Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Psicología y Educación

Situaciones didácticas para la resolución de problemas multiplicativos en primaria.
Orientaciones para docentes de segundo ciclo.

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Maestra en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Presenta
Raquel Alcántara Perea

Dirigido por:
Mtra. María del Carmen Ortiz Flores

Querétaro Qro. a 26 de mayo de 2023

Situaciones didácticas para la resolución de problemas multiplicativos en primaria.
Orientaciones para docentes de segundo ciclo.
Raquel Alcántara Perea
2023

Situaciones didácticas para la resolución de problemas multiplicativos en primaria. Orientaciones para docentes de segundo ciclo.

por

Raquel Alcántara Perea

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología y Educación
Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Situaciones didácticas para la resolución de problemas multiplicativos en primaria. Orientaciones para docentes de segundo ciclo.

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Maestra en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Presenta
Raquel Alcántara Perea

Dirigido por:
Mtra. María del Carmen Ortiz Flores

SINODALES

Mtra. María del Carmen Ortiz Flores
Presidente

Dra. Diana Solares Pineda
Secretario

Dra. Erika García Torres
Vocal

Mtra. Erika Isabel Padilla Carrillo
Suplente

Mtra. Olivia Avalos Esparza
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Mayo de 2023
México

Dedicatoria

Porque de repente en una maestría, en una tesis… te encuentras con tu familia, no la de sangre, sino la familia del corazón, la del lazo que no se rompió a pesar del tiempo y la distancia y que por el contrario cuidó tus espaldas e incluso cuidó que no cayeras.

A mi hija, Helena Michelle

A mi madre, Rosa María

A mis hermanos del alma…

Para la elaboración de esta tesis se contó con el apoyo de una beca del

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Agradecimientos

Gracias a ***Dios***, por darme luz y guiar mis pasos, por caminar conmigo y permitir que familia y amigos maravillosos también me acompañen. Por los días soleados y también nublados que me permitieron crecer como ser humano y como profesionista. Por enseñarme que en la docencia para enseñar hay que aprender.

A mi hija, ***Helena Michelle*** que me acompañó, me comprendió, me alegró y aligero mis días. Porque al verla sonreía y sabía que esta maestría también era para ella, para valorarla más y tener herramientas para apoyarla en su tránsito por la vida y por la escuela.

A mi madre, ***Rosa María*** quien me motivó, me apoyó y me sostuvo, quien me recordó que este logro nadie me lo podía dar más que yo misma. Mi madre, que siempre ha estado incondicionalmente mostrándome que uno no se cansa de aprender y que tenemos el potencial para hacerlo. Que la vocación de docente no se limita en un aula de clases, sino en la generosidad de compartir el conocimiento.

Gracias, gracias, gracias a mi asesora, la Maestra ***María del Carmen Ortiz Flores,*** quien ahora llamo con respeto y con cariño ***Mari***. Por la tenacidad, paciencia y generosidad de nunca desistir, por estar siempre al pendiente, por el valioso tiempo que nos dedicaste, la mirada afinada en cada comentario que me hiciste, en cada diálogo que compartimos. Te valoro y reconozco el gran ser humano que eres y la gran Maestra, ya que no solo asesoraste el trabajo de investigación, sino que aportaste grandes valores y conocimientos a mi vida y a mi práctica docente. Te agradezco por darme el valor de escribirle a la Dra. Claudia Broitman quien es fuente de inspiración en el trabajo didáctico.

Gracias infinitas a mis sinodales, quienes siempre realizaron pertinentes aportaciones desde diferentes perspectivas, lo que permitió nutrir este estudio y puntualizar la mirada. Por sus comentarios tan especializados, gentiles y exigentes que ayudaron a darle forma a este trabajo. ***Dra. Diana Solares, Dra. Erika García, Mtra. Erika Padilla y Mtra. Olivia Ávalos,*** muchas gracias por su acompañamiento, no hay palabras suficientes para expresar mi admiración por el conocimiento, profesionalismo y experiencia que tienen, el cual siempre se vio reflejado en sus comentarios, cuestionamientos y sugerencias.

