Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Algunos textos de Trigonometría Esférica en la Escuela Nacional Preparatoria entre 1888 y 1912

TESIS

Como parte de los requisitos para obtener el grado de Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Araceli Salinas Hernández

Dirigida por:

M. en C. Roberto Torres Hernández

Santiago de Querétaro, Qro. Marzo 2019

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Algunos textos de Trigonometría Esférica en la Escuela Nacional Preparatoria entre 1888 y 1912

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:
Araceli Salinas Hernández

Dirigida por:
M. en C. Roberto Torres Hernández

M. en C. Roberto Torres Hernández
Presidente
Firma

M. D. M. Norma Angélica Rodríguez Guzmán
Secretario
Firma

M. D. M. Benjamín Zúñiga Becerra
Vocal
Firma

M. en C. Marco Antonio Rojas Tapia
Suplente
Firma

C. U., Santiago de Querétaro, Qro., Marzo, 2019

Índice

Pág.

Introducción.. 4

Capítulo I. Contexto histórico de la Escuela Nacional Preparatoria

1.1 Antecedentes de la Escuela Nacional Preparatoria.. 6

1.2 Origen y primeros años de la Escuela Nacional Preparatoria.. 8

1.3 La Trigonometría Esférica en los planes de estudio de la ENP..17

Capítulo II. Algunos textos de Trigonometría Esférica previos a la ENP

Libro "Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando"..21

Libro "Tratado elemental de matemáticas"..25

Capítulo III. Algunos textos mexicanos utilizados para la enseñanza de la Trigonometría Esférica en la ENP

3.1 Libro "Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica" de Don Manuel María Contreras..35

3.2 Libro "Curso de Trigonometría" de Antonio Lamadrid..64

3.3 Libro "Tratado Elemental de Trigonometría Rectilínea y Esférica" de Carlos Tamborrel..82

Conclusiones..102

Bibliografía..103

Introducción

El presente trabajo, derivado de una investigación de carácter histórico y matemático, surge como un espacio para estudiar y dar conocer la teoría que formará parte de la enseñanza Matemática durante los inicios de la Escuela Nacional Preparatoria. Mucho se ha estudiado desde el punto de vista histórico, poco se ha hecho teniendo además un enfoque Matemático.

A fin de destacar la riqueza y utilidad de investigaciones cuyo enfoque histórico y matemático es característico, de rescatar el contenido científico desarrollado por matemáticos mexicanos y tener un mayor panorama en torno a la evolución del sistema educativo en nuestro país.

En este sentido, considerando que es imposible cubrir todo el contenido matemático el trabajo aquí expuesto está enfocado únicamente al estudio de la **Trigonometría Esférica**. Como bien se sabe en la adquisición del conocimiento, no sólo del matemático, influyen tanto la época como la sociedad en la que está inmersa la enseña. Durante el siglo XIX era fundamental poseer conocimientos de Trigonometría Esférica, no en vano ésta formaba parte del plan de estudios, considerando que los alcances tecnológicos en ese entonces estaban muy lejanos de los desarrollados en la actualidad.

Para fines prácticos se estudiaron dos textos extranjeros de **Trigonometría Esférica** utilizados en algunas de las cátedras durante la primera mitad del siglo XIX, y tres libros de texto mexicanos utilizados en las cátedras de **Trigonometría Esférica** en la Escuela Nacional Preparatoria entre 1888 y 1912. A través del análisis de estos textos antiguos se espera rescatar algunas de las concepciones y formas de pensamiento imperantes, el tipo de problemas y los métodos de solución que se gestaron en esos tiempos, de acuerdo a los instrumentos matemáticos de los que se disponía.

El trabajo se encuentra dividido en los siguientes capítulos, a fin de cubrir los alcances previamente descritos.

El primer capítulo **Contexto histórico de la Escuela Nacional Preparatoria**, a fin de tener una mejor visualización del sistema educativo predominante en los años previos al surgimiento de la Escuela Nacional Preparatoria y los alcances de éste una vez que por decreto se fundará dicha institución. Primeramente, se hace mención de tres colegios en los que se utilizaron algunos de los dos textos extranjeros, para posteriormente abordar cómo surgió la

Escuela Nacional Preparatoria, las cátedras impartidas, la forma de evaluar, parte de los reglamentos internos, la planta docente y la vida estudiantil en general, durante los años en que se utilizaron los tres textos mexicanos a estudiar autoría de profesores de esta misma institución.

El segundo capítulo, **Algunos textos de Trigonometría Esférica previos a la ENP** donde se presenta los dos textos de origen extranjero *"Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando"* de *Benito Bails* y *"Tratado elemental de matemáticas"* de *José Mariano Vallejo* que corresponden a las versiones de 1789 y 1812 respectivamente. Además de proporcionar algunos datos generales de cada autor, se hace una breve descripción de cada texto de tal manera que, se menciona parte del contenido, la extensión y la manera como se aborda la trigonometría esférica en cada uno de ellos.

El tercer capítulo, **Algunos textos mexicanos utilizados para la enseñanza de la Trigonometría Esférica en la ENP** donde se aborda el contenido matemático de los textos*"Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica"* de *Don Manuel María Contreras (1888), "Curso de Trigonometría"* de *Antonio Lamadrid (1912)* y *"Tratado Elemental de Trigonometría Rectilínea y Esférica" de Carlos Tamborrel (1890).* De cada uno de los libros se hace un estudio profundo, presentando una reseña del contenido, la extensión y la forma en que cada autor aborda lo que compete al estudio de la **Trigonometría Esférica**, se destacan algunas definiciones y ejercicios, se realiza la deducción de algunas fórmulas mediante un seguimiento de las ideas del autor, además de su índice de temas.

Es importante mencionar, que para cada uno de los textos se muestra imagen de su portada y de algunas imágenes originales del libro, por lo que se pide al lector tenga consideración en este sentido y valoré la riqueza histórica de éstas.

Finalmente, como parte de las conclusiones se expresa la opinión de los libros estudiados, se hacen observaciones desde el punto de vista matemático y un pequeño contraste entre los textos mexicanos, para posteriormente contrastarlos con los textos antiguos.

CAPÍTULO I

Contexto histórico de la Escuela Nacional Preparatoria

1.1 Antecedentes de la Escuela Nacional Preparatoria

Como sabemos, la Guerra de Independencia fue consecuencia de un conflicto político, económico, social e intelectual que puso fin al dominio español en los territorios de la Nueva España. Sin embargo, nada parecía resolver las dificultades existentes en la recién establecida nación, debido a las constantes luchas de poder que surgían en su afán por querer reestructurar al país.

Siendo lo anterior una de las principales causas de que, en el ámbito educativo, se presentara muy poco desarrollo en las décadas previas al surgimiento de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), en el periodo que comprende los años de 1821 a 1867. En esa época, la educación seguía concentrada mayoritariamente en manos del clero debido a que el gobierno carecía de los recursos y del tiempo para impulsar políticas enfocadas al desarrollo sociocultural.

En el período post independentista, existían dos tipos de escuelas en la ciudad de México:

1. Escuelas de enseñanza elemental
2. Escuelas de enseñanza secundaria o estudios preparatorios: Es el equivalente a lo que en la actualidad denominamos tronco común a nivel licenciatura, y corresponde a ciertas materias del plan de estudio establecidas como obligatorias para todos los alumnos independientemente de la carrera por estudiar. Este curso era a modo de preparación para sus *estudios superiores*, éstos últimos a cursarse dentro de la misma institución y comprendían el estudio de las materias asignadas para cada carrera.

Los estudios secundarios o preparatorios se impartían principalmente en el Colegio de San Ildefonso, en el Real Seminario de Minas (Colegio de Minería) y en la escuela de

Medicina, eran cursos que se ofertaban para todo estudiante que una vez concluida su educación elemental tuviera deseos de continuar con su formación profesional.

El **Real Seminario de Minas**, comúnmente denominado Colegio de Minería, se estableció en la ciudad de México en 1792. De esta institución egresaban técnicos y profesionistas que habrían de desempeñarse principalmente en la industria minera. Para mediados del siglo XIX, entre las carreras que se impartían estaban: Agrimensores, Ensayadores, Apartadores de Oro y Plata, Beneficiadores de Metales, Ingenieros de Minas, Ingenieros Geógrafos y Naturalistas. Aunque la matricula no era tan numerosa, era de esperarse que los grupos más numerosos fueran aquellos de los primeros años, de quienes cursaban estudios preparatorios.

De los planes de estudio de 1843, 1858 y 1859 se tiene conocimiento sobre las diferentes subdivisiones que se hicieron entre los estudios preparatorios y los estudios superiores dentro del Colegio de Minería. [4]

En el plan de estudio de 1843, era obligatorio para todas las carreras, tres años de estudios preparatorios. De esto se sabe que, en el segundo año se impartían la cátedra de Matemáticas Puras (Aritmética, Geometría Elemental, Trigonometría Plana y Álgebra) y para el tercer año, las cátedras de Geometría Analítica y Descriptiva, **Trigonometría Esférica** y Principios Generales de Cálculo Infinitesimal. Para los estudios superiores, se enlistaba las asignaturas a cursar para cada una de las carreras y se especificaba la duración de ésta. En este plan, la Física figuraba como cátedra dentro de los estudios superiores.

Dentro del plan de estudios de 1858 también se establecen estudios preparatorios obligatorios para todas las carreras, aunque no se especifica su duración, se cree que éstos pudieron haber durado un año, debido a la cantidad de materias a cursar (5 eran las cátedras de estudios preparatorios, siendo la Aritmética una de éstas). Respecto a las materias asignadas para cada una de las carreras, se especificaba la duración y además se establecía que, como parte de los dos primeros años de estudios superiores el alumno debería cursar las asignaturas de: Álgebra, Geometría, Aplicación del Álgebra a la Geometría, Trigonometría Plana, **Trigonometría Esférica**, Geometría Analítica, Series y Cálculo Diferencial e Integral. Dejando para el cuarto año el estudio de la Física.

Para 1864, aunque los cursos preparatorios ya no figuraban dentro del plan de estudios, en la práctica se seguían dando. Se establecía en los primeros años de todas las carreras, cuya duración era de 7 años, algunas cátedras de Matemáticas que en el plan de estudios de 1843 eran consideradas dentro de los cursos preparatorios. De modo que, algunas de las materias quedaban distribuidas de la siguiente manera: En el primer año debían cursarse Aritmética, Álgebra y Geometría; en el segundo año, Geometría Analítica en dos y tres dimensiones y **Trigonometría** Plana y **Esférica**; en el tercer año, Cálculo Diferencial e Integral así como Geometría Descriptiva. La materia de Física, ahora bajo el nombre de Física Experimental se dejaría su estudio para el quinto año.

Las cátedras de matemáticas fueron impartidas por distinguidos profesores tales como don Manuel Castro, don Cástulo Navarro, don Joaquín de Mier y Terán, don Francisco Hermosa y don Miguel Ma. Ponce de León. Para impartir sus cátedras se apoyaron en textos de origen extranjeros, en su mayoría de origen francés, debido a que, en ese entonces no había textos de Matemáticas de autores mexicanos. Dentro de los textos utilizados destacan: ***Tratado de Matemáticas*** **de Bails**, *Tratado de Aritmética* de Francuer, *Elementos de Aritmética* de Bourdon, *Tratado de Álgebra* de Bourdon, *Aplicaciones del Álgebra a la Geometría* de Jacob, *Cálculo Diferencial* de Boucharlat, y *Compendio de Matemáticas* de Vallejo.

Fue hasta finales de 1850, cuando se publicó en México el texto en español denominado *Curso elemental de Matemáticas*, Tomos I y II, creación de don Francisco M. Chavero y don Joaquín de Mier y Terán ambos mexicanos y profesores en turno en el Colegio de Minería. No ha de sorprender el hecho que de inmediato la obra fuera adoptada por el Colegio de Minería para los cursos de Matemáticas.

En lo que respecta al **Colegio de San Ildefonso**, se sabe que fue fundado en la ciudad de México en 1583 a partir de la fusión de tres escuelas Jesuitas. Dentro de esta institución la población estudiantil se encontraba repartida en dos secciones: Colegio Mayor y el Colegio Menor. Dicha distribución se hacía en términos de la edad y nivel de estudios de los alumnos, pertenecían al Colegio Menor aquellos estudiantes que se encontraban cursando sus estudios preparatorios y, los del Colegio Mayor eran aquellos quienes cursaban sus estudios superiores dígase la carrera de Jurisprudencia o de Teología.

Los estudios preparatorios a su vez estaban divididos en dos etapas. La primera, denominada Latinidad, constaba de los dos primeros años tiempo en el que el alumno debía cursar primero y segundo año de Latín y Castellano respectivamente. La segunda etapa, denominada Filosofía, comprendía los tres últimos años y las cátedras a cursar estaban organizadas de la siguiente manera: El primer año, debían cursar Ideología, Lógica, Metafísica y Moral; el segundo año Matemáticas y Física; y el tercer año Cronología, Cosmografía, Economía Política y Geografía. Además de que, en los dos últimos años de estudios preparatorios se obligaba al alumno a tomar cursos de francés. Al término de estos estudios, el alumno podía inscribirse a los cursos del Colegio Mayor e iniciar sus estudios superiores de Jurisprudencia o Teología.

De lo anterior se sabe que, en 1855, en las cátedras de Matemáticas del segundo año de Filosofía el alumno estudiaba Aritmética, Álgebra (excepto la resolución de ecuaciones de grado mayor a dos), Geometría, Trigonometría Plana, **Trigonometría Esférica** y Geometría Práctica.

Finalmente, y no por eso menos importante, se mencionará lo referente a la **Escuela de Medicina**. De ésta se sabe que, a partir del Plan Educativo del 18 de agosto de 1843, expedido por el presidente Santa Anna, se estipularon dos años de formación preparatoria, en los que era obligatorio para los estudiantes médicos tomar los cursos de Física y Química. Aunque, en un principio se carece de información sobre las cátedras de Matemáticas incluidas dentro de los estudios preparatorios en esta escuela, se tiene conocimiento de que en 1856 durante el primer año de estudios de Agricultura y Veterinaria, se estudiaban Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría plana como parte de la cátedra de Matemáticas.

Cabe mencionar que, en las tres instituciones previamente descritas los grupos eran de pocos alumnos ya que; la situación en México seguía siendo crítica, la distribución de la riqueza no era equitativa para toda la población, y al no ser la educación de índole obligatorio eran una minoría quienes contaban con el apoyo para continuar con sus estudios preparatorios.

1.2 Origen y primeros años de la Escuela Nacional Preparatoria

Sabemos que en México entre 1858 y 1861 se llevó a cabo la llamada Guerra de Reforma, movimiento civil que detonó debido a las disposiciones legislativas de corte liberal que fueron promulgándose en el país, contrarias al ambiente político que en ese entonces predominaba. Recordemos que, este movimiento buscaba terminar con la Dictadura impuesta por Antonio

López de Santa Anna (1795-1876, presidente de México en varias ocasiones de 1833 a 1855) y su grupo de los conservadores, desencadenándose una lucha que se prolongaría por varios años entre liberales y conservadores.

En esta lucha teníamos a los liberales liderados por Benito Juárez (1806-1872, presidente de México en varias ocasiones de 1857 a 1872) quienes buscaban establecer la nación como República con nuevos modelos políticos y gubernamentales basados en la igualdad. A fin de lograr el bienestar social, la modernidad y progreso del país, erradicando los privilegios de las clases dominantes, incluyendo el clero.

Fue hasta junio de 1867, tras la caída del Imperio de Maximiliano y su fusilamiento en la ciudad de Querétaro, lo que marcaría el triunfo de los liberales sobre las fuerzas conservadoras, y con Benito Juárez al frente, dió inicio la restauración de la República gestándose así altas expectativas respecto al progreso y modernización del país en diversos ámbitos.

Desde años atrás, pensadores liberales ya habían externado sus inconformidades en lo que respecta al sistema educativo imperante de aquel entonces, uno de ellos era Gabino Barreda (1818-1881; Médico, filósofo Positivista, Político mexicano y primer director de la ENP), quien proponía un sistema educativo basado en la corriente positivista del francés Augusto Comte (1798-1857, Filósofo Francés considerado el creador del positivismo y de la sociología), en donde el dogmatismo, el racionamiento y la experimentación constituyeran los elementos del éxito. También planteaba una educación preparatoria igualitaria, bajo el argumento de que todas las profesiones tienen un mismo fin, que es el bienestar social.

En septiembre de 1867, ya estaba en funciones la Comisión que el presidente Juárez había designado con la finalidad de que ésta reorganizará la Ley de Instrucción Pública, que regulaba el acceso de los mexicanos a la educación. Don Antonio Martínez de Castro (1825-1880, abogado de profesión), quien fungía como ministro de Justicia e Instrucción Pública, era el encargado de presidir dicha comisión conformada por ilustres ciudadanos como: Francisco (1833-1889, Ingeniero, Geógrafo, Científico y Diplomático), José Díaz Covarrubias (1842-1883, abogado de profesión), Pedro Contreras e Ignacio Alvarado, sólo por mencionar a algunos. Fueron las ideas de Gabino Barreda, lo que motivo a Juárez para incluirlo dentro de la comisión con la finalidad de que contribuyera en la elaboración de la reforma educativa, para consultar y profundizar sobre la contribución y el trabajo de Gabino Barreda se recomienda consultar el libro [Clementina Díaz, 1972, Tomo I, La *Escuela Nacional Preparatoria los afanes y los días 1867-1910*].

Fue el 02 de diciembre de 1867, cuando el presidente Benito Juárez expidió la Ley Orgánica de la Instrucción Púbica en el Distrito Federal. En dicha ley, una de las cosas que se estipulaban era el establecimiento y funcionamiento de la **ENP**, con la finalidad de que ésta fuera la única institución del Distrito Federal encargada de impartir los estudios preparatorios de manera indistinta, es decir, la enseñanza preparatoria sería la misma para todos y a su vez estaría permeada por las ideas positivistas de Augusto Comte.

Para el desarrollo de sus actividades se cedió a la **ENP** el edificio que ocupaba el Colegio de San Ildefonso, se acondicionó de la mejor manera posible las aulas, dormitorios, auditorios, gabinetes y comedor. Don Gabino Barreda, quien en diciembre de 1867 fue nombrado como primer director de la **ENP**, fue además el encargado de supervisar y dirigir las adecuaciones realizadas en el inmueble.

Fue hasta el 24 de enero de 1868 que se dio a conocer el reglamento de la Ley Orgánica de la Instrucción Púbica, y que fue publicado en el Diario oficial con fecha el 29 de enero de 1869. En éste se incluía el plan de estudios de la **ENP**, caracterizado por su marcado enfoque positivista, tenía como eje principal las Matemáticas, seguidas de la Física y otras Ciencias Naturales, con cuyos métodos y contenidos se pretendía erradicar la educación dogmática que se había venido impartiendo en los diferentes centros educativos del país.

El primer plan de estudios estuvo vigente dos años a partir de que se inician clases en la **ENP**, acontecimiento que ocurrió en febrero de 1868. La distribución de las cátedras a cursar para cada año escolar, se hacía considerando la carrera profesional que seguiría el alumno. De tal manera que se asignaron cuatro listados de cátedras pensando en los futuros Abogados, Médicos y Farmacéuticos, Agricultores y Veterinarios, por último y no menos importantes, los Ingenieros, Arquitectos, Ensayadores y Beneficiadores de Metales. Los estudios preparatorios se repartían en cinco años, pero de este último grupo de alumnos se sabe que los concluirían en tan sólo cuatro años.

Las cátedras que se impartieron fueron: Aritmética, Álgebra y Geometría, Gramática Española, Francés, Taquigrafía, **Trigonometría** y Nociones del Cálculo Infinitesimal, Cosmografía y Mecánica racional, Raíces Griegas, Latín I, Inglés I, Física, Geografía, Latín II, Inglés II, Química, Historia, Cronología, Latín III, Teneduría de libros, Historia Natural, Alemán I, Lógica, Ideología, Moral, Gramática general, Historia de la Metafísica, Literatura, Alemán II, Dibujo en sus diversas ramas. Cabe mencionar que, aunque las diferencias en las cátedras eran mínimas, en lo referente a las cátedras de Matemáticas y Física el plan de estudios era uniforme para todos los alumnos, quienes en el primer año cursarían Aritmética, Álgebra y Geometría; en el segundo año, **Trigonometría** y Cálculo Infinitesimal; y en el tercero Física; obviamente, junto con sus otras materias

El segundo plan de estudios, incluido en el reglamento de la nueva Ley Orgánica de la Instrucción Pública expedida el 15 de mayo de 1869, entró en vigor en 1870 y permaneció vigente hasta 1896. Cabe mencionar que, durante esos 27 años fue sometido a diversas modificaciones conservando ante todo el enfoque positivista.

En este nuevo plan se establecía a cinco años la duración de los estudios preparatorios de los diferentes profesionistas y algunas adecuaciones en la distribución de las materias. Las cátedras de Matemáticas sufrieron algunos ajustes quedando de la siguiente manera; en el primer curso se estudiarían Aritmética, Álgebra y Geometría Plana mientras que, en el segundo curso Geometría en el espacio y general junto con **Trigonometría** para concluir con nociones de Cálculo Infinitesimal. De esta manera, se disminuía la carga curricular en el primer año, esperando obtener mejores resultados en los estudiantes.

Fue a partir de 1871, que la **ENP** ofreció las llamadas Academias de Matemática. En esta clase se discutía sobre los temas de las cátedras de matemáticas y se resolvían algunos ejercicios. No era una materia de índole obligatoria, pero sabemos que estaba dirigida principalmente para aquellos alumnos de cuarto y quinto año que se preparaban para continuar con la carrera de Ingeniero.

Otro de los ajustes autorizado al plan de estudios en 1873 y que a partir de 1874 entrará en vigor, estipulaba que del segundo curso de matemáticas, los futuros Abogados, Médicos, Farmacéuticos, únicamente tendrían que estudiar Trigonometría Plana, en tanto que los Ingenieros, Arquitectos y Beneficiadores de Metales debían de cursar el segundo año de matemáticas tal y como se había planteado en el plan de 1870. Ante las inconformidades por parte de algunos de los profesores, estos ajustes únicamente permanecieron vigentes hasta 1878.

El 18 de septiembre de 1878, la Junta Directiva de Instrucción Pública envió un comunicado al entonces director de la ENP, don Alfonso Herrera (1838-1901; farmacéutico, naturalista, escritor, académico y segundo director de la ENP). Comunicado que contenía el *Reglamento para el estudio de los cursos de matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria*, entre los artículos que contenía figuran los siguientes:

> *Artículo 1. Se suprime del 1ercurso de Matemáticas para todas las carreras el estudio de la Geometría Plana, y pasa ésta a formar parte del 2° curso.*
> *Artículo 2. En el 2° curso, también para todas las carreras, se estudiará Geometría Plana y en el espacio, y Trigonometría Rectilínea.*
> *Artículo 3. El 3er curso, obligatorio únicamente para los que se dediquen a la carrera de Ingeniería, comprenderá: la aplicación del Álgebra a la Geometría,* ***Trigonometría Esférica*** *y Geometría Analítica.*
> *Artículo 4. En el 4° curso, igualmente obligatorio para los que se dediquen a la carrera antes mencionada, se enseñará el Cálculo Infinitesimal.*

De esta manera, a partir del año escolar de 1879, las Matemáticas en la ENP se impartirían durante los primeros cuatro años. Los dos primeros de manera indistinta para todos los alumnos, el tercer y cuarto año de Matemáticas serían obligatorios únicamente para los futuros Ingenieros. Cabe mencionar que para 1892 ya no se impartía el cuarto año de Matemáticas, este abandono paulatino que fue dándose en el estudio del Cálculo por parte de los futuros Ingenieros de la ENP se debió a que, en el plan de estudios de la Escuela Nacional de Ingenieros, a partir del año de 1883, se incluyó al Cálculo Infinitesimal como cátedra propiamente dicha de la carrera.

En el año de 1896 se estableció la Ley de la Enseñanza Preparatoria en el Distrito Federal y para 1897 entró en vigor el nuevo plan de estudios de la ENP, igual para todos los alumnos, y en él se volvió a incluir al Cálculo Infinitesimal, y se dejó fuera la **Trigonometría Esférica**. Ésta última paso a formar parte dentro del plan de estudios de 1897 de la Escuela Nacional de Ingenieros, dentro del rubro denominado Matemáticas Superiores. [1]

Recordemos que, de 1868 a 1878 los grupos de Matemáticas eran los de primero y segundo año, de acuerdo a los planes de estudio vigentes en esos tiempos y de las nóminas expedidas para los diferentes profesores y empleados tenemos conocimiento de lo siguiente:

[1] Al final del presente capítulo se anexan los planes de estudio de 1868 – 1869 y 1870 – 1896, en donde se aprecian los cuatro listados de las materias a cursar para cada ciclo escolar, en términos de la futura carrera profesional del alumno

Para el año de 1868, figuraban como profesores del Primer curso de Matemáticas Isidoro Chavero, José Bustamante, Eduardo Garay y Manuel Tinoco; se sabe que, a esta lista se agregaría Francisco Bulnes y **Manuel María Contreras** (1833-1902, uno de los más destacados profesores de Física y Matemáticas de la ENP), quien sustituyera en septiembre del mismo año a Manuel Tinoco. Como profesores de Segundo curso Francisco Díaz Covarrubias y Manuel Fernández Leal.

De 1869 a 1873, Manuel María Contreras ocupó el cargo de profesor titular del primer año de Matemáticas, periodo en el que dejó de lado su práctica docente. Durante este lapso de tiempo, se sumaron a la planta académica los profesores Mariano Villamil, Francisco Prieto, Luis del Castillo, Ignacio Ortiz de Zárate, Manuel Ramírez, Agustín Barroso, Rafael Herrera. Para ese entonces, los encargados de impartir el segundo curso de Matemáticas eran Mariano Villamil, Eduardo Garay y José Bustamante.

En 1874 el cargo de Manuel María Contreras lo ocupó Manuel Fernández Leal, sumándose a la planta docente Roberto Esteva, Manuel Calderón, Juan Vallerino, Emilio Baz y Rafael Barba. Éste último sustituyendo al finado José María Bustamante en las cátedras del segundo curso de Matemáticas.

A partir del año escolar de 1879, se agregaron los grupos de tercer y cuarto año, para ese entonces ya se había incorporado Agustín Barroso, quien fungiría como profesor titular del primer año de 1878 a 1887. En ese tiempo a su planta docente se incorporaron **Carlos Tamborrel**, Damián Flores, Francisco León de la Barra y Gabriel Alcocer. Y se sabe que los cursos de tercero y cuarto año de Matemáticas fueron impartidos en lo sucesivo por Manuel Ramírez, Rafael Barba, Emilio Baz y Francisco Echeagaray.

A la muerte del profesor Barroso, en 1887 regresa como titular del primer curso de Matemáticas Manuel María Contreras, puesto que en 1895 sería ocupado por Ignacio Ortiz Zárate.

