



Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería  
Maestría en Ingeniería Matemática

POLITOPOS CONVEXOS CRÍTICOS Y EL TEOREMA GENERALIZADO DE  
DOIGNON-BELL-SACARF EN DIMENSIÓN 2

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias en Ingeniería Matemática

**Presenta:**

L. M. A. Edgar González Arreola

**Dirigido por:**

Dra. Déborah Oliveros Braniff

SINODALES

Dra. Déborah Oliveros Braniff

Presidente

Firma

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Secretario

Firma

Dr. Eric Moreno Quintero

Vocal

Firma

Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo

Suplente

Firma

M. en C. Enrique Crespo Baltar

Suplente

Firma

Dr. Aurelio Domínguez González

Director de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña

Director de Investigación y Postgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
Diciembre, 2015  
México

La presente obra está bajo la licencia:  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

### Usted es libre de:

**Compartir** — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

### Bajo los siguientes términos:



**Atribución** — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#), brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#). Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.



**NoComercial** — Usted no puede hacer uso del material con [propósitos comerciales](#).



**SinDerivadas** — Si [remezcla, transforma o crea a partir](#) del material, no podrá distribuir el material modificado.

**No hay restricciones adicionales** — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

### Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una [excepción o limitación](#) aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como [publicidad, privacidad, o derechos morales](#) pueden limitar la forma en que utilice el material.



## RESUMEN

Actualmente existe una enorme cantidad de variantes del Teorema de Helly, que han aparecido en diferentes áreas de la matemática, particularmente en Programación Lineal. El Teorema de Doignon, por ejemplo, es una de estas, y una de sus aplicaciones de importancia radica en que es fundamental para el algoritmo de Clarkson, el cuál permite determinar soluciones enteras óptimas de un programa lineal de una manera más eficiente en comparación con los algoritmos que utilizan los softwares comerciales hoy en día. La eficiencia del algoritmo de Clarkson depende en particular del mejoramiento de las cotas para el Teorema de Doignon Generalizado, cotas que están ligadas directamente a la caracterización de los politopos  $k$ -retícula. En este trabajo se exponen algunos resultados originales relacionados con caracterización de los polígonos  $k$ -retícula.

**(Palabras clave:** Teorema de Doignon Bell y Scarf, polígono  $k$ -retícula, algoritmo Clarkson)



## SUMMARY

Nowadays there are many versions of Helly's theorem, these has been used in different areas of mathematics, particularly in linear programming. The Doignon Bell y Scarf theorem is one of them. Its importance, lies in the fact that is fundamental for Clarkson's algorithm, since allows to determine optimal integer solutions of a linear programming problems in a more efficient way in comparison with the algorithms used in commercial software. Clackson's algorithm efficiency depends on the bounds's improvement for the for the generalize Doignon theorem, which is related with the  $k$ -lattice polytope's characterization. In this Thesis some original results are given related with the characterization of  $k$ -lattice polygons.

**(Key words:** Doignon Bell and Scarf Theorem,  $k$ -lattice polygon, Clarkson's algorithm)



**Ami familia**  
**—por tanto apoyo.**





## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco de todo corazón a mi familia por todo su apoyo incondicional durante toda mi vida por haber estado conmigo en los momentos difíciles y por haberme brindado su consejo para seguir en este camino y alcanzar un nuevo objetivo. A mi prometida Julieta Ortiz Espnoza por toda su paciencia y motivación para seguir adelante en los momentos más difíciles.

También agradezco a mi directora de tesis, la Dra. Déborah Oliveros Braniff por el valioso tiempo invertido en este proyecto y por todos los apoyos académicos que me facilitó y finalmente a las instituciones CINMA y CONACYT, ya que sin el apoyo económico brindado este proyecto no hubiese sido posible.



# ÍNDICE GENERAL

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Summary</b>	<b>III</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>V</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Índice general</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.1.1. El Teorema de Helly . . . . .	1
1.1.2. El Teorema de Doignon . . . . .	2
1.1.3. El Teorema de Doignon Generalizado . . . . .	2
1.2. Justificación . . . . .	3
1.3. Descripción del problema . . . . .	4
1.4. Hipótesis y objetivos . . . . .	5
1.4.1. Hipótesis . . . . .	5
1.4.2. Objetivo general . . . . .	5
1.4.3. Objetivos particulares . . . . .	5
<b>2. Fundamentación teórica y Metodología</b>	<b>7</b>
2.1. Preliminares . . . . .	7
2.1.1. Preliminares esenciales de la programación lineal . . . . .	7
2.1.2. Retículas . . . . .	8
2.1.3. Polígonos retícula . . . . .	10
2.2. Clasificación de Polígonos $k$ -retícula . . . . .	16
2.2.1. El casco convexo interior . . . . .	21
2.3. Resultados . . . . .	24
<b>3. Conclusiones</b>	<b>31</b>
<b>I Apéndice</b>	<b>33</b>
3.1. Teorema generalizado de Doignon-Bell-Scarf . . . . .	35



# I. INTRODUCCIÓN

## I.1. Antecedentes

Debido a sus múltiples aplicaciones, la Geometría Discreta se ha convertido recientemente en una herramienta clave para la investigación; ya que tiene aplicaciones que van desde el diseño de algoritmos computacionales y análisis de datos, hasta el estudio del ADN a través de modelos matemáticos, pasando por los sistemas de votación.

### I.1.1 El Teorema de Helly

El Teorema de Helly es probablemente uno de los teoremas más estudiados y conocidos en el área de la Geometría Discreta y dice lo siguiente:

**TEOREMA 1.1 (Danzer et al. 1963):** Sea  $\mathcal{F}$  una familia finita de conjuntos convexos en el espacio euclidiano  $n$ -dimensional, si cada  $n + 1$  conjuntos de la familia tienen un punto en común, entonces toda la familia tiene un punto en común.

Este teorema ha dado lugar a innumerables generalizaciones y problemas interesantes de diversas índoles y en los últimos 10 años ha existido un aumento significativo de investigación en el área de la geometría discreta relacionado con estas generalizaciones (Wenger, 2004).

Una de las posibles generalizaciones del Teorema de Helly que ha atraído la investigación de muchos matemáticos recientemente, es la conocida como Teoremas “Tipo Helly”, donde se considera un universo  $U$  (cerrado bajo inclusiones) y una propiedad  $P$ . Por ejemplo en el caso clásico del Teorema de Helly, el universo es la familia de los conjuntos convexos y la propiedad es la de tener un punto en común. Así, un teorema con la siguiente estructura es considerado como un Teorema Tipo Helly.

**TEOREMA 1.2 (Teorema Tipo Helly):** Dada una familia  $\mathcal{F}$  de  $U$ . Si cada subfamilia  $f$  de  $\mathcal{F}$  con  $m$  elementos tiene la propiedad  $P$  entonces toda la familia  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad  $P$ .

Teoremas de este tipo son raros en la literatura y en general la existencia de  $m$  es difícil de probar, más aún dar valores específicos de dicho valor  $m$  puede ser una tarea en algunos casos imposible.

### 1.1.2 El Teorema de Doignon

A continuación daremos un teorema con estas características que resulta de gran interés en esta tesis y que probaremos en el Apéndice 3.1.

**TEOREMA 1.3 (Doignon (1973)):** Si cada  $m = 2^n$  sistemas de desigualdades lineales de un sistema de  $d$  desigualdades lineales en  $\mathbb{R}^n$  tiene una solución entera, entonces el sistema completo tiene una solución entera.

Este resultado fue demostrado inicialmente por Doignon y redescubierto por Bell y Scarf en el ámbito de la programación lineal. Este resultado verse como un resultado tipo Helly en programación lineal donde los objetos son poliedros y la propiedad, es la de tener soluciones en la retícula entera de puntos. Vale la pena recalcar que dicha  $m$  no depende del número de desigualdades que el sistema tiene, y que el número  $2^d$  es lo mejor posible, es decir, existen ejemplos con menos restricciones lineales donde el teorema no se satisface como se puede ver en la Figura 1.1.

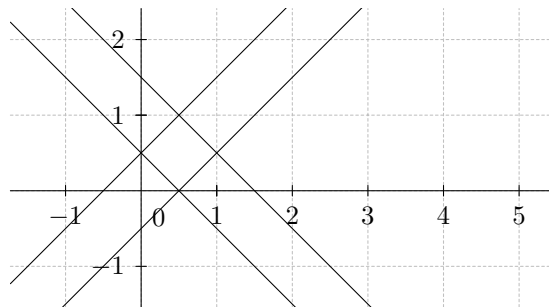


Figura 1.1

En la Figura 1.1 se observan 4 líneas rectas que definen un cuadrado sin puntos retícula en el interior, a pesar de que los semiplanos que contienen a dicho cuadrilátero contienen puntos retícula en su intersección dos a dos, la intersección de los cuatro no contiene puntos retícula, esto prueba que la cota dada por Doignon es justa.

### 1.1.3 El Teorema de Doignon Generalizado

En el 2014, Iskander Aliev, Jesús A. De Loera y Quentin Louveaux probaron la siguiente generalización del Teorema de Doignon.

**TEOREMA 1.4 (Doignon Generalizado):** (Aliev et al., 2014) Dado un entero  $k$  existe un número  $c(n, k)$  que depende sólo de  $k$  y de la dimensión  $n$  tal que; si todo subconjunto de desigualdades lineales con cardinalidad a lo más  $c(n, k)$  contiene exactamente  $k$  soluciones enteras, entonces el politopo  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  contiene exactamente  $k$  soluciones enteras.

El teorema anterior es una generalización al Teorema de Doignon debido a que proporciona condiciones para la existencia no sólo de una solución entera si no de la existencia de  $k$

soluciones enteras. Hasta el momento se sabe que  $c(n, k)$  esta acotado de la siguiente manera

$$c(n, k) \leq \left\lceil \frac{2(k+1)}{3} \right\rceil 2^n - 2 \left\lfloor \frac{2(k+1)}{3} \right\rfloor + 2,$$

para el caso  $k = 0$ , se puede ver que  $c(n, 0) = 2^d$  teniendo así como caso particular de Teorema de Doignon, para el caso  $c(n, 1)$  la cota es justa y en particular se conocen los valores exactos para  $c(2, 1) = 6$  (ver Figura 1.2) y  $c(3, 1) = 14$ . Sin embargo se desconocen los valores precisos para  $n \geq 2$  y  $k > 2$

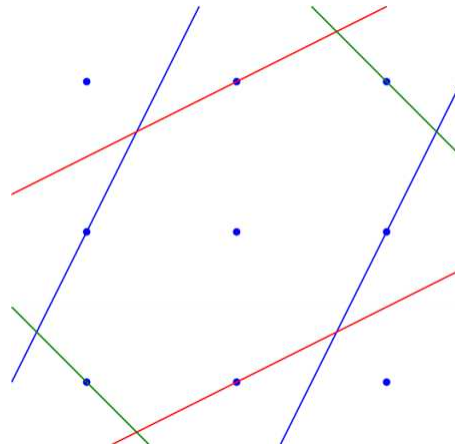


Figura 1.2

## 1.2. Justificación

Como mencionamos anterior mente, el Teorema de Helly tiene múltiples generalizaciones así como también diferentes aplicaciones en diferentes ramas de la matemática que van desde la geometría combinatoria hasta la *Programación Lineal* en particular con el caso del Teorema de Doignon Generalizado.

Es bien sabido que en *programación lineal entera* encontrar una solución óptima a un programa lineal entero es un problema N-P duro y en particular más complicado que determinar una solución óptima en un programa lineal. En la actualidad todo software que se utiliza para hallar una solución óptima en un programa lineal entero emplea el *algoritmo del plano cortante* (Gomoroy, 1960) de manera directa o indirecta. Sin embargo, la mayoría de los expertos en el área, incluyendo a Gomoroy mismo, considera el algoritmo como ineficiente por la cantidad de iteraciones necesarias para determinar la solución óptima.

Décadas después Clarkson (1995) notó que usando el Teorema de Doignon-Bell-Scarff (o cualquier Teorema tipo Helly de intersección) es posible obtener un algoritmo probabilista en programación lineal entera. La importancia del algoritmo de Clarkson radica en que el tiempo de ejecución es lineal en el número de desigualdades que definen el problema y subexponencial en la dimensión del mismo. De este modo, cuando la dimensión del problema es pequeña, este método es el más eficiente para encontrar la solución óptima.



A pesar de los avances realizados por (Aliev et al., 2014) y Clarkson (1995) en sus respectivos trabajos, aún existen preguntas abiertas de hecho se sabe que ambos trabajos están íntimamente ligados, pues dependen de caracterizar la misma familia de objetos matemáticos, misma que está compuesta por los politopos convexos de vértices con coordenadas enteras, con una cantidad específica de puntos con coordenadas enteras en su interior y la propiedad de ser maximales (es decir, que no existe otro politopo convexo que lo contenga propiamente y que posea la misma cantidad de vértices y puntos enteros en su interior).

Dicha caracterización es necesaria para mejorar la cota proporcionada por (Aliev et al., 2014) en su generalización del Teorema de Doignon, pues esta familia de politopos es el objeto principal de análisis durante la demostración. Por otro lado, el algoritmo de Clarkson está basado en disminuir la región factible aumentando la cantidad de restricciones lineales, pero para realizar este procedimiento es necesario saber con precisión qué restricciones agregar para no dejar fuera de la región factible soluciones enteras factibles; para esto último el algoritmo de Clarkson necesita la caracterización de la familia de politopos convexos descrita en el párrafo anterior.

