

Razonamiento proporcional y micromundos: un estudio en telesecundaria unitaria

2023

Carlos Alberto Lugo Lugo



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad Psicología

Razonamiento proporcional y micromundos: un estudio en telesecundaria unitaria

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestro en el aprendizaje de la lengua y las matemáticas

Presenta

Carlos Alberto Lugo Lugo

Dirigido por:

Dra. Erika García Torres

Co-Director:

Dr. Santiago Alonso Palmas Pérez

Querétaro, Qro. a 26 de octubre de 2023



Dirección General de Bibliotecas y Servicios Digitales
de Información



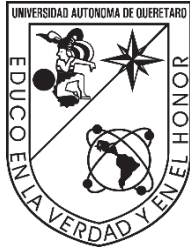
Razonamiento proporcional y micromundos: un
estudio en telesecundaria unitaria

por

Carlos Alberto Lugo Lugo

se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0
Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Clave RI: PSMAC-309102



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología y Educación
Maestría en Aprendizaje
de la Lengua y las Matemáticas

Razonamiento proporcional y micromundos: un estudio en telesecundaria
unitaria

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestra en Aprendizaje de la Lenguas y las Matemáticas

Presenta:

LESM. Carlos Alberto Lugo Lugo

Dirigido por:

Dra. Erika García Torres

Co-dirigida por:

Dr. Santiago Alonso Palmas Pérez

SINODALES

Dra. Erika García Torres
Presidenta

Dr. Santiago Alonso Palmas Pérez
Secretario

Dra. Diana Violeta Solares Pineda
Vocal

Dr. Daniel Hernández Gutiérrez
Suplente

M.D.M. Norma Angélica Rodríguez
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Octubre 2023
México

*Vuela tan alto que tus sueños sean
metas y tus deseos realidades. Hoy
semillas, mañana flores*

Agradecimientos

Esta tesis es el resultado de dos años de esfuerzos, de preocupaciones, de alegrías y dificultades, y no hubiera sido posible sin:

Dios, porque siempre es primero, y nada sería posible sin él, por brindarme fuerza en los momentos más complicados y cuando quería tirar la toalla. Sin duda alguna, soy un consentido de Dios.

Mis padres. Jamás me alcanzaría la vida para agradecerles por todo lo que han hecho por mí y por su gran apoyo en todas las decisiones que he tomado en mi vida, gracias por ese soporte y brindarme su amor y paciencia. Gracias por creer en mí, incluso cuando yo no lo hago, espero que la vida me alcance para darles de todo.

Mis hermanas y sobrina, sin duda su amor y acompañamiento han sido fundamentales a lo largo de estos dos años, quiero agradecer su paciencia y su apoyo, saben que movería la tierra por ustedes. No olvido a mi cuñado, gracias por estar presente en este proceso.

Mis amigos, “los reales”, ustedes han sido ese apacho al alma que necesite durante estos dos años cuando las cosas se ponían difíciles, gracias por aguantar mi amistad y siempre brindarme su apoyo. Mención especial para Alexis, has sido un hermano y un lugar seguro.

Mis compañeros de maestría, sin duda este proceso no hubiera sido igual sin ustedes, mención especial para Dani, gracias por siempre ser esa amiga incondicional, la vida te tiene preparadas grandes cosas, porque las mereces. Fer, no pude tener mejor compañía en los momentos de desesteres. Ruth, a pesar de que no culminas esta etapa conmigo, tu presencia me siguió acompañando hasta el final.

Mis grandes formadores. La vida me ha premiado con grandes maestros, los cuales han moldeado lo que soy profesionalmente, pero no solo eso, han sido maestros de vida, gracias Otero, Juan de Dios, Cornelia, Suguey y Fajardo, les tengo un lugar muy importante en mi corazón. Mención especial para la maestra Barrios, gracias por todo su apoyo y por ver en mí lo que muchos no vieron, incluyéndome, gracias por su confianza.

Mi asesora Dr. Erika, gracias por su acompañamiento y su paciencia, se ha convertido en un ejemplo para mí. A mi codirector el Dr. Santiago, este trabajo no sería lo mismo sin sus aportes, muchas gracias. A mis maestras y maestro de la MALM, gracias a ustedes soy una persona diferente a la que comenzó este proceso, me llevo todas sus enseñanzas y grandes aportes a mi docencia.

Hago énfasis en “mis” porque los considero como parte de mí, y de mi historia de vida, que Dios, la vida o el universo, los siga bendiciendo en cada cosa que hagan, GRACIAS.

Resumen

El razonamiento proporcional es una de las ideas fundamentales de la matemática. Este surge en edades tempranas (3-5 años) a partir de relaciones cualitativas y va evolucionando a un razonamiento cuantitativo (10-12 años) durante la educación básica. En el desarrollo del razonamiento proporcional existen diferentes aproximaciones que dificultan su comprensión, como el razonamiento aditivo que llega a ser un obstáculo epistemológico o el empleo injustificado o prematuro de la regla de tres lo cual resulta un obstáculo didáctico. El objetivo del trabajo es explorar el razonamiento proporcional directo de alumnos de telesecundaria unitaria a través de la manipulación de micromundos, identificando niveles de razonamiento. A partir de los niveles de razonamiento proporcional propuestos por Karplus et al. (1983), se han diseñado actividades compuestas por diferentes problemas en GeoGebra empleando sus herramientas y el lenguaje propio del *software* como medio de exploración; esto tiene como finalidad identificar a partir de las interacciones entre alumnos con el micromundo y el investigador, el nivel de razonamiento proporcional que muestran los alumnos y qué implicaciones tiene la modalidad unitaria. Como principales hallazgos se identificó que los participantes recurren a niveles iniciales del razonamiento proporcional (análisis cualitativo o relaciones cuantitativas incorrectas) para justificar sus procedimientos y que los niveles no son mutuamente excluyentes. Otro hallazgo fue que los alumnos pueden razonar de diferente manera de acuerdo con la situación y que los micromundos ofrecen grandes oportunidades en la exploración y en la evolución del razonamiento proporcional a partir de la colectividad que permite el aula unitaria.

Palabras clave: Razonamiento proporcional, telesecundaria unitaria, micromundos

Abstract

Proportional reasoning is one of the fundamental ideas of mathematics. This arises at an early age (3-5 years) from qualitative relationships and evolves to quantitative reasoning (10-12 years) during basic education. In the development of proportional reasoning there are different approaches that enable its understanding, such as additive reasoning that becomes an epistemological obstacle or the unjustified or premature use of the rule of three which is a didactic obstacle. The objective of the work is to explore the direct proportional reasoning of unitary telesecondary students through the manipulation of microworlds, identifying levels of reasoning. Based on the levels of proportional reasoning proposed by Karplus et al. (1983), activities composed of different problems have been designed and GeoGebra used its tools and the software's own language as a means of exploration; The purpose of this is to identify, from the interactions between students with the microworld and the inquirer, the level of proportional reasoning that is shown to the students and what implications the unitary modality has. The main findings were that participants resort to initial levels of proportional reasoning (qualitative analysis or corrective quantitative relationships) to justify their procedures and that the levels are not mutually exclusive. Another finding was that students could reason differently depending on the situation and that microworlds offered great opportunities in the exploration and evolution of proportional reasoning based on the collective nature of the unitary classroom.

Keywords: Proportional reasoning, unitary telesecondary, microworlds

ÍNDICE

Resumen	I
Abstract	II
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	VIII
Introducción	1
Capítulo 1. Problema de investigación y antecedentes	5
1.1 Planteamiento y justificación del problema	5
1.2 Antecedentes	9
<i>1.1.1 Razonamiento Proporcional</i>	9
<i>1.1.2 La telesecundaria y las escuelas multigrado en México</i>	14
1.1.2.1 La telesecundaria	15
1.1.2.2 Escuelas multigrado	18
1.1.2.3 Telesecundaria unitaria	19
<i>1.1.3 Recursos tecnológicos en educación</i>	21
1.1.3.1 La tecnología de la educación	22
1.1.3.2 Tecnología en educación matemática (secundaria)	23
1.3 Pregunta de investigación y objetivos	29
<i>1.3.1 Pregunta de investigación</i>	29
<i>1.3.2 Objetivo de investigación</i>	29
Capítulo 2. Marco teórico	30
2.1 Paradigma construccionista	30
2.2 Micromundos	32
2.3 Las interacciones como unidad de análisis	38
2.4 Razonamiento proporcional	41
Capítulo 3. Metodología	49
3.1 Tipo de investigación y alcance	49
3.2 Muestra del estudio y contexto del estudio	49

3.3 Consideraciones éticas	50
3.4 Diseño metodológico	51
<i>3.4.1 Primera fase</i>	51
3.4.1.1 Diseño de actividades	51
3.4.1.1.1 Primer diseño en Excel	52
3.4.1.1.1.1 Actividad 1. Exploración	52
3.4.1.1.2 Primer diseño en GeoGebra	54
3.4.1.1.2.1 Actividad 1. Exploración	55
3.4.1.1.2.2 Actividad 2. Problemas que implican RP	56
3.4.1.2 Aplicación del primer diseño	58
3.4.1.3 Análisis de la aplicación del primer diseño	58
<i>3.4.2 Segunda fase</i>	60
3.4.2.1 Rediseño de actividades	61
3.4.2.1.1 Actividad 1. Exploración	61
3.4.2.1.2 Actividad 2. Relación entre segmentos por un deslizador	62
3.4.2.1.3 Actividad 3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada	63
3.4.2.1.4 Actividad 4. Relación entre triángulos semejantes	64
3.4.2.1.5 Actividad 5. Construcción de un mosaico con un factor escala	65
3.4.2.2 Aplicación del rediseño	66
Capítulo 4. Análisis y resultados	73
4.1 Categorías de análisis	73
4.1.1 Razonamiento proporcional	73
4.1.2 Relación entre niveles	74
4.1.3 Evolución de razonamiento proporcional	75
4.1.4 Componentes de un micromundo	75
4.1.5 Interacciones	77
4.1.5.1 Interacciones por sus actores	78
4.1.5.1.1 Interacción alumno-alumno	78
4.1.5.1.2 Interacción aplicador-alumno	79
4.1.5.1.3 Interacción alumno-grupo	79
4.1.5.1.4 Interacción aplicador-equipo	79
4.1.5.1.5 Interacción aplicador-grupo	79

4.1.5.2 Interacciones por su tipo	80
4.1.5.2.1 Intencionalidad	80
4.1.5.2.1.1 Ayudas directas e indirectas	80
4.1.5.2.1.2 Tutoría	83
4.1.5.2.1.3 Negociación	84
4.1.5.2.2 Componente técnico	86
4.1.5.2.2.1 Exploratorias	86
4.1.5.2.2.2 Consecuenciales	87
4.1.5.2.2.3 Resolutiva	88
4.2 Resultados por niveles de RP	89
4.2.1 Razonamiento incompleto	90
4.2.1.1 Razonamiento incompleto no proporcional	90
4.2.1.2 Razonamiento incompleto proporcional	92
4.2.2 Razonamiento cualitativo	95
4.2.3 Razonamiento Aditivo	99
4.2.4 Razonamiento pre-proporcional y proporcional	106
4.3 Relación entre niveles de RP	116
4.3.1 Relación incompleto – aditivo	116
4.3.2 Relación incompleto – pre-proporcional	120
4.3.3 Relación aditivo - pre-proporcional	121
4.3.4 Relación pre-proporcional – proporcional	125
4.4 Evolución de niveles de RP	126
4.4.1 Evolución incompleto – pre-proporcional	126
4.4.2 Evolución cualitativo – pre-proporcional	130
4.4.3 Evolución pre-proporcional – proporcional	132
4.5 Análisis de elementos complementarios	133
4.5.1 Preferencia por el uso de proporciones enteras que por las no enteras	133
4.5.2 Resistencia al trabajo con computadora	135
4.5.3 Extensión del micromundo: recursos tangibles	137
4.6 Síntesis de resultados	139
Capítulo 5. Conclusiones	142
5.1 Niveles de razonamiento	142

5.2 Las interacciones en multigrado	148
5.3 Los micromundos como espacio de exploración	149
5.4 Nuevas direcciones	150
5.5 Aportaciones del trabajo	151
<i>5.5.1 Aportaciones y recomendaciones basadas en las limitaciones y hallazgos del estudio</i>	154
Referencias bibliográficas	157
Anexos	165

Índice de figuras

Figura 1. Ejemplo de situación proporcional resulta de manera algebraica	11
Figura 2. Ejemplo de situación proporcional resulta de manera aritmética	11
Figura 3. Componentes de un micromundo	37
Figura 4. Problema “Mr. Tall/ Mr. Short”, tomado de Lamon (2020)	42
Figura 5. Ejemplo de la actividad de exploración de herramientas y funcionamiento en Excel	53
Figura 6. Ejemplo de los problemas diseñados en Excel	54
Figura 7. Actividad de exploración en GeoGebra	56
Figura 8. Ejemplo de actividad 2 GeoGebra	57
Figura 9. Ejemplo de preguntas de análisis actividad 2 GeoGebra	57
Figura 10. Ejemplo de respuesta en la segunda actividad de GeoGebra	59
Figura 11. Respuestas a la situación 3 de la actividad 2 de GeoGebra que demuestra respuestas impresas por la dificultad del uso del software	59
Figura 12. Actividad 1. Exploración (rediseño)	62
Figura 13. Actividad 2. Relación entre segmentos por un deslizador (rediseño).....	63
Figura 14. Actividad 3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada (rediseño)...	64
Figura 15. Actividad 4. Relación entre triángulos semejantes (rediseño)	65
Figura 16. Actividad 5. Construcción de un mosaico con un factor escala (rediseño).....	66
Figura 17. Clasificación de interacciones	77
Figura 18. Actividad 4 (ejemplo de interacción exploratoria)	87
Figura 19. Actividad 4, razonamiento incompleto no proporcional	90
Figura 20. Actividad 2, razonamiento incompleto proporcional.....	93
Figura 21. Actividad 4, razonamiento cualitativo	97
Figura 22. Actividad 2, razonamiento aditivo	99
Figura 23. Actividad 5, razonamiento aditivo	101
Figura 24. Actividad cinco, razonamiento aditivo.....	105
Figura 25. Actividad dos, razonamiento pre-proporcional	108
Figura 26. Actividad 5, trazo de un lado del cuadrado basado en la cuadrícula de apoyo (relación entre incompleto y aditivo)	117
Figura 27. Actividad cinco, confusión del contorno (perímetro) con el área del cuadro trazado (relación incompleto aditivo	118
Figura 28. Actividad 3 (relación entre los segmentos trazados cuando tienen valores de 20, 10 y 5 (relación cualitativo, aditivo y pre-proporcional.....	122
Figura 29. Actividad 3, exploración para trazar el segmento, primer intento (incorrecto). Evolución incompleto-pre-proporcional	127
Figura 30. Actividad 3, exploración para trazar el segmento, segundo intento (correcto). Evolución incompleto-pre-proporcional	128

Índice de tablas

Tabla 1. Distribución de educación secundaria por modalidad, alumnos, escuelas y docentes (2020-2021)	18
Tabla 2. Categorías y subcategorías para clasificar problemas de proporcionalidad	47
Tabla 3. Estructura de la aplicación	66
Tabla 4. Estructura de la sesión 1 de la aplicación del rediseño	68
Tabla 5. Estructura de la sesión 2 del rediseño	70
Tabla 6. Descripción de niveles de RP	74
Tabla 7. Descripción de los componentes de un micromundo	76
Tabla 8. Descripción de razonamiento proporcional	110

Introducción

El razonamiento proporcional está presente en diferentes áreas de las matemáticas, tales como la fracción (cuando expresa una razón¹), la proporcionalidad, la covariancia o incluso en las funciones algebraicas, al igual que se hace presente en otras asignaturas como la física, química, biología o inclusive el dibujo técnico. Por tanto, es una noción que cumple una función importante en la manera de actuar ante algunas situaciones, ya sea escolar o de la vida cotidiana.

Existen diferentes aproximaciones y estrategias para trabajar el razonamiento proporcional, aunque algunas de ellas resultan erróneas como es el caso de las relaciones aditivas o de la regla de tres cuando es aplicada de manera mecánica y en situaciones que no son proporcionales. Dentro de los diferentes estudios que se han realizado se ha identificado que los alumnos de secundaria recurren en algunas situaciones a las estrategias incorrectas mencionadas (Sánchez 2013), de tal forma que el razonamiento proporcional no es comprendido o en algunos casos se llega a ser confundido con algún otro contenido escolar (problemas multiplicativos, problemas aditivos o áreas y perímetros en las situaciones geométricas).

Como se mencionaba, el razonamiento proporcional aparece a lo largo de la educación básica, iniciando desde edades tempranas (3-5 años), siendo en secundaria el grado escolar en el que se formalizan las situaciones de proporcionalidad directa, inversa y mixta. Por tal motivo se ha considerado a bien establecer la problemática en este nivel, especialmente en la modalidad telesecundaria.

La telesecundaria es la modalidad donde un maestro generalista atiende todas las asignaturas con el apoyo de recursos y materiales tecnológicos. El aula de esta modalidad brinda mayor oportunidad al docente de tener una autonomía en el manejo de los contenidos, así como en

¹ “Una razón es, en primer lugar, una relación entre dos cantidades, pero a toda razón se le puede asociar un número, llamado el valor de la razón” (Block, 2022, p. 92) ej. El valor de la razón que guarda 4 con respecto a 8 es $\frac{1}{2}$.

los tiempos e inclusive en el trabajo transversal. En México la telesecundaria y las secundarias para migrantes e indígenas son las únicas modalidades que se ven traspasadas por la modalidad multigrado, donde el maestro atiende alumnos de diferentes grados en una misma aula. La mayoría de estas escuelas se encuentran en zonas de alta marginación o en comunidades donde por diferentes motivos no se puede establecer una secundaria general o técnica.

Una telesecundaria multigrado, o de manera más específica unitaria, es aquella donde el docente atiende a los tres grados escolares, cubriendo todas las asignaturas. Este tipo de aulas representan una dificultad en el sentido en que no se cuenta con un programa por parte de la Secretaría de Educación Pública (SEP) que regule la actividad de estas escuelas (García et al., 2019), por lo que son los docentes los responsables de definir las estrategias y las adecuaciones para la enseñanza.

Las escuelas unitarias no son sinónimo de escuelas incompletas y mucho menos pueden ser definidas como escuelas deficientes, ya que en su cotidianidad ofrecen grandes oportunidades, tales como las interacciones entre alumnos con distintos saberes, así como experiencias o aproximaciones a los diversos contenidos, teniendo en común, aspectos culturales y sociales que los unen a la localidad, además como se mencionaba, las telesecundarias (las unitarias no son la excepción) se apoyan de recursos tecnológicos, como lo son Edusat, una red satelital de contenido educativo y un repositorio de diferentes recursos audiovisuales que fungen como apoyo para las clases.

Diferentes estudios (Ávila, 2002; Dávila y Mirón, 2011; Rojano, 2003, Hitt, 1998) han mostrado en diversas ocasiones que los recursos tecnológicos no son aprovechados de manera regular, inclusive en algunos casos se encuentran abandonados, en mal estado, desactualizados o no hay disposición por parte de los docentes. En el mejor de los casos son utilizados como recursos de apoyo o para repasar lo visto en clase, dejando de lado su uso como generador de saberes o espacios de exploración.

A partir de la identificación e integración de los tres ejes centrales del trabajo: razonamiento proporcional, telesecundaria unitaria y recursos tecnológicos, se ha elaborado un trabajo de

investigación, el cual toma como muestra a los alumnos de una telesecundaria unitaria ubicada en el municipio de Apaseo el Alto en la comunidad del Sabino, con el objetivo de explorar su razonamiento proporcional, integrando una serie de actividades en el diseño de un micromundo (espacio de exploración digital) identificando las interacciones generadas dentro del micromundo, las cuales pueden ser entre pares, con la computadora e inclusive el aplicador.

En el capítulo uno de este documento se desarrolla la problemática y se ostenta una serie de trabajos previos que fungen como antecedentes en la elaboración de este trabajo. En el capítulo se exponen diferentes datos sobre el razonamiento proporcional, la telesecundaria, las escuelas multigrado y la presencia de los recursos tecnológicos en las aulas, rescatando los hallazgos más importantes de otros investigadores, tanto clásicos como los más actuales.

El capítulo dos corresponde al marco teórico que sustenta el estudio, integrando definiciones y elementos que dan rigor al proyecto. En este capítulo se reconoce que el trabajo se basa en un paradigma construccionista por el cual se integra el concepto de micromundos, además de que se presenta la categorización del razonamiento proporcional propuesta por Karplus et al. (1983). Aunado a estos referentes se describe el uso de las interacciones como unidad de análisis, integrando aportes teóricos como ayudas (directas e indirectas), tutorías y negociaciones.

A partir de los antecedentes y el marco teórico, en el capítulo tres se describen las decisiones metodológicas que se consideraron para cumplir el objetivo del trabajo. El proyecto se identifica como cualitativo de tipo exploratorio, siguiendo una metodología de investigación-acción.

En el capítulo se presentan las dos fases metodológicas: diseño y rediseño. La primera fase consistió en el acercamiento a la escuela y la aplicación de una serie de actividades en dos softwares (Excel y GeoGebra). La segunda fase fue el rediseño y en la aplicación de una serie de actividades de exploración. Además, se presentan elementos como las consideraciones éticas, los recursos materiales, y la logística de las dos sesiones que se llevaron a cabo.

En el capítulo cuatro se definen las categorías de análisis, identificando los niveles de razonamiento proporcional, así como la relación y la evolución de dichos niveles, además se describen los diferentes tipos de interacciones y los componentes de un micromundo. Cada una de estas categorías se integran para la presentación de los resultados, en donde se presenta el nivel al que pertenece el hallazgo, el tipo de interacción en el que se dio y el o los componentes que estuvieron involucrados para que se llevara a cabo dicha interacción.

Finalmente, en el capítulo cinco se describen las conclusiones a las que se llegaron de acuerdo al objetivo de la investigación, rescatando aquellos hallazgos más importantes, la descripción de algunas nuevas líneas que pueden surgir a partir de los resultados y algunas aportaciones que se considera que puede tener este trabajo.

Capítulo 1. Problema de investigación y antecedentes

1.1 Planteamiento y justificación del problema

El razonamiento proporcional (de ahora en adelante RP) es un razonamiento matemático que está presente de manera transversal a lo largo de la educación básica en México, además de que es uno de los elementos matemáticos que marca el límite entre las estructuras aritméticas y da paso a las construcciones algebraicas.

El RP es definido como un razonamiento matemático (Verdú y Ciscar, 2012) que denota un sistema de dos variables entre las que existe una relación de función lineal y puede caracterizarse como una relación multiplicativa constante (Karplus et al., 1983). Se refiere a detectar, analizar, explicar y proporcionar evidencia en apoyo de afirmaciones sobre relaciones proporcionales (Lamon, 2020), además, no sólo implica el entendimiento de la relación multiplicativa que existe entre dos cantidades, sino que también implica la habilidad de discriminar situaciones proporcionales de las que no lo son (Modestou y Gagatsis, 2010).

Hay diferentes aproximaciones que pueden dificultar la comprensión del RP, una de ellas es la regla de tres, la cual es un algoritmo en donde conocidos tres términos de una proporción, queda por determinar el cuarto. Para determinarlo se multiplican los medios (segundo dato de la magnitud independiente por el primer dato de la magnitud dependiente) y el producto se divide por el extremo conocido (entre el primer dato de la magnitud independiente) (Contreras, 1884)

Por ejemplo:

Se conoce que 15 paletas de hielo son empacadas en 3 cajas de cartón del mismo tamaño, ¿cuántas cajas se necesitan para 20 paletas?

A partir de la descripción de la regla de tres, el planteamiento de la situación es

$$15 \rightarrow 3$$

$$20 \rightarrow x$$

Por tanto, el algoritmo se estructura de la siguiente manera

$$x = \frac{(20)(3)}{15} = 4$$

En la educación básica (preescolar, primaria y secundaria) es un algoritmo muy común de observar, puesto que en la educación primaria se introduce de esta manera (Wilhelmi, 2017) en situaciones cotidianas o cálculos sencillos del doble, triple, mitad, etc. A pesar de que la regla de tres no se encuentre en el currículo de la educación primaria en México. Sin duda, la regla de tres resulta una herramienta eficiente y fácil de memorizar, pero, ¿qué sucede si en un problema donde se ven involucrados tres datos como en el anterior, la regla de tres no lo soluciona?

Existen diferentes investigaciones (Mochón, 2012; Buform y Fernández, 2014; Silvestre y Ponte, 2011; Ruiz, 2018) que han reconocido que la regla de tres funciona de manera mecánica en la resolución de situaciones que involucran cuatro valores y se desconoce uno, sin importar que sean proporcionales o no, generando así una sobreasimilización sobre dicho proceso, que si bien identifica una relación multiplicativa no siempre existe una justificación para aplicarla, además llega a ser compleja cuando se aplica a otro tipo de situaciones, como la proporcionalidad inversa, en donde el mecanismo cambia; por tanto, la regla de tres se puede considerar como una aproximación errónea de enseñanza.

Sin duda, la regla de tres es una alternativa en el trabajo de situaciones proporcionales, pero limita la posibilidad de aproximarse desde diferentes razonamientos, es decir, la regla de tres parte de reconocer que las cuatro cantidades involucradas son proporcionales, pero dentro del RP una de las principales características es poder discriminar las situaciones proporcionales de las que no lo son, y a diferencia de las tablas proporcionales o del uso de la igualdad de razones, la regla de tres no logra evidenciar si una relación es proporcional o no, inclusive se ha documentado que los alumnos al multiplicar y dividir los tres datos

presentados en el problema, inclusive sin reconocer cuáles son los que se relacionan (variable dependiente o independiente).

En el caso de las estrategias aditivas, se reconoce que es un fenómeno epistemológico que afecta la comprensión de las relaciones proporcionales, en específico en la proporcionalidad geométrica, debido a que a menudo se usa como alternativa para tratar con proporciones no enteras, calculando a partir de la resta de un término de otro de una de las magnitudes y la diferencia se aplica a la segunda como razón (Tourniaire y Pulos, 1985). Si bien es cierto que las estructuras aditivas guardan relación con las estructuras multiplicativas definiendo a las segundas como una “suma repetida”, no en todos los casos cumple con esa función.

Fernández y Llinares (2012), plantean la siguiente situación:

Marta y Sofía quieren pintar sus habitaciones exactamente del mismo color. Marta mezcla 3 botes de pintura amarilla y 6 botes de pintura roja. Sofía ha usado 7 botes de pintura amarilla. ¿Cuántos botes de pintura roja necesitará?

Mientras que la situación está diseñada para resolverse por medio de una relación multiplicativa, algunos alumnos siguen el procedimiento que se exponía anteriormente, de forma que establecen una relación entre los botes de pintura que ocupó Marta de la forma $3+3=6$, y a partir de esa relación determinan que los botes de pintura roja que necesita Sofía se obtienen de la relación $7+3=10$.

Este ejemplo ayuda a visualizar que el paso de las estructuras aditivas a las multiplicativas representa un reto para los alumnos, debido a que recurren a la diferencia parte-todo. Además de que coincide con el cambio de educación primaria a educación secundaria, nivel en el que se ha identificado que los alumnos acuden con mayor comodidad al análisis de tipo cualitativo que a los análisis de tipo cuantitativo, y cuando llegan a aproximarse de forma cuantitativa, se fundamenta principalmente en un análisis de índole aditivo (Sánchez, 2013), lo cual puede deberse a que tienen mayor conocimiento en estructuras aditivas y que aún no han consolidado el concepto de proporción.

Por tanto, se ha identificado que existen varias situaciones educativas que no favorecen el desarrollo del RP en los alumnos, en especial en el nivel secundaria (donde se formalizan las

situaciones proporcionales) puesto que se ha favorecido el uso de un algoritmo por arriba de la capacidad de razonar cuándo una situación es proporcional, la razón que regula la situación o la proporción que se establece entre dos razones.

De acuerdo con esta preocupación el presente estudio busca caracterizar el RP de alumnos de telesecundaria unitaria, debido a que es una de las modalidades educativas más diversas y alejadas de lo que propone el currículo del sistema nacional educativo. Arteaga (2011) y Mora (2017) han previsto que existe una invisibilidad de la escuela multigrado en el ámbito de la investigación educativa, además, los estudios que existen son relativamente recientes y escasos.

A partir de un contexto tan específico como lo es la telesecundaria unitaria, se considera importante hablar del uso de la tecnología, ya que es uno de los pilares que desde su origen y evolución (como se podrá leer más adelante) ha permitido acercar la educación a zonas donde es complicado establecer una secundaria de modalidad general o de estructura completa (director, subdirector, prefecturas, docentes, trabajo social, etc.).

Uno de los objetivos más recientes del uso de la tecnología en la telesecundaria es crear escenarios favorables en donde los docentes desarrollen novedosas y creativas formas de enseñar, brindando oportunidades a los alumnos para que descubran y construyan conocimientos propios (Zorrilla, 2004). Este tipo de escenarios potencializa en las aulas unitarias la construcción de conocimientos en colaboración y el enriquecimiento de los diferentes razonamientos, al mismo tiempo que considera las experiencias de los diferentes grados escolares e integra el currículo en favor de las nuevas tecnologías y la diversificación de escenarios.

Por tanto, la forma en la que este estudio busca aproximarse al RP de los alumnos, es por medio de las interacciones generadas entre los participantes en torno al micromundo. La intención de considerar un ambiente tecnológico como parte de esta exploración es porque existe poca información sobre cómo repercute el uso de las TIC directamente en el aprendizaje de alumnos de telesecundaria (Ayala, 2018), debido a que en repetidas ocasiones los recursos tecnológicos solamente son utilizados como sitios de consulta o de repaso y no

como medio para la construcción de conocimientos, para probar hipótesis, o descartar ideas previas.

A manera de síntesis, el problema de investigación se centra en reconocer que existen algunas aproximaciones hacia el razonamiento proporcional que representan un obstáculo en el aprendizaje de los alumnos, ya sea por una cuestión epistemológica (razonamiento aditivo) o de enseñanza (regla de tres), esto ha suscitado un interés por explorar cómo es el razonamiento proporcional directo en alumnos de telesecundaria unitaria debido a que es un contenido que se encuentra presente en los tres grados escolares, por lo que se espera observar una diversidad de razonamientos, así como el reconocimiento de saberes previos y el trabajo en colectivo que permite un micromundo, puesto que es un espacio es donde se puede desarrollar ideas poderosas en torno a un contenido matemático. La razón de trabajar el razonamiento proporcional a través de un micromundo radica en que el uso de las tecnologías siempre ha estado presente en la filosofía de trabajo de esta modalidad escolar, y en algunos casos queda desdibujado en el trabajo cotidiano del aula.

1.2 Antecedentes

1.1.1 Razonamiento Proporcional

El razonamiento proporcional (RP) es una de las nociones matemáticas que se trabajan en diferentes niveles educativos y a través de una variedad de aproximaciones, es definido como un tipo de pensamiento complejo que implica el reconocimiento de comparaciones como la covariación entre magnitudes y comparaciones múltiples, además está relacionado con los métodos del pensamiento cualitativo y cuantitativo (Heller et al, 1989).

El RP no sólo implica un entendimiento de la relación multiplicativa que existe entre las cantidades que representan la situación, sino que también implica la habilidad de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales (Modestou y Gagatsis, 2010), además de que integra aquellas situaciones en donde se emplea una relación entre magnitudes y sus relaciones, tales como la covariación, proporcionalidad directa, inversa o como función algebraica.

La noción de proporción se desarrolla inicialmente en los sujetos de manera cualitativa, antes de que se estructure cuantitativamente, es decir, la persona es capaz desde edades tempranas de comprender la relación entre dos magnitudes, pero bajo discursos como “las dos crecen”, “una aumenta y la otra no”, “en las dos se restan”, pero, aún no llegan a establecer relaciones cuantitativas, ya que, es hasta los 11 y 12 años, donde el sujeto percibe la presencia de la noción de las proporciones en diferentes ámbitos, por ejemplo, las proporciones espaciales (Butto et al, 2019).

En relación con el desarrollo del RP, Lesh (et al., 1989) lo describe como un concepto que, por un lado, es la piedra angular de las matemáticas superiores y, por otro lado, es la cumbre de los principios básicos de las matemáticas, puesto que “el esquema proporcional es un esquema operativo de segundo orden, que requiere que una operación se realice después de que se haya realizado otra operación” (Ben-Chaim et al., 2012, p.56). En otras palabras, se requiere inicialmente comparar dos proporciones donde exista una relación correspondiente entre ambas variables y después identificar si hacen referencia a una proporción directa o indirecta.

Inhelder y Piaget fueron pioneros en el estudio del RP, identificando tres etapas en su desarrollo (Ben-Chaim et al., 2012):

- Intuitiva (3-7 años): Razonamiento intuitivo, aún no se cuenta con la capacidad de correlacionar dos variables.
- Concreta (8-12 años): Capacidad de conectar dos variables, aún no hay comprensión de reglas ni propiedades, no se generaliza ningún principio matemático formal. Si la conexión entre las dos variables se establece a partir de una relación multiplicativa, se puede hablar de un esquema proporcional potencial.
- Formal (12-15): Comprensión de las leyes de las relaciones proporcionales. Existe un esquema proporcional real que se usa como herramienta mental para resolver problemas proporcionales.

De acuerdo a estas etapas de desarrollo, se llegaría a pensar que todas las personas adultas han desarrollado un RP formal, en donde se pueden atender situaciones proporcionales de

una manera eficiente a partir de principios matemáticos formales, sin embargo, Hoffer (1988), ha mostrado que hay un gran número de individuos que nunca llegan a establecer un RP formal.

A partir de lo que se ha descrito, se puede inferir que el desarrollo del razonamiento proporcional se construye a lo largo de la etapa de educación básica, comenzando con nociones aditivas y algunas situaciones multiplicativas en primaria baja y continua en primaria alta con la introducción de términos como noción o problemas de valor faltante, para así, introducir a la educación secundaria en donde se aborda la proporcionalidad directa, inversa y la combinación de ambas (SEP, 2017).

A partir de la educación secundaria, se busca formalizar el RP a partir de las herramientas del álgebra como funciones lineales, poniendo énfasis en la obtención de su expresión algebraica y su graficación, así como también en el análisis de sus características estructurales (Butto et al, 2019). De forma que, en el traslado de educación primaria a secundaria, existe también un cambio en las situaciones que se proponen respecto al razonamiento proporcional, como también el lenguaje que se emplea, ya que en educación primaria se emplea un lenguaje aritmético, mientras que en secundaria se introduce el lenguaje algebraico.

Para ejemplificar dicha situación se muestra el siguiente ejemplo (Block et al., 2014)

Tres cubetas por \$5. ¿Cuánto hay que pagar por seis cubetas? ¿Y por 30 cubetas?

Figura 2.

Ejemplo de situación proporcional resuelta de manera aritmética

Aritmético
3 cubetas = \$5
6 cubetas
$3(2) = \$5(2)$; 6 cubetas = \$10
30 cubetas
$3(10) = \$5(10)$; 30 cubetas = \$50

Figura 1.

Ejemplo de situación proporcional resuelta de manera algebraica

Algebraico	
X (cubeta)	Y (dinero)
3	5
6	10
30	50

$$K = \frac{y}{x}$$

$$K = \frac{5}{3} = 1.666$$

$$Y = kx$$

Como se puede observar en el ejemplo, la misma situación puede ser resulta a través de dos tipos de procedimientos y con diferentes lenguajes; en la figura 1 (aritmético) se muestra una relación entre el valor proporcionado y los múltiplos para una magnitud, por ejemplo, el reconocer el valor para las seis cubetas será el doble de valor que, para tres, ya que el producto de tres y dos es seis.

En la figura 2 (lenguaje algebraico), se pueden apreciar elementos como la constante de proporcionalidad (k) y la función de una magnitud respecto a otra (y), de forma que, el comprender relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes a través de este lenguaje, es una aproximación para el aprendizaje de las funciones lineales, las cuales pueden ser observadas también desde la graficación de una relación de proporcionalidad directa.

Es importante mencionar que el RP es un objeto matemático longitudinal en el currículo y no sólo está presente en las matemáticas, sino que es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias (Mochón, 2012). Piaget lo consideraba como un componente básico del razonamiento formal, necesario para adquirir conceptos como el de probabilidad y correlación (Godino y Batanero, 2003).

Dentro del sistema educativo de México, el RP está integrado en los planes y programas de la educación secundaria, si bien no está presente como RP, en los aprendizajes esperados (SEP, 2017) se menciona lo siguiente para cada año escolar:

- Primer año: Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación). Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.
- Segundo año: Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional. Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

- Tercer año: Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.

Por lo anteriormente señalado, “es un conocimiento que subyace en múltiples nociones matemáticas: la multiplicación, el número relacional, la escala, el porcentaje, la probabilidad, la función lineal entre otras” (Block et al., 2014, p. 2). Debido a la presencia que tiene en el currículo y las nociones matemáticas involucradas en el RP, se considera que caracterizarlo favorece al entendimiento de las dificultades que pueden llegar a presentar los alumnos.

Existen diferentes investigaciones que reportan cómo se presenta el RP en nivel secundaria, tal como el estudio de Sánchez (2013), el cual concluye que los estudiantes acuden con mayor comodidad a análisis de tipo cualitativo que a los análisis de tipo cuantitativo, además, la cuantificación que realizan los estudiantes se fundamenta principalmente en análisis de índole aditivo, lo cual les permite comprobar que la suma de las cantidades de cada serie debe dar el total.

Al igual que Sánchez, Öztürk (et al., 2021) mostraron que el tipo de problemas en el que los estudiantes tienen más éxito son los de comparación cualitativa, y el tipo de problema en el que más fallan son los de comparación cuantitativa. Además, se identificó que algunos alumnos se obsesionan con los números dados en la pregunta, por lo que su atención se centra en estos números y no en la toma de medidas o en los cálculos correspondientes, o por el contrario atienden las situaciones de manera cualitativa, llamando a esa situación abandono de los datos.

En otro estudio, Fernández y Llinares (2012) identificaron que mientras el perfil aditivo va disminuyendo, el perfil proporcional aumenta, dándose el cambio de mayoría entre segundo y tercero de ESO (nivel análogo a secundaria en España). A partir de estos dos referentes se puede esperar que los alumnos pertenecientes a la muestra de estudio presenten este traslado entre lo aditivo y lo multiplicativo.

Díaz et al. (2007) desarrolló un estudio considerando como muestra a alumnos de 5to de primaria y de 2do de secundaria, a los cuales se les presentó una serie de situaciones

proporcionales, en donde se distinguió entre intuitivas (situaciones cotidianas) y numéricas (proporciones), llegando a resultados que indican que los alumnos desarrollan más el RP en los problemas intuitivos y concluyendo que existe una interacción entre el conocimiento formal e intuitivo respecto a las proporciones.

Como se ha mencionado el RP se formaliza a partir de los 12 años, pero en edades anteriores se observa la presencia de otro tipo de razonamientos, como lo es el cualitativo. Camarena y Ruiz (2011), llevaron a cabo un estudio donde se buscaba desarrollar el pensamiento proporcional cualitativo con el uso de la tecnología en niños de sexto de primaria, en donde se observó que las diferentes acciones realizadas en el espacio virtual diseñado como arrastrar el mouse y usar una regla digital, se relacionan con las acciones didácticas tangibles de sobreponer una figura con otra para hacer una comparación o usar un instrumento de medición. Estas acciones dependieron del tipo de pensamiento proporcional, ya fuera cualitativo o cuantitativo.

Por otro lado, en un estudio de Silvestre y Ponte (2011) se analizó el RP en alumnos de sexto de primaria. Los autores lograron identificar que los alumnos pueden desarrollar su razonamiento proporcional realizando actividades de naturaleza exploratoria e investigativa y resolviendo problemas, en un contexto educativo marcado por la articulación entre el trabajo de grupo y la discusión colectiva contribuyeron de modo determinante para el aprendizaje de los alumnos.

Otro aspecto importante observado en el trabajo de Karplus et al. (1983) es que los alumnos de nivel secundaria muestran mayor preferencia para trabajar con números enteros en lugar de racionales en situaciones proporcionales. Esta situación tiene relación con el elemento cognitivo de “comparar o construir razones no enteras iguales”, el cual presentó bajos niveles de resolución correcta por parte de los alumnos.

1.1.2 La telesecundaria y las escuelas multigrado en México

El nivel educativo que se ha considerado pertinente para analizar el RP es la secundaria, debido a que en este nivel se formalizan las nociones que se han trabajado en primaria, y surgen términos como proporcionalidad directa e inversa, constante, razón, etc.

Dentro de las modalidades que integran la secundaria, se consideró desarrollar este estudio en un aula unitaria, debido a que no existe una propuesta curricular donde se sugiera una forma de trabajo con un grupo multigrado, siendo los docentes los responsables de diversificar los contenidos y diseñar actividades en donde se integre a todos los alumnos.

Por otro lado, en el ámbito de la investigación de escuelas multigrado, la mayoría de los estudios se centran en el nivel primaria, por lo que se considera importante explorar la forma en la que interviene dicha modalidad en alumnos de secundaria.

Respecto a los estudios previos del RP que se han mostrado en la sección anterior, hacen referencia a aulas graduadas en secundaria o los últimos grados escolares de educación primaria, por lo que no hay estudios previos que muestren la manera en la que los alumnos de un aula unitaria construyen su RP, considerando que es uno de los contenidos que resulta angular en la educación básica porque integra diferentes conocimientos tales como:

- Razón y proporción
- Fracción y número racional
- Número decimal y problema de la medida
- Cambio de unidades
- Problemas de reparto proporcionales
- Porcentajes
- Probabilidad

Además, gracias a la autonomía con la que cuenta el docente en el aula multigrado se pueden desarrollar actividades en donde se incluya a todos los alumnos y puedan poner en práctica sus conocimientos previos, aprender de los que saben más, equivocarse y buscar soluciones desde lo colectivo y lo que cada alumno puede aportar desde su diversidad de experiencias y conocimientos, así como de su diversidad lingüística y cultural.