Mientras que, de las Academias de Matemáticas sabemos que entre los profesores encargados de impartirlas se encuentran Francisco Díaz Covarrubias, Eduardo Prado, José y **Carlos Tamborrel**.

Los salarios eran pagados por quincena, las diferencias en sueldos de un maestro a otro, no eran del todo a consecuencia de la cantidad de horas clase impartidas, sino debido al valor especifico otorgado a cada una de las asignaturas, siendo las cátedras de Matemáticas de las mejor pagadas.

En los primeros años de actividades de la Escuela Nacional Preparatoria, los programas de las cátedras eran los contenidos de los textos a usar en éstas. La asignación de los textos era mediante una junta directiva entre la instrucción primaria y secundaria, tal y como lo establecía la Ley de Instrucción Pública de 1867. Algunos de los textos utilizados en las cátedras de Matemáticas fueron los siguientes: para el primer año de Matemáticas se asignaron la obra de Terán y Chavero para álgebra y Geometría Plana, la Aritmética del profesor Contreras; para el segundo año se asignó la obra de Terán y Chavero y lecciones orales, en cuanto al Cálculo Infinitesimal para el año escolar de 1872. En los años subsecuentes, tuvo lugar en la Escuela Nacional Preparatoria un proceso de adopción de libros de texto elaborados por profesores de esta escuela.

Algunos de los libros de texto elaborados por el profesor don Manuel Ma. Contreras y que fueran adaptados a los cursos de Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria son los siguientes: el libro de la Aritmética, en 1876 se adoptó el libro de Geometría Plana, quedando a partir de ese año cubierto el primer curso de matemáticas con las obras de este profesor. Los aportes de libros de texto por parte del profesor terminan en la década de los ochenta, con la publicación de su **Tratado de Trigonometría Esférica**, que fue adoptado para ser utilizado en el tercer año de Matemáticas a partir del año escolar de 1886; de acuerdo a los cambios decretados para los cursos de Matemáticas, vigentes a partir del año de 1879.

Con respecto al Cálculo Infinitesimal, inicialmente se trabajaba con lecciones orales, preparadas y expuestas por el profesor, quien habría de apoyarse en el texto francés de Boucharlat. Fue hasta el año de 1873, cuando se pública la obra que llevó por título Cálculo Trascendente de don Francisco Díaz Covarrubias y que a partir de 1874 fue adoptada como libro de texto para el estudio del Cálculo.

Para el estudio de Geometría Analítica fue asignada la obra de Terán y Chavero, de 1874, año en que la materia se estudiaba en el segundo curso de Matemáticas, hasta 1880, cuando esta materia se estudiaba en el tercer curso de Matemáticas, junto con la **Trigonometría Esférica**, tema que se incluía en el tomo II de la citada obra de Terán y Chavero. Para el ciclo escolar de 1881 y 1882 se asignó, para esta materia el libro francés de Lefebure de Fourcy, que también incluía a la **Trigonometría Esférica**. Para 1883 se asignaron las obras de Briod y Bouquet; tanto su Geometría Analítica como sus Lecciones de Trigonometría, ésta última incluía a la **Trigonometría Esférica**. Finalmente, para el año de 1886 se asigna nuevamente la obra de Lefebure de Fourcy para el estudio de Geometría Analítica y para el estudio de **Trigonometría Esférica** se adopta la antes mencionada obra de Manuel Ma. Contreras.

Para el año escolar de 1887, todas las cátedras de Matemáticas de la Escuela Nacional preparatoria estaban cubiertas por textos elaborados por profesores de la misma escuela, quienes habían escrito sus obras teniendo consideración de las características y necesidad de sus alumnos.

En el reglamento publicado el 9 de noviembre de 1869 se especifican los requisitos que habría de cumplir todo aquel que tuviera deseos de incorporarse al primer año de estudios en la Escuela Nacional Preparatoria, requisitos que permanecieron vigentes de 1870 a 1896 y que consistían en: El aspirante debía de tener al menos 12 años de edad, justificar buena conducta y moralidad, y haber concluido su educación primaria con bases sólidas en cuanto a escritura, lectura, aritmética y gramática española.

La población estudiantil de la ENP estaba conformada de la siguiente manera:

1) Los alumnos externos: eran aquellos que asistían a sus actividades académicas del día y una vez concluidas éstas se retiraban.

2) Los alumnos internos: Además de tomar sus actividades académicas en el plantel, dormían y comían dentro de las instalaciones. En su mayoría eran alumnos becados, otros tantos eran pensionistas, es decir, debían aportar cierta cantidad monetaria a la Preparatoria.

Se hacía también una distinción entre los alumnos de número y los alumnos supernumerarios, los primeros eran aquellos inscritos en cualquier año escolar y que hubiesen acreditado todas las materias de los años anteriores mientras que, los supernumerarios, se entendía como aquellos alumnos que sin haber aprobado todas las materias de años anteriores acudían al plantel a tomar alguna materia.

Respecto a la cantidad de alumnos inscritos, se sabe que en el primer año de actividades (1868) tuvo una inscripción cercana a los 900 alumnos, entre externos e internos; para el año de 1872, se inscribieron 588 alumnos; de estos 160 eran alumnos internos y 428 externos; y para el año escolar de 1873, se inscribieron 602; 141 eran alumnos internos y 461 externos. Y así, la matrícula promedio anual en los periodos: de 1869 a 1877 fue de 635 alumnos, de 1878 a 1884 fue de 900 alumnos, y de 1885 a 1896 fue de 1138 alumnos.

También se sabe que durante los primeros 15 años a partir de que se funda la escuela Nacional Preparatoria la matrícula fue sólo de varones. En 1882 se inscribieron las primeras mujeres en Telegrafía, siendo este uno de los talleres libres que se impartían en las instalaciones de la ENP y fue hasta 1883, cuando por primera vez se tiene registro de mujeres inscritas en Inglés I, asignatura que fuera obligatoria dentro del plan de estudios.

En lo que se refiere a los exámenes, éstos debían ser públicos, habrían de comenzar el 15 de octubre y se harían ante un jurado de tres profesores, sin incluir al profesor de la materia. Se sabe que, para los exámenes de Matemáticas el jurado siempre estuvo conformado por catedráticos de la ENP.

El alumno examinado debía tomar cierta cantidad de fichas, que le eran asignadas en proporción al número de faltas. Se sabe que, los alumnos de asistencia regular únicamente sacaban tres fichas (también denominado examen ordinario), los que tuvieran más de la tercera parte de inasistencias debían tomar seis fichas, y aquellos alumnos que no estuvieran inscritos o que hubieran faltado a más de la mitad de las clases les eran asignadas nueve fichas (en ambos casos se les denominaba exámenes extraordinarios).

Cada uno de los alumnos ya sabía el día y la hora en que sería examinado, además de la cantidad de fichas que debería de sacar para cada una de sus materias, quienes serían sus sinodales y las posibles preguntas que podrían tocarle, ya que desde un principio los alumnos contaban con un catálogo que contenía todos los reactivos posibles del examen.

Durante el examen, los miembros del jurado disponían de una libreta en donde vendrían numerados todos los grupos de preguntas de cada asignatura, de esta manera cada alumno al ser examinado sacaba de una urna la cantidad de fichas que le fuera asignada, podría tratarse de canicas o tarjetas numeradas, que indicaban los respectivos grupos de preguntas que debía responder. La calificación era asignada mediante las letras; M, B, MB y PB, lo que significaba: contestó Medianamente, Bien, Muy Bien y Perfectamente Bien. Cabe mencionar que de no aprobar sus exámenes, el alumno perdía el derecho de inscribirse al siguiente curso.

Posterior al periodo de exámenes se realizaba una ceremonia en la que se reconocía públicamente y se premiaba a los mejores alumnos de cada año escolar. De éstos haremos mención particular de **Carlos Tamborrel**, quien fuera premiado por su Primer año de estudios preparatorios en lo que corresponde al año escolar de 1873.

Y para finalizar, referimos que al terminar sus estudios preparatorios se le entregaba al alumno su certificado y el pase para ingresar a sus respectivos estudios profesionales.

A partir de la información aquí expuesta, es posible tener un mejor panorama entorno al origen y funcionamiento de la ENP, institución que buscará revolucionar la educación en nuestro país y que lo consiguiera a través de un arduo trabajo ya que; tras su fundación se gestaron criticas de todo tipo, no faltaron quienes estuvieran inconformes con la filosofía de Barreda que dejaba de lado la educación dogmática que tanto había predominado, para inculcar a los alumnos la ciencia y la búsqueda de la verdad a través de la observación y la lógica.

Otro aspecto importante de destacar es el nivel educativo de esta institución, y que se alcanzará gracias a la preparación y entrega de sus profesores, sus bien elaborados planes de estudio y los deseos de superación de sus alumnos. Convirtiéndose la ENP en una entidad educativa que permanece en funcionamiento hasta nuestros días.

En lo sucesivo haremos una síntesis en torno a la Trigonometría Esférica, que figurará como parte de las cátedras en los ya mencionados planes de estudio de la ENP.

1.3 La trigonometría Esférica en los planes de estudio de la ENP

Dentro del primer plan de estudios, que estuvo vigente de 1868 a 1869, se incluía como parte de las cátedras en el segundo año de estudios preparatorios, siendo de índole obligatoria para todos los alumnos.

Del segundo plan de estudios, vigente de 1870 a 1896, y considerando sus respectivas modificaciones sabemos que:

1870 – 1873 Figuraba como cátedra obligatoria para todos los alumnos en su segundo año escolar.

1874 – 1878 Dejó de ser cátedra obligatoria, pasó a formar parte exclusiva de la carga curricular de los futuros Ingenieros, Arquitectos y Beneficiadores de Metales, quienes debían tomarla como parte de su segundo curso de Matemáticas.

1879 – 1896 En el *Reglamento para el estudio de los cursos de matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria,* se estipulaba como obligatoria únicamente para los futuros Ingenieros y éstos debían cursarla durante su tercer año escolar.

1897 La Trigonometría Esférica queda fuera del plan de estudios de la ENP.

De lo anterior observamos que, durante los inicios de la ENP la Trigonometría Esférica era parte de la formación básica de todo alumno preparatorio, y con el paso del tiempo se le consideró como una especie de cátedra propedéutica para los futuros Ingenieros.

AÑO	ABOGADOS	MÉDICOS Y FARMACÉUTICOS	AGRICULTORES Y VETERINARIOS	INGENIEROS, ARQUITECTOS, ENSAYADORES Y BENEFICIADORES DE METALES
Primero	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía
Segundo	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Geografía Inglés I
Tercero	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Cronología e Historia Literatura Teneduría de libros Inglés II Alemán I
Cuarto	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros Alemán I	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros Alemán I	Química Historia natural Lógica Ideología Moral Alemán II Gramática general
Quinto	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Historia de la metafísica Literatura	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Literatura Alemán II	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Literatura Alemán II	

Figura 1.1: Plan de Estudios de la ENP (1867)

AÑO	ABOGADOS	INGENIEROS, ARQUITECTOS, ENSAYADORES YBENEFICIADORES DE METALES	MÉDICOS Y FARMACÉUTICOS, AGRICULTORES Y VETERINARIOS
Primero	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés
Segundo	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés
Tercero	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés
Cuarto	Química Geografía Historia general y del país Cronología Latín I	Química Geografía Historia general y del país Cronología Alemán Dibujo de órdenes clásicos y copia de monumentos Academia de matemáticas	Química Geografía Historia general y del país Cronología Latín I
Quinto	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Latín II Literatura	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Alemán Literatura Dibujo de órdenes clásicos y copia de monumentos Academia de matemáticas	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Latín II Literatura

Figura 1.2: Plan de Estudios de la ENP (1869)

CAPÍTULO II

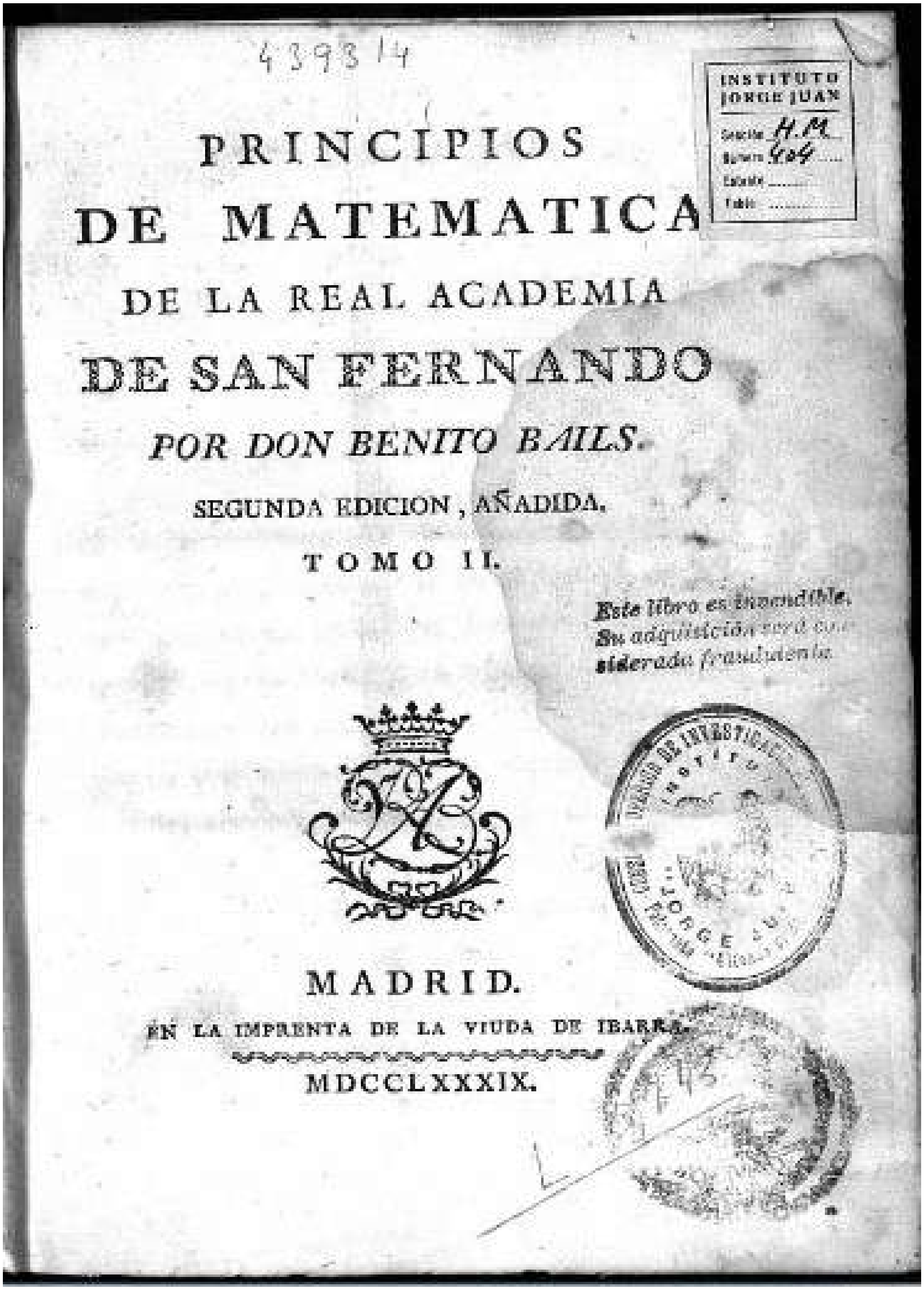
Algunos textos de Trigonometría Esférica previos a la ENP

En este capítulo se analizarán brevemente dos textos que fueron fundamentales en la enseñanza de la matemática en España y en América durante el siglo XIX.

Aunque hubo diversos libros, en su mayoría franceses, los que se utilizaron en los países de habla hispana, fueron los textos de Benito Bails y José Mariano Vallejo los más importantes, dadas las múltiples referencias y ediciones que alcanzaron. En particular, se estudiará el contenido, la extensión y la manera como se aborda la trigonometría esférica en cada uno de ellos.

En lo sucesivo, los párrafos en letras cursivas indicarán que se ha transcrito fielmente del texto original, y de la autenticidad de las imágenes destacamos que serán tomadas del libro a menos que se especifique lo contrario.

Libro "Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando" de Benito Bails



PRINCIPIOS
DE MATEMATICA
DE LA REAL ACADEMIA
DE SAN FERNANDO
POR DON BENITO BAILS.
SEGUNDA EDICION, AÑADIDA.
TOMO II.

MADRID.
EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.
MDCCLXXXIX.

Biografía del autor

Benito Bails nació en San Adrián de Besós, Barcelona, en 1730. Fue un matemático y arquitecto español, con una sólida formación francesa, pues transcurrió parte de su vida en aquel país, lo que le llevo a relacionarse con los grupos más importantes del pensamiento Ilustrado. Su condición de erudito le llevó a ser miembro de diversas academias, a desempeñarse en diferentes cargos y a ser un reconocido divulgador de las ciencias.

En 1763 ingresó como catedrático de matemáticas en la recién fundada Real Academia de San Fernando y posteriormente, en 1768 fue nombrado titular de la materia. Es considerado uno de los intelectuales de mayor repercusión en la España de la Ilustración, vertió al castellano un gran número de obras, además escribió: "Los principios de Matemáticas" y "Los elementos de Matemáticas", de tres y diez tomos respectivamente. Se convirtió Bails en referencia obligada durante bastantes años, debido al compendio que en sus textos hace del estado de la ciencia, principalmente aquella de espíritu francés de corte ilustrado, que tan rápidamente se propago por toda Europa.

Fue Bails una de las últimas víctimas de la inquisición, quien al ser acusado de poseer libros prohibidos y de sostener proposiciones ateas en sus clases, sufrió de prisión y destierro en 1791, y al serle conmutada la pena regresó a Madrid, donde murió en julio de 1797.

Breve descripción del libro

Como previamente se mencionó "*Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando*" es una obra de Don Benito Bails, que consta de tres tomos, y en lo sucesivo; para fines prácticos se hará referencia únicamente en lo que respecta al tomo II. De éste consultamos la segunda edición, editada y publicada en Madrid en 1789, que se encuentra disponible en formato digital dentro de la Red de Bibliotecas y Archivos del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (con siglas CSIC).

Es en el prólogo, precedido por la portada del libro, donde el autor se esmera por dar una definición del álgebra que, aunque un tanto intuitiva, es muy similar al concepto que se tiene de esta rama de la matemática en la actualidad. Y en ese mismo apartado, además de lo ya mencionado, algo curioso e interesante por referir es la distinción que realiza Bails entre un

"Matemático docto" y un *"Grande Matemático"*, donde deja en evidencia su admiración por éste último y se reconoce a sí mismo como un matemático docto. Enseguida citamos textualmente lo manifestado por el propio Bails.

> *Matemático docto es aquel que tiene en la memoria más fórmulas ò expresiones generales, [...] A los que con las circunstancia de ser diestros calculadores juntan el tino de la investigación, los graduamos de grandes matemáticos; hombres privilegiados, de talento portentoso, los quales dilatando los límites de la ciencia, dexan arrebatados de admiración à los que nos arrojamos à seguir sus huellas desde una distancia infinita de la altura donde los vemos encumbrados.*

Continuando con la descripción del texto, el índice y la sección de erratas se localizan al inicio, posterior al prólogo y en el orden mencionado. El tomo consta de 464 páginas, en las que el autor desarrolla diversos temas de algunas ramas de la Matemática tales como: Álgebra, Geometría Analítica y Euclidiana, Cálculo Diferencial e Integral y **Trigonometría Esférica**.

De la **Trigonometría Esférica,** cuyo contenido desarrolla en un total de 19 páginas, nos interesa saber qué temas aborda Bails, sin profundizar en su contenido meramente Matemático.

Acerca del contenido de Trigonometría Esférica

En tan pocas páginas que destina el autor para su estudio no ha de sorprendernos que de los pocos temas que aborda en el desarrollo de éstos sea muy breve.

Parte diciendo que:

> *El asunto de la Trigonometría Esférica, es enseñar como se resuelven los triángulos formados en la superficie de un globo por tres arcos de círculos máximos.*

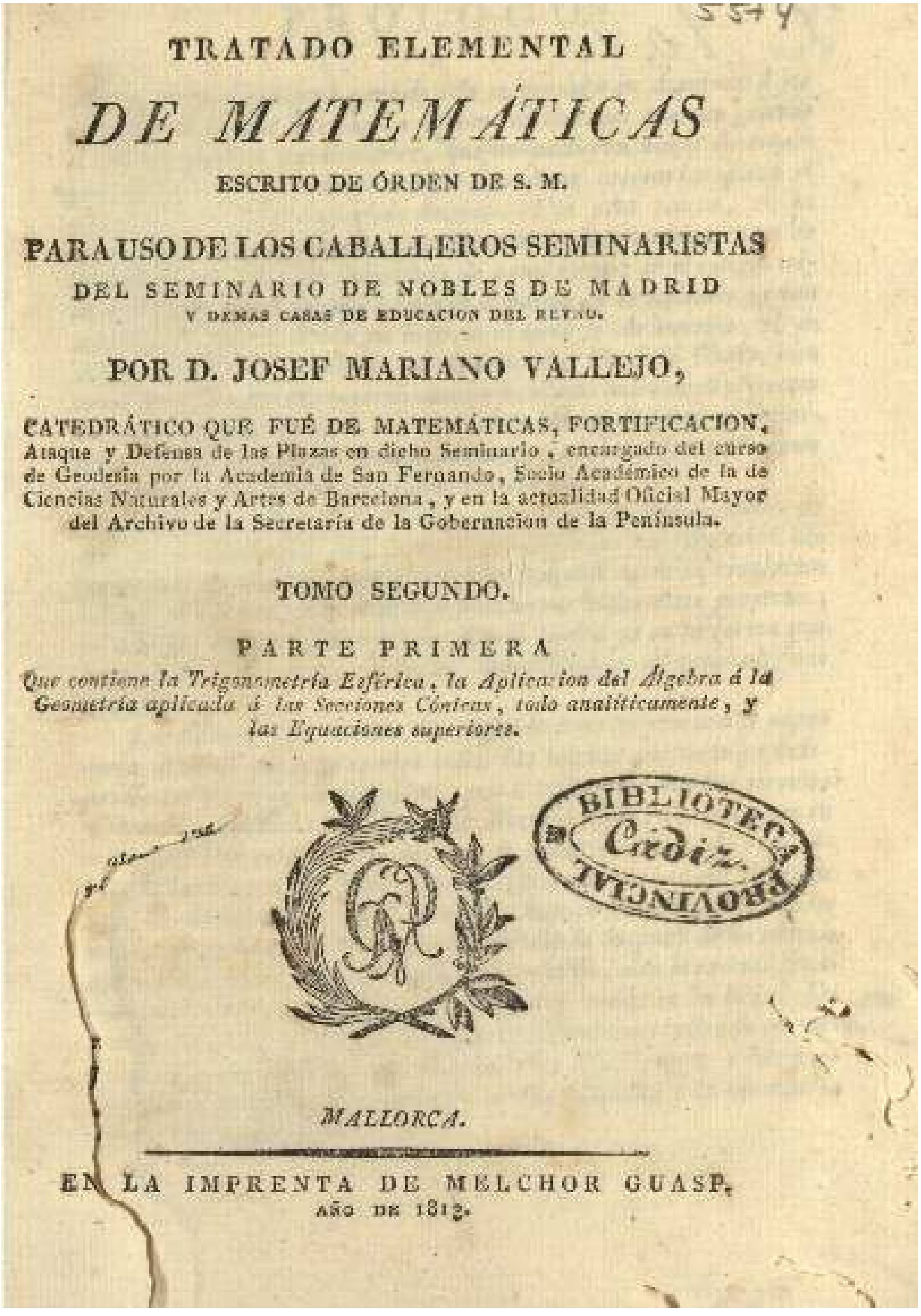
Enfatiza en el hecho de que, se considerarán únicamente arcos de círculos máximos. Para los que continúa definiendo sus polos y eje de la siguiente manera:

> *Llámanse polos de un círculo máximo los dos puntos de la superficie de la esfera que están en los extremos del diámetro que atraviesa perpendicularmente el plano del mismo círculo. El diámetro que pasa por los polos de un círculo se llama el exe del mismo círculo.*

Y sin más preámbulos, aborda parte del tema de los Triángulos Esféricos Rectángulos. De éstos analiza sus lados y ángulos a fin de determinar bajo ciertas condiciones de que especie serán, es decir, agudos u obtusos.

Como parte de la resolución de los Triángulos Rectángulos deduce un grupo de fórmulas, que en la actualidad suele denominárseles las Fundamentales para Triángulos Esféricos Rectángulos. Continúa con la resolución de los Triángulos Esféricos Oblicuángulos.

Libro "Tratado elemental de matemáticas" de José María Vallejo



TRATADO ELEMENTAL

DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS
DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID
Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REYNO.

POR D. JOSEF MARIANO VALLEJO,

CATEDRÁTICO QUE FUÉ DE MATEMÁTICAS, FORTIFICACION, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario, encargado del curso de Geodesia por la Academia de San Fernando, Socio Académico de la de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona, y en la actualidad Oficial Mayor del Archivo de la Secretaría de la Gobernacion de la Península.

TOMO SEGUNDO.

PARTE PRIMERA

Que contiene la Trigonometría Esférica, la Aplicacion del Álgebra á la Geometría aplicada á las Secciones Cónicas, todo analíticamente, y las Equaciones superiores.

MALLORCA.

EN LA IMPRENTA DE MELCHOR GUASP,
AÑO DE 1813.

Biografía del autor

José Mariano Vallejo fue un Matemático, ingeniero y pedagogo español nacido en Albuñuelas, Granada en 1779. Inició su formación matemática en la facultad de Filosofía y Artes de la Universidad de su ciudad natal, para posteriormente continuarla en la sección de Arquitectura de la Real Academia de San Fernando, en Madrid. Allí fue consolidando su formación matemática y vinculando este conocimiento con el de otras ciencias, ayudado por algunos de sus profesores como don Antonio Varas y Portilla, quien fuera discípulo y compañero de Benito Bails.

Un año antes de concluir sus estudios universitarios, en 1801 fue propuesto como profesor sustituto del área de Matemáticas en la Real Academia de San Fernando. En 1802 fue nombrado catedrático de matemáticas, de fortificación, de ataque y defensa en el Seminario de Nobles de Madrid. Donde por orden real trabajó en la realización de un *Tratado elemental de matemáticas,* para uso de los alumnos del Real Seminario de Nobles.

La primera de sus obras matemáticas considerada de relevancia es *Adiciones a la Geometría de Don Benito Bails* (en 1806), seguida por *Memoria sobre la curvatura de las líneas* (en 1807) considerada la más importante, no sólo por su contenido, sino porque en España durante el siglo XIX las memorias fueron muy poco frecuentes, además del ya mencionado *Tratado elemental de matemáticas* (en 1812), el *compendio de Matemáticas* (en 1819), entre otras, en las que es importante destacar su marcado carácter pedagógico.