### 1.3. Descripción del problema

El Teorema de Doignon Generalizado es de particular interés en el presente trabajo debido a que en esta tesis se presentará una extensión a la clasificación de poliedros cuyos vértices tiene coordenadas enteras y  $k$  puntos de coordenadas enteras en su interior. Dicha clasificación es relevante para el Teorema 1.4 ya que una vez que se complete la clasificación será posible determinar el valor mínimo para la cota  $c(n, k)$ .

Con relación a esta clasificación ya existen diversos trabajos. Rabinowitz (1990) determinó la cantidad mínima de puntos retícula que un polígono ( $n = 2$ ) de  $s$  lados puede tener en su interior para  $0 \leq s \leq 10$ , sin embargo para  $s > 10$  únicamente logró aproximaciones. Más recientemente, Flores et al. (a) lograron desarrollar un algoritmo que construye polígonos con  $s$  vértices de coordenadas enteras y  $k$  puntos de coordenadas enteras en el interior además de que puede descartar polígonos equivalentes unimodularmente. Desafortunadamente el algoritmo no es óptimo y no es capaz de encontrar polígonos con más de 10 lados, por lo tanto es importante determinar más propiedades geométricas a cerca de dichos polígonos. En esta tesis se trabajó una extensión de algunos de estos casos para polígonos de 11 lados y analizamos algunas técnicas asintóticas.

Los estudios que existen actualmente para caracterizar los politopos de los que dependen los trabajos de Aliev y de Clarkson se limitan a  $\mathbb{R}^2$  (Rabinowitz, 1990) y algunos casos muy aislados en  $\mathbb{R}^3$  (Flores et al., b).

Actualmente existe un algoritmo de búsqueda exhaustiva (Flores et al., a) que construye polígonos de vértices con coordenadas enteras de  $s$  lados y  $k$  puntos de coordenadas enteras en el interior y devuelve una lista de polígonos sin incluir polígonos equivalentes bajo transformaciones unimodulares. La parte que falta para terminar de caracterizar a esta familia de polígonos, es demostrar que el algoritmo ha encontrado todos los polígonos que existen con estas características. Para esto es necesario determinar las propiedades cualitativas de dichos

polígonos, pero esta teoría aún no se conoce del todo.

En el presente trabajo se expondrán los teoremas necesarios para determinar que el algoritmo exhibe todos los polígonos existentes para valores específicos de  $s$  y  $k$ , donde  $s$  es la cantidad de lados del polígono y  $k$  la cantidad de puntos de coordenadas enteras en el interior de dicho polígono.

## I.4. Hipótesis y objetivos

### I.4.1 Hipótesis

- Un nonágono retícula convexo tiene 7 o 10 puntos retícula interiores, pero no puede tener 8 ni 9 puntos retícula en su interior.
- No existe decágono con once puntos retícula en su interior.

### I.4.2 Objetivo general

- Caracterizar los polígonos con  $k$  puntos retícula en el interior.

### I.4.3 Objetivos particulares

1. Caracterizar los casos en los que el algoritmo no encontró polígonos.
2. Modelar el comportamiento asintótico de la relación cantidad de aristas y puntos retícula en el interior.



## II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y METODOLOGÍA

### II.1. Preliminares

La fundamentación teórica de este trabajo radica principalmente en dos teorías que han tenido relevancia en las últimas décadas, por un lado la programación lineal y por el otro los Teoremas tipo Helly.

#### II.1.1 Preliminares esenciales de la programación lineal

El aporte principal de la Programación Lineal al conocimiento son las técnicas para optimizar lo que en la literatura se conoce como *programa lineal* el cual consta de una función lineal  $c$  denominada *función objetivo* la cual está conformada por variables de decisión que a su vez están sujetas a un conjunto finito de desigualdades lineales, esto es:

$$\min c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \text{ sujeto a: } Ax \leq b$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  y  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ .

Dentro del contexto de la programación lineal, al conjunto

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

se le denomina *conjunto de soluciones factibles*; aunque por otro lado es claro que cada desigualdad lineal que define a  $P$ , define un semiespacio cerrado, y dado que son un número finito de estos, el conjunto  $P$  también cumple con la definición de *politopo convexo*. La *dimensión* de un politopo convexo se define como la dimensión del subespacio afín de menor dimensión que lo contiene, es decir,

$$\dim(P) = \dim(\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}).$$

La teoría desarrollada para describir propiedades de los politopos convexos proporciona la capacidad de realizar un análisis combinatorio al conjunto de soluciones factibles de un programa lineal (Ziegler, 1995).

Una subdivisión de la programación lineal es la programación lineal entera. Ésta se encarga de minimizar funciones objetivo con la restricción adicional de que la solución tenga únicamente valores enteros; dicho de otro modo,  $x \in \mathbb{Z}^n$ . En este contexto es frecuente encontrar problemas cuya modelación requiera que el conjunto de soluciones factibles tenga

más de una solución entera; a saber  $k$  soluciones enteras, aunque se sabe en general, que determinar la cantidad de soluciones factibles enteras de un programa lineal es un problema NP-duro.

### II.1.2 Retículas

Este trabajo hace referencia a la retícula  $\mathbb{Z}^2$ , aunque a continuación se presenta la definición general de retícula.

**DEFINICIÓN 2.1:** Sean  $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$ ,  $n$  vectores linealmente independientes, la *retícula* generada por estos vectores se define como:

$$\mathcal{L}(b_1, b_2, \dots, b_n) = \left\{ \sum x_i b_i \mid x_i \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.1)$$

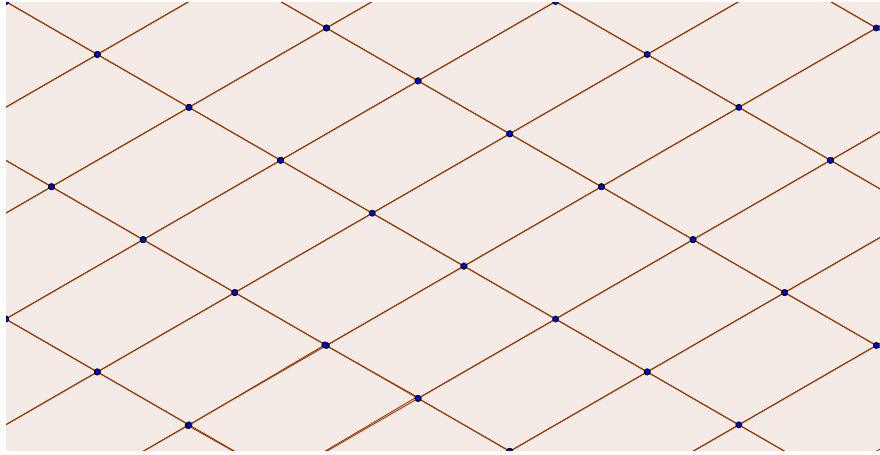


Figura 2.1: Ejemplo de retícula

Nos referiremos a los vectores  $b_1, b_2, \dots, b_n$  como la *base* de la retícula  $\mathcal{L}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . A su vez, si se define  $B$  como la matriz de dimensiones  $m \times n$ , cuyas columnas son los vectores  $b_1, b_2, \dots, b_n$  entonces diremos que la retícula generada por  $B$  es la siguiente:

$$\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(b_1, b_2, \dots, b_n) = \{Bx \mid x \in \mathbb{Z}^n\}. \quad (2.2)$$

También diremos que la retícula es de *rango*  $n$  y *dimensión*  $m$ . Si  $m = n$ , se dice que la retícula es de *rango completo*.

Claramente si la matriz  $B$  está formada por la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $\mathcal{L}(B) = \mathbb{Z}^n$ , esta retícula es de particular importancia en el presente trabajo.

**DEFINICIÓN 2.2:** El *generador de una retícula*  $\mathcal{L}(B)$  es el espacio lineal generado por sus vectores:

$$\text{span}(\mathcal{L}(B)) = \text{span}(B) = \{By \mid y \in \mathbb{Z}^n\}. \quad (2.3)$$

**DEFINICIÓN 2.3:** Para cualquier base  $B$  de una retícula,  $\mathcal{P}(B) = \{Bx \mid x \in [0, 1]^n\}$  es el *paralelepípedo fundamental*.

Nótese que  $\mathbb{R}^n = \{\mathcal{P}(B) + x : x \in \mathcal{L}(B)\}$  cuando  $B$  es de rango completo, esto último implica que el paralelepípedo fundamental tesela a  $\mathbb{R}^n$ .

**TEOREMA 2.1:** Sea  $\Lambda$  una retícula de rango completo y  $B$  una matriz invertible de dimensiones  $n \times n$ . Entonces  $B$  es una base de  $\Lambda$  si y sólo si  $\mathcal{P}(B) \cap \Lambda = \{0\}$

*Demostración.* " $\Rightarrow$ " Dado que  $\Lambda$  contiene únicamente combinaciones lineales enteras de las columnas de  $B$ , y el único elemento con coordenadas enteras en  $\mathcal{P}(B)$  es el 0, entonces  $\mathcal{P}(B) \cap \Lambda = \{0\}$ .

" $\Leftarrow$ ". Es necesario demostrar que para cualquier punto retícula  $x \in \Lambda$  se puede escribir de la forma  $x = By$ , con  $y \in \mathbb{Z}^n$ . Observe que si se define  $y'$  como  $y' = y - \lfloor y \rfloor$ , se tiene que  $By'$  es un punto retícula y por hipótesis se sabe que  $By' = 0$  por lo tanto  $y - \lfloor y \rfloor = 0$  y por consiguiente iguales, luego  $y \in \mathbb{Z}^n$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 2.4:** Una matriz cuadrada es *unimodular* si sus entradas son enteras y  $\det(U) = \pm 1$ .

**LEMA 2.1:**  $U$  es unimodular si y sólo si  $U^{-1}$  es unimodular.

**LEMA 2.2:** Matrices no singulares  $B_1$  y  $B_2$  son bases equivalentes si y sólo si  $B_2 = B_1U$ , para alguna matriz unimodular  $U$ .

*Demostración.* " $\Rightarrow$ " Dado que  $B_1$  y  $B_2$  tienen entradas enteras, existen matrices de entradas enteras  $U$  y  $V$ , tales que  $B_1 = B_2U$  y  $B_2 = B_1V$ . Entonces,  $B_1 = B_1VU$  y por ende  $VU = I$ . Por último, dado que  $V$  y  $U$  son matrices enteras es necesario que  $\det(VU) = \pm 1$ .

" $\Leftarrow$ ". Es suficiente con notar que cada columna de  $B_2$  esta contenida en  $\mathcal{L}(B_1)$ .  $\square$

Es importante ver que este último lema además de proporcionar una relación entre bases, muestra que las transformaciones unimodulares preservan retículas, y en particular preservan el paralelepípedo fundamental lo cual implica que también preservan el volumen de cualquier figura.

**TEOREMA 2.2 (Blichfeld):** Para cualquier retícula de rango completo  $\Lambda$  y un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  con  $\text{vol}(S) > \det(\Lambda)$ , existen puntos  $z_1, z_2 \in S$  distintos tales que  $z_1 - z_2 \in \Lambda$ .

**TEOREMA 2.3:** Sea  $\Lambda$  una retícula de rango  $n$  y completo. Todo conjunto convexo  $S$  centralmente simétrico con  $\text{vol}(S) > 2^n \det(\Lambda)$  contiene un punto retícula diferente del neutro.

### II.1.3 Polígonos retícula

A continuación se muestran los resultados que fueron necesarios para acotar la región de búsqueda de los polígonos de vértices que se construyeron con el algoritmo desarrollado por Flores et al. (a) y que se contabilizaron en la tabla que se mostrará más adelante.

**DEFINICIÓN 2.5:** Una *transformación afín* es una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que existe una transformación lineal  $A$  y un vector  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  para el cual:

$$Fx = Ax + x_0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**DEFINICIÓN 2.6:** Diremos que una transformación afín  $F = A + x_0$  es *unimodular* si  $\det(A) = \pm 1$

**DEFINICIÓN 2.7:** Un *desplazamiento* es una transformación unimodular que deja una línea fija. Si  $F$  deja fija la línea  $l$ , decimos que  $F$  es un desplazamiento sobre  $l$ .

Como ejemplo particular de un desplazamiento se puede considerar la siguiente transformación

$$F(x, y) = (x + ay, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

donde el parámetro  $a \in \mathbb{Z}$  representa la magnitud del desplazamiento. Si  $a = 1$  entonces se tiene un *desplazamiento unitario*.

**DEFINICIÓN 2.8:** Un *segmento retícula* es un segmento cuyos puntos terminales son puntos retícula, su *longitud entera* en una retícula es una unidad menos que el número de puntos retícula en un segmento retícula. Se denotará como  $\ell(s)$ , donde  $s$  es un segmento retícula.

Nótese que cuando un segmento es paralelo a con algún eje ya sea el  $x$  o  $y$ , la longitud entera es la misma que la euclidiana. Por otro lado, cuando el segmento tiene puntos terminales  $(0, 0)$  y  $(m, n)$  la longitud entera de dicho segmento es  $\text{mcd}(m, n)$  (Polezzi, 1997).

