optimización de proyecciones*, Tesis.
- [5] Benítez C., Fernández M., and Soriano M. L. (2002), *Location of the Fermat-Torricelli medians of three point*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (12), 5027-5038.
- [6] Brimberg, J. (1996). *The Fermat-Weber location problem revisited*. Location Science, 4(4), 287.
- [7] Brimberg J., Chen R. (1998) *A note on convergence in the single facility minisum location problem*. Comput. Math. Appl. 35(9), 25-31.

- [8] Brimberg J., Wesolowsky G.O. (2002) *Minisum location with closest Euclidean distances*. Ann. Oper. Res. 111, 151–165.
- [9] Burkard, R., Galavii, M. and Gassner, E. (2010). *The inverse Fermat-Weber problem*. European Journal of Operational Research, 206(1), 11 – 17.
- [10] Burton, G. (1977). *Some characterisations of the ellipsoid*. Israel Journal of Mathematics, 28(4), 339 – 349.
- [11] Canavate-Bernal J., Roberto y Cobacho, Belen M. (2004). *Una revisión histórica de los métodos clásicos de resolución del problema de Fermat-Weber*. Recta. Actas 12.
- [12] Carmi, P., Har-Peled, S. and Katz, M. (2005). *On the Fermat-Weber center of a convex object*. Computational Geometry, 32(3), 188 – 195.
- [13] Chakerian, G. and Ghandehari, M. (1985). *The Fermat problem in Minkowski spaces*. Geometriae Dedicata, 17(3).
- [14] Chen, E. and Lourie, N. (2015). *Tripod configurations of curves*. Journal of Geometry and Physics, 89, 1 – 16.
- [15] Cockayne, E. (1972). *On Fermat's Problem on the Surface of a Sphere*. Mathematics Magazine, 45(4), 216.
- [16] Dinler, D., Tural, M. and Iyigun, C. (2015). *Heuristics for a continuous multi-facility location problem with demand regions*. Computers and Operations Research, 62, 237 – 256.
- [17] Dumitrescu, A., Jiang, M. and Tóth, C. (2011). *New bounds on the average distance from the Fermat-Weber center of a planar convex body*. Discrete Optimization, 8(3), 417 – 427.
- [18] Ghandehari, M. and Golomb, M. (2000). *Minimum Path Problems in Normed Spaces: Reflection and Refraction*. Journal of Optimization Theory and Applications, 105(1), 1 – 16.
- [19] Grob, C. and Strempel, T. (1998). *On Generalizations of Conics and on a Generalization of the Fermat-Torricelli Problem*. The American Mathematical Monthly, 105(8), 732.

- [20] Jalal G., Krarup J. (2003) *Geometrical solution to the Fermat problem with arbitrary weights*. Ann. Oper. Res. 123, 67-104.
- [21] Jiang, J. and Xu, Y. (2006). *Minimum location problem with farthest Euclidean distances*. Mathematical Methods of Operations Research, 64(2), 285 – 308.
- [22] Kaiser, M. and Morin, T. (1994). *Characterizing Centers of Convex Bodies via Optimization*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 184(3), 533 – 559.
- [23] Khimshiashvili, G., Panina, G. and Siersma, D. (2015). *Equilibria of point charges on convex curves*. Journal of Geometry and Physics, 98, 110 – 117.
- [24] Martini, H., Swanepoel, K. and Weiss, G. (2002). *The Fermat-Torricelli Problem in Normed Planes and Spaces*. Journal of Optimization Theory and Applications, 115(2), 283 – 314.
- [25] Mordukhovich, B. and Nam, N. (2010). *Applications of Variational Analysis to a Generalized Fermat-Torricelli Problem*. Journal of Optimization Theory and Applications, 148(3), 431 – 454.
- [26] Petrovic, M., Banjac, B. and Malesevic, B. (2014). *The geometry of trifocal curves with applications in architecture, urban and spatial planning*. Spatium, (32), pp.28-33.
- [27] Sokolowsky, D. (1976). *A Note on the Fermat Problem*. The American Mathematical Monthly, 83(4), 276.
- [28] Trinh, M., Lee, B. and Ahn, H. (2015). *The Fermat-Weber location problem in single integrator dynamics using only local bearing angles*. Automatica, 59, 90 – 96.
- [29] Valentine, F. (1976). *Convex sets*. Huntington, N.Y. R. E. Krieger Pub. Co.
- [30] de Villiers, M. (1999). *A Further Generalisation of the Fermat-Torricelli Point*. The Mathematical Gazette, 83(496), 106.
- [31] Zachos, A. and Cotsiolis, A. (2011). *The weighted Fermat-Torricelli problem on a surface and an inverse problem*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 373(1), 44 – 58.