Esta investigación también es el reflejo de grandes miembros de la Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas. Le agradezco a mis maestras y lectoras, la ***Dra. Karina Hess*** **y** la ***Dra. Luisa Josefina Alarcón***, quienes se dieron el tiempo de revisar y sugerir puntualmente estrategias y comentarios que favorecieron el proceso de la escritura de esta tesis. A grandes inspiradores en la materia el ***Dr. Armando Solares, la Dra. Erika García, la Mtra. Olivia Ávalos, la Mtra. Norma Rodríguez, la Dra. Gloria Avecilla, la Dra. Aracely Rodríguez y la Dra. Kissy Guzmán*** quienes con pasión a su vocación siempre lograron transmitir sus saberes e inspirarme en mi labor. A la ***Mtra. Mari*** que además de asesorar la investigación también aportó desde sus materias para enriquecer la mirada desde lo humano, lo innovador y la construcción con sentido de los conocimientos matemáticos.

A todos mis hermanos del alma, que aunque sus nombres no estén plasmados sobre estas líneas, están plasmados en mi corazón, porque en los momentos de angustia siempre estuvieron, y el apoyo y las porras nunca faltaron. Por todos aquellos que llegaron siempre en los momentos que más los necesitaba…

a ***Aymme***, que comprendió la lejanía pero nunca dejó de estar a mi lado, que aún en la distancia siempre mostró interés y me dio palabras de ánimo,

a ***Gerardo,*** quien siempre me ofreció su mano, su tiempo, sus oídos y nunca flaqueó en acompañarme, quien siempre me recordó mi capacidad,

a ***Serch,*** que nunca dudó en sacarme un sonrisa, acompañarme en largas pláticas y apoyarme en las largas lecturas en inglés,

a ***Cory, Sagri, Vale y Luis,*** quienes con cariño estuvieron presentes para apoyar a la familia.

A mis ***compañeros de la maestría***, quienes en menos de dos años se volvieron mis hermanos, compartiendo no solo conocimientos, sino experiencias de vida.

Tabla de Contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Resumen

La presente investigación de corte cualitativo identifica la apremiante necesidad de aportar a la construcción con sentido de los conocimientos matemáticos multiplicativos en la escuela primaria. El Programa de estudios (SEP, 2011) realza la importancia de proponer situaciones a los estudiantes para que se enfrenten a diferentes tipos de problemas multiplicativos. Además, de socializar y justificar la elección y pertinencia de sus procedimientos.

En México, los resultados de las pruebas estandarizadas arrojan que una gran mayoría de los estudiantes en primaria no logran construir los conocimientos matemáticos necesarios para resolver problemas de tipo multiplicativo. Tomando en cuenta esta problemática es que se propuso una secuencia didáctica que favorezca este aprendizaje en estudiantes de segundo ciclo de primaria, que abarca tercero y cuarto grado.

Con base en referentes teóricos y didácticos como la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría de Campos Conceptuales (TCC), se rediseñaron cuatro situaciones didácticas, que conforman una secuencia. En ella se presenta a los estudiantes problemas de valor faltante (multiplicación y división) retomados de materiales desprendidos del currículo de la Secretaría de Educación Pública (en adelante SEP) y de otras propuestas didácticas para profesores. El recorrido metodológico se basa en una aproximación a la metodología de la TSD: la ingeniería didáctica. En la secuencia se indagan los procedimientos de los estudiantes, los errores y dificultades a los que se enfrentan y las intervenciones docentes que propician el aprendizaje de los estudiantes.

Los resultados obtenidos en el análisis posterior de la implementación de la secuencia didáctica en una muestra de estudiantes, dieron elementos para proponer orientaciones didácticas a docentes de segundo ciclo de primaria a fin de fortalecer sus intervenciones docentes y con ello favorecer los aprendizajes con mayor sentido de sus estudiantes. Dichas orientaciones didácticas son el principal resultado de esta investigación.

