Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

ANÁLISIS DE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN LIBROS DE TEXTO UNIVERSITARIOS PARA CÁLCULO DIFERENCIAL.

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestra en Didáctica de las Matemáticas
Presenta:
Telesforo Sol Campuzano

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio

SINODALES

Dr. Víctor Larios Osorio
Presidente
Dr. Vicenç Font Moll
Secretario
Dra. Angélica Rosario Jiménez Sànchez
Vocal
M.D.M. Teresa de Jesús Valerio López
Suplente
M.M.E. Ma. Del Carmen Fajardo Araujo
Suplente

Firma
Firma
Firma
Firma
Firma

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Octubre, 2017
México

RESUMEN

La presente tesis analiza el tratamiento de la demostración relacionada con los conceptos de límite y continuidad en cuatro libros de texto universitarios. El análisis se realizó considerando el sistema teórico “Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos” (EOS) utilizando principalmente el constructo llamado “configuración epistémica” en el cual se consideran los siguientes objetos matemáticos: situación problema, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentación y lenguaje. El trabajo fue propuesto para cubrir el siguiente objetivo: obtener las principales características de los tratamientos de la demostración de teoremas y solución de problemas correspondientes a los temas de límite y continuidad de cálculo diferencial en libros de texto universitarios. Algunos de los temas que se consideran en los antecedentes son: análisis de textos matemáticos, demostración, argumentación. Se seleccionaron cuatro libros de texto universitarios, los cuales son de los más utilizados para impartir cursos de cálculo diferencial en la Universidad Autónoma de Querétaro. El análisis se realizó de la siguiente manera: en cada libro se resumió la forma en que se presentan los conceptos de límite y continuidad para identificar los teoremas, a cada teorema se le generó su configuración epistémica identificando y describiendo los seis objetos matemáticos mencionados anteriormente. Algunas de las conclusiones deducidas a partir de la generación de las configuraciones epistémicas son: obtención de los principales procedimientos que participan en las demostraciones, identificación de las proposiciones más utilizadas, las configuraciones epistémicas hacen explícitos objetos matemáticos que no se mencionan en los textos y que son parte de la argumentación y de la demostración, en las demostraciones existe una situación que va de lo general a lo general utilizando como puente lo particular. Los comentarios que se hacen son de los siguientes tres tipos: respecto a los libros, respecto a las configuraciones obtenidas y sobre preguntas pendientes por tratar. Se espera que este trabajo sirva como antecedente para un estudio más amplio que permita obtener el significado institucional de estos conceptos para los estudiantes de nivel superior para contrastarlo con el significado personal de los alumnos. Y que con estos resultados se puedan definir conflictos potenciales en los bloques de límite y continuidad.

(**Palabras clave**: argumentación, libros de texto, configuración epistémica)

SUMMARY

This thesis analyzes how four math college books deal in mathematical proofs with the concepts of limits and continuity in Calculus. The analysis has been carried out in the theoretical framework “Onto-semiotic Approach to Mathematics Knowledge” (EOS) from de the use of the epistemic configuration construct, which consider the following mathematical objects: problem situation, definitions, propositions, procedures, arguments and language. The work was directed to cover the following objective: get the main features of deal of the theorems demonstration and problems solution with respect to limits and continuity issues. Some of the subjects that are considered in the antecedents are: analysis of mathematical texts, demonstration and argumentation.

The selected books are used in some courses of calculus in the Universidad Autónoma de Querétaro. The analysis was performed as follows: in each book was summarized the way in which the concepts of limit and continuity are presented to identify the theorems, for each theorem its epistemic configuration was generated by identifying and describing the six mathematical objects mentioned above. Some conclusions drawn from the generation of epistemic configurations are: obtaining the main procedures involved in the demonstrations, identifying the most used propositions, the epistemic configurations make explicit mathematical objects that are not mentioned in the texts and are part of the argumentation and demonstration, in the demonstrations there is a situation which goes from the general to the general using as a bridge the particular. The comments that are made are of the following three types: regarding the books, with respect to the configurations obtained and about pending questions to be treated.

This study may be an antecedent for investigations of Institutional and personal meaning of limit and continuity for college students. And use these results to define potential conflicts.

(**Key words**: argumentation, textbooks, epistemic configuration)

DEDICATORIA

A mis padres porque siempre que pienso en superarme sé que ustedes me educaron así.

A Juven por ser el ser humano que me deslumbra la mayor parte de mi tiempo, me siento agradecido y feliz por todos estos años.

A Ruth que siempre me escuchas y Liber que la distancia no nos separa.

A mis hermanos que siempre que los veo me siento amado.

AGRADECIMIENTOS

En el desarrollo de esta tesis se atendieron los comentarios de los sinodales de la misma: Dr. Víctor Larios Osorio, Dr. Vicenç Font Moll, Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez, M.D.M. Teresa de Jesús Valerio López y M.M.E. Ma. Del Carmen Fajardo Araujo. Gracias por revisar el texto y su orientación.

De manera especial al Dr. Víctor Larios por todo el apoyo que recibí durante el tiempo en la maestría. Y al Dr. Vicenç Font Moll por el tiempo que me dedicó en la estancia de investigación en Barcelona y porque su enseñanza fue fundamental para concluir este trabajo.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo que me otorgó.

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta un análisis sobre el tratamiento de la demostración en los libros de texto universitarios respecto a los conceptos de límite y continuidad. En el análisis se utiliza el constructo “configuración epistémica” el cual está definido en el marco teórico llamado “Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos” (EOS). El trabajo esta enfocado en obtener las características principales de las demostraciones en los libros de texto, lo cual puede servir como antecedente para posteriores investigaciones como: definir el significado institucional y personal de los conceptos de límite y continuidad en el nivel superior, estudio de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el nivel superior.

En la siguiente sección se describe la razón e interés por el análisis de las demostraciones, considerando principalmente los objetos matemáticos que en una demostración no se mencionan, y se plantean los objetivos. También se citan antecedentes sobre el tema, describiendo de manera general cada cita.

En marco teórico se describe de manera general el EOS, haciendo énfasis que en sus inicios está la formulación de dos problemas importantes, uno epistemológico y otro cognitivo. De estos problemas se definen otros conceptos como el de práctica matemática, configuraciones, significado institucional de un objeto y significado personal de un objeto. Hay una sección donde se explica el concepto de configuración epistémica.

En Análisis de textos se generan las configuraciones epistémicas. Para esto se consideraron cuatro libros de texto universitarios de cálculo diferencial, estos se seleccionaron por ser de los libros más utilizados para la impartición del curso de cálculo diferencial en la facultad de ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro. Esta sección se divide en dos partes, una que tiene que ver con límites y la otra con continuidad. En cada parte primero se da un resumen general de la presentación del concepto en el libro y después se hacen las configuraciones epistémicas.

En conclusiones y comentarios primero se presentan las características obtenidas de las configuraciones epistémicas, donde se redacta de manera general cada uno de los componentes de estas (conceptos, proposiciones, procedimientos, lenguaje y argumentos). Haciendo uso de la flexibilidad que tiene el constructo de configuración epistémica se presenta una configuración epistémica de las demostraciones en los bloques de límites y continuidad. Es importante mencionar que la escritura de las demostraciones implica que para pasar de lo general a lo general se tiene que utilizar como puente lo particular mediante elementos genéricos. Por último se presentan los comentarios. Los primeros comentarios tienen que ver con la presentación de los conceptos en los libros considerando: uso de figuras, el orden de los temas, formalidad de los libros, etc. Después hay unos comentarios sobre las configuraciones epistémicas, destacando las ventajas que existen por su estructura amplia. Y por último se plantean preguntas pendientes por abordar que se espera sirvan de base para futuras investigaciones.

2 SOBRE LA INVESTIGACIÓN

Cuando se lee la *demostración o solución de un problema en matemáticas*, el lector debe ser capaz de entender las relaciones que existen entre los objetos matemáticos que forman parte de la solución. Algunos objetos matemáticos son mencionados de manera explícita en la redacción de la solución y otros no se mencionan pero son parte de, así el lector debe ser consciente de las relaciones que se consideran en la solución o demostración para poder conectar los argumentos que se presentan en la redacción. En algunos casos la presencia de representaciones de los objetos matemáticos (gráficas, dibujos, definiciones, etc.) permite al lector dar seguimiento a la solución o demostración.

En particular en el tema de límites de funciones en la materia de cálculo diferencial, el interés es saber la manera en que se estructura esta situación dentro de los libros de texto.

La enseñanza de la demostración y argumentación que se trabaja en los cursos de cálculo está relacionada con los libros de texto que consultan los profesores y alumnos en el transcurso de ciclo escolar. Al considerar la terna alumno, profesor y libro de texto es necesario que la interacción entre sus elementos facilite la enseñanza y aprendizaje es decir que el profesor y alumno tengan los conocimientos necesarios para leer el libro y que el libro tenga el nivel y enfoque que buscan los lectores en el contenido del programa. Para ello el profesor, quien es responsable de la selección de los libros de texto que se consultarán en el curso, debe evitar trabajar con un libro que haga difícil la relación de la terna mencionada.

Un profesor consciente de su proceso de análisis para la selección de un libro de texto podrá relacionar que es lo que los alumnos están aprendiendo respecto a un tema si logran entender los argumentos que el libro de texto tiene, argumentos que el profesor ya ha identificado en su análisis.

Dentro del EOS el concepto de configuración epistémica permite estructurar la relación que existe entre los siguientes objetos matemáticos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, 5) proposiciones y 6) argumentaciones.

2.1 Objetivos

Los objetivos de este trabajo son:
Obtener las principales características de los tratamientos de la demostración de teoremas y solución de problemas correspondientes al tema de límite y continuidad de cálculo diferencial en libros de texto universitarios.
Generar las configuraciones epistémicas de las soluciones y demostraciones referentes a los conceptos de cálculo diferencial que se encuentran en los libros de texto utilizados en la facultad de ingeniería de la UAQ.

2.2 Antecedentes

Los investigadores en didáctica de matemáticas han trabajado sobre la enseñanza y aprendizaje de la demostración desde diferentes líneas de investigación. Fiallo, Camargo, y Gutiérrez (2013) hacen una recopilación de las principales investigaciones y plantean una estructura organizativa en las siguientes líneas:

a) Histórico-epistemológica, donde las investigaciones se centran en indagar por la naturaleza de la demostración y su estatus en el conocimiento matemático. Buscan crear conciencia de que la demostración ha sido abordada bajo diferentes perspectivas por los matemáticos y responder a interrogantes como ¿qué es la demostración y cuáles son sus funciones?, ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en las comunidades de matemáticos? ¿Cuáles son algunas de las fases críticas en el desarrollo de la demostración en la historia de las matemáticas?
b) La demostración en el currículo, donde las investigaciones tienen como meta proporcionar una descripción del estatus de la demostración en la escuela y su relación con el currículo. Considerando las siguientes interrogantes ¿cuál es el estatus de la demostración en la escuela?, ¿qué influencia tienen las concepciones epistemológicas acerca de la demostración en las diversas opciones curriculares?, ¿qué relación guardan el aprendizaje de la demostración en la escuela y las concepciones de los estudiantes acerca de la demostración con supuestos históricos y epistemológicos subyacentes en el currículo?

c) Concepciones y dificultades de los estudiantes al demostrar, aquí las investigaciones buscan obtener una mejor idea sobre los procesos relacionados con el aprendizaje de la demostración y aportan respuestas a interrogantes como ¿cuáles son las actuales concepciones de la demostración de los estudiantes?, ¿cuáles son las principales dificultades que encaran los estudiantes en relación a la demostración? Y ¿Cuál puede ser el origen de tales dificultades?
d) Relaciones entre demostración y argumentación, en esta sección se agrupan los trabajos que se centran en establecer relaciones entre la argumentación y demostración. En esta línea de investigación se consideran las preguntas como: ¿existe continuidad o distancia cognitiva entre la argumentación producida en la construcción de una conjetura y su demostración?; ¿de qué tipo de continuidad se trata?, ¿cómo comparar la argumentación con la demostración?, ¿cómo identificar la fase de producción de una conjetura y la fase de construcción de la demostración?
e) Propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración. En esta línea se pretende generar propuestas alternativas para la enseñanza de la demostración en diversos contextos educativos, incluso desde la escuela primaria, los trabajos consideran las siguientes preguntas: ¿Es posible superar las dificultades que encuentran los estudiantes en relación a la demostración?; ¿cómo pueden ser diseñadas intervenciones de enseñanza?; ¿qué sugerencias generales se pueden dar para la enseñanza de las demostraciones?; ¿cómo debería enseñarse la demostración?; ¿cómo son construidas, verificadas y aceptadas las demostraciones en el aula?; ¿cuáles son fases críticas en el desarrollo de la demostración con el estudiante y dentro del aula como comunidad de aprendizaje?; ¿qué entornos de aula son propicios para el desarrollo del concepto de demostración con los estudiantes?; ¿qué formas de interacciones entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor pueden fomentar la concepción de demostración de los estudiantes?; ¿qué actividades matemáticas –posiblemente con el uso de tecnología- pueden mejorar las concepciones de los estudiantes de la demostración?