**DEFINICIÓN 2.9:** Un *polígono retícula* es un polígono convexo cuyos vértices son puntos retícula. Cuando el polígono retícula tiene  $k$  puntos retícula en su interior se dice que es un polígono  $k$ -retícula (Figura 2.2).

Se dice que un polígono  $P$  está en *posición canónica* si cada punto  $(x, y) \in P$  es tal que  $0 \leq x$ ,  $0 \leq y$ , la arista más larga de  $P$  está contenida en el eje  $x$  con el origen como uno de sus vértices y el siguiente vértice en sentido a las manecillas del reloj desde el origen, tiene coordenadas  $(r, h)$  con  $h \in \mathbb{N}$ , y  $r \in \{0, 1, \dots, h - 1\}$ . La arista de  $P$  que está en el eje  $x$  es la base del polígono.

Es importante ver que este último lema además de proporcionar una relación entre bases, muestra que las transformaciones unimodulares preservan retículas, y en particular

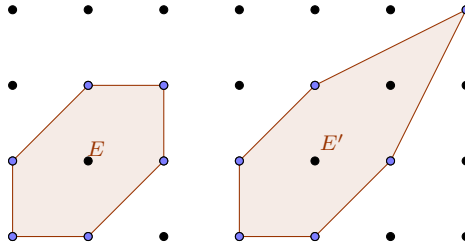


Figura 2.2: Polígonos retícula no equivalentes

preservan el paralelepípedo fundamental lo cual implica que también preservan el volumen de cualquier figura.

Dado que las matrices unimodulares preservan las propiedades esenciales de los polígonos retícula, tales como, la cantidad de puntos retícula en el interior y el área ya que las transformaciones unimodulares mandan puntos retícula en puntos retícula además de preservar el paralelepípedo fundamental (2.2). Debido a todas las propiedades de las matrices unimodulares diremos que dos polígonos retícula son equivalentes si existe una transformación unimodular que mapea uno en el otro.

**EJEMPLO 2.1:** En la Figura 2.3 se observan dos hexágonos equivalentes unimodulamente, pues la transformación

$$F(x, y) = (x + y, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

satisface que  $F(E) = E'$

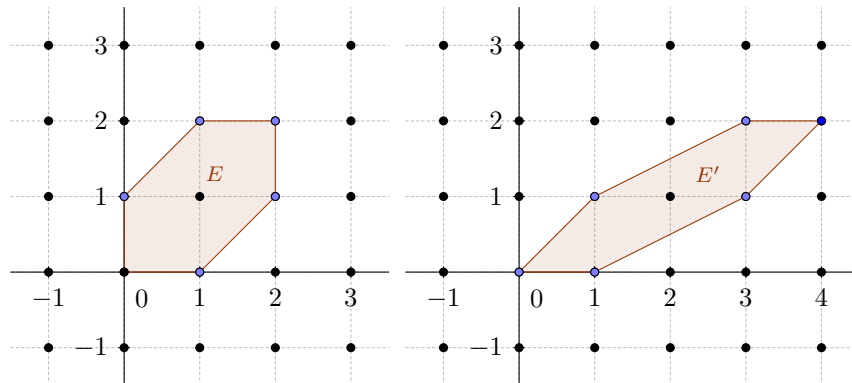


Figura 2.3

**LEMA 2.3:** Sean  $P$  un polígono retícula,  $e$  una arista de  $P$  y  $A, B$  los vértices de  $e$ . Si  $\ell(e) = p$ , entonces existe una transformación unimodular que mapea  $A$  al origen y  $B$  al punto  $(p, 0)$  y a todos los vértices restantes por encima del eje  $x$ .

**LEMA 2.4:** Todo polígono retícula  $P$  es equivalente con algún polígono retícula en posición canónica.



*Demostración.* Sea  $p$  la longitud entera de la arista más larga en  $P$ . Por el Lema 2.3,  $P$  es equivalente a un polígono  $P'$  cuya arista de mayor longitud está definida por los vértices  $(0, 0)$  y  $(p, 0)$ , además de tener todos sus vértices por encima del eje  $X$ . La base del poliedro  $P'$  sigue siendo el lado de mayor longitud pues las transformaciones unimodulares preservan la cantidad de puntos retícula en cualquier conjunto, en particular en cada una de las aristas de  $P$ .

Sea  $(k, h)$  el vértice de  $P'$  adyacente al origen en sentido de las manecillas del reloj. Sean  $a, r \in \mathbb{Z}$  con  $r \in \{0, \dots, h-1\}$  tales que  $k = ah + r$  y sea  $F$  un desplazamiento sobre el eje  $X$  de magnitud  $-a$  definido como sigue

$$F(k, h) = (ah + r - ah, h) = F(r, h)$$

dado que las transformaciones unimodulares preservan convexidad, todos los vértices de  $F(P')$  se encuentran a la derecha de la recta definida por los vértices  $(0, 0)$  y  $(r, k)$ , y por consiguiente, todos los vértices de  $F(P')$  se encuentra en el primer cuadrante de  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, todo polígono puede ser mapeado a un polígono en posición canónica a través de una transformación unimodular.  $\square$

**LEMA 2.5:** Cualquier triángulo retícula  $T$  vacío tiene área  $\frac{1}{2}$

**TEOREMA 2.4 (Pick):** Sean  $P$  un polígono retícula convexo con al menos un punto retícula en su interior,  $b$  el número de puntos retícula en su frontera y  $k$  el número de puntos retícula en su interior. Entonces el área de  $P$  es igual a  $\frac{b}{2} + k - 1$ .

*Demostración.* (Aigner et al., 2010) Cualquier polígono retícula puede ser triangulado usando los  $k$  puntos retícula en su interior, y los  $b$  puntos retícula en su frontera. Ahora se puede interpretar la triangulación de  $P$  como una gráfica plana, la cual subdivide el plano en una cara no acotada, más  $f - 1$  triangulaciones de área  $\frac{1}{2}$ , entonces

$$area(P) = \frac{1}{2}(f - 1).$$

Cada triángulo tiene tres lados, donde cada una de las  $e_{int}$  aristas interiores pertenecen a dos triángulos, mientras que las  $e_{bd}$  aristas en la frontera sólo pertenecen a un triángulo. Así  $3(f - 1) = 2e_{int} + e_{bd}$ , luego  $f = 2(e - f) - e_{bd} + 3$  donde  $e$  es el número total de aristas. Por otro lado, hay el mismo número de aristas en la frontera que el número de puntos retícula en la frontera,  $e_{bd} = b$ . De estos dos hechos junto con la fórmula de Euler se tiene que:

$$\begin{aligned} f &= 2(e - f) - e_{bd} + 3 \\ &= 2(e - f) - b + 3 \\ &= 2(n - 2) - b + 3 \\ &= 2k + b - 1 \end{aligned}$$

donde  $n = k + b$  y así se tiene que

$$area(P) = \frac{1}{2}(f - 1) = k + \frac{1}{2}b - 1.$$

□

Cabe señalar que el teorema de Pick no es válido cuando el interior del polígono no contiene puntos retícula, ya que de ser así la cantidad de puntos en la frontera puede crecer indefinidamente y el interior seguir sin puntos retícula (ver Figura 2.4). Desafortunadamente no existe una generalización directa para dimensiones superiores.

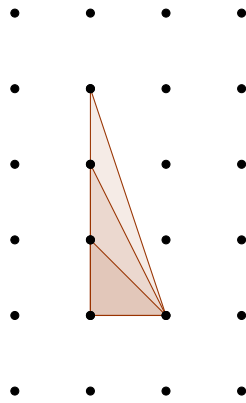


Figura 2.4

Como ya se mencionó, en el artículo de Flores et al. (a) se publicó un algoritmo que dada la cantidad de lados de un polígono retícula convexo y una cantidad específica de puntos retícula en su interior, es capaz de determinar todos los posibles polígonos con  $s$  puntos retícula como vértices y  $k$  puntos retícula en el interior, obteniendo la siguiente tabla:

$k/s$	3	4	5	6	7	8	Total
1	5	7	3	1	0	0	16
2	5	19	16	5	0	0	45
3	10	42	50	20	0	0	122
4	11	58	87	49	4	1	210
5	8	76	178	115	13	0	390
6	16	125	279	187	27	4	638

En la tabla sólo se contabilizan los polígonos que no son equivalentes unimodularmente, desafortunadamente el algoritmo desarrollado para la búsqueda de dichos polígonos aún no es eficiente. A continuación se muestran los 5 triángulos contabilizados en la tabla.

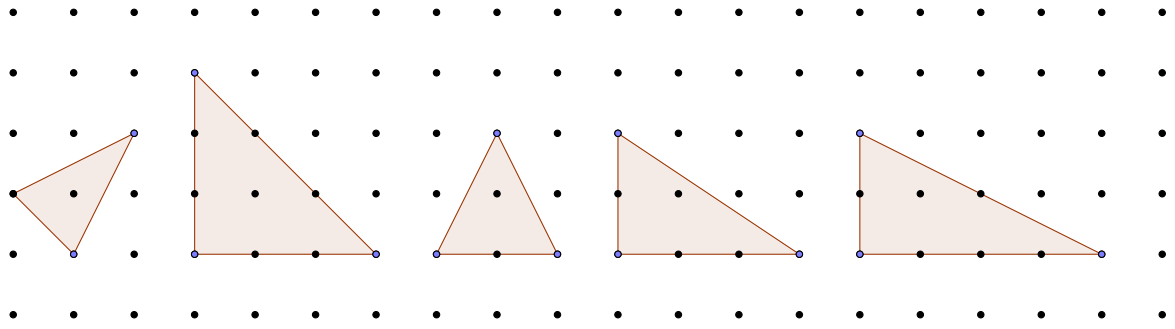


Figura 2.5: Los 5 triángulos con un punto retícula

Nota: Como se puede ver en la tabla anterior, para  $s = 8$  y  $k = 5$  aparece un cero, fenómeno que llama la atención pues para  $k = 4$  sí existe un polígono, en general diremos que existe una anomalía para un polígono de  $s$  lados si no existe polígono con  $k$  puntos retícula en el interior para  $k > g$ , donde  $g$  es la mínima cantidad de puntos retícula que todo polígono de  $s$  lados puede tener en su interior. Rabinowitz (1990) demostró que no existía polígono con dichas características, lo cual conlleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las condiciones geométricas y combinatorias en las que aparecen las anomalías? Se puede decir que para los casos cuando se tiene un polígono de 3, 4, 5, 6 o 7 lados no existen anomalías. Esto se puede ver construyendo los polígonos que se muestran desde la la Figura 2.6 hasta la Figura 2.13, la idea principal es tomar un polígono convexo retícula y trasladar algunos de sus vértices de tal manera que pueda tener cualquier cantidad de puntos retícula  $k$  en su interior.

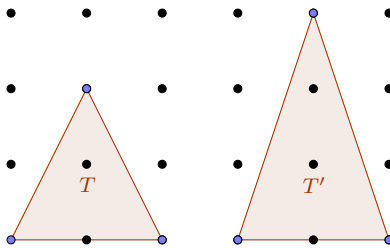


Figura 2.6: Triángulos

Para el caso del octágono (ver Figura 2.11) se puede ver que a partir de 6 puntos retícula en el interior no existe anomalía, para el nonágono sucede lo mismo a partir de 10 puntos retícula en el interior y para el decágono a partir de 14. Cabe mencionar que en todas estas construcciones fue necesario encontrar al menos un polígono que alcanzara el mínimo de puntos retícula que podía tener en el interior.

El siguiente teorema será muy útil para estudiar este número.