El Sr. Vallejo murió en Madrid en el año de 1843.

Breve descripción del libro

La obra *Tratado Elemental de Matemáticas* de José Mariano Vallejo consta de Tres Tomos, que a su vez se encuentran subdivididos en dos partes a excepción del último Tomo que consta de solo una. En lo sucesivo evocaremos únicamente a la primera parte, del Tomo Segundo, consultamos la versión de 1812 publicada en Mallorca, España. Material al que tuvimos acceso a través de la Biblioteca Virtual Andalucía.

El texto consta de 323 páginas, el contenido de **Trigonometría Esférica** lo desarrolla de la página 14 a 77, mientras que en las hojas restantes cubre diversos temas de Aplicación del Álgebra a la Geometría, Secciones Cónicas, Superficies de Segundo Grado y Ecuaciones Superiores.

En seguida, mencionamos los temas que cubre el autor en cuanto al estudio de la **Trigonometría Esférica**, sin entrar en detalles.

Acerca del contenido de Trigonometría Esférica

El autor comienza este apartado definiendo un Triángulo Esférico para posteriormente referirlo como parte del objeto de estudio de la Trigonometría Esférica.

> *Se llama triángulo esférico á la parte de la superficie de una esfera comprendida por tres arcos de círculo máximo, y la ciencia que trata de resolver estos triángulos se llama Trigonometría Esférica.*

Y en este sentido señala que se considerarán únicamente aquellos triángulos cuyos lados sean menores a 180°, no ha de sorprendernos que en todo Triángulo Esférico sus tres lados sea posible medirlos en grados o radianes, como veremos más adelante, cada triángulo esférico tiene asociado un ángulo triedro cuyo vértice coincide con el centro de la esfera de tal manera que; los lados del Triángulo Esférico sirven de medida a las caras del triedro y viceversa.

Antes de adentrarse en la resolución de los Triángulos Esféricos el autor busca familiarizar al lector con los elementos y nociones básicas de la Trigonometría Esférica. En este sentido lista más de treinta proposiciones, y al demostrarlas va haciendo referencia a ciertas figuras que él mismo anexa al final de su texto, y que nosotros también hemos incluido.[2] Enseguida citamos parte de este contenido.

De la primera proposición se tiene que:

> *1ª Todo Triángulo esférico determina en el centro de la esfera a un ángulo sólido compuesto de tres ángulos planos, que tienen por medida cada uno el lado correspondiente del triángulo; y la inclinación respectiva de dichos planos es la misma que la de los ángulos del triángulo esférico; y también se verifica a la inversa.*

[2] Al final del presente apartado, mostramos algunas de las imágenes que Vallejo refiere como parte del desarrollo del contenido de Trigonometría Esférica, y que proporciona al final de su texto.

De esta doble implicación que el autor procede a demostrar, es evidente la relación existente entre los elementos del Triángulo Esférico con las caras y ángulos de su triedro asociado. Gracias a este vínculo, cada ángulo y lado del Triángulo Esférico es medido en grados o radianes, y es posible aplicar en éstos las fórmulas conocidas de Trigonometría Plana.

En la novena proposición afirma que

IX. Dos triángulos de una misma esfera, ó de esferas iguales, son totalmente iguales quando tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido

Las dos proposiciones subsecuentes a ésta, van en el mismo sentido, de tal modo que se corresponden con alguno de los tres criterios de congruencia aplicables en los triángulos rectilíneos, en las que por cierto, tampoco utiliza el término *congruencia*. En este sentido, en proposiciones previas refiere a una igualdad de triángulos distinta denominada por simetría.

Y para terminar de mostrar parte de este contenido citamos la última y trigésima primera proposición.

XXXI. La superficie de un triángulo esférico es á la de toda la esfera como el exceso de los tres ángulos del triángulo sobre dos rectos es á ocho ángulos rectos ó á dos circunferencias

Dem. Para probarlo, supongamos que el triángulo dado sea ABC (fig. 26), y concíbanse prolongados sus lados hasta que se encuentren al círculo máximo DEFG tirado de un modo qualquiera fuera del triángulo, y tendremos en virtud de la proposición precedente que los dos triángulos ADE, AGH juntos equivalen á la superficie comprendida por dos semicircunferencias cuyo ángulo esté expresado por A, luego llamando 2π *á la circunferencia o á 4 ángulos rectos, y S á la superficie de la esfera, será*

$ADE + AGH = S\frac{\text{áng}\ A}{2\pi}$*; por la misma razón será* $BGF + BID = S\frac{\text{áng}\ B}{2\pi}$*;* $CIH + CFE = S\frac{\text{áng}\ C}{2\pi}$*;pero la suma de estos seis triángulos excede á la semiesfera en dos veces el triángulo ABC, luego se tendrá*

$$2\ \text{triáng}.ABC = S\frac{\text{áng}\ A}{2\pi} + S\frac{\text{áng}\ B}{2\pi} + S\frac{\text{áng}\ C}{2\pi} - \frac{S}{2}$$

Y $\text{triáng}.ABC = \frac{S}{4\pi}(\text{áng}.A + \text{áng}.B + \text{áng}.C - \pi)$ *que puesta en proporción manifiesta la proposición enunciada*

Esc. Esta proposición se atribuye comúnmente á Alberto Girará que la enuncia sin una demostración rigorosa en la obra intitulada ínvention nouvelle en Algebre impresa en Amsterdam; pero se debe atribuir más bien á Cavalleri que la demuestra bien en la obra intitulada Directorium general urano metricum.

De esta última proposición, hemos incluido además su demostración en la que podemos apreciar la notación utilizada por el autor, la forma en que cita las figuras, etc. Del texto posterior a ésta, evidenciamos el vasto conocimiento histórico del autor y su total dominio matemático del tema ya que, a menudo hace uso de este tipo de notas para referir algún hecho histórico o puntualizar en algún aspecto matemático previamente abordado y que pudiera causar alguna confusión al lector.

Continúa con la resolución de los Triángulos Esféricos y refiere que, puede hacerse por analogías o por fórmulas que contengan las relaciones trigonométricas entre los elementos del Triángulo. Manifiesta que prefiere el segundo método, permaneciendo fiel a éste y por construcción deduce los primeros grupos de fórmulas, que hemos optado por listar en el orden deducido, y a diferencia del autor mencionaremos cada grupo por su nombre.

1. Ley de senos
2. Ley de cosenos
3. Fórmulas de Bessel
4. Fórmulas de las cotangentes

En la actualidad, los cuatro grupos de fórmulas previamente mencionados suele denominárseles Fórmulas Fundamentales de los Triángulos Esféricos. En el siguiente capítulo profundizaremos en la deducción de cada uno de estos grupos, como parte del análisis efectuado en los libros de texto mexicanos de Trigonometría Esférica.

Por tratarse de las fórmulas fundamentales, son aplicables a todo tipo de Triángulo Esférico, en este sentido el autor refiere que éstas se simplifican cuando el triángulo es rectángulo, es decir, cuando uno de sus ángulos es recto. Supone el ángulo $C = \frac{\pi}{2}$ entonces $sen\, C = 1, \cos C = 0$, al sustituir en las fundamentales obtiene las fórmulas relativas a los Triángulos Rectángulos para posteriormente determinar sus respectivas analogías. No da explícitamente las fórmulas para los Triángulos Esféricos Rectiláteros, menciona que pueden obtenerse de manera análoga a las de los Triángulos Rectángulos, sólo que ahora bajo el supuesto que uno de sus lados es igual a 90°.

Como parte de la resolución de los Triángulos Rectángulos, enumera los casos que puedan presentarse de la siguiente manera.

> *Los casos que pueden ocurrir son seis: I ° dados los dos lados que forman el ángulo recto hallar lo demás; 2° dada la hipotenusa y un lado, hallar lo demás; 3° dado un lado y el ángulo opuesto, hallar lo demás; 4° dado un lado y el ángulo adyacente, hallar lo demás; 5° dada la hipotenusa y un ángulo, hallar lo demás; y 6° dados los dos ángulos hallar lo demás.*

La resolución para cada uno de los seis casos está contenida en la siguiente tabla, donde además observamos algunas de las fórmulas que previamente dedujera el autor como parte del contenido matemático en torno a los Triángulos Esféricos Rectángulos.

TABLA

Que contiene la resolucion de un triángulo esférico qualquiera rectángulo en C.

Casos.	Datos.	Partes buscadas.	Valores de las partes desconocidas determinadas por las conocidas.
I	C, a, b	c, A, B	$\cos.c = \cos.a.\cos.b$; $\tan g.A = \frac{\tan g.a}{\text{sen}.b}$; $\tan g.B = \frac{\tan g.b}{\text{sen}.a}$
II	C, a, c	b, A, B	$\cos.b = \frac{\cos.c}{\cos.a}$; $\text{sen}.A = \frac{\text{sen}.a}{\text{sen}.c}$; $\cos.B = \frac{\tan g.a}{\tan g.c} = \frac{\cot.c}{\cot.a}$
III	C, a, A	c, b, B	$\text{sen}.c = \frac{\text{sen}.a}{\text{sen}.A}$; $\text{sen}.b = \frac{\tan g.a}{\tan g.A}$; $\text{sen}.B = \frac{\cos.A}{\cos.a}$
IV	C, a, B	c, A, b	$\tan g.c = \frac{\tan g.a}{\cos.B}$; $\tan g.b = \text{sen}.a.\tan g.B$; $\cos.A = \cos.a.\text{sen}.B$
V	C, c, A	b, a, B	$\tan g.b = \tan g.c.\cos.A$; $\text{sen}.a = \text{sen}.c.\text{sen}.A$. $\cot.B = \frac{\cos.c}{\cot.A} = \cos.c.\tan g.A$; ó $\tan g.B = \frac{1}{\cos.c.\tan g.A}$
VI	C, A, B	c, a, b	$\cos.c = \cot.A.\cot.B = \frac{1}{\tan g.A.\tan g.B}$; $\cos.a = \frac{\cos.A}{\text{sen}.B}$; $\cos.b = \frac{\cos.B}{\text{sen}.A}$

Figura 2.4: Resolución de los Triángulos Esféricos Rectángulos

Para concluir su estudio de los Triángulos Rectángulos y teniendo como referencia la información de la tabla realiza algunas observaciones a modo de indicar si la solución es única o no.

En cuanto a la resolución de los Triángulos Esféricos Oblicuángulos, primeramente deduce sus fórmulas y para ello realiza algunos ajustes en los primeros cuatro grupos previamente deducidos de tal manera que sean calculables por logaritmos. Distingue seis posibles casos que pueden presentarse al tratar de resolver este tipo de Triángulos, y finalmente muestra la siguiente tabla donde es posible apreciar parte del contenido matemático que esboza el autor.

TABLA

En que se contiene la resolucion de los triángulos esféricos obliquángulos.

Casos.	Datos.	Partes buscadas.	Valores de las partes desconocidas determinadas por las conocidas
I	a	A	$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\text{sen.}\frac{b-c+a}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{a-b+c}{2}}{\text{sen.}\frac{a+b+c}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{b+c-a}{2}}}$, ó $\text{sen.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\text{sen.}\frac{b+a-c}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{sen.}b\,.\,\text{sen.}c}}$
	b	B	$\text{tang.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{\text{sen.}\frac{c-a+b}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{a-c+b}{2}}{\text{sen.}\frac{a+b+c}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{c+a-b}{2}}}$, ó $\text{sen.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{\text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{b+c-a}{2}}{\text{sen.}a\,.\,\text{sen.}c}}$
	c	C	$\text{tang.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{\text{sen.}\frac{a-b+c}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{c-a+b}{2}}{\text{sen.}\frac{a+b+c}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{a+b-c}{2}}}$ ó $\text{sen.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{\text{sen.}\frac{b+c-a}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{sen.}a\,.\,\text{sen.}b}}$
II	A	a	$\text{tang.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\dfrac{\text{cos.}\frac{B+A+C}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{B+C-A}{2}}{\text{cos.}\frac{B+A-C}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{B-C-A}{2}}}$, ó $\text{sen.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\dfrac{\text{cos.}\frac{A+B+C}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{B+C-A}{2}}{\text{sen.}B\,.\,\text{sen.}C}}$
	B	b	$\text{tang.}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\dfrac{\text{cos.}\frac{B+A+C}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{A+C-B}{2}}{\text{cos.}\frac{A-C+B}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{A-C-B}{2}}}$, ó $\text{sen.}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\dfrac{\text{cos.}\frac{B+C+A}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{A+C-B}{2}}{\text{sen.}A\,.\,\text{sen.}C}}$
	C	c	$\text{tang.}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\dfrac{\text{cos.}\frac{B+A+C}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{A+B-C}{2}}{\text{cos.}\frac{B-A+C}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{B-A-C}{2}}}$ ó $\text{sen.}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\dfrac{\text{cos.}\frac{A+B+C}{2}\,.\,\text{cos.}\frac{A+B-C}{2}}{\text{sen.}A\,.\,\text{sen.}B}}$

Figura 2.5: Primera parte de la resolución de los Triángulos Esféricos Oblicuángulos

	A	a	$\text{tang.}\frac{b-a}{2}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}c\times\frac{\text{sen.}\frac{B-A}{2}}{\text{sen.}\frac{B+A}{2}}$
III	B	[illegible]	$\text{tang.}\frac{b+a}{2}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}c\times\frac{\text{cos.}\frac{B-A}{2}}{\text{cos.}\frac{B+A}{2}}$ — de donde llamando a',b' á los valores de estas tangentes, esto es, haciendo $\frac{b-a}{2}=b'$, y $\frac{b+a}{2}=a'$, resulta $a=\frac{b'-a'}{2}$, $b=\frac{b'+a'}{2}$
	c	C	$\text{sen.C}=\frac{\text{sen.A}\cdot\text{sen.}c}{\text{sen.}a}=\frac{\text{sen.B}\cdot\text{sen.}c}{\text{sen.}b}$
	a	A	$\text{tang.}\frac{B-A}{2}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}C\times\frac{\text{sen.}\frac{b-a}{2}}{\text{sen.}\frac{b+a}{2}}$
IV	b	B	$\text{tang.}\frac{B+A}{2}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}C\times\frac{\text{cos.}\frac{b-a}{2}}{\text{cos.}\frac{b+a}{2}}$ — de donde llamando A',B' á los ángulos á que corresponden estas tangentes, esto es, haciendo $\frac{B-A}{2}=A'$, y $\frac{B+A}{2}=B'$ resulta $A=\frac{B'-A'}{2}$, $B=\frac{B'+A'}{2}$
	C	c	$\text{sen.}c=\frac{\text{sen.C}\cdot\text{sen.}a}{\text{sen.A}}=\frac{\text{sen.C}\cdot\text{sen.}b}{\text{sen.B}}$
	a	A	$\text{sen.A}=\frac{\text{sen.}a\cdot\text{sen.B}}{\text{sen.}b}$
V	B	c	$\text{tang.}\frac{c}{2}=\frac{\text{cos.}\frac{A+B}{2}}{\text{cos.}\frac{B-A}{2}}\times\text{tang.}\frac{a+b}{2}$
	b	C	
	B	a	$\text{sen.}a=\frac{\text{sen.}b\cdot\text{sen.A}}{\text{sen.B}}$
VI	A	c	$\text{tang.}\frac{C}{2}=\frac{\text{cos.}\frac{b-a}{2}}{\text{cos.}\frac{a+b}{2}}\times\text{cot.}\frac{A+B}{2}$
	b	C	

Figura 2.6: Segunda parte de la Resolución de los Triángulos Esféricos Oblicuángulos

De la información aquí recabada, realizar varias observaciones en relación a los resultados que pudieran obtenerse para cada caso. Y con el fin de mostrar el uso de las tablas en la práctica, realiza tres ejemplos, en el primero resuelve un Triángulo Esférico y en los otros dos resuelve Triángulos Oblicuángulos.

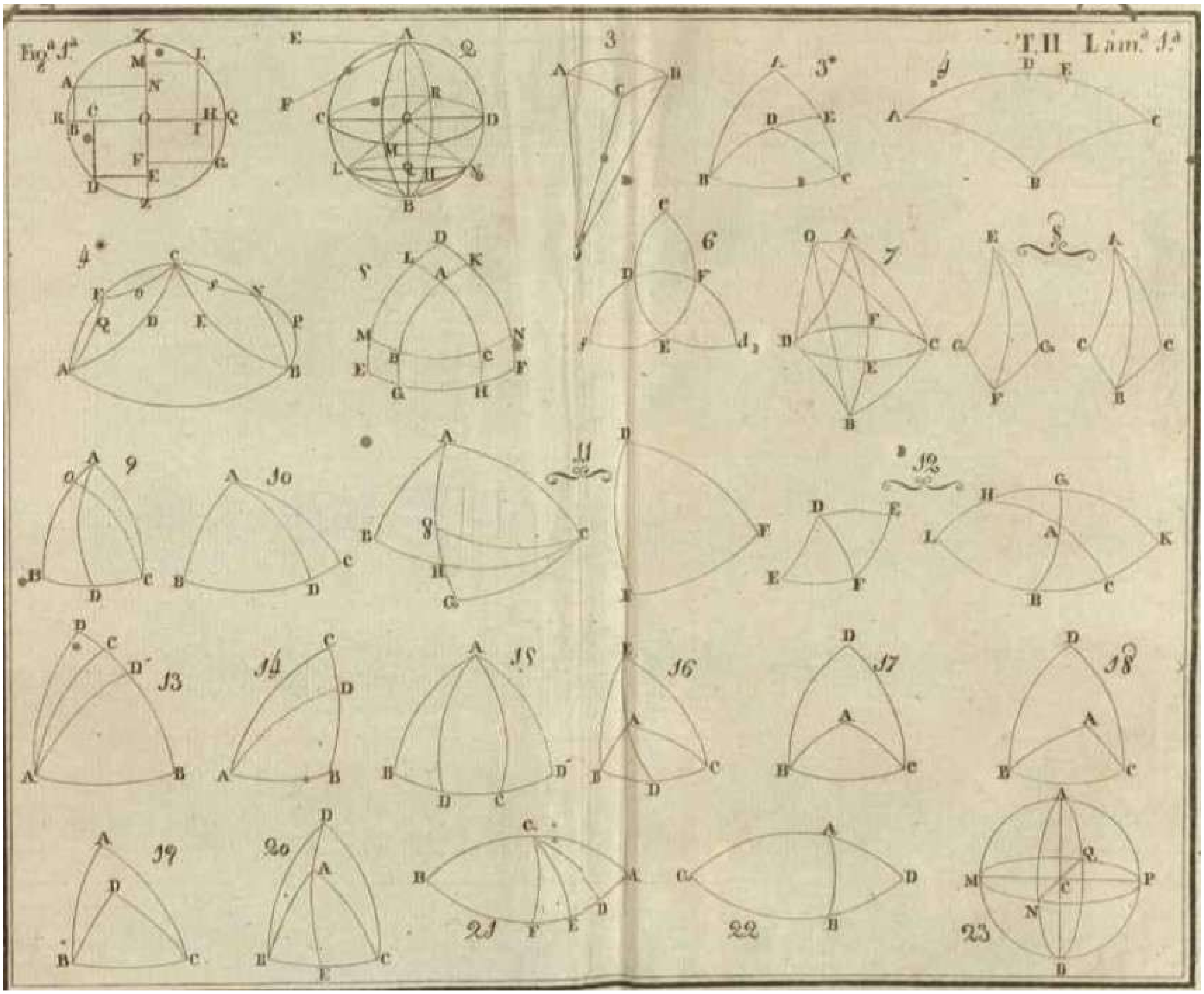


Figura 2.7: Algunas de las figuras que refiere el autor como parte del contenido de Trigonometría Esférica

CAPÍTULO III

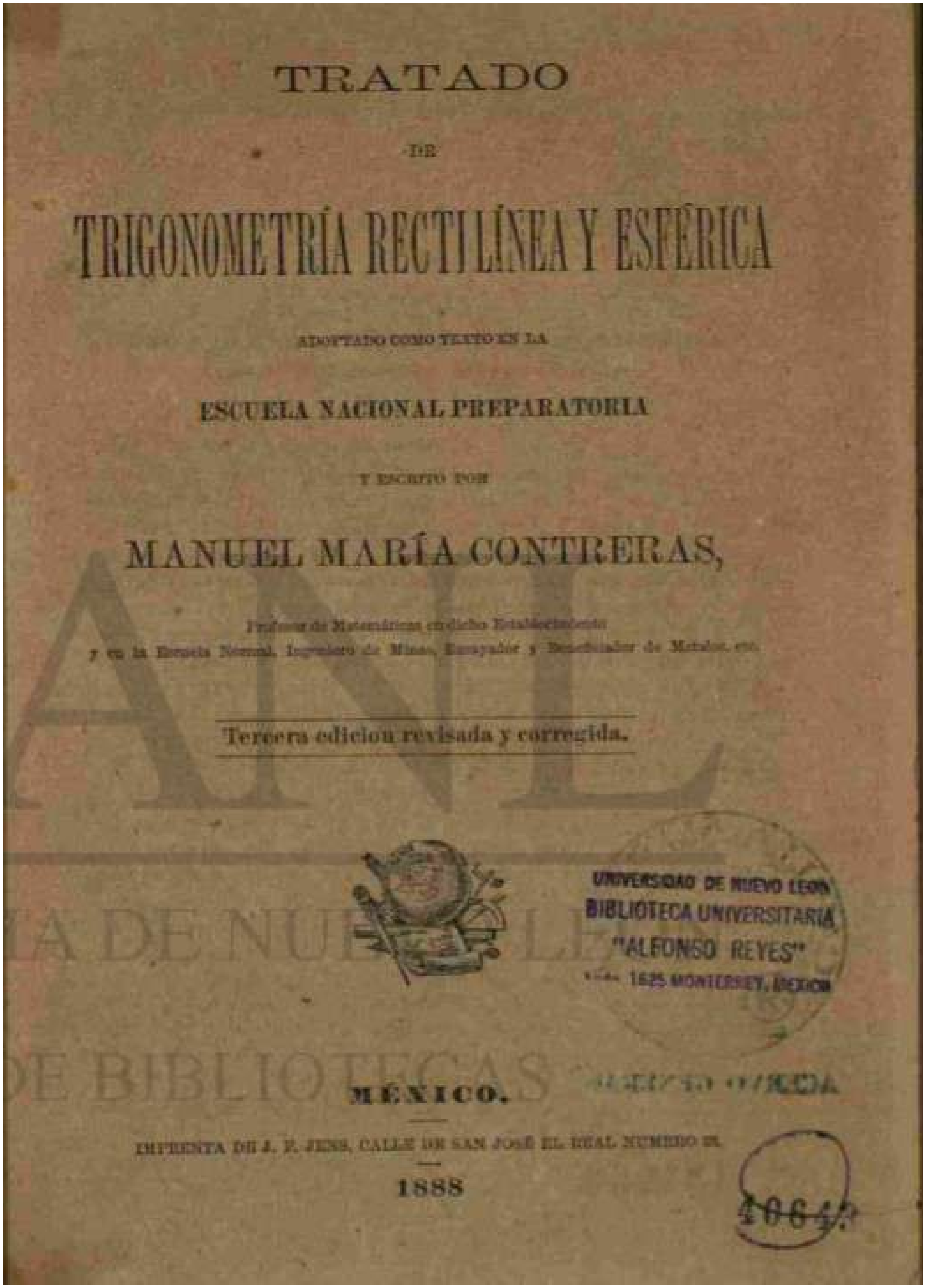
Algunos textos mexicanos utilizados para la enseñanza de la Trigonometría Esférica en la ENP

En este capítulo se analizarán tres libros, de autores mexicanos, que fueran adoptados como libros de texto para la enseñanza de la **Trigonometría Esférica** en las cátedras de Matemáticas de la ENP. En particular, se realizará una reseña respecto al contenido, la extensión y la forma en que cada autor aborda lo que compete al estudio de la **Trigonometría Esférica**.

Los textos que estudiaremos son: *Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica* de Manuel María Contreras, *Curso de Trigonometría* de Arturo Lamadrid y *Tratado Elemental de Trigonometría Rectilínea y Esférica* de Carlos Tamborrel.

En lo sucesivo, los párrafos en letras cursivas indicarán que se ha transcrito fielmente del texto original, y de la autenticidad de las imágenes destacamos que serán tomadas de los textos estudiados, a menos que se especifique lo contrario.

Libro "Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica" de Don Manuel María Contreras



TRATADO

DE

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y ESFÉRICA

ADOPTADO COMO TEXTO EN LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Y ESCRITO POR

MANUEL MARÍA CONTRERAS,

Profesor de Matemáticas en dicho Establecimiento
y en la Escuela Normal, Ingeniero de Minas, Ensayador y Beneficiador de Metales, etc.

Tercera edicion revisada y corregida.

MÉXICO.

IMPRENTA DE J. F. JENS, CALLE DE SAN JOSÉ EL REAL NÚMERO [illegible]

1888

Don Manuel María Contreras nació en la Ciudad de México en 1833 y murió en esta misma ciudad en 1902. Fue aprobado por unanimidad como Ingeniero de Minas y Metalurgista en el año de 1856. Gracias a su notable personalidad y dotes intelectuales, a lo largo de su vida desempeñó diversos cargos tanto en el sector público como en el sector privado, que van desde Ingeniero en Minas, Ensayador de la Casa de Moneda, Inventor, Inspector y Diputado de Minería en el estado de Hidalgo y en Guanajuato, Regidor y Presidente Municipal de la capital de la República, Diputado y Senador.

Sin embargo, su actividad principal y lo que nos ha llevado a evocar tal personalidad es su desempeño dentro de la enseñanza de la Matemática en la ENP a partir de 1868, donde fungió como catedrático en esta área y del área de Física Experimental, siendo en esta última docente a partir de 1874. Su labor en la enseñanza no se restringió únicamente a la ENP, a partir de 1877 fue profesor de Mecánica en la de Ingenieros y posteriormente dirigió la Escuela Normal.

Autor de varios libros de Álgebra, Aritmética, Geometría y Trigonometría, que fueron adoptados como libros de texto no sólo dentro de la ENP, también en varios estados de la República. La relevancia de sus textos se ve reflejada en las múltiples ediciones que hay de éstos así como en las consultas que hasta nuestros días se hace de ellos. De modo particular, estudiaremos una de sus obras que fuera utilizada para impartir la cátedra de **Trigonometría Esférica** dentro de la ENP, que lleva por título: "*Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica"*.

Del texto previamente mencionado se estudiará la obra que corresponde a la tercera edición publicada en el año de 1888, información que puede verificarse en la página anterior donde se muestra la imagen de la portada del libro aquí descrito, como su nombre lo indica, se trata de un compendio que contiene los conocimientos más relevantes de aquella época tanto de la Trigonometría Rectilínea como los de la Trigonometría Esférica.