Dentro de estas cinco líneas de investigación se considera los aspectos semióticos de la demostración. Duval ha estudiado el papel de las representaciones en el razonamiento (donde se incluyen argumentación y demostración). En su investigación, Duval (1993) plantea la siguiente paradoja, “por un lado, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, por el otro, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos”, conocida como paradoja cognitiva del pensamiento matemático. Los estudios de Duval generaron una línea de investigación a nivel internacional, y se puede ver en D’Amore, Pinilla, Iori y Matteuzzi (2015) los antecedentes históricos-filosóficos de la paradoja.

En la investigación histórico-epistemológica existe el trabajo de Picado y Rico (2009) donde se da un ejemplo de análisis de texto con enfoque de investigación histórica, mediante la técnica de análisis de contenido, consideran que el análisis de libros históricos es un proceso conformado por los siguientes cinco pasos:

1. La bibliografía. La cual está relacionada con el texto y tema bajo estudio, donde los documentos se pueden clasificar en cuatro grupos: instrumentos de trabajo y obras de referencia; obras generales y manuales; libros especializados y monografías; y anuarios y revistas.
2. Clasificación del texto. En este paso se consideran cuatro aspectos: la naturaleza del texto, las circunstancias espacio-temporales, la identificación del autor y los destinatarios, y finalidad del texto.
3. Análisis del texto. El cual consiste en el análisis temático y explicación detallada del contenido del texto, para este caso consideran la técnica de análisis de contenido, en la que se destaca la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología para un determinado concepto o tarea matemática.
4. El comentario. En este paso se realiza una manifestación general relacionando el contenido del texto con la situación histórica planteada.
5. La crítica. En esta última parte del análisis se debe considerar el interés del texto por el contenido en sí mismo y por su significado para el proceso histórico y su aporte al conocimiento en este proceso.

El análisis que se hizo para realizar esta tesis se relaciona con el paso tres, específicamente con la estructura conceptual y los sistemas de representación, ya que la estructura conceptual está relacionada con hechos, conceptos y estructuras y en nuestro análisis consideramos definiciones y proposiciones. Y en la parte de razonamientos y estrategias en nuestro análisis se considerará dentro de procedimientos y argumentos. Por otro lado en los sistemas de representación se muestran los modos de hacer presente un objeto, concepto o idea y contemplan para ello símbolos, signos gráficos y materiales físicos lo cual se consideró en nuestro análisis en la parte de lenguaje.

En la misma línea de investigación histórico-epistemológica se encuentra el artículo de Sierra, González y López (1997) donde se estudia el desarrollo histórico del concepto de límite funcional en los libros de bachillerato y en los cursos de orientación universitaria en España. Realizan un análisis de los libros de texto estudiando los cambios producidos en 1940 a 1995 en el concepto de límite funcional considerando necesario analizar los cambios realizados en las sucesivas ediciones de un libro de texto, para pasar luego a buscar los cambios en otros libros de texto y, por último, relacionar estos cambios con los cambios en los programas, en los decretos ministeriales, en los debates didácticos, etc. Agrupan los libros en los siguientes tres periodos: 1940 y 1967 donde se publican los textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el bachillerato; 1967 y 1975 el cual abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implementación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP); 1975 y 1995 desde la implementación del BUP hasta el inicio de los nuevos bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Su criterio para la elección de los libros de texto fue el de los autores más *famosos* o de las editoriales más *importantes.* Su análisis es de tres etapas cada una profundizando más en la etapa anterior, en la primera etapa se elaboran fichas con datos del libro, en la segunda etapa se hacen tablas comparativas de los libros correspondientes a cada periodo de las cuales incluyen:

a) Modo de introducción del concepto;
b) Tipo de definición
c) Secuenciación
d) Tipos de ejercicios y problemas.

En la tercera etapa consideran tres dimensiones de análisis las cuales son:

a) Conceptual: se refiere a cómo se organiza y se define el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problema y ejercicios resueltos o propuestos.
b) Análisis didáctico-cognitivo: se refiere tanto a la explicación de los objetivos que los autores pretenden conseguir como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas.
c) Análisis fenomenológico: que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión.

Por su parte, Font y Godino (2006) proponen que el análisis de libros de texto ha de ser una de las competencias contemplada en la formación de profesores e ilustran el análisis de textos matemáticos, utilizando el constructo de configuración epistémica, el cual es desarrollado en el EOS. Ellos piensan que dentro de las herramientas que necesitan los estudiantes de programas en formación de profesores de matemáticas, para aprender a enseñar, son los criterios para analizar la propia práctica docente y las lecciones de los textos escolares.

También consideran que para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático y en general la actividad matemática, es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos: a) lenguaje, b) situaciones-problemas, c) conceptos, d) procedimientos, técnicas, etc., e) proposiciones, propiedades, etc. y f) argumentaciones. Estos objetos se articulan formando una configuración las cuales pueden ser formales o empíricas. Para mostrar la utilidad de las configuraciones epistémicas como herramienta para describir las características de los textos matemáticos consideran principalmente un texto del enunciado y demostración de un teorema de geometría plana, con la finalidad de dar respuesta a la siguiente cuestión ¿Cómo pueden hacer los profesores un análisis lo más completo posible de esta demostración? hacen configuraciones axiomáticas una de un libro de texto de nivel universitario y otra de un libro de texto de nivel de secundaria, también generan configuraciones empíricas de la unidad de funciones en la enseñanza de secundaria (mostrando aquí que las configuraciones permiten hacer diferentes análisis en los textos matemáticos, entre ellos la demostración de un teorema, solución de un problema matemático y el análisis global de una unidad didáctica).

Este trabajo define el análisis de libros de texto ya que permitió hacer el análisis sólo del tratamiento de la demostración lo cual facilita la búsqueda del objetivo. Y permite delimitar el análisis y dejar de lado diferentes dimensiones como: análisis fenomenológico, didáctico cognitivo, análisis de comentarios, críticas, etc.

También en el análisis de textos se considera el trabajo de Ibañes y Ortega (2004) donde analizan el tratamiento que dan los libros de texto de matemáticas I, de primer curso de bachillerato, en el tema de trigonometría. Teniendo en cuenta los siguientes aspectos sobre las justificaciones que dan los libros de texto:

- *Esquemas de prueba*, se observa la clase de justificación utilizada, siguiendo la clasificación de Harel y Sowder (1998) (la cual también se mencionara dentro de esta sección).
- Cuando se trata de una demostración, analizan *técnicas empleadas.*
- *Funciones de la demostración*. En esta parte los autores retoman la propuesta de Villiers (1993) sobre las funciones que pueden tener las funciones matemáticas. En el caso de este trabajo no se explicitan en sí, pero se toman en cuenta por las implicaciones educativas que pueden tener.
- *Reconocimiento de procesos*, se fijan si se hace una reflexión sobre ello, o sobre sus consecuencias.
- *Expresiones* utilizadas, en particular si se habla de hipótesis, tesis o conclusión, si emplea las expresiones si,…, entonces, una condición necesaria, etc.
- Consideración global del proceso seguido, si se explica su significado, si se distingue claramente entre el enunciado y su justificación, si se señalan otras posibles vías de actuación, etc.

Las funciones de la demostración matemática con las que trabajan son: verificación, concerniente a la verdad de una afirmación; explicación, profundizando en por qué es verdad; sistematización, la organización de varios resultados; descubriendo, invención de nuevos resultados; y comunicación, la transmisión del conocimiento matemático.

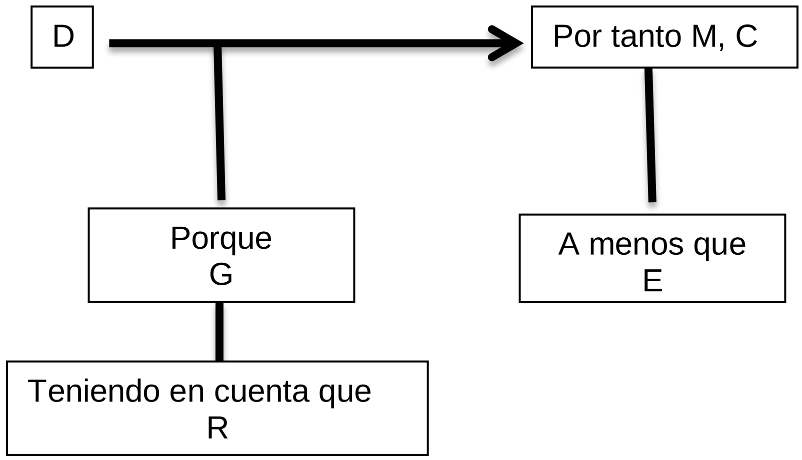
También consideran unos criterios ligados a la resolución de problemas y distinguen: tipos, atendiendo a la estructura lógica del enunciado; métodos, atendiendo a los procedimientos lógicos que se utilizan en la demostración; estilos, respecto a los procedimientos matemáticos; y modos, considerando la forma de exposición.

En cuanto a tipo, se distinguen los de condición necesaria o suficiente, y el de condición necesaria y suficiente si además se refiere a la existencia de algún objeto matemático, puede ser de existencia simple, de existencia y unicidad, o de imposibilidad. En métodos se consideran los siguientes: silogismo, demostración por contradicción, reducción al absurdo, inducción completa, método constructivo, demostraciones por analogía y dualidad. Y en estilos se consideran: el geométrico, algebraico, de coordenadas y el de análisis matemático. En modos de exposición consideran: el sintético o directo y el analítico o indirecto.

De los aspectos enlistados anteriormente los que coinciden con nuestro análisis son: técnicas empleadas, reconocimiento de proceso, expresiones utilizadas y consideración global. Una diferencia con nuestro análisis es que consideramos los aspectos anteriores aunque no estén explícitamente mencionados en el texto matemático y ellos sólo analizan las partes que se mencionan explícitamente.

En los antecedentes respecto a argumentación se puede considerar a Toulmin (2007) quien hace un análisis de las formas de argumentación considerando la relación de la lógica y su práctica en la vida diaria, contemplando a la inferencia como un tipo de proceso que debe ejecutarse de acuerdo a unas reglas. Distinguiendo entre fuerza de los términos de la evaluación lógica y las razones para su uso. En su estudio analiza cómo funcionan los argumentos con el fin de comprobar cómo está relacionada su validez o su carencia de validez en la forma en que se estructuran y cómo se relacionan con la noción tradicional de la forma lógica. Con lo cual propone un esquema de argumentación formado por los siguientes elementos: datos (D), garantías (G), conclusión (C), matizadores (M), condiciones de refutación (E) y respaldo (R). Donde las garantías son enunciados hipotéticos de carácter general, que actúan como puente entre los datos y la conclusión, los matizadores indican la fuerza conferida por la garantía en el paso adoptado y las condiciones de refutación apuntan las circunstancias en que la garantía ha de dejarse a un lado, los respaldo son certezas que dan autoridad y vigencia a las garantías.

Figura 2.2.1 Esquema de argumentación de Toulmin



Con respecto a trabajos en argumentación también está el realizado por Harel y Sowder (1998) quienes basados en seis clases semestrales en las materias de teoría de números, geometría, algebra lineal y cálculo recolectan datos mediante notas de clase, observaciones en salón, notas retrospectivas, entrevistas, tareas de grupo, tareas individuales y exámenes. Con los cuales hacen un análisis cualitativo. Definen prueba como el proceso empleado por un individuo para eliminar o crear dudas sobre una observación y consideran los subprocesos indagar y persuadir, el primer subproceso es donde una persona elimina sus propias dudas sobre la veracidad de una observación y en el segundo es donde se eliminan las dudas de otras personas sobre la veracidad de una observación. El principal interés de su trabajo es conocer cómo es que los estudiantes se convencen sobre la veracidad de una observación y cómo es que persuaden a otros sobre la veracidad de una observación y definen que un esquema de demostración para una persona es lo que constituye indagar y persuadir para esa persona. Con lo cual ellos plantean tres principales categorías de esquemas de prueba las cuales son:

- Esquemas de prueba de convicción externa: cuando la formalidad de las matemáticas se trabaja de manera prematura y los estudiantes solo siguen fórmulas para resolver problemas, aprenden a memorizar dejando de lado la creatividad y el descubrimiento y consideran que el profesor siempre tiene la razón. Este esquema se divide a su vez en :
    - Rituales,
    - Autoritario
    - Simbólicos.

- Esquemas de prueba empíricos: las conjeturas son validadas o impugnadas mediante referencias a factores físicos o experiencias y se dividen en:
    - inductivos
    - perceptuales.
- Esquemas de prueba analíticos: se validan las conjeturas mediante deducciones lógicas y se dividen en:
    - Transformacionales
    - axiomáticos.