1.1.2.1 La telesecundaria

El nivel secundaria, se define como el último tramo de la enseñanza básica obligatoria, la cual está conformada por los niveles de preescolar (3 a 5 años), primaria (6 a 11 años) y

secundaria (12 a 15 años) (Zorrilla, 2004). Dicho nivel, está compuesto por diversas modalidades, tales como general, técnica, telesecundaria y para migrantes y trabajadores.

Como población para este estudio se ha considerado a los estudiantes de la telesecundaria, la cual es una modalidad escolarizada del Sistema Educativo Nacional (SEN). La organización escolar depende de un maestro por grado que atiende todas las asignaturas con el apoyo de material televisivo y de guías didácticas” (Zorrilla, 2004), cubriendo la demanda educativa en zonas rurales e indígenas donde por causas geográficas o económicas no fue posible establecer escuelas secundarias generales o técnicas (SEP, 2017). Al día de hoy, muchas de estas escuelas han quedado integradas en zonas urbanas.

Uno de los propósitos de la telesecundaria, es ofrecer un servicio educativo con el apoyo de los medios electrónicos de comunicación social y con materiales impresos (Flores y Albarrán, 2008), ya que al nacer como un sistema de educación para comunidades que se encuentran inmersas en contextos rurales o indígenas, el uso de la televisión, de redes satelitales y materiales audiovisuales permitía un aprendizaje con un porcentaje considerable de autonomía, además de ser guiado por el docente.

La telesecundaria fue fundada en 1968 y a lo largo de los años ha sufrido diferentes modificaciones, por ejemplo, respecto al formato en el que se transmitían los materiales audiovisuales, comenzando por transmisiones a nivel nacional por medio de televisión abierta (SEP, 2010) y el trabajo se llevaba a cabo directamente en las tele-aulas que frecuentemente eran espacios acondicionados por las comunidades con una televisión, bancas y un pizarrón.

Uno de los momentos que generó cambios en la forma de trabajo de la telesecundaria, fue la obligatoriedad de la secundaria en el año de 1993; en donde los textos educativos que se produjeron fueron Guía de Aprendizaje, Conceptos Básicos y Guía Didáctica (SEP, 2010), proporcionando dos guías y cuatro materiales de conceptos básicos para cada año escolar.

Posterior a las modificaciones de 1993, y algunos cambios en los planes y libros de texto en 1999, otro cambio importante vendría en el año del 2006 con la reforma integral para

secundaria, la cual se basa en cuatro planteamientos: ser relevante en el ámbito personal y social, ser eficaz y ser equitativa (Mirnanda y Reynoso, 2006).

Propiamente para telesecundaria, las modificaciones fueron con base en el diseño de un nuevo modelo pedagógico con materiales para docentes y alumnos, además, del fortalecimiento de los recursos tecnológicos de apoyo (Mirnanda y Reynoso, 2006). Respecto a este último punto, se adicionaron elementos como el DVD y software educativo a través de Enciclomedia (SEP, 2010).

Bajo el lema “Para nuevos tiempos, una nueva telesecundaria” (SEP, 2010), se llevó a cabo una renovación en los programas de apoyo televisivo, como: los programas integradores, los videos de consulta, los programas de extensión académica y los programas dirigidos a los maestros o sesiones a distancia.

Actualmente (refiriendo al plan de estudios 2017), en las modificaciones que plantea la propuesta curricular para la educación obligatoria 2016, se observa que los libros de texto con los que trabajan los alumnos y maestros de telesecundaria ofrecen mayor autonomía en el diseño de trabajo, y su vez, ofrece oportunidades para trabajar con recursos electrónicos, tales como los recursos informáticos y audiovisuales. Cabe mencionar que la aproximación que se realiza a través de los libros de texto a este tipo de recursos, tienen que ver más con una ejercitación y repaso, dejando a un lado el desarrollo de aprendizajes y la reflexión del contenido.

Estadísticamente se puede observar la presencia de la telesecundaria en México a partir del documento Indicadores Nacionales de la Mejora Continua de la Educación en México, cifras del ciclo escolar 2020-2021 (MEJOREDU, 2022), en él se dan a conocer aspectos generales del sistema educativo. Con la intención de conocer la realidad de la telesecundaria, se rescatan los siguientes datos mostrados en la tabla 1.

Tabla 1. Distribución de educación secundaria por modalidad, alumnos, escuelas y docentes (2020-2021)

Nivel educativo	Alumnos	Docentes	Escuelas/ planteles	Tipo de servicio	Alumnos	Docentes	Escuelas/ planteles
Secundaria	6394720	404412	40578	General	3242437	226754	12760
					50.7%	56.1%	31.4%
				Técnica	1746157	98717	4755
					27.3%	24.4%	11.7%
				Telesecundaria	1345430	72157	18,792
					21%	17.8%	46.3%
Para trabajadores	15442	2095	204	0.2%	0.5%	0.5%	
Comunitaria	45254	4689	4067	0.7%	1.2%	10%	

Como se observa en la tabla, el 21% de los alumnos matriculados en el nivel secundaria pertenecen a una telesecundaria, al igual que el 17.8% de docentes. El dato que resalta más dentro de esta estadística, es que el 46.3% de las escuelas o planteles son telesecundarias, siendo estas el mayor número de planteles registrados.

La telesecundaria es el tercer servicio que atiende a más alumnos en sus aulas (1,343,028), después de la modalidad general y de la técnica, mientras que está por arriba de la modalidad para trabajadores y comunitaria.

1.1.2.2 Escuelas multigrado

La escuela multigrado es aquella donde los docentes atienden a alumnos de diversos grados en una misma aula. Estas escuelas surgen con la necesidad de atender alumnos que viven en zonas rurales o en comunidades indígenas, por tanto, en este tipo de escuelas la diversidad se manifiesta en la diferencia de edades y conocimientos (Gallardo, 2004), aunque también puede existir una diversidad lingüística, cultural y de experiencias

En su mayoría, su tamaño es reducido (menos de 30 alumnos), y pareciese que una generalidad de estas escuelas, es que carecen de infraestructura y de recursos humanos

(Reséndiz et al., 2017), debido a que, en comparación con otras modalidades, la escuela multigrado no ha sido una prioridad en cuestión de políticas educativas.

Desde su origen, las escuelas multigrado han sido observadas como incompletas, transitorias, provisionales o compensatorias; incluso como un auxiliar en la cobertura educativa en las zonas rurales. Si bien es reconocida su existencia, desde las políticas educativas, pareciese que se ha apostado más por su subsistencia que por su consolidación (Schmelkes y Águila, 2019).

Dentro de esta modalidad, se hace presente el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE), el cual comenzó a prestar servicios en poblaciones rurales desde 1971, donde no había presencia de escuelas regulares. Es el único sistema que desde sus comienzos su base metodológica ha sido trabajar con grupos multigrado (Juárez, 2017).

Fuera de los programas que maneja CONAFE, las escuelas multigrado no tienen un modelo pedagógico específico que pueda atender aquellas particularidades que se presentan en el aula multigrado (Juárez, 2017), por ello, el docente se ve obligado a adaptar los programas establecidos a la realidad escolar.

Por la particularidad de los contextos en donde se encuentran estas escuelas, los espacios escolares son también lugares utilizados por las comunidades, no solo por la población escolar (Bustos, 2013); por ende, las prácticas educativas planteadas en el aula deben de guardar cierta relación de forma directa con la comunidad en la que están ubicadas, reconociendo así a la escuela como un factor socio-cultural.

Como se ha mencionado, las escuelas multigrado están presentes en los diferentes niveles educativos de educación básica y la presencia de este sistema en educación secundaria es llamada telesecundaria unitaria.

1.1.2.3 Telesecundaria unitaria

La educación multigrado está presente en los tres niveles de educación básica. En secundaria, sólo las escuelas para migrantes y las telesecundarias pueden ser multigrado (Santos del Real, 2019), debido a que la telesecundaria no cuenta con maestros para las diferentes asignaturas,

sino que un maestro es el responsable de todas las materias; por lo tanto, una telesecundaria multigrado es donde el docente además de ser responsable de todas las asignaturas, también es responsable de dos o tres grados.

Dicho sistema tiene sus matices, tales como características que benefician el aprendizaje de sus alumnos, así como situaciones que perjudican el trabajo dentro del aula. Una de las principales ventajas de este sistema, es “la colaboración inter-edad” (Bustos, 2013), la cual refiere a la diversidad de edades como una ventaja para el aprendizaje dentro del aula.

El estudio de Bustos describe esa ventaja como inter-edad, considerando la edad como factor primordial, pero Popoca (2006) reporta como ventaja del trabajo en multigrado la colaboración y la ayuda mutua, en donde los alumnos aprenden unos de otros y conocen lo que se trabaja en diferentes grados por la diversidad de experiencias y saberes. Al mismo tiempo que lo reporta, hace la crítica respecto a que esta ventaja no siempre es aprovechada por los docentes.

Algo similar reporta Block et al. (2015) en su trabajo, donde ha identificado diferentes tipos de ayudas entre pares y con la/el docente, exponiendo que dichas interacciones son variadas y diversas, donde algunas son normadas por la maestra y otras espontáneas, creando así un ambiente de aprendizaje.

Otra de las implicaciones favorables es que la didáctica multigrado suele ir más allá de las paredes del aula, convirtiéndose en referente de una enseñanza en consonancia con el medio (Bustos, 2013), de forma que, al estar tan arraigada a la comunidad, los alumnos comprenden que el asistir a la escuela no solo es parte de su crecimiento individual, sino que tiene una repercusión en la comunidad, ya sea de índole social o cultural.

Respecto a aspectos curriculares, una de las dificultades que se percibe, es que no cuentan con un modelo pedagógico específico que atienda las particularidades que se viven en las escuelas multigrado, situación por la cual los docentes deben de adaptar los materiales de acuerdo con las peculiaridades contextuales y dependiendo de los niveles educativos que cubran (Juárez, 2017).

Los estudios que se han realizado con el objetivo de comprender los efectos que implican las condiciones del sistema multigrado sobre el aprendizaje y las variables asociadas, han sido insuficientes (Schmelkes & Águila, 2019), además de que los estudios sólo remeten a los logros de aprendizaje que se suscitan en telesecundaria y no sobre sus procesos de aprendizaje.

A nivel nacional las escuelas multigrado representan el 37.9% en educación preescolar (3 a 6 años), el 41.9% en primaria (alumnos de 6 a 12 años) y el 33% en telesecundarias, secundarias comunitarias e indígenas (12 a 15 años); y atienden al 10%, 8.8% y 10.4% de alumnos respectivamente, en el ciclo escolar 2020-2021 (MEJOREDU, 2022). Si bien, no es un porcentaje mayor a la mitad de las telesecundarias, el realizar estudios en esta modalidad ayuda a visualizar la educación desde un panorama alejado a lo que propone el currículo segmentado por grados escolares, otorgando la posibilidad de visualizar qué sucede en un aula donde predomina la diversidad, identificando la combinación de experiencias, conocimientos, actitudes y formas de pensar.

1.1.3 Recursos tecnológicos en educación

En un contexto que integra telesecundaria y multigrado, es preciso hablar de tecnología, recordando que para el sistema de telesecundaria ha sido el eje central de su filosofía de trabajo.

La intención de tomar en cuenta los micromundos en un estudio realizado en telesecundaria unitaria es explorar la manera en la que los alumnos atienden situaciones de RP, teniendo la oportunidad de llevar a cabo acciones que con lápiz y papel no pueden ser desarrolladas, ya que el trabajo en computadora brinda la oportunidad casi inmediata de reconocer el error o la solución correcta a través de funciones como sobreponer, arrastrar con el mouse, deshacer acciones y replantear decisiones sin desviar la atención para volver a trazar o disponer de un espacio nuevo de trabajo.

Por otro lado, el investigar el proceso de interacción de los alumnos con herramientas tecnológicas al resolver situaciones sobre el RP, observando aspectos relacionados con su uso, las representaciones que emplean, el tipo de conjeturas y conclusiones que obtienen, proporciona argumentos para identificar qué tipo de actividades son las que se tienen que

plantear para alcanzar una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, así como identificar las ventajas y desventajas que se presentan al trabajo con estas herramientas (Gamboa, 2007).

1.1.3.1 La tecnología de la educación

La tecnología en educación puede ser entendida de dos formas, por un lado, la tecnología “en” educación hace referencia al uso de medios instrumentales para transmitir mensajes en la enseñanza; por otro lado, la tecnología “de” la educación no solo se centra en los medios, sino que considera a los participantes y a los contextos de aprendizaje (Almenara, 2006). Para este trabajo se considera la tecnología de la educación, debido a que tanto los participantes como el contexto de la muestra son el objeto de estudio.

Históricamente el origen de la tecnología de la educación se remonta a la década de 1940, teniendo como base teórica en su introducción la riqueza y variedad de los estímulos, pues se creía que elevaría la atención y la motivación de los estudiantes, facilitando la adquisición y la memoria en los procesos de enseñanza-aprendizaje, además de tener en cuenta que los medios no son solamente transmisores de información sino también instrumentos de pensamiento y aprendizaje (Almenara, 2006).

A partir de la evolución que ha tenido la tecnología de la educación, De Marco (2004) establece ejes conceptuales que marcan su papel actual:

- Espacio de conocimiento pedagógico sobre los medios, la cultura y la educación en el que se cruzan aportaciones de distintas disciplinas de las ciencias sociales.
- Disciplina que estudia procesos de enseñanza y de transmisión de la cultura mediados tecnológicamente en distintos contextos educativos.
- Debe partir del análisis del contexto social, cultural e ideológico bajo el cual se produce la interacción ente los sujetos y la tecnología.

Es importante rescatar el tercer eje que propone De Marco, sobre todo porque este estudio toma en consideración las interacciones para analizar el RP. Este punto será abordado más adelante.

Dentro de la tecnología de la educación, se entenderá como recurso tecnológico a un medio que se vale de la tecnología para cumplir con su propósito. Los recursos tecnológicos pueden ser tangibles (computadora, impresora, otra máquina) o intangibles (un sistema, softwares, aplicaciones, etc.) (Flores, 2020).

1.1.3.2 Tecnología en educación matemática (secundaria)

Desde el origen de la computadora y más específicamente alrededor de la década de 1960, los matemáticos y los profesores de matemáticas comenzaron a considerar que la computación podía tener efectos significativos en el contenido de las matemáticas de educación básica y a nivel universitario (Drijvers et al., 2010), desarrollando softwares como Logo o BASIC.

Conforme ha pasado el tiempo, la tecnología se ha visto cada vez más presente en las aulas de matemáticas, al grado de contar con softwares educativos que tienen la final de apoyar en los procesos de enseñanza-aprendizaje, tales como la hoja de cálculo, Cabri o GeoGebra. Respecto al uso de los softwares educativos, Pochulu (2005) ha identificado seis importantes fortalezas:

- Conecta a la matemática con otras áreas de conocimiento
- Posibilita la creación de micromundos que le permiten al estudiante explorar y conjeturar
- Permite el desarrollo cognitivo del alumno, fomenta el trabajo grupal, la participación activa en la construcción del conocimiento y establece una interacción interesante entre el usuario y la máquina
- Admite que el alumno pueda aprender de sus errores, a través de una retroalimentación inmediata y efectiva
- Tiene precisión científica: en la presentación de los hechos y principios, y al empleo de la terminología técnica
- Hace énfasis en los esquemas de razonamientos especiales y característicos en los que se basa la matemática

Existen varios estudios que han aportado interesantes hallazgos respecto al uso de la tecnología en la educación matemática, por ejemplo, Caballero (2009) llevó a cabo un estudio donde se analizaron los cambios en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas al incorporar las tecnologías digitales en el taller de computación en una telesecundaria, además de capacitar a un docente en la implementación de las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas y dar seguimiento a la forma en la que repercutía esta incorporación. Dentro de sus conclusiones rescata que el uso de la tecnología en esta área es esencial, ya que modifica la manera de enseñar la matemática y facilita el aprendizaje de los estudiantes, debido a que promueve la interdisciplinariedad y también posibilita el hecho de aprender en ambientes cooperativos.

Gamboa (2007) dentro de un análisis teórico compara el trabajo de la enseñanza de la matemática tradicional y el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas con la intención de mostrar cómo el uso de la tecnología ayuda en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, concluyendo que el uso de la tecnología en el aula de matemáticas permite a los estudiantes desarrollar diferentes conductas, por ejemplo, la búsqueda de relaciones entre elementos representacionales, generalización de los resultados en casos generales y/o la comprobación de resultados obtenidos en el proceso de resolución de alguna situación.

Por otro lado, Cruz y Puentes (2012) llevaron a cabo un estudio a partir de una experiencia empírica sobre el uso de diferentes recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura de matemáticas a nivel secundaria, diseñando una serie de actividades con el objetivo de construir conceptos nuevos, reforzar conceptos adquiridos y brindar información al profesor respecto a la comprensión de las actividades. Como parte de sus conclusiones argumentan que si bien el uso de recursos tecnológicos no son la solución de las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, brindan un espacio para que los estudiantes puedan manipular de manera directa los objetos matemáticos y sus relaciones.

Referente a tecnología y telesecundaria, en primera instancia se rescata que la capacitación de los docentes en el uso de diversos recursos tecnológicos no es suficiente, sobre todo

aquellos docentes que pertenecen a escuelas en zonas rurales o con mayor índice de marginación, ya que en las instituciones no se cuenta con los recursos (Ayala, 2018).

En el trabajo realizado por Ayala (2018), el propósito principal era exponer las representaciones sociales del trabajo docente mediado por las tecnologías de profesores de una telesecundaria, a partir de una entrevista en profundidad, un cuestionario de habilidades digitales y el análisis documental. Dentro de los resultados obtenidos se observó que a pesar de las dificultades que presentan los docentes, valoran el uso de estos recursos debido a que atrae la atención de los estudiantes y el interés en el tema que se trabaja, inclusive, en algunas situaciones funciona como un sistema de estímulos para la participación (Ayala, 2018).

Cabe resaltar que el uso de recursos que realizan en su mayoría los docentes reportando en el estudio de Ayala, tiene que ver con aquellos proporcionados por el programa o los que son de software libre, ya que tienen mayor dominio de él.

De igual forma, Caballero (2009) concluye que el docente debe identificar cuáles son las ventajas directas de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje, y no solamente quedarse con el conocimiento del objeto de estudio, de forma que al integrar recursos tecnológicos, se potencializa el trabajo del docente, la calidad de la enseñanza y se genera un aprendizaje significativo para los alumnos.

Respecto al currículo, se considera el plan de estudios 2017, debido a que es el programa vigente al momento de llevar a cabo este estudio. Respecto al uso de la tecnología se describe en el apartado del programa educativo vigente (SEP, 2017) titulado “¿Cómo y con quién se aprende? la pedagogía”, en la sección “asegurar el acceso y el uso de materiales educativos diversos y pertinentes”, donde se explicita que la tecnología es un medio, no un fin, en donde se invita al docente a que aproveche las tecnologías disponibles como medio para trascender las fronteras del aula, potenciar el trabajo colaborativo y promover la generación de soluciones creativas a problemas diversos.

Dentro del mismo programa “Aprendizajes Clave” (SEP, 2017), se expone que hay dos modelos diferentes del uso de la tecnología:

- Interacción mediada: El profesor o algunos estudiantes usan la tecnología para realizar actividades con todo el grupo (usualmente hay un dispositivo y un proyector)
- Interacción directa con los dispositivos electrónicos: Los estudiantes utilizan dispositivos electrónicos en actividades de aprendizaje (individuales o colaborativas).

Además, se presenta una serie de actividades que pueden llevarse a cabo en dichos recursos, tales como

- Buscar, seleccionar, evaluar, clasificar, e interpretar información
- Presentar información multimedia
- Comunicarse
- Interactuar con otros
- Explorar y experimentar
- Manipular representaciones dinámicas de conceptos y fenómenos
- Crear productos
- Evaluar conocimientos y habilidades de los estudiantes.

En otra sección del programa, se exponen el perfil de egreso que se espera logren los alumnos que culminan la educación secundaria, mencionando respecto a las “habilidades digitales”, que los alumnos “analizan, comparan y eligen los recursos tecnológicos a su alcance y los aprovecha con una variedad de fines, de manera ética y responsable. Aprende diversas formas para comunicarse y obtener información, seleccionarla, analizarla, evaluarla, discriminarla y organizarla” (SEP, 2017, pp. 23).

Pareciera que el perfil de egreso prioriza el uso de la tecnología como un medio de consulta y no tanto como un espacio de aprendizaje como se exponía en el apartado “asegurar el acceso y el uso de materiales educativos diversos y pertinentes”.

Dentro del mismo programa (SEP, 2017), específicamente en el apartado del campo “pensamiento matemático”, se observa la presencia de la tecnología dentro de las orientaciones didácticas en el apartado de “diversificar el tipo de problemas”, al describir que conviene pensar en situaciones que propicien la aplicación de diferentes herramientas matemáticas o el uso de la tecnología, pero no es del todo claro de qué manera espera que se

haga presente, ¿qué tipo de recursos son aplicables? ¿Cuáles son algunos softwares educativos que permitan el acercamiento de los alumnos en un ámbito de aprendizaje? Son preguntas que no son respondidas en el programa educativo vigente.

Actualmente la telesecundaria cuenta con el acceso a dos espacios tecnológicos diferentes, por un lado, la red Edusat, la cual es un sistema de televisión con señal digital comprimida que se transmite vía satelital y por otro lado el sitio “Telesecundaria”² en donde se encuentran diferentes recursos como los libros de texto o materiales de apoyo.

En el caso de Edusat, cuenta con más de 16 canales de transmisiones educativas, en donde se rescatan diferentes programaciones tanto para alumnos como para docentes. Dentro de esta red se encuentran un sitio llamado “aprende.mx”, en donde se puede consultar la programación de dichos canales, además de contar con un espacio de microcápsulas informativas o procedimentales para telesecundaria.

En el caso del sitio oficial “Telesecundaria” se muestran diferentes materiales para alumnos, maestros, directivos, padres de familia y comunidad educativa en general, tales como los libros de textos, recursos de apoyo que complementan las lecciones del libro, así como recursos audiovisuales de consulta.

Si bien los libros de textos impresos integran el uso de los recursos que se encuentran en el sitio oficial, la mayoría de dichos materiales corresponden a la complementación del material impreso, limitando las oportunidades de aprendizaje con recursos tecnológicos a una consulta o ejercitación. Por tanto, se puede concluir que la tecnología disponible no cumple con la descripción que hace el programa de estudios, dado que no promueve la construcción de conocimientos.

A pesar de que la telesecundaria cuenta con recursos tecnológicos importantes, hay factores que limitan su desarrollo, tales como la falta de capacitación y actualización, instalaciones inadecuadas (carencia o abandono de equipos) o la sobrevaloración de algunos recursos técnicos (Barroso, 2014; Tinajero, 2015).

² <https://telesecundaria.sep.gob.mx/>

A manera de síntesis, hasta este momento se ha expuesto la problemática que busca atender este estudio, la cual se centra en el RP y cómo los empleos de aproximaciones incorrectas limitan la capacidad de razonamiento que pueden llegar a desarrollar los alumnos. Respecto a la telesecundaria unitaria, se puede decir que es una modalidad que queda desdibujada del diseño curricular graduado, además de que son percibidas como escuelas incompletas o sinónimo de rezago. A pesar de estas consideraciones, la telesecundaria unitaria al igual que las demás escuelas multigrado, ofrecen grandes ventajas en el aprendizaje de los alumnos, tales como el trabajo colaborativo y la diversidad de experiencias y saberes. Por último, se ha expuesto que los recursos tecnológicos cada vez se hacen más presentes en los salones de clase, sobre todo en matemáticas al ser una gran oportunidad para atender situaciones abstractas que en lápiz y papel difícilmente pueden ser trabajadas.

Ahora bien, ¿de qué manera se integran los tres ejes centrales de este trabajo? Al reconocer que el RP conlleva un desarrollo que se formaliza en el nivel secundaria, se ha considerado que en este nivel se puede apreciar mayor diversidad de razonamientos, ya que el razonamiento no siempre está determinado por aspectos como la edad, lo que nos llevaría a observar diferentes aproximaciones a una misma situación, sobre todo en un aula tan diversa como lo es la unitaria. A partir de que en la telesecundaria su filosofía de trabajo está orientada por el uso de recursos tecnológicos, se ha considerado explorar el RP con el apoyo de dichos recursos, ya que se considera que permiten una interacción entre alumnos y con el recurso en torno a un objeto matemático, a esto se le conoce como micromundo (término que será ampliado en el siguiente capítulo).

Se espera que este trabajo tenga una implicación en robustecer el área de estudio sobre la educación multigrado, otorgando referentes sobre la construcción del RP a docentes que se desempeñan en estas aulas, consintiendo una clasificación clara que les permita identificar dónde se encuentran sus alumnos y cómo se puede promover su construcción a través de un recurso tecnológico. Además, en consideraciones sociales es importante difundir el trabajo que se realiza en este tipo de aulas, y mostrar una visibilidad sobre aquellos sistemas educativos que algunas veces son olvidados.

Por tanto, a partir de estas consideraciones, la descripción de la problemática y presentar como antecedentes los estudios que se han realizado en torno al tema de investigación, se plantea el siguiente objetivo y la pregunta que se busca atender en este estudio.

1.3 Pregunta de investigación y objetivos

1.3.1 Pregunta de investigación

A partir del problema descrito, la pregunta que busca responder este estudio es:

¿Cómo es el razonamiento proporcional de los alumnos de telesecundaria unitaria a través de la interacción con micromundos en actividades de proporcionalidad directa?

1.3.2 Objetivo de investigación

Explorar el razonamiento proporcional en actividades de proporcionalidad directa de alumnos de telesecundaria unitaria a través de la interacción con micromundos.

Es importante aclarar que el RP es un contenido amplio, y existen tres tipos de relaciones proporcionales diferentes, por ello a lo largo de este estudio al referirnos a RP sólo se hace referencia a la proporcionalidad directa, puesto que las actividades diseñadas y descritas en el marco teórico se centran en este tipo de relación.

Al analizar el RP de alumnos de telesecundaria unitaria bajo los niveles propuestos por Karplus, el objetivo no es ubicarlos en una categoría y concluir si es bueno o no su razonamiento, sino dar un panorama de los diferentes tipos de razonamiento proporcional que se construyen en un aula multigrado e identificar qué implicaciones tienen las interacciones en el trabajo colectivo, la diversidad de experiencias y formas de pensar al atender situaciones proporcionales.

A partir de definir el objetivo del trabajo, en el siguiente capítulo se exponen los aspectos teóricos del mismo.

Capítulo 2. Marco teórico

2.1 Paradigma construccionista

El paradigma sobre el que se basa este trabajo es el construccionismo, el cual desde sus orígenes (1965 aproximadamente) conserva una relación muy cercana con el constructivismo, dado que retoma aportes de Piaget. Ambos paradigmas convergen en la concepción de que el “conocimiento consiste en un proceso psicológico humano y social constructor de la realidad y, por lo tanto, el comportamiento humano está determinado por dicho proceso” (Agudelo y Estrada, 2012).

Seymour Papert³ es el autor al que se le atribuye la idea del construccionismo, la cual es comprendida como

Una manera poderosa para que los estudiantes construyan estructuras de conocimiento en su mente, que construyan representaciones externas, entidades físicas o virtuales sobre las cuales pueda reflexionar y que puedan ser editadas y compartidas (Noss y Hoyles, 2019, p. 9).

La intención del construccionismo es generar las condiciones propicias para construir un puente entre la mente del niño y su entorno a través de materiales propicios para formalizar la construcción del conocimiento (Velasco, 2016), recordando que cada individuo se desarrolla en un contexto específico, el cual permea en su forma de comunicarse, de establecer relaciones y de las interacciones que genera en colectivo entorno al conocimiento, tal como lo menciona Noss y Hoyles (2019).

El reto del construccionismo es la tensión entre buscar enseñar un contenido y al mismo tiempo otorgar al alumno la experiencia de construir, crear, hacer, y sobre todo resolver

³ Papert (1928-2016) es considerado pionero de la inteligencia artificial, inventó el programa Logo en 1968, programa reconocido como el primer micromundo, termino creado también por él.

problemas explotando ese conocimiento del contenido, a partir de la formulación de “ideas poderosas⁴”.

La razón por la que se considera el construccionismo como paradigma de este trabajo, es la implicación social que se le da a la construcción del conocimiento, promoviendo así la creación de espacios en donde los sujetos puedan interactuar, y reconociendo aquellas construcciones que se dan en “la cabeza” apoyadas por construcciones externas “en el mundo” creando producciones que se pueden discutir y examinar “allí afuera” (Harel y Papert, 1991), es decir, que los sujetos tengan la capacidad de compartir el conocimiento que están produciendo de manera interna (favorecido por elementos externos) e incrementarlo y hacerlo más fructífero con los aportes de los demás sujetos que los rodean.

Dentro de los conceptos propuestos por Papert existen tres conceptos que son considerados “instrumentales” para brindar a los y las estudiantes las mejores oportunidades de construcción: objetos con los cuales pensar, entidades públicas y micromundos (Badilla y Chacón, 2004).

Los “objetos para pensar” hacen referencia a los artefactos con los que se puede experimentar, modificar y comprender cómo funcionan (Vicario, 2009), es decir son artefactos cognitivos que proporcionan conexiones entre el conocimiento sensorial y el conocimiento abstracto, y entre el mundo individual y el mundo social (Ostwald, 1996), los cuales suponen la interacción entre estudiantes y computadoras.

Por otro lado, Papert denomina una “entidad pública” a cuando el aprendiz está involucrado de una manera consiente en una construcción del aprendizaje de tipo más público, es decir, que puede ser mostrada, discutida o examinada, ya que al compartir el objeto creado con los demás, se convierte en una organización pública a través de la cual el aprendizaje construccionista es reforzado (Badilla y Chacón, 2004).

⁴ La noción de involucramiento con herramientas intelectuales, formas de pensar que acercan a conceptos y estrategias clave, las cuales conectan con el conocimiento intuitivo (Papert, 1980; Monaghan et al., 2016; Noss y Hoyles, 2019)

El término “micromundo” (Drijver et al., 2010; Sacristán, 2003; Thompson, 1987; Edwards, 1998; etc.), constituye a la aplicación tecnología del paradigma constructorista, dicho termino se desarrolla de manera más amplia en la siguiente sección.

En este trabajo se ha considerado hacer uso de los micromundos para caracterizar la presencia de los recursos tecnológicos como medio de exploración, por tanto, a partir de esta aclaración se deja de emplear el término “recurso tecnológico” para hacer referencia a la tecnología en este estudio, y se usará el término micromundo, debido a que conlleva una decisión metodológica para los fines de este estudio.

2.2 Micromundos

Un micromundo se define como un ambiente computacional de incorporación de un conjunto coherente de conocimientos científicos y de relaciones diseñadas, de forma que con las tareas adecuadas y con principios pedagógicos, estudiantes pueden participar en la exploración y construcción de actividades ricas en generación de significados (Healy y Kynigos, 2010).

Históricamente, los micromundos se distinguían por el uso de lenguajes de programación y diseño de ambientes de exploración desde su creación hasta su interacción, aunque con el paso del tiempo ha tenido modificaciones la definición del concepto al igual que el objetivo (tabla 2).

Tabla 2. Evolución del concepto micromundo

1971	Origen del termino micromundo. Papert propone el termino micromundo desde el área de la inteligencia artificial para describir un dominio pequeño y coherente de objetos y actividades en forma de un programa para computadora. Los primeros micromundos eran unas versiones simplificadas de la realidad, para probar teorías del comportamiento. Se esperaba que las computadoras pudieran resolver problemas matemáticos.
------	--

1983	<p>Cambio en el objetivo. El objetivo de los micromundos cambio de enseñar a computadoras a resolver problemas a diseñar ambientes de aprendizaje para la apropiación del conocimiento. Groen y Kieran argumentaban que los micromundos eran minidominios de las matemáticas piagetianas y fungían como un medio para inducir la abstracción reflexiva espontánea que conducen a la construcción de nuevas estructuras lógicas-matemáticas, principalmente a través de objetos transicionales (de objetos concretos a ideas abstractas).</p>
1987	<p>Relación software-conocimiento. Feurzeig define micromundos como un dominio de tareas o espacio de problemas delimitados cuyos elementos son objetos y operaciones sobre objetos que crean nuevos objetos y operaciones, es decir una extensibilidad que hace referencia a combinar lenguajes primitivos de software con un nuevo lenguaje, ampliando el vocabulario del software. La visión era que las herramientas del software y el conocimiento crecieran juntos de manera interactiva en la búsqueda de objetivos epistemológicamente ricos.</p>
1990	<p>De diseñadores a educadores matemáticos. A partir de la reunión internacional de un grupo de interesados en Logo (micromundo) y preocupados por cuestiones matemáticas y culturales, intentaron mantener la visión de Papert, pero con la intención específica de provocar cambios a través del uso de la computadora dentro de la práctica de las matemáticas escolares. Entre este grupo de educadores, se puede discernir un claro cambio de atención desde el diseño de micromundos</p>

	hacia el análisis de los procesos de interacción de los micromundos.
1991	Micromundos en la matemática escolar. Se incorpora cada vez más nociones de pedagógica y secuencia en la noción de micromundo, entendiéndolo como un software diseñado para ser adaptable a las concepciones iniciales de los alumnos junto con conjuntos de actividades cuidadosamente secuencias dentro y fuera del ordenador, organizadas en parejas, equipos o grupos completos con objetivos de aprendizajes específicos. Los micromundos de “matemáticas escolares” son menos exploratorios y menos abiertos que antes, se centran en un tema matemático solamente.
2003	Nuevos micromundos. Ambientes donde la gente puede explorar y aprender de lo que recibe de la computadora como respuesta de exploración. La computadora se convierte en herramienta útil al aprovecharse sus potencialidades de retroalimentación casi inmediata, de sus representaciones gráficas y de manipulación directa que tiene el software para geometría dinámica.

Nota: Datos obtenidos en Hoyles (1993) y Hoyles y Noss (2004)

Al día de hoy, el término micromundo es utilizado para denominar módulos interactivos ya sean independientes (stand-alone software) o creados dentro de otro paquete que funciona como plataforma (Cabri, Logo Micromundos, Excel, etc.) donde se explora una idea manipulando los elementos provistos por el diseñador para un fin en específico, de forma que la tendencia actual es que el usuario únicamente explore utilizando las herramientas dadas por el micromundo y no en la modificación de estos (Sacristán, 2003).

De manera más específica un micromundo matemático es un lugar para familiarizarse con un conjunto de ideas, de situaciones problemáticas o de actividades, en el cual el estudiante y el maestro pueden probar ideas dentro de un tema de interés; además, la meta es la

construcción de significado y de relaciones que sirvan como modelo para un sistema formal, dando oportunidades para crear modelos mentales que reflejan la estructura y composición de los sistemas formales (Weir, 1987). Es decir, a través de la manipulación que permiten los micromundos los alumnos son capaces de probar hipótesis o procedimientos que los lleven a una formalización del aprendizaje.

La intención de involucrarse con un micromundo es orientar a los alumnos hacia maneras matemáticas de pensar a través de estructuras establecidas por el diseñador y el software, los alumnos deben mantener cierta autonomía, asumir la responsabilidad de sus acciones y de sus resultados que producen (Noss y Hoyles, 2019). A pesar de que este trabajo no tiene fines didácticos, se contempla que el diseño creado puede desarrollar dichas habilidades en los estudiantes.

Para que un ambiente computacional se considere micromundo debe de contener cuatro componentes (Hoyles y Noss, 1987):

- *El componente del estudiante.* Abarca aspectos tanto cognitivos como afectivos. Respecto los aspectos cognitivos, la forma en la que el alumno percibe una tarea depende de sus sistemas de representación disponibles y de si las demandas cognitivas de la tarea están dentro de su “zona de desarrollo próximo” (Vygotsky, 1987). Es decir, las actividades deben representar un reto alcanzable para que el alumno pueda atenderlas de mejor manera; a diferencia de si las actividades no representan un reto (dificultad mínima) o para llevarlas a cabo requieren de conocimientos con los que todavía no cuenta el alumno (dificultad inalcanzable).

Respecto a las interacciones de los alumnos con el componente técnico, se ven reflejados diferentes estilos de aprendizaje, razonamientos y formas de trabajar, puesto que el trabajo en un micromundo no siempre requiere una planificación estructurada, sino que muchas veces el trabajo puede ser más exploratorio.

En el aspecto afectivo, se pueden hacer presentes sentimientos de miedo al fracaso, sobre todo al reconocer que la actividad pertenece a un área matemática que no dominan del todo, lo cual puede verse reflejado en su actividad con el micromundo. Por otro lado, se pueden

hacer presentes emociones positivas como la confianza o el control al desarrollar la actividad propuesta.

- *El componente técnico.* Software o lenguaje de programación que centra la atención del alumno en ideas o procesos específicos. Es un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representaciones para la comprensión de una estructura matemática o campo conceptual.

- *El componente pedagógico.* Estructura la investigación y exploración de los conceptos plasmados en el componente técnico, además busca centrar la reflexión sobre aspectos particulares o sugerir ordenes productivos, señalar puntos de partida y/o provocar vínculo con otras actividades. Los aspectos físicos involucrados puede ser el docente (aplicador en este caso), libro, cartel, etc. Las interacciones deben apuntar a tener en cuenta la perspectiva del alumno sobre la situación e inclusive provocar la negociación entre pares o con los aspectos físicos.

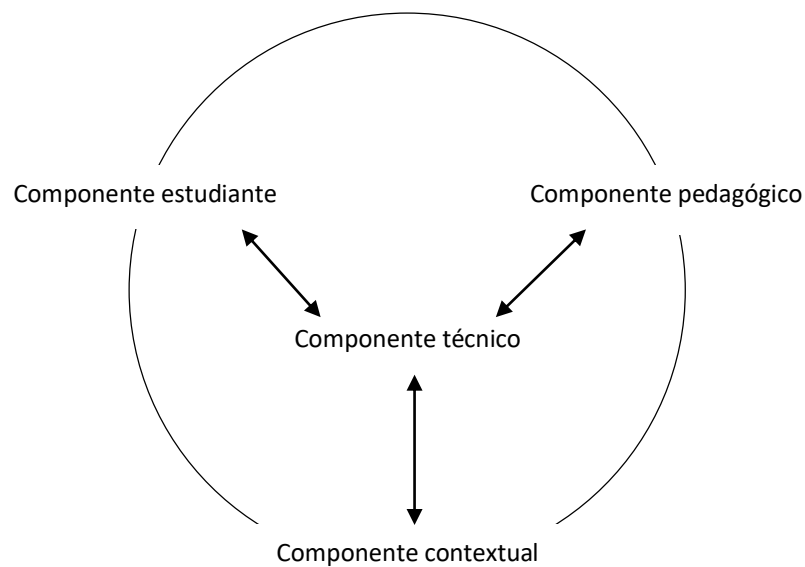
El componente pedagógico busca facilitar la integración de percepciones posiblemente contradictorias que posee el alumno y aproximarlos a la realización de generalizaciones y a la abstracción. Respecto a la interacción alumno/docente, hay evidencia que sugiere que las intervenciones iniciadas por el maestro son más efectivas cuando compaginan con el enfoque exploratorio de los alumnos en lugar de los enfoques dirigidos a los objetivos, es decir, hay mayor impacto en las interacciones basadas en la exploración del micromundo que en los objetivos diseñados.

- *El componente contextual.* Entorno social en el que tiene lugar la actividad de programación. Es importante considerar el ambiente en el que se desarrolla la actividad, puesto que se ha demostrado que éste influye en la forma en la que los alumnos atienden, inclusive, es importante prestar atención a las estrategias diseñadas en el componente técnico, puesto que de esto dependerá las emociones que presente el alumno, por ejemplo, si la actividad se muestra como juego o como trabajo escolar. Entre los factores que influyen en las respuestas de los alumnos se encuentra la colaboración entre el alumno y sus compañeros, puesto que esto determinará en gran medida las construcciones que pueden llegar a hacer.

Los componentes se relacionan como se muestra en la figura 3, teniendo como centro el componente técnico, integrando cada uno de los demás componentes en una doble dirección, es decir, el componente técnico es el que integra a todos aquellos elementos que se ven relacionados con la creación de un micromundo.

Figura 3.

Componentes de un micromundo



Nota. Modelo basado en la propuesta de Hoyles y Noss (1987)

Es importante aclarar que, si bien el uso de la computadora representa un eje central en el diseño de micromundos, no es lo más importante, tal como menciona Noss y Hoyles (1996), el foco de interés en el diseño de micromundos no es la computadora, sino lo que hace posible para la creación de significado matemático, permitiendo que los micromundos también funcionan como herramientas de investigación (Sacristán, 2003), ya que son “una ventana” que permite visualizar el conocimiento, concepciones, creencias y actitudes de los alumnos, así como de los docentes y todos los actores involucrados en los procesos educativos, es decir que los involucrados “pinten” sus expectativas e ideas, de forma que se haga explícito aquello que es implícito y apuntar aquello que a menudo pasa desapercibido (op.cit.).

En resumen, los micromundos son ambientes de aprendizaje y también permiten hacer aproximaciones con fines investigativos (como este estudio) para conocer los saberes, experiencias y razonamientos matemáticos de los alumnos, tanto con los que ya cuentan como aquellos que pueden llegar a desarrollar con la presencia del micromundo.

La intención de hacer uso de los micromundos para el análisis en un aula multigrado es la posibilidad que brindan para desempeñar ambientes de aprendizaje colectivo, tal como lo describe Carrete y Domingo (2021) los recursos utilizados deben permitir el aprovechamiento didáctico de las interacciones entre alumnos, así como la circulación de saberes (Santos, 2006), la flexibilidad en el aprendizaje, atendiendo a los distintos niveles de competencia de los alumnos, el trabajo cooperativo (Forero et al., 2015), significativo y contextualizado, potenciando la autonomía (Boix y Bustos, 2014).