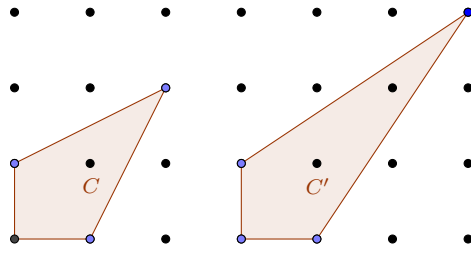


Figura 2.7: Cuadrilateros

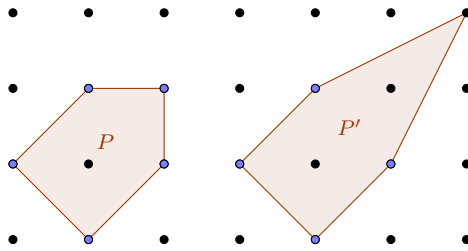


Figura 2.8: Pentágonos

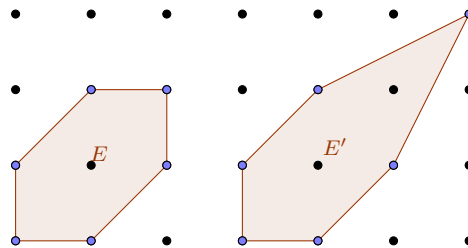


Figura 2.9: Hexágonos

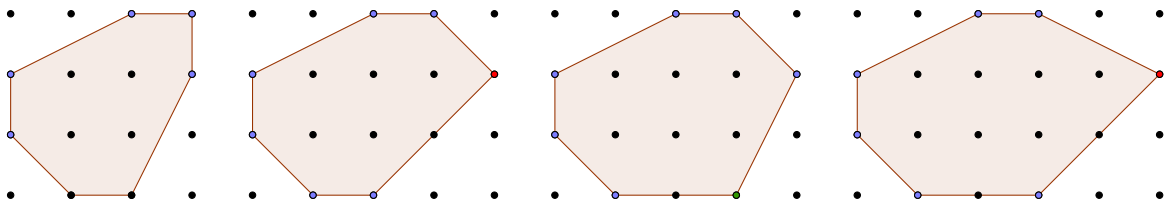


Figura 2.10: Heptágonos

**TEOREMA 2.5 (Cota de Scott):** Sean  $P$  un polígono retícula convexo con al menos un punto retícula en el interior,  $b$  el número de puntos retícula en su frontera y  $k$  el número de puntos retícula en su interior. Entonces  $b \leq 2k + 7$

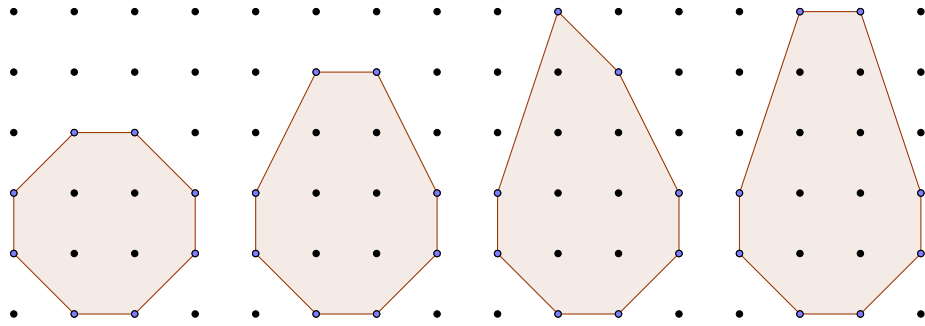


Figura 2.11: Octágonos

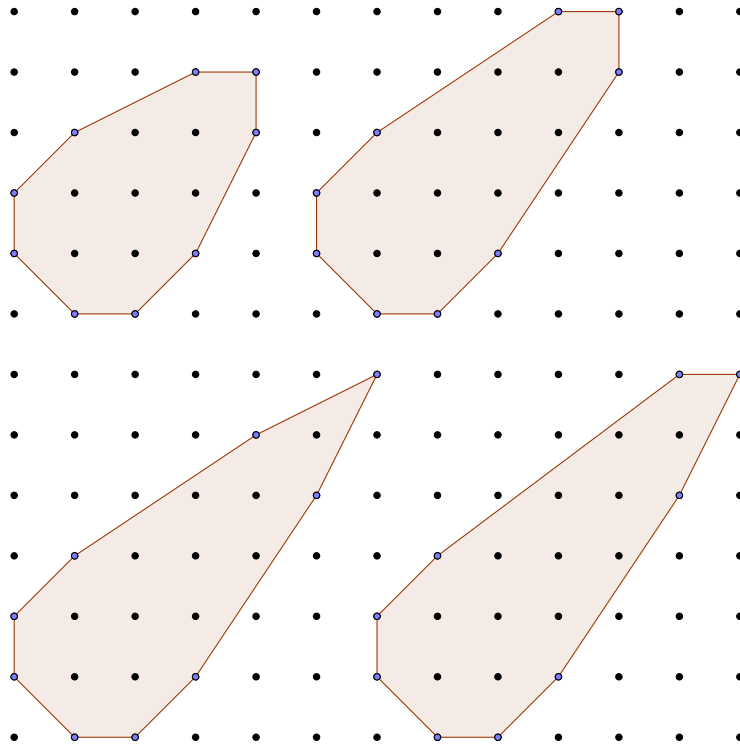


Figura 2.12: Nonágonos

## II.2. Clasificación de Polígonos $k$ -retícula

A continuación se muestran resultados originales que se publicarán en el artículo de Flores et al. (a) y que son esenciales para acotar la búsqueda exhaustiva que realiza el algoritmo desarrollado por ellos mismo.

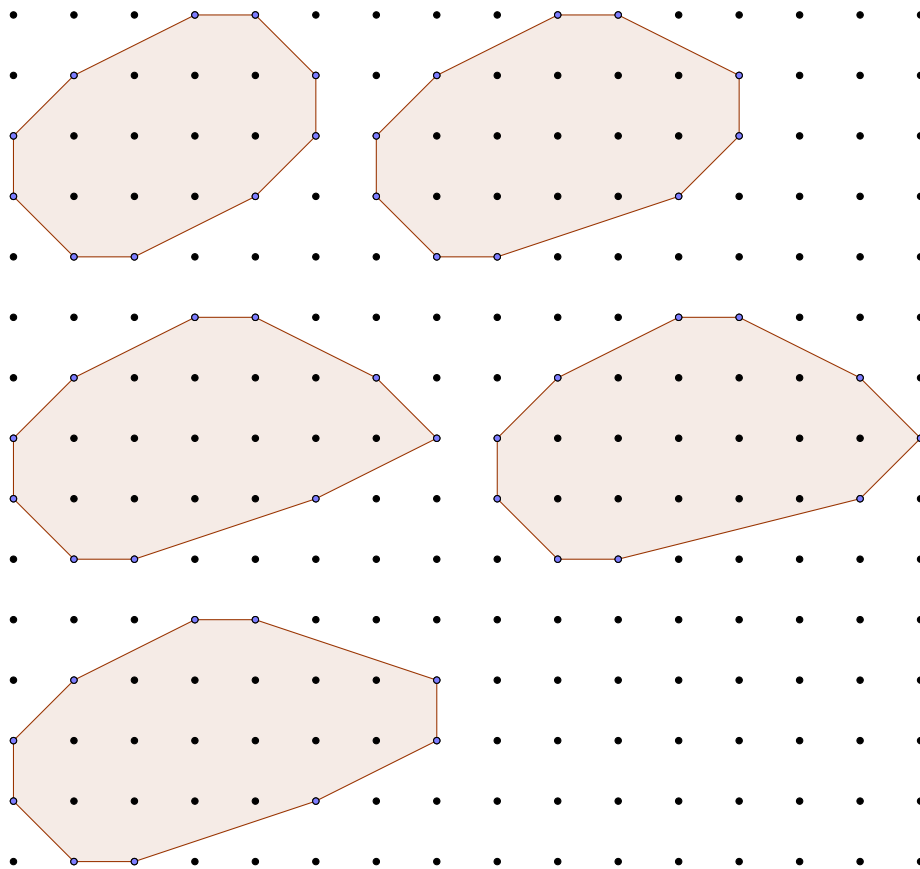


Figura 2.13: Decágonos

**LEMA 2.6:** El área máxima que un polígono  $k$ -retícula puede tener es  $\frac{4k+5}{2}$ .

*Demostración.* Sea  $P$  un polígono  $k$ -retícula, por el Teorema 2.4 tenemos que  $area(P) = \frac{b}{2} + k - 1$  y sustituyendo el valor de  $b$  por la cota de Scott se tiene que

$$area(P) = \frac{b}{2} + k - 1 \leq \frac{2k+7}{2} + k - 1 = \frac{4k+5}{2}$$

obteniendo así la desigualdad deseada.  $\square$

Denotaremos por  $a_x$  y  $a_y$  a la coordenada  $x$  y la coordenada  $y$  respectivamente del punto  $a \in \mathbb{R}^2$ .

**LEMA 2.7:** Sea  $P$  un polígono  $k$ -retícula en posición canónica y  $p$  la longitud entera de la base de  $P$ . Entonces para cada punto  $a \in P$ ,  $a_y \leq \frac{4k+5}{p}$ .

**PROPOSICIÓN 2.1:** Sea  $P$  un polígono  $k$ -retícula en posición canónica y sea  $v \in P$  el vértice

con la coordenada  $Y$  de mayor magnitud. Dado que  $P$  es convexo,  $a_y \leq v_y$  para cualquier  $a \in P$ . Sea  $T$  es triángulo formado por la base de  $P$  y el vértice  $v$ . Por un lado se tiene que  $area(T) = \frac{pv_y}{2}$ , pero como el triángulo esta completamente contenido en  $P$ , también se tiene que

$$\frac{pv_y}{2} \leq area(P) \leq \frac{4k+5}{2}$$

*Demostración.* Esta ultima desigualdad se sigue del teorema 2.5, por lo tanto

$$v_y \leq \frac{4k+5}{p}$$

obteniendo así la desigualdad deseada.  $\square$

**LEMA 2.8:** Sea  $P$  un polígono en posición canónica, para cada  $a \in P$  se tiene que  $a_x \leq 4k+5$ .

*Demostración.* Sean  $v$  el vértice de  $P$  adyacente al origen en sentido de las manecillas del reloj y  $p$  la longitud de la base de  $P$ . Dado que  $P$  esta en posición canónica  $v_x \in \{0, 1, \dots, v_y - 1\}$ . Por el Lema 2.7,  $v_y \leq \frac{4k+5}{p} \leq 4k+5$ , así  $v_x \leq 4k+4$ .

Considere ahora cualquier otro punto  $a \in P$  diferente de  $v$  y sea  $T$  el triángulo con vértices  $(0, 0), v, a$ . Por convexidad,  $T$  está contenido en  $P$ . Usando la formula del determinante para calcular el área de  $T$  se tiene que

$$area(T) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_x & a_y & 1 \\ v_x & v_y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |a_x v_y - a_y v_x|$$

entonces por el Lema 2.6,

$$\frac{1}{2} |a_x v_y - a_y v_x| \leq \frac{4k+5}{2} \Rightarrow a_x \leq \frac{4k+5 + a_y v_x}{v_y},$$

como la expresión es válida para cualquier valor de los parámetros, en particular es valida para el menos de la expresión. Dado que  $u_x \in \{0, 1, \dots, 4k+4\}$  y  $v_y \in \{1, 2, \dots, 4k+5\}$ , se obtiene  $a_x \leq 4k+5$ .  $\square$

**LEMA 2.9:** Sea  $P$  un polígono  $k$ -retícula con  $s$  lados, en posición canónica, y  $p$  la longitud entera de la base de  $P$ . Entonces

$$1 \leq p \leq 2k - s + 9$$

*Demostración.* Dado que  $P$  es un polígono retícula, cumple la primer desigualdad,  $1 \leq p$ . Por el Lema 2.5 se sabe que  $p \leq 2k + 7$ . Por otro lado, dado que  $P$  tiene  $s$  lados, hay  $s - 2$  puntos retícula que no están en la base. Así

$$1 \leq p \leq 2k + 7 - (s - 2) = 2k - s + 9.$$

□

**TEOREMA 2.6:** Sea  $P$  un polígono  $k$ -retícula en posición canónica con  $s > 3$  lados, y  $p$  la longitud entera de la base de  $P$ . Sean  $v_0, v_1, \dots, v_{s-1}$  los vértices de  $P$  etiquetados en sentido de las manecillas del reloj empezando en  $v_0 = (0, 0)$ . Entonces para  $i \in \{2, 3, \dots, s - 2\}$ ,

$$\frac{v_{(i-1)x}v_{iy} - 2A}{v_{(i-1)y}} < v_{ix} < \frac{v_{(i-1)x}v_{iy} + 2A}{v_{(i-1)y}}$$

donde  $A = \frac{4k+5}{2}$  es el área máxima que un polígono  $k$ -retícula puede tener.

*Demostración.* Sea  $i \in \{1, 2, \dots, s - 2\}$  fijo y sea  $a = v_{(i-1)}$  y  $b = v_i$ . Considerando el triángulo  $T$  definido por los vértices  $v_0$ ,  $a$  y  $b$ , por la formula para determinar el área de  $T$  se tiene que  $area(T) = \frac{1}{2}|a_x b_y - a_y b_x|$ . Dado que  $P$  es convexo y tiene más de tres aristas,  $T$  está contenido propiamente en  $P$ . Entonces por el Lema 2.6,

$$\frac{1}{2}|a_x b_y - a_y b_x| < A = \frac{4k + 5}{2}$$

lo cual implica la desigualdad deseada. □

Por otro lado, Rabinowitz (1990) en su artículo ya había determinado algunas características geométricas relevantes con relación a los polígonos retícula. A continuación se muestran los resultados que se utilizaron en esta tesis y que aparecen en el artículo de Rabinowitz.

**TEOREMA 2.7 (Arkinstall):** Todo trapecio convexo retícula contiene un punto retícula.

**TEOREMA 2.8 (Arkinstall):** Un pentágono retícula convexo debe contener al menos un punto retícula interior.

*Demostración.* Sea  $ABCDE$  un pentágono convexo retícula. Dado que la suma de los ángulos interiores de un pentágono suman  $3\pi$ , la suma de los 5 pares de ángulos interiores adyacentes suman  $6\pi$ . Por consiguiente, algún par de ángulos debe sumar más de  $\pi$ . Es posible suponer sin pérdida de generalidad que  $\angle A + \angle B > \pi$ . También es posible suponer que el punto  $C$  no está más alejado de la recta que pasa por los vértices  $AB$  que el vértice  $E$ . Construyendo el paralelogramo  $ABCX$ , se puede ver que los rayos  $AX$  y  $CX$  están contenidos en los ángulos  $A$  y  $C$  respectivamente; así el punto  $X$  pertenece al interior del pentágono. Pero si tres puntos de un paralelogramo son puntos retícula, el cuarto también debe ser un punto retícula. □



**TEOREMA 2.9 (Scott):** Si un polígono convexo retícula tiene  $g$  puntos retícula en su interior ( $g > 0$ ) y  $b$  puntos retícula en su frontera, entonces  $b \leq 2g + 7$ . Si  $v > 3$ , entonces  $b \leq 2g + 6$ .