Por último se tiene en cuenta el trabajo de Medrano y Pino (2016) donde presentan un estudio de tipo histórico documental sobre la génesis y la evolución de la noción de límite finito, en el cual se evidencian las características históricas de emergencia de los objetos matemáticos y las características de un proceso evolutivo de carácter dialéctico, en la construcción del concepto de límite de función. Distinguen siete estadios de comprensión del objeto matemático límite los cuales son:

1. **La noción de aproximación desarrollada por Eudoxo y Arquímedes**. Es donde emerge el concepto de infinito que influye en la fundamentación del cálculo diferencial e integral propuesta por Cauchy y por Weierstrass. Eudoxo define la proporcionalidad entre magnitudes geométricas y a partir de esta Dedekind puede derivar la concepción de número real. También nace el axioma de Arquímedes.
2. **La concepción de los indivisibles**. Aquí Cavalieri expone su concepción de los indivisibles en el libro Geometría indivisibilibus y esta da el origen de una nueva clase de entes matemáticos: los infinitesimales. Están las contribuciones de Descartes como la geometría analítica, problemas de máximos y mínimos, y problemas de tangentes y cuadraturas. Los aportes de Fermat quien presenta un método general de resolución de problemas de máximos y mínimos.
3. **La noción intuitiva de límite en los desarrollos de Newton y Leibniz**. Considerados los fundadores del cálculo diferencial e integral, algunos aportes de Newton son: fluentes y fluxiones, una preconcepción de límite, Newton disponía de una noción intuitiva de límite, de una visión de continuo geométrico dinámico y de un vestigio conceptual de lo que sería en el futuro el álgebra de límites.

4. **La idea de los infinitesimales en los desarrollos de Leibniz**. Introduciendo el concepto de diferencial de una variable la cual no hace uso de una noción explícita o implícita de límite.
5. **Las concepciones pre-formales de límite**. Con los trabajos de Cauchy en el siglo XIX se inicia la formalización de los conceptos fundamentales del cálculo (función, límite, continuidad, diferenciación e integración). Euler integró el cálculo diferencial y el método de las fluxiones en el análisis en el primer cuarto del siglo XIX, con base a los trabajos matemáticos de Agustin Cauchy y Bernhard Bolzano, se consolida el proceso de fundamentación rigurosa del cálculo diferencial e integral. Bolzano fue el primero en dar un ejemplo de una función continua en un intervalo pero no diferenciable en ningún punto.
6. **La concepción formal de la noción de límite**. Dedekind desarrolla su proyecto de aritmetización del cálculo infinitesimal y genera la construcción del conjunto de los números reales esto también fue desarrollado por Cantor y Weierstrass. Dedekind utiliza una definición de límite muy cercana a la definición de Weierstrass, utilizando épsilon y delta.
7. **Generalizaciones de la noción de límite.** La definición de Weierstrass de límite de una función real de una variable se generalizó con base a los elementos operacionales usados en ella.

Este trabajo se enfoca en el estadio 6, conocer la génesis y evolución del concepto de límite complementa el análisis de una manera general en la didáctica de las matemáticas.

Hasta aquí se han presentado algunos de los antecedentes que sirvieron de base para mostrar que dentro de la didáctica matemática hay interés en el tema de análisis de texto y se han desarrollado diferentes metodologías para esto. En la próxima sección se muestra el marco teórico que fue seleccionado para realizar el análisis de texto.

3 MARCO TEÓRICO

3.1 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos

Para el análisis de los libros de texto se utilizará principalmente el constructo configuración epistémica (CE) que es una herramienta del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). Con lo cual en esta sección se describirá de forma general el EOS considerando tres diferentes etapas de este definiendo algunos conceptos entre ellos constructo CE.

El sistema teórico EOS inicia desde los años noventa en la Universidad de Granada donde investigadores como Brousseau, Douady, Vernaud, Chevallard, entre otros impartieron seminarios en el doctorado de Didáctica de las Matemáticas y autores como H. Steiner, J. Kilpatrick, A. Bell, E. Fischbein, P. Ernest, entre otros participaron en seminarios de investigación. Lo anterior permitió conocer a detalle sus investigaciones y situar las aportaciones de la didáctica fundamental en un contexto más amplio. De lo cual surge la convicción de la necesidad y utilidad de clarificar, comparar y articular las principales teorías existentes, las cuales se mencionan en el siguiente párrafo. Es por esto que crea el EOS.

Algunas de las teorías que sirvieron de base para el EOS son: el enfoque de la Didáctica Fundamental de las Matemáticas (DFM), donde la epistemología matemática debe ser un objeto prioritario de reflexión y análisis; Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), en la cual se asume el postulado de que para cada objeto matemático (o una colección de situaciones) cuya resolución ha dado origen a dicho objeto. Y las aproximaciones antropológicas (Wittgenstein) y pragmatistas (Peirce) en filosofía de las matemáticas, las cuales asumen que los objetos matemáticos emergen de las prácticas matemáticas. Teoría Antropológica de la didáctica (TAD), La dialéctica instrumento-objeto y el juego de Marcos (DIO-JM), teoría de los campos conceptuales (TCC) y Teoría de los registros y representación semiótica de Duval. (Godino, 2012).

Considerando que no hay una respuesta clara, satisfactoria y compartida en las teorías respecto a los problemas epistemológico y cognitivo en didáctica de la matemática se formula dicho problema de la siguiente forma (Godino, 2102):

Problema epistemológico (PE): ¿Qué es un objeto matemático?; o ¿cuál es el significado de un objeto matemático en un contexto o marco institucional determinado?

Problema cognitivo (PC): ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Las preguntas anteriores muestran los dos siguientes temas: una cuestión epistemológica, que es precisar y explicitar la naturaleza del objeto matemático y su emergencia a partir de las prácticas matemáticas; y un problema cognitivo, caracterizar el conocimiento desde el punto de vista subjetivo. Una reflexión sobre estas preguntas se presentará en las conclusiones. Para abordar los análisis epistemológicos y cognitivos se considera el par ‹*sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos* ›. Definidos de la siguiente manera (Godino, Batanero y Font, 2008):

Práctica matemática: toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las cuales pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución.

Configuraciones: redes de los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las cuales pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de los objetos personales).

Con las dos definiciones anteriores se reformula el PE y el PC de la didáctica de la matemática en los siguientes términos (Godino, 2012):

¿Cuáles son las prácticas matemáticas institucionales, y las configuraciones de objeto y procesos activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? (significado institucional de referencia)

¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos ponen en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (Significado personal)

¿Qué prácticas, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional? (competencia, conocimiento, comprensión del objeto por parte del sujeto).

Además, para abordar el diseño instruccional el EOS plantea las siguientes cuestiones (Godino, 2012):

Problema de la instrucción matemática significativa (PIM) ¿Qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos?

Problema normativo (PN) ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?

Para tratar de comparar, coordinar e integrar las diversas teorías que abordan los problemas didáctico-matemáticos en el EOS se plantea el siguiente problema:

Problema de la epistemología de la didáctica de la matemática (PEDM): Dadas las Teorías $T_1, T_2, \ldots, T_n$ focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿Es posible elaborar una teoría T que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las Ti?

En la primera etapa del EOS se desarrollaron y precisaron las nociones de significado institucional y personal de un objeto matemático las cuales se definen de la siguiente manera (Godino y Batanero, 1994):

Significado de un objeto institucional O_I: es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado.

Significado de un objeto personal Op: es el sistema de prácticas personales de una persona *p* para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado.

Con supuestos pragmáticos/antropológicos trataron de centrar su interés en los conocimientos matemáticos institucionalizados sin perder de vista al sujeto individual.

En una segunda etapa dentro del EOS se elaboran modelos ontológicos y semióticos más detallados para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus producciones. Concluyendo que era preciso estudiar más las relaciones dialécticas entre el pensamiento, el lenguaje matemático y las situaciones problemas para cuya resolución se inventan tales recursos (Godino, 2012).

En la tercera etapa del EOS el interés fue sobre modelos teóricos sobre la instrucción matemática y se propuso distinguir en un proceso de instrucción matemática en las siguientes dimensiones: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y afectiva (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas) (Godino, 2012).

Las nociones teóricas que componen el EOS se clasifican en cinco grupos (Godino, 2012):

Sistema de prácticas (operativas, discursivas y normativas): donde se presenta una teoría pragmática-antropológica de las matemáticas, centrándose en los conocimientos matemáticos institucionalizados, considerando al alumno.

Configuración de objetos y procesos matemáticos: donde se describe la actividad matemática y los procesos de comunicación, también se estudian los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos.

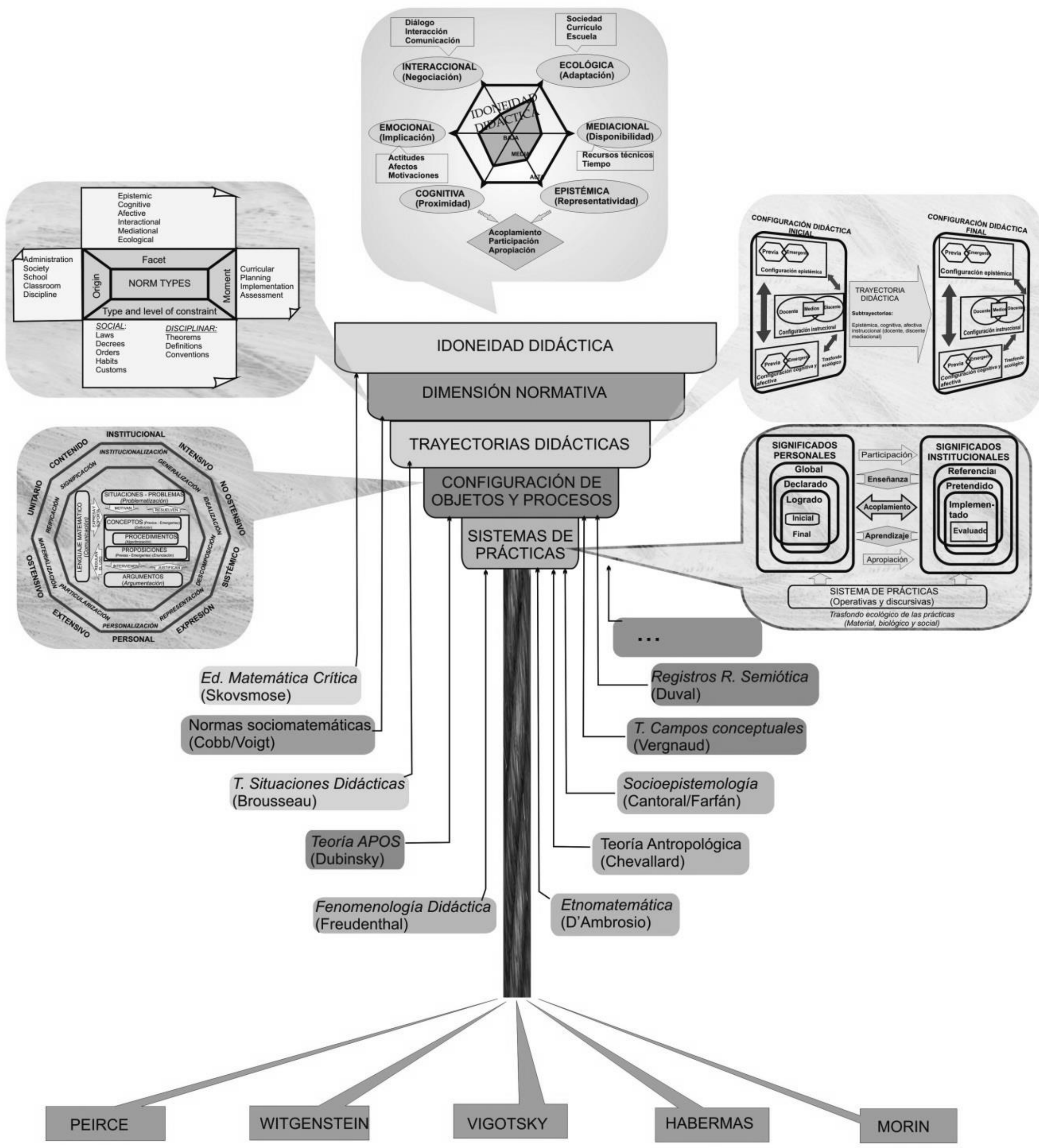
Configuraciones didácticas: donde se busca describir las interacciones que ocurren en el aula matemática.

Dimensión normativa: sistema de reglas que restringen y soportan las prácticas matemáticas.

Idoneidad didáctica: criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático.

La siguiente figura muestra los cinco grupos mencionados anteriormente y se mencionan algunas teorías y autores que sirven de base para el desarrollo del EOS.

Figura 3.1 (Tomada de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es)



Respecto a la clasificación anterior el análisis de libros de texto que se presenta en este trabajo se ubica en el de Configuración de objetos y procesos. Y en la siguiente sección se define la herramienta que se utilizará principalmente.