Por otro lado, el uso de micromundos propone un uso diferente de la computadora para los alumnos. La escuela es uno de los pocos lugares en los que los alumnos de un aula unitaria tienen acceso a una computadora, por tanto, el uso de micromundos los acerca a un ambiente diferente de aprendizaje, en donde el uso del internet no sólo funciona como sitio de consulta, sino que puede ayudarlos en la construcción del conocimiento, además existen softwares de uso libre en donde se pueden desarrollar micromundos, por lo que un ambiente de escasos recursos considerando un contexto rural no es una limitante para trabajar con este recurso.

2.3 Las interacciones como unidad de análisis

Como se pudo leer en el componente estudiantil y pedagógico, es importante poner atención en las interacciones que se generan entre los involucrados y entre el componente técnico y los alumnos dentro de un micromundo, puesto que dichas interacciones determinan el tipo de razonamiento implicado o los saberes expuestos al realizar las actividades; por tanto, de acuerdo a dichas observaciones y los propósitos del paradigma constructorista, se ha considerado tomar como unidad de análisis para el estudio las interacciones producidas entre los alumnos, entre el aplicador y los alumnos, así como las interacciones entre los alumnos y el componente técnico.

Una interacción es entendida como la comunicación con otro distinto a uno mismo, y es mediante este proceso que los sujetos adquieren capacidad reflexiva para verse a sí mismos y para dar forma y sentido a la realidad que los rodea (Rizo, 2006).

En educación multigrado las interacciones que se presentan determinan una relación con los demás elementos que influyen sobre la construcción colectiva de conocimiento, ya que el espacio es atravesado por tensiones, cambios y contradicciones abiertas a múltiples flujos culturales, locales y globales (Corro y Bolaños, 2018), por tanto, el ubicar a las interacciones como medio para analizar el RP favorece a la comprensión de la toma de decisiones, los intercambios de experiencias y saberes, las negociaciones y los resultados a los que llegaron los participantes en cada actividad. Es importante mencionar, que las interacciones también refieren a las interacciones en el micromundo.

Existen estudios previos que han considerado las interacciones dentro de aulas multigrado, uno de ellos es el trabajo de Block et al. (2015), logrando identificar las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza en el aula multigrado, reconociendo que una posible ventaja de estas aulas es la multiplicidad de ayudas, dentro de las que se reconocen las siguientes:

- Ayudas de la maestra a los alumnos
 - Condiciones en las que ocurren
 - *Distintos espacios.* Las ayudas pueden estar dirigidas al grupo, algún grado escolar, un equipo de trabajo o individualmente a un alumno
 - *Simultaneidad de diálogos.* Maestra y alumnos comparten la habilidad de mantener la continuidad de una idea en un ambiente de interacciones múltiples.
 - *Fragmentación de ayudas.* Escuchar y atender a varios alumnos al mismo tiempo, da lugar tanto a la simultaneidad en los diálogos como a una fragmentación de ayudas.
 - Características de las ayudas

- *Ayudas indirectas.* Auxiliar a los alumnos en las diferentes tareas, sin resolverles nada y dejando a su cargo la parte más importante de la misma (ej. para resolver una tarea, para expresar la respuesta y/o para reconstruir e identificar un procedimiento)
- *Ayudas directas.* Frente a una duda, error o dificultad, la docente apoya de manera directa al proporcionar el resultado.
- Ayudas entre los alumnos en torno a la resolución de una tarea
 - Apoyo espontáneo entre los alumnos de un mismo ciclo
 - De un alumno de un ciclo mayor a uno de un ciclo menor
 - Apoyo a solicitud de la maestra

Algunas de las interacciones que ha reconocido Block et al. (2015), sobre todo las ayudas por parte de la docente, serán retomadas en este estudio, haciendo las modificaciones pertinentes que son descritas en el capítulo 4, en la sección de la definición de categorías de análisis.

Por otro lado, Santos (2006), expone que es deseable ubicar a un alumno perteneciente a un grupo multigrado en situaciones educativas donde se vea involucrado un reto alcanzable, determinado por lo máximo que su interacción con pares (del mismo grado o uno superior) le permita avanzar. Al trabajo de Santos se incluiría que no sólo la interacción con sus pares, sino también la interacción con aquellos recursos que lo aproximan a la construcción de saberes más formales, por ejemplo, los micromundos. Además, agrega que pensar que sólo por ser un grupo multigrado estas interacciones se llevan a cabo es ingenuo, pues dependerá de algunas decisiones por parte del docente que permitan establecer una dinámica interactiva y comunicacional.

A partir del concepto establecido por Santos (circulación de saberes⁵), Boix (2011) y Corro y Bolaños (2018) reconocen la presencia de una acción tutora dentro de las aulas multigrado

⁵ Dinámica abierta en un aula multigrado, donde el alumnado pueda avanzar en la adquisición de contenidos según sus intereses y motivaciones y con diferentes niveles de profundidad

por parte de un alumno que cuenta con mayor conocimiento, o mayor competencia ante alguna situación planteada, en donde orienta a sus compañeros en la adquisición de conocimiento/información.

Dentro del mismo trabajo de Corro y Bolaños (2018), se identifica que,

las aulas multigrado constituyen un contexto específico, en donde por medio de la interacción, se articulan múltiples voces, se contrastan y negocian significados, y donde la colaboración y el soporte que se genera en una situación de interrelación (en este caso orientada a una relación tutora entre pares) motiva e involucra a los niños al aprendizaje colectivo (p. 30).

Por tanto, a partir de estos referentes teóricos, se retoman los conceptos de tutoría y de negociación como parte de las interacciones a observar en este estudio. Las modificaciones pertinentes son expuestas en el capítulo 4.

2.4 Razonamiento proporcional

Existen cuantiosos estudios enfocados en el RP, de los cuales se han identificado los trabajos realizados por Piaget y Inhelder (1975), Karplus et al. (1983), Lesh (1988), Noeiting (1980) y Pulos et al. (1981) como pioneros desde un punto de vista cognitivo.

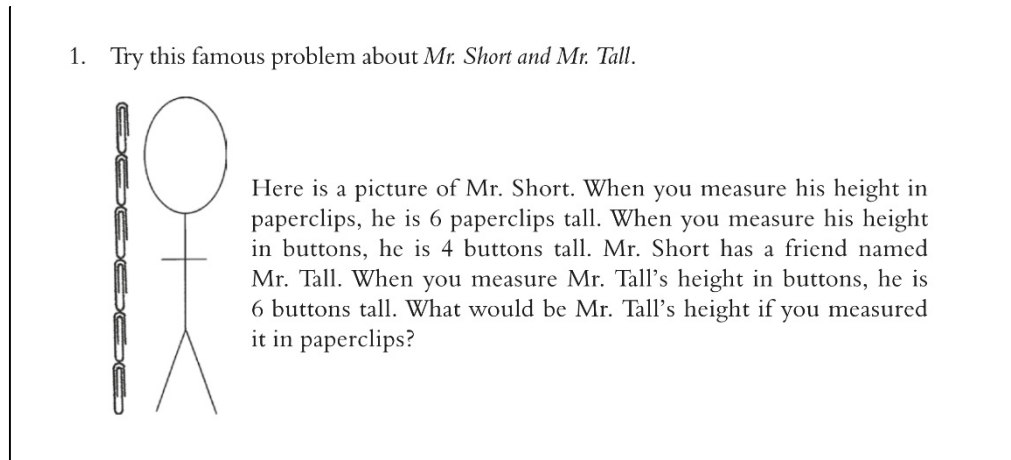
Para este estudio se retoma el trabajo de Karplus et al. (1980, 1983), el cual define el RP como una entidad independiente que no se vincula integralmente a otros patrones de razonamiento, puede aplicarse en condiciones simples o complejas y, en consecuencia, puede usarse en varios niveles.

Respecto al uso de varios niveles, Karplus et al. (1983), desarrolló un estudio basado en el problema “Mr. Tall/Mr. Short” (figura 4), centrándose en el reconocimiento, interpretación y categorización del RP en adolescentes (11 a 15 años).

curricular, de forma que, no sea la ubicación a un grado la que frene sus potencialidades intelectuales y su grado de desarrollo competencial (Boix, 2011; Santos, 2006)

Figura 4.

Problema “Mr. Tall/ Mr. Short”, tomado de Lamon (2020)



A partir de las respuestas y las estrategias que usaron para resolver el problema “Mr. Tall/ Mr. Short”, Karplus generó una clasificación para situaciones de proporcionalidad directa, la cual parte de ideas o procedimientos iniciales hasta el desarrollo de un RP completo⁶.

Los niveles de RP establecidos por Karplus et al. (1983) son los siguientes:

- **Incompleto.** Cuando adivinan la respuesta o emplean una operación cuantitativa inapropiada. El sujeto es capaz de identificar que se trata de la relación de dos magnitudes, pero en el intento de resolver, emplea alguna operación que no lo lleva a la solución, ya sea porque la operación no es la correcta o el algoritmo fue mal desarrollado.

Ejemplo: Una flor tiene 10 pétalos. ¿Cuántos pétalos tienen 4 flores? Identifica la relación “10 por cada flor, 4 flores cuatro veces 10”, pero la aplicación del algoritmo no es la correcta, o sólo suma 4 más 10, pues solo se basa en los datos otorgados por el problema.

⁶ Basado en la definición de proporción como una igualdad de razones (Mochón, 2012)

- **Cualitativo.** Si comparan las cuatro cantidades dadas, usando los términos más, menos o términos equivalentes. Como ya se mencionaba, el razonamiento proporcional aparece en etapas iniciales bajo un razonamiento cualitativo, por ello, el sujeto es capaz de distinguir en una situación de proporcionalidad cuando ésta aumenta o disminuye, pero aún no logra emplear un proceso cuantitativo.
Ejemplo: Tres aviones aterrizan cada 20 min. ¿Cuántos aviones aterrizan cada 60 min? Identifica la relación multiplicativa pero su respuesta es de tipo “más que en 20 min” o “el triple de aviones”.
- **Aditivo.** Estrategia incorrecta⁷ que hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa. Este nivel hace referencia a cuando el sujeto es capaz de emplear un procedimiento por medio de un razonamiento cuantitativo, pero emplea una relación aditiva.
Ejemplo: En la construcción de un triángulo a escala en donde uno de sus lados del triángulo original (A) mide 5 cm, el mismo lado (A') en el triángulo escala mide 10 cm, el sujeto para el siguiente lado (B) del triángulo original que mide 7cm, toma la decisión de sumar 5, en vez de considerar el factor multiplicativo de “por 2” para llegar al resultado correcto, dando por respuesta 12cm en vez de 14cm para el lado B' del triángulo a escala.
- **Pre-proporcional.** Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades. El sujeto reconoce situaciones de proporcionalidad, e identifica el uso de los factores multiplicativos, este nivel está muy cercano al razonamiento proporcional, pero aun el sujeto no logra establecer la proporción entre magnitudes, al igual que el uso de la constante, inclusive en algunos casos requiere del valor unitario.
Ejemplo: Un tren recorre 20 km en 8 min. ¿Cuánto recorre en 15, 45, 53 min? Reconoce la relación multiplicativa, e identifica que al dividir el número de kilómetros entre el número de minutos obtiene el valor unitario, el cual le ayudará a determinar el valor para cada número de minutos que le solicitan multiplicando el

⁷ Se considera incorrecta de acuerdo a la razón geométrica, puesto que esta es de tipo multiplicativa y hace referencia a cuantas veces una cantidad es otra (Block et al., 2010)

valor encontrado por las diferentes cantidades. En algunas ocasiones logran identificar que el valor que les ayuda a encontrar los resultados es la constante que rige la relación entre magnitudes

- **Proporcional.** Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia. Dentro del desarrollo del razonamiento proporcional, esta categoría es donde se puede asumir que el sujeto ya ha desarrollado un razonamiento completo, puesto que, logra identificar las situaciones proporcionales de las que no la son, identifica las relaciones internas como externas, además de desarrollar de forma correcta los procedimientos. Ejemplo: Reconoce la igualdad de dos razones (proporción) que obtienen en la correspondencia de dos triángulos semejantes, además al obtener el resultado de las razones identifica la constante que determina las medidas de sus lados restantes bajo una relación multiplicativa.

Cada una de estos niveles se hacen presentes de acuerdo con el desarrollo cognitivo de los alumnos, y no al desarrollo fisiológico (edad). Por ende, en un contexto tan diverso como el de un aula de telesecundaria unitaria, se espera observar diversas categorías de razonamiento proporcional.

A partir de estos niveles se han diseñado actividades que permiten explorar el razonamiento de los alumnos de un aula unitaria (capítulo 3), teniendo en cuenta que las características del diseño de las actividades pueden influir en las respuestas de los alumnos, el nivel no se asigna a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en la que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en uno u otro nivel, respetando que la intención no es evaluar si la respuesta es correcta o incorrecta, sino indagar qué lo llevo a esa conclusión.

Para analizar el razonamiento proporcional que tienen los alumnos a partir de los niveles mencionados, se deben de tener en cuenta tres consideraciones:

- *Presencia de uno o más tipos de razonamiento.* Es importante reconocer que las fronteras entre los niveles pueden a veces ser difusas, y que dentro de cada uno es posible hacer distinciones que podrían llevar a establecer pseudo-categorías; por ejemplo, un alumno es

capaz de identificar el valor unitario en una relación de dos magnitudes y ejecutarlo de manera aditiva para encontrar nuevos valores de la variable independiente, razonando de manera aditiva y pre-proporcional. Por tanto, el objetivo del trabajo no es solamente ubicar a los alumnos en alguno de los niveles, sino analizar las interacciones generadas desde las particularidades y características que tiene un aula unitaria, de forma que los niveles funjan como guía de análisis (en el capítulo 4 se explica esto a mayor detalle).

- *Edad.* Es probable que al hablar de razonamiento se considere una definición a partir de la progresividad de acuerdo al carácter cognitivo, pero en el razonamiento proporcional la edad no es un factor determinante para el paso de los niveles, ya que algún alumno de menor edad puede desarrollar argumentos que apunten a un nivel de mayor complejidad mientras que un alumno más grande se desarrolle desde un nivel más inicial o se aproxime de manera errónea. Justo por consideraciones como esta, la modalidad multigrado puede aportar nuevas perspectivas a los estudios sobre RP que han sido desarrollados en espacios unigrado, debido a la riqueza que se propicia gracias a la diversidad de conocimientos, aproximaciones, experiencias, etc.

- *Localidad.* Un alumno puede razonar de manera diferente de acuerdo con el tipo de problema, recurso o área implicada. El RP se reconoce como un asunto importante de la matemática escolar (Silvestre y Ponte, 2011), debido a que se hace presente en diferentes áreas de la matemática (aritmética, geometría y algebra) y tiene un amplio de campo de aplicaciones. Por ello, el que los alumnos razonen de formas diferentes de acuerdo con las condiciones que se les presenten no debe causar sorpresa, al contrario, debe ser indicador de que los alumnos pueden desarrollar y evolucionar su forma de razonar, inclusive no solo para resolver situaciones proporcionales, sino también para discriminar aquellas que no lo son.

Como se ha mencionado en alguna de las consideraciones, hacer el análisis del RP de alumnos de telesecundaria unitaria bajo los niveles propuestos por Karplus no es solamente para ubicarlos en una categoría y concluir si es bueno o no su razonamiento, la idea central del trabajo es dar un panorama de los diferentes tipos de razonamiento proporcional que se construyen en un aula multigrado, es decir, poder identificar qué implicaciones tiene el

trabajo colectivo, la diversidad de experiencias y formas de pensar en la manera de razonar antes situaciones proporcionales.

Dentro de las razones por las que se considera esta perspectiva teórica es que proporciona una descripción de las diferentes aproximaciones al RP, considerando desde los razonamientos iniciales (incompletos) hasta aquellos que resultan más completos (proporcionales). Dichas aproximaciones se hacen presentes en el currículo mexicano de educación básica (plan 2017) desde el nivel preescolar (relación de equivalencia entre monedas) hasta el final de la educación secundaria (diversos tipos de variación a partir de representaciones tabulares, gráfica y algebraica), ya que los problemas que se plantean son diferentes, al igual que las formas de resolución y los errores; por ende, considerar en este estudio los diferentes niveles otorga la posibilidad de caracterizar el razonamiento de los alumnos considerando que han tenido diferentes aproximaciones al RP y se podría esperar una diversidad de conocimientos.

Sin duda los trabajos de Karplus representa un aporte clásico en el estudio del RP y su clasificación a permitido crear nuevas clasificaciones (Butto, 2019), pero pareciese que el considerar “niveles” podría sugerir un conocimiento graduado, por lo que cada persona tendría que haber pasado por todos los niveles. Tal como se mencionaba en una de las consideraciones (presencia de uno o más tipos de razonamiento), puede darse el caso en el que un alumno recurra a más de un razonamiento, por tanto, considerando la modalidad unitaria se podría esperar la presencia de relaciones entre niveles teniendo en cuenta las interacciones entre alumnos.

Por lo mencionado, se considera que el trabajo puede aportar una nueva perspectiva a la clasificación de Karplus.

El RP busca atender situaciones de proporcionalidad y discriminar aquellas que no lo son, pero, ¿qué es la proporcionalidad? Se entiende como proporcionalidad a la relación entre dos conjuntos de cantidades, donde sus razones internas que se corresponden son iguales y la razón externa que se establece entre ambos conjuntos es constante; de forma que, cuando una de las dos propiedades enunciadas se cumple, la otra se cumple también (Block et al., 2014)

Las razones internas son entendidas como aquella razón entre dos cantidades de una misma magnitud, y para que éstas representen una situación de proporcionalidad, deben ser iguales, mientras que la razón externa es aquel valor constante que determina la relación de proporcionalidad, valor obtenido, a través del cociente entre el valor de la segunda magnitud y el valor correspondiente de la primera (proporción).

Los problemas relacionados con situaciones proporcionales se pueden clasificar de diferentes maneras, en esta ocasión se retoma la clasificación de Cano (2011), quien, a su vez, se basa en las clasificaciones realizadas por Lesh (1989) y Copeland (1984), generando las siguientes categorías:

Tabla 3. Categorías y subcategorías para clasificar problemas de proporcionalidad

Categoría	Subcategoría
Tipo de proporcionalidad	Proporcionalidad directa
	Proporcionalidad inversa
	Proporcionalidad compuesta
Procedimientos implícitos	Hallar el valor faltante
	Comparar
	Transformar
	Conversión de unidades
	Mezclas
	Tabulación
	Construcción de la gráfica
	Interpretación de la gráfica
Contexto del problema	Matemáticas
	Física
	Vida cotidiana

A partir de la clasificación de Cano (2011), para este estudio se retoman por su tipo de proporcionalidad, problemas a una proporcionalidad directa; por el tipo de procedimientos

implícitos se considera la comparación (comparar una situación inicial con una final que estructuralmente relacionen las mismas magnitudes) y la transformación (implica la transformación de una figura a otra semejante). Por último, el contexto de los problemas será del tipo matemático. Cada una de estas especificaciones podrán ser observadas en el siguiente capítulo.

En resumen, cada uno de estos aspectos teóricos corresponden a uno de los ejes centrales del trabajo, en donde a partir de las interacciones que se promueven en el aula unitaria se pretende conocer el RP con la integración de micromundos.

En el siguiente capítulo se describe la metodología que se ha planteado para llevar a cabo el objetivo propuesto para el trabajo, definiendo momentos, las características de la muestra, especificaciones respecto a los micromundos, así como una descripción amplia de las actividades.

Capítulo 3. Metodología

3.1 Tipo de investigación y alcance

El estudio es de tipo cualitativo con alcance exploratorio. El enfoque cualitativo nos permite comprender e interpretar el RP de los alumnos, identificando como indicadores las interacciones que se desarrollan durante las actividades. El alcance es exploratorio, ya que a pesar de que el RP ha sido estudiado desde una gran diversidad de aproximaciones, no hay estudios previos que aproximen dicho razonamiento a las aulas multigrado desde el empleo de micromundos, por ende, se busca aportar nuevo conocimiento sobre la presencia del fenómeno (RP) en este contexto específico (telesecundaria unitaria).

3.2 Muestra del estudio y contexto del estudio

La muestra considerada en la aplicación del primer diseño estuvo integrada por 25 participantes, ocho cursando primer grado, cinco cursando segundo y doce cursando tercer año. Debido a que en la aplicación del rediseño intervino el cambio de ciclo escolar, la muestra se vio modificada, reduciéndose a 18 participantes, cinco cursando primer grado, ocho cursando segundo y cinco cursando tercer año.

Todos los participantes son miembros de la telesecundaria unitaria no. 316 ubicada en la comunidad del “Sabino” en el municipio de Apaseo el Alto, perteneciente al estado de Guanajuato. La escuela se encuentra en un contexto rural en la calle principal de la comunidad, cercana a la primaria y al preescolar. La mayoría de los alumnos que comienzan desde preescolar continúan en la primera y en la telesecundaria de la comunidad, y los alumnos restantes se registran en las escuelas de la cabecera municipal.

De acuerdo a los comentarios de los alumnos y la docente, en los últimos años la comunidad se ha visto envuelta en situaciones de violencia, llegando a afectar las actividades de la escuela y el rendimiento de los alumnos, ya que hay en días en los que no pueden asistir a el aula.

Respecto a los recursos con los que cuenta la escuela, se dispone de una dirección, sanitarios, cancha de futbol, patio, áreas verdes y dos aulas, una funciona como salón de clases y la otra solía ser una sala de computo, pero debido al deterioro de las computadoras funciona como almacén.

Dentro del salón de clases, los alumnos cuentan con bancas suficientes, un pizarrón, estantes, pantalla plana, proyector, servicio de internet y 6 computadoras incluyendo la que usa la docente para funciones directivas. El estudio se llevó a cabo a finales del primer trimestre del ciclo escolar, esto implica que los alumnos de primer año ya se encontraban integrados a la dinámica del grupo.

Respecto a los criterios de inclusión o exclusión, se consideró la participación de todos los alumnos teniendo como única característica la pertenencia a la institución, esto debido a que al ser de organización unitaria el grupo no puede estar fragmentado ya que se rompe la cotidianidad y la modalidad de trabajo que desempeña la docente.

La muestra fue elegida de acuerdo con las características del estudio, y por conveniencia, debido a que la escuela está ubicada cerca de la ciudad de Querétaro y la disposición de la maestra responsable fue favorable permitiendo que el estudio se llevará a cabo dentro de la institución.

3.3 Consideraciones éticas

A lo largo de la investigación se han considerado las implicaciones éticas que puede llegar a tener el estudio, identificando que no existe ninguna posibilidad de dañar o afectar a los participantes, ya que se utilizaron los espacios escolares en los que se encuentran los alumnos y nos regimos por las indicaciones de la docente responsable. De la misma manera se reconocen las implicaciones que tuvo realizar este trabajo con la presencia de la contingencia que se vive actualmente (Covid-19), manteniendo así las recomendaciones otorgadas por los institutos correspondientes.

Respecto al consentimiento de los participantes, se solicitó la autorización por parte de sus padres para llevar a cabo el estudio, emitiendo su permiso por medio de la firma del

consentimiento informado (anexo 1), el cual señala el nombre de los responsables de la investigación y los fines que tiene la información recabada. Los datos obtenidos para este trabajo se registraron por medio de grabación de audio y video, y se garantiza que se resguardará la confidencialidad de los datos personales, evitando dar a conocer sus nombres completos, así como difundir las grabaciones en espacios ajenos a la investigación.

Respecto a los recursos materiales se contempló para la toma de datos el uso de computadoras provenientes de la telesecundaria en donde se realiza el estudio, así como instrumentos para registro de los datos, los cuales incluyen cámaras de video, grabadoras de audio, tripees, proyector, memorias USB y micro SD. En lo que respecta a los recursos humanos, en la primera etapa del estudio solamente participaron los alumnos y los responsables de la investigación, mientras que, en la segunda etapa, se contó con la participación de cinco observadores, los cuales participaron libremente y sin ningún interés ajeno a lo expuesto en este trabajo de investigación.

3.4 Diseño metodológico

A partir de identificar la problemática, se trazó una ruta metodológica, la cual se divide en dos grandes momentos, comenzando por la primera fase, la cual constituye la elección de micromundos, el diseño de las actividades en los softwares elegidos, la primera aplicación y el análisis de resultados. La segunda fase la constituye el rediseño de las actividades, la segunda aplicación, análisis de datos obtenidos y resultados.

3.4.1 Primera fase

3.4.1.1 Diseño de actividades

La aplicación del primer diseño tuvo como finalidad conocer a los participantes, la escuela y su organización, pero sobre todo la funcionalidad de las actividades, las cuales fueron diseñadas en Excel y GeoGebra, considerando la categorización de Karplus et al. (1983), diferentes situaciones y áreas correspondientes al RP y una serie de preguntas que ayudarán a profundizar los sus argumentos y las sus respuestas de los alumnos. Tanto Excel como

GeoGebra fueron evaluados de acuerdo con las características y propiedades que deben de cumplir para considerarse como micromundos.

3.4.1.1.1 Primer diseño en Excel

Excel es una hoja de cálculo desarrollada por Microsoft, bajo un lenguaje de programación macro llamado Visual Basic. Algunas de sus funciones son crear y manipular cálculos, gráficas, tablas calculares, bases de datos, etc. Debido a dichas funciones se seleccionó como un recurso que permite la manipulación a través de la creación de tablas, de la ejecución de fórmulas básicas (adición, sustracción, producto y cociente) y algunos otros elementos propios del lenguaje como el desplazar celdas o definir valores.

Al ser un recurso que permite diferentes manipulaciones, se consideró como un micromundo, ya que los alumnos pueden exponer hipótesis o procedimientos respecto al RP en un ambiente controlado por el diseñador, es decir, no es necesario que los alumnos indaguen directamente sobre el lenguaje de programación para establecer el tipo de construcciones que se esperan analizar, por ello se han diseñado las siguientes actividades.

3.4.1.1.1.1 Actividad 1. Exploración

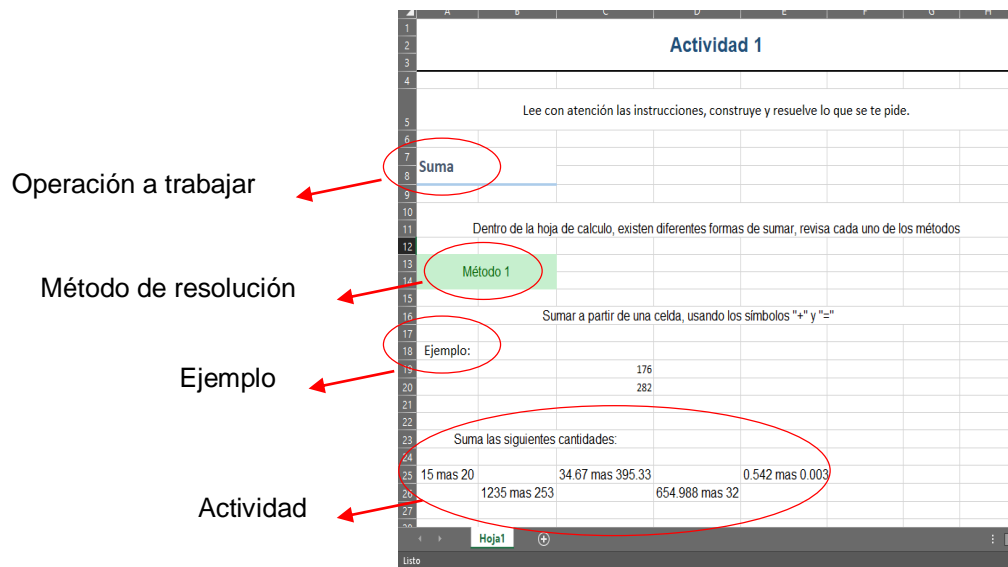
Esta actividad tenía la intención de que los alumnos tuvieran un primer acercamiento con el software, identificando funciones básicas del recurso y herramientas necesarias para la manipulación; por ello, el diseño estuvo integrado con actividades donde se desarrollaban las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), los diferentes métodos por los cuales pueden ser desarrolladas, un ejemplo y una actividad de práctica. Se consideró indispensable que los alumnos conocieran el procedimiento de las operaciones básicas usando las herramientas de Excel debido a que los problemas para identificar el RP lo requerían.

Como se muestra en la figura 5, se identificaba inicialmente la operación, posterior a ello un método de resolución, los cuales están dados por las variables que ofrece Excel, tales como el uso de símbolos (ej. =, +) o la implementación de fórmulas (=suma). El ejemplo que se muestra en la figura 5 fue desarrollado por el aplicador en conjunto con los participantes para

que identifiquen la serie de pasos necesarios para resolverlos. Por último, la actividad de práctica fue resuelta por los participantes de manera autónoma.

Figura 5.

Ejemplo de la actividad de exploración de herramientas y funcionamiento en Excel



Adicionalmente a las operaciones básicas, la primera actividad contempló una función propia de Excel denominada “definir valor”, lo cual permite a los participantes asignar un nombre específico a un valor que puede ser utilizado en varias ocasiones. La razón de considerar la función “definir valor” es porque guarda relación con la identificación de una constante, situación que será explicada más adelante.

Esta primera actividad tuvo como objetivo que los alumnos adquieran un dominio que les permita desarrollar los problemas siguientes, y una familiarización con el lenguaje propio de Excel.

3.4.1.1.1.2 Actividad 2. Problemas que implican RP

La actividad 2 consistía en tres problemas: uno de valor faltante, uno sobre la diferencia entre una relación proporcional y una no proporcional y uno de proporcionalidad inversa. Visualizando estos problemas desde su diseño en Excel, cumplen con la función de

evidenciar los niveles incompleto, cualitativo y aditivo, pero no se descarta que los alumnos puedan demostrar un nivel pre-proporcional o proporcional.

Como se muestra en la figura 6, cada uno de los problemas se identificaron con un número, posterior a esto se presentaba el enunciado del problema y en algunos casos se colocaban tablas prediseñadas o en desarrollo; por último, se integraba una serie de preguntas de análisis orientadas a la identificación de elementos como: el valor unitario, la constante de proporcionalidad y la identificación de cuándo una situación no es proporcional, esto dependiendo del problema.

Figura 6.

Ejemplo de los problemas diseñados en Excel

Número de problema

Problema

Preguntas de indagación

No. de pares zapatos	Ganancias	No. de pares tenis	Ganancias
20	\$5.000	20	\$5.000
35	\$8.750	30	\$6.000
70	\$17.500	40	\$7.000
90	\$22.500	50	\$8.000

En resumen, en el anexo 2 se pueden observar las consideraciones (problema, tipo de problema y nivel de razonamiento que se relaciona directamente) que tienen los problemas presentados en la actividad dos.

3.4.1.1.2 Primer diseño en GeoGebra

GeoGebra es un software dinámico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos, debido a que permite el uso de recursos aritméticos,

geométricos y algebraicos, en un ambiente de libre manipulación para diseñar o resolver diferentes situaciones que por su nivel de abstracción son difíciles de realizar en papel.

Este software suele ser uno de los ejemplos más claros de un micromundo matemático debido a que su manipulación permite crear situaciones en donde los sujetos pueden probar hipótesis o procedimientos, identificando elementos desde diferentes áreas matemáticas, inclusive, las herramientas con las que cuenta permite ver modelos en movimiento y analizar diferentes versiones de una sola representación (Barros y Stivam, 2012).

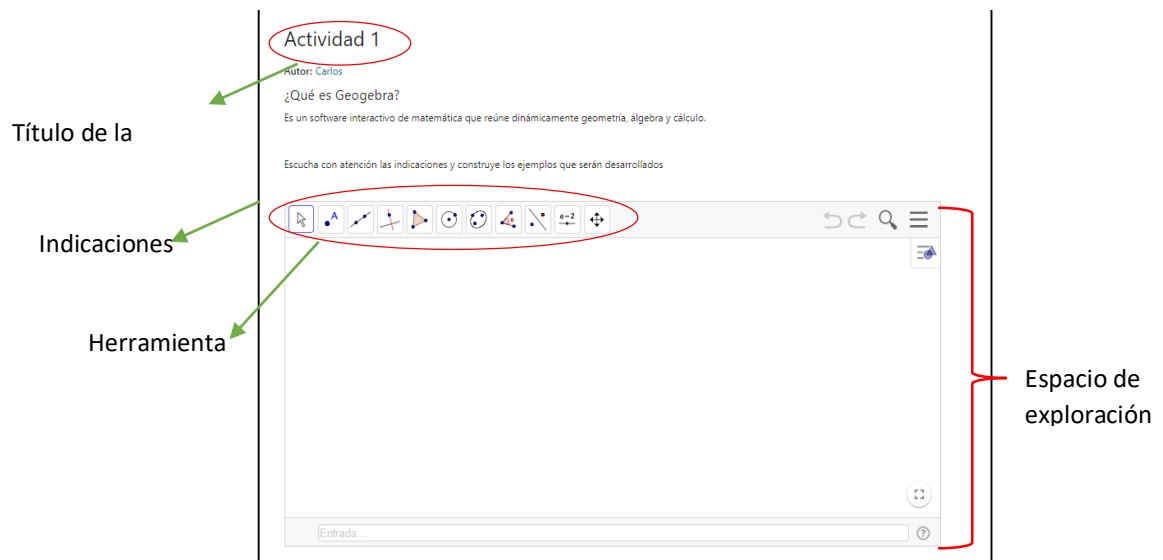
GeoGebra permite analizar el RP en otro tipo de situaciones, específicamente en el ámbito geométrico, por lo cual, se consideró al igual que Excel dos actividades, la primera es exploratoria y la segunda presenta tres problemas diferentes: construcción de un triángulo a partir de otro por medio de una constante, la identificación de la relación proporcional directa de dos triángulos a partir del teorema de Tales y el diseño de dos triángulos a escala.

3.4.1.1.2.1 Actividad 1. Exploración

GeoGebra dispone de diferentes calculadoras, pero en esta ocasión solamente se hizo uso de la geométrica. Por medio de las herramientas que muestra dicha calculadora, los alumnos llevaron a cabo inicialmente una exploración libre para conocer las herramientas, el lenguaje y las acciones que se pueden realizar; después dentro del mismo espacio, se analizaron las herramientas necesarias para la segunda actividad y se resolvieron dudas respecto al funcionamiento del software. La actividad fue presentada a los alumnos como se muestra en la figura 7.

Figura 7.

Actividad de exploración en GeoGebra



El propósito de la primera actividad con GeoGebra, fue que los alumnos identificaran aquellos elementos (herramientas, menús y conceptos) que permiten unas interacciones en GeoGebra, perfilando especialmente las herramientas que están integradas en la actividad dos.

3.4.1.1.2.2 Actividad 2. Problemas que implican RP

De acuerdo con las herramientas que provee GeoGebra, se consideraron situaciones geométricas que implican un RP, teniendo la opción de manipular construcciones en las cuales se pueden desplazar los objetos e identificar cómo se conserva la proporcionalidad. El primer problema corresponde a la construcción de un triángulo a partir de otro por medio de una constante o una razón, mientras que la segunda actividad aborda el teorema de Tales, y por último una situación de escala, en donde los triángulos no son proporcionales. Desde la categorización del RP, se consideró el primer problema para analizar los niveles aditivo y pre-proporcional, el segundo para identificar un nivel pre-proporcional y proporcional, y en el último el nivel proporcional.

Como se observa en la figura 8, se proporciona a los alumnos el enunciado del problema y una zona de exploración, este espacio tiene la intención de ser manipulable para los alumnos,

de forma que puedan ver todas las posibilidades al modificar el triángulo, sus puntos, ángulos, etc. Al igual que en Excel, se plantea una serie de preguntas (figura 9) con el fin de indagar sobre sus procedimientos y discusiones generadas a partir de la actividad, logrando identificar el nivel proporcional en el que se encuentran.

Figura 8.

Ejemplo de actividad 2 GeoGebra

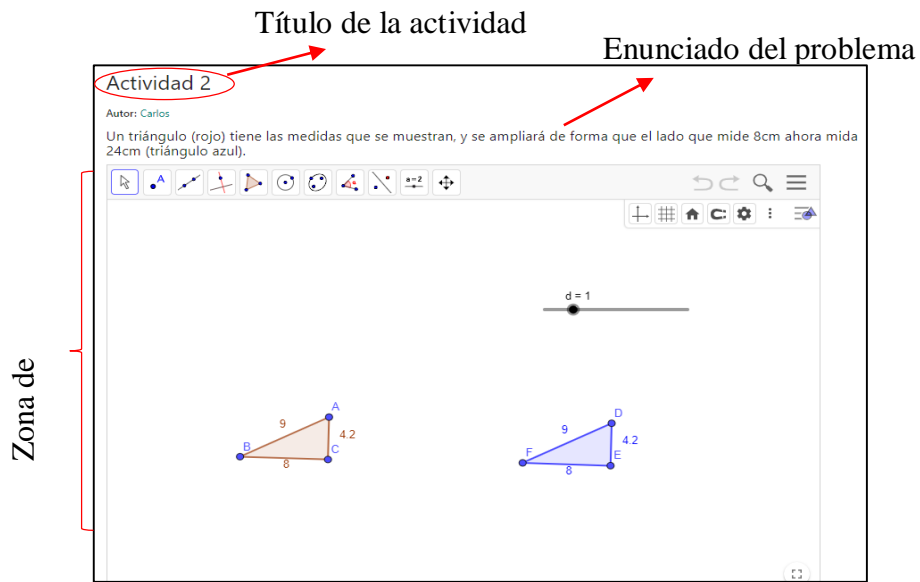


Figura 9.

Ejemplo de preguntas de análisis actividad 2 GeoGebra

¿Cuál es la medida de los lados DE y DF ?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

¿Cuál es el valor del deslizador cuando el lado FE vale 24?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

¿Qué sucede con las medidas del triángulo azul cuando el deslizador vale 2, 4 y 5?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

¿Qué relación hay entre el valor del deslizador y la longitud de los lados del triángulo azul?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

Arrastra los puntos del triángulo rojo en la dirección que desees sin modificar el valor del deslizador, ¿Qué relación hay entre la longitud de los lados de ambos triángulos?

Aa π Ingresar aquí tu respuesta...

Preguntas de análisis

En resumen, las consideraciones (problema, tipo de problema y nivel de razonamiento relacionado) de los problemas presentados en la actividad dos, se pueden observar en el anexo 3.

3.4.1.2 Aplicación del primer diseño

La primera aplicación se llevó a cabo en dos sesiones de aproximadamente tres horas cada una en diferente día, los participantes estuvieron integrados en cinco equipos con cuatro o cinco participantes (dependió de la asistencia de los alumnos a la escuela), cada equipo dispuso de una computadora para las actividades, al igual que un dispositivo de registro, de forma que la organización quedó distribuida como se muestra en el anexo 4.

La labor del aplicador fue leer las instrucciones y desarrollar los ejemplos necesarios en una computadora central conectada a un proyector para que estuviera a la vista de todos los participantes.

3.4.1.3 Análisis de la aplicación del primer diseño

El primer diseño tenía la intención de adentrarnos en el aula de la telesecundaria unitaria y poder conocer su forma de trabajo y organización, al mismo tiempo que visualizar la funcionalidad de las actividades, así como identificar a grandes rasgos las interacciones de los alumnos respecto a los niveles de RP.

A partir de los datos obtenidos en la aplicación del primer diseño, se tomó la decisión que no podían ser considerados como definitivos debido a diversas situaciones, la primera de ellas es que las actividades fueron diseñadas bajo el esquema pregunta-respuesta, lo cual rompió con la exploración de los alumnos, ya que su atención se centró más en responder las preguntas que en explorar la situación que se presenta en los diferentes momentos, por ejemplo, en la figura 10:

Figura 10.

Ejemplo de respuesta en la segunda actividad de GeoGebra

2. ¿Hay alguna relación entre los valores obtenidos de las divisiones?

A	Si
f_x	

Las respuestas que generó este tipo de preguntas no brindó evidencia suficiente que permitiera visualizar qué tipo de razonamiento llevaron a cabo para determinar si había un tipo de relación, además no se expresa qué tipo de relación es la que observan. Por respuestas de este tipo es que se ha considerado modificar el diseño dando prioridad a la exploración y que sus procedimientos y razonamientos puedan ser explicados de forma verbal a partir de las intervenciones del aplicador.

Otra de las razones por las que se consideró modificar el diseño fue que en algunas actividades se mostró mayor dificultad por la manipulación del micromundo que por la actividad matemática, es decir, se necesitaba mayor conocimiento sobre el software para llevar a cabo las actividades, dejando la actividad matemática de lado, situación que llevó a obtener respuestas del siguiente tipo:

Figura 11.

Respuestas a la situación 3 de la actividad 2 de GeoGebra que demuestra respuestas impresas por la dificultad del uso del software

4. Ubica los deslizadores en $a_1 = 2$, $b_1 = 4$, $c_1 = 3$, ¿El triángulo naranja sigue conservando la misma forma que el triángulo azul?

A	Si, alrrevez
f_x	

5. De acuerdo a la relación ente las longitudes de ambos triángulos, ¿se podría decir que: $\frac{d}{c}$, $\frac{e}{a}$ y $\frac{f}{b}$ son iguales entre sí? ¿Por qué?

A	si por que son los mismos resultados
f_x	

La figura 11 expone las respuestas del equipo 2 a la situación 3 de GeoGebra, en la cual se tenían que hacer exploraciones geométricas y desarrollar las operaciones necesarias en la hoja de cálculo del mismo software, lo cual implicaba un conocimiento basto en GeoGebra y al no contar con ese conocimiento y no dejar espacios vacíos, los participantes optaron por dar respuestas que no reflejaban la actividad matemática necesaria.

En términos teóricos se tomó la decisión de solo continuar con las actividades de GeoGebra y desechar las elaboradas en Excel, debido a que no se observa ningún símbolo de representación disponible del proceso por el cual se llega a la construcción final (Hoyles y Noss 1987), es decir se ingresa la fórmula y se obtiene el resultado, pero no es visible para los participantes el algoritmo que establecer para llegar a ese resultado, lo cual puede llegar a ser confuso para los alumnos.