**TEOREMA 2.10 (Censo-0):** Si  $K$  es un polígono convexo retícula sin puntos retícula en su interior, entonces  $K$  es retícula equivalente a uno de los siguientes polígonos:

1. El triángulo cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(2, 8)$  y  $(0, 2)$
2. El triángulo cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(p, 0)$  y  $(0, 1)$
3. El trapecio cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(p, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(q, 1)$ , donde  $p$  y  $q$  son cualquier entero positivo.

Cabe mencionar que fijando el número de vértices se puede obtener un polígono con un número no acotado de puntos retícula en su interior. Por otro lado es interesante determinar la cantidad mínima de puntos retícula que puede tener un polígono retícula con una cantidad fija de vértices.

**Notación:** Si  $K$  es un polígono convexo retícula, entonces  $g(K)$  denota el número de puntos retícula en el interior de  $K$ ,  $b(K)$  denota el número de puntos retícula en la frontera de  $K$  y  $G(K) = b(K) + g(K)$  denota la cantidad de puntos retícula en  $K$ . De la misma manera,  $v(K)$  representa el número de vértices de  $K$ . Si  $K$  es implícito se referirá a estas cantidades simplemente como  $g$ ,  $b$ ,  $G$  y  $v$  respectivamente.

**PROPOSICIÓN 2.2:** Un triángulo retícula no tiene puntos retícula en su interior si y sólo si  $K$  es retícula equivalente a:

1. El triángulo cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(0, 2)$  ó
2. El triángulo cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(p, 0)$  y  $(0, 1)$  para algún entero positivo  $p$ .

De ahora en adelante diremos que un segmento contiene un punto retícula  $x$  en su interior, si  $x$  es diferente a los puntos extremos de dicho segmento

**LEMA 2.10 (Coleman (1978)):** Sea  $ABCDE$  un pentágono convexo retícula. Si  $\triangle ACE$  no tiene puntos retícula en su interior, entonces  $AC$  o  $CE$  deben contener un punto retícula en su interior. Más aun, si  $AE$  tiene al menos un punto retícula en el interior, entonces  $AC$  y  $EC$  tienen un punto retícula en su interior.

*Demostración.* Sea  $ABCDE$  un pentágono convexo retícula, suponga que  $\triangle ACE$  no contiene puntos retícula en el interior. Sea  $X$  un punto retícula en el interior del  $\triangle ABC$  más cercano al segmento  $AC$ . Si no existe tal punto, hay que tomar el punto  $B$ . Similarmente, sea  $Y$  el punto retícula en el interior de  $\triangle CDE$  más cercano al segmento  $CE$ . De no existir tal punto hay que tomar al punto  $D$ .

Por el Teorema 2.8, el pentágono  $AXCEY$  contiene un punto retícula  $Z$  en su interior, el punto  $z$  no puede estar en el interior del  $\triangle ACE$  por hipótesis, así como tampoco puede estar en el interior del triángulo  $AXC$  porque de ser así  $Z$  estaría más cerca del segmento  $AC$  que  $X$ , contradiciendo la manera en la que se escogió  $X$ . Análogamente  $Z$  no puede estar en el interior del triángulo  $CYE$ . Por lo tanto  $Z$  debe pertenecer al segmento  $AC$  o  $CE$ .

Para completar la demostración suponga que la arista  $AE$  contiene un punto retícula  $P$ . Como ya se demostró anteriormente,  $AC$  o  $CE$  contiene un punto retícula. Sin pérdida de generalidad, suponga que  $Z$  pertenece al segmento  $AC$ . De nuevo sea  $Y$  el punto el punto retícula más cercano al segmento  $CE$  en el interior del triángulo  $CDE$ , de no existir tal punto,  $Y = D$ . Entonces el polígono  $CXPEY$  es un pentágono convexo retícula, y por el Teorema 2.8, debe contener un punto retícula en su interior. Sea  $Z$  dicho punto, análogamente como en el párrafo anterior,  $Z$  no puede estar en el interior del triángulo  $CYE$  ni en el interior de  $ACE$ , por lo tanto  $Z$  está en el interior de  $CE$ .  $\square$

**TEOREMA 2.11 (Teorema del Pentágono Gordo):** Sea  $K$  un pentágono retícula convexo y suponga que una arista de  $K$  contiene dos puntos retícula en su interior. Entonces  $K$  contiene al menos dos puntos retícula en su interior.

Rabinowitz (1990) exhibió la lista de todos los polígonos retícula con un punto retícula en el interior, donde puede verse que no existen pentágonos retícula de un punto retícula en el interior y aristas con dos puntos retícula en el interior.

**PROPOSICIÓN 2.3:** Todo hexágono retícula convexo tiene al menos un punto retícula en el interior. Todo hexágono con sólo un punto retícula en el interior es equivalente al hexágono centralmente simétrico de la figura 2.15.

Este resultado también se encuentra en la lista exhibida por Rabinowitz (1990).

**DEFINICIÓN 2.10:** Se dice que un polígono retícula es *delgado* si todos los puntos retícula que están en su frontera son vértices.

**TEOREMA 2.12 (Teorema de Hexágono Gordo):** Un hexágono no delgado retícula convexo contiene al menos dos puntos retícula en el interior.

*Demostración.* Si el hexágono tuviera exactamente un punto retícula en su interior, entonces debería ser equivalente al hexágono centralmente simétrico de la Figura 2.15.  $\square$

## II.2.1 El casco convexo interior

**DEFINICIÓN 2.11:** Sea  $K$  un cuerpo convexo en el plano. Entonces  $H(K)$  denota la frontera del casco convexo de los puntos retícula en el interior de  $K$ , diremos que  $H(K)$  es el *casco interior* de  $K$ .

Intuitivamente  $H$  es el polígono convexo retícula más grande contenido en  $K$ . En algunos casos dependiendo de  $K$ ,  $H$  puede degenerarse en un segmento, un punto o el conjunto

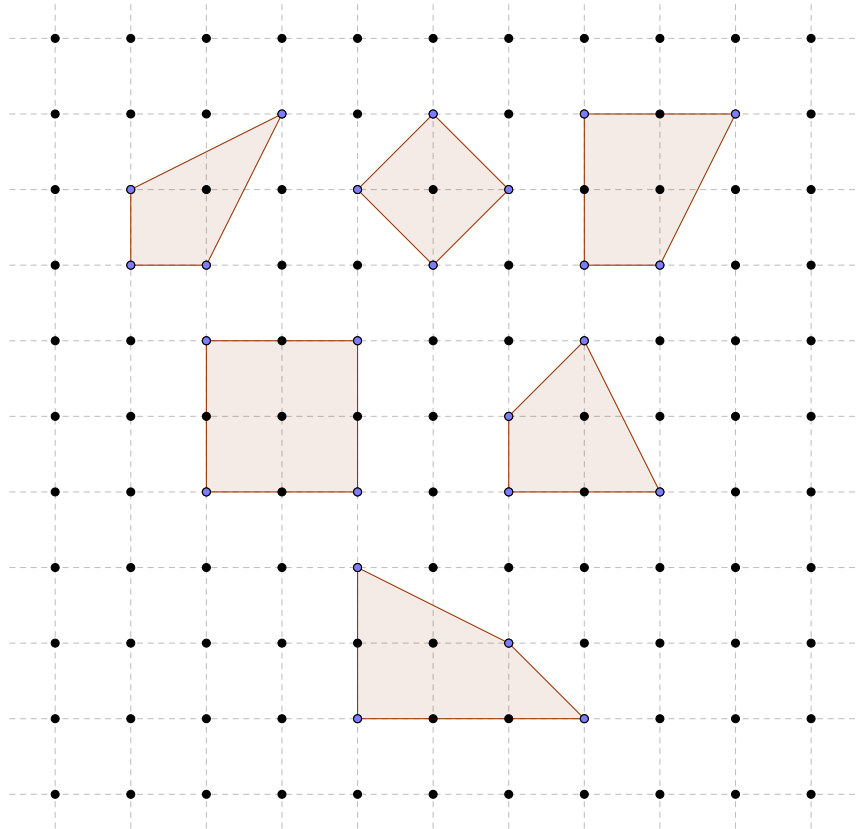


Figura 2.14: Los 5 cuadriláteros con un punto retícula en el interior

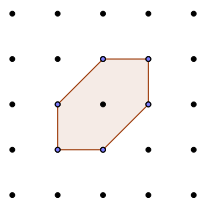


Figura 2.15: Hexágono centralmente simétrico

vacío pero cuando  $K$  tiene la suficiente cantidad de vértices se puede asegurar que  $H$  es un polígono como se muestra más adelante.

**DEFINICIÓN 2.12:** Sea  $K$  un polígono convexo retícula y  $AB$  una arista del mismo. Entonces  $h(AB)$  denota el semiplano abierto acotado por  $AB$  que no contiene a  $K$  (Figura 2.16).

**PROPOSICIÓN 2.4 (La restricción de los tres vértices):** Sea  $K$  un polígono convexo retícula y  $H$  el casco interior de  $K$ . Sea  $AB$  una arista de  $H$ . Entonces  $h(AB)$  contiene a lo más dos vértices de  $K$ .

*Demostración.* Suponga que  $h(AB)$  contiene 3 vértices de  $K$ , a saber  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Considere los cinco puntos:  $A$ ,  $B$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . El punto  $X$  no puede estar en el casco convexo de los otros cuatro, porque de ser así  $X$  sería un punto interior de  $K$  y no sería un vértice de  $K$ ,

análogamente lo mismo sucede para  $Y$  y  $Z$ . Así  $ABXYZ$  es un pentágono retícula sin puntos retícula en su interior, lo cual es una contradicción al Teorema del Pentágono Retícula.

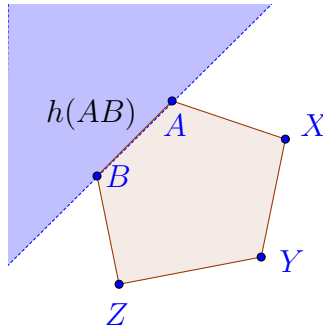


Figura 2.16

□

**TEOREMA 2.13:** Sea  $K$  un polígono retícula convexo y sea  $H = H(K)$ . Si  $v(K) \geq 7$ , entonces

$$v(K) \leq 2v(H).$$

*Demostración.* Dado que  $v \geq 7$ , los puntos retícula en el interior de  $K$  no son colineales. Por lo tanto, el casco interior forma un polígono. El número de aristas de éste polígono es a lo más  $v(H)$ . Por la Proposición 2.4 se tiene que por cada arista  $AB$  de  $H$ ,  $h(AB)$  contiene a lo más dos vértices de  $K$ . La unión de todos éstos semiplanos contiene a todos los vértices de  $K$ . Así el número total de vértices de  $K$  es a lo más  $2v(H)$ . Por lo tanto  $v(K) \leq 2v(H)$ . □

**COROLARIO 2.1:** Sea  $K$  un polígono retícula convexo con casco interior  $H$ . Si  $v(K) \geq 7$ , entonces

$$v(H) \geq \left\lceil \frac{1}{2}v(k) \right\rceil.$$

**PROPOSICIÓN 2.5:** Todo heptágono convexo retícula tiene al menos 4 puntos retícula en su interior. La igualdad se cumple en los polígonos que se muestran en la Figura 2.17.

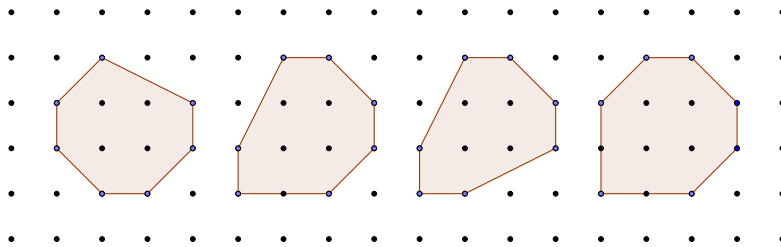


Figura 2.17

*Demostración.* Sean  $K$  un heptágono y  $H$  el casco interior de  $K$ , por el Corolario 2.1, se tiene que  $H$  debe tener al menos 4 vértices, por lo tanto  $K$  tiene al menos 4 puntos retícula en su interior los cuales no son colineales.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.6 (La condición del paralelo exterior):** Sea  $K$  un polígono convexo retícula con casco interior  $H$  y  $XY$  una arista de  $H$ . Si  $h(XY)$  contiene dos vértices de  $K$ , a saber,  $A$  y  $B$ , entonces  $AB \parallel XY$ .

*Demostración.* Primero, por el Teorema 2.13,  $h(XY)$  contiene a lo más dos vértices de  $K$ . Dado que  $ABXY$  es un cuadrilátero que no contiene puntos retícula en su interior, debe ser un trapecio por el Teorema del Trapecio Retícula. Si  $AB$  no es paralelo a  $XY$ , entonces se tiene que  $AY \parallel BX$ . Por el Teorema 2.10, se puede ver que habría un punto retícula, ya sea en  $AY$  o  $BX$ . Así  $AB \parallel XY$ .  $\square$

La línea  $AB$  es la línea más cercana al segmento  $XY$ . Los Teoremas y Proposiciones anteriores acotan la región donde pueden estar los vértices de un polígono  $K$  convexo retícula con relación a su casco interior  $H$ . En particular todos los vértices de  $K$  están en las rectas paralelas a los lados de  $H$  más cercanas a  $K$  que contienen puntos retícula y que no pertenecen a  $H$ .