3.2 Configuraciones Epistémicas

En el EOS se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas y para la explicación de dicha emergencia se deben considerar como mínimo los dos siguientes niveles de objetos que emergen de la actividad matemática (Godino, Batanero y Font, 2008).

Primer nivel: aquí están las entidades que se pueden observar en un texto matemático. Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

Segundo nivel: aquí se tiene una tipología de objetos que emergen de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. los objetos pueden ser personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

En el primer nivel se encuentra el constructo de configuración. Donde para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático y en general la actividad matemática se contempla una ontología formada por los siguientes objetos matemáticos primarios:

Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).

Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios).

Conceptos- definición (definiciones de función, límite, dominio, etc.).

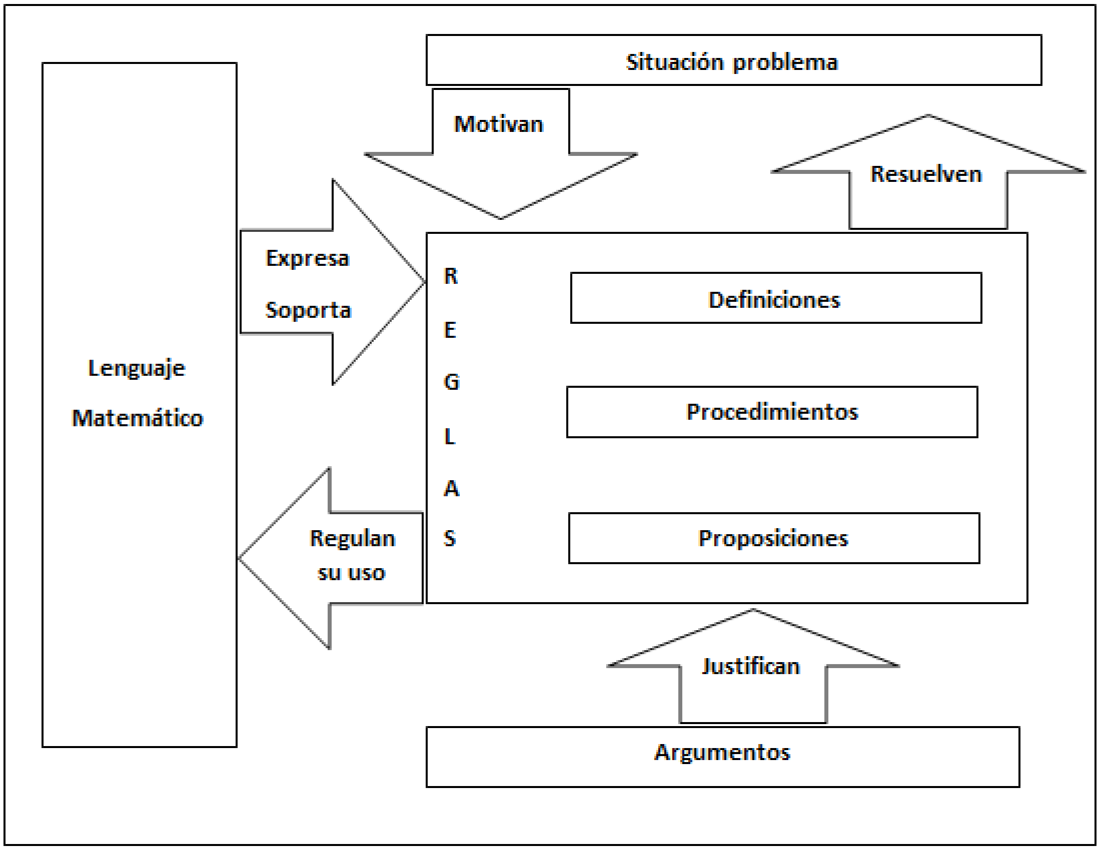
Proposiciones (enunciados sobre conceptos)

Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.).

Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Con la relación de estos seis tipos de objetos se forman las configuraciones epistémicas (CE), donde las situaciones problemas dan pie a la actividad; el lenguaje representa los otros objetos y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que se relacionan por los conceptos, las CE permiten conocer la estructura de las demostraciones. Como se menciona en (Font y Godino, 2006) las configuraciones epistémicas utilizadas en los libros de texto universitarios son de alguna manera laxas respecto a la parte precisión y rigor en el concepto de prueba, donde se busca trabajar en las pruebas de una manera axiomática, donde no se explica cuáles son los procedimientos, reglas o medios de prueba admisibles. La Figura 3.2 se puede considerar como el modelo básico de las configuraciones epistémicas.

Figura 3.2 Configuración Epistémica



4 ANÁLISIS DE TEXTOS

El análisis que se presentará es de tipo cualitativo y los libros con los que se desarrolla el análisis son libros usados en la Universidad Autónoma de Querétaro en los cursos de cálculo diferencial e integral en nivel superior, se utiliza el constructo de configuración epistémica para analizar la demostración de teoremas y solución de problemas en el bloque de límites y continuidad.

Los libros analizados son: Spivak (2003), Apostol (2007), Swokowski (1998) y Stewart (2008). Los libros tienen diferentes características por ejemplo algunos se apoyan de software, otros son más formales, algunos utilizan imágenes para aclarar ideas y uno de ellos cambia el orden de los temas. Estas características hacen notar los diferentes enfoques que los autores han trabajado en la elaboración de sus textos.

4.1 Descripción del desarrollo del concepto de límite en los libros.

Se presentará de forma general el desarrollo del concepto de límite en los libros seleccionados. Hay que mencionar que de los cuatro libros considerados, el de Apostol tiene diferente orden en sus capítulos ya que primero presenta los conceptos de cálculo integral, después una idea intuitiva de continuidad y posteriormente aborda la definición formal de límite. A diferencia de los otros libros que presentan primero una definición intuitiva de límite y después abordan el concepto formal de límite. Desde esta diferencia de orden para presentar los capítulos con ideas intuitivas del concepto de límite se ve la importancia de analizar y comparar los libros de texto. También en todos los libros excepto el de Apostol se trabaja con una definición no formal antes de la formal, y en estas definiciones intuitivas no se utiliza el valor absoluto. La numeración que se considera en este trabajo no es la misma que se encuentra en los libros.

a) El desarrollo del concepto de límite en el libro de Spivak (2003, págs. 107-131) se da de la siguiente manera: el capítulo 5 se llama “Límites” e inicia con la presentación de una definición provisional con apoyo de algunas imágenes, con esta definición provisional calculan los límites de algunas funciones y muestran cómo otras no tienen límites, en estos cálculos utilizan las variables ε, δ, la función valor absoluto y muestran algunas formas de calcular los límites de una función, después está la definición formal de límite e inmediatamente se estudia la negación de la definición del límite (esta negación no se menciona en los otros libros), aquí se está definiendo un procedimiento. El primer teorema que aparece en este capítulo y se demuestra es sobre la unicidad de límite, el cual es (teorema 1 Capítulo 5):

Teorema 1. Una función f no puede tender hacia dos límites diferentes en a.

En otros términos si f tiende hacia l en a y f tiende hacia m en a entonces $l = m$.

Después se hace un análisis de la notación, se demuestra un lema 1(este lema se analizara más adelante) para después utilizarlo en la demostración del siguiente teorema:

Teorema 2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l + m$;

(2) $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = l \cdot m$.

Además, si $m \neq 0$, entonces

(3) $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}$.

Por último se define los siguientes conceptos $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ y $\lim_{x\to \infty} f(x) = l$.

b) El desarrollo del concepto de límite en el libro de Apostol (2007, págs. 156-169) se da de la siguiente manera: el concepto de límite en este libro es el segundo tema dentro del capítulo de continuidad donde el primer tema es la idea intuitiva de continuidad. Para la definición de límite se da primero la definición de entorno de un punto y apoyado de esta definición se da la definición de límite, después se representa geométricamente el concepto de límite, se dan como ejemplos el límite de la función constante y el de la función identidad, después define limites laterales, hay tres ejemplos de límites laterales, se pasa al siguiente tema que es la definición de continuidad donde se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 3

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, cuando x está cerca de a (excepto quizá en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

Entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

En el siguiente tema demuestra el Teorema 1 y es lo último que se enfoca al tema de límites.

c) El desarrollo del concepto de límite en el libro de Stewart (2008, págs. 83-116) se da de la siguiente manera: se da un acercamiento al concepto de límite mediante la idea de hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto con tres ejemplos apoyados de gráficas, se da una definición de límite no formal (no se hace explicito que la definición no es formal) con apoyo de algunas gráficas, se trabajan algunos ejemplos con esta definición, se definen límites laterales (también de manera no formal), se definen los límites al infinito, se define lo que es una asíntota vertical con el concepto de límite, se dan las siguientes proposiciones llamadas leyes; ley de los límites el cual es prácticamente el teorema 1, ley de potencia y luego ley de la raíz, después se da una proposición a la cual le llaman propiedad de sustitución directa, por último se dan dos teoremas uno que tienen que ver con desigualdad de funciones y límites, el último teorema se llama teorema de la compresión el cual es el teorema 2.(En este libro algunas de las proposiciones son propiedades, leyes y teoremas), en la siguiente sección se define de manera formal todos los conceptos y solo se demuestra el primer inciso del teorema 1.

d) El desarrollo del concepto de límite en el libro de Swokowsiki (1996, págs. 52-80) se da de la siguiente manera: se presenta una introducción al cálculo con la que muestran ejemplos donde el concepto de límite formaliza la idea de velocidad y pendiente. Después se expone de manera informal el concepto de límite, en la sección tres se la definición formal (en esta definición se utilizan imágenes que no relacionan los intervalos de longitud

2δ y 2ε) y la última sección es sobre algunas propiedades importantes, entre ellos el teorema 1 y el teorema 2.

4.1.1 Configuraciones epistémicas respecto al concepto de límite.

A continuación se generarán algunas configuraciones epistémicas respecto al concepto de límite, antes de hacer cada configuración se menciona de que libro se trabajó y se muestra la demostración o solución que presenta el libro.

El siguiente análisis sobre estructura de una demostración utilizando el constructo de configuración epistémica es sobre la primera demostración que aparece en el libro de Spivak, (2003, pág.120) después de la definición formal de límite, la cual trata de la unicidad del límite de una función en un punto. La demostración que está en el libro es la siguiente:

Teorema. Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros términos, si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a entonces $l = m$.

Demostración:

Por ser el primer teorema acerca de límites, será ciertamente necesario traducir la hipótesis en concordancia con la definición.

Puesto que f tiende hacia *l* en *a*, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta_1 > 0$ tal que, para todo *x*,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Sabemos también, puesto que f tiende hacia *m* en *a*, que existe algún $\delta_2 > 0$ tal que para todo *x*,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{entonces } |f(x) - m| < \varepsilon$$

Hemos tenido que emplear dos números, δ_1, δ_2, ya que no podemos asegurar que el δ que va bien en una definición irá bien en la otra. Sin embargo, de hecho, es ahora fácil concluir que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo *x,*

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta, \text{entonces } |f(x) - m| < \varepsilon \text{ y } |f(x) - l| < \varepsilon;$$

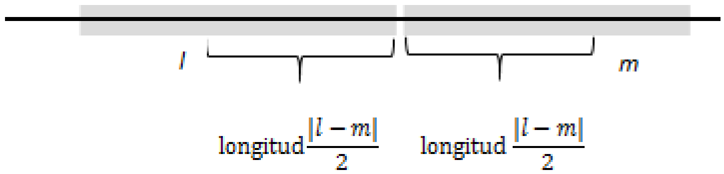
basta simplemente elegir $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Para completar la demostración solamente nos queda tomar un $\varepsilon > 0$ particular para el cual las dos condiciones

$$|f(x) - m| < \varepsilon \text{ y } |f(x) - l| < \varepsilon$$

No puedan cumplirse a la vez si $l \neq m$. La elección adecuada la sugiere la Figura 4.1

Figura 4.1



Si $l \neq m$, de modo que $|l-m| > 0$, podemos tomar como ε a $|l-m|/2$. Se sigue que existe un δ > 0 tal que para todo x,

$$\text{si } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{entonces } |f(x)-m| < \frac{|l-m|}{2}$$
$$\text{y } |f(x)-l| < \frac{|l-m|}{2};$$

Esto implica que para $0 < |x-a| < \delta$ tenemos

$$|l-m| = |l-f(x)+f(x)-m| \leq |l-f(x)| + |f(x)-m|$$
$$< \frac{|l-m|}{2} + \frac{|l-m|}{2}$$
$$= |l-m|$$

Lo cual es una contradicción.□

La configuración epistémica de la demostración se puede representar con la siguiente figura

Figura 4.2 Configuración epistémica de la demostración de la unicidad del límite

Situación: Entender la demostración

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas: Función, mitad de un número, valor absoluto, mínimo, límite de un función.