3.4.2 Segunda fase

A partir de los argumentos expuestos en el apartado anterior, se consideró que el rediseño de las actividades en GeoGebra deben de:

- Ser accesibles en diseño y retadoras en actividad matemática
- Diseño basado en objetivos (espacio de exploración y justificación de procedimientos de manera verbal guiada por las intervenciones del investigador)
- Considerar una progresión en las actividades (comenzando por una exploración hasta llegar a una actividad de mayor actividad cognitiva en cuanto a la relación RP-micromundo)

Por las propiedades de GeoGebra, las actividades propuestas para el diseño se centran en el concepto de variación geométrica, por tanto, las actividades que se presentaran a continuación sólo se enfocan en la relación proporcional directa de acuerdo al ámbito geométrico, al igual que el análisis de los resultados obtenidos en el siguiente capítulo.

3.4.2.1 Rediseño de actividades

Para el rediseño de las actividades, se tomó la decisión de trabajar sólo con GeoGebra como micromundo de exploración, estableciendo cinco actividades⁸: exploración, dos actividades de análisis (relación entre segmentos por un deslizador y relación entre triángulos semejantes) y dos actividades de construcción (Construcción de dos segmentos bajo una razón dada y construcción de un mosaico con un factor escala).

Al igual que en el primer diseño, se consideró la categorización de Karplus et al. (1983) y la teoría de los micromundos para el rediseño, considerando que GeoGebra permite al alumno desarrollar cosas de su interés, con conocimientos matemáticos previos y que durante la construcción irán madurando a través del descubrimiento (Barros y Stivam, 2012).

En esta ocasión más allá de establecer actividades relacionadas de manera directa con un nivel específico, se optó por dar mayor libertad en la exploración, por lo cual, las actividades se relacionaron con el RP en general, favoreciendo la exploración de los participantes para que se diera en mayor libertad y que las intervenciones del aplicador no orientaran hacia un nivel específico.

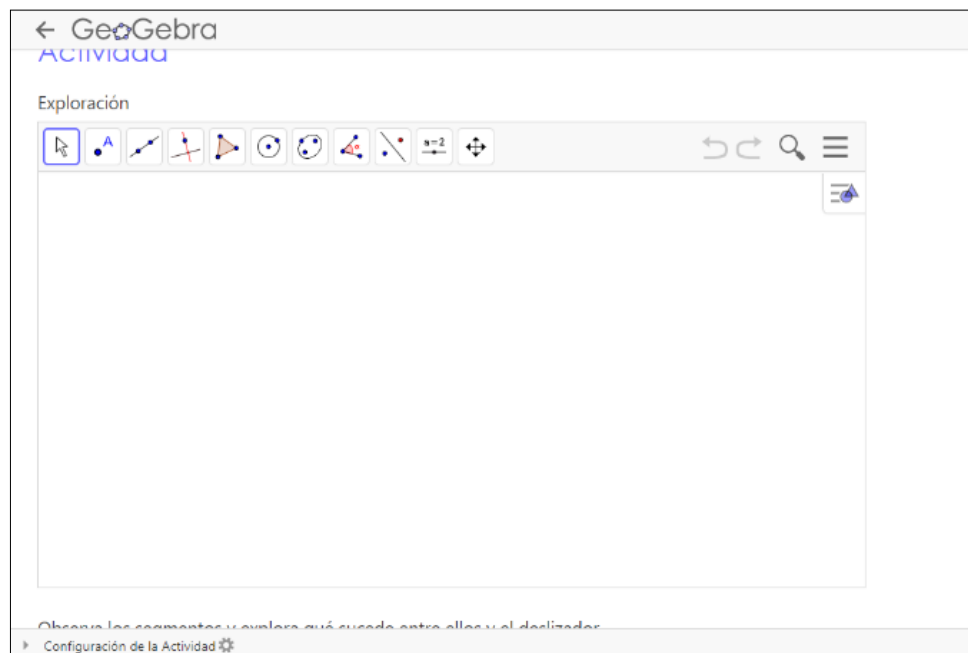
3.4.2.1.1 Actividad 1. Exploración

Al igual que en el primer diseño la primera actividad fue un espacio de exploración libre (figura 12), debido a que tal como se indicó en la descripción de la muestra, el cambio de ciclo escolar provocó que cambiará el número de participantes, pasando de 25 a 18, integrándose cinco alumnos correspondientes al primer grado, por tanto, se consideró necesario incluir nuevamente un espacio en donde conocieran las herramientas, su funcionamiento y las acciones que se pueden ejecutar de acuerdo a la calculadora geométrica.

⁸Las actividades se encuentran disponibles en <https://www.geogebra.org/m/vk9aaenv> para su consulta

Figura 12.

Actividad 1. Exploración (rediseño)

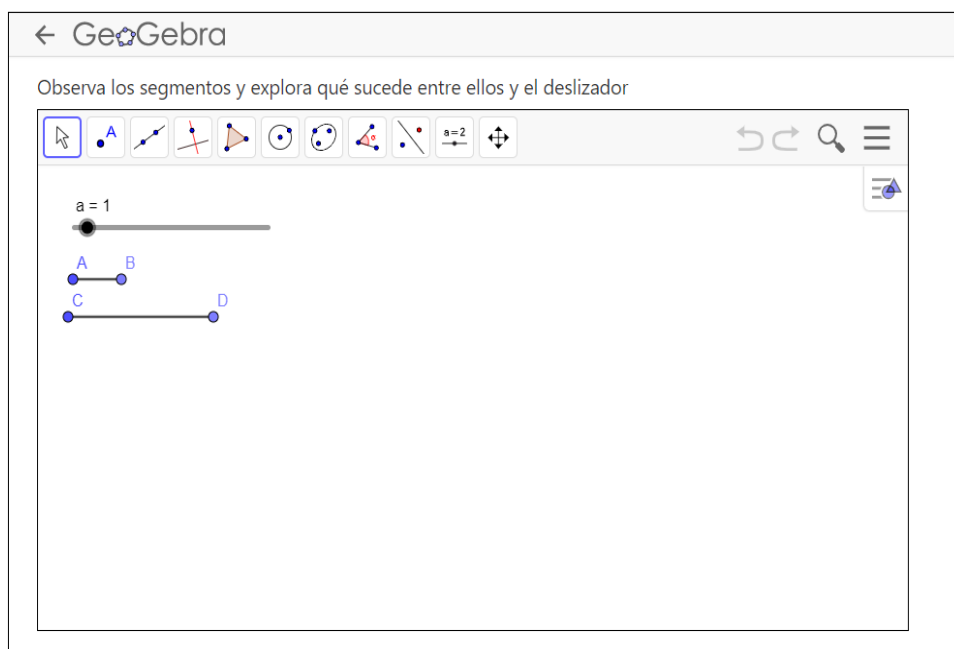


3.4.2.1.2 Actividad 2. Relación entre segmentos por un deslizador

Una de las herramientas básicas en GeoGebra que se utilizó desde el primer diseño fue el deslizador, debido a que ayuda a explorar una relación en movimiento constante. Por medio de la manipulación del deslizador un segmento crece con los mismos valores, mientras que otro crece en una relación de 3:1 (figura 13); el objetivo era que los participantes identificaran qué tipo de relación existe entre los segmentos y qué papel juega el deslizador en términos matemáticos.

Figura 13.

Actividad 2. Relación entre segmentos por un deslizador (rediseño)

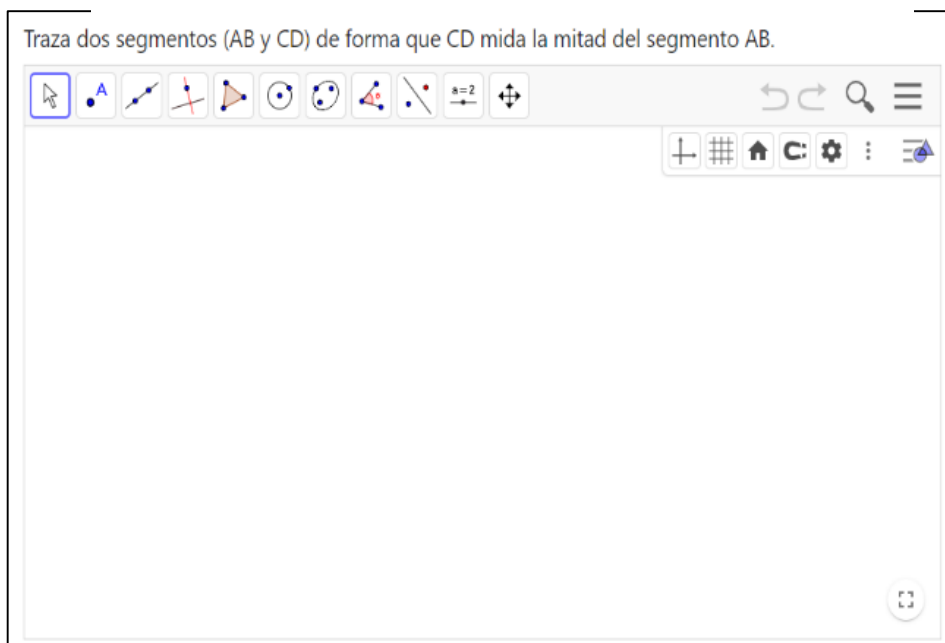


3.4.2.1.3 Actividad 3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada

El diseño de esta actividad es continuación de la actividad dos, debido a que después de identificar la relación entre los segmentos de acuerdo al deslizador (independientemente del nivel reflejado), se consideró que en esta actividad los participantes pudieran establecer la relación creando un deslizador de acuerdo a la razón de 0.5:1 (figura 14), explorando la función del deslizador en términos matemáticos, que en el mejor de los casos (nivel proporcional) pudieran reconocerlo como la constante de proporcionalidad.

Figura 14.

Actividad 3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada (rediseño)



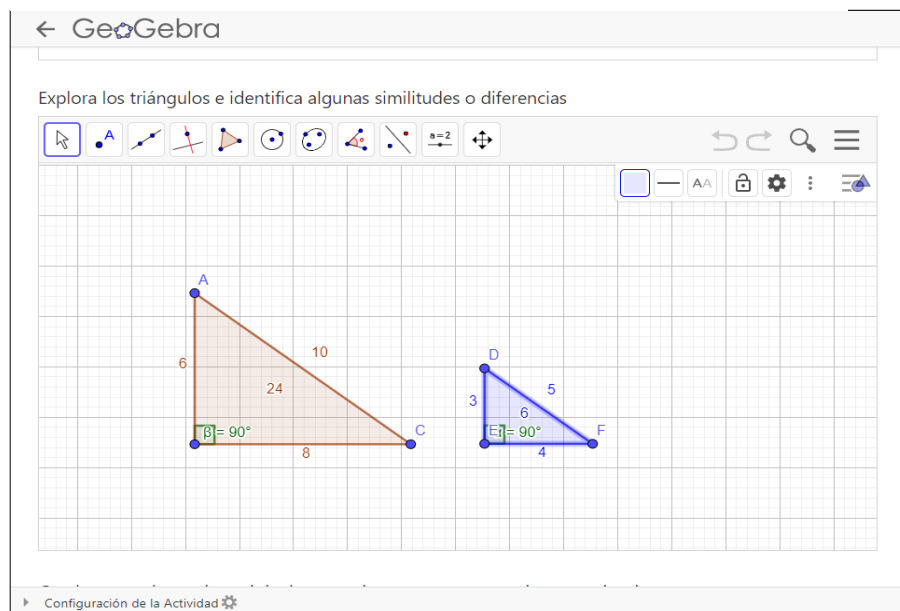
3.4.2.1.4 Actividad 4. Relación entre triángulos semejantes

En la actividad se presenta la relación entre dos triángulos rectángulos, los cuales estaban diseñados bajo una razón de 2:1, como primera parte de la actividad los participantes debían explorar si había una la relación entre los triángulos (figura 15).

Para la segunda parte y considerando una de las bases del RP (discriminar situaciones proporcionales de las que no lo son), se solicitó a los alumnos que modificaran el triángulo azul (figura 15), de forma que su área fuera la mitad de la del rojo. La intención de la segunda parte es que los alumnos identificaran que existen diferentes formas de conseguir que el triángulo azul tuviera la mitad del área, pero que a su vez no se cumplen los criterios de semejanza (A-A, L-A-L y la medida de uno de los catetos y las hipotenusas son proporcionales), por lo que no se podía establecer una relación proporcional.

Figura 15.

Actividad 4. Relación entre triángulos semejantes (rediseño)



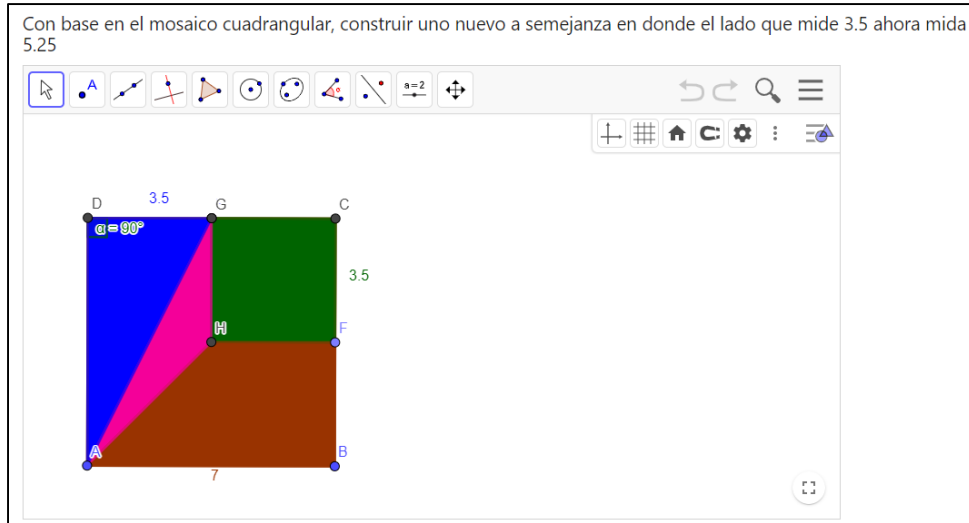
3.4.2.1.5 Actividad 5. Construcción de un mosaico con un factor escala

Como actividad final se planteó la construcción de un mosaico con un factor escala de 1.5:1 de acuerdo a una construcción original. A diferencia de las actividades anteriores los participantes debían explorar cuál es la razón que modela la proporcionalidad entre ambos mosaicos, para ello sólo contaban con dos medidas correspondientes (figura 16). Al final, el mosaico construido debía guardar semejanza con el original de acuerdo a las nuevas medidas calculadas.

Se considera que es la actividad con mayor actividad matemática debido a que en la razón uno de los factores no es un número entero, además de que implicaba realizar varios cálculos en todas las figuras. Por otro lado, también implica mayor conocimiento del micromundo, ya que se requiere el uso de varias herramientas como segmento de longitud dada, polígono, polígono regular, función de “valor”, etc.

Figura 16.

Actividad 5. Construcción de un mosaico con un factor escala (rediseño)



3.4.2.2 Aplicación del rediseño

La aplicación del rediseño se llevó a cabo en dos sesiones, las cuales fueron más cortas que en la primera aplicación, considerando dos horas para cada una en diferente día, los participantes estuvieron integrados en cuatro equipos con cuatro o cinco participantes (dependió de la asistencia de los alumnos a la escuela), cada equipo dispuso de una computadora para las actividades, al igual que un dispositivo de registro, los equipos fueron estructurados como se muestra en la tabla 3.

Tabla 4. Estructura de la aplicación

No. de equipo	Participantes			Instrumento para toma de datos	
	Grado escolar			Sesión 1	Sesión 2
	Primero	Segundo	Tercero		
1	1	2	2	Audio	Video
2	1	2	1	Video	Audio
3	2	2	1	Audio	Video
4	1	2	1	Video	Audio

A diferencia de la aplicación del primer diseño se contó con la participación de varios observadores, los cuales participaron libremente y sin recibir ningún estímulo monetario o de algún otro tipo. Su principal función fue registrar aquellos elementos observables y audibles referentes a las actividades en términos de RP, relación entre pares y relación con el micromundo, que por las condiciones del salón de clase no podían ser capturados por los dispositivos de registro. Previamente a la aplicación se consideró una reunión de preparación en la cual se expusieron las actividades a realizar por parte de los participantes, se compartieron elementos rescatados de la aplicación de la primera versión de las actividades con el objetivo de “entrenar el ojo” de los observadores y tuvieran mayor claridad respecto a los registros que debían hacer.

Los criterios que se consideraron para los observadores es que fueran estudiantes de la misma maestría para la que se desarrolla esta investigación, nociones básicas de proporcionalidad, conocer a grandes rasgos la teoría de los micromundos y tener interés en aportar a el área de conocimiento de la educación multigrado.

A continuación, en la tabla 4 y 5, se muestra la organización para la aplicación del rediseño, del cual se obtuvieron los datos finales de este estudio

Tabla 5. Estructura de la sesión 1 de la aplicación del rediseño

Estructura sesión 1				
Actividad	Objetivo	Indicación	Posibles intervenciones por parte del aplicador	Tiempo
Instalación y preparación		Descripción		20min
	Organización del lugar de la aplicación: sillas/mesas para 4 equipos, una laptop de trabajo por equipo, colocación de instrumentos para recabar información (cámaras de video y grabadoras de audio), destinar un observador para cada equipo y colocar gafetes para los participantes con nombre y grado.			
Presentación	Presentación del aplicador y del equipo de trabajo (observadores) e indicaciones generales.			10min
Actividad 1. Exploración	Identificar las diferentes herramientas y funciones que provee GeoGebra por medio de una exploración libre en los equipos de trabajo para que los alumnos se familiaricen con el software prestando mayor atención a aquellas herramientas que serán necesarias para las demás actividades.	Al comienzo de la página que abrieron hay un espacio que dice “exploración”, entonces ahorita ustedes van a tener 20 minutos para explorar de manera libre lo que se puede hacer en GeoGebra, identifiquen las diferentes herramientas, tracen lo que ustedes gusten, el objetivo es que vayan viendo cómo funciona.	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué herramientas fueron revisadas? • ¿Existen dudas respecto a una herramienta en específico? (haciendo énfasis en las herramientas necesarias para las demás actividades, tales como: segmento, segmento de longitud dada, polígono, polígono regular, ángulo y deslizador) 	20min

<p>Actividad 2. Relación entre segmentos por un deslizador</p>	<p>Conocer la forma en la que los alumnos interpretan la relación entre dos segmentos a través del uso de un deslizador.</p>	<p>En el siguiente espacio hay dos segmentos y un deslizador, la intención de esta actividad es que ustedes revisen si hay una relación entre los segmentos, si la hay, qué tipo de relación e igual identificar qué función tiene ahí el deslizador, tendrán 15 minutos para revisarlo</p>	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué sucede cuando se mueve el deslizador? • ¿Se conserva la relación entre los segmentos? • ¿Qué tipo de relación hay entre los segmentos? • ¿En algún punto tendrán el mismo tamaño los segmentos? ¿por qué? • ¿Qué valor tendrán los segmentos si el deslizador valiera 20? 	<p>20min</p>
<p>Actividad 3.⁹ Construcción de dos segmentos bajo una razón dada</p>	<p>Establecer una relación entre dos segmentos a partir de una constante con el uso de un deslizador o algún otro procedimiento establecido por los alumnos.</p>	<p>En la actividad anterior se observó una relación entre dos segmentos, ahora ustedes deben de trazar dos segmentos de forma que uno de ellos tenga la mitad del valor del otro sin importar su medida, pueden apoyarse de las herramientas que hemos revisado</p>	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es el procedimiento que has seguido? • ¿Es necesario que el segmento A tenga un valor específico? • ¿Se modifica la relación entre segmentos cuando se cambia el valor de A? • ¿Qué papel juega el deslizador entre la relación de los segmentos? • De acuerdo al segmento A construye un segmento C que valga el doble, ¿el procedimiento es el mismo? 	<p>40min</p>

⁹ La actividad no se concluyó en el primer día, por lo que se otorgó 20min más al día siguiente

Tabla 6. Estructura de la sesión 2 del rediseño

Estructura sesión 2				
Actividad	Objetivo	Indicación	Posibles intervenciones por parte del aplicador	Tiempo
Instalación y preparación		Descripción		20min
	Organización del lugar de la aplicación: sillas/mesas para 4 equipos, una laptop de trabajo por equipo, colocación de instrumentos para recabar información (cámaras de video y grabadoras de audio), destinar un observador para cada equipo y colocar gafetes para los participantes con nombre y grado.			
Actividad 4. Relación entre triángulos semejantes	Identificar la manera en que los alumnos comprenden la relación entre dos triángulos a partir de las longitudes de sus lados y su área.	En la siguiente actividad hay dos triángulos, a partir de las medidas y las características que tienen hay que revisar si se parecen en algo o si son diferentes, rescaten todo aquello que puedan ver respecto a los dos triángulos y después lo comentaremos. Ind-2: Ya que revisamos qué relación hay entre los triángulos y ver que en su área no hay relación, ahora manipulen el triángulo rojo de forma que su área sea la mitad de la del triángulo azul, siempre y cuando no se pierda la forma original.	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Existe alguna relación entre los dos triángulos? ¿de qué tipo? ¿En qué se parecen? • ¿Cuál es la relación entre los lados de los dos triángulos? • ¿Existe alguna relación entre sus áreas? • Manipula el triángulo rojo de forma que su área sea la mitad de la del triángulo azul sin perder la forma original • ¿Qué pasa si el área es la mitad? ¿Qué sucede con los lados? ¿Se conserva la misma relación? ¿Los tres lados conservan la misma relación? 	30min
	Conocer la forma en la	En el siguiente espacio hay dos segmentos y un deslizador, la intención de esta actividad	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué sucede cuando se mueve el deslizador? 	

	que los alumnos interpretan la relación entre dos segmentos a través del uso de un deslizador.	es que ustedes revisen si hay una relación entre los segmentos, si la hay, qué tipo de relación e igual identificar qué función tiene ahí el deslizador, tendrán 15 minutos para revisarlo	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Se conserva la relación entre los segmentos? • ¿Qué tipo de relación hay entre los segmentos? • ¿En algún punto tendrán el mismo tamaño los segmentos? ¿por qué? • ¿Qué valor tendrán los segmentos si el deslizador valiera 20? 	
Actividad 5. Construcción de un mosaico con un factor escala	Conocer el tipo de relación que establecen los alumnos entre el mosaico original y el solicitado a escala a partir de las diferentes herramientas involucradas en el trazo de polígonos.	Como se puede observar tenemos un pequeño mosaico en la parte de la actividad, y lo que se tiene que hacer es uno nuevo, para hacerlo solamente tenemos como referencia la nueva medida de uno de los lados del triángulo azul, entonces con esa información busquen la forma de hacer un nuevo mosaico.	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Se pudo calcular el valor de las medidas del nuevo mosaico conociendo solamente la relación entre las dos medidas otorgadas? • ¿Se conservó el diseño original? ¿Por qué? ¿de qué forma se pueden encontrar los demás valores? • ¿Hay algún valor que funcione para calcular todos los valores? • ¿Es importante comenzar por alguna figura en específico? ¿por qué? • Si quisiera realizar un mosaico en donde el lado que vale 3.5 ahora valga 1.75, ¿en qué cambiaría ahora el procedimiento? 	40min

A lo largo del capítulo se ha narrado la metodología que se ha seguido para este trabajo, identificando dos momentos: diseño y rediseño. El diseño tenía el objetivo de conocer la muestra, evaluar las actividades y tomar decisiones para un rediseño, el cual consistió en cinco actividades orientadas hacia la exploración y el reconocimiento del RP de los participantes, identificando aquellas interacciones que se daban entre alumnos en relación con el micromundo. La aplicación de las actividades se llevó a cabo en dos sesiones, en las cuales se contó con el apoyo de observadores y recursos de registro para la toma de datos.

En el siguiente capítulo se definen las categorías de análisis y los resultados obtenidos a partir de los datos recabados en las actividades diseñadas.

Capítulo 4. Análisis y resultados

4.1 Categorías de análisis

Como se ha mencionado que el objetivo central de este proyecto es caracterizar el RP de los alumnos de telesecundaria unitaria a partir de la integración de un micromundo; para ello, es necesario consolidar una unidad de análisis y las categorías observables a partir del tratamiento de los datos.

Como unidad de análisis se consideran las interacciones entre los participantes con el micromundo, las cuales tienen ciertas características dependiendo de los integrantes y su forma de participación en el grupo. Con esto se pretende evidenciar el RP de los participantes de acuerdo con su participación, tanto al interior de los equipos como en todo el grupo unitario.

Las categorías de análisis se centran en tres elementos esenciales: los niveles de RP, los componentes de un micromundo (ambos descritos en el marco teórico) y las interacciones entre los participantes.

La presentación de resultados estará dada de acuerdo al RP, comenzando por el nivel incompleto hasta la consideración de dos categorías que surgieron en el análisis de los datos, en cada una de estas se describe el contexto en el que se presentan las interacciones y se identifica qué componente o componentes del micromundo potenciaron el razonamiento de los participantes.

4.1.1 Razonamiento proporcional

Para clasificar el RP de los participantes se utilizarán los niveles propuestos por Karplus (1983), los cuales han sido descritos en el marco teórico, por lo cual, solamente se integra una breve descripción en este apartado (tabla 6), añadiendo dos categorías más: relación entre niveles de RP y evolución de RP.

Tabla 7. Descripción de niveles de RP

Nivel	Descripción
Incompleto	Ignora parte de los datos o da una respuesta ilógica
Cualitativo	Toma en cuenta todos los datos, pero solo con consideraciones cualitativas
Aditivo	Estrategia incorrecta que hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa.
Pre-proporcional	Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades.
Proporcional	Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia.

Nota: Tomado de Karplus et al., 1983

La caracterización de los niveles son el resultado de análisis de los datos, en términos de las construcciones y razonamientos de los participantes, recordando que para la aplicación de las actividades se respetó la organización multigrado, por lo que se presentaron diferentes niveles para una misma actividad.

4.1.2 Relación entre niveles

Dentro del tratamiento de los datos se identificó que los niveles no son mutuamente excluyentes en todos los casos, sino que hay razonamientos que pertenecen a diferentes niveles pero que se integran en torno a un mismo argumento o procedimiento realizado por los participantes; si bien en el referente teórico de los niveles de RP no se expresa una relación de este tipo, se considera pertinente agregar esta categoría, sobre todo porque el análisis no es individual (por participante) sino colectivo, por lo que determinar que todos los alumnos se encuentran en un mismo nivel a partir de una situación restaría importancia a algunas

construcciones en colectivo, sobre todo, recordando que los alumnos pertenecen a una telesecundaria unitaria.

A partir del párrafo anterior se puede entender la relación entre niveles como la integración de diferentes razonamientos en torno a una misma situación. Las relaciones que se identificaron fueron: incompleto-aditivo, cualitativo-aditivo-pre-proporcional, incompleto-pre-proporcional y pre-proporcional-proporcional.

4.1.3 Evolución de razonamiento proporcional

Si bien este estudio no tiene un enfoque didáctico, esta categoría presenta hallazgos de aprendizajes, debido a que, además de identificar relaciones entre niveles, integra una diversidad de razonamientos que evidencia una evolución, es decir, hay un razonamiento de partida y es diferente con el que se concluye. Esta categoría puede entenderse como el paso de un nivel a otro, el cual pudo darse por las interacciones entre los participantes, como respuesta a la interacción en el micromundo, a partir de las intervenciones por parte del aplicador o la activación de saberes previos de los participantes.

En términos generales, esta categoría es la más compleja debido a que integra elementos propios de la escuela unitaria como la diversidad de experiencias o saberes, así como el desarrollo de los componentes de un micromundo, sin dejar de lado la potencialidad de las actividades para desarrollar diferentes razonamientos, evidenciando así nuevamente que los niveles no están determinados por elementos como la edad, el grado escolar o el tipo de tarea a resolver, sino que es un fenómeno multifacético.

Las evoluciones que se han identificado son:

- incompleto → pre-proporcional
- cualitativo → pre-proporcional
- pre-proporcional → proporcional.

Cada una de las evoluciones será expuesta más adelante.

4.1.4 Componentes de un micromundo

Es importante reiterar que una de partes centrales de este trabajo fue el diseño de las actividades en el micromundo, el cual, integra diferentes componentes propuestos por Hoyles y Noss (1987) y que ya han sido definidos en el marco teórico, por lo cual, para fines prácticos se presenta la tabla 7, donde se reinterpretan los componentes de acuerdo a los fines de este trabajo

Tabla 8. Descripción de los componentes de un micromundo

Componente estudiantil	Saberes previos con los que cuenta el alumno y pone en práctica dentro de la situación
Componente técnico	Software o lenguaje de programación, que provee un sistema de representaciones para poner en práctica un razonamiento matemático
Componente pedagógico	Estructura de la exploración de los conceptos integrados en el componente técnico (actividades, objetivos, indicaciones, intervenciones por parte del aplicado y modalidad multigrado)
Componente contextual	Entorno social de las actividades (aula multigrado; análisis de interacciones)

Nota: Adecuación a la propuesta de Hoyles y Noss (1987)

Respecto al análisis de los componentes, hay varios elementos que aclarar:

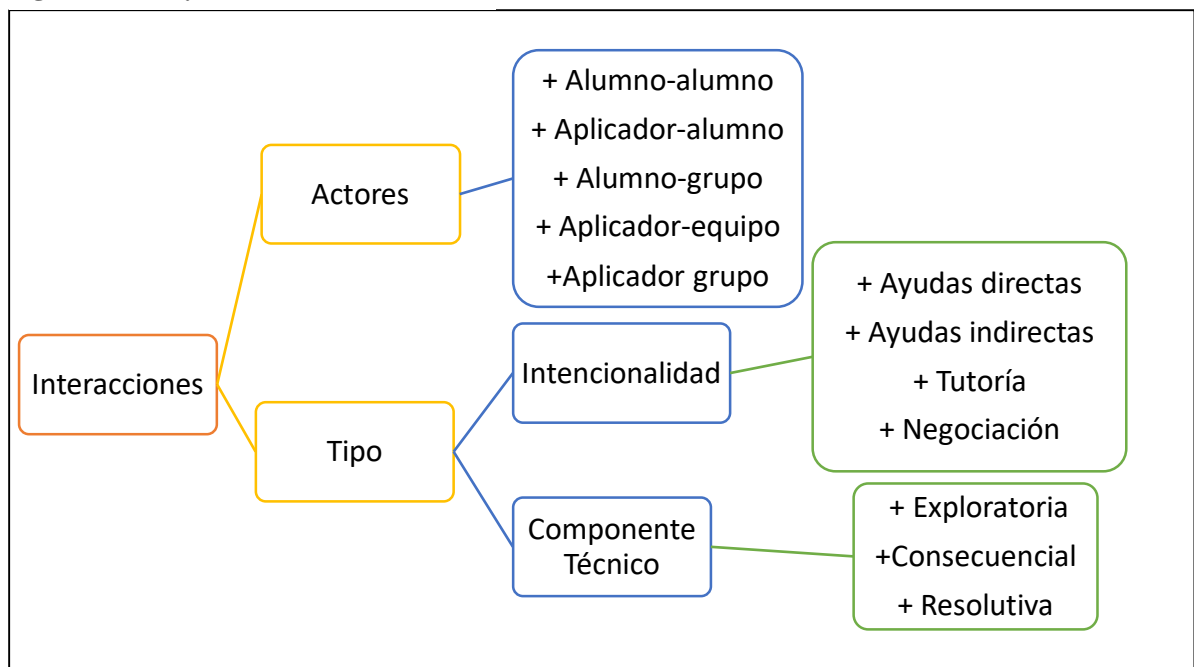
- Los componentes existen integrados bajo una doble dirección, por lo que es complejo determinar un solo componente que favorezca el razonamiento que se analiza, es decir, al analizar la presencia de un tipo de razonamiento, este puede estar influido por los saberes previos (componente estudiantil) y al mismo tiempo impulsado por las herramientas de GeoGebra (componente técnico), por tanto, se determina que son dos componentes los que están interactuando.

- El componente técnico se ubica al centro de los demás componentes (como se mostraba en la figura 3), debido a que es el elemento tecnológico del micromundo, por ello, se ha considerado pertinente clasificar el tipo de interacciones que éste genera, ya que no todas tienen la misma carga cognitiva, procedimental o de impacto en la resolución de la tarea. La clasificación de estas interacciones se integra más adelante.
- La integración del componente pedagógico está dada por las interacciones del tipo: ayudas directas e indirectas (por parte del aplicador), las cuales favorecieron en la indagación del RP; ambos tipos de ayuda se definen más adelante.
- Respecto al componente contextual, está integrado por las interacciones de tutoría y negociación (entre alumnos), las cuales se desarrollan bajo las características de la organización multigrado.

4.1.5 Interacciones

El análisis de los datos se fundamenta en las interacciones que llevaron a cabo los participantes durante la implementación, las cuales son analizadas como se muestra en el siguiente esquema de la figura 17:

Figura 17. Clasificación de interacciones



Como se exponía en el marco teórico, una interacción es entendida como la comunicación con otro distinto a uno mismo, y es mediante este proceso que los sujetos adquieren capacidad reflexiva para verse a sí mismos y para dar forma y sentido a la realidad que los rodea (Rizo, 2006).

Como se muestra en la figura 17, las interacciones pueden ser comprendidas en dos grupos: por los actores involucrados y por el tipo de interacción generada, a continuación, se define cada uno de estos grupos y sus subdivisiones con el propósito de identificar bajo qué tipo de interacción se estaba poniendo en juego el RP y cómo estas intervienen en los procesos de los participantes.

4.1.5.1 Interacciones por sus actores

Las interacciones por sus actores involucrados, hacen referencia a las personas que llevan a cabo la interacción, entre los cuales se identifican cuatro actores diferentes: alumno, equipo, grupo y aplicador. A partir de los diferentes roles que pueden tomar los participantes es que puede identificarse bajo qué relación se expone o se construye el RP que implica cada una de las actividades.

Las interacciones por sus actores se dividen en cinco: alumno-alumno, aplicador-alumno, alumno-grupo, aplicador-equipo y aplicador-grupo, cabe señalar que las interacciones por sus actores son bidireccionales, es decir que van en ambas direcciones entre los involucrados, por ejemplo, en la relación aplicador-alumno, debe de entenderse también como alumno-aplicador.

4.1.5.1.1 Interacción alumno-alumno

Al interior de los cuatro equipos de trabajo se contó con la participación de entre cuatro y cinco alumnos, los cuales estaban en las mismas condiciones de participación, es decir, dentro la organización de la actividad no se estableció algún líder de equipo, por lo que se esperaba la presencia de diferentes intercambios entre los participantes. A partir de ello, se define como interacción entre alumno-alumno estos intercambios al interior de cada equipo, solamente considerando aquellos que eran referentes a las actividades diseñadas.

4.1.5.1.2 Interacción aplicador-alumno

Este tipo de interacciones hace referencia a los intercambios directos entre el aplicador y algún alumno, ya sea que el aplicador busque directamente a algún participante acercándose al equipo al que pertenece, o que en plenaria (ante todo el grupo) le cuestione o solicite su participación. Respecto a la bidireccionalidad de las interacciones, en este tipo de interacción el participante puede buscar al aplicador de forma directa ante algún cuestionamiento personal o como vocero de alguna duda que surja al interior del equipo al que pertenece.

4.1.5.1.3 Interacción alumno-grupo

Como parte del cierre de cada actividad, se abría un espacio de intercambio a manera de plenaria (todos los participantes y el aplicador), en donde todos los alumnos podían compartir sus reflexiones, respuestas y/o argumentos. Esto es lo que caracteriza a las interacciones alumno-grupo como un intercambio de un sujeto a una plenaria, exponiendo, sobre todo, el trabajo realizado en conjunto al interior de cada equipo.

4.1.5.1.4 Interacción aplicador-equipo

La supervisión, solución de dudas, cuestionar a los equipos e integrar a todos los participantes fueron algunas de las funciones del aplicador que estuvieron integradas en las interacciones entre aplicador-equipo, las cuales son entendidas como estos intercambios directos entre el aplicador y el equipo. A diferencia de la interacción aplicador-alumno, aquí la atención no está puesta solamente hacia un participante, sino al equipo completo, por lo que puede darse de manera cercana, ya sea que el aplicador buscara al equipo y que el equipo solicitara al aplicador o que el aplicador dentro de la plenaria solicitara la participación de todo el equipo.

Este tipo de interacción es fundamental dentro de este trabajo, ya que es una de las maneras más directas de identificar el RP de manera general, puesto que en estos intercambios generales se podían apreciar similitudes o diferencias entre todo el grupo unitario.

4.1.5.1.5 Interacción aplicador-grupo

Estas interacciones exponen los intercambios entre el aplicador y todos los participantes, están integradas por las indicaciones del aplicador, las preguntas de reflexión o análisis hacia todos los participantes, resolución de dudas generales e inclusive la enseñanza de alguna herramienta o aclaraciones de su uso.

Son las interacciones más comunes y en su mayoría son de índole indicativo o de exposición del trabajo al interior de cada equipo ante todo el grupo para su análisis o comparación.

4.1.5.2 Interacciones por su tipo

Las interacciones por su tipo hacen referencia al contenido de la interacción, es decir, se presta mayor atención a la intención de la interacción que a los participantes mismos. Estas categorías de análisis permiten visualizar la comprensión de las actividades propuestas, sus orientaciones o dificultades, así como la funcionabilidad, el desarrollo y la inmersión del RP en el micromundo ejecutado.

Las interacciones por su tipo se dividen en dos categorías más: intencionalidad y técnico. Para cada una de las subcategorías se integra un ejemplo con la intención de evidenciar y aclarar a qué hace referencia dicha intervención.

4.1.5.2.1 Intencionalidad

Como se puede prever por el título de la categoría, estas interacciones hacen referencia a la intención principal del intercambio y al rol que desempeña cada participante, ambos elementos conviven debido a que la intención consiste en el papel que toma cada participante, por ejemplo, como facilitador, como guía, como receptor de ayuda, como negociador, etc. A continuación, se muestra cada una de las interacciones presentadas en el estudio que se han considerado dentro de la intencionalidad.

4.1.5.2.1.1 Ayudas directas e indirectas

Como se ha mencionado en el marco teórico, las interacciones que se dan entre los alumnos de escuelas unitarias o multigrado representa la diversidad que se vive en un mismo espacio, por lo cual, han sido estudiadas desde diferentes lentes. En esta ocasión se retoma el trabajo

realizado por Block et al., (2015) en donde caracteriza las ayudas por parte de una docente que atendía un aula multigrado, logrando identificar las ayudas directas e indirectas. Es importante mencionar que estas categorías se definieron a partir de un ambiente con fines didácticos y en educación primaria, por lo cual se realizaron algunas adaptaciones en este trabajo.

Ayudas directas. Hace referencia al apoyo de manera directa, dando a conocer la respuesta de la situación o la enseñanza de un procedimiento exacto. Este tipo de ayudas se presenta en una interacción de aplicador-alumno (que ya fue definida), con el propósito de intervenir de manera pertinente para que los retos a los que se enfrenten los alumnos tengan que ver con el objetivo de este estudio y no con aspectos secundarios como el manejo del software.

A continuación, se muestra un ejemplo que corresponde a la actividad 1 (exploración) en donde el aplicador apoya a los participantes explicando la herramienta “deslizador” mientras los equipos realizaban el procedimiento.

Ap: Ok, por ejemplo, el equipo 3 dice que ellos no identificaron para qué sirve el deslizador, vi por ahí que lo tenía el equipo 3 y el equipo 2, ¿Cuál es la herramienta del deslizador? Es está /realizando la demostración en la pantalla conectada a la computadora central/ la que tiene “a=2”, ¿sale?

E-3.2: Ay, con razón nada más se quedó eso

Ap: Esa es importante porque la vamos a estar ocupando el día de hoy, por ejemplo, la voy a seleccionar, voy a poner un deslizador, voy a dar clic en cualquier parte de mi hoja de actividad y me va a aparecer una ventana, ¿sale? Por ejemplo, si yo doy en la parte en la que dice intervalo un mínimo de cero y en la parte donde dice máximo le dejo en cinco, voy a obtener esto, y ahora ustedes me pueden decir ¿esto de qué me va a funcionar? O ¿esto qué función tiene?

E-1.2: Ya me acordé de eso

Ap: Por ejemplo, si yo me voy a otra herramienta que también es importante que utilicemos, va a ser aquí en polígono, no perdón, aquí en segmento de longitud dada, por ejemplo, mi deslizador se llama “O”, tengo “O” igual a cero, si yo, ahí donde me dice segmento de longitud dada le pongo la letra de cómo se llama mi deslizador, va a pasar eso /se guarda la configuración/ ustedes van a decir no está pasando nada, si yo muevo el deslizador, va a

cambiar el tamaño de mi segmento. A ver, chequen ustedes si pueden hacer esta parte del deslizador.

Se considera que es una ayuda directa porque se explicita el procedimiento paso a paso de la herramienta, además de que se indica su importancia debido a que iba a seguir siendo utilizada en las demás actividades.

Este tipo de ayudas tal como lo menciona Block et al., (2015), en general no es una forma conveniente de ayudar, pero se llevan a cabo cuando no se cuenta con otro recurso o apoyo para enseñar (en este caso el uso de una herramienta) o el tiempo es limitado. Si bien este tipo de ayudas están reportadas como personalizadas, para este estudio se considera que también pueden llevarse a cabo del aplicador a varios participantes, por ejemplo, hacia un equipo o hacia todo el grupo, como se muestra en el ejemplo.

Ayudas indirectas. A diferencia de las ayudas directas, se busca acercar a los alumnos a la respuesta, al dominio de alguna herramienta del micromundo o simplemente motivarlos a ampliar sus argumentos, pero sin solucionar nada, es decir, dejar a su cargo la parte más importante de la tarea. En este tipo de ayuda también se ven involucrados el aplicador y los alumnos, en donde las intervenciones que realice el aplicador favorecerán la integración de los participantes con el micromundo, potencializando sus respuestas y los intercambios de ideas, experiencias y conocimientos al interior de los equipos de trabajo, así como para que externen sus acuerdos con el grupo.

Dentro de la actividad dos (análisis de un par de segmentos construidos a partir de la razón 3:1), se les cuestiona a los alumnos si habrá un punto en el que ambos segmentos tengan el mismo tamaño, tal como se muestra:

Ap: ¿Habrá un momento en el que los segmentos estén del mismo tamaño?

/E-2, E-3 y E-4 responden que no, E-1 no emite respuesta/

Ap: ¿Por qué?