A pesar de que el libro carece de prólogo, posterior a la portada, hay un apartado bastante interesante que, no es común encontrar en los libros de texto dígase de Matemáticas o de cualquier otra ciencia en la actualidad, lleva por título: *OPINIONES publicadas sobre las Matemáticas del Ingeniero Manuel María Contreras,* enseguida citamos textualmente parte de éste.

Los que suscribimos certificamos:

1° Que el profesor D. Manuel María Contreras escribió su tratado de matemáticas por encargo del director de la Escuela Nacional Preparatoria, con el objeto de satisfacer debidamente el programa del actual plan de estudios.

2° Que el original de su aritmética fué examinado por los CC. Profesores Gabino Barreda, Francisco Díaz Covarrubias, Rafael A. de la Peña é Ignacio Ortiz de Zarate;[...], y que los de su geometría y trigonometría lo fueron por los profesores Manuel Ramírez y Francisco Echegaray, quienes unánimemente los consideraron buenos y adecuados á la enseñanza.

3° Que la junta general de catedráticos de dicha Escuela, ha ratificado esa calificación y los ha aceptado como obras de texto.

4° Que las modificaciones que la experiencia ha indicado y hemos propuesto al autor, las ha adoptado, y que seguirá haciendo algunas otras en las posteriores ediciones, con el fin de ir sucesivamente facilitando y mejorando la enseñanza de los alumnos, y

5° Que con el uso de los mencionados tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, hemos obtenido durante varios años, muy buenos resultados en la instruccion de nuestros discípulos, tanto en las clases del gobierno como en las particulares.

Observamos que, lo aquí citado corresponde a una publicación realizada en el Diario Oficial, con fecha Octubre 26 de 1878. En el texto hay otras dos notas más, que fueron publicadas en el mismo diario en Octubre de 1878, y que fungieran como una especie de certificado en donde por un lado a petición de antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, y por otro lado; los directores de establecimientos de instrucción primaria y preparatoria de la capital se hiciera constar públicamente la eficacia de los libros de texto del Sr. Contreras, bajo el argumento de los excelentes resultados obtenidos en la instrucción y aprovechamiento de los alumnos en sus respectivos colegios.

En lo que respecta al contenido del libro, de las 233 páginas que posee, 151 son destinadas para el estudio de la Trigonometría Rectilínea (página 5 a 156), mientras que en las 76 páginas restantes desarrolla lo que corresponde a la **Trigonometría Esférica** (página 157 a 233). Para fines prácticos, en lo sucesivo se abordará cada uno de los temas de estudio en relación a la **Trigonometría Esférica**, procurando representar lo más fielmente posible el contenido del libro.

Definiciones y propiedades de los triángulos esféricos

A modo de introducción el autor parte dando un cumulo de definiciones y propiedades que serán pieza clave para el entendimiento de los temas subsecuentes.

Primeramente, define los dos tipos de círculos que es posible determinar en la superficie de una esfera (círculo menor y círculo máximo). Aborda e ilustra los círculos máximos que como se verá más adelante, es a partir de éstos que se define a un triángulo esférico.

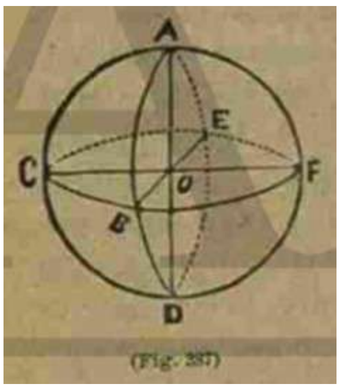


Figura 3.1: Círculos Máximos

Un plano, sea cual fuere su dirección, corta siempre a la esfera según un círculo que generalmente es de magnitud variable y se le llama ***círculo menor****; pero cuando el plano pasa por el centro de la esfera, [...] su intersección con la superficie de ella determina un círculo, como ABDE (fig. 3.1) que se llama* ***círculo máximo****.*

Nótese además que, todos los círculos máximos ABDE, ACDF, CBFE, etc., tienen la propiedad de ser iguales, debido a que su centro es el de la esfera, y como cada uno de estos círculos máximos la biseca.

Otra de las definiciones que hace el autor es la siguiente:

Se llama polo de un círculo, sea o no máximo, trazado sobre la esfera, el punto de la superficie de la misma esfera equidistante de todos los puntos de su circunferencia.

Distingue que cada círculo posee dos polos y por definición, éstos corresponderán a las extremidades del diámetro de la esfera perpendicular al plano del círculo. Por ejemplo, los polos del círculo ABDE son los puntos C y F. Aunque de momento está definición pareciera irrelevante, su utilidad se concretiza más adelante al retomarla el autor para definir los Triángulos Esféricos Suplementarios, también denominados Triángulos polares, en la práctica y para la deducción de algunas fórmulas es conveniente trabajar con el Triángulo Suplementario del Triángulo Esférico.

El autor continúa con una especie de preámbulo respecto a los Triángulos Esféricos antes de dar su definición formal y algunas de sus propiedades. Para ello, evoca la construcción de un triedro en la esfera, menciona sus elementos y, muestra la relación entre éstos y los del Triángulo Esférico como en seguida se cita.

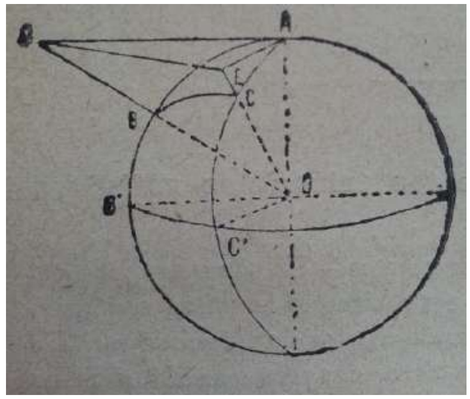


Figura 3.2: Triángulo Esférico y su triedro asociado

> *Si se corta una esfera por tres planos que concurren en el centro resultará un triedro OABC (fig. 3.2) cuyas aristas son radios de la esfera, sus caras AOB, AOC y BOC, son sectores de círculos máximos, y sus ángulos diedros, formados por las caras, tienen por aristas los radios. Por último, ese triedro determina sobre la superficie de la esfera una figura ABC, limitada por tres arco de círculos máximos, que es un triángulo esférico.*

Nótese que, así como en los triángulos rectilíneos, los ángulos de los Triángulos Esféricos se nombran con las letras mayúsculas A, B y C (Figura 3.2), y los lados opuestos a cada ángulo por las letras minúsculas a, b y c respectivamente.

El autor distingue como elementos del triángulo sus lados, sus ángulos y su superficie. La definición que hace de los lados y los ángulos de un Triángulo Esférico es a partir del vínculo entre éste y su triedro asociado como enseguida se indica.

Para los lados a, b y c del Triángulo citamos lo siguiente:

> *Los ángulos planos del triedro formados por dos radios tienen por medida los arcos de los respectivos círculos máximos, que pasan por las extremidades de las aristas, y que son los lados del triángulo esférico.*

Con respecto a los ángulos refiere que, los ángulos formados por la intersección de dos planos en las aristas AO, BO y CO corresponden a los ángulos del triedro y son iguales a los ángulos A, B y C del triángulo esférico respectivamente. Continúa, recordándonos la definición de un ángulo diedro.

Un diedro tiene por medida el ángulo plano correspondiente formado por dos perpendiculares levantadas a la intersección común en el mismo punto, contenida cada una de las perpendiculares en uno de los planos del diedro

Y así, el ángulo A cuyos trazos es posible identificar en la figura 3.2 queda determinado de la siguiente manera:

La medida del diedro según AO será el ángulo DAE formado por las tangentes levantadas en el punto A respectivamente a los arcos AB y AC.

El autor continúa dando una definición más formal del Triángulo Esférico.

Se llama triángulo esférico la figura limitada por tres arcos de círculos máximos en la superficie de una esfera.

De la Trigonometría Esférica refiere lo siguiente:

La trigonometría esférica tiene por objeto: 1°, conocer las relaciones que existen entre los elementos de un triángulo esférico; y 2°, dados tres elementos, determinar por medio del cálculo los otros tres, ó la superficie del triángulo.

De esta última definición no ha de sorprendernos que, en los temas subsecuentes, la principal tarea del autor consista en proporcionar las herramientas necesarias para cubrir ambos objetos de estudio de la Trigonometría Esférica. No sin antes concluir este apartado en el que sigue dando lo que serán las bases para el entendimiento de los temas subsecuentes, y para ello hemos organizado el resto de la información de la siguiente manera: 1. Especificaciones de los Triángulos Esféricos; 2. Propiedades de los Triángulos Esféricos y 3. Triángulos Esféricos Suplementarios.

1. Especificaciones de los Triángulos Esféricos

Cada ángulo del Triángulo Esférico siempre es menor que 180°, únicamente se considerarán los triángulos esféricos cuyos lado sean menores que 180°, y para simplificar se supondrá el radio de la esfera igual a la unidad.

De tal forma que, cada lado del Triángulo Esférico corresponde a la medida del ángulo plano de las caras del triedro en términos del arco y así, $a = \sphericalangle BOC = \widehat{BC}$, $b = \sphericalangle AOC = \widehat{AC}$ y $c = \sphericalangle AOB = \widehat{AB}$.

2. Propiedades de los Triángulos Esféricos

Al prolongar los vértices A, B y C de cualquier triángulo esférico con el centro O de la esfera se obtiene su triedro asociado y, por las relaciones previamente descritas, las propiedades de los triedros son aplicables a los Triángulos Esféricos. En este sentido Contreras lista las siguientes propiedades.

> *1° Cada uno de los ángulos formado por los aristas es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia (629). Estas propiedades aplicadas al triangulo esférico quedarán cifradas en las siguientes desigualdades.*
>
> $$a < b + c$$
> $$a > b - c$$
>
> *2° La suma de los tres lados del triángulo esférico es menor que cuatro rectos. (630)*
>
> $$a + b + c < 360°$$
>
> *3° Cada lado del triángulo esférico es menor que 180°*
>
> *4° El lado mayor está opuesto al mayor ángulo y recíprocamente.*
>
> *5° La suma de los ángulos del triángulo esférico es mayor que 2 y menor que 6 ángulos rectos (633).*
>
> $$A + B + C > 2rectos \qquad y \qquad A + B + C < 6rectos$$
>
> *6° Se llama exceso esférico la diferencia que hay entre las sumas de los tres ángulos de un triángulo y 180°. El exceso esférico es mayor que cero y menor que 360°. En efecto, representándolo, por E tendremos:*
>
> $$E = A + B + C - 180°$$

No demuestra todas las propiedades, argumentando haberlo hecho en otro de sus textos, las que se encuentran señaladas con un (629), (630) y (633) indican el número con que es posible identificarlas en otra de sus obras, es la manera de citar del autor. Por la numeración, sabemos que se trata de su libro “Tratado de Geometría Elemental” publicado en 1884. Cabe mencionar que, en lo sucesivo el autor cita de esta manera en más de una ocasión.

3. Triángulos Esféricos Suplementarios

Para todo Triángulo Esférico es posible obtener otro cuyos lados sean suplementos de los ángulos del primero, y cuyos ángulos sean suplemento de los lados del primero. De modo que, siendo A, B y C los ángulos y a, b y c los lados del primer triángulo, y representando por A´, B´y C´ los ángulos y por a´, b´y c´ los lados del segundo, se tiene:

$$a' = 180° - A \qquad A' = 180° - a$$

$$b' = 180° - B \qquad B' = 180° - b$$

$$c' = 180° - C \qquad C' = 180° - c$$

A este segundo Triángulo A´B´C´ suplementario del triángulo ABC se le llama también *Triangulo Polar.*

Relación entre los ángulos y los lados de un triángulo esférico

Resolver un triángulo esférico consiste en calcular tres elementos del mismo una vez que se conocen los otros tres. Para ello, el autor distingue cuatro relaciones diferentes que se pueden dar entre los ángulos y los lados de cualquier triángulo esférico de la siguiente manera:

1ª Entre los tres lados y un ángulo

2ª Entre dos lados y los ángulos opuestos

3ª Entre dos lados, el ángulo comprendido y uno de los ángulos opuestos

4ª Entre un lado y los tres ángulos

Al abordar cada una de éstas busca determinar el vínculo existente entre los lados y ángulos del triángulo de tal manera que, deduce cuatro grupos de fórmulas que en la actualidad son identificadas como las Fórmulas Fundamentales de la Trigonometría Esférica.

De la primera relación, ***entre los tres lados y un ángulo***, citamos lo que Contreras realiza al respecto.

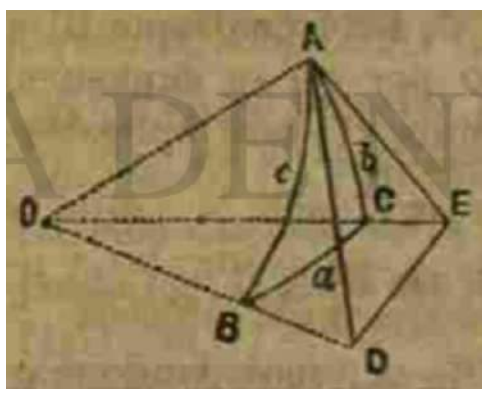


Figura 3.3: De la relación entre los tres lados y ángulo del Triángulo Esférico

Sea ABC (Fig. 3.3) un triángulo trazado sobre una esfera cuyo centro es O, y cuyo radio supondremos igual a la unidad. Pudiendo ser el lado a de cualquier magnitud supondremos menores que 90° los lados b y c. Trazando los radios OA, OB y OC, las tangentes AD y AE; prolongando OB y OC y tirando las rectas DE, tendremos:

AD=tang.c y AE= tang.b

OD=sec.c y OE= sec.b

Ángulo EAD=A y el ángulo EOD=a

Los triángulos EOD y EAD dan:

$$DE^2 = EO^2 + DO^2 - 2EO \times DOcos.EOD$$

$$DE^2 = EA^2 + DA^2 - 2EA \times DAcos.EAD$$

Sustituyendo $DE^2 = sec.^2\, b + sec.^2\, c - 2sec.b\, sec.c\, cos.a$

$$DE^2 = tan.^2\, b + tan.^2\, c - 2tan.b\, tan.c\, cos.A$$

Restando la segunda ecuación de la primera para eliminar a DE^2*recordando que* $sec^2.a = 1 + tang.^2\, a$*, y sustituyendo por* $sec.b = \frac{1}{cos.b}$ *por* $sec.c = \frac{1}{cos.c}$*, por* $tang.b = \frac{sen.b}{cos.b}$ *y por* $tang.c = \frac{sen.c}{cos.c}$ *, resulta:*

$$0 = 1 + 1 - \frac{2cos.a}{cos.b\, cos.c} + \frac{2sen.b\, sen.c\, cos.A}{cos.b\, cos.c}$$

Reduciendo, dividiendo por 2 y quitando los denominadores, resulta:

$$0 = cos.b\, cos.c - cos.a + sen.b\, sen.c\, cos.A$$

$$cos.a = cos.b\, cos.c + sen.b\, sen.c\, cos.A \ldots\ldots (1)$$

Observamos que, el autor ya no especifica a detalle el porqué de cada uno de los resultados que va infiriendo, asume que el alumno ya posee los conocimientos de Geometría y Trigonometría Plana, hace uso de algunas definiciones de trigonometría esférica sin mencionarlas explícitamente dentro del procedimiento y aunque, no efectúa todas las operaciones sí las deja muy bien indicadas de modo que al realizar las respectivas sustituciones se pueden comprobar los resultados sin problema alguno.

La deducción previamente citada, es bajo el supuesto de que *el lado a es de cualquier magnitud, los lados b y c menores que 90°* a fin de generalizar los resultados obtenidos el autor considera los siguientes casos:

1) *Suponiendo el lado a de cualquier magnitud (menor, igual o mayor a 90°), c>90° y b<90°*
2) *Considerando el lado a de cualquier magnitud, b>90° y c>90°*
3) *Suponiendo b ó c, o que ambos son iguales a 90°*

En los primeros dos casos trabaja con su triángulo suplementario, y del tercer caso sugiere abordarlo de manera análoga al que citamos inicialmente. Concluye que, la *fórmula (1)* es general y aplicable a todo Triángulo Esférico cualquiera que sea la magnitud de sus lados.

Mediante procedimientos análogos o por simple permutación de letras se obtienen las otras dos ecuaciones que conforman el primer grupo de fórmulas.

$$cos.a = cos.b\ cos.c + sen.b\ sen.c\ cos.A$$

$$cos.b = cos.a\ cos.c + sen.a\ sen.c\ cos.B \quad ....(1)$$

$$cos.c = cos.a\ cos.b + sen.a\ sen.b\ cos.C$$

Este primer grupo de fórmulas corresponde a la Ley de Cosenos para Triángulos Esféricos, a través de ésta es posible calcular los ángulos conociendo los tres lados o un lado conociendo los otros dos y el ángulo comprendido entre éstos.

De las relaciones faltantes mostraremos su respectivo grupo de fórmulas, de la deducción de éstas únicamente mencionamos que fueron obtenidas por el autor a través del primer grupo de fórmulas no indagaremos al respecto.

De la segunda relación, ***entre dos lados y los ángulos opuestos***, se tiene:

$$\frac{sen.a}{sen.A} = \frac{sen.b}{sen.B} = \frac{sen.c}{sen.C} \quad ......\ (2)$$

Se trata de la Ley de Senos e indica que, en un triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

De la tercera relación, ***entre dos lados, el ángulo que forman y el ángulo opuesto a uno de ellos***, se obtiene el siguiente grupo de fórmulas.

$$cot.a\ sen.b - sen.C\ cot.A = cos.b\ cos.C$$

$$cot.b\ sen.a - sen.C\ cot.B = cos.a\ cos.C$$

$$cot.b\ sen.c - sen.A\ cot.B = cos.c\ cos.A \quad ....\ (3)$$

$$cot.c\ sen.b - sen.A\ cot.C = cos.b\ cos.A$$

$$cot. c\ sen. a - sen. B\ cot. C = cos. a\ cos. B$$

$$cot. a\ sen. c - sen. B\ cot. A = cos. c\ cos. B$$

De la cuarta y última relación, **entre un lado y los tres ángulos**, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\cos. A = -\ cos. B\ cos. C + sen. B\ sen. C\ cos. a$$
$$\cos. B = -\ cos. A\ cos. C + sen. A\ sen. C\ cos. b \text{ .... (4)}$$
$$\cos. C = -\ cos. A\ cos. B + sen. A\ sen. B\ cos. c$$

Fórmulas relativas a los triángulos Rectángulos

Primeramente, distingue los tipos de **Triángulos Esféricos Rectángulos** en función de la cantidad de ángulos rectos que posean, no se interesa por referirlos con un nombre en particular.

Los triángulos esféricos pueden tener los tres ángulos rectos, dos, ó solamente uno

Continúa diciendo que, es inútil considerar los casos en que el triángulo posee dos o tres ángulos rectos, en éstos no hay problema que resolver, con la información conocida es fácil deducir el resto de sus elementos. La argumentación que hace al respecto la organizamos en los siguientes casos, donde citamos parte de lo expresado por el autor, a fin de tener una mejor apreciación.

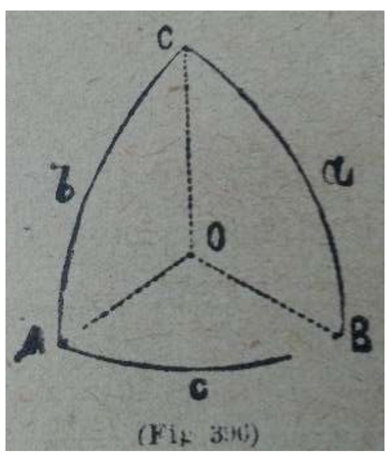


Figura 3.4: Triángulo Esférico Rectángulo

Caso 1: Sea ABC un Triángulo Esférico Birrectángulo

Si suponemos que los ángulos A y B (fig. 3.4) sean rectos, los dos planos AOC y AOB, serán perpendiculares entre sí, y sucederá lo mismo con los planos COB y AOB; de *consiguiente, CO es perpendicular a AOB, y serán rectos los ángulos rectilíneos COA, COB; esto es: a=b=90°, así como A y B. Por otra parte, por ser CO perpendicular a OA y a OB, el ángulo C estará medido por el ángulo rectilíneo AOB y se tiene c=C.*

De modo que el triángulo queda resuelto como:

$$A = B = 90°;\ a = b = 90°\ \ y\ \ C = c\ con\ C \neq 90°$$

Caso 2: Sea ABC un Triángulo Esférico Trirrectángulo

Si los tres ángulos son rectos, los radios AO, BO y CO, serán perpendiculares entre sí y se tendrá a=b=c=90°.

De modo que el triángulo queda resuelto como:

$$A = B = C = 90°\ \ y\ \ a = b = c = 90°$$

Posteriormente, el autor busca determina las fórmulas que le permitirán resolver el Triángulo Esférico cuya caracterización consiste en poseer únicamente un ángulo recto, refiriéndose a éste como Triángulo Rectángula, del que además menciona lo siguiente:

Supondremos que A=90°. La hipotenusa será a, y los lados del ángulo recto serán b y c.

Observemos que, también se suele utilizar una letra en particular para referirse al ángulo recto, aunque no lo menciona B y C son llamados ángulos oblicuos, y en lo posterior así se referirá a éstos.

El autor deduce los primeros grupos de fórmulas, en términos de las relaciones existentes entre los elementos de un Triángulo Rectángulo, y suele denominárseles *Fórmulas Fundamentales de los Triángulos Esféricos Rectángulos*. Las obtiene a partir de los *grupos de fórmulas (1), (2), (3) y (4)*, en las que sustituye *A=90°* y efectúa los respectivos cálculos.

$$cos.a = cos.b\ cos.c\ \ \ldots\ldots\ldots(5)$$

Expresa que el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los catetos.

$$sen.b = sen.a\ sen.B$$

$$sen.c = sen.a\ sen.C\ \ \ldots\ldots\ldots(6)$$

Expresan que el seno de un lado es igual al seno de la hipotenusa multiplicado por el seno del ángulo opuesto al lado que se considera.

$$tan.b = tan.a\ cos.C$$

$$tan.c = tan.a\ cos.B\ \ \ldots\ldots\ldots(7)$$

Expresan que la tangente de un lado es igual al producto de la tangente de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente.

$$tan. b = sen. c\ tan. B$$
$$tan. c = sen. b\ tan. C\ \ \ldots\ldots\ldots. (8)$$

Expresan que la tangente de un lado es igual al producto del seno del otro lado por la tangente del ángulo opuesto al primero.

$$cos. B = cos. b\ sen. C$$
$$cos. C = cos. c\ sen. B\ \ \ldots\ldots\ldots. (9)$$

Expresan que el coseno de un ángulo es igual al producto del coseno del lado opuesto por seno del otro ángulo.

$$cos. a = cot. B\ cot. C \ldots\ldots\ldots (10)$$

Expresan que el coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los ángulos oblicuos.

Realiza algunas observaciones en tres de las fórmulas previamente citadas de tal manera que proporciona las siguientes reglas que todo Triángulo Rectángulo deberá satisfacer.

De la fórmula

$$cos. a = cos. bcos. c\ \ \ \ldots\ldots\ldots. (5)$$

Deduce la primera regla:

Cuando los lados del ángulo recto son de la misma especie, la hipotenusa es menor que 90°; y cuando esos lados son de distinta especie, la hipotenusa es mayor que 90°

De la fórmula

$$tan. b = sen. c\ tan. B \ldots\ldots\ldots. (8)$$

Deduce la segunda regla:

Un lado del ángulo recto siempre es de la misma especie que el ángulo opuesto

De la fórmula

$$cos. a = cot. B\ cot. C \ldots\ldots\ldots (10)$$

Deduce la tercera regla:

Cuando los ángulos B y C son de la misma especie, la hipotenusa es menor que 90°; pero cuando son de distinta especie, la hipotenusa es mayor que 90°

El término "especie" se refiere al hecho de que, los lados o los ángulos, sean agudos u obtusos.

Transformaciones de las fórmulas de los triángulos rectángulos

Retoma las Fórmulas Fundamentales de los Triángulos Rectángulos y las transforman en otras calculables por logaritmos, a fin de obtener resultados más aproximados. En las siguientes imágenes es posible apreciar las fórmulas que obtiene.

La hipotenusa y los dos lados:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, c &= +\sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a-b)\ \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a+b)} \\ \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, b &= +\sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a-c)\ \text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a+c)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

La hipotenusa, un lado y el ángulo opuesto:

$$\text{tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\, a) = \pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(B+b)}{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(B-b)}} = \pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(C+c)}{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(C-c)}} \ldots (12)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\, B) &= \pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a-b)}} \\ \text{tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\, C) &= \pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a+c)}{\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,(a-c)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

La hipotenusa, un lado y el ángulo que forman:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, C &= +\sqrt{\frac{\text{sen. } (a-b)}{\text{sen. } (a+b)}} \\ \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, B &= +\sqrt{\frac{\text{sen. } (a-c)}{\text{sen. } (a+c)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Figura 3.5: Fórmulas para Triángulos Esféricos Rectángulos calculables por logaritmos

Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2} c) &= \pm\sqrt{\frac{\text{sen. } (B+b)}{\text{sen. } (B-b)}} \\ \text{tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\, b) &= \pm\sqrt{\frac{\text{sen. } (C+c)}{\text{sen. } (C-c)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, b &= +\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ + \frac{B-C}{2}\right) \text{tang.}\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)} \\ \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, c &= +\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ - \frac{B-C}{2}\right) \text{tang.}\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)} \end{aligned}\right\} (15\tfrac{1}{2})$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2}\, C) &= \pm\sqrt{\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \text{cot. } \tfrac{1}{2}\,(B-b)} \\ \text{tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2} B) &= \pm\sqrt{\text{cot. } \tfrac{1}{2}\,(C+c)\ \text{cot. } \tfrac{1}{2}\,(C-c)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (16)$$

La hipotenusa y los dos ángulos:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, a = +\sqrt{\frac{\text{cos. } (180^\circ - B - C)}{\text{cos. } (B-C)}} \ \Big\} \ldots\ldots (16\tfrac{1}{2})$$

Figura 3.6: Fórmulas para Triángulos Esféricos Rectángulos calculables por logaritmos

Citamos lo indicado por el autor para la deducción de la primera fórmula del *grupo (11)*

De la fórmula $cos.\, a = cos.\, b\; cos.c$

despejando á

$$cos.\, c = \frac{cos.\, a}{cos.\, b}$$

Y sustituyendo este valor en la expresión

$$tang.\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1 - cos.\, c}{1 + cos.\, c}}$$

Resulta

$$tang.\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1 - \frac{cos.\, a}{cos.\, b}}{1 + \frac{cos.\, a}{cos.\, b}}} = \sqrt{\frac{cos.\, b - cos.\, a}{cos.\, b + cos.\, a}}$$

$$= \sqrt{tang.\frac{1}{2}(a - b)\; tang.\frac{1}{2}(a + b)}$$

Para el resto de las fórmulas también señala las operaciones a fin de obtenerlas.