Propiedades/proposiciones:
Previos:
1. Si $l \neq m$ entonces |l-m| > 0
2. Neutro aditivo de los números reales.
3. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, con b≠0 y c≠0 y $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{R}$
4. Existencia del inverso aditivo de los números reales.
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ con $\{a, b\} \subseteq \mathbb{R}$
6. Si $|a| < |b|$ y $|c| < |d|$ entonces $|a| + |b| \leq |c| + |d|$ con $\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{R}$
7. Existencia del mínimo entre dos números

Emergentes:
1. Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en un mismo punto de su dominio.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Procedimientos: Técnica de demostración por reducción al absurdo.
P1) Para demostrar que $p \Rightarrow q$ por contradicción se supone que el teorema es falso es decir $\neg(p \Longrightarrow q)$ es cierto.
P2) Como $\neg(p \Longrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$ se consideran ciertos p y $\neg q$.
P3) Usando p y $\neg q$ junto con proposiciones obtener una contradicción.
P4) Así se tiene que la suposición es falsa. Con lo cual el teorema es cierto.

Lenguaje:

Simbólico:
0<|x-a|<δ
$\varepsilon > 0$
|f(x)-l|<ε
Mín. (a,b)
$l \neq m$

Verbal:
"f tiende hacia l en a"

Gráfico:
Figura 4.1

Justifican

Argumentos:
Tesis: Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en un mismo punto de su dominio.
R1) Suponer que el teorema es falso. Suponer que existe una función f puede tender hacia dos límites diferentes m y l en un punto a.
R2) Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} f(x) = m$ y $l \neq m$.

a) Utilizar do veces la definición de límite, para un $\varepsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 tales que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} f(x) = m$ respectivamente.
b) Sea. $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$, considerando la regla lógica que dice si A⇒B y B⇒C entonces A⇒ C(silogismo hipotético)
c) Se puede afirmar: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x: Si |x-a|>0 entonces |f(x)-l|<ε y |f(x)-m|<ε.
d) De la suposición de la falsedad del teorema se tiene que $l \neq m$ así que para $\varepsilon = \frac{|l-m|}{2} > 0$. Se puede aplicar la afirmación anterior.

R3) Partiendo de |l-m|=|l-m+0| y usando la negación del teorema junto con propiedades y proposiciones llegar a |l-m|<|l-m|. Lo cual es una contradicción.
R4) Al suponer que el teorema no es cierto se deduce un absurdo, lo cual implica que el teorema es cierto.
Conclusión una función no puede tender hacia dos límites un mismo punto de su dominio.

La siguiente configuración que se trabajará es del primer lema de la sección de límite del libro de Spivak, dicho lema formaliza dentro del cálculo la siguiente idea intuitiva: si x está cerca de x_0, y y está cerca de y_0 entonces $x+y$ estará cerca de x_0+y_0, xy estará cerca de x_0y_0 y $1/y$ estará cerca de $1/y_0$ lo último mientras $y \neq 0$ y $y_0 \neq 0$. La demostración en el libro está escrita de la siguiente manera:

Lema

(1) Si

$$|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Entonces

$$|(x+y)-(x_0+y_0)| < \varepsilon.$$

(2) Si

$$|x-x_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right) \text{ y } |y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0+1|)}$$

Entonces

$$|xy-x_0y_0| < \varepsilon$$

(3) Si $y_0 \neq 0$ y

$$|y-y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right)$$

Entonces $y \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon$$

Demostración:

(1) $|(x+y)-(x_0+y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)|$

$$\leq |x-x_0| + |y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Puesto que $|x-x_0| < 1$ se tiene

$$|x| - |x_0| \leq |x-x_0| < 1,$$

De modo que

$$|x| < 1 + |x_0|.$$

Así pues

$$|xy-x_0y_0| = |x(y-y_0)+y_0(x-x_0)|$$

$$\leq |x| \cdot |y-y_0| + |y_0| \cdot |x-x_0|$$

$$< (1 + |x_0|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|x_0 + 1|)} + |y_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(3) Se tiene

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

De modo que $|y| > |y_0|/2$. En particular, $y \neq 0$, y

$$\frac{1}{y} < \frac{2}{|y_0|}.$$

Así pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

A continuación se presentan las configuraciones epistémicas de las demostraciones de los incisos (1) y (2) del lema. La configuración epistémica de la demostración del inciso tres es muy similar a las que presentan por lo cual no se mostrará.

Figura 4.3 Configuración epistémica del (1) de la demostración del lema 1

Situación: Entender la demostración

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas: valor absoluto, menor que, mitad

Propiedades/proposiciones:
Previos:
1. Propiedad distributiva de los números reales.
2. Propiedad conmutativa y asociativa de la suma
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ con $\{a, b\} \subseteq \mathbb{R}$
4. Si $||a| \leq |b|$ y $||b| \leq |c|$ entonces $|a| \leq |c|$ con $\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{R}$

Emergentes:
1. Si $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $|(x+y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$.

Procedimientos: Técnica de demostración Análisis-síntesis.
P1) Proceso de análisis, encontrar una sucesión de proposiciones,
Supóngase $P_0, P_1, \ldots, P_n$ donde P_0 es la tesis del lema, la verdad de P_i implica la verdad de P_{i-1} para $1 \leq i \leq n$ y P_0 sea cierta.
P2) Concluir la verdad del lema. (El proceso de síntesis se encuentra implícito)

Expresa y soporta

Regulan el uso

Lenguaje:

Simbólico:
$|x-x_0|$,
ε,
$\leq$,
$\frac{\varepsilon}{2}$

Justifican

Argumentos:
Tesis: Si $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $|(x+y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$.
R1) Considerar la tesis del lema $|(x+y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$.
Aplicando la propiedad distributiva de los números reales en el lado izquierdo de la desigualdad anterior se tiene: $|(x+y) - (x_0 + y_0)| = |x + y - x_0 - y_0|$
Si es cierto que $|x + y - x_0 - y_0| < \varepsilon$ entonces $|(x+y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$
Aplicando la propiedad conmutativa de la suma en el lado derecho de la igualdad anterior se tiene: $|(x+y) - (x_0 + y_0)| = |x - x_0 + y - y_0|$
Si es cierto que $|x - x_0 + y - y_0| < \varepsilon$ entonces $|(x+y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$
Aplicando la propiedad 4 al término del lado derecho de la igualdad anterior se tiene:

$$|x - x_0 + y - y_0| \leq |x - x_0| + |y - y_0|$$

Si es cierto que $|x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon$ entonces $|x - x_0 + y - y_0| < \varepsilon$.
Y por hipótesis se tiene que $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ lo cual implica que $|x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon$.
R2) Considerando el proceso de síntesis se puede concluir que la tesis es cierta.

Figura 4.4 Configuración epistémica del (2) de la demostración del lema 1

Situación: Entender la demostración del lema

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas: valor absoluto, menor que, mitad

Propiedades/proposiciones:
Previos:
1. Propiedad distributiva de los números reales.
2. Propiedad neutro aditivo, existencia de inverso aditivo y asociativa de la suma en $\mathbb{R}$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ con $\{a, b\} \subseteq \mathbb{R}$
4. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ con $\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{R}$
5. $|ab| = |a||b|$ con $\{a, b\} \subseteq \mathbb{R}$
6. $|a| - |b| \leq |a - b|$ con $\{a, b\} \subseteq \mathbb{R}$
7. Si $b < c$ entonces $b + d < c + d$ con $\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{R}$

Emergentes:
1. Si $|x - x_0| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right)$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$ entonces $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Procedimientos: <u>Técnica de demostración Análisis-síntesis.</u>
P1) Considerar la primera parte de la hipótesis para acotar a $|x|$.
P2) Considerando el término izquierdo de la desigualdad de la tesis para aplicar propiedades hasta obtener los términos $|x - x_0|$ y $|y - y_0|$.
P3) Sustituir $|x - x_0|$ y $|y - y_0|$ por $\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}$ y $\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$
P4) Aplicar desigualdades para eliminar variables diferentes a ε.
P5) Concluir con la desigualdad buscada.

Lenguaje:

Simbólico:
$|x-x_0|$,
ε,
$\leq$,
$\frac{\varepsilon}{2}$

$\text{mín.}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right)$

Justifican

Argumentos:
Tesis: Si $|x - x_0| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right)$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$ entonces $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$.
R1) Para acotar $|x|$ respecto de $|x_0|$ se parte de la hipótesis $|x - x_0| < 1$ y se aplica la propiedad 6 a $|x - x_0|$ así: $|x| - |x_0| \leq |x - x_0|$.
Aplicando la propiedad 4 se tiene que: $|x| - |x_0| < 1$.
Aplicando la propiedad 7 a la desigualdad anterior sumándole $|x_0|$ se tiene:
$|x| < 1 + |x_0|$
R2) Partir del término que se encuentra de lado izquierdo de la desigualdad a la que se quiere llegar y aplicarle propiedades, proposiciones, definiciones, etc. para obtener la siguiente desigualdad:

$$|xy - x_0y_0| \leq |x||y - y_0| + |y||x - x_0|$$

R3) Utilizar las hipótesis $|x - x_0| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right)$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$ sustituyéndolas en la desigualdad anterior para obtener:

$$|xy - x_0y_0| \leq |x|\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)} + |y|\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}$$

R4) Se tiene que $|x| - |x_0| < 1$ y $|y_0| < |y_0| + 1$ multiplicando estas desigualdades por $\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$ y $\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}$ respectivamente se tiene que:

$$|x|\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)} + |y|\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)} < (1 + |x_0|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|x_0+1|)} + |y_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}$$

Con lo cual se puede deducir que: $|xy - x_0y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$
R5) Conclusión la hipótesis es cierta.

Para seleccionar la siguiente configuración a mostrar en la tesis se considera lo siguiente: en el libro de Apostol (2007) después de dar la definición formal de límite, solo trabaja dos ejemplos para ejercitar dicha definición y después da el teorema de reglas básicas para operar con límites, con su demostración en la siguiente sección y es prácticamente todo lo que trabaja enfocado al concepto de límite. Es decir no profundiza tanto en este concepto pero lo aprovecha para trabajar continuidad. Y lo anterior no permite generar más CE del concepto de límite con este libro.

El teorema que aparece en todos los libros es el teorema 2, pero este solo se demuestra en Spivak (2003) y Apostol (2007), y no se presenta la demostración por que utiliza el lema 1 (para el cual ya se hizo su CE) en el libro de Spivak y la demostración que está en el libro de Apostol es similar a la demostración del libro de Spivak y su CE no aporta alguna característica nueva que sirva para nuestro objetivo.

La siguiente proposición respecto al concepto de límite que aparece en casi todos los libros es el teorema 3, esta proposición se presenta de diferentes maneras en los libros. En el libro de Spivak (2003, pág. 134) esta como ejercicio a demostrar en la sección de problemas propuestos, en el de Swokowski (1988, pág. 79) como el teorema de la intercalación, en el de Apostol (2007, pág. 164) como principio de intercalación y en el de Stewart (2008, pág. 105) como teorema de la compresión. La proposición solo aparece con demostración en el libro de Apostol (2007) en la sección de límites en el de Swokowski la demostración está en el Apéndice II. En los libros de Stewart (2008, pág. 106) y de Swokowski (1988, pág. 79) el teorema se aplica en la misma función para calcular su límite y sólo en estos dos libros se representa gráficamente la idea del teorema 3. Así que estas soluciones son las que se utilizan para generar las siguientes CE de la solución del mismo problema en diferentes libros.

En el libro de Swokowski (1998, pág. 79) el ejemplo aparece de la siguiente forma:

Ejemplo. La función seno tiene la propiedad de que $-1 \leq sen t \leq 1$ para todo número real t. Usar este hecho y el teorema de la intercalación para demostrar que:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

Solución podemos escribir

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

Para todo $x \neq 0$. Multiplicado por x^2 (que es un número positivo cuando $x \neq 0$), obtenemos

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x)^2 = 0$ y $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$,

Se deduce del teorema de la intercalación, con $f(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$, que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

La configuración epistémica de esta solución se puede representar como se ve en la siguiente figura.

Figura 4.5 Configuración epistémica de ejemplo Swokowski (1998, pág. 79)

Situación: Entender la solución del problema

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas: $\sin(t), x^2, -x^2$, límite de una función, producto de funciones y composición de funciones $\left(x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, entorno en un punto.