E-1.2: Según yo, si

E-2.2: Porque no

E-4.1: Porque la...

E-2.1: Porque están desalineados

E-3.2: No, porque uno es más chiquito

La pregunta que realiza el aplicador motiva a que los alumnos respondan con base en su RP (análisis que se expondrá más adelante), pero en ningún momento otorga una respuesta canónica o sugiere algún procedimiento, de forma que las respuestas obtenidas (“porque están desalineados”, “no, porque uno es más chiquito”) son resultado de las interacciones al interior de los equipos o razonamientos personales.

Dentro del contexto exploratorio del trabajo, el aplicador no emite un juicio positivo o negativo ante las respuestas de los participantes ya que esto puede desviar los argumentos de los alumnos, en el caso de obtener respuestas que sean inconsistentes con las preguntas, el aplicador vuelve a generar ayudas indirectas para que los participantes retomen la actividad.

4.1.5.2.1.2 Tutoría

Al igual que con las ayudas directas e indirectas, las intervenciones de tutoría son retomadas de un trabajo previo (Corro y Bolaños, 2018), en el cual se caracterizan como una relación entre pares donde un alumno funge como tutor (el que cuenta con mayor experiencia o conocimiento respecto a una tarea) y el otro como tutorado (el alumno con menor experiencia o conocimiento respecto a una tarea). Este tipo de interacciones se construyen en torno a una tarea en particular, donde el grado de interacción está determinado por el nivel de apropiación de los contenidos, el dominio de la tarea y los saberes con los que cuenta el alumno que funge como tutor.

En el estudio de Corro y Bolaños (2018) la tutoría se establece como un proceso que pasa por diversas etapas y con fines didácticos, por tanto, para este trabajo se entenderá como tutoría a las intervenciones entre pares que tienen como intención orientar, sugerir o guiar la actividad, llamando tutor al alumno que tiene las intenciones mencionadas y tutorado al alumno que lleva a cabo las orientaciones que recibe por parte del tutor.

Dentro de la actividad 3 (construcción de una relación de segmentos 0.5:1) al interior del equipo 2, se observa que la alumna E-2.2 guía al alumno E-2.1 para la construcción de un deslizador que regule la relación entre segmentos, como se muestra en el siguiente diálogo:

E-2.2: Tiene que ser en uno diferente para que salga la mitad

E-2.1: ¿Por qué voy a hacer otro deslizador si ya tengo este? /Abre la herramienta del deslizador/ ¿Qué le pongo?

E-2.2: Mínima de 2 y máxima en 10. ¿El otro de cuánto está?

E-2.1: De 30

E-2.2: No

E-2.1: ¿Por qué? Bueno 20. Y ¿ahora?

E-2.2: Y ahora haz un segmento

E-2.1: Un segmento

E-2.2: Y le pones igual a “b”

/Realiza la relación/

E-2.2: Ya. Ahora si lo pones en 1 y otro en 2

Como se puede observar en este diálogo, la alumna E-2.2 sugiere un procedimiento a E-2.1, y a pesar de que el alumno E-2.1 tiene algunas dudas respecto a las acciones que sugiere E-2.2, continúa haciéndolo. Como antecedente de esta interacción, se conoce que la alumna E-2.2 (segundo año) había participado en la aplicación del primer diseño, y el alumno E-2.1 (primer año) era la primera vez que interactuaba en el micromundo; por tanto, los roles que desempeñan cada uno tienen que ver con la experiencia y el conocimiento que tienen respecto a las herramientas, fungiendo como tutora la alumna E-2.2 y como tutorado el alumno E-2.1.

4.1.5.2.1.3 Negociación

Corresponde a interacciones en las que se establece un dialogo orientado a la negociación de conceptos o ideas vinculadas con el micromundo y sus componentes. Dentro de estas interacciones se pueden observar acuerdos, discusiones, opiniones y sugerencias, a diferencia de las interacciones de tutoría, no predomina la participación de un alumno, sino que los acuerdos y decisiones que se toman están constituidas por la aportación de todos los integrantes del equipo o en algunos casos por todo el grupo. Las negociaciones son de gran

relevancia sobre todo en los momentos donde se evidencia la evolución del razonamiento proporcional, categoría que será definida más adelante.

En la actividad dos (análisis de un conjunto de segmentos en relación 3:1), se les cuestionó a los participantes si en algún momento los segmentos tendrían el mismo tamaño como se muestra a continuación:

Ap: ¿Habrá momentos en el que los segmentos estén del mismo tamaño? A ver, acá dicen que no, y acá que sí, platíquenlo y me dan una respuesta

E-1.2: Si, ahora sí, yo pienso que sí

E-1.3: Yo digo que no

E-1.2: Yo diría que sí, es que no sé por qué, pero yo diría que si

Ap: O sea tú crees que en algún punto sí van a tener el mismo tamaño, ¿qué piensan los demás?

E-1.1: Tal vez

Ap: A ver platíquenlo

E-1.2: A ver, ¿por qué no puedo mover este? /refiriéndose a uno de los puntos del segmento/

E-1.1: No se puede

E-1.2: O sea así sí puedo mover este /el punto cambia de ubicación, pero no el tamaño del segmento/

E-1.3: No E-1.2, a ver /mueve los segmentos con el deslizador/

E-1.2: Pero es que yo quiero pensar que en algún momento

E-1.3: Es que, aunque lo lleves hasta el final, como quiera nunca van a estar del mismo tamaño /refiriéndose al deslizador/

E-1.2: En algún momento tienen que estar del mismo tamaño

En el fragmento presentado se puede que, a partir de una intervención del aplicador, los alumnos del equipo uno entablan una discusión para analizar si en algún momento los segmentos tendrán el mismo tamaño, mientras que la alumna E-1.2 afirma que sí tendrán el mismo tamaño, los alumnos E-1.1 y E-1.3 opinan lo contrario. A pesar de que los argumentos de la alumna E-1.2 no son claros, mantiene su postura, inclusive aún después de que E-1.3 le demuestra apoyándose en el deslizador que esto no es posible.

Se considera una negociación porque ninguno de los participantes toma el papel de tutor o de tutorado, sino que exponen en igualdad de condiciones sus opiniones, y aunque no se llega a un acuerdo evidente, la interacción permitió conocer el RP que estaban empleando ambos alumnos.

4.1.5.2.2 Componente técnico

Un micromundo está compuesto por diferentes componentes y su coexistencia. A partir de esta premisa se ha considerado pertinente prestar atención al componente técnico y las interacciones que se generan a partir de él. Anteriormente el componente técnico fue descrito como categoría de análisis, pero también cumple un rol específico dentro de las interacciones, siendo aquellas que se dan en función del micromundo, es decir, aquellas interacciones que sólo pueden surgir a partir del ambiente que propone el micromundo y las relaciones entre sus componentes.

Dentro de las interacciones de componente técnico se han identificado tres: exploratorias, consecuenciales y resolutivas, cada una de ellas implica una función específica en el micromundo, una actividad matemática y un tipo de opiniones, ideas y/o argumentos construidos en colectivo.

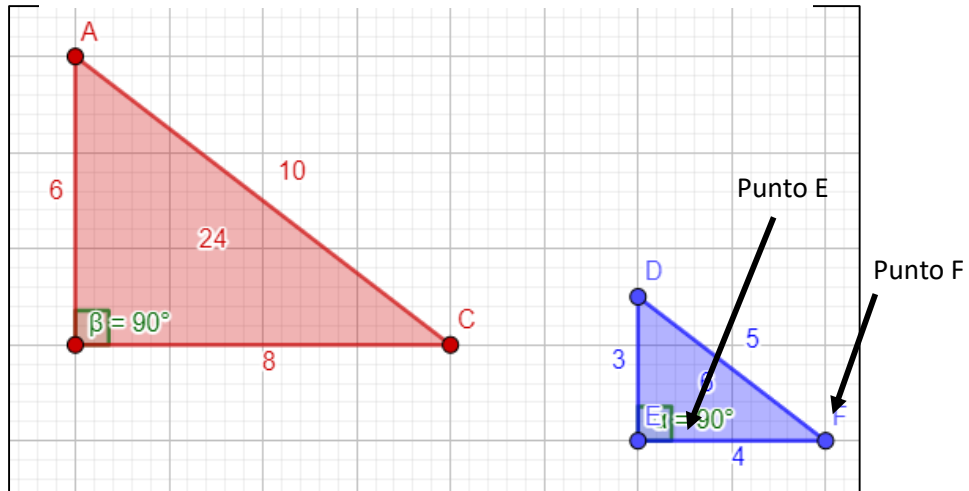
4.1.5.2.2.1 *Exploratorias*

Las interacciones exploratorias hacen referencia a los procedimientos de prueba y error que sugerían los participantes. La mayoría de estas interacciones surgen al comienzo de las actividades, o cuando los alumnos ponen en práctica varios procedimientos y optan por seguir descubriendo las diferentes manipulaciones que permite el micromundo.

Dentro de la actividad 4 (análisis de un par de triángulo construidos a una razón de 2:1), se solicitó a los alumnos que ajustaran las medidas del triángulo azul de forma que el área fuera la mitad del triángulo rojo (figura 18), los participantes del equipo 3, partieron de exploraciones de este tipo:

Figura 18.

Actividad 4 (ejemplo de interacción exploratoria)



E-2.1: Ora qué, ¿cómo le hacemos?

E-2.2: Mueve el de allá /punto F/

E-2.1: Y si movemos este para abajo /punto E/

E-2.3: No

E-2.2: Se perdería el ángulo de 90

E-2.3: No, yo digo que de arriba no

E-2.:1 A ver, deja ver si muevo este /punto F/ ahí no se pierde

Se considera una interacción de exploración ya que fueron los primeros acercamientos para atender a la actividad, identificando en su dialogo ideas como “y si”, “deja ver”, “mueve el de allá” las cuales reflejan un posible procedimiento que consideran pueda ser aplicable, y la manera de comprobarlo es interactuando con el micromundo. A partir de estas interacciones los participantes tomaban decisiones, además de ir descartando procedimientos e ir ganando aprendizaje en la manipulación de las herramientas.

4.1.5.2.2.2 Consecuenciales

Dentro de las interacciones de los participantes en relación con el componente técnico, se identificó que las acciones realizadas en el micromundo o los razonamientos expuestos por los alumnos no eran del mismo nivel, mientras que las interacciones de exploración se

refieren a primeros acercamientos, las interacciones consecuenciales se refieren a las acciones, acuerdos e ideas que después de llevarlas a cabo tuvieron como consecuencia una construcción, el manejo de alguna herramienta y/o la comprobación de un procedimiento o su descarte.

Como se ha mencionado las interacciones consecuenciales evidencian una acción que orienta el rumbo de la actividad, tal como se muestra a continuación. El siguiente fragmento corresponde a la actividad 4, en la cual el aplicador consulta con el equipo “¿Qué relación hay entre los lados de ambos triángulos?” Pregunta que el equipo pretendía resolver a pesar de que aún su triángulo no contaba con el ángulo de 90° , por lo que en la búsqueda de una respuesta la alumna E-3.2 solicita el apoyo a E-3.1 para que vuelva a interactuar con el triángulo desplazando uno de los puntos, acción que los llevó a tener el ángulo solicitado.

Ap: Ok, esos son la mitad, y ¿qué pasa con los otros lados? A ver chequen sin habrá o no habrá relación entre los demás lados

E-3.2: ¿Habrá alguna relación? No, o ¿sí?

E-3.1: Sí

E-3.2: No, porque sería... a ver bájale, mira... ¡Ya nos salió! /el ángulo de 90° exacto/

E-3.5: Te dije que era de ahí

Cuando E-3.2 menciona “a ver bájale, mira ya nos salió” haciendo referencia al ángulo de 90° , se considera una interacción consecencial, pues al obtener el ángulo recto en el triángulo propició que los integrantes del equipo pudieran observar que un triángulo que tiene la mitad del área de otro, sus lados no guardan la misma relación. Interacciones de este tipo constituyen la mayor parte del desarrollo de cada actividad.

4.1.5.2.2.3 Resolutiva

Las interacciones resolutivas son aquellas que favorecieron a la resolución de la actividad, pueden constituir todo un desarrollo o solamente alguna acción determinante que tuvo como consecuencia un resultado o una reflexión sobre las actividades diseñadas. Este tipo de interacciones se identifican en su mayoría al final del desarrollo de cada actividad e indican un cierre total o parcial de la actividad, independientemente del tipo de RP que se genere.

Con respecto al cierre de la actividad dos, se cuestionó al equipo 4 si la idea de que se obtenía el valor de un segmento a partir de la multiplicación de tres por el valor del deslizador funcionaba como una generalidad, como se muestra a continuación:

Ap: Ok, se multiplica por tres, ¿sólo cuando el deslizador vale ocho?

E-4: No, en todos

Ap: A ver chequen en otro número

E-4.2: En el diez

E-4.1: Sí también

E-4.3: A ver, prueba con el 5

E-4.1: Se multiplica por tres en todos los resultados /refiriéndose a Ap/

Ap: Ah, ok, ya ubicaron el deslizador en otros números

E-4.1: Ya, en diez y da 30 el más grande

Ap: Entonces se sigue...

E-4.1: En cinco y da 15

Ap: Ok, entonces ¿qué encontraron?

E-4.1: Que se multiplica el resultado del deslizador a la grande por tres /refiriéndose que multiplicando por tres el valor del deslizador se obtiene el valor del segmento grande/

Se considera que es una interacción resolutive porque a partir de la manipulación del deslizador y al ubicarlo en diferentes valores, los alumnos confirman que el valor del segmento siempre estará dado por el producto obtenido al multiplicar el valor del deslizador por tres. A partir de estas comprobaciones los participantes concluyen la actividad y concuerdan como equipo la relación entre ambos segmentos.

4.2 Resultados por niveles de RP

En este subtítulo se presentan los resultados observados por nivel de RP (incompleto, cualitativo, aditivo, pre-proporcional y proporcional). En cada uno de ellos se hace un análisis respecto al RP en situaciones de proporcionalidad directa en ambientes geométricos y la descripción del tipo de interacción en el que se desarrolla, describiendo el tipo de actores, la intención y los componentes del micromundo que se integran en la interacción.

4.2.1 Razonamiento incompleto

Como parte de los niveles de RP, el razonamiento incompleto se considera el de menor carga cognitiva, e incluso puede interpretarse como erróneo. A partir de las cinco actividades planteadas se identificó este razonamiento, haciéndose presente la mayoría de veces al comienzo de las actividades.

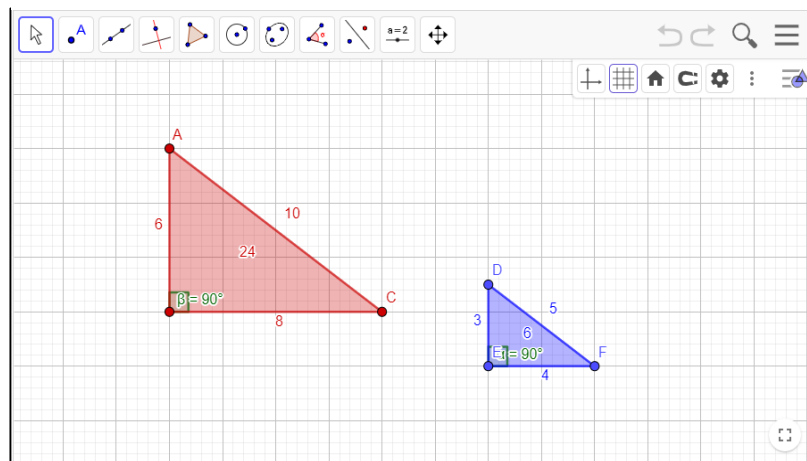
Al analizar las diferentes situaciones en las que se hizo presente este tipo de razonamiento se identificaron dos peculiaridades, por un lado, existen razonamientos incompletos que tienen que ver con otro tipo de análisis, elementos matemáticos o características de GeoGebra que no tienen que ver con el RP, este tipo de razonamientos son los que se encuentran más lejanos de una relación proporcional. Por otro lado, dentro del razonamiento incompleto existen los que tienen que ver con un mal empleo de relaciones multiplicativas entre los datos de la situación, es decir, establecen que hay una relación, identifican algunos de los datos, pero no logran establecer una relación.

4.2.1.1 Razonamiento incompleto no proporcional

Se presenta un caso correspondiente a la actividad 4 que consistía en hacer un análisis comparativo entre dos triángulos. Inicialmente el triángulo rojo está a una razón de 2:1 con relación a triángulo azul (figura 19).

Figura 19.

Actividad 4, razonamiento incompleto no proporcional



Al comienzo de la actividad se les preguntó a los participantes si había alguna relación entre ambos triángulos, esto con la intención de que identificaran la razón entre sus lados, registrando la siguiente interacción:

Ap: Vamos a la actividad de los triángulos, es la siguiente, la que está en la parte de abajo. Bien, la indicación me dice “analiza los triángulos ABC y DEF”, ok, ahorita antes de que empiecen a mover, ¿hay alguna relación entre los triángulos?, ¿se parecen en algo?, ¿no se parecen?...

E-3.3: Que son iguales

E-4.1: Tienen un ángulo de 90. Tienen el mismo ángulo

E-1.1: Que tienen el mismo ángulo

Se puede clasificar como interacción aplicador-grupo, debido a que la pregunta fue realizada en plenaria y no fue dirigida a ningún equipo o participante en específico. Con respecto a la intención de la intervención se clasifica como una ayuda indirecta, puesto que la pregunta buscaba que los alumnos identificaran a partir de la observación inicialmente si había alguna relación.

En cuanto a los componentes del micromundo, se manifiesta el componente pedagógico, el estudiantil y el contextual. El componente pedagógico se observa a partir de las indicaciones y la pregunta que realiza el aplicador; el estudiantil se identifica a partir de las respuestas de los alumnos, debido a que exponen términos como “ángulo”, término al que ellos ya se han enfrentado anteriormente; por último, el componente contextual se observa en la plenaria, en donde se busca que todos los alumnos participen desde sus propios argumentos e ideas.

Conforme al análisis de las interacciones y los componentes, se expone el ambiente en el que se desarrolló este razonamiento incompleto, el cual es considerado de esta forma porque las respuestas que se emiten por parte de tres participantes de diferentes equipos, señalan dos ideas que están fuera de la relación proporcional, por un lado la alumna E-3.3 responde “que son iguales”, siendo una respuesta incorrecta, teniendo en cuenta que para que sean iguales

ambos triángulos, las medidas de sus lados deberían ser congruentes y como se muestra en la figura 19 no es así.

De acuerdo a la respuesta del alumno E-4.1 y E-1.1, donde reconocen que ambos triángulos cuentan con un ángulo de 90° , se considera un razonamiento incompleto, debido a que sus respuestas no se relacionan con elementos proporcionales, es decir, el reconocer que ambos triángulos tienen un ángulo de 90° solamente comunica una característica que ambos comparten, más no una relación.

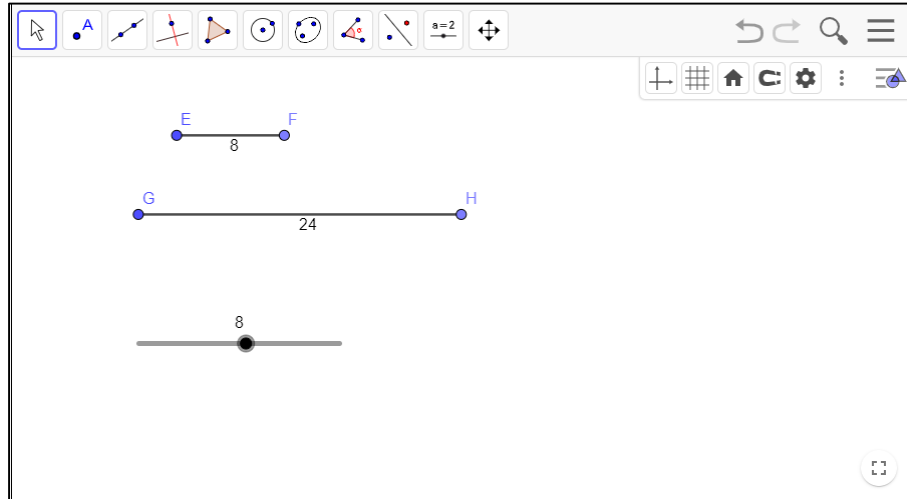
Como conclusión de este fragmento, se reconoce que la ayuda indirecta generó respuestas en los participantes, pues independientemente del razonamiento expuesto, se puede hablar de una puesta en común, dado que los demás participantes consintieron las respuestas de sus compañeros, por lo que se podría decir, que el razonamiento incompleto no proporcional puede surgir en los primeros encuentros entre los participantes y la situación, ya que de primer momento las características evidentes (ángulo de 90°), inclusive el decir “son iguales” (aunque no se consideren las dimensiones) pueden ser más fáciles de observar que la relación entre las medidas.

4.2.1.2 Razonamiento incompleto proporcional

Como se ha mencionado previamente, hay razonamientos incompletos que tienen que ver con un uso de los datos de manera incorrecta, o el planteamiento de una relación multiplicativa que no representa la situación de proporcionalidad. En este caso se hace referencia a la actividad dos (análisis de la relación entre dos segmentos bajo una razón de 3:1), ubicando la interacción en un momento intermedio de la actividad, en donde los participantes hacían uso del deslizador y comenzaban a establecer relaciones entre los segmentos y el deslizador.

Figura 20.

Actividad 2, razonamiento incompleto proporcional



Ap: A ver, ahora ustedes díganme, ¿en qué valor ubicamos al deslizador?

E-1.2: En el 8

Ap: A ver en el 8, vamos a ubicar el deslizador en el ocho

(Al interior del equipo 4)

E-4.1: La más chica mide 8 y la otra mide 24. 8 por 4 es 24

E-4.2: Si 8 por 4 es 24

En el fragmento anterior se pueden identificar dos interacciones. A partir de una interacción aplicador-grupo, se desarrolla una interacción del tipo alumno-alumno al interior del equipo 4. En el primer caso se puede considerar que se desarrolla una interacción exploratoria, ya que la intención del aplicador al preguntar “¿en qué valor ubicamos al deslizador?” era que los alumnos manipularan el deslizador y comenzaran a observar qué sucedía con los segmentos al cambiar el valor del deslizador, situación que los podría llevar a descubrir generalidades.

La segunda interacción (alumno-alumno), se clasifica como consecucional, debido a que obtienen observan una relación a partir de la manipulación del deslizador, por tanto, se

identifica que a partir del cuestionamiento del aplicador (ayuda indirecta) los participantes pudieron llevar a cabo una interacción consecucional que los acercó a un RP.

En el caso de los componentes del micromundo, están presentes los componentes pedagógico, estudiantil y técnico; por un lado, el componente pedagógico propició que los alumnos del equipo cuatro establecieran una relación con los datos que les ofrece el componente técnico, exponiendo saberes previos (componente estudiantil) al identificar un factor multiplicativo, a pesar de que este fuera erróneo.

Si los participantes identificaron que los valores de los segmentos tienen una relación multiplicativa entre ellos y con el deslizador, ¿por qué se considera un razonamiento incompleto proporcional? Este es uno de los casos en que los alumnos reconocen una relación, pero no representa lo que modela el micromundo, es decir cuando el participante E-4.1 menciona “la más chica mide ocho y la otra mide 24. Ocho por cuatro es 24” es evidencia de que hay una multiplicación implícita en su razonamiento, pero al buscar un factor para que el resultado fuera 24, propone uno diferente al que establece la situación.

A pesar de que es un error individual, se pone de manifiesto que puede considerarse como resultado de una interacción, ya que el alumno E.4.2 confirma el razonamiento de su compañero, además de que no se establece una negociación con los demás compañeros restantes del equipo.

En este análisis pueden surgir algunas preguntas, por ejemplo, ¿en realidad considera que el factor multiplicativo que establece esa relación es 4 o sólo fue un error basado en la tabla de multiplicar del número 8? Puede ser interesante dar respuesta a esta pregunta, ya que, si el error se debiera a una confusión, el razonamiento se ubicaría en un nivel pre-proporcional, pero, de acuerdo a como se manifestó la interacción no se puede afirmar esto, por tanto, se clasifica como un razonamiento incompleto en el cual los componentes relacionados a través de una interacción consecucional propiciaron un intercambio entre ambos alumnos teniendo como consecuencia una relación multiplicativa no representativa de lo que exponía el micromundo.

4.2.2 Razonamiento cualitativo

El RP cualitativo, a diferencia del razonamiento incompleto, no se considera erróneo, puesto que los argumentos de este tipo sugieren ideas que sí representan a la relación proporcional, inclusive si estos análisis aún no son cuantitativos u operacionales.

Como parte de la actividad dos (relación entre segmentos bajo una razón de 3:1), se destinó un tiempo de exploración, donde los alumnos comenzaron a interactuar con el deslizador y a hacer sus primeras observaciones, tal como se muestra en el siguiente fragmento correspondiente al equipo 2:

E-2.1: Ahora sí vamos a bajar a ver qué pasa

E-2.2: ¿Qué hiciste?

E-2.1: Ya subí y ya bajé, ya vimos que entre más así, más así

O-2: E-2.2 explica con gestos que entre más a la derecha estaba el deslizador más grande era el segmento

E-2.3: Es más grande

E-2.2: Entre más así, más así /refiriéndose a lo que dijo E-2.1/

Los actores involucrados en esta interacción son los alumnos del equipo 2, es decir, una interacción alumno-alumno, en donde su razonamiento se ve potencializado por el componente técnico a partir de una interacción consecucional; es decir, a partir de la interacción del alumno E-2.1 (“ya subí y ya bajé”) con el micromundo, se manifiesta una consecuencia: “entre más así, más así”.

En términos del RP esta interacción representa un razonamiento cualitativo de gran impacto, ya que el proceso consecucional llevó a los participantes a establecer una idea central relacionada con el objetivo de la actividad (analizar la relación entre segmentos); tal como lo expone el observador, el alumno E-2.2 explica a sus compañeras que entre más a la derecha estaba el deslizador, más grandes eran los segmentos.

¿Por qué se considera una interacción de gran impacto? En primer lugar, la interacción del alumno con el micromundo permitió que sus compañeras de equipo pudieran concluir en ese

momento que el deslizador influía en el tamaño de los segmentos, y no solo eso, sino que al manipular el deslizador hacia la derecha los segmentos crecían, por lo que podría considerarse que se potencializó el componente contextual, en donde él y las alumnas evidencian razonamientos contruidos en colectivo, una posibilidad en la escuela multigrado.

Por otro lado, la interacción observada en los participantes los acerca a niveles superiores del RP, por ejemplo, la siguiente interacción pertenece al mismo momento de la actividad dos, pero en un equipo diferente (equipo 4):

E-4.2: ¿Qué sucede primero?

E-4.1: Se hacen más grandes /refiriéndose a los segmentos/

E-4.2: Sí es cierto

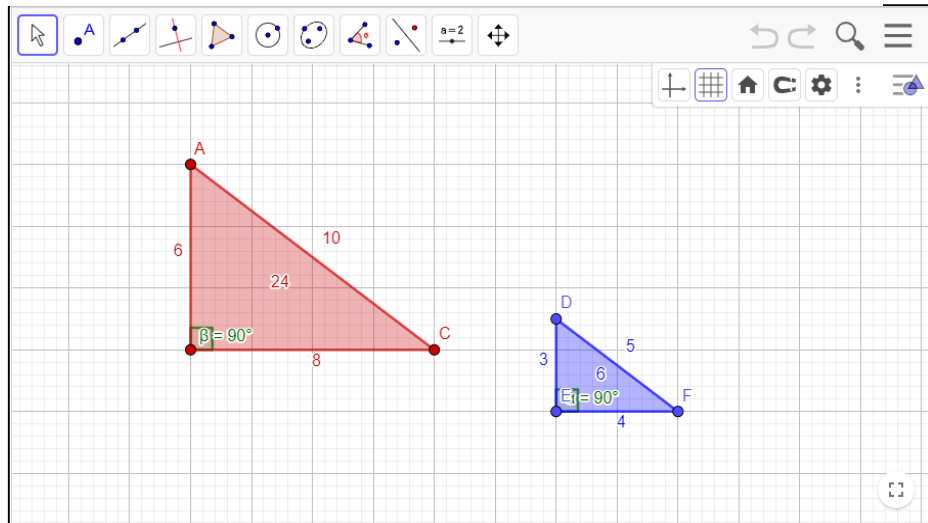
En este fragmento también se observa una relación alumno-alumno, bajo una intención consecencial en torno a un RP cualitativo, pero ¿cuál sería la diferencia con el fragmento anterior? En el primer fragmento se manifiesta una generalidad “entre más así, más así”, lo cual permite considerar que, si el deslizador fuera más grande, la relación se conservaría, es decir, si continuaban deslizando a la derecha continuarían creciendo los segmentos; por otro lado, el segundo fragmento se clasifica como una característica, ya que solo hace referencia a que “se hacen más grandes” pero no se observa de manera evidente que establezca una relación deslizador-segmento.

En los casos presentados se identifica una diferencia entre los razonamientos cualitativos presentados, por un lado, funcionan como base para desarrollar razonamientos más estructurados (ver evolución de razonamiento), y por otro lado ayudan solamente a caracterizar la situación. En el segundo caso, los razonamientos cualitativos pueden llevar más tiempo establecer otro tipo de relaciones.

En la actividad 4 (relación de dos triángulos en una razón de 2:1) también se identificaron razonamientos cualitativos, sobre todo al comienzo de la actividad. A partir de del cuestionamiento “¿hay alguna relación entre los triángulos?” que realiza el aplicador en una interacción aplicador-grupo, el equipo tres responde de la siguiente manera a partir de lo que observaba en pantalla, tal como se muestra en la figura 21.

Figura 21.

Actividad 4, razonamiento cualitativo



E-3.1,2: Miden la mitad

Ap: ¿Qué mide la mitad?

E-3.1: El chiquito mide la mitad del grande

La interacción que se muestra en este fragmento es del tipo aplicador-equipo, en donde a partir de que dos alumnos del equipo comentaron su respuesta, el aplicador genera una ayuda indirecta indagando a qué hacen referencia cuando dicen la mitad, a lo que ellos responden “el chiquito mide la mitad del grande”. En este tipo de situaciones las ayudas indirectas permiten que los alumnos organicen o replanteen su respuesta sin la necesidad de emitir un juicio sobre su participación y sin perder la intencionalidad de su respuesta.

Los componentes implicados son el técnico y el estudiantil, pues a partir de una interacción exploratoria en el micromundo, los participantes determinan una relación entre los triángulos, la cual se genera desde el componente estudiantil, ya que el concepto “mitad” implica un conocimiento previo, el cual es empleado en la relación de sus medidas y en el aspecto gráfico; esta situación se observó en algunos otros equipos.

El tipo de razonamiento empleado por los alumnos es cualitativo, debido a que su respuesta evidencia lo que sucede con los triángulos, ya que los participantes ponen de manifiesto conceptos como “mitad”, pero su respuesta se mantiene en un nivel descriptivo y no numérico, es decir, solo se narra una característica evidente de la situación. Para contrastar el término mitad, se muestra la respuesta de otro participante a la misma pregunta

E.-1.1: Que en este los números son la mitad del de este /relación triángulo azul con el rojo/

Ap: Ok, serían los lados ¿no?

E-1.1: Sí

Como punto de comparación, ambos participantes emplean el concepto mitad, por un lado, el participante del primer fragmento lo hace para relacionar el triángulo “chiquito” con el “grande”, y en el segundo fragmento el participante establece que los “números de este son la mitad del de este”, ¿hay alguna diferencia? ¿implica una diferencia de razonamientos?, si ambos razonamientos son cualitativos, ¿por qué un alumno se fija en el tamaño de los triángulos y el otro en sus medidas?

Es importante aclarar que en ambos casos no se emplea ninguna relación cuantitativa, eso indica que los dos alumnos se encuentran en el mismo nivel, aunque hay una diferencia importante en sus respuestas, por ejemplo, el primer participante limita su razonamiento a lo que observa en términos gráficos, y su respuesta es acertada, pero el segundo participante logra identificar que los valores de los lados tienen una relación de la mitad, por tanto, un razonamiento del segundo tipo (mitad) indica mayor aproximación a razonamientos cuantitativos como lo sería el pre-proporcional o proporcional, mientras que el otro permanece como una descripción.

En conclusión, se determina que el razonamiento cualitativo puede ser descriptivo o relacional, es decir, mientras que el primero se limita a describir lo que está sucediendo, en el segundo se ponen de manifiesto algunas relaciones que pueden ir formalizando lo que sucede en la situación. Las diferencias entre ambos casos pueden ser mínimas, pero

considerando como base este tipo de razonamientos para futuros niveles, hay mayor posibilidad de hacerlo desde el razonamiento cualitativo relacional.

4.2.3 Razonamiento Aditivo

En el marco teórico y al comienzo de este capítulo se describe al razonamiento aditivo como una estrategia incorrecta, debido a que se recurre a adiciones o adiciones iteradas, pero, ¿en todos los casos resulta erróneo?

Se presentaron diferentes situaciones en las cuales se manifiesta este tipo de razonamiento, tal es el caso de la actividad dos (relación de segmentos bajo una razón 3:1) cuando se les preguntó a los alumnos si en todos los casos el segmento mayor era tres veces más grande que el segmento menor; identificando la siguiente interacción del equipo 3 a partir de manipulación de lo que tenían en pantalla (figura 22):

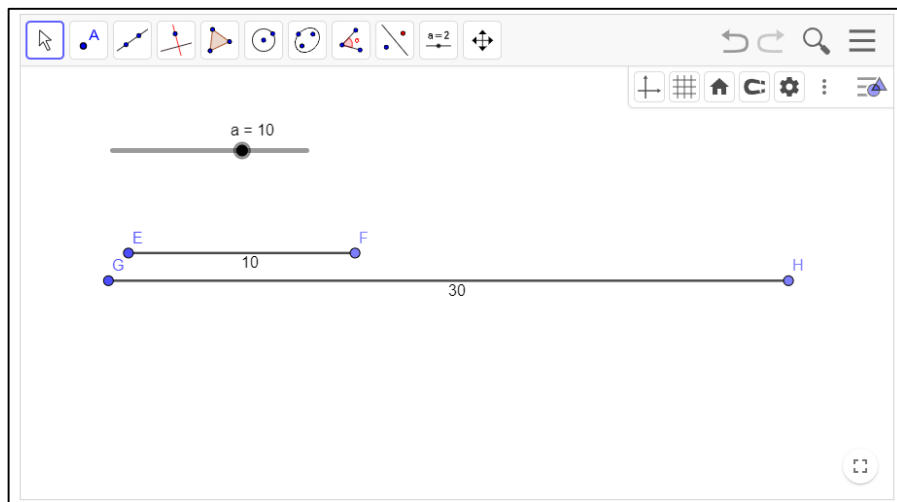
E-3.2: Mira, deja me voy hasta 10 para que mires /recorre el deslizador a 10/ 10 y

10, y los 10 de acá 30

E-3.1: No sí, te creo

Figura 22.

Actividad 2, razonamiento aditivo



Este fragmento muestra una interacción alumno-alumno con una intención resolutoria, ya que a partir de la manipulación del deslizador el participante E-3.2 pudo reafirmar su idea e inclusive compartirla con los demás integrantes de su equipo. Respecto a los componentes que integran el micromundo, el componente técnico es el que potencializa el razonamiento de los alumnos. Cabe aclarar que es el alumno E-3.2 quien desarrolla la idea, pero a lo largo de la actividad esta idea fue construida en colectivo.

En relación con el razonamiento aditivo, puede observarse cuando el participante comenta “10 y 10, y los 10 de acá 30”, dado que se interpreta como la suma de $10+10+10=30$, razonamiento que modela de forma correcta la situación, pero entonces ¿el razonamiento aditivo es correcto? En esta ocasión sí, debido a que la razón 3:1 el participante la registró como una suma iterada.

En casos como el que se acaba de mostrar una relación aditiva puede representar una relación proporcional, pero ¿hasta qué punto es útil? Siendo que la multiplicación puede entenderse como una suma que se repite con base en un factor, por ejemplo, el alumno E-3.1 iteró 3 veces el diez, y fue un procedimiento óptimo para su equipo, pero ¿qué sucedería cuando el factor multiplicativo no sea 3 y fuera 179? (hipotéticamente), ¿resulta económico este tipo de razonamiento? En los siguientes ejemplos se muestran situaciones donde este tipo de razonamiento no alcanza o no es adecuado para establecer una relación proporcional.

Como se ha previsto desde el marco teórico, el razonamiento aditivo resulta erróneo dentro de las situaciones proporcionales geométricas, tal como es el caso de la actividad 4 (relación de dos triángulos bajo una razón de 3:1), en la cual a partir de la pregunta “¿hay relación entre sus lados?” se generó la siguiente interacción con relación en la figura 23:

Ap: ¿Qué paso entonces?, ¿hay relación entre sus lados?

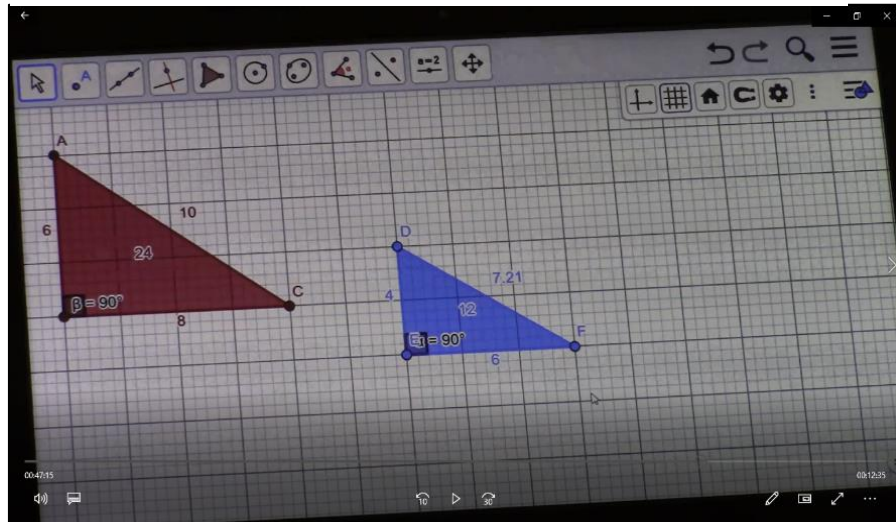
E-2.2: Sí, no más entre estos

Ap: ¿Entre cuál?

E-2.2: Entre estos, es que 6 /lado EF/ más 2, da 8 /señala lado BC/ en este 4 /lado DE/ más 2, da 6 /lado AB/ y este /lado DF/ pues... no sé

Figura 23.

Actividad 5, razonamiento aditivo



La interacción es aplicador-equipo, y el aplicador proporciona una ayuda indirecta, puesto que él sabe que no hay relación directa y de manera proporcional entre sus tres lados, pero la intención no es comunicárselos a los participantes, sino que ellos generen sus propios argumentos, situación que se presentó debido a la potencialidad que genera el componente técnico, ya que éste les permite observar las medidas e interactuar entre ellas para hacer modificaciones.

Respecto al RP, se considera un razonamiento aditivo debido a que el equipo (expuesto por el alumno E-2.2) considera un factor aditivo de 2 para establecer una relación entre ambos triángulos, es decir, para los lados que miden 4 y 6, suman dos unidades y obtienen las medidas de sus lados correspondientes 6 y 8. Si bien, el razonamiento no es correcto, tiene cierto grado de veracidad, ya que es cierto que hay una diferencia de dos unidades entre ambas medidas, solamente que dicha relación no establece una proporcionalidad para todo el triángulo, dado que el tercer lado tiene una medida de 7.5 y su lado correspondiente del otro triángulo mide 10. Ante el cuestionamiento de si los tres lados tenían la misma relación sucedió lo siguiente

Ap: ¿Tiene la misma relación los tres lados?

E-2.1: Pus sí

E-2.2: No

Ap: Piénselo y ahorita regreso (pasa un tiempo) ¿qué pensaron?

E-2.2: Que ésta no es la misma

Ap: ¿Qué no es la misma?

E-2.2: Relación

E-2.1: Sí hay relación, porque 10 menos 3, queda 7

E-2.2: Pero, o sea 6 más 4 son 10...

E-2.1: Y 10 menos 3 quedan 7, y el 0.21 sale sombrando

Ap: A ver eso está interesante, 4 más 6 son 10, menos 3 es 7, y dices que sobraría 0.21, ¿qué opinan los demás? Respecto a lo que dice su compañero, se puede, no se puede

/E-2.1 les explica a sus compañeras la relación/

E-2.2: Pero de dónde sacas 3

E-2.1: Por eso, podemos restar 3...

E-2.2: No, pues no sé de dónde agarrar el 3

E-2.1: Que no estoy agarrando el 3, lo estoy restando

Concluye la actividad

Consideramos que el análisis de este fragmento es interesante debido a que suceden varios fenómenos. Primero, la interacción se da entre el aplicador y el equipo, las intervenciones por parte del aplicador son ayudas indirectas, buscando que los participantes expusieran sus explicaciones. La interacción se genera a partir del componente técnico dado que la situación está contenida en el micromundo, pero las relaciones establecidas hacen referencia al componente estudiantil teniendo en cuenta que acceden a sus conocimientos previos relacionados con la adición.

Respecto al razonamiento cualitativo hay tres cosas por exponer: primero, en la búsqueda de establecer alguna relación entre ambos triángulos comienzan a considerar elementos ajenos a los observables, por ejemplo, el considerar una sustracción de 10 menos 3 para decir que hay relación entre el 10 y 7, reafirma algunos de los antecedentes ya expuestos en donde se identifica que los alumnos regresan con facilidad a las relaciones aditivas debido a que les

resultan más sencillas de desempeñar, a pensar de que no represente la situación, como lo es en este caso donde dos lados estarían bajo una relación aditiva de más dos, mientras que en el lado restante sería más tres.