### II.3. Resultados

**DEFINICIÓN 2.13:** Sea  $K$  un polígono convexo en  $\mathbb{R}^2$  con  $v_1, v_2, \dots, v_n$  como vértices. Llamamos regiones vértice a las regiones definidas como  $X_i = h(v_{i-1}, v_i) \cap h(v_i, v_{i+1})$  con  $i$  impar y región arista a las regiones  $X_i = h(v_{i-1}, v_i) \setminus (X_{i-1} \cup X_{i+1})$  para  $i$  par (figura 2.18).

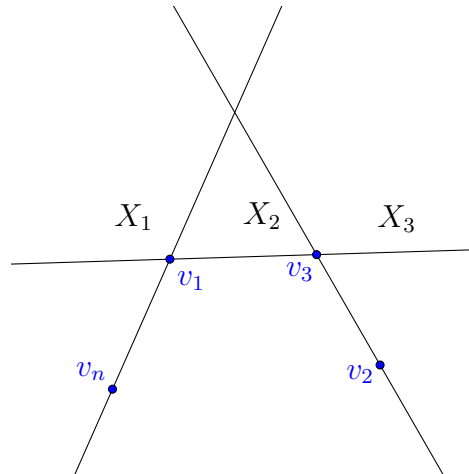


Figura 2.18: Regiones vértice ( $X_1, X_3$ ) y arista( $X_2$ )

**OBSERVACIÓN 2.1:** Las regiones vértice no pueden contener más de un vértice de  $K$ . Para probar esto suponga que existe alguna región vértice  $X_i = h(v_{j-1}, v_j) \cap h(v_j, v_{j+1})$  tal que

contiene dos vértices de  $K$ , suponga que  $u_i, u_{i+1} \in h(v_{j-1}, v_j) \cap h(v_j, v_{j+1})$ , por un lado, de ser así, por la Proposición 2.6 se tiene que el segmento que une a  $u_i$  y  $u_{i+1}$  debe ser paralelo a la recta que contiene a los puntos  $v_{j-1}, v_j$ , ya que  $u_i, u_{i+1} \in h(v_{j-1}, v_j)$ . Por otro lado el segmento que une a  $u_i$  y  $u_{i+1}$  también debe ser paralelo a la recta que contiene a los vértices  $v_j, v_{j+1}$ , pues  $u_i, u_{i+1} \in h(v_j, v_{j+1})$ . Como consecuencia de lo anterior la intersección de dos regiones vértice a lo más contiene un vértice de  $K$ .

La última observación implica que con el Teorema 2.13 es posible contar la cantidad máxima de vértices que puede haber en las regiones vértice de un polígono retícula convexo.

**PROPOSICIÓN 2.7:** Sea  $K$  un polígono convexo retícula de  $n$  vértices. El número máximo de vértices de  $K$  que puede haber en la unión de las regiones vértice esta acotado de la siguiente manera

$$n_v \leq 2v(H) - v(K) \quad (2.4)$$

*Demostración.* Por la Proposición 2.4 se tienen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 &\leq 2 \\ &\vdots \\ x_{m-1} + x_m + x_1 &\leq 2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\sum x_i \geq v(K). \quad (2.6)$$

Donde  $x_i = |X_i \cap \mathbb{Z}^2|$ ,  $m = 2v(H)$ . El sistema 2.5 implica que

$$2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_{2i+1} \right) + \sum_{i=1}^n x_{2i} \leq 2m = 2v(H) \quad (2.7)$$

y restando la ecuación 2.6 de la ecuación 2.7 se tiene que

$$\sum_{i=1}^n x_{2i} \leq 2v(H) - v(K)$$

lo cual es la desigualdad deseada.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.8 (La anomalía del nonágono):** Un nonágono retícula convexo puede tener 7 o 10 puntos retícula interiores, pero no puede tener 8 ni 9 puntos retícula en su interior.

*Demostración.* Sea  $K$  un nonágono convexo retícula con 8 puntos retícula en su interior y  $H$  el casco interior de  $K$ . Por el Teorema 2.13 se tiene que  $H$  está formado por al menos 5 vértices.

Como primer caso suponga que  $H$  es un pentágono, considerando los cinco semiplanos  $h(AB)$  generados por cada una de las aristas de  $H$ , sean  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  las regiones que comparten al menos una arista con  $H$  o un vértice (ver Figura 2.19).

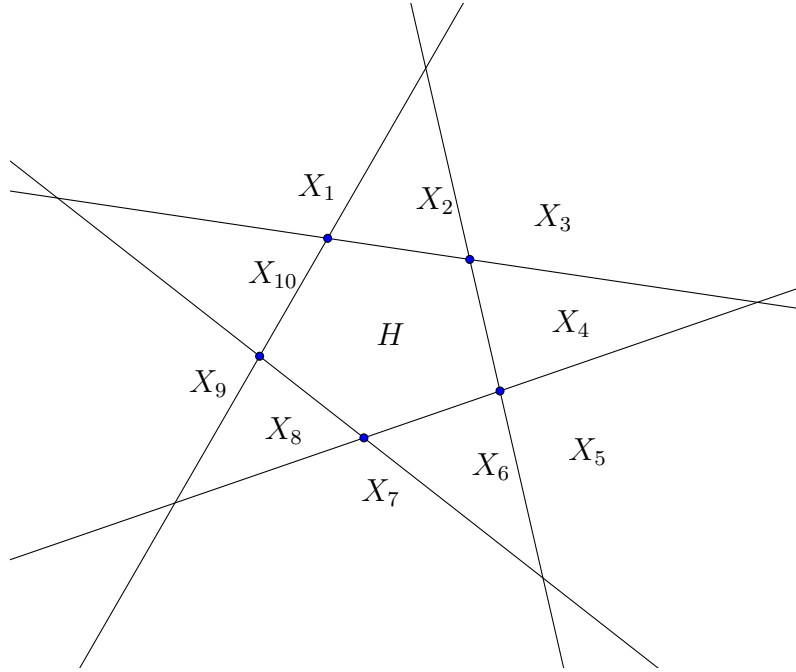


Figura 2.19

Ahora, por la Proposición 2.7 se tiene que la cantidad de vértices de  $K$  que pueden estar en la regiones vértice que rodean a  $H$  queda acotada como sigue:

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 \leq 1$$

esto último implica que al menos tres de las regiones  $X_2, X_4, X_6, X_8, X_{10}$  contienen a dos vértices de  $K$ . Dado que  $H$  es un pentágono, por el Teorema del Pentágono Retícula,  $H$  contiene al menos un punto retícula en su interior, de ocurrir el caso en el que  $H$  sólo tiene un punto retícula en su interior, los dos puntos restantes deben estar en aristas de  $H$  entonces a lo más dos de las aristas que separan el interior de  $H$  de las regiones arista  $X_i$  que tienen dos vértices de  $K$ , contienen un punto retícula, dejando así al menos una arista sin puntos retícula. Sin pérdida de generalidad suponga que  $X_2$  es dicha región, sea  $AB$  la arista de  $H$  tal que  $h(AB)$  contiene a la región  $X_2$  y denote como  $X$  y  $Y$  a los vértices de  $K$  que pertenecen a la región  $X_2$ , entonces los puntos  $A, B, X, Y$  y el punto retícula en el interior de  $H$  más cercano a la arista  $AB$  forman un pentágono convexo retícula vacío lo cual es una contradicción al Teorema del Pentágono retícula.

El segundo caso es que  $H$  sea un hexágono con vértices  $ABCDEF$ , si  $H$  es un hexágono, los dos puntos retícula restantes en  $H$  deben estar en su interior, pues de no ser así,  $H$  sólo tendría un punto retícula en su interior, y debería ser equivalente al pentágono centralmente simétrico lo cual es una contradicción (Proposición 2.3).

Sean  $X$  y  $Y$  los puntos retícula en el interior de  $H$  y  $l$  la recta que los contiene. La recta  $l$  contiene a lo más dos vértices de  $K$ . Se analizará el caso en el que la recta  $l$  contiene dos vértices de  $K$  y además hay dos vértices de  $H$  en cada uno de los dos semiplanos generados por la recta  $l$ , los casos en lo que  $l$  no contiene vértices de  $H$  son fáciles de estudiar. Por la

Proposición 2.7 se tiene que:

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11} \leq 3$$

y por consiguiente

$$x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} \geq 5.$$

Sin pérdida de generalidad, suponga que la recta  $l$  contiene a los vértices  $A$  y  $D$  que pertenecen a  $H$ . Si la región arista que contiene a la arista  $BC$  como parte de su frontera contiene algún punto retícula, entonces dicho punto y los puntos  $CYXB$  forman un pentágono retícula vacío, lo cual es una contradicción al Teorema del Pentágono Retícula. Ocurre el mismo caso si la región que tiene a la arista  $FE$  contiene algún punto retícula (Figura 2.20).

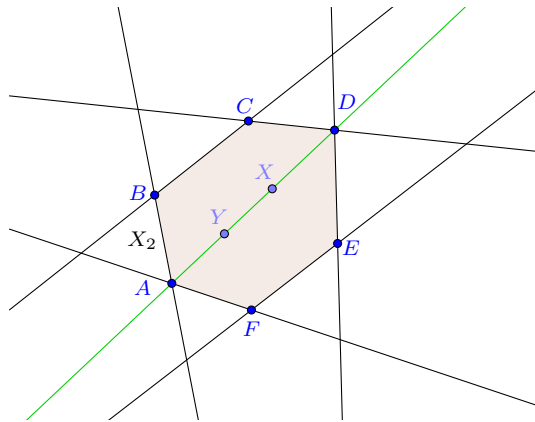


Figura 2.20

Ahora suponga que ninguna de las regiones anteriormente mencionadas contienen puntos retícula. De ser así la unión de las 4 regiones restantes que contienen una arista de  $H$  en su frontera deben contener al menos 5 vértices de  $K$ , lo cual implica que al menos una región de éstas contiene dos vértices de  $K$ . Suponga que la región  $X_2$  es la que contiene dos vértices de  $K$ , por lo tanto estos dos vértices, el vértice  $A$ , el punto retícula más cercano a la arista  $AB$  en interior de  $H$  y el punto  $B$ , forman un pentágono retícula vacío, lo cual implica una contradicción al Teorema del Pentágono Retícula.

Y así se concluye que un nonágono retícula no puede tener 8 puntos retícula en su interior ya que si  $H$  fuera un heptágono,  $H$  tendría que estar conformado por al menos 11 puntos retícula entre vértices y puntos retícula en el interior, esto último por el Teorema 2.5.

Ahora, suponga que  $K$  tiene 9 puntos retícula en su interior. Para el caso en que  $H$  es un pentágono, de los puntos retícula en el interior de  $K$  que no pertenecen a  $v(H)$  a lo más dos pueden estar en la frontera de  $H$ , ya que de ser así tomando dos puntos retícula en el interior de aristas consecutivas, se puede construir un hexágono no delgado y por lo tanto con dos puntos retícula en su interior. Por la Proposición 2.7, se concluye que al menos hay una región arista  $X_i$  que contiene dos vértices de  $K$  y que no contiene puntos retícula. Sea  $AB$  dicha arista,  $C$  y  $D$  los vértices  $K$  que pertenecen a  $X_i$  y  $X$  el punto retícula más cercano a la



arista  $AB$  en el interior de  $H$ , entonces el polígono  $XACDB$  es un pentágono vacío lo cual contradice el Teorema del Pentágono Retícula.

Para el caso en el que  $H$  es un hexágono, por la Proposición 2.7 se puede ver que al menos existen dos regiones arista las cuales contiene dos vértices de  $K$  respectivamente. De los puntos retícula en el interior de  $K$  que no son vértices de  $H$ , a lo más uno puede estar en la frontera de  $H$  porque si  $H$  tiene un punto retícula que no es vértice en la frontera, entonces  $H$  es un hexágono no delgado y por consiguiente  $H$  tiene al menos dos puntos retícula en el interior. Entonces aún resta una arista  $AB$  cuya región arista  $X_i$ , y por lo tanto, tomando el cierre convexo de estos vértices en  $K$ ,  $AB$  y el punto  $z$  en el interior de  $H$  más cercano a la arista  $AB$ , se tiene un pentágono retícula vacío, lo cual es una contradicción al Teorema del Pentágono Retícula.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.9:** No existe decágono convexo retícula con once puntos retícula en su interior.

*Demostración.* Por contradicción, suponga que existe un decágono retícula convexo  $K$ , con once puntos retícula en el interior. Por el Corolario 2.1 se tiene que

$$v(H) \geq \left\lceil \frac{1}{2}v(K) \right\rceil \Rightarrow v(H) \geq 5$$

por lo tanto se tienen tres casos, que  $H$  sea pentágono, hexágono o heptágono.