Propiedades/proposiciones:
Previos:
1. $-1 \leq \sin(t) \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$
2. Teorema de intercalación
3. $x^2 > 0\ \forall x \neq 0$
4. $a \leq b$ y $d > 0$ entonces da<db con $\{a, b, d\} \subseteq \mathbb{R}$
5. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$
6. $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$
7. La imagen de $f \circ g$ es un subconjunto de la imagen de f

Emergentes:
1. $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$

Procedimientos: Por deducción (Aplicando un teorema a una función en particular)
P1) Identificar un teorema T y una propiedad P.
P2) Trabajar con P para obtener características similares en la hipótesis del problema.
P3) Verificar que se cumplen las condiciones del teorema para aplicarlo y obtener el resultado que se busca.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Lenguaje:

Simbólico:
$-1 \leq \sin(t) \leq 1$
$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$
$-x^2 \leq x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$
$\lim_{x\to 0}(-x^2)$
$\lim_{x\to 0} x^2$

Justifican

Argumentos:
Tesis: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$
R1) Considerando la proposición 1 ($\sin(x)$ **es un elemento genérico**) y el teorema de intercalación.
R2) Para obtener las hipótesis del teorema se necesita obtener una desigualdad de la forma $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ considerando $g(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$ (este último término es un elemento genérico) y además que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} h(x)$. Para hacer esto se debe partir de la desigualdad de la proposición 1 y obtener $f(x) \leq x^2\sin(\frac{1}{x}) \leq h(x)$.
Utilizando la proposición emergente 1, la desigualdad anterior y la proposición 3, se aplica la proposición 4 y se obtiene: $-x^2 \leq x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$.
R3) Como $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$ entonces se cumplen las hipótesis del teorema y se deduce que :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

En el libro de Stewart (2008,pág. 106) aparece de la siguiente forma:

Ejemplo. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

Solución: en primer lugar note que no puede aplicar:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

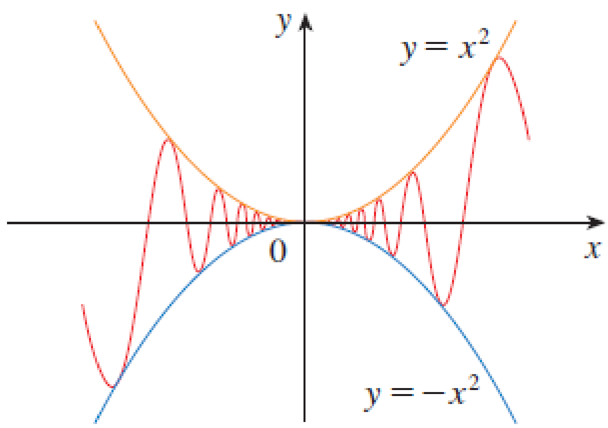
Por que $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ no existe. Sin embargo, como

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

Se tiene, como se ilustra mediante la Figura 4.6

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

Figura 4.6 gráfica de la función y=x^{2}sin(1/x)



Se sabe que
$\lim_{x\to 0}(-x)^2 = 0$ y $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$,
Al tomar $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ y $h(x) = x^2$ en el teorema de la comprensión, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \blacksquare$$

La configuración epistémica de la solución anterior se puede representar con la siguiente figura.

Figura 4.7 Configuración epistémica de la demostración de $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

Situación: Entender la demostración del lema

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas: límite, funciones: $\sin(x)$, x^2, $-x^2$, producto y composición de funciones

Propiedades/proposiciones:
Previos:
1. El límite del producto de dos funciones es el producto de los límites, cuando los límites existen.
2. $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe
3. $-1 \leq \sin(t) \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$
4. Si $a \leq b \leq c$ y $d < 0$ entonces $ad \leq bd \leq cd$ con $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{R}$
5. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$
6. $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$
7. Teorema de la compresión.
8. La imagen de $f \circ g$ es un subconjunto de la imagen de f

Emergentes:
1. $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$

Procedimientos:
P1) Verificar que no se puede utilizar la proposición 1
P2) Utilizar la proposición 3 y multiplicarla por x^2
P3) Utilizar el problema de la compresión para deducir el límite que se quiere

Expresa y soporta

Regulan el uso

Lenguaje:

Simbólico:

$-1 \leq \sin(t) \leq 1$

$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

$-x^2 \leq x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

$\lim_{x\to 0}(-x^2)$

$\lim_{x\to 0} x^2$

Gráfico:
Figura 4.6

Justifican

Argumentos:
Tesis: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$.
R1) Verificar que no se puede utilizar la proposición 1 por la proposición 2.
R2) Multiplicar la desigualdad de la proposición 3 por x^2.
Considerando la proposición 8 de la composición $\sin x \circ \frac{1}{x}$ se tiene que la proposición emergente 1. Por la proposición 4 se deduce que:

$x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x^2$

R3) Considerando las proposiciones 5 y 6 y la desigualdad anterior utilizar el teorema de la compresión para deducir el límite que se quiere probar :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

Se puede observar que la información que se proporciona en el planteamiento del ejemplo en el primer caso es más que la que se proporciona en el segundo, al mencionar que la función seno está acotada. En el segundo caso se maneja el lenguaje gráfico durante la solución y de hecho se utiliza como argumento para deducir que $-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$ (Figura 4.6).

En la segunda solución se refuerza la importancia de las hipótesis dentro de los teoremas al verificar que no se puede aplicar el teorema de que si los límites de dos funciones existen en un punto de su dominio entonces el límite del producto de las funciones en ese mismo punto existe, porque no se cumple una de las hipótesis de este. Lo cual no se considera en la primera solución. Y esto genera diferentes procedimientos.

4.2 Descripción del desarrollo del concepto de continuidad en los libros

A continuación se presenta un resumen general de la presentación del concepto de continuidad en los libros. La numeración de los teoremas que se considera en este trabajo no es la misma que se encuentra en los libros.

a) El desarrollo del concepto de continuidad en el libro de Spivak (2003,págs. 141-165). El capítulo seis se llama “funciones continuas” y este inicia con un análisis de la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Comentando que no siempre se cumple o que el límite ni siquiera existe lo cual permite clasificar como continuas a las funciones que cumplen dicha igualdad, se menciona que intuitivamente una función es continua si su gráfica no contiene interrupciones, ni saltos, ni oscilaciones indefinidas. En la introducción se utilizan tres figuras, la primera es la gráfica de una función que no está definida en un punto a, la segunda tiene tres gráficas de funciones para las cuales el límite no existe en el punto a y la última es una gráfica de una función que está definida en el punto a, el límite cuando x tiende a a existe pero es diferente de $f(a)$. Después se da la definición de continuidad. Con de la definición de continuidad se comenta sobre la no continuidad en cero de $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ y de $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, considerando la gráfica de g, se observa que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & \text{x irracional} \end{cases}$$

Es continua sólo en cero. Se consideran algunos ejemplos de funciones continuas en todos los números reales. Se demuestran los siguientes teoremas:

Teorema 4. Si f y g son continuas en a entonces:

1. $f + g$ es continua en a
2. fg es continua en a

   Además, si $g(a) \neq 0$, entonces

3. $\frac{1}{g}$ es continua en a.

Teorema 5. Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$ entonces $f \circ g$ es continua en a. (Obsérvese que se requiere que f sea continua en $g(a)$ no en a).

Después se define la continuidad de una función en intervalos abiertos y cerrados. La sección termina con la demostración del siguiente teorema.

Teorema 6 Supóngase que f es continua en a, y $f(a) \geq 0$. Entonces existe un número $\delta \geq 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo x $|x - a| \leq \delta$. Análogamente, si $f(a) \leq 0$, entonces existe $\delta \geq 0$ tal que $f(x) \leq 0$ para todo x $|x - a| \leq \delta$.

El capítulo siete se llama tres teoremas fuertes. Estos tres teoremas tratan sobre algunas propiedades de las funciones continuas pero no se demuestran, debido a que hasta esta parte del libro no se ha visto la propiedad de la cota superior mínima de los números reales (Si A es un subconjunto de los números reales, $A \neq \phi$, y A está acotado superiormente,, entonces A tiene una cota superior mínima). Cada teorema está acompañado de una figura que lo representa geométricamente y estos son:

Teorema 7. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces existe algún $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Teorema 8. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f esta acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo $x \in [a, b]$.

Teorema 9. Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe algún número $y \in [a,b]$ tal que $f(y) \geq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

En el libro está la observación de la diferencia de las hipótesis de estos tres teoremas con las hipótesis de los teoremas del capítulo anterior y también la diferencia de las conclusiones, ya que en estos últimos tres teoremas la continuidad se debe cumplir en un intervalo y la conclusión es sobre un intervalo, en los anteriores la continuidad es sobre un punto, lo cual hace a estos tres teoremas más *fuertes* y hay ejemplos en el capítulo que muestran la importancia de estas hipótesis para que se cumplan las conclusiones.

Teorema 10. Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) \leq c \leq f(b)$ entonces existe algún x en $[a,b]$ tal que $f(x) = f(c)$.

Después se demuestran algunos teoremas como consecuencia de los tres teoremas fuertes, los cuales tratan sobre: la raíz cuadrada de los números, existencia de al menos una raíz para polinomios de grado par, todo polinomio alcanza su valor mínimo.

b) El desarrollo del concepto de continuidad en el libro de Apostol (2007,págs. 156-169). El capítulo tres se llama “Funciones continuas” en la primera sección de este capítulo se da una idea intuitiva de continuidad, en la sección dos se trabaja con la definición de límite utilizando la definición de entorno de un punto después hay una presentación geométrica del concepto, se dan algunos ejemplos y por último se definen límites laterales. La siguiente sección es sobre la definición de continuidad de una función. La sección cuatro se llama Teoremas fundamentales sobre límites. Otros ejemplos de funciones continuas. Los teoremas que aparecen en esta sección son los siguientes (En este trabajo los teoremas que se repiten mantienen no estarán numerados):

Teorema Si f y g son continuas en a entonces:

1. $f + g$ es continua en a
2. fg es continua en a

   Además, si $g(a) \neq 0$, entonces

$\frac{1}{g}$ es continua en a.

La demostración de este teorema está en la próxima sección, el siguiente teorema está demostrado y en este libro se llama principio de intercalación, el cual ya fue mencionado como teorema 3. Se dan ejemplos de funciones continuas como los polinomios y las funciones racionales, se sigue con un teorema que trata de la continuidad de las integrales indefinidas. La sección cinco de este capítulo se llama Demostraciones de los teoremas fundamentales sobre límites que es la demostración del teorema anterior. La sección seis es de ejercicios propuestos y la sección siete se llama Funciones compuestas y continuidad. El teorema que se ve en esta sección es el teorema 5 y se trabajan dos ejemplos. La siguiente sección se llama Teorema de Bolzano para las funciones continuas y en esta aparecen los siguientes teoremas: teorema 7.

Antes de demostrar este teorema, demuestran el siguiente teorema para utilizarlo. Teorema 6.

La siguiente sección se llama teorema del valor intermedio para funciones continuas. En esta sección de muestran el teorema 10. El último teorema de esta sección es sobre la existencia de la raíz n-ésima de todo número positivo.

La sección dieciséis de este capítulo se llama “Teorema de los valores extremos para funciones continuas” esta sección inicia con la definición de *máximo absoluto* de una función. Y demuestran los teoremas 8 y 9. Las siguientes secciones son sobre continuidad uniforme, integrabilidad para funciones continuas y teorema del valor medio para funciones continuas, lo cual no se analiza en esta tesis. Como se ve Apostol no profundiza mucho en la sección de límites pero en la sección de continuidad si y esto debido en parte a que ya relaciona este tema con cálculo integral.

c) El desarrollo del concepto de continuidad en el libro de Swokowski (págs.. 82-90). En este libro el desarrollo se hace en la última sección del capítulo 2 que se llama “Funciones continuas” esta inicia con la definición de continuidad de una función en un punto y está acompañada de una figura para dar una explicación geométrica. El primer ejemplo que se trabaja es para demostrar la continuidad de los polinomios y las funciones racionales. Después hay una figura que muestra diferentes tipos de discontinuidades (salto, infinita y evitable). Se da la definición de una función continua en un intervalo cerrado. El primer teorema en esta sección es el teorema 4 y sólo se demuestra la continuidad de dos funciones continuas en un punto. El siguiente teorema que aparece en esta sección es:

Teorema 11. Si f y g son continuas tales que $\lim_{x\to a} g(x) = b$, y si f es continua en b, entonces

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Su demostración se da en un apéndice y se menciona que se usa para demostrar otros teoremas. En el libro de Spivak este teorema esta como ejercicio y en el de Apostol no se menciona. El siguiente teorema que aparece es el teorema 5. El cual no está demostrado y se utiliza en la solución de un ejemplo. Después está el teorema 10, también sin demostrar pero con una gráfica que lo explica. El último teorema que se menciona y se demuestra por contradicción es el siguiente:

Teorema 12. Sin una función f es continua en un intervalo y no tiene ceros en él, entonces $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$ para todo x en el intervalo.

También está el siguiente corolario:

Corolario 1. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si los números reales c y d son sucesiones sucesivas de la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Entonces los valores de $P(x)$ para x en el intervalo abierto (c, d) son todo positivos, o bien, todos negativos.