Por otro lado, se establece otra relación propuesta por la alumna E-2.2, donde menciona que 6 más 4 son 10, ¿por qué es diferente al razonamiento que propone E-2.1? Mientras que el alumno E-2.1 busca una relación entre las medidas del lado AC y DF, la alumna E-2.2 establece una relación entre los lados DE y EF, obteniendo como resultado el valor del lado AC, en otras palabras, sumó dos de los lados del triángulo azul y obtuvo la medida de un lado correspondiente diferente de triángulo rojo. Como se ha mencionado, este tipo de razonamientos no son del todo incorrectos, por lo que se podría considerar que tratándose de triángulos rectángulos en donde se quiere conocer la relación de un lado, y la alumna toma dos y los suma, puede asemejarse al teorema de Pitágoras, sin embargo, al no indagar este aspecto en una entrevista individual con la estudiante, no se podría afirmar esta interpretación, pero se considera plausible.

Por último, es importante destacar que en el primer fragmento, cuando se propone el factor aditivo 2, los integrantes del equipo están de acuerdo, e inclusive lo reafirman dos participantes, pero en el segundo fragmento, cuando el alumno E-3.1 menciona la sustracción de 10 menos 3, le cuestionan de dónde ha salido el 3, es decir, ¿no tienen ambos factores la misma implicación en la situación? Por ejemplo, también sería válido preguntar de dónde salió el 2, ¿hay alguna diferencia entre plantear un término aditivo y uno correspondiente a la sustracción? Son cuestionamientos que surgen a partir de identificar como el RP en su nivel aditivo puede cambiar de acuerdo con el momento o situación en que se está empleando.

Otro ejemplo del razonamiento aditivo se presentó en la actividad 5 (construcción de un mosaico bajo una razón de 1.5:1) en la cual el equipo 2 solicita ayuda al aplicador respecto a la construcción del mosaico de acuerdo al razonamiento que ellos desarrollaron, comentando lo siguiente:

E-2.2: ¿Cómo le podemos hacer? ¿Tengo que sumar esto dos veces y esto dos veces?...

Ap: A ver repítame porque no te escuché bien

E-2.2: Éste /5.25/ lo voy a sumar dos veces y luego éste /7/ entonces da 17.50

Ap: Ok, ¿éste lo témenos que sumar dos veces? /5.25/

/Asienten E-2/

La alumna E-2.2 en esta ocasión toma un rol de vocera para comunicar lo que ya habían discutido al interior del equipo, estableciendo una interacción aplicador-equipo. La primera parte de la interacción es resolutive y la intervención del aplicador es una ayuda indirecta, es decir, mientras que la alumna compartía su procedimiento, el aplicador buscaba que los participantes lo rectificaran, situación que no se dio, debido a que ellos confirmaron lo que proponían.

En esta situación los componentes que se relacionan es el técnico y el pedagógico, ya que el proceso que describen lo hacen a partir de las herramientas y características que ofrece GeoGebra, permitiendo comprender, atender, sugerir y diseñar para atender la actividad propuesta. Respecto al componente pedagógico éste se integra a partir del cuestionamiento del aplicador.

El razonamiento empleado en esta situación nuevamente se sustenta en una relación aditiva, pero a diferencia de los ejemplos anteriores en donde se busca explicar o justificar algunas acciones realizadas a lo largo de la situación, en esta ocasión el razonamiento se desarrolla al comienzo de la actividad, proponiendo un procedimiento que dificulta observar la relación, ya que a lo largo de la actividad buscaron justificar dicho procedimiento.

Cuando los participantes establecen que deben de sumar dos veces 5.25 retoman la medida que se da como referencia en la construcción del nuevo mosaico, considerando que debe ser el doble, y no solo eso, toman en cuenta la medida original (3.5) y la suman dos veces (7, como se lee en la transcripción) a su suma anterior, obteniendo un resultado de 17.5.

Cabe mencionar que la medida que buscaban los integrantes del equipo 2 tenían que ver con la longitud de un lado del mosaico (el mosaico era un cuadrado como se observa en la figura 24), en donde si bien en la figura original la medida era el doble de 3.5, en el nuevo mosaico lo correcto sería del doble de 5.25, ya que el nuevo mosaico estaría construido a una razón

de 1.5:1, pero optaron por sumar dos veces las longitudes de referencia, obteniendo una medida que sería compleja de desarrollar en las demás figuras respetando que el mosaico quedara de la misma manera.

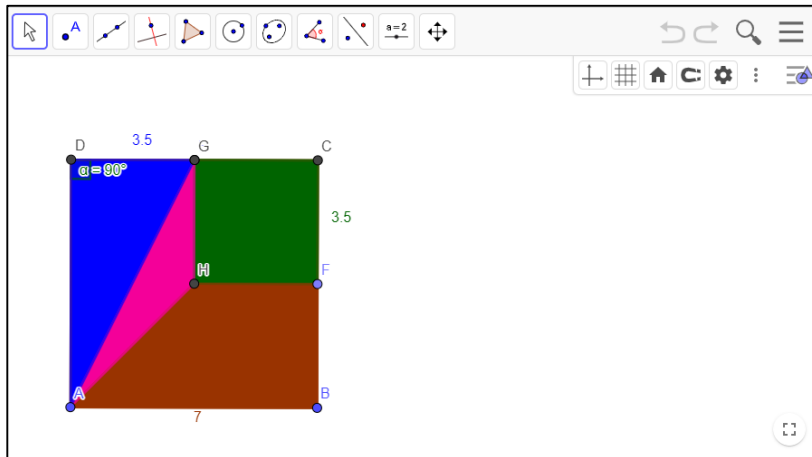


Figura 24. Actividad cinco, razonamiento aditivo

En conclusión, el razonamiento aditivo puede ser útil en algunas situaciones como se pudo observar en el primer ejemplo, pero, si el deslizador llegara a un número mayor o de tres cifras ¿podría emplearse la relación aditiva? No solo se trata de que no sea un razonamiento económico, sino que el emplear relaciones aditivas para registrar situaciones de proporcionalidad directa en el área geométrica, no favorece su desempeño ni su comprensión, tal es el caso de los dos ejemplos restantes, en donde al aplicar una relación aditiva establecieron una relación errónea.

Este tipo de razonamiento se hizo presente tanto al comienzo como al final de las actividades, por tanto, se considera que es utilizado por los participantes como un razonamiento de confianza, es decir, al no poder establecer relaciones multiplicativas buscan factores aditivos que los puedan auxiliar al momento de establecer relaciones proporcionales. Recordando que se respetó la modalidad unitaria, se concluye que el grado escolar en el que están registrados los alumnos no infiere en este tipo de razonamiento, dado que al interior de todos los equipos se hizo presente y tomado en cuenta de forma colectiva.

4.2.4 Razonamiento pre-proporcional y proporcional

Los niveles implican una gradualidad y un razonamiento diferente, a partir del nivel pre-proporcional es más complejo encontrar diferencias entre este nivel y el proporcional, pues hay interacciones que evidencian un razonamiento cuantitativo, donde la diferencia entre una relación de dos factores únicos y la relación proporcional entre dos magnitudes de manera constante distingue los razonamientos.

El análisis de los niveles restantes se evidencia a través de la comparación de dos casos que permiten observar los diferentes razonamientos.

El primer caso corresponde a la etapa final de la actividad dos, en la cual los participantes ya habían establecido algunos razonamientos respecto a la relación entre segmentos, y comenzaban a compartir sus resultados o conclusiones. A partir del aporte de un participante que menciona que el segmento pequeño tiene el mismo valor que el deslizador, se desarrolla la siguiente interacción:

Ap: Ok, a ver, dice su compañero que el segmento pequeño tiene el mismo valor que el deslizador, ¿será cierto?

E-1.2: Sí

E-2.1,2: Sí

Ap: ¿Y qué sucede con la otra? /refiriéndose al segmento más grande/

E-4.1: Se multiplica, bueno...

E-4.4: Es ocho por tres

La interacción es entre el aplicador y el grupo, ya que se aprecia la participación de alumnos de diferentes equipos, además de que las intervenciones del aplicador son del tipo de ayuda indirecta, puesto que en la primera (“dice su compañero que el segmento pequeño tiene el mismo valor que el deslizador, ¿Será cierto?”) no aprueba ni desaprueba la idea del participante, sino que retorna el razonamiento a los demás participantes con la intención de que sean ellos quienes la validen.

La segunda intervención del aplicador (“¿y qué sucede con la otra?”) también se cataloga como ayuda indirecta, solamente que no tiene la intención de validar como la intervención anterior, sino que establece una relación de comparación en donde se esperaba que los alumnos comenzaran a establecer razonamientos cuantitativos, tal como sucedió.

Respecto a los componentes del micromundo, se integra el técnico, contextual y estudiantil. El técnico se hace presente debido a que la interacción gira en torno a la relación proporcional establecida por las herramientas y los elementos de GeoGebra, como lo es el deslizador y los segmentos, además es importante mencionar que conforme se avanzaba en la actividad los alumnos se fueron apropiado más del lenguaje y las herramientas.

El componente contextual refiere a una interacción grupal, debido a que los alumnos pertenecientes a los diferentes equipos comunican información discutida previamente al interior de cada equipo, cumpliendo con el enfoque constructorista que regula el micromundo. De esta manera las construcciones individuales pasan por un tratamiento colectivo, transformando los razonamientos individuales en colectivos, es decir, se exponen ideas individuales, se materializan en colectivo y retornan al individuo como un razonamiento consolidado por la comunidad.

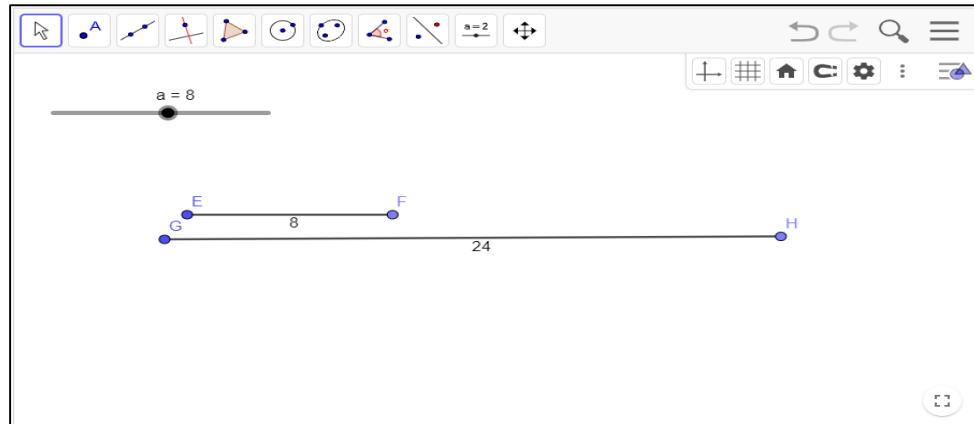
El último componente es el estudiantil, el cual se integra a partir de sus saberes previos al hacer uso de una relación multiplicativa. Respecto a las respuestas de los alumnos del equipo 4, son caracterizadas como resolutivas, debido a que exponen un razonamiento generado por exploraciones previas y procedimientos, esto se afirma a partir de que al comienzo de la actividad el equipo mostró interacciones que corresponden a otros niveles.

Con respecto al RP la interacción corresponde a un nivel pre-proporcional, considerando que ya se hace referencia a una relación multiplicativa (a diferencia del aditivo), en donde el participante E-4.4 centra su razonamiento en un caso particular (“es ocho por tres”). Cabe resaltar que hay una diferencia entre “éste es más grande” (razonamiento cualitativo) y “es ocho por tres” debido a que la segunda afirmación integra valores que toman las magnitudes a partir de una razón, es decir, cuando el deslizador se encuentra en el número 8, el valor del

segmento más grande es de 24, por tanto, la relación está dada por un operador multiplicativo de 3, tal como se muestra en la figura 25.

Figura 25.

Actividad dos, razonamiento pre-proporcional



Al analizar la interacción se pone de manifiesto que los participantes identifican que el 3 es el operador multiplicativo de la relación proporcional, pero, ¿por qué no se encuentran en un nivel proporcional? Como se observa en la participación del alumno E-4.4 se centra sólo en una relación particular de una situación proporcional, pues dice “es 8 por 3”, lo cual aún no permite afirmar el razonamiento de que el factor multiplicativo de 3 siempre va a regular la relación proporcional (constante), a pesar de que el deslizador cambie su valor.

En contraste con la interacción anterior, se muestra el siguiente fragmento:

E-4.1: Se multiplica por tres en todos los resultados /refiriéndose a Ap/

Ap: Ah, ok, ya ubicaron el deslizador en otros números

E-4.1: Ya, en diez y da 30 el más grande

Ap: Entonces se sigue...

E-4.1: En cinco y da 15

Ap: Ok, entonces ¿qué encontraron?

E-4.1: Que se multiplica el resultado del deslizador a la grande por tres

E-4.2: El valor del deslizador por tres veces

La interacción pertenece al mismo momento que la del análisis anterior, aunque en esta ocasión se da al interior del equipo cuatro, por tanto, es una interacción del tipo aplicador-equipo, ya que los participantes inicialmente comparten lo que han concluido respecto a la situación en el micromundo, y el aplicador contribuye con dos intervenciones del tipo ayuda indirecta, preguntando inicialmente si habían comprobado que en todos los casos posibles sucediera lo mismo, ante ello, los participantes responden con varias relaciones establecidas, por lo que el aplicador vuelve a intervenir con la intención de que formalicen su razonamiento al preguntar “¿qué encontraron?” a lo que ellos dan como respuesta una relación proporcional.

Las acciones que llevan a cabo los participantes en el micromundo corresponden a interacciones del tipo resolutivo, a pesar que no se observa de manera explícita, los alumnos del equipo 4 hicieron uso del deslizador para poder comprobar que en todos los casos el valor del deslizador se multiplicaba por tres en el tamaño del segmento más grande.

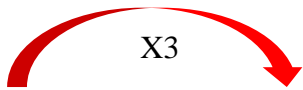
En el caso de los componentes del micromundo, se favorece el componente técnico, mientras que se relacionan los componentes estudiantil y didáctico debido a que en torno a una situación las intervenciones del aplicador guiaron a los participantes en su razonamiento sin dar respuestas, y ellos a través de estas ayudas indirectas pusieron en juego saberes previos relacionados con relaciones multiplicativas.

¿Por qué se asegura que se favorece el componente técnico? Tiene que ver con la intencionalidad del micromundo, es decir, GeoGebra brinda las oportunidades de generar situaciones inmersivas que permitan a los estudiantes desarrollar saberes matemáticos y a su vez reforzar aquellos con los que ya cuentan, tal como en esta ocasión, la actividad no propone un espacio de aprendizaje, pero a través de todos los componentes del micromundo el alumno puede poner en juego sus saberes y adentrarse en una situación en donde el lenguaje, las ideas y las discusiones en colectivo buscan dar respuesta al mismo micromundo.

Con respecto al RP, el fragmento presentado corresponde a un razonamiento proporcional, debido a que se identifica una relación entre el deslizador que funge como la magnitud independiente, la constante de proporcionalidad que es 3 y el valor del segmento que

representa la magnitud dependiente; es decir, si se genera una tabla como se muestra (tabla 8) con los valores que puede adoptar el deslizador, se puede afirmar que en realidad los participantes del equipo 4 establecen una relación proporcional a partir de la razón externa.

Tabla 9. Descripción de razonamiento proporcional



Valor del deslizador	Valor del segmento “grande”
5	15
8	24
10	30

Nota: Los valores utilizados para el valor del deslizador son aquellos a los que refieren los participantes.

¿Cuál es la intención de comparar la interacción anterior con ésta? En la interacción previa se pudo analizar que los participantes establecieron una relación entre los valores correspondientes de dos magnitudes (“es 8 por 3”) para un caso en especial, mientras que, en el segundo fragmento, se identifica que los alumnos establecen una relación para toda la situación, es decir, sin importar el valor que toma el deslizador. A partir de ello se afirma que una de las diferencias existentes entre el nivel pre-proporcional y el proporcional es la identificación del factor multiplicativo como constante que regula la relación entre dos magnitudes, sin importar el valor que tome la magnitud independiente.

Como se ha mostrado, establecer una diferencia entre el nivel pre-proporcional y proporcional resulta complejo, puesto que las diferencias radican en elementos puntuales e inclusive conceptuales. Para evidenciarlo, se muestran las siguientes interacciones.

La interacción corresponde al desarrollo de la actividad 4, en donde a partir del cuestionamiento “¿hay alguna relación entre sus áreas?” los participantes responden de la siguiente manera:

Ap: ¿Hay alguna relación entre sus áreas?

E-4.1: Sí, se aumenta 4 veces

E-4.2: Cuatro veces mayor

Ap: Ok, a ver, ahí está interesante, acá dices que es 4 veces

E-4.1: Sí

E-2.2: Sí

Ap: ¿Qué es cuatro veces?

E-4.1,2: El área

Ap: El área de cuál, es cuatro veces el de cuál

E-2.2: De seis

E-4-1: Del azul, al del rojo

Ap: Ah ok, el área del azul es 4 veces el área del rojo

E-2.2: Sí

E-4.1: No, no al revés, se aumenta 4 veces el rojo

E-4.2: Ah, no

Ap: Se aumenta...

E-4.2: Se aumenta 4 veces el azul

E-2.2: Sí

E-4.4: Ey

E-4.2: Sí el azul

E-1.2: Va aumentar el azul

E-3.1: El azul se aumenta 4 veces

E-4.1: Ah sí, el azul

Ap: Ah, ok el área del azul aumenta 4 veces...

E-4.1: Al del rojo

E-2.2: Sí

E-3.2: Sí, sí se aumenta 4 veces, mira 6 por 4 son 24

La interacción se formula a partir de diferentes elementos; primero, se establece un intercambio entre aplicador-grupo, ya que los alumnos que participan son de diferentes equipos. Es importante no perder de vista el tipo de escuela al que pertenecen los alumnos, dado que los intercambios establecidos a partir de esta interacción son generados desde diferentes experiencias y saberes, puesto que los alumnos cursan diferentes grados, dando paso así al desarrollo de razonamientos colectivos y negociables.

En el caso del aplicador suceden diferentes intervenciones, por un lado, se identifican tres del tipo ayuda indirecta, debido a que la intención del aplicador era conocer el análisis que habían establecido los participantes a partir del valor de las áreas de ambos triángulos, inclusive, una de sus intervenciones es errónea con la intención de generar una negociación entre los participantes, logrando establecer la relación correcta entre el área del triángulo azul y el rojo.

El componente contextual se observó durante toda la aplicación de las actividades, pero en interacciones como ésta se muestra la importancia de dicho componente, pues integra a los alumnos a una experiencia que para ellos es cotidiana (colectividad) pero que dentro del micromundo reafirma el enfoque constructorista. Respecto al componente estudiantil, se registran saberes previos referidos a relaciones multiplicativas, mientras que el componente técnico es el que potencializa el razonamiento, debido a que todos los comentarios, negociaciones y relaciones que establecen los alumnos se dan en el lenguaje y las propiedades del micromundo.

En términos del RP, el razonamiento que se pone en juego pertenece al nivel pre-proporcional, y se identifica a partir de tres interacciones. La primera, corresponde a las respuestas de los alumnos E-4.1 y E-4.2: “se aumenta 4 veces” y “es 4 veces mayor”, en ambos casos se presenta una relación multiplicativa, ya que se habla de un incremento bajo un factor multiplicativo “4”, el cual puede ser expresado como “aumenta” o “veces mayor”, solamente que ninguno de los dos participantes expone una relación evidente sobre a qué triángulo afecta directamente este factor multiplicativo, para ello el aplicador interviene.

Después de la intervención del aplicador el participante E-4.1 reformula su respuesta al agregar “del azul al rojo”, entendido que el área del triángulo rojo (24) es cuatro veces la del triángulo azul (6), pero en el intento de establecer una negociación y comprobar si los demás participantes compartían el razonamiento, el aplicador interviene de manera contraria, exponiendo que el área del triángulo azul (6) es cuatro veces la del triángulo rojo (24). Después de ello al menos un participante de cada equipo expone que no es así, sino que el área del triángulo rojo es cuatro veces en relación con la del triángulo azul.

Hasta este momento se podría afirmar que los alumnos establecen una relación proporcional al reconocer 4 como constante, pero al finalizar esta interacción se identifica la intervención por parte del alumno E-3.2 en donde recurre a la relación de dos datos que se corresponden en la relación de dos magnitudes al decir “6 por 4 son 24”, y ninguno de los demás participantes manifiesta que se puede conservar la misma relación en diferentes casos si se conserva la proporcionalidad entre los lados del triángulo, lo que implicaría una igualdad de razones.

Se observó en este trabajo que el análisis de los razonamientos pre-proporcional y proporcional suele ser más detallado en este tipo de situaciones, debido a que como parte de las indicaciones no se les solicita a los alumnos buscar o conservar la relación observada cuando los triángulos toman otra medida, lo cual hubiera podido favorecer en la interpretación de 4 como constante. A pesar de ello, se muestra un fragmento más, el cual corresponde a lo sucedido después del fragmento anterior, éste evidencia un razonamiento proporcional.

Ap: Ok y acá su compañera decía que es una cuarta parte, ¿cómo sería ahí?

E-2.2: Sí, si multiplicas 6 por 4 da 24...

Ap: El azul sería...

E-2.2: La cuarta parte de la del rojo

Ap: Ok, dice su compañera que el azul sería la cuarta parte del rojo

E-3.2: Sí

Ap: También ¿no?

/Varios participantes asienten/

La interacción se da en plenaria, pero los participantes solamente son el aplicador y la alumna E-2.2, por lo cual se considera del tipo aplicador-alumno, observando que la alumna expone que se trata de una relación de “la cuarta parte” y el aplicador solicita que explique con mayor detenimiento.

La acción de explicar por parte de la alumna toma un papel de acción consecucional, ya que al presentar primero una relación multiplicativa, expone como consecuencia una relación con la idea “es una cuarta parte”. Esta acción consecucional no se lleva a cabo dentro del componente técnico, debido a que no se sirve de acciones realizadas en el micromundo, pero es un ejemplo de cómo el micromundo genera razonamiento que sobrepasan la utilidad del espacio digital, es decir, la relación que establece E-2.2 no lo hace a partir de la interacción con los triángulos debido a que no realiza ninguna modificación entre ellos o hace uso de alguna herramienta, pero a pesar de ello su razonamiento parte de la situación que se presenta en GeoGebra, lo cual se interpreta como una ventaja que otorga el micromundo en la formalización de razonamientos.

¿Por qué las dos interacciones presentadas no corresponden al mismo nivel? Si bien ambos razonamientos (“cuatro veces” y “la cuarta parte”) representan la relación proporcional, no implica los mismos conocimientos ni el mismo nivel de abstracción, mientras que el primer caso se identifica la constante “4” en el segundo caso el factor es más formal, pues indica la razón como una cuarta parte de la original, exponiendo de manera implícita la igualdad de razones, dado que primero comenta “si multiplicas 6 por 4 da 24”, a lo que el aplicador responde “el azul sería” y E-2.2 complementa rápidamente “la cuarta parte del rojo”.

Si bien la alumna no expone la igualdad de la forma $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, se logra visualizar la comparación entre la razón externa de la relación proporcional con los valores que se corresponden cuando la variable independiente (área del triángulo rojo) toma el valor de 24, y la variable dependiente (área del triángulo azul) es 6 a partir de una razón de 1:4.

Como se ha observado en las dos comparaciones, el nivel pre-proporcional y proporcional son muy próximos, logrando identificar diferencias en el establecimiento de generalidades (aproximación al sistema de registro algebraico) o en el uso de la igualdad de razones.

De manera específica, al hablar del establecimiento de generalidades se hace referencia a la comprensión y al razonamiento de que en una relación proporcional se mantendrá siempre y cuando se conserve el valor de la constante para ambas magnitudes, de forma que, ante este tipo de razonamientos, la aproximación con la variación lineal es cada vez más cercana, a diferencia del razonamiento pre-proporcional, en el que no se logra integrar una relación a un valor constante.

Por otro lado, el hacer uso de la igualdad de razones es muestra de la comprensión de las situaciones proporcionales y, a su vez, la discriminación de aquellas que no lo son. Como lo menciona Block (2014), para resolver situaciones de esta manera se requiere cierta madurez cognitiva y numerosas experiencias previas en donde las fracciones se usen para expresar razones.

En conclusión, a diferencia de los primeros tres niveles, el razonamiento pre-proporcional y proporcional corresponden a un razonamiento correcto, cuantitativo y, en el caso del segundo, es general. Este tipo de razonamientos se presentó con menor frecuencia a diferencia de otros niveles como el cualitativo.

Este tipo de razonamientos han sido construidos a partir de las interacciones integradas en el micromundo y los intercambios generados entre participantes, específicamente en dos actividades (actividad 2: relación de segmentos bajo una razón de 3:1 y actividad 4: relación de dos triángulos bajo una razón de 2:1), las cuales priorizan el análisis sobre la construcción; por tanto, se puede concluir que los alumnos de telesecundaria unitaria de este estudio muestran mayor acercamiento a los niveles de razonamiento pre-proporcional y proporcional en situaciones de análisis construidas en el micromundo.

Hasta este momento se han identificado los diferentes niveles de razonamiento propuestos por Karplus et al. (1983), en donde se han incluido nuevos aportes a partir de la integración de los micromundos al análisis bajo esta categorización. Al interpretar los datos obtenidos en la aplicación del rediseño, han surgido diferentes preguntas del tipo, ¿es posible que los alumnos sólo presenten un nivel de razonamiento? ¿Influye el tipo de actividad en el nivel

de RP registrado? ¿Será posible la relación entre dos o más niveles?, ¿el nivel puede ir cambiando conforme se avanza en una misma actividad?

Para dar respuesta a este tipo de cuestionamientos se presenta a continuación un análisis bajo dos perspectivas, la primera de ellas expone la relación entre niveles en donde no se sobrepone uno sobre otro, sino que son utilizados de manera simultánea para dar solución a las actividades o para justificar sus respuestas. En la segunda se analiza la evolución entre niveles que se presenta al resolver una misma situación.

4.3 Relación entre niveles de RP

4.3.1 Relación incompleto – aditivo

Dentro de las relaciones que se establecieron entre niveles se han identificado diferentes causas independientemente de qué niveles estén relacionados, por ejemplo, a continuación se muestra una interacción correspondiente a la actividad cinco (construcción de un mosaico a partir de otro bajo una razón de 1.25:1), la cual evidencia la relación de razonamientos a partir de la justificación de un procedimiento incorrecto.

E-2.2: A ver saca la medida de todo esto para saber de cuánto tiene que quedar

E-2.1: 3.5 (lado DG) más 3.5 (lado GC) son 7

E-2.2: No, pero es que 7 por 3 son...

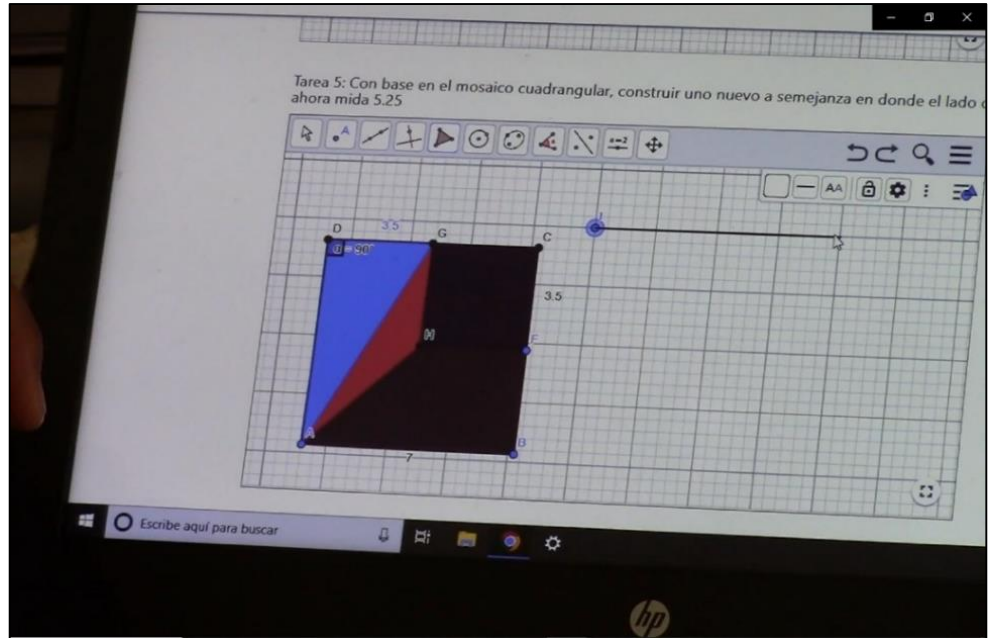
E-2.1: 3.5 más 3.5... 7, 14, 7 más 7 es 14 más otros 7, 21 más otros 7, 28

E-2.2: ¿Cuál 28?

E-2.1: Entonces nos tiene que salir de 28 /refiriéndose al contorno del mosaico/ si éste salió de 3 cuadros y medio este va a ser de 4 /refiriéndose a la cuadrícula de apoyo/

Figura 26.

Actividad 5, trazo de un lado del cuadrado basado en la cuadrícula de apoyo (relación incompleto y aditivo)



E-2.1: Ay ta, cuanto sali3 pa bajo 4, entonces de 4 cuadros y medio

E-2.2: Tiene que salir de 7 /lado DC/ y de 17.50 /nuevo lado DC/

E-2.1: Por qu3 17, s3 est3n estos lados, m3s estos lados, m3s estos lados

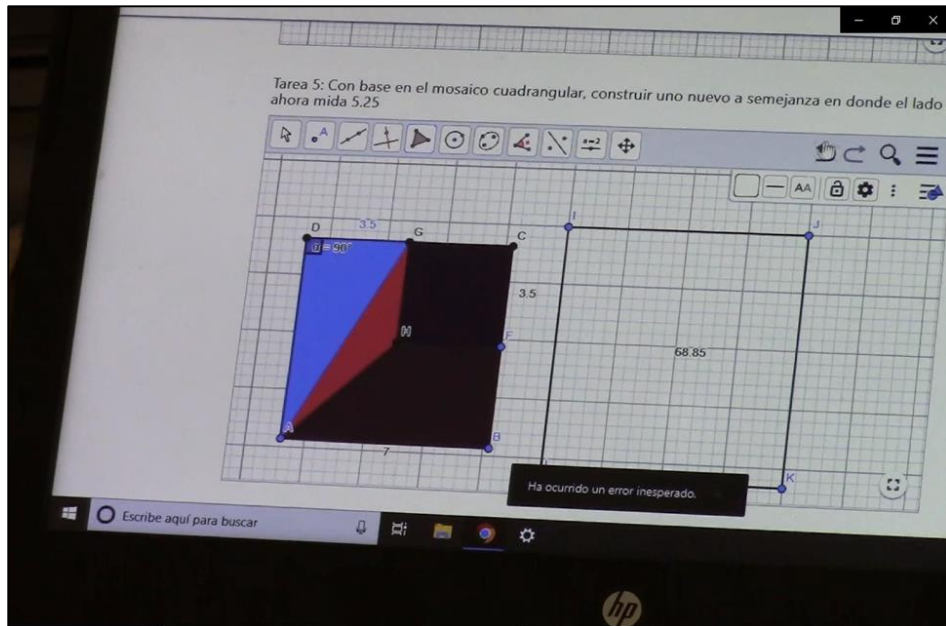
E-2.2: No, pero ahora ya va a ser este, ora 5.25 /medida otorgada en el problema/
m3s este 7 (lado DC/, 17.50, tiene que darte eso 17.50

E-2.1: Se pasa de 17.50

E-2.2: Y con mucho

Figura 27.

Actividad cinco, confusión del contorno (perímetro) con el área del cuadro trazado (relación incompleto y aditivo)



La interacción muestra un intercambio de razonamientos al interior del equipo dos, por tanto, se considera una interacción alumno-alumno, a partir de una negociación donde se pretendía encontrar las medidas del nuevo mosaico. Por otro lado, de acuerdo al componente técnico puede clasificarse como una interacción exploratoria, debido a que al tratar la información (longitud de los lados) no llegan a establecer alguna consecuencia o una solución, más bien comprenden que la hipótesis planteada no resuelve la situación.

Los componentes directamente relacionados son el técnico y el estudiantil, ya que los alumnos ponen en juego procedimientos que guardan relación con el perímetro y el área, a pesar de que estos no sean aplicables de manera correcta. Todos los intercambios se dan en torno a la situación presentada en el micromundo, es decir, el lenguaje que emplean es propio del entorno que ofrece GeoGebra.

Respecto al RP, se reconocen dos razonamientos de diferente nivel, por un lado, el incompleto y por el otro el aditivo. Al comienzo de la interacción el participante E-2.1 explicita un razonamiento aditivo en el intento de saber cuánto debe ser el contorno del

mosaico, basándose en que la medida de referencia es 3.5, decide sumarlo dos veces, obteniendo como resultado 7, por lo que continúa con su estrategia aditiva sumando iteradamente 7 tres veces más, pues conoce que el mosaico es cuadrangular.

A partir de la estrategia desarrollada, determinan que el mosaico debe tener un contorno de 28, pero, ante este resultado interviene un razonamiento incompleto, ya que confunden la magnitud a la que se están refiriendo, es decir, el 28 tiene referencia con las unidades en las que se expresan las medidas, mientras que decir “si este salió de 3 cuadros y medio éste va a ser de 4” hace referencia a la cuadrícula del fondo. Cabe aclarar que la intención de la cuadrícula era auxiliar en el trazo, pero en esta ocasión tuvo un papel determinante en la resolución de la actividad.

Ante la propuesta del alumno E-2.1, interviene la alumna E-2.2, donde sugiere que “tiene que salir de 7 y de 17.50”, para después agregar “ora 5.25 más este 7, 17.50, tiene que darte eso 17.50”. En primer término, se identifica un razonamiento aditivo, pues recurre a la suma de medidas para sugerir una medida final del contorno, resultando interesante la mención de “5.25 más 7 es 17.50”, por lo que se puede suponer que en realidad suma dos veces 5.25, lo cual correspondería a la medida de un lado del nuevo mosaico, sumando 7 más, lo cual representa la medida del mosaico original, ¿de dónde puede venir la idea de sumar ambas medidas? Se identifica que en el propósito de cumplir la indicación “con base en uno original, construye uno nuevo”, puede ser que establezca relación de esta forma entre ambos mosaicos.

Como cierre de la interacción se aprecia nuevamente un razonamiento incompleto, puesto que las medidas que estaban obteniendo representaban el contorno de los mosaicos, pero como se aprecia en la figura 27, cambian la magnitud de longitud por una de área, especificando que el área del cuadrado que acaban de trazar tiene un valor muy elevando por encima de 17.50, resultado que ellos esperaban obtener.

Identificamos que la interacción entre niveles se da a partir de la justificación de un procedimiento erróneo, por lo que se puede concluir que los alumnos están conscientes de que hay una relación cuantitativa, pero en la búsqueda de una posible solución el razonamiento es incorrecto, sobre todo cuando no logran distinguir la diferencia entre el

contorno (perímetro) y el área del mosaico. Si bien son contenidos que no están integrados en el objetivo del estudio, el área sí representa una relación multiplicativa, y en este caso se evidencia que no está aplicado dicho razonamiento.

4.3.2 Relación incompleto – pre-proporcional

Como se ha mencionado en el caso anterior, se han identificado diferentes causas por las cuales pueden estar relacionados los diferentes tipos de razonamiento, por ejemplo, a continuación se muestra una interacción correspondiente a la actividad dos (relación de dos segmentos bajo una razón de 3:1), la cual evidencia la relación de razonamientos a partir una corrección:

E-4.1: Ocho veces más ¿no?, ¿ocho por cuánto te da 24?

E-4.4: Ocho por tres

E-4.1: No... ¡Sí!, ocho por tres es 24

E-4.3: Son tres, tres veces

La interacción se da al interior del equipo cuatro a partir del cuestionamiento “¿cuál es la relación del segmento grande con el deslizador?” realizada por el aplicador, se considera una interacción del tipo alumnos-alumno, estableciendo una negociación respecto al papel que jugaba el deslizador en relación con los segmentos. El componente involucrado es el estudiantil, dado que los intercambios son en torno a conocimientos previos de los alumnos que tienen que ver con relaciones multiplicativas.

Como se ha mencionado, la intención de esta interacción tiene que ver con la corrección, lo cual permite observar una relación entre el nivel incompleto y el pre-proporcional, ¿de qué forma? En la primera línea de la interacción el participante E-4.1 considera que la relación que hay entre el deslizador y el segmento de mayor tamaño está dada por “ocho veces más”, razonamiento que es incorrecto, ya que si bien hace uso de los datos observados en las medidas, la relación que establece no integra la proporcionalidad original, por lo que pertenece al nivel incompleto. Después de dicha sugerencia pregunta a sus compañeros “¿ocho por cuánto te da 24?”, pregunta que se relaciona con un razonamiento cuantitativo que puede ser ubicado en el nivel pre-proporcional, debido a que logra comprender que el

producto entre el valor del deslizador y el segmento puede generar información que le permita comprender la relación entre ambos.

A partir del cuestionamiento de E-4.1, E-4.4 comparte el resultado de dicha multiplicación. Al principio E-4.1 duda un poco debido a que, en momentos anteriores, aseguraba que ocho por cuatro daba como resultado 24; termina por aceptar el resultado y E-4.3 concluye con una propuesta correspondiente al nivel pre-proporcional: “son tres, tres veces”, refiriéndose a tres como el factor multiplicativo que regula el caso particular cuando el deslizador mide 8 y el segmento mayor mide 24.

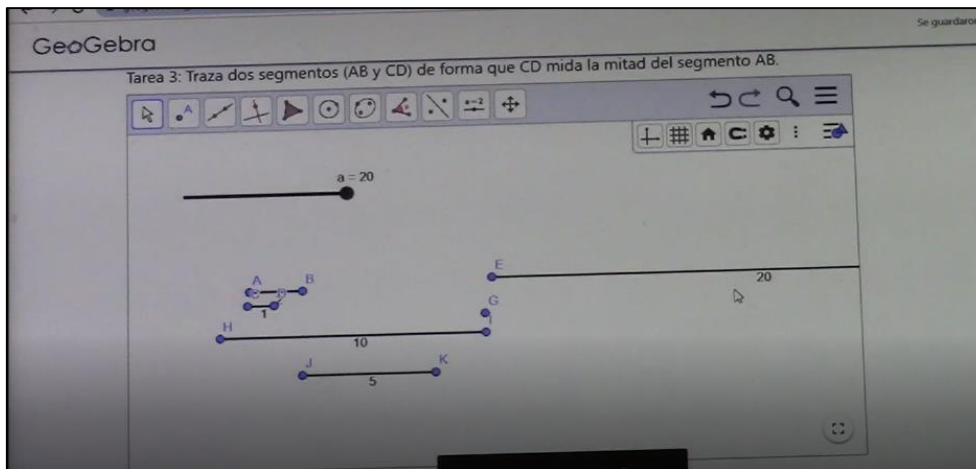
Como se puede observar, en una interacción tan breve pueden estar relacionados dos niveles que demandan una carga cognitiva muy diferente, por un lado, un razonamiento incorrecto y, por el otro, un razonamiento que establece un factor multiplicativo, pero ambos en función de la misma relación. Respecto a los componentes, se identifica que lo contextual implica una carga importante en la delimitación de razonamientos, dado que el alumno E-4.1 era de segundo año y el alumno E-4.4 de primero. Es cierto que la corrección no implica grandes diferencias, pero sin duda tuvo un lugar muy importante en la relación proporcional. Estos intercambios se atribuyen a la rica diversidad de conocimientos, además es un ejemplo de la circulación de saberes (Santos, 2016) que se hace presente en las aulas unitarias.

4.3.3 Relación aditivo - pre-proporcional

Otra de las relaciones entre niveles que se presentó fue el nivel aditivo y pre-proporcional, por ejemplo, en la siguiente interacción perteneciente a la actividad tres (construcción de dos segmentos a partir de una razón 0.5:1). La interacción gira entorno a la figura 28, que era lo que en ese momento veían los alumnos.

Figura 28.

Actividad 3, relación entre los segmentos trazados cuando tienen valores de 20, 10 y 5 (relación cualitativo, aditivo y pre-proporcional)



Ap: Tenemos un segmento que vale 20 y uno que vale 10, ¿Qué relación dijeron que había entre esos segmentos?

E-2.1: Que son la mitad

Ap: Ok, y ¿qué relación hay entre el del 20 y el 5?

E-2.3: Que son la tercera parte

E-2.1: La tercera... la cuarta parte

E-2.2: Tercera

Ap: A ver, platíqueno y regreso

E-2.2: Que es la tercera

E-2.1: La cuarta

E-2.2: Por decir, cuando ésta la divides entre otra más chiquita y luego la divides otra vez, ¿verdad que sí? /refiriéndose a E-2.3/

E-2.1: No, porque 5 más 5 son 10, y 5 más 5 son otros 10, suman 20, entonces 5 sería la cuarta parte

La interacción surge a partir de las intervenciones por parte del aplicador, por lo que inicialmente se da una interacción del tipo aplicador-equipo, identificándolas como ayudas indirectas, dado que al preguntar qué relación hay entre los segmentos, el objetivo principal

era identificar la relación que establecían los alumnos. Dichas preguntas realizadas por el aplicador dieron como resultado una interacción alumno-alumno.

Cabe mencionar que la interacción corresponde al final de la actividad y los alumnos ya habían establecido la relación entre tres segmentos a partir de un mismo deslizador, por tanto, los razonamientos expuestos corresponden a acciones resolutorias a partir de la negociación entre dos alumnos, los cuales, corresponden a grados diferentes, por tanto, el componente contextual favorece estos intercambios.

Como se ha mencionado, se integran los niveles aditivo y pre-proporcional, los cuales pertenecen a diferentes momentos de la interacción. Inicialmente ante la pregunta del aplicador sobre la relación entre 20 y 10, los participantes (a pesar que la respuesta la emite un alumno, estas respuestas son el resultado de discusiones previas), responden que es la mitad, razonamiento que corresponde al nivel pre-proporcional, ya que al expresar que es la mitad se reconoce que 20 entre 2 es 10.