Fórmulas de los Triángulos Rectiláteros

Primeramente define al Triángulo Esférico Rectilátero como aquel que posee uno de sus lados igual a 90°. Sin pérdida de generalidad, al considerar el Triángulo Rectilátero de tal manera que su lado a = 90°, el Triángulo Suplementario A´B´C´ será rectángulo en A´. Y así, a partir del Triángulo Suplementario el autor deduce las fórmulas para los Rectiláteros, en las Fórmulas Fundamentales de los Triángulos Rectángulos hace algunos ajustes de notación a fin de que queden en términos de a´, b´, c´, A´, B´ y C´ para posteriormente sustituir en éstas fórmulas los valores de:

$$a' = 180° - A \qquad b' = 180° - B \qquad c' = 180° - C'$$

$$A' = 180° - a \qquad B' = 180° - b \qquad C' = 180° - c$$

De tal manera que obtiene las fórmulas que mostramos en la siguiente imagen. Otra alternativa para su deducción es sustituyendo a = 90° en las Formulas Fundamentales (primeros cuatro grupos de fórmulas).

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C \ldots\ldots \quad \ldots(17)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen. } B = \text{sen. } A \text{ sen. } b \\ \text{sen. } C = \text{sen. } A \text{ sen. } c \end{array}\right\} \ldots\ldots(18)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang. } B = -\text{tang. } A \cos. c \\ \text{tang. } C = -\text{tang. } A \cos. b \end{array}\right\} \ldots\ldots(19)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang. } B = \text{sen. } C \text{ tang. } b \\ \text{tang. } C = \text{sen. } B \text{ tang. } c \end{array}\right\} \ldots\ldots(20)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos. b = \cos. B \text{ sen. } c \\ \cos. c = \cos. C \text{ sen. } b \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

$$\cos. A = -\cot. b \cot. c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

Figura 3.7: Fórmulas para Triángulos Rectiláteros

Fórmulas generales calculables por logaritmos

Aquí, el autor retoma algunas de las Fórmulas Fundamentales para hacerlas adaptables al uso de los logaritmos, deduce también las Fórmulas de Delambre y las Analogías de Neper a fin de obtener mejores resultados, son estas fórmulas las más apropiadas para la resolución de los problemas de la Trigonometría Esférica. En seguida mostramos parte del contenido matemático que el autor desarrolla al respecto.

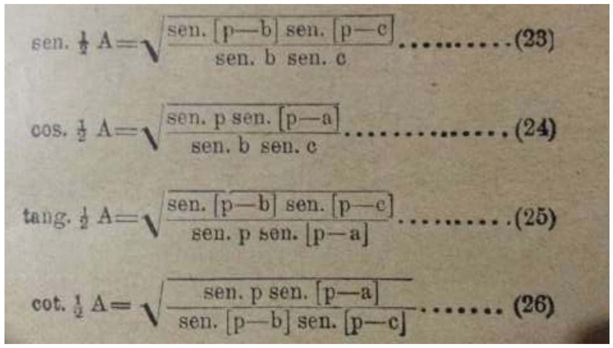
Fórmulas para determinar los ángulos en función de los lados

En este sentido, el autor sugiere retomar el primer grupo de las Fórmulas Fundamentales (Ley de Cosenos para Triángulos Esféricos) y mediante el uso de las razones del ángulo mitad (de Trigonometría Plana) hacerlas calculables por logaritmos de tal manera que, sea posible expresar cada uno de los ángulos en términos de los tres lados del Triángulo Esférico.

A partir de la primera fórmula del *grupo (1)*

$$cos. a = cos. b \cos. c + sen. b\ sen. c\ cos\ . A$$

Deduce para el ángulo A las siguientes cuatro fórmulas (ver imagen), indica que en éstas el radical debe tomarse con el signo más, recordemos que A<180° por la tanto las líneas trigonométricas del ángulo agudo, $\frac{A}{2}$, siempre son positivas.



$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } [p-b] \text{ sen. } [p-c]}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}} \ldots\ldots\ldots (23)$$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } [p-a]}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}} \ldots\ldots\ldots (24)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } [p-b] \text{ sen. } [p-c]}{\text{sen. } p \text{ sen. } [p-a]}} \ldots\ldots\ldots (25)$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } [p-a]}{\text{sen. } [p-b] \text{ sen. } [p-c]}} \ldots\ldots\ldots (26)$$

Figura 3. 8: Ángulo del triángulo esférico expresado en términos de sus tres lados.

En seguida citamos la deducción realizada por el autor de una de estas fórmulas.

De la primera de las fórmulas (1)

$$cos. a = cos. b \cos. c + sen. b\ sen. c\ cos\ . A$$

Se obtiene:

$$cos. A = \frac{cos. a - cos. b\ \ cos. c}{sen. b\ sen. c}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula

$$sen.^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - cos. A}{2}$$

se tiene

$$sen.^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \frac{cos. a - cos. b\ cos. c}{sen. b\ sen. c}}{2} = \frac{sen. b\ sen. c + cos. b\ cos. c - cos. a}{2sen. b\ sen. c}$$

$$sen.^2 \frac{1}{2} A = \frac{cos. (b - c) - cos. a}{2sen. b\ sen. c} = \frac{sen. \frac{1}{2}(b - c + a) sen. \frac{1}{2}(a + c - b)}{sen. b\ sen. c}$$

haciendo como en los triángulos rectilíneos

$$a + b + c = 2p$$

restando de los dos miembros de esta ecuación sucesivamente 2c y 2b se obtiene:

$$a + b - c = 2p - 2c \quad a - b + c = 2p - 2b$$

sustituyendo estos valores en el de $sen.^2 \frac{1}{2} A$ *y extrayendo raíz resulta*

$$sen. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{sen.(p-b) sen.(p-c)}{sen. b\ sen. c}}$$

.... *(23)*

Es un procedimiento perfectamente entendible, en el que además observamos que el *perímetro del Triángulo Esférico* es nombrado como *2p.* Para las otras fórmulas señala de que manera obtenerlas, no realiza todo el proceso.

Fórmulas para determinar los lados en función de los ángulos

A partir del cuarto grupo de las Fórmulas Fundamentales es posible expresar cada uno de los lados del Triángulo Esférico en términos de sus tres ángulos, el proceso es similar al que el autor refiere en la deducción de las fórmulas previamente mencionadas de modo que únicamente señala algunas indicaciones al respecto.

En este sentido se tiene que, de la primera fórmula del *grupo (4)*

$$\cos. A = - cos. B\ cos. C + sen. B\ sen. C\ cos. a$$

se obtiene

$$cos. a = \frac{cos. A + cos. B\ cos. C}{sen. B\ sen. C}$$

Al sustituir en la expresión

$$sen.^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - cos. a}{2}$$

(Fórmula del ángulo mitad de Trigonometría Plana, recordemos que los lados del Triángulo también son ángulos)

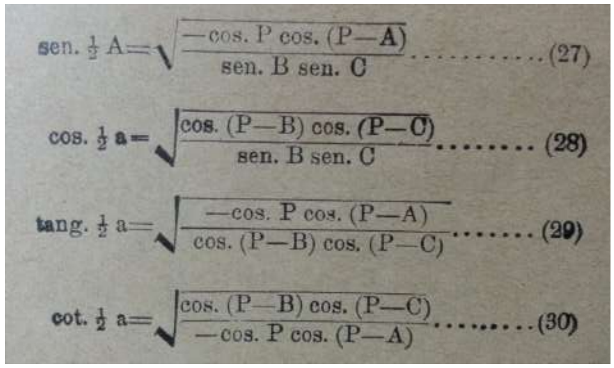
Efectuando las respectivas operaciones, se obtiene, haciendo

2P = A + B + C

(Suma de los ángulos interiores del Triángulo Esférico, nombrada como 2P)

$$sen\ \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-cos. P\ cos.(P-A)}{sen. B\ sen. C}}$$

Una de las cuatro fórmulas que el autor muestra, y que podemos a preciar en la siguiente imagen.



$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{-\cos. P \cos. (P-A)}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \dots\dots\dots\dots (27)$$

$$\cos. \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos. P \cos. (P-A)}{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}} \dots\dots\dots (29)$$

$$\cot. \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}{-\cos. P \cos. (P-A)}} \dots\dots\dots (30)$$

Figura 3.9: Lado del Triángulo Esférico expresado en términos de sus tres ángulos.

De estas fórmulas argumenta que el valor del radical no puede ser imaginario. Continúa expresando que, de momento únicamente ha establecido las fórmulas para el ángulo A y el lado a del Triángulo Esférico, sugiere obtener para los elementos restantes B, C, b y c sus correspondientes grupos de fórmulas, procediendo sobre sus respectivas Fórmulas Fundamentales o por simple permutación de letras.

Fórmulas para determinar los lados en función de los ángulos y del exceso esférico

De la sexta propiedad que inicialmente citamos sabemos que, el exceso esférico se define como la diferencia que hay entre la suma de los tres ángulos de un triángulo y 180° y en lo sucesivo Contreras lo denotara mediante el símbolo ε.

Y así, por definición se tiene

$$\varepsilon = A + B + C - 180°$$

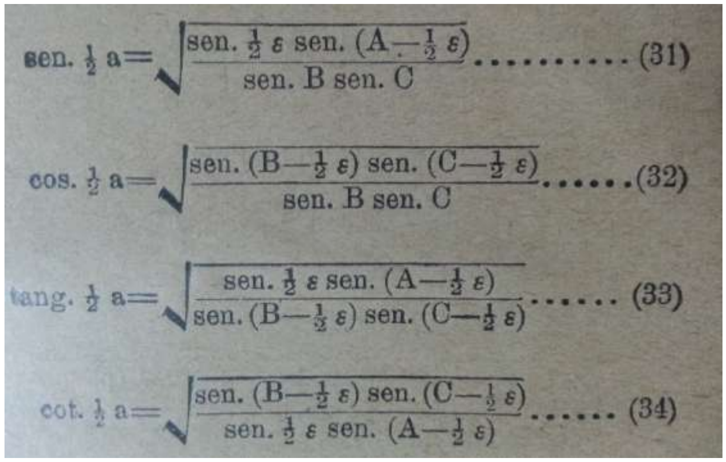
Dado que, 2P = A + B + C. Entonces

$$\varepsilon = 2P - 180°$$

De tal forma que

$$P = \frac{\varepsilon}{2} + 90°$$

Al sustituir esta última expresión en las ecuaciones (27), (28), (29) y (30), tomando en cuenta que $\cos\left(90° + \frac{\varepsilon}{2}\right) = -sen\frac{\varepsilon}{2}$ y que, $\cos\left(90° + \frac{\varepsilon}{2} - A\right) = sen\,(A - \frac{\varepsilon}{2})$ obtenemos fácilmente el grupo de fórmulas que refiere el autor y que podemos apreciar en la siguiente imagen.



$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}\ \varepsilon\ \text{sen.}\ (A - \frac{1}{2}\ \varepsilon)}{\text{sen. B sen. C}}} \dots\dots\dots\dots (31)$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (B - \frac{1}{2}\ \varepsilon)\ \text{sen.}\ (C - \frac{1}{2}\ \varepsilon)}{\text{sen. B sen. C}}} \dots\dots (32)$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}\ \varepsilon\ \text{sen.}\ (A - \frac{1}{2}\ \varepsilon)}{\text{sen.}\ (B - \frac{1}{2}\ \varepsilon)\ \text{sen.}\ (C - \frac{1}{2}\ \varepsilon)}} \dots\dots (33)$$

$$\cot.\ \tfrac{1}{2}\ a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\ (B - \frac{1}{2}\ \varepsilon)\ \text{sen.}\ (C - \frac{1}{2}\ \varepsilon)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}\ \varepsilon\ \text{sen.}\ (A - \frac{1}{2}\ \varepsilon)}} \dots\dots (34)$$

Figura 3.10: Lado del Triángulo expresado en términos de sus ángulos y del exceso esférico

Fórmulas de Delambre

Para este grupo de fórmulas citamos lo que el autor realiza a respecto.

Si en la fórmula

$$sen.\left[\frac{A+B}{2}\right] = sen.\frac{A}{2}\ cos.\frac{B}{2} + sen.\frac{B}{2}\ cos.\frac{A}{2}$$

Sustuimos por $sen.\frac{1}{2}A$, $cos.\frac{1}{2}A$, *sus valores de las fórmulas (23) y (24), y sus correspondientes por* $sen.\frac{1}{2}B$ *y por* $cos.\frac{1}{2}B$ *encontraremos:*

$$sen.\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sqrt{\frac{sen.(p-b)sen.(p-c)}{sen.b\ sen.c}}\sqrt{\frac{sen.p\ sen.(p-b)}{sen.a\ sen.c}} + \sqrt{\frac{sen.(p-a)sen.(p-c)}{sen.a\ sen.c}}\sqrt{\frac{sen.p\ sen.(p-a)}{sen.b\ sen.c}}$$

ejecutando la multiplicación:

$$sen.\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{sen.(p-b)}{sen.c}\sqrt{\frac{sen.p\ sen.(p-c)}{sen.a\ sen.b}} + \frac{sen.(p-a)}{sen.c}\sqrt{\frac{sen.p\ sen.(p-c)}{sen.a\ sen.b}}$$

Como según la fórmula correspondiente á la (24)

$$cos.\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{sen.p\ sen.(p-c)}{sen.a\ sen.b}}$$

sustituyendo se tiene:

$$sen.\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{sen.(p-b)}{sen.c}cos.\frac{1}{2}C+\frac{sen.(p-a)}{sen.c}cos.\frac{1}{2}C$$

$$sen.\left[\frac{A+B}{2}\right]=\frac{cos.\frac{1}{2}C}{sen.c}(sen.(p-b)+sen.(p-a))$$

..... **(a)**

De acuerdo con la fórmula [776.-f. (59)]

$$sen.a+sen.b=2sen.\frac{1}{2}(a+b)cos.\frac{1}{2}(a-b)$$

$$sen.(p-b)+sen.(p-a)=2sen.\frac{1}{2}(2p-b-a)cos.\frac{1}{2}(p-b-p+a)$$

$$=2sen.\frac{1}{2}(a+b+c-b-a)cos.\frac{1}{2}(a-b)$$

$$=2sen.\frac{1}{2}c\ cos.\frac{1}{2}(a-b)$$

sustituyendo en la ecuación **(a)** *este valor y el de*

$sen.c=2sen.\frac{1}{2}c\ cos.\frac{1}{2}c$ *[770.-f. (34)]*

se tiene

$$sen.\left[\frac{A+B}{2}\right]=\frac{cos.\frac{1}{2}C}{2sen.\frac{1}{2}c\ cos.\frac{1}{2}c}2sen.\frac{1}{2}c\ cos.\frac{1}{2}(a-b)$$

$$sen.\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{cos.\frac{1}{2}C}{cos.\frac{1}{2}c}cos.\frac{1}{2}(a-b)$$

De donde por último

$$\frac{sen.\frac{1}{2}(A+B)}{cos.\frac{1}{2}C}=\frac{cos.\frac{1}{2}(a-b)}{cos.\frac{1}{2}c}$$

.... *(35)*

Una vez deducida está fórmula refiere que, mediante operaciones análogas hechas con las expresiones $sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$, $cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ y $cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ se obtienen las fórmulas de la siguiente imagen.

$$\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\ \frac{1}{2}C}=\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}c}\ \ldots\ldots\ldots (36)$$

$$\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}C}=\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(a+b)}{\cos.\ \frac{1}{2}c}\ \ldots\ldots\ldots (37)$$

$$\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}C}=\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}c}\ \ldots\ldots\ldots (38)$$

Figura 3.11: Algunas de las fórmulas de Delambre

El autor sólo exhibe cuatro de las doce fórmulas que fueron descubiertas en 1807 por Delambre, las ocho fórmulas faltantes aunque no lo menciona se obtiene por simple permutación de letras o efectuando procedimientos análogos en términos de los ángulos A y C, B y C.

Observemos que, cada una de estas ecuaciones encierra los seis elementos del Triángulo Esférico, siendo muy útiles sobre todo para comprobar los valores de dichos elementos calculados mediante otras expresiones.

Analogías de Neper

Mediante las cuatro fórmulas de Delambre, que previamente dedujo, obtiene cuatro de las doce Analogías de Neper. En la siguiente imagen mostramos tres de estas fórmulas, para continuar citando lo señalado por contreras en torno a la deducción de la cuarta y última fórmula que proporciona.

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)=\cot.\ \tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\ \frac{1}{2}(a+b)}\ \ldots\ldots\ldots (39)$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)=\cot.\ \tfrac{1}{2}C\,\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(a+b)}\ \ldots\ldots\ldots (40)$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a+b)=\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B)}\ \ldots\ldots\ldots (41)$$

Figura 3.12: Analogías de Neper

dividiendo la (36) por la (35) y despejando $tang.\frac{1}{2}(a-b)$*, resulta:*

$$tang.\frac{1}{2}(a-b) = tang.\frac{1}{2}c\,\frac{sen.\frac{1}{2}(A-B)}{sen.\frac{1}{2}(A+B)}$$

...........*(42)*

Observamos que a partir de lo expresado, no es difícil comprobar el resultado. De manera análoga, el autor indica los cocientes para cada una de las tres fórmulas mostradas en la imagen. Notemos que, cada Analogía de Neper contiene cinco de los seis elementos de un Triángulo Esférico.

Expresiones del exceso esférico

En este apartado el autor deduce cuatro fórmulas en las que figura el exceso esférico, menciona que este elemento es muy importante sobre todo en las aplicaciones de la Trigonometría Esférica. Nos limitaremos a enunciar dichas fórmulas, sin retomar parte de los procedimientos efectuados para cada una de éstas.

1) Fórmula del exceso esférico en función de dos lados y del ángulo que forman

$$cot.\,\varepsilon = \frac{cot.\frac{1}{2}a\; cot.\frac{1}{2}b + cos.\,C}{sen.\,C}$$

2) Fórmula del exceso esférico apropiada para el uso de los logaritmos

$$sen.\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{sen.\,C}{cos.\frac{1}{2}c}\,sen.\frac{1}{2}a\; sen.\frac{1}{2}b$$

3) Exceso esférico en función de los tres lados

$$tg.\frac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{tg.\frac{1}{2}p\; tg.\frac{1}{2}(p-a)\; tg.\frac{1}{2}(p-b)\; tg.\frac{1}{2}(p-c)}$$

   Esta notable fórmula se debe a Simón l´Huillier.

4) Seno del exceso esférico en función de los tres lados

$$sen.\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sqrt{sen.\,p\; sen.\,(p-a)\; sen.\,(p-b)\; sen.\,(p-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\; cos.\frac{1}{2}b\; cos.\frac{1}{2}c}$$

Posteriormente, el autor aborda la resolución de los Triángulos Esféricos donde citará varias de las fórmulas de Trigonometría Esférica que hasta el momento ha deducido. Nos recuerda que las fórmulas se han establecido suponiendo el radio de la esfera igual a la unidad, cuando se apliquen para determinar uno de los elementos del Triángulo Esférico deberán hacerse homogéneas y para ello, se deberá restituir en cada una *r* (radio de la esfera) cuyo logaritmo en las tablas es 10.

Resolución de Triángulos Rectángulos

Traba aquellos que tiene un solo ángulo recto, recordemos que no hay necesidad de ocuparse de su resolución cuando están formados por dos o tres ángulos rectos, asumiendo que el elemento conocido es $A = 90°$, para poder resolverlos, es suficiente tener una relación adecuada entre *tres* de las *cinco* cantidades $a, b, c, B\ y\ C$, de las cuales dos serán consideradas como datos y una como incógnita. En este sentido, distingue seis casos que pudieran presentarse, a fin de mostrar parte de este contenido citamos uno de los seis casos que el autor aborda.

> *SEGUNDO CASO.- Dada la hipotenusa a y el lado b, se determinarán c, B y C por las fórmulas:*
>
> $$cos.c = \frac{cos.a}{cos.b} \qquad sen.B = \frac{sen.b}{sen.a} \qquad cos.C = \frac{tang.b}{tang.a}$$
>
> *Pueden calcularse las incógnitas con mayor aproximación por las fórmulas*
>
> $$\text{tang.}\frac{1}{2}c = +\sqrt{tang.\frac{1}{2}(a-b)tang.\frac{1}{2}(a+b)} \text{ ...... (11)}$$
>
> $$\text{tang.}\left(45° + \frac{1}{2}B\right) = \pm\sqrt{\frac{tang.\frac{1}{2}(a+b)}{tang.\frac{1}{2}(a-b)}} \text{..... } \textit{(13)}$$
>
> $$\text{tang.}\frac{1}{2}C = +\sqrt{\frac{sen.(a-b)}{sen.(a+b)}} \text{...... } \textit{(14)}$$
>
> *Observación.- Supuesto que* $sen.B = \frac{sen.b}{sen.a}$ *para que el problema sea posible es necesario y basta que se tenga* $sen.b < sen.a$*, porque realizándose esta condición el valor de* $sen.b$ *será menor que 1 y los valores de* $cos.c$ *y de* $cos.C$ *estarán comprendidos entre -1 y 1. La desigualdad de que se trata,*
>
> $$sen.b < sen.a$$
>
> *Como es fácil convencerse con el examen de una figura, exige que se tenga:*
>
> *Cuando* $a < 90°$ $\qquad b < a, ó\ bien > 180° - a$
>
> *Cuando* $a > 90°$ $\qquad b > a, ó\ bien < 180° - a$

$$Cuando\ a = 90°\ , necesariamente \qquad sen. b < sen. a$$

Satisfecha la condición de posibilidad, el problema no admite más que una resolución aun cuando el ángulo B esté dado por su seno, porque B deber ser de la misma especie que el lado b conocido. La misma consideración permite fijar el signo con que debe tomarse el radical en la expresión $\text{tang.}\left(45° + \frac{1}{2}B\right)$.

Para poner en práctica parte de lo abordado, el autor resuelve los siguientes Triángulos Rectángulos.

PROBLEMAS.

I.- Sean $a = 115° - 17' - 20''$ $\;B = 98° - 28' - 30''$ *se busca b, c, C.*

II.- Sean $b = 56° - 37' - 40''$ $\;B = 84° - 29' - 50''$ *se buscan a, c, C.*

Resolución de Triángulos Rectiláteros

El autor no profundiza en la resolución de este tipo de Triángulos argumentando que, la resolución de un Triángulo Rectilátero es reducible a la de otro Rectángulo haciendo uso del Triángulo Suplementario.

Resolución de los Triángulos Oblicuángulos

El problema general implica que dados *tres* de los *seis* elementos a, b, c, A, B, C de un Triángulo Esférico, determinar los otros tres, para ello se deberá tener una relación entre cuatro de esos elementos de los cuales tres serán considerados datos y uno como incógnita. Atendiendo a esta problemática Contreras distingue los siguientes seis casos que pudieran presentarse.

1° Dados tres lados determinar los ángulos.

2° Dados tres ángulos determinar los tres lados.

3° Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demás elementos.

4° Dados dos ángulos y el lado adyacente, determinar los demás elementos.

5° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los demás elementos.

6° Dados dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos, determinar los demás elementos.

En seguida citamos lo que refiere en torno al segundo caso.

SEGUNDO CASO.- Dados tres ángulos se determinarán los lados por las fórmulas (33) que hemos demostrado y son:

$$tang. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{sen. \frac{1}{2}\varepsilon \; sen. (A - \frac{1}{2}\varepsilon)}{sen. (B - \frac{1}{2}\varepsilon) \; sen. (C - \frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$$tang.\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{sen.\frac{1}{2}\varepsilon\ sen.(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{sen.(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\ sen.(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$$tang.\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{sen.\frac{1}{2}\varepsilon\ sen.(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{sen.(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\ sen.(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

En las que $\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(A+B+C) - 90°$.

El examen de estas fórmulas conduce á las siguientes consecuencias:

1ª las radicales deben tomarse con el signo más, por tener que ser los lados menores que 180°; 2ª para que los senos sean positivos debe tenerse:

$$A > \frac{1}{2}\varepsilon \qquad B > \frac{1}{2}\varepsilon \quad y \quad C > \frac{1}{2}\varepsilon$$

Y 3ª el problema será posible, esto es, los valores serán reales, cuando se tenga:

$$\varepsilon < 360° \qquad A > \frac{1}{2}\varepsilon \qquad B > \frac{1}{2}\varepsilon \quad y \quad C > \frac{1}{2}\varepsilon$$

Concluye este apartado resolviendo los siguientes tres ejercicios.

I. Conociendo los tres lados a, b, y c determinar los tres ángulos

II. Dados dos lados a, b y el ángulo C que forman, determinar A, B y c.

III. Dado un lado a y los ángulos adyacentes B y C, calcular los demás elementos.

Superficie de un Triángulo Esférico

El autor deduce la fórmula

$$s = \pi r^2 \varepsilon$$

Donde $s \coloneqq Superficie\ del\ Triángulo\ Esférico$

$r \coloneqq Radio\ de\ la\ esfera$

$\varepsilon \coloneqq Exceso\ esférico\ (\varepsilon = A + B + C - 180°)$

Como casos particulares de ésta propone los siguientes:

a) Si el triángulo es rectángulo

$$s = \pi r^2 \left(\frac{B + C - 90°}{180°}\right)$$

b) Al ser el triángulo equiángulo

$$s = \pi r^2 \left(\frac{3A - 180°}{180°}\right)$$

c) Si se busca la superficie del Triángulo Polar de ABC.

$$s = \pi r^2 \left(\frac{360° - 2p'}{180°}\right)$$

Donde $2p' = a' + b' + c'$, y por definición de Triángulo polar o suplementario se tiene

$$a' = 180° - A \qquad b' = 180° - B \qquad c' = 180° - C$$

En este sentido, el autor concluye este apartado resolviendo los siguientes ejercicios.

I. Calcular la superficie de un triángulo esférico conocidos sus tres lados.

$$a = 131° - 47' - 20'' \qquad b = 103° - 18' - 40'' \qquad c = 49° - 32' - 20''$$

II. Calcular la superficie de un triángulo esférico, conociendo sus tres ángulos:

$A = 140°, B = 92°$ *y* $C = 68°$ *y sabiendo que el diámetro de la esfera es de 30 piés.*

III. Calcular la superficie de un triángulo equiángulo, siendo el radio de la esfera de 10 metros y cada ángulo de 120°.

Aplicaciones de la Trigonometría Esférica

Contreras aborda las siguientes aplicaciones:

1. Reducción de un ángulo al horizonte
2. Conocidas las coordenadas geográficas de dos puntos, determinar la distancia que los separa, a fin de ejemplificarla determina la distancia de México a Tehuantepec.