Palabras clave:
Teoría de las Situaciones Didácticas; secuencia didáctica, campo multiplicativo; ingeniería didáctica; orientaciones docentes.

Abstract

This qualitative research identifies the pressing need to contribute to the meaningful construction of multiplicative mathematical knowledge in primary school. The study program (SEP, 2011) highlights the importance of proposing situations for students to face different types of multiplicative problems. In addition, to socialize and justify the choice and relevance of their procedures.

In Mexico, the results of standardized tests show that a large majority of students in primary school fail to build the necessary mathematical knowledge to solve multiplicative problems. Taking this problem into account, a didactic sequence was proposed that favors this learning in students of the second cycle of primary school, which covers third and fourth grade.

Based on theoretical and didactic references such as the Theory of Didactical Situations (TSD) and the Theory of Conceptual Fields (TCC), four didactic situations were redesigned, which make up a sequence. In it, students are presented with missing value problems (multiplication and division) taken from materials taken from the curriculum of the Ministry of Public Education (hereinafter SEP) and from other didactic proposals for teachers. The methodological path is based on an approach to the TSD methodology: didactic al engineering. In the sequence, the procedures of the students, the errors and difficulties they face and the teaching interventions that promote student learning are investigated.

The results obtained in the subsequent analysis of the implementation of the didactic sequence in a sample of students, gave elements to propose didactic orientations to teachers of the second cycle of primary school in order to strengthen their teaching interventions and thereby promote learning with a greater sense of self-reliance his students. These didactic orientations are the main result of this research.

Keywords:

Theory of Didactical Situations; didactic sequence, multiplicative field; didactical engineering; teaching orientations.

Introducción

La construcción de conocimientos multiplicativos se promueve desde los primeros grados escolares del nivel primaria y su aprendizaje es longitudinal, por lo que se va logrando a lo largo de la escolaridad. Autores como Belmonte (2006) y Broitman et al. (2018) mencionan la importancia de acercar a los niños a estos problemas desde los primeros años para que vayan desarrollando estos conocimientos. Por su parte, el Programa de estudios (SEP, 2011) fomenta que mediante la resolución de problemas acerquemos a los estudiantes a la construcción del conocimiento matemático, en este caso el multiplicativo, y que señala que los aprendices hagan uso de diversos procedimientos que les permita hacerlos evolucionar hacia otros cada vez más eficaces.

En México, las pruebas estandarizadas EXCALE (2013, 2014) y Planea (2018) han reportado bajos resultados en la resolución de problemas que involucran estructuras multiplicativas, como la multiplicación y la división. Estos resultados parecen estar estrechamente relacionados con la falta de sentido en el aprendizaje de estas habilidades. Por lo tanto, es necesario abordar esta problemática para promover una construcción significativa del conocimiento matemático multiplicativo en la escuela primaria.

Con lo anterior en mente, el objetivo de este estudio es profundizar en el aprendizaje y la enseñanza del conocimiento multiplicativo. Para ello, se rediseñaron e implementaron cuatro situaciones didácticas con problemas multiplicativos para estudiantes de segundo ciclo de primaria, es decir, para tercero y cuarto grado. Durante este proceso, se analizaron los posibles procedimientos, errores y dificultades a los que los estudiantes podrían enfrentarse al resolver problemas típicos de proporcionalidad que se denominan "de valor faltante[1]”. Este análisis permitió prever intervenciones para mejorar la comprensión del problema y el desarrollo de estrategias.

[1] Son problemas en los cuales se plantea una relación entre dos magnitudes proporcionales. Se presentan cuatro valores, tres de ellos conocidos y uno desconocido que se debe calcular (Block *et al*., 2015, p. 41)

Por otro lado, se identifican elementos que son necesarios incluir en la práctica docente para fortalecer las intervenciones didácticas de la misma secuencia. Como resultado, se elaboraron orientaciones didácticas para que los docentes del segundo ciclo tengan herramientas para implementar la secuencia didáctica construida.