La segunda intervención que hace el aplicador tiene que ver con la relación entre 20 y 5, obteniendo dos respuestas diferentes, por un lado, E-2.3 responde que es la tercera parte, mientras que E-2.1 corrige y menciona que en realidad es la cuarta parte, el aplicador se retira y se establece otra interacción. Ante las dos respuestas hay un razonamiento muy similar, ya que el dar respuestas como la tercera o la cuarta parte, tienen una carga conceptual más cercana al nivel proporcional que a un nivel cualitativo, puesto que implica conocimientos como números fraccionarios o decimales, los cuales pueden funcionar como razón.

En el caso de la respuesta “la tercera parte”, ¿es del todo incorrecta?, ¿qué orientó el razonamiento de los participantes a dar esta respuesta? Este es uno de los casos que ejemplifica que los errores de los alumnos no siempre son injustificados o del todo incorrectos, puesto que el razonamiento se basa en la siguiente relación

$$20 \div 2 = 10 \div 2 = 5$$

La cual puede ser leída como “la mitad de la mitad de un número”, lo cual, implica tres transformaciones, es decir, pasar del 20 al 10 y luego del 10 al 5. Esta relación también fue establecida por los participantes en la determinación de la razón que establecieron con el

deslizador (véase en el subtítulo “retroceso proporcional-incompleto”). Hasta este momento se ha analizado la relación del nivel cualitativo con el pre-proporcional y del incompleto con el pre-proporcional, cabe aclarar que la intención de analizar todo el fragmento en un solo momento y no seccionarlo, tiene que ver con que sucede en un intercambio muy breve, por lo que se establecen relaciones de diferentes niveles y en diferentes líneas de la transcripción.

A partir de que el aplicador se retira, se genera una negociación entre los alumnos que relaciona cuatro niveles, por un lado, la participante E-2.2 menciona, “cuando ésta la divides entre otra más chiquita y luego la divides otra vez” haciendo referencia a la tercera parte. En esta idea expuesta se identifica cómo la alumna evidencia que está en el nivel cualitativo para justificar un nivel incompleto, es decir, en la búsqueda de explicar por qué es la tercera parte, recurre al lenguaje cualitativo, haciendo uso de términos como “la chiquita” y procesos como “la divides” y no expresar las cantidades relacionadas, esto demuestra que los alumnos recurren con mayor confianza al análisis cualitativo que al cuantitativo, sobre todo en la descripción de sus procesos, tal como lo reporta Sánchez (2013).

Por otro lado, el alumno E-2.1 defiende su postura de que es la cuarta parte, mencionando “no, porque 5 más 5 son 10, y 5 más 5 son otros 10, suman 20, entonces 5 sería la cuarta parte”, al igual que en la respuesta de E-2.2, el alumno E-2.1 se sirve de un nivel con menor carga cognitiva para explicar un nivel más sofisticado, es decir, retoma el nivel aditivo para explicar un nivel proporcional. Esto puede deberse a dos situaciones diferentes, por un lado, puede ser indicador del nivel que puede alcanzar su razonamiento, o por otro lado una adecuación de su lenguaje para explicar su razonamiento.

En esta ocasión se considera que existe presencia del nivel proporcional debido a que comprende que la cuarta parte está relacionada con el valor que presenta el segmento cuando el deslizador toma diferentes valores, comprendiendo que la razón que regula los valores del deslizador es 0.25 o la cuarta parte.

En conclusión, se observa que los participantes integran más de dos niveles y en este caso particular se apoyan de niveles más primitivos para explicar razonamientos más complejos. Esta interacción describe a la perfección lo que sucede dentro de un aula unitaria, pues en la

diversidad de experiencias y saberes de los alumnos se entrelazan razonamientos que potencializan saberes y su vez, dejan fuera a aquellas hipótesis que no corresponden a la proporcionalidad, ofreciendo oportunidades de aprendizaje para todos sin importar el grado escolar.

4.3.4 Relación pre-proporcional – proporcional

En los resultados por nivel se analizaba que en el caso del razonamiento pre-proporcional y proporcional las diferencias radicaban en establecer generalidades o concepciones conceptuales, aunque en este caso, se muestra que ambos niveles también pueden estar relacionados, por ejemplo, se muestra la siguiente interacción perteneciente a la actividad dos (análisis de la relación de dos segmentos bajo una razón de 3:1)

E-4.1: A ver, vamos a ver en el 15, si es por tres, 15 por 3 es 45

E-4.2: Sí 15 por tres es 45

E-4.4: Sí es lo triple de su tamaño

La interacción se desarrolla al interior del equipo cuatro, por lo que corresponde a una interacción alumno-alumno, y es del tipo resolutoria, debido a que se buscaba comprobar la relación multiplicativa, obteniendo como resultado la razón correspondiente. En esta situación, es el componente técnico el que favorece el razonamiento, ya que al poder hacer uso del deslizador les permitía observar diferentes valores para ambos segmentos, logrando establecer una relación cuantitativa.

Como se ha expresado en los otros casos, hay diferentes razones de por qué se integran los niveles, en este caso, el nivel pre-proporcional funciona como proceso de comprobación para llegar a un razonamiento proporcional, por lo que no se considera evolución, es decir, los participantes del equipo cuatro, previo a este fragmento ya habían llegado a establecer la relación a partir del factor multiplicativo “3”, pero en la necesidad de comprobar todos los casos posibles, se ubica al deslizador en 15 sabiendo previamente que el producto de 15 por 3 es 45. Al mover el deslizador el micromundo contribuye a su razonamiento mostrando que efectivamente el segmento mayor mide 45.

En resumen, se ha evidenciado que los niveles se pueden relacionar por diferentes motivos, tales como justificar procedimientos incorrectos, a partir de una corrección, uso de razonamientos más sencillos para explicar razonamientos más complejos y como medio de comprobación. A partir de ello, se puede identificar que todas estas causas de relación tienen en común la complementación a un razonamiento principal, es decir que uno de los niveles puede estar en función de otro, por ejemplo, en el caso de la explicación de razonamientos más demandantes como el pre-proporcional o proporcional, los razonamientos de menor actividad matemática como el aditivo o cualitativo están en función a los primeros; otro ejemplo, en justificación de procedimientos erróneos el razonamiento aditivo está en función del incompleto. En síntesis, la relación de niveles favorece procesos como la justificación, corrección, explicación y comprobación de situaciones proporcionales.

4.4 Evolución de niveles de RP

Desde el planteamiento del problema se ha expuesto que los fines de este trabajo no tienen que ver con procesos de aprendizaje o prácticas de enseñanza, pero al estar en un espacio educativo es imposible limitar a los estudiantes a que aprendan o desarrollen nuevas habilidades.

En este apartado se muestra que a pesar de no tener como intención principal la enseñanza, los alumnos pueden desarrollar aprendizajes dentro de las actividades propuestas, los cuales son evidenciados a partir de la evolución de niveles de razonamientos.

Ante estas evoluciones de razonamiento, ¿qué elementos promovieron dicha evolución?, ¿el micromundo intervino en la adquisición de aprendizajes?, ¿las intervenciones por parte del aplicador favorecen la evolución de razonamientos? A lo largo de cada interacción se busca explicitar qué determinó dicha evolución y qué papel jugó cada uno de los tres ejes de este trabajo: micromundos, RP y telesecundaria unitaria.

4.4.1 Evolución incompleto – pre-proporcional

La primera evolución corresponde al razonamiento incompleto, el cual es el nivel inicial en la propuesta de Karplus et al. (1983) y al nivel pre-proporcional, en el que se comienzan a

establecer relaciones multiplicativas. Una aclaración importante respecto a la evolución entre niveles, es que no necesariamente se tiene que pasar por los niveles que se ubican intermedios, por ejemplo, en esta evolución no se evidencia que los alumnos involucren razonamientos cualitativos o aditivos, sino que de manera directa modifican su razonamiento a uno más sofisticado, tal como se muestra en la siguiente interacción correspondiente a la actividad 3:

E-2.1: Esperen, a ver si funciona /abre función de segmento de longitud dada/ ¿cuánto mide ésta? Mide de 20, entonces es 10

E-2.2: Pero así no va a salir E-2.1

E-2.1: Yo digo

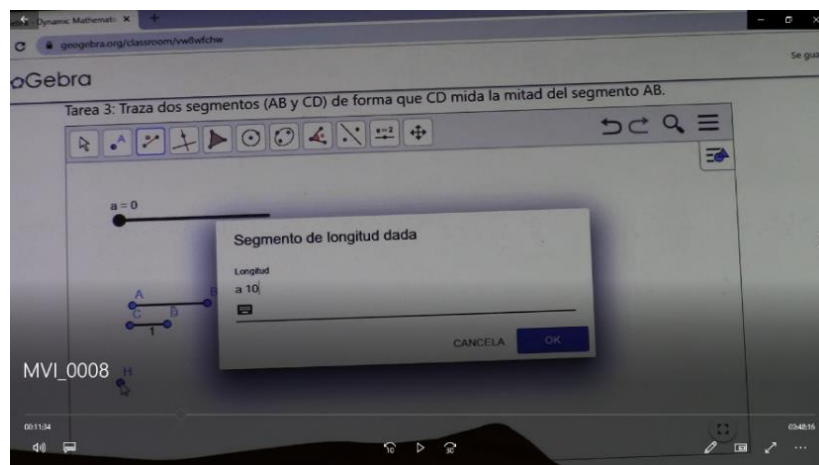
/Elimina el 10, y el segmento es igual a “A” /

E-2.2: Pues salió lo mismo

E-2.1: Sí, pues si voy a intentar así /Abre menú del segmento de longitud dada y coloca a10/

Figura 29.

Actividad 3, exploración para trazar el segmento, primer intento (incorrecto). Evolución incompleto-pre-proporcional



Ap: ¿Por qué “a10”?

E-2.1: Porque es la mitad de éste /señala al deslizador/

Ap: A ver, ponlo así, a ver qué te da

/activa el segmento de longitud dada/

Ap: Sí te dio el de acá abajo. A ver, ponlo en 1 por ejemplo /E-2.1 lo realiza/ Ok, ¿cuánto vale este?

E-2.1: Uno

Ap: Y, ¿este?

E-2.1: Diez. Entonces tendría que ser 0.5

Ap: A ver, chequen

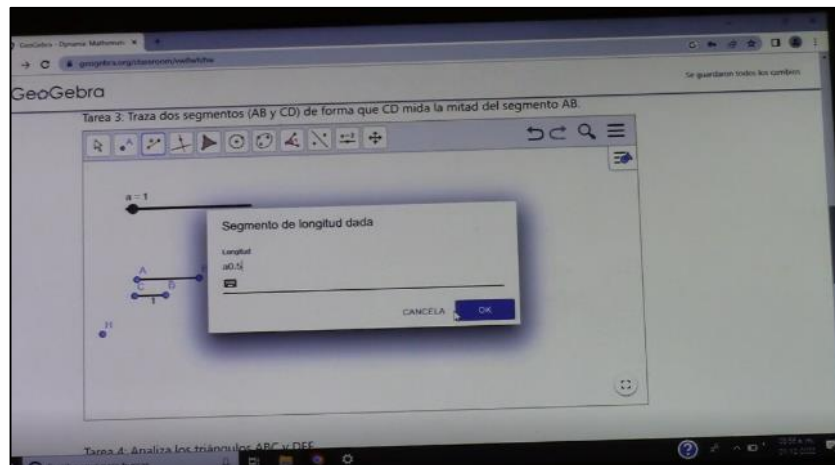
E-2.1: Borra primero ese

E-2.2: A ver

/E-2.1 traza el nuevo segmento de longitud dada/

Figura 30.

Actividad 3, exploración para trazar el segmento, segundo intento (correcto). Evolución incompleto-pre-proporcional



E-2.1: Ay ta, la mitad de ese /comparando con el otro segmento/ Mira, si es la mitad éste llega a 10

Ap: ¿Qué paso?

E-2.1: Le pusimos por 0.5 y ya quedo a la mitad

Ap: A ver, ahí está en 5, y ¿este?

E-2.2: En 2.5

Ap: ¿Cómo le hicieron?

E-2.2: Le pusimos “a0.5”

Ap: ¿a0.5? ahí, ¿por qué sería por 0.5?

E-2.2: Porque era la mitad de 1, de lo del deslizador

En su mayoría, la interacción es del tipo alumno-alumno, a excepción de algunas participaciones del aplicador, por lo que en algunos momentos es aplicador-equipo. Cuando el aplicador interviene lo hace en forma de ayudas indirectas, pues ofrece oportunidades para que los alumnos formalicen sus hipótesis y puedan aproximarse a la solución. Respecto a los componentes, todos los diálogos están guiados por el lenguaje de GeoGebra, por tanto, el componente técnico es el que permite los razonamientos desarrollados.

La interacción se puede dividir en tres partes: exploratoria (nivel incompleto), consecutiva (evolución al razonamiento pre-proporcional) y resolutive (razonamiento pre-proporcional consolidado).

Exploratoria. En la búsqueda de herramientas, procedimientos o hipótesis que pudieran ayudar a construir la relación entre dos segmentos, el participante E-2.1 comenta a las demás integrantes del equipo “¿cuánto mide esta? Mide de 20, entonces es 10”, después de ello interactúa con el menú de la herramienta segmento de longitud dada, en donde coloca “a10”. En este primer acercamiento se evidencia un razonamiento incompleto, puesto que al introducir “a10”, la razón que se obtendría sería de 10:1, razón que no cumple con el objetivo de la actividad.

Ante la posible solución, el aplicador pregunta “¿Por qué “a10”?”, a lo que E-2.1 responde “porque es la mitad de este” y señala al deslizador. En ese momento específico el deslizador tenía un valor de 20, por lo que se aprovechan de ese valor para determinar el tamaño del otro segmento que sería 10. Se identifica que la dificultad radica en el manejo de herramientas del micromundo, ya que saben que el nuevo segmento debe de medir la mitad, pero no logran identificar de qué forma deben integrar los datos en las herramientas relacionadas.

Consecutiva. Continuando con la transcripción, después de que el equipo diseñó un segmento a partir de la razón 10:1 el aplicador pregunta por los valores de ambos segmentos, a lo que responden uno y diez, y el alumno E-2.1 menciona “entonces tendría que ser 0.5”. En esta ocasión gracias a las ayudas indirectas del aplicador pudieron reconocer que el factor multiplicativo necesario era de 0.5, identificando este momento como la evolución del

razonamiento incompleto al pre-proporcional, ya que, gracias a la exploración desde el razonamiento incompleto, pudieron modificar el factor multiplicativo para a su vez obtener como consecuencia los dos segmentos en una relación 0.5:1.

Resolutiva. A partir de la transformación de razonamiento, los integrantes del equipo trazan el nuevo segmento con la herramienta de longitud dada, definiéndolo como “a0.5”, logrando identificar que se conserva la relación establecida a partir del deslizador. Los alumnos comparten con el aplicador que integraron el 0.5 y éste pregunta “¿por qué sería por 0.5?” a lo que los alumnos responden “porque era la mitad de 1, de lo del deslizador”. De acuerdo a la última respuesta es que llega solo hasta un razonamiento pre-proporcional, ya que, toma como referencia el valor de 1 del deslizador para relacionarlo con el factor multiplicativo de 0.5, lo cual no es evidencia de que logren identificar que el 0.5 no solo regula cuando el valor del deslizador es 1, sino también en todos los casos posibles de acuerdo al valor máximo del deslizador.

En conclusión, en esta evolución las ayudas indirectas del aplicador y el componente técnico determinaron el cambio de razonamiento, puesto que hacen uso del lenguaje que proporciona GeoGebra y a su vez el aplicador brinda preguntas que permiten reafirmar o modificar sus procedimientos.

4.4.2 Evolución cualitativo – pre-proporcional

A diferencia de la interacción anterior, en esta evolución los niveles son próximos (considerando al nivel aditivo como erróneo), identificándolos en la siguiente interacción, la cual corresponde a la actividad dos:

Ap: ¿Qué dicen acá? Ya vieron que el segmento pequeño mide lo mismo que el deslizador, ¿qué pasa con el otro? /refiriéndose al E-2/

E-2.1: Está grande

E-2.2: Pero ésta, esa se....

Ap: ¿Está grande?

E-2.2: Si...pero, ¿cómo se puede decir?

Ap: Ok, a ver platíquenlo

E-2.3: ¿Cómo se puede decir?, es que, ¿cuántas veces el 24 es el 8?

E-2.1: tres por ocho

E-2.2: Ahí está, engrandece tres veces más

La interacción está dada por el aplicador y los alumnos pertenecientes al equipo 2, por tanto, es una interacción del tipo aplicador-equipo, en donde las intervenciones que realiza el aplicador son ayudas directas e indirectas, por ejemplo, al retomar “ya vieron que el segmento pequeño mide lo mismo que el deslizador” es una ayuda directa que establece una relación que se había acordado con anterioridad, pero en sus participaciones restantes son ayudas indirectas. El componente del micromundo que se observa es el contextual, dado que la interacción se da a partir los intercambios de los alumnos, aclarando que los tres alumnos que intervienen pertenecen a diferente grado escolar (E-2.1 primer grado, E-2.2 segundo grado y E-2.3 tercer grado).

A partir del cuestionamiento “¿qué pasa con el otro?” los participantes establecen un razonamiento cualitativo al exponer que “esta grande”, pero logran identificar que hay algo más cuando la alumna E-2.2 menciona “si...pero, ¿cómo se puede decir?”, duda que su compañera complementa al preguntar “es que cuántas veces el 24 es el 8”. Justo en este momento es cuando se establece una evolución de razonamiento, es decir, deja atrás el análisis cualitativo para dar paso a establecer una relación cuantitativa.

Al concluir que “se engrandece tres veces más” se evidencia la transformación del razonamiento, de forma que los participantes pueden desarrollar razonamientos con mayor carga cognitiva a partir de niveles más sencillos. Cabe mencionar que este tipo de evoluciones depende del grado de dificultad de la actividad, así como la localidad de la situación, es decir, hay actividades en donde los alumnos se sienten con mayor confianza para poner en juego más procedimientos o hipótesis generando en ellos mayor conocimiento, y hay actividades donde los alumnos no puedan desempeñarse de la misma manera, por ejemplo, actividades de análisis y de diseño.

En el caso de las actividades de análisis (dos y cuatro) los alumnos expresaron mayor confianza en el manejo de los recursos del micromundo, por lo que se considera que este tipo

de actividades los acercan a un razonamiento más formal y sobre todo a desprenderse de los razonamientos que pueden llegar a ser incorrectos, como el incompleto o el aditivo. Cabe señalar que no es el aplicador el que les dice que hacer o que ideas desarrollar en el micromundo, sino que son los alumnos los que integran sus saberes individuales al momento de atender situaciones en colectivo.

Por otro lado, en las actividades de diseño (tres y cinco) a pesar de que los alumnos muestran mayor discusión, negociaciones o buscan resignificar algún elemento, las construcciones que llegan a hacer no muestran evidencia de un razonamiento más formal como el pre-proporcional, sino que se apoyan de lo que más conocen como la adición o las descripciones cualitativas.

4.4.3 Evolución pre-proporcional – proporcional

Para la evolución del nivel pre-proporcional al proporcional se da continuidad a la interacción anterior, en donde se puede identificar la formalización del razonamiento:

E-2.1: Se engrandece tres veces más

E-2.2: Es como si se multiplicara el ocho por 3, porque cuando estaba en 1 /el deslizador/ esta media uno /segmento pequeño/ y esta media tres /segmento grande/ entonces es el triple

En esta ocasión el fragmento es muy pequeño, y da muestra solo de un intercambio entre dos participantes, por lo que la interacción es alumno-alumno, y se puede identificar como una interacción resolutive de la actividad, ya que en la última línea se puede identificar la relación entre los segmentos.

¿Cuál es la diferencia entre “se engrandece tres veces más” y el análisis que establece la alumna E-2.2? mientras que en la primera situación hace referencia a que se engrande tres veces más a partir de la relación entre 8 y 24 que hicieron con anterioridad, en la explicación que hace la alumna E-2.2 se visualiza la existencia de la igualdad de razones, ya que primero menciona “es como si se multiplicara el ocho por 3” comparando a cuando “estaba en 1, esta media uno y esta media tres”, ideas que se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{24}{8} = \frac{3}{1}$$

Si bien, la alumna no lo expone de esta manera, reconoce que la misma razón será funcional para todos los casos posibles que se logren establecer con el deslizador. En esta ocasión la evolución de nivel dependió de los intercambios de experiencias y saberes descubiertos a partir de la situación, es decir que el micromundo potencializa el aprendizaje colectivo dentro del aula unitaria.

En conclusión, la evolución de niveles se da a partir de las situaciones que ofrece el micromundo, las interacciones entre los mismos alumnos y las intervenciones por parte del aplicador, es decir, gracias a estos elementos se generan oportunidades de aprendizaje de manera simultánea con el objetivo del proyecto, que a su vez se traduce como el desarrollo de razonamientos más elaborados.

La evolución de niveles también, es una prueba de que los alumnos pueden razonar de manera distinta de acuerdo a la situación, las herramientas empleadas e inclusive los intercambios entre pares, es decir, los niveles no son mutuamente excluyentes y pueden existir transformaciones durante la misma resolución de las actividades sin brindar una enseñanza directa de ellos.

4.5 Análisis de elementos complementarios

A partir del análisis de los niveles de RP y el tratamiento de los datos, se observaron tres situaciones particulares, cada una de ellas correspondientes a uno de los ejes centrales del trabajo (RP, telesecundaria unitaria y micromundos), resaltando que se han considerado como parte de los resultados debido a su presencia en todos los equipos de trabajo, por lo que se consideran generalidades en la muestra del estudio.

4.5.1 Preferencia por el uso de proporciones enteras que por las no enteras

Dentro de las actividades tres y cinco (construcción de dos segmentos bajo una razón 0.5:1 y construcción de un mosaico bajo una razón 1.5:1) se observó que los participantes buscaban

construir razones a partir de números enteros, y en caso de obtener un número racional en una relación direccional, optaban por eliminar sus construcciones.

En la actividad 3, se identificó que los cuatro equipos tuvieron interacciones similares

Equipo 1

O-1: E.1,1 y E-1.3 quieren un segmento que no tenga número (que no tenga decimal, que sea cerrado)

E-1.3: Que no tenga punto

Equipo 2

E-2.1: La mitad de 3.82, 1.50 y...

E-2.2: 2.5, punto

E-2.1: Ay, haz algo tu /refiriéndose a E-2.2/

E-2.3: ¿41?

E-2.2: Es que ¿por qué no queda un número natural?

Equipo 3

E-3.2-. ¿Entero? El número

E-3.1: Si, mejor, ponle ahí

Equipo 4

E-4.1: Ya ahí esta

E-4.4: Ahora pon bien el chiquito

/E-4.1 busca que el segmento tenga un número entero/

Las cuatro interacciones son del tipo alumno-alumno, debido a que suceden al interior de cada equipo, además de que por su tipo se clasifican como interacciones exploratorias, ya que buscaban un valor para el deslizador o el segmento que les funcionara o resultara más sencillo para trabajar.

Si bien la interacción se genera en torno al componente técnico, es el componente estudiantil el que tiene mayor presencia en estos intercambios, debido a que en la necesidad de trabajar con números enteros se evidencia la ausencia de algunos saberes que aún no han sido desarrollados por los alumnos. La afinidad hacia los números naturales en situaciones proporcionales tiene relación con los elementos cognitivos desarrollados por Karplus et al. (1983), los cuales son pasos en el RP identificados en uno de sus trabajos (situación de la limonada: partes de agua y partes de concentrado), y uno de ellos es el de comparar o construir razones no enteras iguales, es decir establecer una razón entre dos sucesiones multiplicativas pertenecientes a dos magnitudes diferentes o relacionadas, por ejemplo, en el problema tres, en la búsqueda de una razón 0.5:1, los alumnos no logran identificar que independientemente del valor del segmento a , la construcción del segmento b dependerá del factor 0.5 y no del valor inicial de segmento a .

Como trasfondo en la elección de números enteros, se encuentra un razonamiento aditivo, lo que genera un modelo intuitivo defectuoso (Ben-Chaim et al., 2012) como la multiplicación intuitiva mediante sumas repetidas o la división por partición (como en el caso de la relación de los niveles incompleto- cualitativo – aditivo - pre-proporcional), en donde los participantes están convencidos que el cociente es menor que el dividiendo, y que el divisor es menor que el dividiendo, el cual siempre debe ser entero, por tanto, cuando se encuentran con una situación diferente a sus expectativas, retoman al trabajo con números enteros.

En resumen, se puede decir que los participantes recurren a trabajar con números enteros debido al poco tratamiento de números racionales para establecer razones, además de que implica saberes como las relaciones multiplicativas, el uso del sistema decimal y el dominio de las herramientas necesarias en el micromundo, porque el tener mayor habilidad en las herramientas, podría ayudar a distinguir si la decisión de los alumnos es por cuestiones cognitivas o procedimentales.

4.5.2 Resistencia al trabajo con computadora

Dentro de varios referentes teóricos, se menciona que los alumnos se sienten motivados e interesados en el trabajo apoyado por recursos tecnológicos (Cruz y Puentes, 2012; Jiménez,

2019; Gamboa, 2007), sin embargo, en este estudio se encontró que los alumnos tienen resistencia.

Durante la aplicación de las actividades, se observó que los alumnos realizaban comentarios del siguiente tipo:

E-2.3: Yo mejor no le muevo nada

E-1.2: No, yo ya no le voy a mover a esta, le mueves tu

E-3.2: Ay no, yo no le voy a mover ahí /refiriéndose al menú de redefine/

E-4.3: Pero yo no sé nada

Al interior de los cuatro equipos se identificaron diferentes momentos que mostraban una resistencia al uso de la computadora, por diferentes razones, por ejemplo, en algunos casos los alumnos se limitaban al uso de la computadora por el riesgo de presionar alguna tecla o hacer algún movimiento que pudiera descomponer el equipo, situación que puede tener referencia con la falta de uso en la vida escolar.

Por otro lado, se identificó que en algunos casos la resistencia se originaba a partir de las actividades, debido a que los alumnos no exploraban las herramientas por temor a eliminar la actividad, o en todo caso a modificar lo que ya habían construido. Otro de los factores que influyó en la resistencia tiene que ver con la habilidad desarrollada en las herramientas de GeoGebra, ya que, en algunos casos (actividad 5), las construcciones necesarias implicaban un conocimiento más amplio de los recursos que ofrecía el micromundo.

Si bien, en la actualidad la tecnología permea en la vida cotidiana, pocas veces está relacionada con los conocimientos o habilidades desarrolladas por los alumnos, en cambio la presencia de la tecnología es referente de actividades de ocio (Heredia y Quiñonez, 2022), o inclusive, dentro del aula se conservan las actividades de estudio tradicionales, como hacer o leer apuntes, repasar la lección, consultar enciclopedias o hacer alguna tarea (Mondragón, 2008).

Por ende, en este estudio observamos que no en todos los casos los alumnos muestran interés o se sienten motivados, y los factores involucrados tienen que ver con la falta de presencia

de los recursos tecnológicos (micromundos específicamente) en la construcción o la integración de saberes entre pares, en su vida escolar cotidiana.

Es importante recordar que las actividades se llevaron a cabo en un ambiente de investigación y exploración, involucrando actores externos a su vida cotidiana, tales como el aplicador y los observadores, situación que pudo mediar el acercamiento de los alumnos al uso de la computadora, sobre todo, en las situaciones donde se puede observar el temor por borrar “algo” o afectar la actividad, llegando a pensar que sería motivo de alguna llamada de atención.

Otro de los factores mediadores en la resistencia del uso de la computadora, es que los participantes no habían tenido contacto con GeoGebra previamente a este estudio, además de que los alumnos no disponían de una computadora para el uso individual en el trabajo por equipo, por tanto, la participación de algunos alumnos se limitaba a las sugerencias o los aspectos que observaban. Al igual que estos aspectos contextuales, indagando con la maestra titular del grupo se expuso que el uso de la tecnología en clase no es una práctica regular, por lo que varios alumnos desconocen funciones básicas en el uso de la computadora.

4.5.3 Extensión del micromundo: recursos tangibles

Teniendo en cuenta que una de las posibilidades de los micromundos son los objetos transicionales (intermediarios entre lo concreto y lo manipulable) (Noss y Hoyles, 2019), se observó que los participantes recurrieron al uso de recursos tangibles como elementos del micromundo, tal como se muestra en las siguientes interacciones

Primera interacción

E-2.1: A ver, vamos a dividirlo

E-2.3: Con la regla

E-2.1: Ándale, ¡ah sí!

E-2.3: ¿La regla?

E-2.1: A ver

E-2.3: Sí, ¿no?

O-2: Los participantes no saben cómo trazar el segmento del tamaño que quieren y utilizan una regla real para medirlo

Segunda interacción

E-1.2: A ver, haz otro acá

/E-1.1 intenta borrar el segmento/

E-1.2: No, no, a ver espérate

E-1.3: No, no, no, hay que ponerle unas marcas, o así para saber donde

E-1.2: Con este /toma un plumón y hace una marca/

Ambas interacciones corresponden a la actividad 3 (trazo de dos segmentos a partir de la razón 0.5:1) y son del tipo alumno-alumno con una intención exploratoria, debido a que recurren a elementos como la regla o marcador, fuera del ambiente virtual como una opción para el trazo de los segmentos. Esta situación involucra de forma directa el componente contextual y el estudiantil, dado que los alumnos reconocen que cuentan con elementos que les permiten cumplir con el objetivo de la actividad, a pesar de que estos no se integren en las herramientas de GeoGebra.

Respecto a la primera interacción el recurso del que se sirven los participantes es la regla, y lo hacen con la intención de conocer la medida que debe de tener un segundo segmento, ya que buscan conocer el valor de un segmento original; se considera que los alumnos no reconocen dentro de las herramientas de GeoGebra la función de valor. A pesar de ello, el recurrir a elementos tangibles, es la muestra de que los micromundos salen del ambiente virtual e integran todos los componentes que lo conforman, es decir, dentro del componente contextual, los alumnos se hacen parte del micromundo y se sirven de los elementos disponibles, observando la regla como objeto transicional entre lo concreto que sería la relación con la división del segmento y lo tangible que tiene que ver con las herramientas involucradas en el trazo de los segmentos.

En la segunda interacción, el recurso del que hacen uso los alumnos es un marcador, el cual resulta un objeto cotidiano en la vida escolar, pero en esta ocasión el micromundo le otorgó un valor de referencia, es decir, a partir de colocar algunos puntos, los alumnos trataban de

localizar de qué punto a qué punto debería ir el segmento para corresponderse con otro más. Al igual que en la primera interacción, el hacer uso de recursos adicionales a las herramientas de GeoGebra, rompe con la idea de que no hay acción fuera de la tecnología, puesto que los alumnos no se han limitado solo al entorno virtual.

Por tanto, se concluye que el uso de recursos adicionales no es un error en la búsqueda de RP a partir de los micromundos, sino que, dentro de la tecnología educativa, los alumnos se pueden servir de elementos tradicionales, así como de las herramientas que ofrecen los recursos tecnológicos (Torres y Cobo, 2017). A pesar que este aporte se relaciona con los procesos de enseñanza-aprendizaje, se considera que tanto los recursos tangibles como las herramientas del micromundo, cumplen con su función en torno a la exploración del RP, además de que se exhibe el paradigma construccionista por medio de la exposición de las construcciones internas que tienen los participantes y las ponen de manifiesto como conocimiento compartido en la búsqueda de atender la situación.

4.6 Síntesis de resultados

A partir de los hallazgos mencionados, se busca hacer énfasis en aquellos elementos que son importantes de considerar como parte de una síntesis de los resultados, retomando lo siguiente:

- La integración de las interacciones, los niveles de RP y los componentes del micromundo como base para el análisis, ayudan a visualizar lo que sucedía al interior de cada equipo, permitiendo observar a detalle la intención de la interacción, la inmersión de los participantes en el micromundo y el RP con el que los alumnos atendían a las diversas situaciones.
- En el caso del RP incompleto, se observó la presencia de dos razonamientos distintos, por un lado, un razonamiento no proporcional basado en elementos ajenos a la proporcionalidad, y por otro lado un razonamiento proporcional incompleto basado en relaciones proporcionales incorrectas.
- El razonamiento cualitativo puede ser descriptivo o relacional, es decir, mientras que el primero se limita a describir lo que está sucediendo, en el segundo se ponen de

manifiesto algunas relaciones que formalizan lo que sucede en la situación en términos proporcionales.

- En las interacciones donde se observa el razonamiento aditivo se considera que es utilizado por los participantes como un razonamiento de confianza, es decir, al no poder establecer relaciones multiplicativas buscan factores aditivos que los puedan auxiliar al momento de establecer relaciones proporcionales. Recordando que los alumnos adquieren en la escuela primero las relaciones aditivas y posteriormente las relaciones multiplicativas, por ello recurren a las primeras.
- Con respecto al razonamiento pre-proporcional y proporcional, se consideran razonamientos cuantitativos correctos, en donde el primero se centra principalmente en una relación única de dos elementos, mientras que el proporcional establece una generalidad en la relación proporcional de dos magnitudes. Además, los alumnos de telesecundaria unitaria de este estudio muestran niveles de razonamiento pre-proporcional y proporcional en situaciones de análisis construidas en el micromundo a diferencia de las actividades de construcción donde se muestran niveles inferiores.
- Cuando se relacionan dos o más niveles de RP, se ha evidenciado que puede ser por diferentes motivos, tales como justificar procedimientos incorrectos, a partir de una corrección, uso de razonamientos más sencillos para explicar razonamientos más complejos y/o como medio de comprobación, pero en general uno de los niveles está en función de otro, por ejemplo, un razonamiento básico como el cualitativo puede estar en función del nivel proporcional.
- La evolución de niveles se da a partir de las situaciones que ofrece el micromundo, las interacciones entre los mismos alumnos y las intervenciones por parte del aplicador, es decir, el micromundo (contemplando todos sus componentes) propicia oportunidades de aprendizaje de manera simultánea con el objetivo del proyecto, pero que a su vez se traduce como el desarrollo de razonamientos más elaborados.
- En el caso de los elementos adicionales del análisis se concluye que los participantes recurren a trabajar con números enteros debido al poco tratamiento de números racionales para establecer razones, que hay resistencia al uso de la computadora debido a que no es actividad recurrente en la vida escolar además de no contar con

un buen dominio de las herramientas del micromundo; y por último la integración de recursos tangibles en el micromundo, es una ejemplo de la inmersión de los alumnos en este espacio de exploración, lo que indica que si hay acción fuera del espacio virtual en un micromundo.

A partir de la síntesis de los resultados, en el siguiente capítulo se expondrán las conclusiones particulares a cada uno de estos hallazgos, así como las conclusiones generales de todo el trabajo realizado.

Capítulo 5. Conclusiones

El trabajo presentando reconoció la problemática de que existen diferentes aproximaciones por las cuales los alumnos resuelven situaciones proporcionales, reconociendo que algunas de ellas no son adecuadas o no permiten el desarrollo del razonamiento proporcional, tales como la regla de tres o la relación aditiva.

De acuerdo a esta problemática se seleccionó como muestra a alumnos de telesecundaria unitaria, debido a que las interacciones que se generan entre pares y con el docente representan una riqueza en la diversidad de conocimientos, experiencias y saberes.

A partir de estas consideraciones se aplicó un conjunto de actividades exploratorias basadas en niveles de razonamiento proporcional e integradas a un micromundo, el cual es un espacio de exploración y una oportunidad para construir saberes en colectivo.

A partir del marco teórico y la metodología diseñada se planteó como objetivo general explorar el razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a través de la interacción con micromundos, obteniendo los resultados expuestos en el capítulo anterior, con los cuales se pudo llegar a las conclusiones siguientes.

5.1 Niveles de razonamiento

Como se describió en el capítulo dos, la intención de utilizar los niveles de razonamiento proporcional propuestos por Karplus et al. (1983) no era ubicar a todos los participantes en un nivel y tampoco considerar que todos razonaban de la misma manera, por ello, los niveles fungieron como categorías de análisis, en donde se pudieron encontrar los siguientes hallazgos.

Respecto al nivel incompleto, el hallazgo principal fue observar que este nivel puede presentarse de dos maneras, la primera de ella es desde una relación multiplicativa errónea, esto puede ser al relacionar de manera incorrecta los datos del problema, o tomar en cuenta datos innecesarios o que no tienen que ver directamente con la relación proporcional.

Por otro lado, se consideró que cuando los participantes recurrían a otro tipo de elementos que no se relacionaban proporcionalmente, también se incluían en un razonamiento incompleto porque no lograban observar dicha relación, por ejemplo, cuando en el problema 4 (relación de dos triángulos semejantes) se les preguntó si existía alguna relación entre los triángulos, las primeras respuestas tenían que ver con la congruencia del ángulo de 90° , o en unos casos particulares mencionaron que los triángulos eran iguales.

De acuerdo a lo observado, Öztürk et al. (2021), menciona que en ocasiones los estudiantes se obsesionan con los números dados en la pregunta, en lugar de concentrarse en sus relaciones, situación que fue observada cuando los participantes sabían que había una relación pero no de qué tipo, y sus esfuerzos se centraban en rescatar los datos que otorgaba la situación, por ejemplo, como se mostraba en el resultado del nivel incompleto proporcional, en el cual los participantes sabían que había una relación entre el 8 y el 24, pero empleaban un factor multiplicativo erróneo.

En resumen, se puede concluir que el razonamiento incompleto que mostraron los participantes puede ser proporcional o no proporcional, el primero es una relación incorrecta y el segundo se limita a aspectos observables que en su mayoría son erróneos o no establecen una relación proporcional. Cabe aclarar que fue uno de los razonamientos más presentes, pero en la mayoría de los casos tenía relación con el desconocimiento de GeoGebra, situación que será discutida más adelante.

Por otro lado, otro de los razonamientos que estuvo muy presente durante el estudio es el cualitativo, lo cual tiene sentido recordando que, el razonamiento proporcional comienza en edades tempranas de esta manera (Sánchez, 2013; Butto et al, 2019) y que es un razonamiento al que acuden los alumnos de secundaria con facilidad.

Tomando en cuenta lo anterior, en el estudio se pudo observar que todos los razonamientos que buscaban dar respuesta a las actividades comenzaban de manera cualitativa, lo cual permitió distinguir entre dos tipos de razonamiento cualitativo: descriptivo o relacional.

El razonamiento cualitativo descriptivo hace referencia a las relaciones que establecieron los participantes sólo considerando aquellos elementos que eran observables en pantalla y que

no necesariamente requerían de alguna acción o de poner en juego algún procedimiento o negociación. Por otro lado, el razonamiento cualitativo relacional, refleja las relaciones que establecieron los participantes tomando en cuenta elementos operatorios o inclusive estableciendo relaciones proporcionales no numéricas.

Por ejemplo, una respuesta del tipo “son diferentes” o “uno es más grande y uno más chico”, se quedan en un nivel descriptivo, dado que sólo representa lo que los alumnos estaban viendo en pantalla, por otro lado, una respuesta “entre más así más así” logra establecer una relación a partir de una operación en donde ellos se dieron cuenta que a partir de una acción se mantenía una relación donde ambos segmentos crecían, pero en diferente proporción.

El hallazgo respecto al razonamiento cualitativo coincide con múltiples estudios (Heller et al., 1989; Díaz et al., 2007; Buforn y Fernández, 2014; Behr et al., 1992), que mencionan que surge como un primer acercamiento a las situaciones de RP, en especial, Kahraman et al. (2019), lo reporta como el abandono de datos, lo cual refiere a que los participantes no toman en cuenta los elementos numéricos en la conformación de una relación proporcional.

Adicionado a lo que mencionan los autores, en este estudio también se observó que el razonamiento cualitativo no solo se hace presente como un primer acercamiento a una situación proporcional, ya que en algunos casos los participantes lo utilizaron como un apoyo para explicar o argumentar algún procedimiento cuando no era claro lo que estaba sucediendo, por ejemplo, en la actividad 4 se le cuestionó al equipo 1 si de verdad había una relación entre los triángulos después de que sus áreas estuvieran en una relación de 0.5:1, a lo que ellos respondieron al comienzo que sí, pero no lograban justificarlo de manera cuantitativa, por tanto, recurrieron a decir que no había relación porque los triángulos no se parecían.

Por tanto, se concluye que el razonamiento mostrado por los alumnos corresponde tanto a un primer acercamiento como a un razonamiento de apoyo para comprender situaciones que no llegan a establecer de manera cuantitativa, de forma que el razonamiento cualitativo continúa siendo un apoyo para todos independientemente del grado escolar en el que estén registrados.

En lo que respecta al razonamiento aditivo se expresa que los participantes hacen uso de él como una estrategia de confianza, sobre todo cuando los datos son números naturales y su reiteración es evidente. Si bien, en algunos casos el empleo de la relación aditiva fue funcional, en la mayoría de veces que se hizo presente representó un razonamiento erróneo, por ejemplo, cuando se consideró para buscar una relación entre los dos triángulos de la actividad 4, o cuando se empleó para construir el mosaico en la actividad 5.

Entonces, ¿por qué en algunas ocasiones es adecuada y en otras no? Para ello Block (2014) diferencia entre dos tipos de razones: aritmética y geométrica, en donde la primera hace referencia a cuánto más es una cantidad que la otra, y en el caso de la geométrica expresa cuántas veces una cantidad es la otra, es decir su cociente. Por el tipo de actividades diseñadas y las propiedades de GeoGebra, la razón aritmética no era funcional para establecer relaciones proporcionales, por tanto, esta aproximación se considera errónea.

A pesar de que fue un razonamiento que no estuvo muy presente durante todas las actividades, llama la atención como los alumnos recurren a este razonamiento cuando no logran establecer una relación multiplicativa, lo cual lleva a considerar que es más fácil para los participantes establecer una diferencia que un cociente, por ejemplo, en la actividad 5, para la mayoría fue más fácil distinguir que entre 3.5 y 5.25 había una diferencia de 1.75, que identificar un factor multiplicativo de 1.5, situación que lleva a la pregunta ¿el uso de razones no enteras influye en el RP al que los participantes recurren? Ante esta pregunta Fernández y Llinares (2012) en su estudio donde brindan características sobre el desarrollo del RP en primaria y secundaria, comentan que cuando la relación entre las cantidades no es entera, es más difícil la identificación e iteración de la unidad para resolver la situación. De ahí que los estudiantes consideren métodos de resolución basados en relaciones aditivas.