Para el caso en el que  $H$  es un pentágono, por la Proposición 2.7 se tiene que

$$2v(H) - v(K) = 0,$$

luego, las regiones vértice en esta configuración no contienen vértices de  $K$ , las cinco regiones arista alrededor de  $H$  tienen dos vértices de  $K$  cada una. Por otro lado de los seis puntos retícula en el interior de  $K$  que no son vértices de  $H$ , uno de ellos está obligado a pertenecer al interior de  $H$  por el Teorema del Pentágono Retícula, además, no puede ocurrir que todos los puntos retícula restantes pertenezcan a aristas de  $H$  pues de ser así, se puede formar un hexágono no delgado con un sólo punto retícula en el interior, lo cual es una contradicción al Teorema 2.12 (hexágono gordo). Por lo tanto se concluye que existe al menos una arista sin puntos retícula en el interior, sea  $AB$  dicha arista, entonces el cierre convexo de los vértices de  $K$  que pertenecen a  $h(AB)$ , los puntos  $A$ ,  $B$  y el punto retícula en el interior de  $H$  más cercano a la arista  $AB$ , forma un pentágono convexo retícula vacío, lo cual es una contradicción al Teorema del Pentágono Retícula.

Suponga ahora que  $H$  es un hexágono, entonces

$$2v(H) - v(K) = 2,$$

esto implica que las regiones vértice contienen a lo más 2 puntos retícula que son vértices de  $K$ , luego existen a lo más tres regiones arista que contienen menos de dos vértices de  $K$ , como se muestra en la Figura 2.21a.

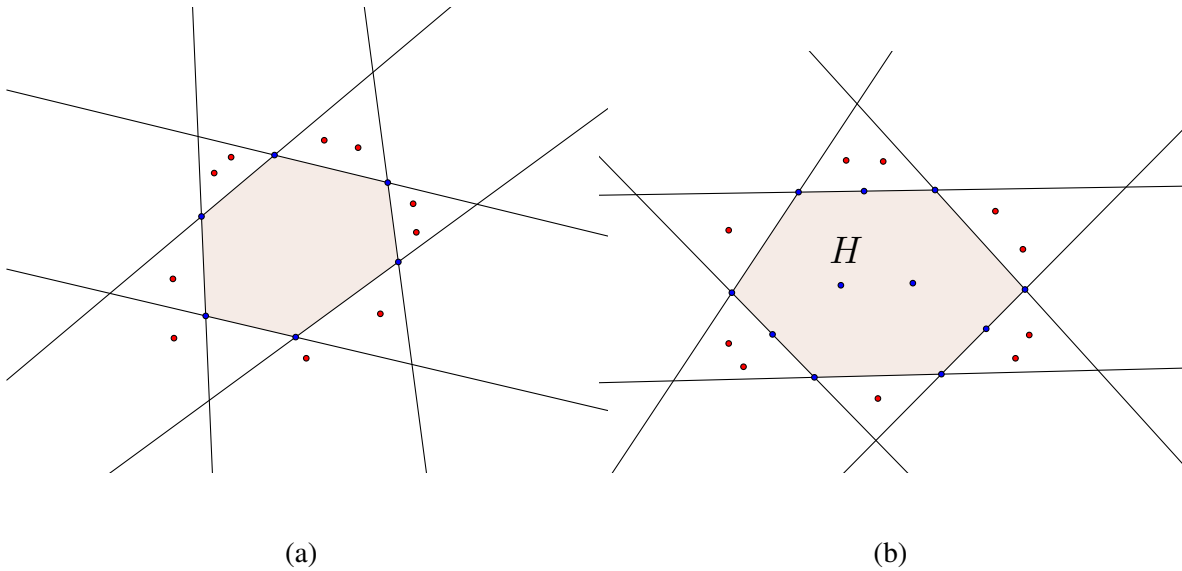


Figura 2.21

El caso interesante es cuando  $H$  tiene puntos retícula en las aristas, por lo tanto si  $H$  tiene puntos retícula en las aristas,  $H$  tiene al menos dos puntos retícula en el interior. Hasta aquí se ha determinado que 8 de los 11 puntos retícula en el interior de  $K$ , tienen una posición obligada. Los tres puntos restantes no pueden estar en aristas consecutivas de  $H$  pues de existir aristas consecutivas con puntos retícula en el interior, uniendo estos dos puntos con un segmento se obtiene un heptágono el cual está obligado a contener al menos cuatro puntos retícula en su interior (Prop. 2.5).

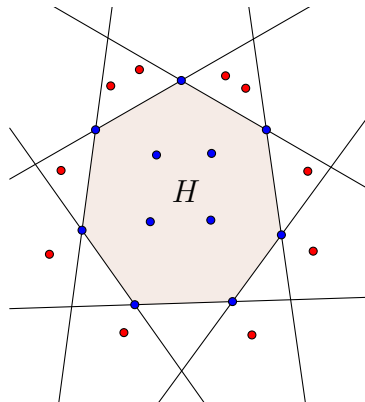


Figura 2.22

Por otro lado debe haber al menos dos regiones arista consecutivas que contengan dos vértices de  $K$  en su interior y por ende alguna de estas dos regiones arista no tiene punto retícula en la arista  $AB$  que separa a la región vértice del polígono  $H$  entonces es posible construir un pentágono retícula vacío tomando el cierre convexo de los dos vértices que  $K$  que están en la región  $h(AB)$ , los vértices  $A$ ,  $B$  y el punto retícula en el interior de  $H$  más cercano a la arista  $AB$ , lo cual es una contradicción.

Si no hay regiones arista consecutivas, no habría regiones vértice con puntos retícula en el interior y se tendrían al menos 4 regiones arista con dos puntos retícula en el interior, y por lo tanto al menos una arista de  $H$  libre de puntos retícula y procediendo análogamente al caso anterior se puede construir un pentágono retícula sin puntos retícula en el interior.

Para el caso en el que  $H$  es un heptágono, por la Proposición 2.5 se tiene que  $H$  está obligado a contener al menos 4 puntos retícula en su interior, por lo tanto todas las aristas de  $H$  son libres de puntos retícula.

Por otro lado también se tiene que

$$2v(H) - v(K) = 4$$

y por lo tanto existen al menos dos regiones arista con dos vértices de  $K$ , las cuales generan una contradicción como en los casos anteriores.  $\square$

### III. CONCLUSIONES

En esta tesis se investigaron algunas generalizaciones del teorema de Doignon que se refieren a versiones cuantitativas del mismo, en particular se estudió la versión cuantitativa de este teorema dada por Aliev et al. (2014). Como se discutió en la introducción, es relevante entender las condiciones necesarias y suficientes para que exista un polígono  $k$ -retícula convexo, dado un número específico de puntos en el interior. De esta manera, a lo largo de este trabajo se presentó un estudio sobre las condiciones necesarias para la existencia de polígonos  $k$ -retícula, con un número específico de puntos retícula en el interior. En particular se investigó lo que se conocía al respecto hasta ese momento, con particular interés en el artículo de Rabinowitz (1990) el cual centra su atención en determinar la mínima cantidad de puntos retícula que un polígono retícula convexo puede tener en su interior, obteniendo resultados precisos únicamente hasta el caso del octágono. En esa misma dirección en esta tesis se trabajaron casos más específicos, incluyendo la no existencia de las anomalías de los triángulos, llegando hasta el caso de los decágonos determinando la cantidad exacta desde la cual siempre existe un polígono  $k$ -retícula para un  $k$  dado, donde para demostrar esto se propuso una metodología constructiva para cada una de los polígonos, dada la cantidad de lados y la cantidad deseada de puntos retícula en el interior.

A su vez se logró probar la conjetura de la anomalía del nonágono, así como también la no existencia de un decágono con 11 puntos retícula en su interior, todo esto usando y completando las ideas propuestas por Rabinowitz relacionadas al casco convexo de un polígono retícula. Un aporte esencial en el presente trabajo es la forma de contar la cantidad de vértices que puede haber en cada una de las regiones arista y regiones vértices que se encuentran alrededor de cada polígono, permitiendo encontrar contradicciones en relación a la existencia de los polígonos que se conjeturaba no existían.

Más aún como se mencionó en la introducción, el problema general es caracterizar los polígonos retícula y proporcionar más condiciones geométricas y combinatorias que ayuden a la optimización del algoritmo de búsqueda exhaustiva, para los polígonos  $k$ -retícula desarrollado por Flores et al. (a). Con relación a esto último Rabinowitz conjetura que la cantidad mínima de puntos retícula que un polígono puede tener en el interior, tiene un crecimiento de orden cúbico en función de la cantidad de vértices de dicho polígono. Probar esta conjetura será el objetivo para futuros trabajos además de que con los resultados obtenidos en esta tesis se puede conjeturar que si  $k$  es la mínima cantidad de puntos retícula que puede tener un polígono de  $v$  vértices en su interior, entonces no existe polígono con  $v$  vértices y  $k + 1$  puntos retícula en el interior.



**Parte I**

**Apéndice**



### III.1. Teorema generalizado de Doignon-Bell-Scarff

**DEFINICIÓN 3.1:** Sea  $X$  un conjunto finito de  $\mathbb{Z}^n$ . Diremos que  $X$  satisface la **propiedad de hiperplano soporte**, si para cada  $y \in X$ , existe un semiespacio  $f^T x \leq g$  tal que  $f^T y = g$  y  $f^T z < g$  para todo  $z \in X$ ,  $z \neq y$ . Además decimos que  $f^T x \leq g$  cumple la propiedad de hiperplano soporte para  $y$ .

Cabe mencionar que si un conjunto  $X$  de puntos cumple la propiedad del hiperplano soporte implica que al tomar el  $K = \mathbf{conv}(X)$ , todos los puntos en  $X$  son vértices de  $K$ .

**LEMA 3.1:** Considere un conjunto finito  $X \subset \mathbb{Z}^n$  con  $|X| \geq 2^n + 1$  que satisface la propiedad del hiperplano soporte; es decir, que para cada elemento  $y_i \in X$ , existe un semiespacio  $f_i^T x \leq g_i$  tal que  $f_i^T y_i = g_i$  y  $f_i^T y_j < g_i$  para  $i \neq j$ . Entonces existe un punto entero  $z \in (\mathbb{Z}^n \cap \mathbf{conv}(X)) \setminus X$  que satisface  $f_i^T z < g_i$ .

*Demostración.* Dado que  $|X| \geq 2^n + 1$ , por el principio del palomar, existen  $y_{i_1}, y_{i_2} \in X$  con  $y_{i_1} \neq y_{i_2}$  y  $y_{i_1} \equiv y_{i_2} \pmod{2}$ , es decir, cada entrada de  $y_{i_1}$  y  $y_{i_2}$  son de paridad igual, esto último es debido a que cada vector tiene  $n$  entradas y cada entrada tiene únicamente dos posibilidades, ser par o impar entonces en  $2^n$  puntos se tienen todas las combinaciones de las secuencias par-impar, por lo tanto en conjuntos de cardinalidad mayor a  $2^n$  se tiene que al menos una secuencia par impar se ha repetido. Por lo tanto  $z = \frac{1}{2}(y_{i_1} + y_{i_2}) \in \mathbb{Z}^n$ . Además, ya que  $X$  satisface la propiedad del hiperplano soporte se puede asegurar que  $z \notin X$ .

□

**LEMA 3.2:** Considere un conjunto finito  $X \subset \mathbb{Z}^n$  que satisface la propiedad del hiperplano soporte. Sea  $z \in \mathbf{conv}(X) \cap \mathbb{Z}^n$ ,  $z \notin X$ . Existen subconjuntos disjuntos  $X_1, X_2 \subset X$ , con  $X_1 \cup X_2 = X$  tal que  $X_1 \cup \{z\}$  y  $X_2 \cup \{z\}$  satisfacen la propiedad del hiperplano soporte.

*Demostración.* Existe un hiperplano  $\bar{f}^T x = \bar{g}$  tal que  $\bar{f}^T z = \bar{g}$  pero la igualdad no se satisface para ningún  $y_i \in X$  ya que de no ser así existiría un punto en  $X$  para cada hiperplano que contenga a  $z$ , lo cual implicaría que  $X$  tiene una cantidad infinita de puntos, contradiciendo el hecho de que  $X$  es finito. Entonces es posible separa el conjunto  $X$  como sigue,

$$X_1 = X \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{f}^T x < \bar{g}\} \text{ y } X_2 = X \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{f}^T x > \bar{g}\}.$$

Como  $z$  se tomó en el interior del cierre convexo de  $X$ ,  $z$  no está en alguno de los hiperplanos soporte correspondientes a cada  $y_i$ ; además, dado que existe  $\bar{f}^T x = \bar{g}$ ,  $z$  también cumple la propiedad del hiperplano soporte, por lo tanto  $X_1 \cup \{z\}$  tiene la propiedad del hiperplano soporte. Análogamente se concluye que  $X_2$  tiene la propiedad de hiperplano soporte.

□



**LEMA 3.3:** Considere un conjunto finito  $X \subset \mathbb{Z}^n$  que satisface la propiedad del hiperplano soporte. Supongase  $z_1, z_2 \in \mathbf{conv}(X) \cap \mathbb{Z}^n$  con  $z_1, z_2 \notin X$  y  $z_1 \neq z_2$ . Entonces existen subconjuntos disjuntos  $X_1, X_2 \subseteq X$  con  $|X_1| + |X_2| \geq |X| - 2$  tal que  $X_1 \cup \{z_1, z_2\}$  y  $X_2 \cup \{z_1, z_2\}$  tienen la propiedad del hiperplano soporte.