El contenido matemático en torno a las ya mencionadas aplicaciones es similar al desarrollado por *Tamborrel*, más adelante vamos a retomarlas como parte del estudio de su obra que lleva por título "*Tratado Elemental de Trigonometría Rectilínea y Esférica".*

Comentario general

El contenido de Trigonometría Esférica es bastante completo, los temas están perfectamente ordenados y ligados entre sí, no es tan gráfico y sí muy analítico en sus procedimientos. Y aunque en ocasiones no puntualiza en ciertos detalles sobre todo en la deducción de algunas fórmulas, con la información que proporciona, es posible entenderlas y trabajarlas sin problema alguno. Otro aspecto acertado son los ejemplos bastante ilustrativos y complejos con lo que suele concluir algunos de los temas y la tabla que al final del texto presenta, muy práctica en la resolución de los Triángulos Esféricos pudo haber sido utilizada por los estudiantes de aquella época como un formulario para la clase.

Fueron sus dotes intelectuales de Don Manuel María Contreras y su destacable experiencia como docente lo que le llevaran a redactar textos bastante interesantes desde el punto de vista matemático y didáctico.

Para finalizar hemos transcrito del índice del texto de Contreras los temas de la Trigonometría Esférica

ÍNDICE
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

DEFINICIONES Y PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS
Círculos máximos y triángulo esférico
Definición de trigonometría esférica
Propiedades del triángulo esférico
Triángulo suplementario

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO
Relación entre los tres lados y un ángulo
Relación entre dos lados y los ángulos opuestos
Id entre dos lados, el ángulo que forman y el ángulo opuesto
Id entre un lado y los tres ángulos

FÓRMULAS RELATIVAS A LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS
Fórmulas de los triángulos rectángulos
Discusión de algunas de estas fórmulas
Transformaciones de las fórmulas de los triángulos rectángulos
Fórmulas de los triángulos rectiláteros
Uso de los ángulos auxiliares

FÓRMULAS GENERALES CALCULABLES POR LOGARITMOS
De los ángulos, en función de los lados

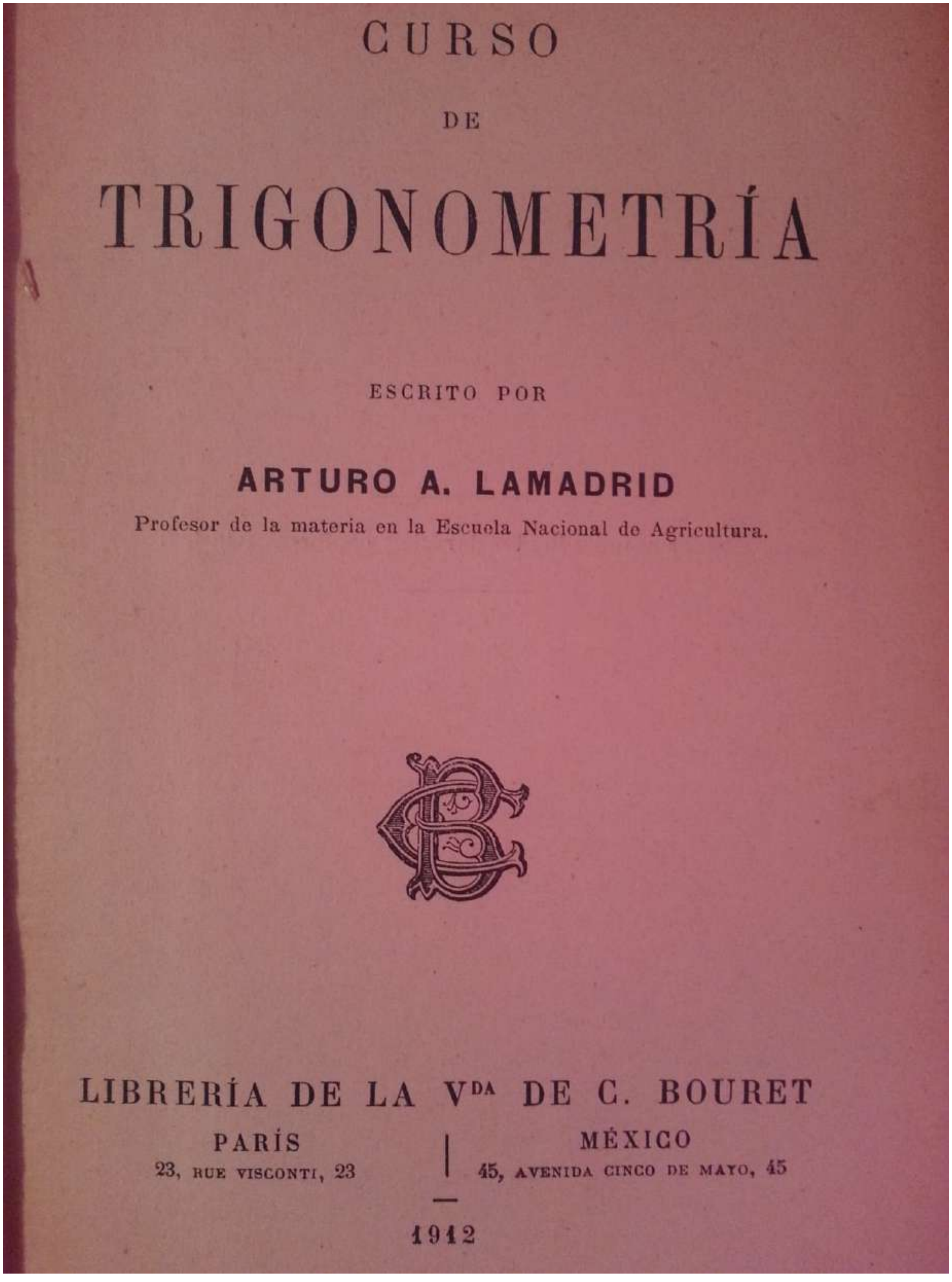
De los lados, en función de los ángulos
De los lados, en función de los ángulos y del exceso esférico
Fórmulas de Delambre
Analogías de Nepler

EXPRESIONES DEL EXCESO ESFÉRICO
Exceso esférico en función de dos lados y del ángulo que forman
Fórmula del exceso esférico apropiada al uso de los logaritmos
Exceso esférico en función de los tres lados
Expresión del seno del exceso esférico en función de los lados

RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS
Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectángulos
Observaciones
Problemas
Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectiláteros

RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS
1° Dados los tres lados, determinar los ángulos
2° Dados los tres ángulos, determinar los lados
3° Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demás elementos
4° Dados dos ángulos y el lado adyacente, determinar los demás elementos
5° Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, determinar los demás elementos
6° Dados dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, determinar los demás elementos
Discusión del quinto caso
Tabla y resumen de la discusión del quinto caso
Aplicaciones
Superficie de un triángulo esférico, fórmula y aplicaciones
Aplicaciones de la trigonometría esférica
Tabla de las principales fórmulas de trigonometría esférica

Libro "Curso de Trigonometría" de Antonio Lamadrid



CURSO

DE

TRIGONOMETRÍA

ESCRITO POR

ARTURO A. LAMADRID

Profesor de la materia en la Escuela Nacional de Agricultura.

LIBRERÍA DE LA V^DA DE C. BOURET

PARÍS | MÉXICO
23, RUE VISCONTI, 23 | 45, AVENIDA CINCO DE MAYO, 45

1912

Arturo A. Lamadrid, egresado de la Escuela Nacional de Ingenieros, fue profesor de Matemáticas en las Escuelas Nacionales de Agricultura y Preparatoria. De sus obras Curso Elemental de Álgebra (1900), Curso Abreviado de Análisis (1912) y Curso de Trigonometría (1912) se sabe que fueron utilizadas como libros de texto en ambas escuelas.

En lo sucesivo nos enfocaremos en el estudio de uno de sus textos, el que lleva por título Curso de Trigonometría. Primeramente, citamos su prólogo donde el autor señala algunas características de su obra.

PROLOGO

La buena aceptación que en el público erudito ha tenido nuestro curso de Álgebra, el deseo de seguir coadyuvando con nuestros esfuerzos al desenvolvimiento de la matemática en nuestra patria, el deber ineludible que hemos contraído con la ley de instrucción, que previene a los profesores de la Escuela N. de Agricultura escribir los textos de sus respectivas cátedras, y finalmente, la necesidad imperiosa de completar la obra que nos trazamos cuando dimos á la publicidad nuestro primer trabajo, son las causas poderosas que nos obligaron á escribir este tratado, que tenemos el gusto de ofrecer á los jóvenes alumnos de la Escuela N. de Agricultura.

Escribir un libro claro, conciso y breve, en el que el concepto de trigonométrico se adquiera por el educando de un modo gradual y progresivo, ha sido nuestro objeto, y creemos haberlo realizado; para alcanzar este propósito, hemos procurado exponer nuestras doctrinas, con la claridad con que lo hacemos al transmitir nuestras explicaciones en la cátedra.

Que la crítica sana, desapasionada y justa, nos pondere y juzgue, y si nuestros críticos tienen algunas indicaciones que hacernos, gustosos las aceptaremos, y las consideraremos en ediciones subsecuentes á ésta.

El Autor.

En este sentido y como más adelante se podrá confirmar, el autor no gusta de enfatizar ciertos detalles pretende que el alumno ponga en práctica y desarrolle parte de su pensamiento crítico, que sea capaz de entender y dar seguimiento a cada uno de los temas.

El contenido matemático de su obra está clasificado en tres partes, a las que denomina libros, y cada uno de éstos conformado a su vez por diversos capítulos.

- Libro Primero, denominado Análisis Angular, cuyo contenido lo desarrolla de las páginas 9 a 74.

- Libro Segundo, nombrado Trigonometría Rectilínea, que comprende las páginas 77 a 102.
- Libro Tercero, denominado **Trigonometría Esférica**, cuyos temas desarrolla a lo largo de cuatro capítulos, de las páginas 105 a 134. Es de nuestro interés abordar cada uno de estos capítulos, a fin de esbozar parte de su contenido matemático, teniendo el cuidado de preservar las ideas del autor.

LIBRO TERCERO
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

INTRODUCCIÓN

Como parte introductoria el autor proporciona algunas definiciones para ponernos en contexto en lo que respecta a los Triángulos Esféricos.

Sin más preámbulos, primeramente define el Triángulo Esférico como *la figura formada por tres arcos de círculos máximos, trazado sobre la superficie de una esfera,* menciona sus elementos y refiere la manera en que éstos se nombran. De sus lados especifica que, pueden medirse en grados o partes del radio, y a menos que se indique lo contrario, se considerarán menores que 180°.

El autor tiene la convicción que al lector le parecerá evidentes ciertas afirmaciones por ejemplo, al referirse a los Triángulos Esféricos Birrectángulos y Trirrectángulos indica que no dan lugar a ningún problema de resolución, menciona que cada lado opuesto al ángulo recto vale noventa grados, no argumenta nada más al respecto.

Otra de las definiciones importantes que proporciona es la del Triángulo Polar, para posteriormente, enunciar y demostrar el siguiente teorema.

> ***Teorema**: Cada ángulo de un triángulo esférico es el suplemento del lado que se le opone en el triángulo polar, y recíprocamente.*

De tal manera que, además de ser Triángulos Polares el uno del otro, también les identifica como Triángulos Suplementarios.

Concluye este apartado, enunciando sólo tres de las seis propiedades de los Triángulos Esféricos.

> *1° Al mayor lado está opuesto el mayor ángulo, y recíprocamente.*

> *2° La suma de los tres lados de un triángulo esférico es menor que cuatro ángulos rectos.*

3° La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos, y menor que seis ángulos rectos.

Argumenta que por esta última propiedad, es posible resolver un Triángulo Esférico cuando se conocen sus tres ángulos, hecho que no ocurre con los triángulos rectilíneos, debido a que en éstos es constante la suma de sus ángulos interiores.

CAPÍTULO I: ***Relaciones entre cuatro elementos cualesquiera de un triángulo esférico cualquiera***

La Madrid aborda las cuatro relaciones diferentes que pueden darse entre los ángulos y los lados de cualquier triángulo esférico, tomados de cuatro en cuatro. Éstas se corresponden, con los primeros cuatro incisos romanos que el autor refiere dentro de este primer capítulo, en seguida citamos parte de su contenido.

I. Fórmulas que contienen tres lados y un ángulo

Sea ABC un triángulo esférico cualquiera (Ver figura 3.13). *Si suponemos el radio de la esfera igual á la unidad, y unimos los puntos A y C con el centro O de la esfera, trazando desde C la perpendicular CD al plano AOB, y desde D la perpendicular DE al radio OA,*

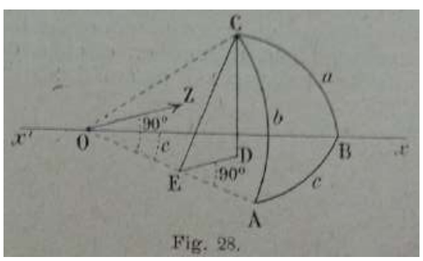


Figura 3.13: Triángulo Esférico ABC

si unimos los puntos C y E, la recta CE es perpendicular á la línea OA, según el teorema de las tres perpendiculares demostrado en Geometría. Proyectando el contorno COEDC sobre el eje x'x, y tomando como á OC por resultante, el teorema de las proyecciones da:

$$Proy\ OC = Proy\ OE + Proy\ ED + Proy\ DC \text{ .....(1)}$$

Pero:

$$Proy\ OC = OC \cos COx = \cos a$$

$$Proy\ OE = OEcos\ AOx = \cos b \cos c$$

$$Proy\ ED = EDcos\ ZOx = ED \cos(90 - c) = ED\ sen\ c$$

Pero el triángulo rectángulo CED da:

$$ED = EC \cos CED = sen\ b \cos A$$

Luego:

$$Proy\ ED = sen\ b\ sen\ c \cos A$$

$$Proy\ DC = 0$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad (1), resulta:

$$cos\ a = \cos b \cos c + sen\ b\ sen\ c\ cos\ A$$

Permutando las letras, obtenemos el grupo siguiente:

$$cos\ a = \cos b \cos c + sen\ b\ sen\ c\ cos\ A$$

$$cos\ b = \cos a \cos c + sen\ a\ sen\ c\ cos\ B \text{ ......(1)}$$

$$cos\ c = \cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b\ cos\ C$$

De lo anterior el autor da por demostrado el siguiente teorema.

Teorema.- *El coseno de un lado de un triángulo es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, más el producto de los senos de estos mismos lados, por el coseno del ángulo que forman.*

II. Fórmulas que contienen tres ángulos y un lado

El autor sólo indica a grandes rasgos como deducir una de las fórmulas de este segundo grupo, parte del supuesto que conoce los tres ángulos y el lado a del Triángulo Esférico, utiliza la siguiente fórmula:

$$cos\ a' = \cos b' \cos c' + sen\ b' senc'\ cos\ A'$$

Que como bien dice, esta expresión se obtiene al aplicar al Triángulo Suplementario el teorema previamente demostrado. Prosigue indicando que:

$$a' = 180° - A$$

$$b' = 180° - B$$

$$c' = 180° - C$$

$$A' = 180° - a$$

Lo anterior, por definición de Triángulo Suplementario, y aunque no realiza las respectivas sustituciones, las llevaremos a cabo para comprobar que efectivamente se obtiene la fórmula que finalmente refiere el autor.

$$cos(180° - A) = cos(180° - B)\ cos(180° - C) + sen(180° - B)\ sen(180° - C)\ cos(180° - a)$$

$$-\cos A = (-\cos B)(-\cos C) + (senB)(senC)(-\cos a)$$

De tal forma que:

$$\cos\ A = sen\ B\ sen\ C\ cos\ a - \cos B\ cos\ C$$

Menciona que al permutar las letras es posible obtener el siguiente grupo de fórmulas, pero no es la única alternativa el resto de las fórmulas se puede deducir sin problema al proceder de manera análoga, variando el lado que suponemos conocer.

$$\cos\ A = sen\ B\ sen\ C\ cos\ a - \cos B\ cos\ C$$

$$\cos\ B = sen\,A\,sen\,C\,cos\,b - \cos A\,cos\,C \text{ ....(2)}$$

$$\cos\ C = sen\,A\,sen\,B\,cos\,c - \cos A\,cos\,B$$

III. Fórmulas que contienen dos lados, y los dos ángulos opuestos.

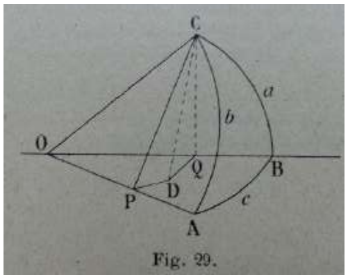


Figura 3.14: Imagen original del libro

Si por el punto C del triángulo esférico ABC (ver figura 3.14), *trazamos la perpendicular CD al plano AOB, y por el pie de esta perpendicular trazamos las perpendiculares DP y DQ a las rectas OA y OB, la línea CP es perpendicular a OA, del mismo modo que la recta CQ lo es a OB, y entonces los triángulos rectángulos CDP y CDQ, producen:*

CD=CP sen CPD

CD=CQ sen CQD

O bien:

Sen b sen A=sen a sen B

De donde:

$$\frac{sen\ a}{sen\ A} = \frac{sen\ b}{sen\ B}$$

Permutando las letras obtendríamos:

$$\frac{sen\ a}{sen\ A} = \frac{sen\ b}{sen\ B} = \frac{sen\ c}{sen\ C} \quad ...(3)$$

Lo cual demuestra el siguiente:

Teorema.-*En un triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

IV. Fórmulas que contienen dos lados, el ángulo que conforman y el opuesto a uno de ellos.

El autor deduce sólo una de las fórmulas de este grupo y lo hace de la siguiente manera:

Despejando á $sen\ c$ *de la fórmula (3), resulta:*

$$sen\ c = \frac{sen\ a\ sen\ C}{sen\ A}$$

Sustituyendo este valor en la segunda de las fórmulas del grupo (1) y reemplazando por cos a el valor que de la primera fórmula del grupo (1), resulta:

$$\cos a = \cos b\ (\cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b \cos C\ ) + sen\ b\ \frac{sen\ a\ sen\ C}{sen\ A} \cos A$$

ó:

$$\cos a = \cos a\, cos^2 b + sen\ a\ sen\ b \cos b \cos C + sen\ b\ sen\ a\ sen\ C\, \mathrm{cotg}\, A$$

ó:

$$\cos a\ sen^2\, b = sen\ a\ sen\ b(\cos b \cos C + sen\ C\ cotg\ A)$$

Dividiendo por sen a sen b, resulta:

cotg a sen b=cos b cos C + sen C cotg A

del mismo modo se obtienen las fórmulas:

cotg a sen B=cos b cos C + sen C cotg A

cotg a sen c=cos c cos B + sen B cotg A

cotg b sen a=cos a cos C + sen C cotg B ......(4)

cotg b sen c=cos c cos A + sen A cotg B

cotg c sen a=cos b cos B + sen B cotg C

cotg c sen b=cos b cos A + sen A cotg C

De lo anterior, es importante notar que; la segunda indicación no se corresponde con los resultados que muestra. Lo que en realidad hizo fue sustituir $sen\ c = \frac{sen\ a\ sen\ C}{sen\ A}$ (del *grupo 3*) y $\cos\ C = sen\ A\ sen\ B\ cos\ c - \cos A\, cos\ B$ (Tercera fórmula del grupo 1) en $cos\ a = \cos b \cos c + sen\ b\ sen\ c\ cos\ A$ (Primera fórmula del grupo 1).

Además, al referir la fórmula que dedujo dentro del grupo (4) se comete un error, en el primero miembro de la primera igualdad en lugar de *sen B* debería decir *sen b. Lo* anterior pudiera deberse a descuidos del autor o en su defecto, errores cometidos en la imprenta al momento de transcribir el documento.

Hasta aquí ha obtenido el autor los primeros cuatro grupos de fórmulas que en la actualidad son nombradas *Fórmulas Fundamentales para los Triángulos Esféricos*, a partir de éstas es posible obtener el resto de las fórmulas que competen a la Trigonometría Esférica al ser aplicables para todo tipo de Triángulo Esférico.

V. Cálculo de los ángulos de un triángulo esférico, en función de los tres lados.

El siguiente grupo de fórmulas, fue descubierto por primera vez por Jean Borda (1733-1799; Matemático, Físico, Astrónomo y Marino francés), en las que es posible calcular el ángulo diedro (A, B y C) en términos de los tres lados del Triángulo Esférico.

En seguida citamos e iremos complementando las ideas del autor como parte de la deducción del grupo de fórmulas para el ángulo A.

De la primera de las fórmulas de grupo (1), resulta:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\ \cos c}{sen\ b\ sen\ c}$$

Con el objeto de adaptar este valor al cálculo logarítmico, lo introduciremos en la conocida relación:

$$2cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

Con lo cual resulta:

$$2cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{sen\ b\ sen\ c} = \frac{2sen\ \frac{1}{2}(a + b + c)\ sen\frac{1}{2}(b + c - a)}{sen\ b\ sen\ c}$$

Haciendo enseguida como en los triángulos rectilíneos:

$$a + b + c = 2p$$

Se trata del perímetro del Triángulo Esférico, denotado como *2p,* a partir de éste es posible obtener las siguientes equivalencias:

1. $\frac{a + b + c}{2} = p$ (semiperímetro del Triángulo Esférico)
2. Sea $a + b + c = 2p$

$\rightarrow a + b + c - 2a = 2p - 2a$ Al restar $2a$ en ambos miembros

$\rightarrow b + c - a = 2\ (p - a)$

Son las expresiones que el autor debió sustituir en la igualdad previa a donde define el perímetro del Triángulo, de tal forma que al simplificarlas obtiene la fórmula que en seguida citamos.

$$cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{sen\ p\ sen\ (p - a)}{sen\ b\ sen\ c}}$$

Para las fórmulas seno y tangente del ángulo mitad, únicamente menciona bajo que fórmulas es posible obtenerlas de la siguiente manera:

Sustituyendo el valor de cos A en la relación:

$$2sen^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

Y haciendo operaciones análogas a las anteriores, se obtendría fácilmente:

$$sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{sen\ (p - a)\ sen\ (p - c)}{sen\ b\ sen\ c}}$$

Finalmente, dividiendo una entre otra estas expresiones queda:

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{sen\,(p-b)\,sen\,(p-c)}{sen\,p\,sen\,(p-a)}}$$

Para este grupo de fórmulas señala lo siguiente.

En todas estas fórmulas el radical debe tomarse con el signo más, porque A<180°, y las funciones trigonométricas de los ángulos A/2, son siempre positivas.

Cabe mencionar que, mediante una permutación de letras o realizando procedimientos análogos a los señalados por el autor, es posible deducir las fórmulas respecto a los ángulos B y C del Triángulo Esférico.

VI. Fórmulas de Delambre.

Para deducir una de las fórmulas de Delambre, Lamadrid utiliza la siguiente función de Trigonometría Plana.

$$sen\,\left(\frac{A+B}{2}\right) = sen\frac{A}{2}COS\frac{B}{2} + sen\frac{B}{2}COS\frac{A}{2}$$

De modo que, sustituye en ésta, las correspondientes fórmulas de seno y coseno deducidas previamente para los semiángulos A y B del Triángulo Esférico. En esta ocasión, no realizaremos los cálculos ni retomaremos lo que esboza el autor al respecto. Únicamente, exhibimos la fórmula que obtiene y lo que comenta sobre la deducción de las otras fórmulas.

Y finalmente:

$$\frac{sen\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

Efectuando operaciones análogas con las expresiones de $sen\frac{1}{2}(A-B)$, $cos\frac{1}{2}(A+B)$ *y* $cos\frac{1}{2}(A-B)$, *se obtienen las cuatro fórmulas de Delambre:*

$$\frac{sen\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{sen\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\mathrm{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{cos\frac{1}{2}(A+B)}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{cos\frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen}\frac{1}{2}c}$$

Observamos que en cada una de estas fórmulas figuran los tres lados a, b, c y los tres ángulos A, B, C del Triángulo Esférico, aunque el autor no lo menciona, éstas son sólo cuatro de las doce fórmulas de Delambre. Para obtener la otras ocho, es necesario ajustar las fórmulas de Trigonometría Plana en términos de los ángulos B y C, y para los ángulos A y C.

VIII. Analogías de Néper.

De este grupo de fórmulas el autor únicamente menciona que se obtienen al dividir ordenadamente dos a dos las fórmulas de Delambre y concluye, mostrando las siguientes fórmulas.

$$tg\frac{1}{2}(A+B)=\frac{cos\frac{1}{2}(a-b)}{cos\frac{1}{2}(a+b)}cotg\frac{1}{2}C$$

$$tg\frac{1}{2}(A-B)=\frac{sen\frac{1}{2}(a-b)}{sen\frac{1}{2}(a+b)}cotg\frac{1}{2}C$$

$$tg\frac{1}{2}(a+b)=\frac{cos\frac{1}{2}(A-B)}{cos\frac{1}{2}(A+B)}tg\frac{1}{2}c$$

$$tg\frac{1}{2}(a-b)=\frac{sen\frac{1}{2}(A-B)}{cos\frac{1}{2}(A+B)}tg\frac{1}{2}c$$

Observamos que cada fórmula involucra cinco de los elementos del Triángulo Esférico, y aunque el autor no lo menciona debemos tener en cuenta que no exhibe por completo las fórmulas de Néper, faltan otras ocho fórmulas que deberían obtenerse a partir de las fórmulas faltantes de Delambre.

CAPÍTULO II: Triángulos esféricos rectángulos

I. Fórmulas relativas a los triángulos esféricos rectángulos.

No efectúa ningún cálculo al respecto, sólo menciona que al sustituir $A=90°$ en las *Fórmulas Fundamentales para los Triángulos Esféricos* (primeros cuatro grupos de fórmulas) se obtienen los grupos que exhibe en su texto, también denominadas *Fórmulas Fundamentales para los Triángulos Esférico Rectángulos.*

II. Regla de Néper

Es una alternativa que propone el autor para obtener las Fórmulas Fundamentales de los Triángulos Rectángulos.

III. Resolución de los triángulos rectángulos.

Al igual que Contreras distingue seis casos que pudieran presentarse, al abordar brevemente cada caso indica las fórmulas que permitirán bajo cierta información conocida determinar los elementos restantes del Triángulo Esférico, si considera necesario utilizar fórmulas calculables por logaritmos ahí mismo cita indicando uno o dos pasos la manera para deducirla, realiza además ligeras observaciones en torno al tipo de solución que pudiera obtenerse para cada caso y cuando es imposible obtener resultados.

CAPÍTULO III: Triángulos esféricos cualesquiera

I. Idea general acerca de la resolución de los triángulos esféricos

De la resolución de los Triángulos Esférico cualesquiera menciona que en ocasiones el problema se puede simplificar a resolver un Triángulo Rectángulo y, en este sentido refiere lo siguiente:

1. Si el Triángulo es Rectilátero, entonces su Triángulo Polar será Rectángulo, de tal manera que al resolver este último y volviendo después al Triangulo considerado se tendrá resuelto el problema.

2. Si el Triángulo es Isósceles, sugiere dividirlo en dos triángulos rectángulos iguales al trazar un arco de círculo máximo que parta de su vértice y divida a la mitad la base del Triángulo. Al resolver uno de estos Triángulos se tendría resuelto el problema.