Respecto a los últimos niveles (pre-proporcional y proporcional) se concluye que difícilmente se hacen presentes como el primer razonamiento al que acudían los participantes, ya que la mayoría de veces estos razonamientos surgían después de las interacciones al interior de los equipos, en plenaria e inclusive con el aplicador (este punto será expuesto más adelante).

La intención de analizar los dos últimos niveles de manera conjunta se debe a que, a partir del análisis de las interacciones de los participantes, se observó que la diferencia entre estos niveles es mínima y tiene que ver con el uso que le den a la razón, es decir, si logran emplearla sólo para una relación directa entre dos datos, se queda en un nivel que representa sólo un factor multiplicativo, en cambio si los participantes lograban observar que “ese” dato les permitía conocer cualquier valor de la variable dependiente, a pesar de que ellos no lo expresaran con el termino adecuado, estaban encontrando la razón.

En conclusión, se pudo identificar que el nivel proporcional no sólo refiere a la igualdad de dos razones como lo define Karplus et al. (1983), ya que los alumnos lograban establecer una relación multiplicativa identificando inicialmente como factor multiplicativo (nivel pre-proporcional) lo que algunos llegaron a identificar como razón para múltiples relaciones entre dos datos correspondientes a dos magnitudes (nivel proporcional); es decir, considerar que un nivel proporcional sólo se logra cuando se establece una igualdad de razones es limitar la diversidad de razonamientos y procedimientos que hacen los alumnos, sobre todo considerando que el RP también implica la habilidad de discriminar situaciones proporcionales de las que no lo son (Modestou y Gagatsis, 2010).

Uno de los hallazgos más importantes del trabajo fue evidenciar que los niveles se pueden relacionar por diferentes motivos, tales como justificar procedimientos incorrectos, a partir de una corrección, uso de razonamientos más sencillos para explicar razonamientos más complejos y como medio de comprobación. A partir de ello, se identificó que todos estos motivos de relación tienen en común la complementación a un razonamiento principal, es decir que uno de los niveles está en función de otro, por ejemplo, en el caso de la explicación de razonamientos más demandantes como el pre-proporcional o proporcional, los razonamientos de menor actividad matemática como el aditivo o cualitativo están en función a los primeros. En síntesis, la relación de niveles favorece procesos como la justificación, corrección, explicación y comprobación de situaciones proporcionales.

Similar a la relación entre niveles, fue la evolución de un nivel inicial a otro más complejo. Si bien se ha manifestado a lo largo de todo el trabajo que no era un objetivo desarrollar nuevos aprendizajes o nuevos razonamientos en los participantes, fue una situación que se

dio de manera natural de acuerdo a las condiciones en las que se desarrolló la implementación de las actividades exploratorias (descrito más adelante), dando lugar a interacciones que evidencian como se va formalizando el RP, partiendo de nociones incorrectas, luego generando negociaciones entre pares y hasta llegar a un razonamiento proporcional.

Es preciso aclarar que, si bien las interacciones entre pares favorecieron la evolución del RP, las intervenciones por parte del aplicador también tuvieron una influencia importante, ya que en algunos casos las ayudas directas e indirectas mostraron una intencionalidad más allá de la exploración. Recordando los componentes del micromundo, específicamente el pedagógico se justifica que el ambiente cooperativo propicia este tipo de intervenciones, ya que el aplicador se convierte en un apoyo para los alumnos en donde pueden resolver dudas o aclarar procedimientos sin emitir juicios de valor.

Por otro lado, considerando el enfoque construccionista, el rol que juega el agente educativo es como mediador de las construcciones sociales que hacen los alumnos, por tanto, las intervenciones del aplicador si influyeron en el RP de los alumnos, pero con la intención de recuperar sus aportes, socializar lo que dijeron otros equipos, inclusive ayudar a expresar sus ideas o formalizar el lenguaje que empleaban.

Estos aportes (relación y evolución entre niveles) puede compararse con lo que define Karplus et al. (1983) como estrategias de respaldo, las cuales indican que el mismo alumno puede utilizar estrategias de diferentes niveles en problemas de proporciones de diversa dificultad, por ejemplo, puede usar una estrategia multiplicativa en un problema con razones de números enteros, mientras que en un problema con razones que contienen números racionales puede hacer uso de un razonamiento aditivo.

De la misma manera Öztürk, et al. (2021) reporta que las habilidades de razonamiento proporcional difieren según el tipo de problemas. Ambos aportes también tienen relación con lo que se definía como “localidad” en el marco teórico en donde se expresaba que el razonamiento de los alumnos es cambiante, pero entonces, ¿en qué radica la diferencia entre los aportes previos y los observados en este trabajo?

La diferencia principal está en que mientras Karplus y Öztürk reportan que puede existir una diversidad de razonamiento en diferentes situaciones, en este estudio se evidencia que incluso para atender una misma situación los alumnos pueden recurrir a diferentes razonamientos, o que una misma actividad puede generar un desequilibrio respecto al razonamiento con el que comenzaron a analizar la situación, llevándolos a la exploración de nuevos razonamientos, de tal manera que pueden formalizarse los saberes con lo que ya contaban o modificarse.

Respecto a la relación y evolución de niveles, cabe mencionar que está muy relacionado con las ventajas que ofrecen las aulas multigrado, situación que se describe a continuación.

5.2 Las interacciones en multigrado

A partir de que se identificó la problemática se pensó en un tipo de aula que pudiera aportar nuevos hallazgos a los que se ya se conocían respecto al RP, por lo cual se consideró a la telesecundaria unitaria, las diferentes razones ya han sido expuestas en apartados anteriores, pero sin duda una de las grandes ventajas fue la diversidad de interacciones que pueden generarse dentro del salón de clases.

Es cierto que en todos los salones de clases existe diversidad de conocimientos y experiencias, pero en esta ocasión el aula multigrado (unitaria) brinda grandes oportunidades para explorar el RP, además de que se observaron algunas interacciones que ejemplifican la manera habitual de trabajo, por ejemplo, en algunos equipos se identificaron interacciones en donde se busca la integración de todos los participantes, leyendo en las transcripciones líneas como “¿tú qué opinas?, tienes que participar si no cómo vas a aprender”, “fíjate en lo que está haciendo, para que ahorita lo hagas tú” o “¿cómo se hace eso?, tú qué sabes”.

Cada uno de estos ejemplos son muestra que el aula multigrado promueve el aprendizaje colaborativo y es un espacio en donde todos los saberes, experiencias, habilidades y actitudes tienen cavidad. Además, como lo reportan Santos (2006), Boix (2011), Corro y Bolaños (2018) y Block et al. (2014), en las interacciones que se llevaban a cabo dentro de un aula unitaria se negocian los significados, se priorizan las ayudas y se observan roles de tutoría como apoyo a los que tienen mayores áreas de oportunidad.

Respecto a las interacciones se reconoce que éstas fueron un factor determinante en los resultados expuestos en el capítulo anterior, ya que las respuestas que se registran pasaron por la discusión al interior de los equipos, la comunicación de manera grupal, la prueba de hipótesis y la discriminación de estrategias de resolución que no atendían la situación. Por tanto la modalidad unitaria fue determinante para llevar a cabo las actividades pues permite aproximaciones desde los diferentes niveles de RP.

Sin duda las aulas unitarias representan una riqueza para los estudios exploratorios como este, y se puede concluir que las interacciones que se llevan a cabo propician que los alumnos puedan compartir con otros sus razonamientos, así como cuestionarlos y generar razonamientos sólidos colectivos aplicados a los aspectos culturales y sociales a los que pertenecen los alumnos, tal cual lo expone el paradigma construccionista.

Por último, es importante mencionar que las interacciones generadas en el micromundo son las que permitieron caracterizar el RP de los alumnos participantes, y poder llegar a conclusiones como las que han sido mostradas.

5.3 Los micromundos como espacio de exploración

El micromundo ha permitido evidenciar el razonamiento con el que cuentan los participantes, permitiendo establecer relaciones entre lo que ya conocían y lo que están explorando, permitiéndoles probar procedimientos, establecer diálogos de aprendizaje a partir de las actividades diseñadas y descartar ideas a partir del ensayo y error. Cabe señalar que el micromundo no solo lo compone las herramientas integradas en GeoGebra, sino también el diseño actividades, las intervenciones por parte del investigador y el interés generado en los alumnos.

Cabe resaltar, que el micromundo desarrollado en GeoGebra brindó oportunidades de observar situaciones en movimiento, lo que dio paso a la prueba de hipótesis o procedimientos por parte de los participantes, es decir, de acuerdo a las situaciones presentadas se puede llegar a considerar que el tipo de razonamiento que desarrollaron durante la aplicación es propiamente en espacios de exploración digital, en donde se tenían grandes ventajas como el dinamismo que permitía visualizar qué estaba sucediendo.

Tal como menciona Sacristán (2003) un micromundo es “una ventana” que permite visualizar el conocimiento, concepciones, creencias y actitudes de los alumnos, así como de los docentes y todos los actores involucrados en los procesos educativos, y sin duda alguna se puede concluir que el uso de micromundos favorece las interacciones entre pares para externar su razonamiento, además de que es un espacio que puede permitir seguir explorando el RP de los participantes con más actividades, e incluso no solo como medio de exploración sino también como espacio de aprendizaje.

Respecto a las actividades, se observó por parte de los participantes mayor facilidad para tratar las situaciones de identificación (actividad dos y cuatro) que aquellas que requieran de construcción (actividad tres y cinco), esto se puede observar debido a que surgió mayor número de participaciones de las actividades de identificación, inclusive participaciones que pueden catalogarse dentro de los niveles más altos del RP, mientras que en las actividades de construcción a dos de cuatro equipos les resultaron sumamente complejas.

Por último, es importante reconocer que las interacciones que permite el micromundo brindan la posibilidad de que los alumnos exploren nociones que en lápiz y papel pueden llegar a ser complicadas, tales como el arrastre, el sobreponer o la práctica “ensayo y error” de manera inmediata, por tanto, el micromundo se reconoce como una gran oportunidad para que los alumnos debatan y compartan su conocimiento, construyendo un conocimiento colectivo que les permite generar “ideas poderosas” en torno al RP, acercándolos a un nivel proporcional.

5.4 Nuevas direcciones

A partir de los resultados y las conclusiones de este estudio, han surgido nuevas preguntas que pueden ser respondidas en otros espacios y con objetivos diferentes, de las cuales se rescatan tres.

- *El trabajo con micromundos para la enseñanza del RP.* A partir de lo observado, se considera que sería de gran interés retomar los hallazgos encontrados para el diseño de una secuencia didáctica que integre el uso de micromundos como medio para la enseñanza del RP, a partir de situaciones proporcionales y no proporcionales,

considerando que sea aplicada en un aula unitaria de telesecundaria, retomar los niveles del RP necesarios para favorecer una evolución que vaya desde los niveles iniciales hasta la formalización del nivel proporcional.

- *Taller sobre el uso de GeoGebra en el diseño de micromundos.* A partir del análisis se identificó que una limitante es que era la primera ocasión en la que los alumnos trabajaban con GeoGebra, por lo cual se considera que sería adecuado retomar el diseño de las actividades de este estudio y aplicarlas nuevamente pero después de que los participantes recibieran un taller sobre el uso de GeoGebra, dado que se tiene la hipótesis de que si los alumnos tienen mayor conocimiento en el recurso, los resultados respecto al RP pueden variar, dado que no habría limitación por parte del desconocimiento de GeoGebra.
- *Estudio comparativo entre el trabajo con lápiz y papel y micromundos.* Una de las dudas que surgieron durante la elaboración de este trabajo fue: ¿habrá alguna diferencia entre el RP observado en un micromundo y el que puede ser observado en lápiz y papel? Se considera que esta pregunta puede ser respondida a partir de un estudio comparativo en donde se establezca un pre-test y pos-test y pueda ser evaluada la hipótesis de que un micromundo favorece la exploración del RP debido a las características con las que cuenta como el dinamismo o las funciones de “arrastre”.

Se considera que pueden existir más interrogantes a partir de los resultados, pero los tres posibles escenarios presentados se consideran los de mayor interés para dar continuidad con el trabajo actual.

5.5 Aportaciones del trabajo

Como se ha expresado a lo largo del trabajo, son tres ejes los que se han integrado (RP, telesecundaria unitaria y micromundos), por tanto, se considera que hay aportaciones importantes para cada uno de ellos.

- Enseñanza del RP. A partir de los resultados se plantea proporcionar a las y los docentes características del razonamiento proporcional para que sean capaces de

identificar y promover el desarrollo de las habilidades de sus estudiantes. Además de que puedan seleccionar y elaborar tareas matemáticas adecuadas que permitan la introducción al razonamiento desde diferentes aproximaciones y poder romper con la práctica generalizada que se asume que la regla de tres es una de las únicas maneras de aproximarse a las situaciones proporcionales, al igual que apoyar a los alumnos a sustituir la relación aditiva por la multiplicativa, y poder discriminar las situaciones proporcionales de las que no lo son.

- Estudios en aulas unitarias. A partir de la realización de este estudio, se ha identificado la necesidad de seguir explorando lo que sucede en los espacios de enseñanza multigrado, dado que se cree firmemente que pueden ofrecer grandes oportunidades de visualizar los procesos educativos de una forma global, transversal y sin la gradualidad que marca el currículo, en donde a todos se les ofrece las mismas oportunidades de aprendizaje de acuerdo a los puntos de partida en los que se encuentra su aprendizaje. Por tanto, este trabajo se suma a una lista no tan extensa de trabajos previos que se han preocupado por voltear a ver a las aulas más alejadas del sistema educativo, y no sólo se habla de aspectos geográficos, sino en términos de oportunidades limitadas con las que cuentan estas escuelas. Se espera que, a la lectura de este trabajo despierte el interés de más apasionados en temas de la educación para que volteen a ver estas aulas como un espacio de grandes aportes a la investigación educativa.
- Retomar el camino de la tecnología. Es importante reconocer que un pilar fundamental en la modalidad de telesecundaria es el uso de la tecnología, por ende, este trabajo busca aportar al reconocimiento del uso de la tecnología no solo como apoyo para el aprendizaje, sino como medio de exploración y acercamiento a la formulación de “ideas poderosas” como lo menciona Noss y Hoyles, (2019), en donde los alumnos tengan espacios de interés, y sobre todo se brinden oportunidades en el uso de la tecnología como un aliado en el aprendizaje y no como una actividad de ocio.

En resumen, la riqueza de haber llevado a cabo el estudio del RP a través de un micromundo en un aula unitaria radica en tres puntos importantes:

Alumnos

A partir de este estudio, se brindó la oportunidad de que los alumnos trabajaran con la computadora no sólo como sitio de búsqueda o procesador de textos como ellos describen están acostumbrados. Al contrario estuvieron expuestos a situaciones donde la computadora no les daba la respuesta, sino que eran ellos mismos lo que disponían de dichos recursos en función de su aprendizaje, considerando que el uso de recursos tecnológicos los acerca más a la realidad que se vive hoy en día.

Respecto al RP se retoma que es un contenido transversal y de uso cotidiano (específicamente la proporcionalidad directa), por tanto, el que los alumnos puedan explorarlo desde la riqueza del aula unitaria les brinda la posibilidad de socializar sus dudas, conocimientos e hipótesis que les ayuda a consolidar sus conocimientos ya existentes o construir su aprendizaje en torno al RP.

Área de investigación

Una de las riquezas de este estudio es que propone una nueva visión hacia referentes clásicos como los aportes de Karplus, ya que su propuesta considera niveles mutuamente excluyentes, y en este estudio se ha demostrado que en un ambiente donde existe la diversidad de conocimientos representados por acciones tutoras, negociaciones o circulación de saberes, el RP no es lineal y además no es progresivo, ya que los alumnos pueden considerar niveles iniciales como el cualitativo para explicar, justificar o comunicar niveles más complejos como el proporcional.

Educación en México

Teniendo en cuenta el rumbo que está tomando la educación en México encaminada a una escuela donde el conocimiento no se segmenta por áreas y se consideran las diversidades, este estudio brinda una visión a algo que ha existido hace varias décadas y había pasado desapercibido: la educación multigrado. Por tanto, es un aporte hacia la didáctica de los

profesores, ya que se brinda una visión a las diferentes aproximaciones que existen respecto al RP, para que a su vez puedan considerar los razonamientos que han mostrado los alumnos en este estudio para diversificar las situaciones de proporcionalidad directa considerando los diferentes conocimientos con los que puedan llegar a contar los alumnos, independiente al tipo de aula en la que se encuentren.

5.5.1 Aportaciones y recomendaciones basadas en las limitaciones y hallazgos del estudio

Durante el trabajo se presentaron diferentes limitantes, las cuales pueden orientar la creación de nuevos estudios teniendo en cuenta las siguientes recomendaciones.

Como se describe en el capítulo 3 (metodología) cada uno de los equipos de trabajo contaban con una computadora, es decir en total se contó con 4 equipos. Si bien, el número limitado de computadoras permitió obtener los resultados expuestos, consideramos que el ambiente de trabajo se puede ver favorecido si cada uno de los alumnos cuenta con una computadora, ya que en algunas ocasiones la interacción con la computadora se llevaba a cabo por uno o dos alumnos del equipo, mientras que los demás participantes daban sugerencias o comentaban las acciones que realizaban sus compañeros.

La idea de que cada alumno cuente con un equipo es ofrecer la posibilidad a todos los alumnos de explorar a su ritmo y de acuerdo a sus hipótesis y conocimientos, sin perder de vista que el trabajo se siga llevando a cabo por equipos para que puedan discutir sus construcciones en el micromundo.

Por otro lado, una de las limitantes al momento de documentar las interacciones de los alumnos, fueron los instrumentos de registro, ya que los equipos que contaban con grabadora no contaban con cámara y viceversa, por lo que en algunos momentos algunas interacciones verbales eran imperceptibles en el caso de los equipos que tenían cámara, mientras que en los equipos que tenían grabadora no se podían percibir las interacciones con el micromundo o aquellas entre alumnos que no eran verbales.

Respecto a esta consideración se recomienda tener mayor disponibilidad respecto a los instrumentos de registro, ya que puede favorecer en los resultados tener datos más completos cubriendo todas las interacciones de los alumnos.

En términos didácticos, se recomienda que antes de exponer a los alumnos a actividades que involucren el RP dentro del micromundo diseñado, se ofrezca una capacitación más exhaustiva a GeoGebra. Como se ha mencionado los alumnos no conocían el software, por tanto, llevar a cabo una actividad de exploración de aproximadamente 20 minutos no resulta eficiente al momento de manejar las herramientas de GeoGebra, sobre todo en aquellas actividades que recurrían que los alumnos hicieran construcciones.

Se considera que contemplar una capacitación en GeoGebra de varias sesiones puede ampliar los resultados, ya que aquellas dificultades que se hicieron presentes por complicaciones con el software pueden ser evitadas y dar paso a una exploración más libre y con mayor autonomía en el uso de las herramientas provistas por el micromundo.

En lo que respecta a las actividades, se considera que la mayoría de ellas representaron un reto alcanzable para todos los alumnos, a excepción de la actividad cinco (construcción del mosaico) debido a que convergieron varias situaciones. Por un lado, se incluyó un número decimal en la razón que regulaba la escala, y como se ha mencionado anteriormente esto implica una dificultad mayor que al trabajar con números enteros. Por otro lado, implicaba hacer uso de diversas herramientas que los alumnos aún no dominaban por completo o no lograban distinguir que herramienta utilizar.

En cuestión del diseño de la actividad 5 no se contempló que el micromundo permitía hacer la construcción sin necesidad de calcular las medidas, por lo que la retroalimentación del error no era tan evidente como en los otros casos, bastaba con sobreponer las figuras y ampliarlas de acuerdo a la construcción original, de esta forma pudieron hacer construcciones casi exactas de acuerdo a la relación proporcional.

Por tanto, se considera que ésta actividad debe ser sometida a un análisis más sustancioso en donde se valore incluir alguna restricción o indicación que oriente a los alumnos a hacer uso de los cálculos a partir de las herramientas que ofrece GeoGebra.

Como recomendación considerando a GeoGebra como micromundo para el aprendizaje, se pueden diseñar situaciones para trabajar desde la formación del concepto de razón (trabajo con segmentos) hasta el modelo algebraico de la variación proporcional (gráfica y expresión

algebraica). Dentro del diseño se pueden incluir actividades que integran los triángulos semejantes, el teorema de Tales, el trabajo con escalas, las tablas de proporcionalidad y su gráfica a partir de la expresión algebraica.

Por último, se sugiere para seguir explorando el RP de los alumnos de la muestra o de otros espacios escolares, se sugiere el uso de otros micromundos como MicroMundos.Exe o Scratch, ya que ofrecen espacios de aprendizaje por descubrimiento, brindando herramientas de diseño y matemáticas que pueden favorecer el desarrollo del RP.

Como reflexión final, se reconoce la complejidad del RP, y no solo en términos educativos, sino como razonamiento que permite establecer relaciones en la vida fuera de la escuela, por tal motivo se considera que debe seguir siendo un tema de interés indagar en nuevas formas de aproximar a los alumnos a dicho razonamiento, alejándose de algoritmos convencionales y partir de una exploración libre en donde los alumnos puedan retomar sus saberes cotidianos e integrarlos a los conocimientos escolares.

Es importante recalcar una vez más la necesidad de voltear a ver a las escuelas unitarias, sobre todo hoy en día donde se busca establecer un currículo basado en la interdisciplinariedad, qué mejor maestro que todos aquellos docentes que se enfrentan cada día a la diversidad y a la necesidad de crear una planeación que se adapte a todos los grados escolares que atiende.

Solamente añadir, que otro de los resultados de este trabajo, es que se ha iniciado la formación como investigador de un apasionado por la educación.

Referencias bibliográficas

- Agudelo Bedoya, M. E., & Estrada Arango, P. (2012). Constructivismo y construccionismo social: Algunos puntos comunes y algunas divergencias de estas corrientes teóricas. *PROSPECTIVA. Revista de Trabajo Social e intervención social*, (17), 353-378.
- Almenara, JC (2007). Tecnología educativa: su evolución y su conceptualización. *Tecnología educativa*.
- Arteaga, P. (2011). *Los saberes docentes de maestros de primaria con grupos multigrado* [Tesis de maestría, Consejo Mexicano de Investigación Educativa]. Red temática de Investigación de Educación Rural.
- Ávila, P. (2002). Ambientes de aprendizaje: una nueva experiencia. México: ILCE.
- Ayala, F. (2018). El trabajo docente mediado con tecnologías de la información y la comunicación en la telesecundaria. Representaciones sociales de profesores / Teaching work mediated with Information and Communication Technologies in Telesecundaria. Social representations of teachers. *RIDE. Revista Iberoamericana Para La Investigación Y El Desarrollo Educativo*, 8(16), 557–579. <https://doi.org/10.23913/ride.v8i16.358>
- Badilla Saxe, E. y Chacón Murillo, A. (2004). Construccinismo: objetos para pensar, entidades públicas y micromundos. Actualidades Investigativas En Educación, 4(1). <http://doi.org/10.15517/aie.v4i1.9048>
- Barros, A. y Stivam E. (2012). O software GeoGebra na Concepção de Micromundo. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, 1(1), 184-194. Recuperado de <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8388>
- Barroso, A. (2014). La construcción social de la tecnología a propósito de la educación: el caso de la telesecundaria en México. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos* (México), XLIV (4), 107-131.
- Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio and Proportion. In: Grouws, D., Ed., *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing, 296-333
- Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. (2012). *Ratio and Proportion*. Springer Science & Business Media.
- Block, D., Mendoza, T., y Ramírez, M. (2014). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. SM de Ediciones.

- Block, D., Ramírez, M. y Reséndiz, L. (2015). Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado. Un estudio de caso. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 20 (66), 711-735.
- Boix, R., (2011). ¿Qué queda de la escuela rural? Algunas reflexiones sobre la realidad pedagógica del aula multigrado. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 15(2), 13-23.
- Boix, R. y Bustos, A. (2015). Análisis y oportunidades. Cuadernos de pedagogía (459), pp. 51-54
- Buform, Á., & Fernández, C. (2014). Conocimiento de Matemáticas Especializado de los Estudiantes para Maestro de Primaria en Relación al Razonamiento Proporcional. *Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 21-41.
- Bustos Jiménez, A. M. (2013). El espacio y el tiempo en la escuela rural: algunas consideraciones sobre la didáctica multigrado. *Investigación En La Escuela*, 79, 31–41. <https://doi.org/10.12795/ie.2013.i79.03>
- Butto, C., Fernández, J., Araujo, D. C., y Ramírez, A. I. (2019). El razonamiento proporcional en educación básica. *Horizontes Pedagógicos*. <https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.21204>
- Caballero, A. (2009). Cambios en la enseñanza de las matemáticas al incorporar tecnologías digitales al taller de computación de una escuela telesecundaria. [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]
- Camarena, P. y Ruiz, E. (23 al 30 de junio 2011). Desarrollo del pensamiento proporcional cualitativo con tecnología. En *XIII Conferencia Internacional de Educación Matemática* [Acta de conferencia]
- Cano, M. (2011). Análisis del uso de conceptos y procedimientos de proporcionalidad en la resolución de problemas de física, y propuestas didácticas con tecnología. [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]
- Carrete-Marín y Domingo-Peñañiel, L. (2021). Los recursos tecnológicos en las aulas multigrado de la escuela rural: Una revisión sistemática. *Revista Brasileira de Educação do Campo*, 6, 1-31. <https://doi.org/10.20873/ugt.rbec.e13452>
- Contreras, M. María. (1884). Elementos de aritmética razonada: escritos para uso de los alumnos de la Escuela nacional preparatoria. 6. Ed. Revisada y corregida México: Imp. JF Jens.
- Copeland, R. (1984). Cómo aprenden matemáticas los niños. USA: *MacMillan Pub. Co. Y Collier MacMillan Pub*

- Corro, E. S. L., y Bolaños, D. J. (2018). La relación tutora entre estudiantes en una clase multigrado de México. *Nodos Y Nudos*, 6(45). <https://doi.org/10.17227/nyn.vol6.num45-10390>
- Cruz, I. y Puentes, A. (2012). Innovación Educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica. *Edmetic. Revista de Educación Mediática y TIC*. 2 130-150.
- Dávila, J. J y Mirón, F. J. (2011). El reto de incorporar las tecnologías de la información y comunicación para la enseñanza de las matemáticas en las prácticas educativas de los docentes en formación de telesecundaria. *En XI Congreso Nacional de Innovación Educativa* [Ponencia]
- De Marco R., Anna Patrizia (2005). Los medios y las tecnologías en la educación. *Área*, M. (2004). Piramide.. *Letras*, 47(70), p. 115-117. Recuperado en 25 de junio de 2023, http://ve.scielo.php?script=sci_arttext&pid=S045912832005000100006&Ing=es&tlng=es.
- Díaz de León, Juan José Díaz, Soto Mayorga, Marco Antonio, & Martínez Sánchez, Adriana. (2007). Razonamiento proporcional intuitivo en alumnos de primaria y secundaria. *Interamerican Journal of Psychology*, 41(3), 371-378. Recuperado em 25 de junho de 2023, de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-96902007000300012&lng=pt&tlng=es.
- Drijvers, Paul & Kieran, Carolyn & Mariotti, Maria Alessandra & Ainley, Janet & Andresen, Mette & Chan, Yip Cheung & Dana-Picard, Thierry & Guedet, Ghislaine & Kidron, Ivy & Leung, Allen & Meagher, Michael. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. 10.1007/978-1-4419-0146-0_7.
- Fernández V. C., Llinares C. S. «Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria». *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 2012, Vol. 30, n.º 1, pp. 129-142, <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/252566>.
- Flores, R. C., y Albarrán, A. M. R. (2008). La Telesecundaria, ante la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana De Educación (Impresa)*, 44(7), 1–11. <https://doi.org/10.35362/rie4472187>
- Flores, A. E. (2020). *Relación entre los recursos tecnológicos y el logro de aprendizajes significativos de los estudiantes de posgrado, del instituto para la calidad de la educación de la universidad de San Martín de Porres*, [tesis para obtener el grado de doctor en educación]. Lima: Universidad San Martín de Porres, Instituto para la calidad de la educación.

- Forero Carreño, F.A., Alemán de la Garza, L.Y y Gómez Zerño, M.G. (2016). Experiencias de los docentes en la implementación de las TIC en escuelas rurales multigrado. *Edmetec*, 5(1), 52-72. <http://doi.org/10.21071/edmetec.v5i1.4016>
- Gallardo, A. L. (2004). Las escuelas multigrado frente a la diversidad cultural, étnica y lingüística. Horizontes de posibilidad desde la educación intercultural. *La educación intercultural; experiencias y propuestas*. México: SEP.
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de matemáticas. En Ruiz, A. (Ed.) *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2 (3), 11-44.
- García, E., Santiago, F. y Zepeda, G. (2019). Enseñanza de las matemáticas en escuelas multigrado y telesecundarias. En S. Otten, A.G. Candela, A. de Araujo, C. Haines y C. Munter (Eds.). Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (pp. 1751-1755). St Louis, MO: University of Missouri. ISBN: 9780578577913.
- Godino, J., y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su Didáctica para Maestros*. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada. 412-443
- Harel y Papert (1991). *Constructionism: Research reports and essays*. Norwood
- Healy, L., y Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *Zdm – Mathematics Education*, 42(1), 63–76. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0193-5>
- Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M. J., y Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type, and problem setting. *Journal of Research in Science Teaching*, 26(3), 205–220. <https://doi.org/10.1002/tea.3660260303>
- Heredia N. y Quiñones S. (2020). Diagnóstico del uso de las TIC en una telesecundaria rural de Yucatán. México. RICSCH Revista Iberoamericana de las Ciencias Sociales y Humanísticas. 11, 21 95-120 <https://doi.org/10.23913/ricsch.v11i21.278>
- Hitt, F. (1997). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática*, 10, 23-45
- Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. In Post, T. R. (1992). *Teaching Mathematics in Grades K-8: Research-based Methods*. Allyn & Bacon.
- Hoyles, C., y Noss, R. (1987). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 18(4), 581–595. <https://doi.org/10.1080/0020739870180411>

- Hoyles, C. (1993). *Microworlds/Schoolworlds: The Transformation of an Innovation*. In: Keitel, C., Ruthven, K. (eds) *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. NATO ASI Series, vol. 121. Springer, Berlin, Heidelberg. http://doi.org/10.1007/978-3-642-78542-9_1
- Hoyles, C., Noss, R. y Kent, P. (2004). *On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms*. *Int J Comput Math Learning*. 9, pp. 309-326. <http://doi.org/10.1007/s10758-004-3469-4>
- Juárez Bolaños, Diego. (2017). Percepciones de docentes rurales multigrado en México y El Salvador. *Sinéctica*, (49) Recuperado en 25 de junio de 2023, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-109X2017000200002&lng=es&tlng=es.
- Kahraman, H., Kul, E., y Aydogdu, T (2019). 7. ve 8. Sınıf öğrencilerinin niceliksel orantısal akıl yürütme problemlerinde kullandıkları stratejiler [Strategies Employed by 7th and 8th Graders for Quantitative Proportional Reasoning Problems]. *Turkish Journal of computer and Mathematics Education*, 10 (1), 195-216
- Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). "Proportional reasoning of early adolescents". In: R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*.
- Lesh, R., Post, T. R., y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr, y J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93-118). National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.
- Mirnada, F. y Reynoso, R. (2006). La Reforma de la Educación Secundaria en México. Elementos para el debate. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11 (31), 1427-1450
- Mora, L. R. G. (septiembre, 2017). *Diversidad y prioridades educativas en escuelas multigrado. Estudio de caso en México*. <https://sinectica.iteso.mx/index.php/SINECTICA/article/view/715>
- Mejoredu. Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. (2022). *Indicadores nacionales de la mejora continua de la educación en México. Cifras del ciclo escolar 2020-2021*.
- Mochón Cohen, S., (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133-157.

- Modestou, M., y Gagatsis, A. (2010). Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 36–53. <https://doi.org/10.1080/10986060903465822>
- Monaghan, J., Trouche, L. y Borwein, J. (2016). Tools and Mathematics: Instruments for Learning.
- Mondragón, V. (2008). El uso de tecnologías de información y comunicación en telesecundaria. [Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I. Differentiation of stages. *Educ Stud Math* 11, 217-253 (1980). <https://doi.org/10.1007/BF00304357>
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Windows on Mathematical Meanings. En Springer eBooks. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8>
- Noss, R., y Hoyles, C. (2019). Micromundos, Construcciónismo y Matemáticas. *Educación Matemática*, 31(2), 7–21. <https://doi.org/10.24844/em3102.01>
- Ostwald, J. (1996). Knowledge Constriction in Software Development: The Evolving Artifact Approach. Recuperado de <http://www.cs.colorado.edu/~ostwald/thesis/home.html>
- Öztürk, M., Demir, Ü., y Akkan, Y. (2021). Investigation of Proportional Reasoning Problem Solving Processes of Seventh Grade Students: A Mixed Method Research. *International Journal on Social and Education Sciences*, 3(1), 48–67. <https://doi.org/10.46328/ijonses.66>
- Papert, S. (1980). Mindstorms: children, computers, and powerful ideas. Brighton, England: the harvester press
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1975). The Origin of the Idea of Chance in Children. Routledge y Kegan Paul
- Pochulu, MD (2005). El software educativo en la enseñanza y aprendizaje de la matemática: fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/24867>
- Popoca, C., Cabello, M., Cuervo A., Estrada, M., Hernández, M.: Reyes, M. y Sánchez, A., (2006). Escuelas multigrado. Retos y necesidades de cambio en las escuelas multigrado. Estudio exploratorio, *SEP*
- Pulos, S., Karplus, R. y Stage, E. (1981). Generality of Proportional Reasoning in Early Adolescence: Content Effects and Individual Differences. *The Journal of Early Adolescence*, 1(3), 257-264 <http://doi.org/10.1177/027243168100100304>

- Reséndiz, L., Block, D. E., y Carrillo, J. A. (2017). Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso. *Educación Matemática*, 29(2). <https://doi.org/10.24844/em2902.04>
- Rizo, M. (2006). La interacción y la comunicación desde los enfoques de la psicología social y la sociología fenomenológica: breve exploración teórica. *Análisis: Cuadernos de comunicación y cultura*. ISSN 0211-2175, 33, 45-62
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundaria públicas de México. *Revista Iberoamericana De Educación*, 33, 135-165. <https://doi.org/10.35362/rie330914>
- Ruiz, A. (2018). *Regla de tres simple directa: avatares de un algoritmo - Funes - Universidad de los Andes*. <http://funes.uniandes.edu.co/14961/>
- Rodríguez, H. (2017). Del constructivismo al construccionismo: implicaciones educativas. *Revista educación y Desarrollo Social*, 2 (1), 71-89
- Sacristán, A. (2003). La importancia de los micromundos computacionales como entornos didácticos estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático. 3er Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC).
- Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65-97.
- Santos, L. (2006). Atención a la diversidad: Algunas bases teóricas de la didáctica multigrado. *Quehacer educativo*
- Santos del Real, A. (2019). Escuelas multigrado en México: en busca de una nueva identidad. *Revista Latinoamericana De Estudios Educativos*, 49(1), 49-66. <https://doi.org/10.48102/rlee.2019.49.1.32>
- Schmelkes, S., & Aguila, G. (2019). *La educación multigrado en México*. México: INEE.
- Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Educación y Pedagogía*, 137-158.
- SEP. (2010). *La telesecundaria en México: un breve recorrido histórico por sus datos y relatos*. México: SEP.
- SEP. (2017). *Aprendizajes Clave, para la educación integral*. México: SEP.

- Tinajero, G. (2015). Barreras internas y externas en la incorporación de las TIC: estudio de una zona escolar de la modalidad indígena. *Entreciencias: Diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, 3(8), 345-358.
- Torres, P. y Cobo, J. (2017). Tecnología educativa y su papel en el logro de los fines de la educación. 21, 31-40
- Tourniaire, F., y Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181-204. <http://www.jstor.org/stable/3482345>
- Velasco, E. R. (2009). Importancia del legado papertiano en las habilidades cognitivas del siglo XXI en Calderón, E.; Quinn, M.; Escorcía, G. y Badilla, E. (Eds.) *Constructores de conocimiento: Papert y su visión* (pp. 47-70). Red LaTe
- Verdú, C. F., y Ciscar, S. L. (2012). Characteristics of the development of proportional reasoning in Primary and Secondary School. *Enseñanza De Las Ciencias*, 30(1), 129. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596>
- Vicario, M. (2009). Construccinismo. Referente sociotecnopedagógico para la era digital. *Revista Innovación Educativa*. 9, pp. 45-50
- Weir, S. (1987). *Cultivating Minds: A Logo Casebook*. HarperCollins Publishers.
- Zorrilla, M., (2004). La educación secundaria en México: al filo de su reforma. *REICE*. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 2(1), 0.

Anexos

Anexo 1. Carta de consentimiento informado

Apaseo el Alto, Gto. a __ de noviembre de 2022

CONSENTIMIENTO

Yo _____ padre, madre o tutor del alumno _____ de la telesecundaria No. 316, doy mi consentimiento a *Carlos Alberto Lugo Lugo* y *Erika García Torres*, para el uso o la reproducción de las intervenciones filmadas en vídeo, fotografías o grabaciones de la voz de mi voz. Estoy consciente que su participación consiste en explorar las actividades diseñadas en el software de Geogebra en equipos de trabajo.

Entiendo que el uso de su imagen o de su voz, serán empleados para fines de investigación. Los datos recabados contribuirán al desarrollo de la tesis de posgrado titulada **“Razonamiento proporcional y micromundos: un estudio en telesecundaria unitaria”** de Carlos Alberto Lugo Lugo a cargo de la Dr. Erika García Torres y serán utilizadas para los siguientes fines:

- Analizar la información proporcionada por los alumnos.
- Aportar datos para el desarrollo de la investigación.
- Emplear las intervenciones registradas en video/audio en la presentación de avances de tesis al interior de la universidad.

Comprendo que su participación es voluntaria y puede retirarme de la actividad si lo deseo, debido a que la actividad no forma parte de las evaluaciones escolares.

Este consentimiento se aplica a las intervenciones filmadas en vídeo, grabaciones de la voz o fotografías que se puedan recopilar como parte del desarrollo de la investigación y para los fines que se indican en este documento.

Los datos recabados serán estrictamente confidenciales. El presente consentimiento deja fuera la posibilidad de que los datos puedan ser usados en futuras ocasiones para otra investigación ajena a los fines mencionados.

Nombre y firma del padre, madre o tutor

Anexo 2. Tabla de problemas correspondientes a la actividad dos del diseño en Excel

Problema	Tipo de problema	Nivel de razonamiento*
Lucía corre 48m en tres minutos a una velocidad constante, si continua así, ¿Cuántos metros avanzará en 4 min, 8 min, 13 min y 15 min?	Valor faltante	Incompleto y cualitativo

A continuación, se muestran dos tablas que representan las ganancias de un almacén, la primera reporta los pares de zapatos y la segunda pares de tenis:

No. de pares zapatos	Ganancias
20	\$5,000
35	\$8,750
70	\$17,500
90	\$22,500

No. de pares tenis	Ganancias
20	\$5,000
30	\$6,000
40	\$7,000
50	\$8,000

Diferenciar una situación proporcional de una no proporcional.

Incompleto y aditivo

¿En cuál de las dos tablas se observa mayor ganancia?

Un albañil se ha llevado 3.5 horas construyendo una barda de 2m de largo por 2m de alto. Como se dio cuenta que se demoraría varios días, ha tomado la decisión de apoyarse de más albañiles.

No. Albañiles	No. de horas
1	3.5
3	
5	0.7
7	
9	

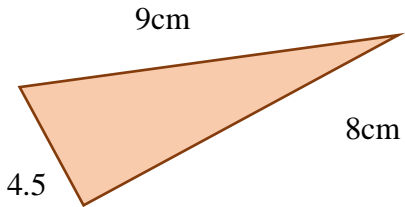
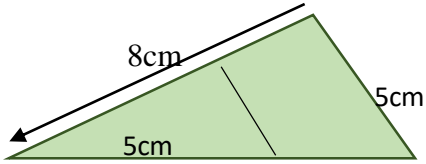
Proporcionalidad
inversa

Incompleto y
aditivo

¿Cuántos días les llevará construir una barda?

*El nivel de razonamiento identificado en el problema hace referencia a aquel que tiene mayor probabilidad de presentarse, debido a que está formulado con esa intención.

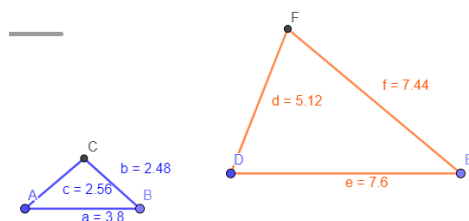
Anexo 3. Actividad 2 del diseño en GeoGebra

Problema	Tipo de problema	Nivel de razonamiento*
<p>Un triángulo tiene las medidas que se muestran, y se ampliará de forma que el lado que mide 8 cm ahora mida 24 cm.</p>  <p>¿Cuál será la medida de los lados restantes?</p>	<p>Construcción de un triángulo a partir de otro por medio de una constante o una razón.</p>	<p>Aditivo y pre-proporcional</p>
<p>Para construir una rampa en un supermercado se necesitan dos soportes, tal y como se muestra.</p>  <p>¿Cuál es la medida del soporte más pequeño?</p>	<p>Teorema de Tales</p>	<p>Pre-proporcional y proporcional</p>

En el salón de Juan se les ha solicitado crear un triángulo a escala de acuerdo a un triángulo original (azul), y él ha diseñado el siguiente (naranja)

Escalas

Proporcional



Anexo 4. Distribución para la aplicación del diseño

No. de equipo	Participantes			Instrumento para toma de datos	
	Grado escolar			Sesión 1	Sesión 2
	Primero	Segundo	Tercero		
1	2	1	2	Audio	Video
2	1	1	3	Video	Audio
3	1	1	3	Audio	Audio
4	2	1	2	Video	Audio
5	2	1	2	Audio	Video