El capítulo finaliza con la aplicación del corolario anterior para encontrar donde el polinomio de Legendre de tercer grado $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ es positivo o negativo.

d) El desarrollo del concepto de continuidad en el libro de Stewart (págs.. 119-127). El tema de continuidad está en la sección 2.5 llamada “Continuidad” la cual inicia con la definición de “continuidad de una función” acompañada de una figura, en este libro se hace relación del concepto de continuidad con fenómenos físicos lo cual no sucede en los libros anteriores o sucede poco, después se da la definición de continuidad desde la derecha o izquierda de un punto y se define continuidad de una función en un intervalo. El primer teorema que se menciona es el teorema 4y sólo se demuestra continuidad de la suma de funciones continuas en un mismo punto, el siguiente teorema es sobre la continuidad de polinomios y funciones racionales el cual está demostrado. El siguiente teorema que se menciona y no se demuestra es:

Teorema 13. Los tipos siguientes de funciones son continuas en todo número en sus dominios:

Polinomios, funciones racionales, funciones raíz, funciones trigonométricas, funciones trigonométricas inversas, funciones exponenciales, funciones logarítmicas.

Después está el teorema 11 su demostración aparece en un apéndice y se aplica en un ejemplo, inmediatamente está el teorema 5 y está demostrado. Y por último está el teorema del valor intermedio sin demostrar y acompañado de dos figuras que lo ilustran.

4.2.1 Configuraciones epistémicas respecto al concepto de continuidad

A continuación se presentarán las configuraciones epistémicas de demostraciones de teoremas que aparecen en los libros, antes de mostrar la configuración se escribirá el teorema con su demostración y se mencionará de que libro se esta considerando.

El siguiente teorema se trabaja en los cuatro libros en el de Spivak está escrito y demostrado de la siguiente manera:

Teorema Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$ entonces $f \circ g$ es continua en a. (Obsérvese que se requiere que f sea continua en $g(a)$ no en a).

Demostración: sea $\varepsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x

Si $|x - a| < \delta$ entonces $|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon$,

es decir, $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$

Tendremos que aplicar primero la continuidad de f para estimar cómo de cerca tiene que estar $g(x)$ de $g(a)$ para que se cumpla esta desigualdad. Puesto que f es continua en $g(a)$, existe un $\delta' > 0$ tal que para todo y,

(1) Si $|y - g(a)| < \delta'$, entonces $\left|f(y) - f\big(g(a)\big)\right| < \varepsilon$

En particular, esto significa que

(2) Si $|g(x) - g(a)| < \delta'$, entonces $\left|f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)\right| < \varepsilon$.

Aplicamos ahora la continuidad de g para estimar como de cerca tiene que estar x de a para que se cumpla la desigualdad $|g(x) - g(a)| < \delta'$. El número δ' es un número positivo como cualquier otro número positivo; podemos, por lo tanto, tomar δ' como el ε (!) de la definición de continuidad de g en a.

Deducimos que existe $\delta > 0$ tal que para toda x,

(3) Si $|x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - g(a)| < \delta'$.

Combinando (2) y (3) vemos que para todo x,

Si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$.■

La configuración epistémica de esta demostración puede estar conformada como lo muestra la siguiente figura:

Figura 4.8 Configuración epistémica sobre la continuidad de la composición de funciones continuas

Lenguaje:

Simbólico:

$f \circ g$

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon$

$|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$.

Situación: Entender la demostración

Motivan

Resuelven

Expresa y soporta

Definiciones/conceptos:
Previas: valor absoluto, límite de una función, composición de funciones

Propiedades/proposiciones:
Previos:
Emergentes:
1. Si $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow c$ entonces $a \Rightarrow c$
2. Si $P(x)$ es cierto para todo $x \in A$ entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in B$ con $B \subseteq A$

Regulan el uso

Procedimientos: Demostración directa utilizando la definición de continuidad
P1) Como parte del análisis, escribir la definición de continuidad de $f \circ g$ en a
P2) Aplicar la continuidad de f en $g(a)$
P3) Restringir la continuidad de f en $g(a)$ a la imagen de g.
P4) Aplicar la definición de g en a
P5) Aplicar la propiedad emergente 1 para deducir la continuidad de $f \circ g$ en a.

Justifican

Argumentos:
Tesis: Si g es continua en a, y f es continua en $g(a)$ entonces $f \circ g$ es continua en a.
R1) Partir de la definición de continuidad de $f \circ g$ en a.
Sea $\varepsilon > 0$ (el cual es un elemento genérico) queremos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo x Si $|x - a| < \delta$ entonces $|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon$,
es decir, $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$.
R2) Sea $\varepsilon > 0$ Puesto que f es continua en g(a), existe un $\delta > 0$ tal que para todo y, si $|y - g(a)| < \delta'$, entonces $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$.
R3) Restringiendo la continuidad de f en $g(a)$ a la imagen de g se tiene:
Si $|g(x) - g(a)| < \delta'$, entonces $\left|f(g(x)) - f(g(a))\right| < \varepsilon$.
R4) Como g es continua en a, para $\delta' > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:
Si $|x - a| < \delta'$, entonces $|g(x) - g(a)| < \delta'$
R5) Aplicando la propiedad emergente 1 se puede deducir la continuidad de $f \circ g$ en a

El mismo teorema está demostrado en el libro de Apostol (pág. 173) de la siguiente manera:

Teorema Suponiendo que v es continua en p y que u es continua en q, siendo $q = v(p)$, la función compuesta $f = u \circ v$ es continua en p.

Demostración. Puesto que u es continua en q, para todo entorno $N_1[u(q)]$ existe un entorno $N_2(q)$ tal que

$$u(y) \in N_1[u(q)] \text{ siempre que } y \in N_2(q) \qquad (1)$$

Pero $q = v(p)$ y v es continua en p, de modo que para el entorno $N_2(q)$ existe otro entorno $N_3(p)$ tal que

$$v(x) \in N_2(q) \text{ siempre que } x \in N_3(p) \qquad (2)$$

Si ponemos $y = v(x)$ y combinamos (1) y (2) encontramos que para todo entorno $N_1(u[v(p)])$ existe un entorno $N_3(p)$ tal que:

$$u[v(x)] \in N_1(u[v(p)]) \text{ siempre que } x \in N_3(p),$$

O, dicho de otro modo, puesto que $f = u[v(x)]$,

$$f(x) \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_3(p).$$

Esto significa que f es continiua en p como se afirmó. ■

En este caso los elementos que componen la configuración epistémica son:

Figura 4.9 Configuración epistémica de la demostración de la continuidad de la composición de funciones continuas del libro de Apostol

Situación: Entender la demostración

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas: Continuidad de una función en un punto, entorno, composición de funciones

Expresa y soporta

Propiedades/proposiciones:
Previos:
Emergentes:
1. Si $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow c$ entonces $a \Rightarrow c$
2. Si $P(x)$ es cierto para todo $x \in A$ entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in B$ con $B \subseteq A$

Regulan el uso

Procedimientos: Modus ponendo ponens $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$
P1) Utilizar la continuidad de u en q
P2) Utilizar la continuidad de v en p considerando $q = v(p)$
P3) Utilizar la propiedad lógica emergente 1.

Lenguaje:

Simbólico:
$q = v(p)$

$f = u \circ v$

$N_1[u(q)]$

$N_1[u(v(p))]$.

Justifican

Argumentos:
Tesis: Si v es continua en p, y u es continua en q, siendo $q = v(p)$, la función compuesta $f = u \circ v$ es continua en p
R1) Como u es continua en q, para todo entorno $N_1[u(q)]$ existe un entorno $N_2(q)$ tal que:
$$u(y) \in N_1[u(q)] \text{ siempre que } y \in N_2(q)$$
R2) Como v es continua en p considerando $q = v(p)$ entonces para el entorno $N_2(q)$ existe otro entorno $N_3(p)$ tal que:
$$v(x) \in N_2(q) \text{ siempre que } x \in N_3(p)$$
R3) Poniendo $y = v(x)$ se encuentra que para todo entorno $N_1(u[v(p)])$ existe un entorno $N_3(p)$ tal que
$$u[v(x)] \in N_1(u[v(p)]) \text{ siempre que } x \in N_3(p)$$
O, dicho de otro modo, puesto que $f(x) = u[v(x)]$,
$$f(x) \in N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \in N_3(p).$$
R4) Conclusión la tesis es cierta.

El siguiente teorema está demostrado en el libro de Apostol.
Teorema Conservación del signo de las funciones continuas.
Sea f continua en c y supongamos que $f(c) \neq 0$. Existe entonces un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$.
Demostración. Supóngase $f(c) > 0$, en virtud de la continuidad, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon \text{ siempre que } c - \delta < x < c + \delta.$$

Tomando el δ correspondiente a $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$ (esta ε es positiva) entonces la desigualdad anterior se transforma en:

$$\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c) \text{ siempre que } c - \delta < x < c + \delta.$$

De aquí se deduce que $f(x) > 0$ en este intervalo y por tanto $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo. Si $f(c) < 0$ se toma δ correspondiente a $\varepsilon = -\frac{f(c)}{2}$ y se llega a la misma conclusión. ■

Para esta demostración los elementos que componen la configuración epistémica son:

Figura 4.10 Teorema de conservación de signos en funciones continuas

Situación: Entender la demostración

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas: Continuidad de una función en un punto, valor absoluto

Propiedades/proposiciones:
Previos:
1. Tricotomía de los números reales
2. Si $|x-a|<c$ entonces $a-c<x<a+c$ con $\{a,b,c\}\subseteq\mathbb{R}$
3. Si $[(a\vee b)\wedge\neg b]\rightarrow a$
4. Si $a>0$ y $b>0$ entonces $ab>0$ con $\{a,b\}\subseteq\mathbb{R}$
5. Si $a>b$ y $b<c$ entonces $a<c$ con $\{a,b,c\}\subseteq\mathbb{R}$
6. Si $a<0$ y $b<0$ entonces $ab>0$ con $\{a,b\}\subseteq\mathbb{R}$
Emergentes:
1. Sea f continua en c y supongamos que $f(c)\neq 0$. Existe entonces un intervalo $(c-\delta,c+\delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$

Expresa y soporta

Regulan el uso

Procedimientos: <u>Demostración de existencia por construcción</u>
P1) Utilizar la hipótesis para construir el elemento que se busca
P2) Verificar que el elemento construido cumpla la propiedad que se menciona en el teorema.

Lenguaje:

Simbólico:
$f(c)>0$

$\varepsilon>0$

$f(c)-\varepsilon<f(x)<f(c)+\varepsilon$

$\varepsilon=\frac{1}{2}f(c)$.

Justifican

Argumentos:
Tesis: Sea f continua en c y supongamos que $f(c)\neq 0$. Existe entonces un intervalo $(c-\delta,c+\delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$
R1) Por hipótesis se tiene que $f(c)\neq 0$ entonces por la propiedad de tricotomía y el modus tollendo tollens se tiene que $f(c)>0$ o $f(c)<0$, se supone que $f(c)>0$.
R2) Como f es continua en c entonces por definición de continuidad se tiene que para $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que:

$$\text{Si } |x-c|<\delta \text{ entonces } |f(x)-f(c)|<\varepsilon \ (*)$$

Utilizando la proposición 2 en la última desigualdad se tiene:

$$f(c)-\varepsilon<f(x)<f(c)+\varepsilon \text{ siempre que } c-\delta<x<c+\delta$$

R3) Como $f(c)>0$ y $\frac{1}{2}>0$ aplicando la proposición 4 a estas dos desigualdades se tiene que:

$$\varepsilon=\frac{1}{2}f(c)>0$$

Sustituyendo este ϵ en la desigualdad (*) se tiene que:

$$\tfrac{1}{2}f(c)<f(x)<\tfrac{3}{2}f(c) \text{ siempre que } c-\delta<x<c+\delta$$

R4) como $f(c)>0$ y $\frac{1}{2}>0$ entonces por la proposición 4 $\frac{1}{2}f(c)>0$
R5) Como $\frac{1}{2}f(c)<f(x)$ y $\frac{1}{2}f(c)>0$ por la proposición 5 se deduce que $f(x)>0$ siempre que $c-\delta<x<c+\delta$.
R6) Por lo tanto se concluye que $f(x)$ y $f(c)$ tienen el mismo signo en el intervalo $(c-\delta,c+\delta)$.
R7) Si $f(c)<0$ se toma δ correspondiente a $\varepsilon=-\frac{1}{2}f(c)$ y de manera análoga se llega a la misma conclusión.
Conclusión La tesis es verdadera.

5 Conclusiones y Comentarios

5.1 Conclusiones

Más que un análisis de libro de texto este trabajo es un análisis de las demostraciones correspondientes a los conceptos de límite y continuidad en libros de texto para nivel superior. Lo anterior porque no se consideran algunos puntos como análisis fenomenológico, análisis de los comentarios, de la bibliografía de cada libro, conceptual, didáctico cognitivo, etc. Este trabajo permite tener un estudio más fino de la demostración con respecto a los temas de límite y continuidad al considerar tantos elementos.