II. Resolución de los triángulos esféricos.

Distingue seis casos posibles, al abordar cada uno de éstos lista las fórmulas que pudieran ser utilizadas para determinar los elementos desconocidos y además, realiza algunas observaciones acerca del tipo de solución que pudieran obtenerse.

III. Superficie de un triángulo esférico.

Tomando en cuenta las ideas del autor hemos desarrollado el contenido matemático a fin de determinar la superficie de un Triángulo Esférico, el procedimiento es análogo al que desarrolla Contreras en su texto y que por cierto, en su momento no lo abordamos.

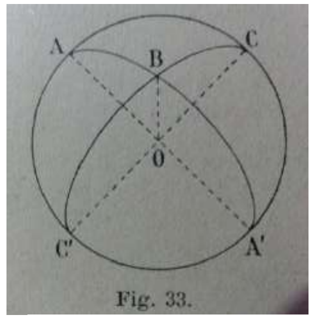


Figura 3.16: Algunos husos

Sea el Triángulo Esférico ABC (Ver figura 3.16), sobre la esfera se consideran los siguientes tres husos de los que el autor refiere lo siguiente:

$$ABC + BCA' = \sup huso\ A$$

$$ABC + BC'A' = \sup huso\ B$$

$$ABC + ABC' = \sup huso\ C$$

Observemos que, los tres husos se consideraron de tal forma que su ángulo se corresponda con alguno de los tres ángulos del Triángulo Esférico. No lo menciona, pero la superficie del huso B, fue posible definirla así ya que, los triángulos $BC'A'$ y $C'A'B'$, son simétricos por ser diametralmente opuestos, y por tanto poseen la misma área.

Al sumar las tres expresiones previamente establecidas se tiene

$$\sup huso\ A + \sup huso\ B + \sup huso\ C = ABC + BCA' + ABC + BC'A' + ABC + ABC'$$

Notemos que; $ABC + ABC' + BC'A' + BCA' = \frac{\sup esfera}{2}$

Y así,

$$\sup huso\ A + \sup huso\ B + \sup huso\ C = 2ABC + \frac{\sup esfera}{2} \quad ...(1)$$

Sabiendo que, la superficie de la esfera se determina como $4\pi r^2$, y como el huso corresponde a una parte de ésta cuyo valor depende del número de grados de su ángulo, refiere la siguiente proporción:

$$\frac{360°}{A°} = \frac{4\pi r^2}{\sup huso\ A}$$

De donde:

$$\sup huso\ A = \frac{\pi r^2\ A°}{90°}$$

Al sustituir en (1) los valores de las superficies de los husos A, B y C, designando por S la superficie del Triángulo ABC se tiene:

$$\frac{\pi r^2}{90°}(A + B + C) = 2S + 2\pi r^2$$

$$\frac{\pi r^2}{180°}(A + B + C - 180°) = S$$

Sabiendo que el exceso esférico del triángulo es: $e = A + B + C - 180°$

Se tiene

$$S = \pi r^2 \frac{e}{180°}$$

Expresión que permite calcular la superficie del Triángulo, en términos de su exceso esférico y el radio de la esfera.

CAPÍTULO IV: Aplicaciones de la trigonometría esférica

En este capítulo desarrolla parte del contenido matemático en torno a las siguientes aplicaciones:

I. Distancia entre dos puntos de la superficie terrestre, supuesta esférica, conociendo sus coordenadas geográficas.

II. Reducción de un ángulo al horizonte.

De momento no indagaremos en su contenido, al observar que es análogo al que desarrolla *Tamborrel* en su texto *"Compendio de Trigonometría Rectilínea y Esférica"*.

III. Ejercicios

Una vez desarrollados los diferentes temas de Trigonometría Esférica el autor propone los siguientes tres ejercicios, para poner en práctica parte de lo aprendido, y no proporciona sus resultados.

1° Calcular el volumen de un tetraedro

2° Calcular el volumen de un paralelipípedo, en función de las tres aristas, y de los ángulos que hacen entre sí dos a dos.

3°De las fórmulas de los triángulos esféricos, deducir las correspondientes de la trigonometría rectilínea.

Comentario general

El autor es breve al abordar los temas de Trigonometría Esférica, se restringe a proporcionar únicamente cierta cantidad de fórmulas, no puntualiza en ciertos detalles y tampoco resuelve ejercicios. En este sentido y considerando la época, lo anterior no debió representar problema alguno para los estudiantes, quienes poseían un muy buen nivel de conocimientos matemáticos dadas las exigencias dentro de la ENP

El contenido matemático es muy parecido al que desarrolla Contreras en su texto, con la diferencia de que en más de una ocasión La Madrid deduce algunas fórmulas mediante el uso de Proyecciones dejando de lado la parte del todo analítica.

Hemos transcrito el índice del libro y previo a éste, anexamos unas fotos originales del texto, se trata de algunas notas que proporciona el autor al término de su obra, en donde propone otras alternativas para abordar dos de los temas previamente cubiertos. No enfatizaremos en su estudio, se dejan a criterio del lector por si gusta indagar al respecto.

NOTAS

NOTA I

Fórmulas de los triángulos esféricos rectángulos obtenidas geométricamente.

205. — Sea el triángulo esférico ABC rectángulo en A, figura 42. Si desde C trazamos CD perpendicular á AO, y por D la recta DE, perpendicular á OB, la recta CE es también perpendicular á OB según la geometría, y el triángulo rectángulo OED produce :

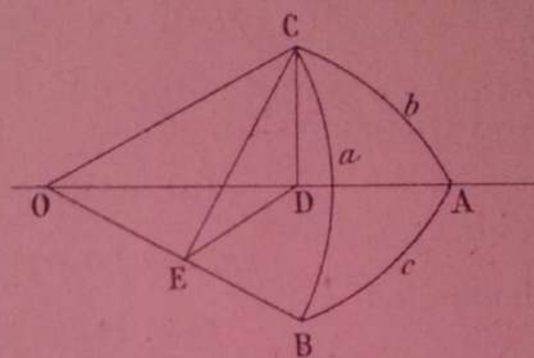


Fig. 42.

$$ED = OD \operatorname{sen} DOE$$
$$ED = OE \operatorname{tg} DOE$$

de donde : $OE \operatorname{tg} DOE = OD \operatorname{sen} DOE$

es decir : $\cos a \operatorname{tg} c = \cos b \operatorname{sen} c$

poniendo por $\operatorname{tg} c$ su valor $\dfrac{\operatorname{sen} c}{\cos c}$ quitando denominadores y reduciendo resulta :

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad (1)$$

que es una de las fórmulas encontrada en otra parte.

El triángulo CDE produce :

$$CD = CE \operatorname{sen} CED$$

ó

y por analogía :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

10

Nota 1: Método geométrico para determinar las fórmulas de los Triángulos rectángulos

Que son otras fórmulas también ya obtenidas.

El mismo triángulo CDE da :

$$ED = EC \cos DEC$$

es decir :

$$\cos a \operatorname{tg} c = \operatorname{sen} a \cos B$$

de donde :

Y por analogía :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} a \cos B \\ \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} a \cos C \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Que son otras fórmulas ya encontradas.

Dividiendo la primera fórmula del grupo (2), entre la segunda del grupo (3), y teniendo en cuenta la fórmula (1), resulta :

Y por anología :

$$\left.\begin{aligned} \cos C &= \cos c \operatorname{sen} B \\ \cos B &= \cos b \operatorname{sen} C \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Que son también otras de las fórmulas ya obtenidas.

El triángulo CDE da :

$$CD = DE \operatorname{tg} CDE$$

ó bien :

$$\operatorname{sen} b = \cos b \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B$$

de donde :

Y por analogía :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} b &= \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} c &= \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Finalmente, multiplicando las fórmulas (4), resulta :

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \qquad (6)$$

Que es la única fórmula que nos faltaba obtener.

NOTA II

Método geométrieo para obtener las Analogías de Néper.

206. — Sea ABC un triángulo esférico cualquiera, figura 43. Trazando la bisectriz CO, y tomando $CN = CA$,

Nota 1: Método geométrico para determinar las fórmulas de los Triángulos rectángulos si por el punto D, medio de NB, levantamos el arco OD perpendicular á NB, el punto O es un polo del arco de círculo que pasa por N, B y A, porque $ON = OB = OA$. Así es que en el triángulo OBD, se tiene aplicando cualquiera de las formulas (5) de la nota anterior:

$$\operatorname{tg} OD = \operatorname{sen} DB \operatorname{tg} OBN.$$

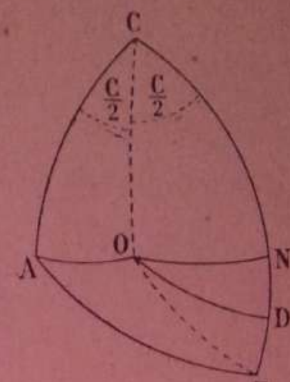


Fig. 43.

La aplicación de las mismas fórmulas al triángulo rectángulo COD, produce:

$$\operatorname{tg} OD = \operatorname{sen} DC \operatorname{tg} \frac{1}{2} C.$$

De donde resulta:

$$\frac{\operatorname{tg} OBN}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{sen} DC}{\operatorname{sen} DB} \qquad (1)$$

Pero:

$$OBN = \hat{B} - OBA = \hat{B} - OAB.$$

Y como:

$$OAB = \hat{A} - OAC = \hat{A} - ONC$$

resulta:

$$OBN = \hat{B} - \hat{A} + ONC.$$

Pero en el triángulo isósceles OBN,

$$ONC = 180^\circ - ONB = 180^\circ - OBN$$

luego:

$$OBN = \hat{B} - \hat{A} + 180^\circ - OBC$$

de donde:

$$2\,OBN = 180^\circ - (A - B).$$

Y

$$OBN = 90^\circ - \frac{1}{2}(A - B).$$

Así es que (1) se convierte en:

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(A - B) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \frac{\operatorname{sen} DC}{\operatorname{sen} DB}.$$

Pero:

$$DC = a - BD$$

y

$$DC = CN + ND = b + BD.$$

Nota 2: Método geométrico para determinar las Analogías de Néper

Eliminando á DC y DB de estas expresiones, resulta

$$DB = \frac{1}{2}(a - b)$$

$$DC = \frac{1}{2}(a + b)$$

por consiguiente se tiene :

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(A - B) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}$$

y finalmente :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A - B) = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}. \qquad (2)$$

Ahora bien, de la fórmula :

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$$

se obtiene fácilmente :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Despejando á $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B)$, y poniendo por $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A - B)$ el valor encontrado anteriormente, resulta :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B) = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}. \qquad (3)$$

Si aplicamos las analogías (2) y (3) al triángulo polar, obtenemos las otras dos analogías restantes.

Estas notas las debemos á la benevolencia de nuestro muy querido amigo y maestro, el Sr. Ingeniero Don Francisco Echeagaray y Allén, quien nos facilitó su trigonometría, para que consignáramos aquí los anteriores procedimientos.

Nota 2: Método geométrico para determinar las Analogías de Néper

ÍNDICE

LIBRO TERCERO
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I

Relaciones entre cuatro elementos cualesquiera de un triángulo esférico cualquiera

I. Fórmulas que contienen tres lados y un ángulo

II. Fórmulas que contienen tres ángulos y un lado

III. Fórmulas que contienen dos lados, y los dos ángulos opuestos.

IV. Fórmulas que contienen dos lados, el ángulo que conforman y el opuesto a uno de ellos.

V. Cálculo de los ángulos de un triángulo esférico, en función de los tres lados.

VI. Fórmulas de Delambre.

VII. Regla neumónica para obtener las fórmulas de Delambre.

VIII. Analogías de Néper.

CAPÍTULO II

Triángulos esféricos rectángulos

I. Fórmulas relativas a los triángulos esféricos rectángulos.

II. Regla de Néper.

III. Resolución de los triángulos rectángulos.

CAPÍTULO III

Triángulos esféricos cualesquiera

I. Idea general acerca de la resolución de los triángulos esféricos.

II. Resolución de los triángulos esféricos.

III. Superficie de un triángulo esférico.

CAPÍTULO IV

Aplicaciones de la trigonometría esférica

I. Distancia entre dos puntos de la tierra.

II. Reducción de un ángulo al horizonte.

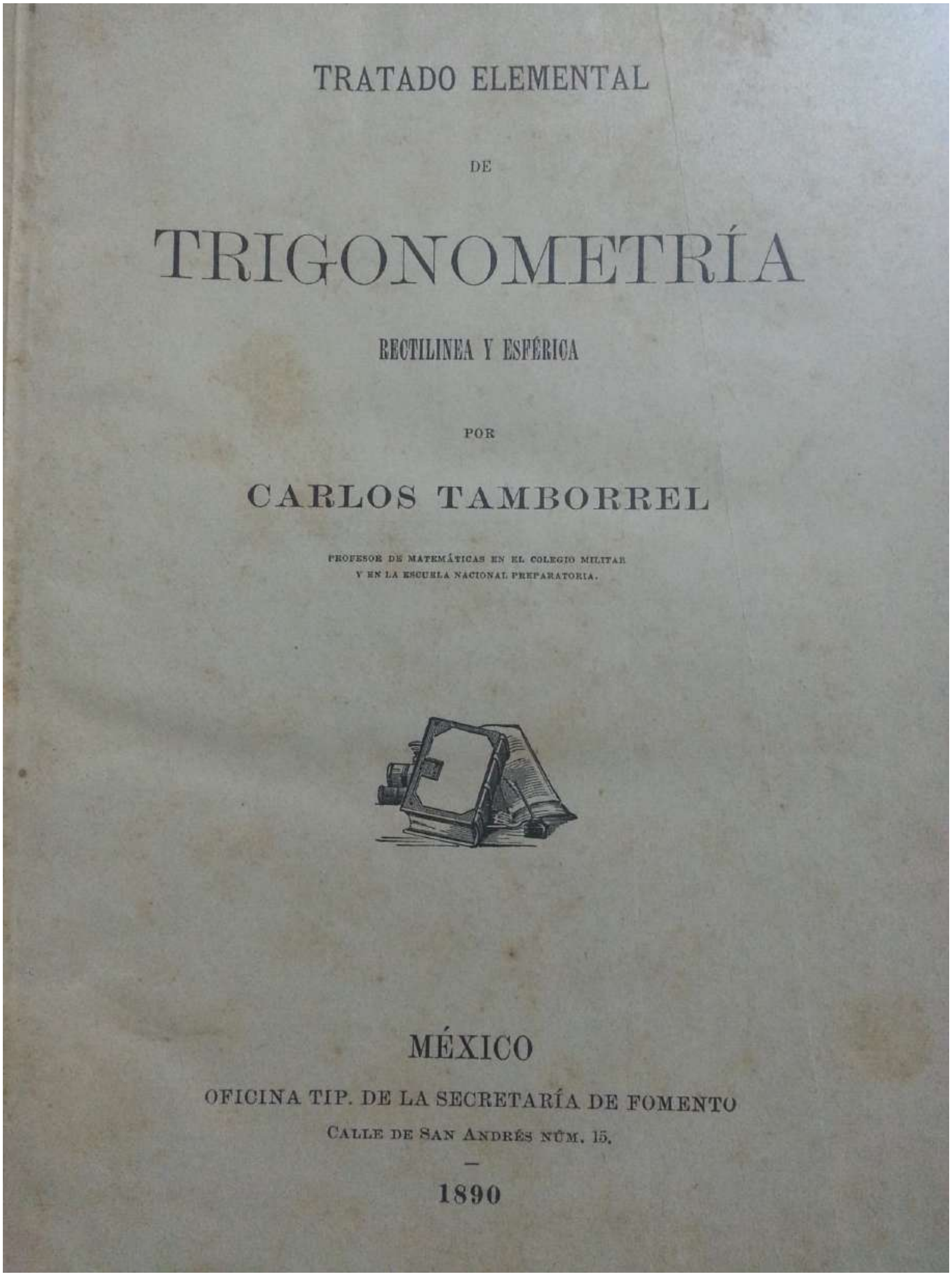
III. Ejercicios.

NOTAS

Nota I.- Fórmulas de los triángulos esféricos rectángulos obtenidas geométricamente.

Nota II.- Método geométrico para obtener las analogías de Néper.

Libro "Tratado Elemental de Trigonometría Rectilínea y Esférica" de Carlos Tamborrel



TRATADO ELEMENTAL

DE

TRIGONOMETRÍA

RECTILINEA Y ESFÉRICA

POR

CARLOS TAMBORREL

PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN EL COLEGIO MILITAR
Y EN LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA.

MÉXICO

OFICINA TIP. DE LA SECRETARÍA DE FOMENTO

CALLE DE SAN ANDRÉS NÚM. 15.

—

1890

Carlos Tamborrel, cursó sus estudios preparatorios en la ENP, quien fuera premiado en esta institución por su primer año de estudios en lo que corresponde al año escolar de 1873. De profesión abogado y autodidacta matemático por afición, fue profesor de Matemáticas en el Colegio Militar y la Escuela Nacional Preparatoria, en esta última además fungió como profesor a cargo de las Academias de Matemáticas.

Se le atribuye la obra que lleva por título *Trigonometría Rectilínea y Esférica*, publicada en 1890 y que sirviera de texto en las cátedras de la ENP. A modo de prólogo, el autor hace una síntesis de los diversos contenidos a lo largo de su texto, que él mismo clasificará en las siguientes partes.

- Primera parte: Análisis angular
- Segunda parte: Trigonometría rectilínea
- Tercera parte: **Trigonometría Esférica**, que va de la página 227 a 327, en donde a través de 7 capítulos desarrolla el contenido matemático al respecto. Al final del apartado hemos incluido el índice de ésta última parte, para tener una idea de los temas que cubre ya que; en lo sucesivo, para evitar ser tan repetitivos únicamente nos enfocaremos en el estudio de los tres últimos capítulos, es decir, los capítulos V, VI y VII.

CAPÍTULO *V:* ***Superficie de un Triángulo Esférico***

El título del capítulo nos hace suponer que, el autor primeramente deducirá una fórmula que permita determinar la superficie de un Triángulo Esférico; más sin embargo, Tamborrel va más allá de ello. Inicia el capítulo abordando un teorema en el que bajo ciertas condiciones se demuestra que la superficie de un triángulo esférico es igual a su exceso esférico. De la relación anterior, en lo sucesivo, el autor deduce algunas fórmulas que le permitan determinar el exceso esférico dados ciertos elementos del triángulo.

En seguida citamos el teorema que primeramente demuestra el autor, y presentamos parte del contenido matemático que compete a este apartado.

> *Si se toma como unidad de ángulo el ángulo recto y como unidad de superficie el triángulo trirrectángulo, la superficie de un triángulo esférico es igual á su exceso esférico.*

Demostraremos el teorema teniendo como referencia la idea del autor. Sea ABC (ver figura 3.17) un triángulo esférico. Sobre la superficie de la esfera consideramos los siguientes tres husos.

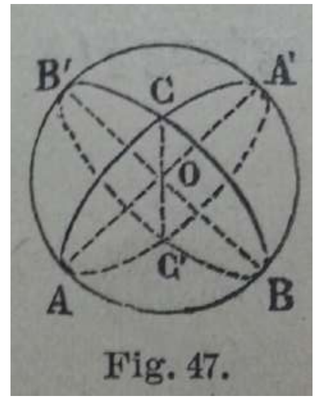


Figura 3.17: Husos

Huso A: Aquel determinado por las semicircunferencias ACA´y ABA´, cuyo ángulo es el ángulo A del Triángulo Esférico ABC. De manera que:

$$\text{Huso A} = \text{ABC} + \text{A´BC} \text{ (La suma de los dos triángulos)... (1)}$$

Huso B: Limitado por las semicircunferencias BCB´y BAB´, cuyo ángulo es el ángulo B del triángulo propuesto. De manera que:

$$\text{Huso B} = \text{ABC} + \text{AB´C} \text{ (La suma de los dos triángulos)... (2)}$$

Huso C: Formado por las semicircunferencias CAC´ y CBC´cuyo ángulo coincide con el ángulo C del triángulo Esférico ABC. De manera que:

$$\text{Huso C} = \text{ABC} + \text{ABC´} \text{ (La suma de los dos triángulos)}$$

Dado que, los triángulos ABC´ y A´B´C son diametralmente opuestos, son entonces simétricos y por lo tanto poseen la misma superficie. Al sustituir en la fórmula anterior tenemos que:

$$\text{Huso C} = \text{ABC} + \text{A´B´C} \text{ (La suma de los dos triángulos)... (3)}$$

En seguida, sumamos las igualdades (1), (2) y (3).

$$\text{Huso A} + \text{Huso B} + \text{Huso C} = \text{ABC} + \text{A´BC} + \text{ABC} + \text{AB´C} + \text{ABC} + \text{A´B´C}$$

$$\text{Huso A} + \text{Huso B} + \text{Huso C} = (\text{ABC} + \text{A´BC} + \text{AB´C} + \text{A´B´C}) + \text{ABC} + \text{ABC} \text{ ...(4)}$$

Sabemos que la superficie de la esfera es igual a 8, ya que; por hipótesis tenemos como unidad de superficie el triángulo trirrectángulo. Si definimos como S la superficie del Triángulo ABC y dado que; la suma de los Triángulos $\text{ABC}, \text{A´BC}, \text{AB´C}$ y A´B´C es igual a un hemisferio. Al realizar los ajustes en la igualdad (4) se tiene:

$$\text{Huso A} + \text{Huso B} + \text{Huso C} = 4 + 2\text{S} \dots (5)$$

En el sistema de unidades que hemos adoptado el autor afirma que:

La superficie de un huso está expresada por el doble de su ángulo

Hecho que prueba de la siguiente manera:

> *En efecto dos husos cualesquiera son proporcionales á sus ángulos; y si comparamos un huso cuyo ángulo sea H con toda la esfera, cuya superficie es 8, puesto que contiene ocho triángulos trirrectángulos, y cuyo ángulo es 4, puesto que puede considerarse como un huso cuyo ángulo es toda la circunferencia, se tiene*
>
> $$\frac{huso\ H}{8} = \frac{ángulo\ H}{4};$$
>
> *de donde*
>
> $$huso\ H = 2\ ángulo\ H.$$

Y a partir de lo anterior, procedemos a sustituir en la igualdad (5), en lugar de cada uso el doble de su ángulo correspondiente.

$$2\text{ A} + 2\text{ B} + 2\text{ C} = 4 + 2\text{S}$$

De donde

$$\text{A} + \text{B} + \text{C} = 2 + \text{S}$$

$$\text{S} = \text{A} + \text{B} + \text{C} - 2 \ \ldots(6)$$

Al denotar el exceso esférico del triángulo ABC, por 2δ, y expresarlo en términos del ángulo recto tomado por unidad, se tiene

$$2\delta = A + B + C - 180°$$

$$2\delta = A + B + C - 2(90°)$$

$$2\delta = A + B + C - 2(1)$$

$$2\delta = A + B + C - 2$$

Finalmente, al sustituir 2δ en la igualdad (6) se tiene

$$\text{S} = 2\delta \ldots(7)$$

Con lo que queda demostrado el teorema, es decir, bajo las hipótesis llegamos a que la superficie S del triángulo esférico ABC es igual al exceso esférico 2δ de dicho triángulo.

En lo que resta del capítulo el autor plantea algunas situaciones en torno a la información que pudiera conocerse de un Triángulo Esférico y, a partir de ésta, deduce algunas fórmulas con las que sea posible determinar su exceso esférico que en lo sucesivo denotará como $2\varDelta$.

Primera situación que plantea

Dados dos lados a, b y el ángulo comprendido C, encontrar el exceso esférico $2\varDelta$

Tamborrel realiza los respectivos cálculos en los dos métodos que propone para encontrar el exceso esférico a partir de la información dada. En seguida, abordaremos la parte matemática de uno de éstos métodos.

Primer método. Se tiene

$$tang\,\frac{1}{2}(A+B)=\frac{cos\frac{1}{2}(a-b)}{cos\frac{1}{2}(a+b)}cotg\,\frac{1}{2}C \text{ ...(8)}$$

Como podemos darnos cuenta, hace uso de una de las fórmulas de Néper, en la que buscará introducir el exceso esférico. Enseguida mostramos parte del proceso, al que hemos agregado algunos pasos que el autor omite.

$\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(A+B+C)-\frac{1}{2}C$

$= 90°+\varDelta-\frac{1}{2}C$ Ya que, $2\varDelta=A+B+C-180° \Rightarrow \frac{A+B+C}{2}=\varDelta+90°$

$= 90°-(\frac{1}{2}C-\varDelta)$

Al aplicar la función tangente, en ambos miembros de la igualdad, y por identidades trigonométricas se tiene.

$$\text{tang}\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})=\text{tang}\left(90°-\left(\frac{1}{2}\text{C}-\varDelta\right)\right)=\frac{sen\left(90°-\left(\frac{1}{2}\text{C}-\varDelta\right)\right)}{\cos\left(90°-\left(\frac{1}{2}C-\varDelta\right)\right)}=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\text{C}-\varDelta\right)}{sen\left(\frac{1}{2}\text{C}-\varDelta\right)}=\cot\left(\frac{1}{2}\text{C}-\varDelta\right) \text{ ...(9)}$$

Luego, de las igualdades (8) y (9)

$$\cot\left(\frac{1}{2}\text{C}-\varDelta\right)=\frac{cos\,\frac{1}{2}(a-b)}{cos\,\frac{1}{2}(a+b)}cotg\,\frac{1}{2}C$$

Y concluye diciendo

Esta fórmula da el valor de $\frac{1}{2}C-\varDelta$*, y restando el valor de* $\frac{1}{2}C$*, se obtiene el de* $\varDelta$

Segunda situación

Dados los tres lados a, b, c, encontrar el exceso esférico $2\varDelta$

El autor propone tres métodos en los que emplea distintas fórmulas de los Triángulos Esféricos que se ajustan a los datos conocidos, menciona las fórmulas que usará, describe a grandes rasgos como proceder y finalmente da la fórmula deducida.

Haremos referencia brevemente del segundo método propuesto. En el que utiliza las siguientes dos fórmulas de Delambre.

$$\frac{sen\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

En las que sustituye

$$\frac{1}{2}(A+B)=90°-(\frac{1}{2}C-\varDelta)$$

Efectúa algunas operaciones, de modo que obtiene la siguiente igualdad.

$$tang\ \frac{1}{2}\varDelta=\sqrt{tang\frac{1}{2}p\ tang\frac{1}{2}(p-a)\ tang\ \frac{1}{2}(p-b)\ tang\ \frac{1}{2}(p-c)}$$

Fórmula que da el exceso esférico en términos de los tres lados, y que se debe a Simón Lhuilier (1750-1840, matemático Suizo).

CAPÍTULO VI: ***Resolución aproximativa de ciertos Triángulos Esféricos***

En lo que respecta al estudio de este capítulo, abordaremos la demostración que en éste hace Tamborrel del Teorema de Legendre, y que enuncia de la siguiente manera.