*Demostración.* Dado que  $X$  satisface la propiedad del hiperplano soporte, la recta  $L$  que contiene a  $z_1$  y  $z_2$  se intersecta con a lo mas dos puntos de  $X$ . Como consecuencia existe un hiperplano  $\bar{f}^T x = \bar{g}$  con  $\bar{f}^T z_1 = \bar{f}^T z_2 = \bar{g}$  que contiene a la recta  $L$  y por consiguiente a lo más dos puntos de  $X$ . Ahora se puede separar al conjunto  $Y = X \setminus (X \cap L)$  en dos conjuntos como sigue,

$$X_1 = Y \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{f}^T x < \bar{g}\} \text{ y } X_2 = Y \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{f}^T x > \bar{g}\}.$$

Claramente  $|X_1| + |X_2| \geq |X| - 2$ . Por hipótesis se tiene que existe un hiperplano que cumple la propiedad de hiperplano soporte para cada  $y \in X$  solo falta ver que también existe un hiperplano que cumple la propiedad para  $z_1$  y  $z_2$  respectivamente. Por construcción ningún punto de  $X_1$  o de  $X_2$  está en el hiperplano  $\bar{f}^T x = \bar{g}$ , entonces aplicando una rotación lo suficientemente pequeña se puede obtener un hiperplano soporte  $\bar{f}_1^T x = \bar{g}_1$  tal que  $\bar{f}_1^T z_1 = \bar{g}_1$  y  $\bar{f}_1^T y < \bar{g}_1$  para cualquier punto  $z \in X \cup \{z_2\}$ , entonces el hiperplano construido cumple la propiedad de hiperplano soporte para  $z_1$  en  $X_1 \cup \{z_1, z_2\}$ . De la misma manera se construye el hiperplano que cumple la propiedad de hiperplano soporte para  $z_1$  en  $X_2 \cup \{z_1, z_2\}$  y para  $z_2$  en  $X_i \cup \{z_1, z_2\}$ ,  $i = 1, 2$ .

□

**LEMA 3.4:** Sea  $n \geq 2$  y  $k$  un natural. Considere el conjunto finito  $X \subset \mathbb{Z}^n$  y supóngase que satisface la propiedad de hiperplano soporte. Si la cardinalidad  $|X| \geq k2^n - 2k + 3$ , entonces existen por lo menos  $\lfloor 3k/2 \rfloor$  puntos enteros diferentes entre sí en  $\mathbf{conv}(X) \setminus X$ .

*Demostración.* La demostración se hará por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 1$ , el resultado se sigue del Lema 3.1, ya que por hipótesis tenemos que

$$|X| \geq 2^n - 2 + 3 = 2^n + 1.$$

Ahora supóngase que el resultado es válido para  $k - 1$ , por demostrar que también es válido para  $k \geq 2$ . Suponiendo también que  $|X| \geq k2^n - 2k + 3$ , se tiene que

$$2^n + 1 < k(2^n + 1) + 3(k - 1) \leq |X|$$

por lo tanto en éste caso también se cumplen las hipótesis del Lema 3.1; luego existe  $z_1 \in \mathbb{Z}^n$  en  $\mathbf{conv}(X) \setminus X$ .

Aplicando el Lema 3.2; dado que existe  $z_1$ , el conjunto  $X$  se puede separar en  $X_1, X_2 \subset X$  con  $X_1 \cup X_2 = X$  tal que  $X_1 \cup \{z_1\}$  y  $X_2 \cup \{z_1\}$  satisfacen la propiedad del hiperplano soporte.

Supóngase sin pérdida de generalidad que  $|X_2| \geq |X_1|$ . Dado que  $X_1, X_2$  son disjuntos,  $X_2$  tiene cardinalidad al menos  $\left\lceil \frac{|X|}{2} \right\rceil \geq 2^n$ , ya que  $k \geq 2$ . Por el Lema 3.1 aplicado a  $X_2 \cup \{z_1\}$ , existe un punto  $z_2 \in \mathbb{Z}^n$  en  $\mathbf{conv}(X \cup \{z_1\}) \setminus (X \cup \{z_1\})$ , note que  $z_1 \neq z_2$ .

Luego, por el Lema 3.3 aplicado a  $X$  y a los puntos construidos  $z_1, z_2$ ; existen conjuntos disjuntos  $X_1, X_2 \subset X$  con  $|X_1| + |X_2| \geq |X| - 2$  tal que  $X_1 \cup \{z_1, z_2\}$  y  $X_2 \cup \{z_1, z_2\}$  satisfacen la propiedad del hiperplano soporte. Existe la posibilidad de que alguno de los conjuntos sea vacío, a saber  $X_1$ , entonces  $|X_2 \cup \{z_1, z_2\}| = |X|$ , siendo así es posible aplicar el Lema 3.3 a  $X_2 \cup \{z_1, z_2\}$  reemplazando a  $X$  hasta que los puntos estén en el interior, después de un número finito de reemplazos se obtienen  $X_1$  y  $X_2$  no vacíos ambos ya que  $\mathbf{conv}(X)$  es acotado.

Supóngase sin pérdida de generalidad que  $0 < |X_1| \leq |X_2|$ . Se consideraran los siguientes dos casos:

1. Supóngase que existe  $l \in \mathbb{Z}^n$  con  $1 \geq l \geq k$  tal que

$$(l-1)2^n - 2(l-1) + 1 \leq |X_1| \leq l2^n - 2l. \quad (3.1)$$

Dado que  $X_1$  y  $X_2$  son subconjuntos ajenos de  $X$  con  $|X_1| + |X_2| \geq |X| - 2$  así como también  $|X| \geq k2^n - 2k + 3$ , de la cota superior en 3.1 se sigue que

$$\begin{aligned} |X_2| &\geq k2^n - 2k + 1 - l2^n + 2l \\ &= (k-l)2^n - 2(k-l) + 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Usando 3.2, se tiene que

$$|X_1 \cup \{z_1, z_2\}| \geq (l-1)2^n - 2(l-1) + 3,$$

lo cual implica; por hipótesis de inducción, que existen  $\lfloor 3(l-1)/2 \rfloor$  puntos enteros en  $\mathbf{conv}(X_1 \cup \{z_1, z_2\}) \setminus (X_1 \cup \{z_1, z_2\})$ . Usando 3.2, se tiene que

$$|X_2 \cup \{z_1, z_2\}| \geq (k-l)2^n - 2(k-l) + 3$$

lo cual; por hipótesis de inducción, implica que existen  $\lfloor 3(k-l)/2 \rfloor$  puntos enteros adicionales en  $\mathbf{conv}(X_2 \cup \{z_1, z_2\}) \setminus (X_2 \cup \{z_1, z_2\})$ . Contando  $z_1$  y  $z_2$  se concluye que existen

$$\lfloor 3(l-1)/2 \rfloor + \lfloor 3(k-l)/2 \rfloor + 2 \geq \lfloor 3k/2 \rfloor$$

puntos enteros en el interior de  $\mathbf{X} \setminus X$ .

2. Supóngase que  $|X_1| \geq k2^n - 2k + 1$ . Entonces ambos conjuntos  $X_1 \cup \{z_1, z_2\}$  y  $X_2 \cup \{z_1, z_2\}$  tienen cardinalidad al menos  $k2^n - 2k + 1$  y análogamente como en el caso anterior el Teorema se cumple para este caso dada la hipótesis de inducción.

□

El Teorema 1.4 puede ser enunciado de la siguiente forma equivalente:

**TEOREMA 3.1:** Dados  $n, k$  dos enteros no negativos, existe una constante universal  $c(n, k)$ ; que depende solo de  $n, k$ , tal que para cada matriz entera de dimensiones  $m \times n$  denotada por  $A$  y un  $m$ -vector  $b$ . Si el politopo  $\{x : Ax \leq b\}$  tienen exactamente  $k$  soluciones enteras, entonces existe un subconjunto  $S$  de las columnas de  $A$  con cardinalidad no mayor que  $c(n, k)$ , con la propiedad de que el politopo  $\{x : A_S x \leq b\}$  tiene exactamente  $k$  soluciones enteras en  $\{x : Ax \leq b\}$ , con

$$c(n, k) = \left\lceil \frac{2(k+1)}{3} \right\rceil 2^n - 2 \left\lfloor \frac{2(k+1)}{3} \right\rfloor + 2.$$

*Demostración.* La demostración se sigue por contradicción. Considere un sistema de  $m$  desigualdades lineales,

$$a_1 x \geq \beta_1, a_2 x \geq \beta_2, \dots, a_m x \geq \beta_m. \quad (3.3)$$

Supóngase que el sistema 3.3 tiene exactamente  $k$  soluciones enteras, y que  $m \geq \lceil 2(k+1)/3 \rceil 2^n - 2 \lfloor 2(k+1)/3 \rfloor + 3$ . Supóngase que éste es un ejemplo crítico, es decir, si se elimina cualquiera de las desigualdades en 3.3, el sistema restante tiene al menos  $k+1$  soluciones enteras.

Esta suposición implica que existen vectores con entradas enteras  $x_1, \dots, x_m$  tal que  $x_j$  no satisface  $a_j x \geq \beta_j$ , pero satisface todas las demás desigualdades en 3.3. Considere el conjunto de puntos

$$H = \mathbf{conv}\{x_1, \dots, x_m\} \cap \mathbb{Z}^n. \quad (3.4)$$

Ahora se asociará un nuevo sistema crítico a 3.3 desplazando hiperplanos, de tal manera que no aumente la cantidad de soluciones enteras. Considere el conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$  de vectores  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$  tal que

$$\gamma_j \geq \min\{a_j z : z \in H, a_j z > \beta_j\} \quad (3.5)$$

**PROPOSICIÓN 3.1:** El sistema  $a_1 x < \gamma_1, a_2 x < \gamma_2, \dots, a_m x < \gamma_m$  tiene exactamente  $k$  soluciones enteras en  $H$ .

*Prueba de la proposición.* El conjunto  $\Gamma$  es no vacío, pues al menos la igualdad se cumple en el sistema de desigualdades 3.5 con el punto que se agrega al no considerar una de las desigualdades. Nótese que el sistema descrito en la proposición 3.1 tiene exactamente las mismas soluciones enteras que 3.3 tomando los  $\gamma_j$  que alcanzan la igualdad en 3.5.

Obsérvese también que el conjunto  $\Gamma$  es acotado, porque de no ser así  $\gamma_j$  podría crecer arbitrariamente grande para alguna  $j$ , y entonces existiría  $z \in H$  que satisface  $a_1 x < \gamma_1, a_2 x < \gamma_2, \dots, a_m x < \gamma_m$ , lo cual implica que  $z$  es una solución entera del sistema, lo cual implica una contradicción.

Ahora, aplicando el Lema 3.4 es posible concluir que debe haber al menos

$$\left\lfloor \frac{2}{3} \left\lceil \frac{2(k+1)}{3} \right\rceil \right\rfloor$$

puntos retícula en el interior de  $H$ . Observe que esta última ecuación es a a  $k + 1$  si  $k$  es congruente con 0 o 2 modulo 3 e igual a  $k + 2$  si  $k$  es congruente a 1 modulo 3. Por lo tanto existen al menos  $k + 1$  puntos de coordenadas enteras en  $H$ , lo cual es una contradicción.

□



## BIBLIOGRAFÍA

- M. Aigner, G. M. Ziegler, K. H. Hofmann, and P. Erdos. *Proofs from the Book*, volume 274. Springer, 2010.
- I. Aliev, J. A. D. Loera, and Q. Louveaux. Integer programs with prescribed number of solutions and a weighted version of doignon-bell-scarf's theorem. In J. Lee and J. Vygen, editors, *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, number 8494 in Lecture Notes in Computer Science, pages 37–51. Springer International Publishing, Jan. 2014. ISBN 978-3-319-07556-3, 978-3-319-07557-0. URL [http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-07557-0\\_4](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-07557-0_4).
- K. L. Clarkson. Las vegas algorithms for linear and integer programming when the dimension is small. *J. ACM*, 42(2):488–499, Mar. 1995. ISSN 0004-5411. doi: 10.1145/201019.201036. URL <http://doi.acm.org/10.1145/201019.201036>.
- D. B. Coleman. Stretch: A Geoboard Game. *Mathematics Magazine*, 51(1):49–54, Jan. 1978. ISSN 0025-570X. doi: 10.2307/2689646. URL <http://www.jstor.org/stable/2689646>.
- L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee. Helly's theorem and its relatives, 1963.
- J.-P. Doignon. Convexity in cristallographical lattices. *Journal of Geometry*, 3(1):71–85, Mar. 1973. ISSN 0047-2468, 1420-8997. doi: 10.1007/BF01949705. URL <http://link.springer.com/article/10.1007/BF01949705>.
- A. Flores, L. Ferrer, C. Garcia, J. De Loera, and L. H. R. Classification of  $k$ -lattice polygons. a.
- A. Flores, L. Ferrer, C. Garcia, J. De Loera, and L. H. R. Classification of 1-lattice polihe-drons. b.
- M. Pomezzi. A geometrical method for finding an explicit formula for the greatest common divisor. *The American mathematical monthly*, 104(5):445, 1997.
- S. Rabinowitz. On the number of lattice points inside a convex lattice  $n$ -gon. 1990.
- R. Wenger. *Helly-type Theorems and Geometric Transversal Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton) Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, RFL, 2004.

G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Number 152 in Graduate texts in Mathematics. Springer, New York, 1995.