También es importante mencionar que de acuerdo al objetivo planteado (obtener las principales características de los tratamientos de la demostración de teoremas y solución de problemas correspondientes al tema de límite y continuidad de cálculo diferencial en libros de texto universitarios.), el trabajo no busca dar el significado institucional de demostración, tampoco el de límite ni el de continuidad, ya que hacer esto implica un análisis más amplio sobre los libros y aquí el análisis se hizo sobre una parte de los libros, las demostraciones y las soluciones de los problemas.

Después de generar las configuraciones se tiene las siguientes características de las demostraciones y soluciones de los problemas en el bloque de límites y continuidad. Los procedimientos más utilizados en la demostración y solución de problemas de los libros son:

- Método de Análisis-síntesis.
- Reducción al absurdo.
- Existencia o por construcción
- Modus ponendo ponens
- Demostración directa

El método de análisis-síntesis se utiliza de diferentes maneras. Algunas veces es más explícito mostrando tanto el análisis como la síntesis, otras ocasiones sólo se muestra la síntesis. El libro de Spivak es el que trabaja de manera más común ambas partes tanto el análisis como la síntesis. Esta manera permite tener presente más ideas para entender la demostración, pues cuando sólo se muestra la síntesis el lector debe deducir por sí mismo la parte de análisis. Por otro lado en los libros no siempre se menciona el procedimiento que se seguirá en la demostración, con lo cual el lector debe conocer el procedimiento para entender la argumentación utilizada.

Las proposiciones más utilizadas dentro de las demostraciones son prácticamente de tres tipos: las que tienen que ver con las propiedades de los números reales, las que tienen que ver con lógica y las que son propias del análisis matemático (propiedades de funciones, teoremas, corolarios, lemas, etc.).

Respecto a las que tienen que ver con las propiedades de los números reales algunos ejemplos son:

- Existencia del inverso aditivo y multiplicativo, existencia del neutro aditivo y multiplicativo, propiedad distributiva, propiedad conmutativa de la suma y multiplicación.
- Propiedades con valor absoluto.
- Propiedades con desigualdades.

Las proposiciones lógicas más utilizadas son:

- Si $a \Longrightarrow b$ y $b \Longrightarrow c$ entonces a$\Longrightarrow c$
- Si $[(a \vee b) \wedge \neg b] \rightarrow a$
- $\neg(p \Longrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$

En general muchas de estas proposiciones no se mencionan y se utilizan de manera implícita y, en particular, hay algunas propiedades emergentes en las demostraciones que no se mencionan en los libros y que son propias del Análisis Matemático, como por ejemplo la proposición emergente 1 de la CE de la Figura 4.7.

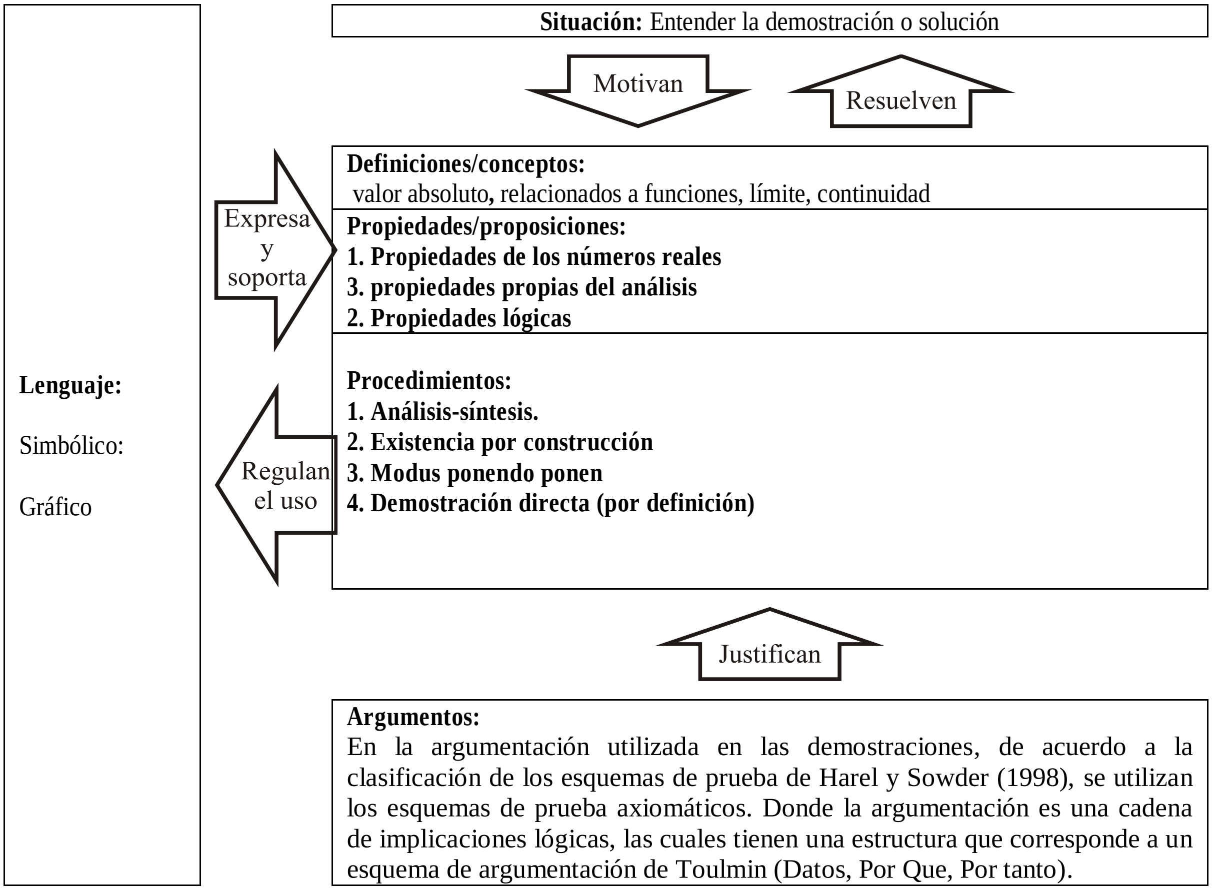
El lenguaje más utilizado es el simbólico, aunque también se apoyan en figuras.

Respecto a la argumentación se puede observar que en la mayoría de las demostraciones y soluciones no se mencionan todas las relaciones que se dan entre los objetos matemáticos y que la estructura del modelo de Toulmin (datos, garantía, conclusión) está de manera implícita.

En la argumentación al considerar los esquemas de prueba de Harel y Sowder. Los tipos de esquemas que en general aparecen son axiomáticos, principalmente en los libros de Spivak y Apostol. Por otro lado durante la generación de las configuraciones se pudo observar que en demostrar implica que para pasar de lo general a lo general se utilizan como puente lo particular considerando elementos genéricos. Esto es que para trabajar la demostración se utilizan objetos particulares (como $\varepsilon > 0, x, \delta, f$, etc.) que representan algún objeto matemático (como un número positivo, cualquier número, una función, etc.), a los cuales se les aplican proposiciones para concluir algo general. Esta situación es compleja porque aparece el problema de que si la representación es de un elemento concreto o bien del concepto en general. (Font, 2007). Lo anterior se resaltó en las configuraciones generadas en la sección de argumentación al resaltar los elementos genéricos que aparecían. Por último en la sección de argumentación aparece el esquema de argumentación de Toulmin ver Figura 2.2.1 Esquema de argumentación de Toulmin. Ya que la argumentación es una cadena implicaciones lógicas con estructuras de esquemas de argumentación de Toulmin (datos, por que, por tanto).

De aquí que la siguiente configuración epistémica puede englobar las características de las configuraciones epistémicas generadas:

Figura 5.1 Características de las configuraciones respecto al tema de límites y continuidad



5.2 Comentarios.

A continuación se enlistan algunas observaciones respecto a la forma en que se presentan los conceptos en los libros.

- De manera congruente con el desarrollo histórico del concepto de límite como se ve en el trabajo de Medrano y Pino (2016) algunos libros inician con una idea intuitiva del límite y trabajan con ésta hasta poder presentar una definición formal. Lo cual muestra la relación entre la génesis de un concepto y su enseñanza, que aunque no es el fin de este trabajo no deja de ser interesante, ya que ayuda a entender el desarrollo del concepto de límite en los libros de texto.
- Spivak (2003), cuando aborda la demostración de unicidad de límite, utiliza un lenguaje gráfico que no hace referencia a la variable ε y la imagen no

considera el intervalo ($l - \varepsilon$, $l + \varepsilon$) en el eje y. Esto podría generar conflictos para el lector.

- En el libro de Swokowski (1988) en la definición formal de límite el lenguaje gráfico que se utiliza para representar el intervalo ($l - \varepsilon$, $l + \varepsilon$) al principio no se relaciona con el eje y, después en un ejemplo sí lo hacen.
- El teorema sobre la unicidad del límite de una función no se menciona en los libros de Stewart (2008), Swokowski (1988) y Apostol (2007). Esto da pie a las siguientes preguntas: ¿Los alumnos serán conscientes de esta proposición? y ¿por qué en un libro menciona una proposición como teorema y en los otros no existe comentario alguno respecto de esta? Con esto el profesor debe decidir si trabaja este teorema en clase o sólo lo menciona o definitivamente omitirlo mostrando así la importancia de analizar diferentes libros de texto y esta situación se da con muchos otros teoremas, proposiciones, etc.
- Los libros de Stewart (2008) y de Swokowski (1988) están enfocados de alguna forma en dar más herramientas para cálculo de límites y continuidad al dar más proposiciones y menos demostraciones, trabajando con mayor peso en técnicas y mencionando más ideas intuitivas.
- Los libros de Apostol (2007) y de Spivak (2003) estudian de una manera más formal el concepto de límite pero de diferente forma pues el primero le da mayor importancia al estudio de la continuidad, y es esto para lo que utiliza principalmente el concepto de límite, mientras que el segundo estudia el concepto de límite de manera independiente y profundizando más.

A continuación se enlistan algunas observaciones respecto a las configuraciones epistémicas:

- Al tener diferentes procedimientos en la misma situación problema como fue el caso de las dos últimas configuraciones el lector tiene más opciones para entender una misma situación problema o un profesor puede plantear más opciones de solución de un mismo problema a los alumnos.
- Las configuraciones epistémicas permiten hacer explícitos los objetos matemáticos que se utilizan, y no se mencionan, en un texto matemático. Principalmente las proposiciones, procedimientos y argumentos.

- Con la configuración epistémica de una situación problema los profesores podrían verificar de manera más puntual los objetos matemáticos en los cuales los alumnos tienen mayor dificultad de manejo. Los profesores también pueden tener presentes los conocimientos previos que los alumnos deben tener para poder leer y entender la demostración.
- Generar las configuraciones epistémicas de una misma demostración de un considerando diferentes libros, permite diversificar el lenguaje matemático y el procedimiento.

Algunas preguntas que quedan pendientes por abordar son:

- ¿Cómo se pueden aprovechar las configuraciones epistémicas generadas en el análisis de libros de textos matemáticos para enseñanza de límite y continuidad de una función?
- ¿Dada una configuración epistémica del desarrollo de una proposición se puede replantear la situación problema que la genera para proponer nuevas situaciones didácticas que faciliten la demostración?
- ¿Con las configuraciones epistémicas respecto a los conceptos de límite y continuidad se pueden identificar los conflictos cognitivos y semióticos de los estudiantes respecto a dichos conceptos?
- ¿Cómo se pueden utilizar las configuraciones epistémicas respecto a los conceptos de límite y continuidad para trabajar el significado personal de dichos conceptos en los alumnos?
- ¿Cuál es el significado institucional de referencia de la demostración en el concepto de límite y continuidad en el nivel superior?
- ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos ponen en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (Significado personal)

6 REFERENCIAS

Apostol, T. (2007). *Calculus I, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Barcelona, España: Reverté, S.A.

D'Amore, B., Pinilla, M. F., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval." *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *18*(2), 177–212.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cogitivo del pensamiento. *Annales de Didactiuqe et de Sciences Cognitives*, 37–65.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración*, *31*(2), 181–205.

Font, Vicenç; (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática,* agosto, 95-128.

Font, M. V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos : su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67–98.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva Ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. *Investigación En Educación Matemática XVI*, 49–68.

Picado, M., & Romero, L. R. (2009). *Análisis de textos históricos de matemáticas: Tratamiento del sistema métrico decimal en España en la segund mitad del siglo XIX.* Universidad de Granada.

Sierra, V. M., González, A. M. T., & López, E. C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza De Las Ciencias*, *17*(3), 463–476.

Spivak, M. (2003). *Cálculo Infinitesimal* (segunda). Barcelona, España: Reverté, S.A.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de un variable* (sexta). México.

Swokowsiki, E. W. (1998). *Cálculo con Geometría Analítica* (Cuarta). Colombia: Ediitorial Iberoamericana.