> ***Teorema de Legendre.*** *Si los lados de un triángulo esférico son muy pequeños con respecto al radio de la esfera, y se forma un triángulo plano cuyos lados sean iguales á los del triángulo esférico; entonces cada ángulo del triángulo plano es igual al correspondiente del triángulo esférico, disminuido de la tercera parte del exceso esférico.*

En la demostración el autor, parte del supuesto que está trabajando sobre la esfera de radio igual a la unidad. Define como A, B, C los ángulos del Triángulo Esférico, A´, B´, C´ los del triángulo rectilíneo, y a, b, c los lados comunes en ambos triángulos expresados en partes del radio.

Posteriormente, refiere la siguiente fórmula de Bessel, también denominada fórmula fundamental.

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\ \cos c}{sen\ b\ sen\ c}$$

En el segundo miembro, sustituye el desarrollo en serie de los senos y coseno, sin tomar en cuenta los términos que contienen potencias superiores al cuarto grado, bajo el argumento de que a, b y c son sumamente pequeños. Y de esta manera, las expresiones a sustituir son:

$$\cos a = 1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{24}a^4 \qquad sen\ b = b - \frac{1}{6}b^3$$

$$\cos b = 1 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{24}b^4$$

$$\cos c = 1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{24}c^4 \qquad sen\ c = c - \frac{1}{6}c^3$$

Al realizar las sustituciones y algunas multiplicaciones, teniendo cuidado de ignorar los términos de grado mayor que cuatro, se obtiene

$$Cos\ A = \frac{\frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2\ ) + \frac{1}{24}(-a^4 - b^4 - c^4 - 6\ b^2c^2)}{bc\left[1 - \frac{1}{6}(c^2 + b^2)\right]}$$

En la ecuación anterior multiplica al numerador y denominador por 1+ $\frac{1}{6}(c^2 + b^2)$, y vuelve a ignorar los términos de grado mayor a cuatro, de esta manera obtiene la siguiente ecuación.

$$Cos\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 - 2b^2a^2}{24\ bc}$$

... (7)

Hasta aquí ha trabajado con el triángulo esférico, que dejará de lado un momento para obtener algunas implicaciones en torno al triángulo rectilíneo, y de esta manera poder vincular ambos triángulos en término de sus ángulos.

De la ley de cosenos para el triángulo plano se tiene

$$Cos\ A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

... (8)

De la identidad pitagórica se tiene $sen^2A' = 1 - cos^2A'$, al sustituir en ésta la ecuación anterior, y efectuando los respectivos cálculos y simplificaciones se obtiene.

$$sen^2A' = \frac{2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}$$

El autor sugiere multiplicar ambos miembros de esta última ecuación por $\frac{1}{6}bc$, es decir,

$$\frac{1}{6}bc\ sen^2 A' = \frac{2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{24bc}$$

... (9)

Y así, reescribir la ecuación (7) en términos de (8) y (9) de modo que

$$Cos\ A = \cos A' - \frac{1}{6}bc\ sen^2 A' \text{ ...(10)}$$

Hace la observación de que el término $\frac{1}{6}bc\ sen^2 A'$ es muy pequeño, por estar b y c expresados en partes del radio y ser además demasiado pequeños, se infiere que la diferencia entre A y A´ es muy pequeña. Esta diferencia la denota por x, para enunciar la siguiente igualdad

$$A = A' + x \text{ ...(11)}$$

En donde, al aplicar la función coseno se tiene

$$\cos A = \cos(A' + x) = cos\ A' \cos x - senA'senx$$

Y dado que bajo nuestra hipótesis x es un arco muy pequeño, por el desarrollo en serie toma $\cos x = 1$ y $sen\ x = x$. Y al sustituir en la ecuación anterior obtiene

$$cosA = \cos A' - xsenA' \text{ ...(12)}$$

Al igualar las ecuaciones (10) y (12), se obtiene

$$x = \frac{1}{6}bc\ sen\ A'$$

Al estar x, b y c expresados en partes del radio. Si se designa por x'' el valor de x en segundos, por b_m y c_m los de b y c en metros, y por R el radio de la esfera también en metros, se tiene

$$x = x''sen\ 1'' \ , \ \ b = \frac{b_m}{R} \ \ , \ \ c = \frac{c_m}{R}$$

Al sustituir estos valores en la última ecuación obtiene

$$x''sen\ 1'' = \frac{b_m c_m senA'}{6R^2}$$

De donde

$$x'' = \frac{\frac{1}{2} b_m c_m sen A'}{3R^2 sen\, 1''}$$

La expresión del numerador $\frac{1}{2} b_m c_m sen A'$ corresponde a la superficie del triángulo rectilíneo, el autor la denota por s ya que, ésta por hipótesis deber ser sensiblemente igual a la superficie del triángulo esférico, luego

$$x'' = \frac{s}{3R^2 sen\, 1''}$$

Y dado que, el exceso esférico se expresa en segundos como $e = \frac{s}{R^2 sen 1''}$, al sustituir en la ecuación anterior obtiene

$$x'' = \frac{1}{3} e$$

Finalmente, por la ecuación (11) y dado que define a $x = x''$, se concluye que:

$$A = A' + \frac{1}{3} e$$

Los razonamientos son igualmente aplicables para los ángulos B y C, de los que se obtendría

$B = B' + \frac{1}{3} e \quad , \quad C = C' + \frac{1}{3} e$

Y así, queda demostrado el teorema de Legendre

Teorema que es aplicable en la resolución de Triángulos Esféricos pequeños, así; si se conocen sus tres lados, se deberá calcular el área y los tres ángulos del triángulo rectilíneo, que por cierto tiene por lados los del Triángulo esférico, y al aplicar las fórmulas se podrá determinar sin problema los tres ángulos de dicho Triángulo esférico.

De esta manera, el método de Legendre consiste básicamente en reducir la resolución de un Triángulo Esférico de lados muy pequeños a la del triángulo rectilíneo correspondiente. Método que en la actualidad se utiliza principalmente para la resolución de triángulos geodésicos.

CAPÍTULO VII: ***Problemas y Teoremas relativos a Triángulos Esféricos***

En el presente capítulo el autor propone diversos problemas que pudieran presentarse, cuya solución es fácil de establecer dentro del campo de estudio de la Trigonometría Esférica. En seguida abordamos 4 de los problemas que propone, y para cada uno de ellos trataremos de esbozar parte de su contenido matemático procurando permanecer fieles a la idea original del autor.

1er Problema: ***Reducir un ángulo al horizonte***

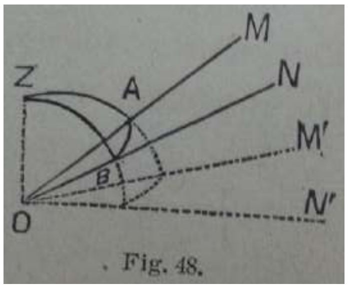


Figura 3.18: Ángulo al horizonte

El autor hace referencia al diagrama aquí mostrado (Ver Figura 3.18), de modo que; supone conocer lo siguiente:

1) La medida del ángulo MON

2) La medida de los ángulos ZOM y ZON que forman las visuales OM y ON con la vertical OZ respectivamente, y que además corresponde a las distancias cenitales de los puntos M y N.

Una vez que especifica la información conocida, el autor procede a plantear el problema de la siguiente manera:

> *La cuestión es determinar el ángulo $M'ON'$ que forman las proyecciones OM', ON' de las visuales OM, ON, sobre el horizonte del lugar.*

De modo que, el ángulo $M'ON'$ es el ángulo MON reducido al horizonte, y para determinar su valor sugiere construir una esfera con centro en el punto O y radio OZ igual a la unidad. Donde ZB, BA y ZA son arcos de círculos máximos determinados por la intersección de los planos ZON, MON y MOZ con la esfera de radio 1 respectivamente. Luego, por definición se tiene el Triángulo esférico ZAB sobre la superficie de la esfera, cuyos lados a, b, z se conocen por hipótesis, ya que;

a = ángulo ZON

b = ángulo ZOM

z = ángulo MON

Nótese que, el ángulo $M'ON'$ corresponde al ángulo diedro en Z, es decir, $M'ON' = Z$ (ángulo del triángulo esférico). De esta manera, el problema queda reducido a determinar el valor del ángulo Z conociendo los tres lados del triángulo esférico, haciendo uso de las fórmulas para la resolución de Triángulos Esféricos que mejor se adapte.

2do Problema: ***Encontrar la distancia entre dos puntos de la superficie terrestre, conociendo sus longitudes y sus latitudes.***

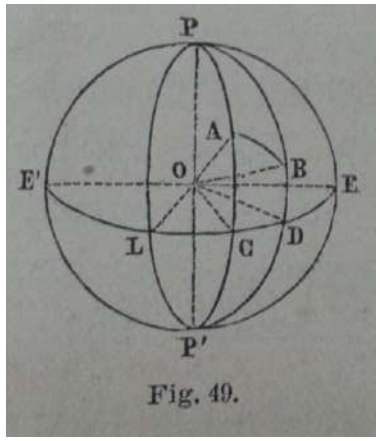


Figura 3.19: La ortodrómica

A partir de la Figura 3.19, el autor refiere algunos de los elementos sobre la superficie de la Tierra, de tal manera que, nombra los arcos de círculos máximos EE´ y PLP´ como el ecuador[3] y primer meridiano respectivamente, éste último comúnmente conocido como meridiano de Greenwich, y al eje polar o eje de rotación lo designa como el segmento de recta PP´. Parte del supuesto que se conocen las coordenadas geográficas de dos puntos sobre la superficie terrestre, que identifica como los puntos A y B, cuya distancia se busca determinar. En lo sucesivo trataremos de determinarla, siguiendo la idea proporcionada por el autor, pero haciendo uso de nuestra propia notación y refiriendo nuevos términos.

Tenemos por determinar la Ortodrómica[4] entre los puntos A y B, y que nosotros denominaremos como O_{AB}.

Por hipótesis se conocen las coordenadas de los puntos A y B, es decir, su latitud[5] y longitud[6] sobre la superficie terrestre, de modo que:

La latitud del punto A, es el ángulo que forma su vertical AO con el ecuador, cuyo ángulo está medido por el arco AC de su meridiano y que denotaremos como θ_A, la latitud del punto B se determina de manera análoga, nos referiremos a ésta como θ_B.

La longitud del punto A es el ángulo diedro que forma el meridiano PAP´, que pasa por él, con el primer meridiano, y que corresponde al arco CL, que denominaremos φ_A, la longitud del punto B se define análogamente y la denotaremos como φ_B.

[3] Círculo máximo perpendicular al eje de rotación de la Tierra

[4] Distancia más corta entre dos puntos en la esfera, y corresponde al menor arco de circunferencia máxima que los une

[5] Distancia angular de cualquier punto sobre la superficie de la Tierra, en dirección Norte o Sur, respecto al ecuador.

[6] Distancia angular de cualquier punto sobre la superficie de la Tierra, en dirección este u oeste, respecto al meridiano de Greenwich.

Observemos que AB es la ortodrómica y, AP y PB también son arcos de círculos máximos, por ser meridianos. Entonces, por definición APB es un Triángulo Esférico, del que es posible determinar sus lados a y b, además de su ángulo P. De modo que,

$$a = 90° - \theta_A$$
$$b = 90° - \theta_B$$

Expresados como complementos de las latitudes de los puntos A y B respectivamente. Mientras que, P es el ángulo que forman los dos meridianos, se puede obtener como el valor absoluto de la diferencia entre φ_A y φ_B. De este modo, al aplicar la Ley de Cosenos en el Triángulo Esférico APB observamos que, queda determinada la ortodrómica entre A y B

$$\cos O_{AB} = \cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b \cos P$$
$$\cos O_{AB} = \cos(90° - \theta_A)\cos(90° - \theta_B) + \mathrm{sen}(90° - \theta_A)\,\mathrm{sen}(90° - \theta_B)\cos(|\varphi_A - \varphi_B|)$$

El autor no exhibe fórmula como la precedente, sólo sugiere que puede resolverse el triángulo esférico mediante las fórmulas de Néper, a lo que nosotros optamos por la Ley de Cosenos. El autor no considera algunas variantes entre diversas ubicaciones que pudieran darse entre los puntos A y B. A lo que, nosotros observamos que puede ocurrir lo siguiente:

Los puntos A y B

1) Estén situados sobre el mismo meridiano

2) En el meridiano y el otro punto, en su antimeridiano. Pudiendo estar ambos sobre el mismo paralelo o no necesariamente.

Asumimos que no los considera ya que, su ortodrómica se puede determinar fácilmente, sin evocar en la resolución de un triángulo esférico.

Para el 3er y 4to problema, el autor evoca en diversas ocasiones la imagen que enseguida mostramos.

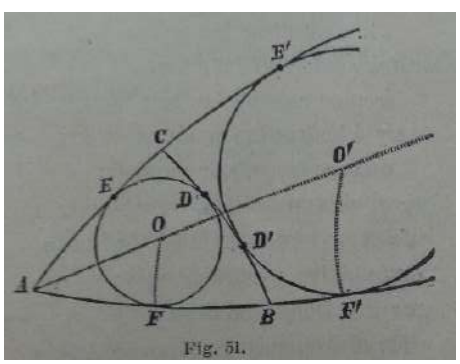


Figura 3.20: Triángulo Esférico

3^{er} Problema: ***Encontrar el radio esférico del círculo inscrito á un triángulo esférico dado***

Sea ABC un Triángulo Esférico (Ver figura 3.20), el punto O sobre la superficie de la esfera lo identifica como el polo del círculo inscrito a dicho triángulo, es decir, es el centro de la circunferencia inscrita, también denominado Incentro. Este punto se define de manera análoga a la que se hace en geometría plana, sólo que en este sentido, las bisectrices de los ángulos del Triángulo no serán segmentos de recta sino arcos de círculos máximos.

Son E, D y F puntos de tangencia del círculo inscrito con el Triángulo, los arcos de círculos máximos OA y OF, corresponden a la bisectriz del ángulo A y el radio del círculo respectivamente (Ver imagen 3.20). De lo anterior, es fácil darse cuenta que el triángulo AOF es rectángulo, su ángulo F es de 90°, y en este se cumple que:

$$tang\ OF = sen\ AF\ tang\ OAF \text{ ...(10)}$$

En lo sucesivo, el autor busca reescribir el arco AF en término del semiperímetro del triángulo, parte del hecho que:

$$AF = c - FB = c - BD$$

$$AF = AE = b - CE = b - CD$$

Al sumar ambas igualdades se tiene

$$AF + AF = c - BD + b - CD$$

Como $BD = a - CD$. Entonces

$$AF + AF = c - (a - CD) + b - CD$$

$$2AF = c - a + b$$

Sabemos que, el perímetro del triángulo es $a + b + c = 2p$

$$\rightarrow a + b + c - 2a = 2p - 2a$$

$$\rightarrow b + c - a = 2(p - a)$$

Luego,

$$2AF = 2(p - a)$$

Y así,

$$AF = p - a$$

Es como queda reescrito el arco AF en términos del semiperímetro. Recordemos que OA es bisectriz del ángulo A, entonces el ángulo OAF es la mitad del ángulo A, y OF es el radio que queremos determinar al que denotaremos como r. De lo anterior y de (10), se tiene

$$tang\ r = sen\ (p - a)\ tang\ \frac{A}{2}$$

De las fórmulas Néper, se sabe que

$$tang\ \frac{A}{2}=\sqrt{\frac{sen(p-b)sen(p-c)}{sen\ p\ sen(p-a)}}$$

Luego,

$$tang\ r=sen\ (p-a)\sqrt{\frac{sen(p-b)sen(p-c)}{sen\ p\ sen(p-a)}}$$

Y finalmente

$$\tang r=\sqrt{\frac{sen(p-a)sen(p-b)sen(p-c)}{sen\ p}}$$

Donde p es el semiperímetro

Es la fórmula a la que llega el autor, con la que sin problema es posible determinar el radio del círculo inscrito a un Triángulo Esférico conociendo los tres lados de éste. Lo que nosotros hicimos fue básicamente seguir la idea del autor aunque enfatizando en más detalles.

4[to] Problema: ***Encontrar los radios esféricos de los círculos exinscritos á un triángulo esférico***

El autor inicia este apartado con la siguiente definición

> *Círculos exinscritos son los que tocan á uno de los tres lados y á las prolongaciones de los otros dos*

En el siguiente párrafo, indica que círculo exinscrito va a considerar en lo sucesivo. Se sugiere ver la Figura 4 para identificar los trazos que el autor refiere.

> *Consideremos, por ejemplo, el círculo cuyo polo O´ está sobre el círculo máximo que divide en dos partes iguales el ángulo A, y que toca en D´ al lado a, y en E´ y F´ respectivamente á las prolongaciones de los lados b y c. Tracemos el arco de círculo máximo O´F´, que es el radio buscado.*

Para determinar el radio *O´F´* del círculo ex inscrito, sigue un razonamiento análogo al que uso en el 3[er] Problema que previamente abordamos. Y así

Del triángulo rectángulo AO´F´, se tiene:

$$tang\ O'F'=sen\ AF'\ tang\ O'AF'$$

Si denotamos como r_a el radio $O'F'$, atendiendo que el ángulo O´AF´es la mitad del ángulo A, se tiene

$$tang\ r_a\ = sen\ AF'\ tang\ \tfrac{A}{2}\ \ldots(11)$$

Y para encontrar el valor de AF', parte del hecho que

$$AF' = c + BF' = c + BD'$$

$$AF' = AE' = b + CE' = b + CD'$$

Al sumar ambas igualdades, resulta

$$2AF' = c + BD' + b + CD'$$

Como $BD' = a - CD'$. Entonces

$$2AF' = c + a + b$$

Luego, por definición del perímetro del triángulo ABC

$$2AF' = 2p$$

De modo que,

$$AF' = p$$

Y al sustituir en la ecuación (11)

$$tang\ r_a\ = sen\ p\ tang\ \frac{A}{2}$$

Por analogía se tiene para los radios r_b y r_c de los círculos exinscritos tangentes a los lados b y c del Triángulo Esférico las siguientes ecuaciones.

$$tang\ r_b\ = sen\ p\ tang\ \frac{B}{2}$$

$$tang\ r_c\ = sen\ p\ tang\ \frac{C}{2}$$

Al sustituir en estas fórmulas en lugar de $tang\ \frac{A}{2}$, $tang\ \frac{B}{2}$, $tang\ \frac{C}{2}$ sus valores en función de los lados a, b y c del triángulo, es decir, su equivalente fórmula de Néper se obtiene finalmente.

$$\text{tang}\, r_a = \sqrt{\frac{sen\ p\ sen(p-b)\ sen(p-c)}{sen\ (p-a)}}$$

$$\text{tang}\, r_b = \sqrt{\frac{sen\ p\ sen(p-a)\ sen(p-c)}{sen\ (p-b)}}$$

$$\tan g\, r_c = \sqrt{\frac{sen\, p\; sen(p-a)\; sen(p-b)}{sen\,(p-c)}}$$

De lo anterior concluimos que, al conocer los tres lados del Triángulo Esférico y mediante las fórmulas previamente deducidas, es posible determinar fácilmente el radio de cualquiera de los tres círculos exinscritos a dicho triangulo.

En seguida presentamos la lista de los nueve ejercicios con los que el autor concluye el presente capítulo, entre los que distinguimos problemas de planteamiento para los que da su solución y algunos teoremas por demostrar. Los hemos citado para dar una idea del nivel que se requería en los estudiantes.

I. Encontrar el volumen de un tetraedro, en función de sus tres aristas contiguas a, b, c, y los ángulos λ, μ, ν, que forman entre sí.

Solución:

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{sen\,\rho\; sen(\rho-\lambda) sen(\rho-\mu) sen(\rho-\nu)}$$

Siendo $p = \frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu)$

II. Dado un poliedro regular, encontrar el ángulo que forman dos caras adyacentes, los radios de las esferas inscrita y circunscrita, y el volumen del poliedro.

Solución:

$$sen\,\frac{1}{2}A = \frac{cos\frac{\pi}{n}}{sen\frac{\pi}{n'}}$$

$$r = \frac{1}{2}a\; tang\;\frac{1}{2}A \cot\frac{\pi}{n'}$$

$$R = \frac{1}{2}a\; tang\;\frac{1}{2}A \cot\frac{\pi}{n}$$

En cuyas fórmulas, A designa el ángulo de dos caras adyacentes, n el número de caras que forman el ángulo poliedro, n´ el número de lados de cada cara, r el radio de la esfera inscrita, a una arista y R el radio de la esfera circunscrita.

III. Encontrar el ángulo A del triángulo equilátero inscrito, y el ángulo A´ del triángulo equilátero circunscrito á un círculo dado, en función de su radio esférico R.

Solución:

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{3}{4 + tang^2 R}}$$

Y por consiguiente (225)

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A' = \sqrt{\frac{3}{4 + cot^2 R}}$$

IV. Demostrar que si se unen por arcos de círculo máximo los tres vértices de un triángulo esférico á los puntos de contacto del círculo inscrito, esos tres arcos se cortan en un mismo punto.

V. Sea ABC un triángulo esférico cualquiera, y A′, B′, C′ los puntos diametralmente opuestos á A, B, C respectivamente. Encontrar los radios esféricos de los círculos inscritos y circunscritos á los triángulos ABC′, ACB′, BCA′.

VI. Resolver un triángulo esférico conociendo un lado, el ángulo opuesto ó uno de los ángulos adyacentes á este lado, y la suma ó la diferencia de los otros dos lados.

VII. Resolver un triángulo esférico conociendo un lado, el ángulo opuesto y la altura correspondiente.

VIII. Resolver un triángulo esférico conociendo las sumas obtenidas agregando á cada uno de los lados los ángulos opuestos respectivamente.

IX. Si se designan por a *y* b *las aristas opuestas de un tetraedro, por* δ *su menor distancia, por a su ángulo, y por v el volumen del tetraedro, se tiene*

$$v = \frac{1}{6}\mathrm{ab}\,\delta\, sen\, a$$

Comentario general

Es interesante y muy completo el contenido del texto, las deducciones que hace el autor son a través de proyecciones, analíticamente o mediante ambas técnicas. En varias partes del texto el autor escribe a modo de prosa las deducciones realizadas, suele hacer varias observaciones a fin de poner en contexto, y que pudiera ser contraproducente al no fijar toda la atención del lector en el objeto de estudio meramente matemático.

TERCERA PARTE.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

INTRODUCCIÓN.

Idea de los triángulos esféricos generales, 228. Propiedades de los triángulos esféricos comunes, 230.

CAPÍTULO PRIMERO.

RELACIONES ENTRE CUATRO ELEMENTOS CUALESQUIERA DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO CUALQUIERA.

Fórmulas que contienen los tres lados y un ángulo, 232. Fórmulas que contienen los tres ángulos y un lado, 234. Fórmulas que contienen dos lados y los dos ángulos opuestos, 234. Fórmulas que contienen dos lados, el ángulo que forman y el opuesto á uno de ellos, 236. Varias otras fórmulas, 238. Otras propiedades de los triángulos esféricos, 239. Otro modo de establecer las fórmulas anteriores, 240.

CAPÍTULO II.

FÓRMULAS ESPECIALES PARA LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS.

Fórmulas especiales á los triángulos esféricos rectángulos, 242. Regla de *Napier*, 243. Triángulos rectiláteros, 245.

CAPÍTULO III.

RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS.

Primer caso, cuando los datos son a y B, 247. Segundo caso, cuando los datos son b y c, 249. Tercer caso, cuando los datos son b y C, 249. Cuarto caso, cuando los datos son a y b, 250. Quinto caso, cuando los datos son B y C, 252. Sexto caso, cuando los datos son b y B, 254. Elementos de un triángulo esférico rectángulo, para ejercitarse en la resolución de esta clase de triángulos, 258.

CAPÍTULO IV.

RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS OBLICUÁNGULOS.

Triángulos esféricos oblicuángulos cuya resolución se reduce á la de triángulos esféricos rectángulos, 259. Casos I y II, cuando los datos son a, b, c ó

A, B, C, 260. Casos III y IV, cuando los datos son a, b, C ó A, B, c, 271. Casos V y VI, cuando los datos son a, b, A ó A, B, a, 281. Ejemplos, 292.

CAPITULO V.

SUPERFICIE DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO.

Fórmulas que dan la superficie de un triángulo esférico en triángulos trirrectángulos, 296. Fórmulas que la dan en metros cuadrados, 297. Exceso esférico en función de a, b y C, 298. Exceso esférico en función de a, b, c, 300.

CAPITULO VI.

RESOLUCIÓN APROXIMATIVA DE CIERTOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

Triángulos cuyos lados son muy pequeños. Teorema de *Legendre*, 303. Resolución de ciertos triángulos esféricos rectángulos, 306. Resolución de ciertos triángulos esféricos oblicuángulos, 308.

CAPITULO VII.

PROBLEMAS Y TEOREMAS RELATIVOS Á TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

Reducción de un ángulo al horizonte, 314. Distancia entre dos puntos de la superficie terrestre, 315. Volumen de un paralelipípedo oblicuo, en función de sus aristas y los ángulos que forman entre sí, 316. Radio esférico del círculo inscrito á un triángulo esférico dado, 317. Radios esféricos de los círculos exinscritos á un triángulo esférico dado, 318. Radio esférico del círculo circunscrito á un triángulo esférico dado, 320. Teorema de *Lexell*, 321. Varios teoremas sobre triángulos esféricos, 322. Ejercicios, 325.

	Págs.
NOTA PRIMERA. DIVERSAS UNIDADES ANGULARES. NUEVAS TABLAS DE LOGARITMOS CALCULADAS POR EL SR. D. JOAQUÍN DE MENDIZÁBAL TAMBORREL	329
NOTA II. APLICACIONES GEOMÉTRICAS	332
TABLA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES	341

Bibliografía

[1] Bails, B. (1789). *Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando*. Madrid: en la imprenta de la viuda de Ibarra.

[2] Contreras, M. (1888). *Tratado de Trigonometría Rectilínea y Esférica*. México: Imprenta de J. F. Jens, calle de San José el Real número 22.

[3] Lamadrid, A. (1912). *Curso de Trigonometría*. México: Librería de CH Bouret, avenida 5 de mayo número 45.

[4] Núñez, M. (2004). *La enseñanza de las Matemáticas y la Física en la Escuela Nacional Preparatoria: Los primeros años (1868-1896)*. Guanajuato, Gto. México: Sociedad Mexicana de Historia de la Ciencia y la Tecnología, A.C.

[5] Tamborrel, C. (1890). *Tratado Elemental de Trigonometría Rectilínea y Esférica*. México: Oficina Tip. de la Secretaría de Fomento, calle de San Andrés número 15.

[6] Vallejo, J, M. (1812). *Tratado Elemental de Matemáticas* Tomo Segundo. Mallorca: En la Imprenta de Melchor Guasp.