El presente documento está organizado en siete capítulos. En el capítulo I se presenta el planteamiento del problema y se justifica la importancia de esta investigación. Se comienza presentando el estudio de la multiplicación desde el currículo oficial, donde se expone lo que se espera que logren los estudiantes en los grados escolares a los que corresponde esta investigación, seguido a esto se recurre a datos estadísticos, apoyándonos de los resultados de las pruebas estandarizadas EXCALE y Planea donde se muestra parte de la problemática. Luego, desde el campo de la educación se abordan algunas deficiencias en la enseñanza de la multiplicación identificadas por diversos investigadores, en la cual desde diferentes perspectivas esbozan ciertas dificultades y algunas propuestas para la construcción del conocimiento multiplicativo. Al final del capítulo se presenta la pregunta general y dos específicas, así como los objetivos de investigación.

En el Capítulo II se presentan los antecedentes de esta investigación, la mayoría de ellos abordan el tema de los conocimientos desde una perspectiva constructivista, en donde se revalorizan los procedimientos propios de los estudiantes, sus primeros acercamientos que les permiten desarrollar estrategias para afrontar los problemas multiplicativos que se les presenten. Asimismo, los antecedentes también aportaron para identificar elementos necesarios en la implementación de las situaciones didácticas, como es el caso de las intervenciones docentes para fortalecer el trabajo en el aula. Por último, se retoma la educación en modalidad virtual, ya que a causa de la contingencia por el COVID-19 la implementación se realizó a distancia, considerando algunos recursos necesarios para favorecer la interacción con los estudiantes y con distintas herramientas digitales.

En el capítulo III, se expone la fundamentación teórica. Se abordan en él las teorías y los conceptos en los que se basó la investigación y que sirven de sustento para la implementación y análisis de la secuencia didáctica. Se aborda principalmente la Teoría de

Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) que orientaron el trabajo para el rediseño de las situaciones didácticas en torno a la enseñanza de la multiplicación. También algunos elementos fueron considerados en las decisiones metodológicas.

En el capítulo IV, se da cuenta de la metodología que guía esta investigación. Se describe primeramente el enfoque y el alcance, la población a la que está dirigido y las características de la muestra, las técnicas y los procedimientos utilizados. Asimismo, se explicita la metodología de la ingeniería didáctica y cómo ésta guío el trabajo para la selección, rediseño, implementación y análisis de la secuencia didáctica.

En el capítulo V se concentran los resultados. Se realiza el análisis posterior a partir de lo implementado. Se describen los tipos de problemas multiplicativos de cada situación didáctica, así como algunas intervenciones que tuvieron lugar ante los procedimientos, errores y dificultades. Se incluyen aspectos y reflexiones sobre cada situación.

En el capítulo VI se presentan las orientaciones docentes para cada situación didáctica, en la que se detallan las actividades para llevarlas a cabo. Se presentan los problemas y los posibles procedimientos, además se incluyen los posibles errores y dificultades y las intervenciones que se pueden realizar. Al final de las orientaciones se dan recomendaciones generales y para la implementación virtual.

Por último, en el capítulo VII se muestran las conclusiones con base en los hallazgos obtenidos. Se plantean algunas reflexiones en relación con el conocimiento multiplicativo que permita, tanto a estudiantes como docentes, favorecer la construcción con sentido de este aprendizaje y fortalezca el trabajo en el aula.

Esta tesis está acompañada por una sección de anexos. En ella se presenta el material necesario para la implementación de cada una de las situaciones. También se incluye el consentimiento ético que se presentó tanto a los padres de familia como a los estudiantes para enterarlos del estudio.

Capítulo 1. Planteamiento y justificación del problema de investigación

El estudio de la multiplicación y la proporcionalidad es uno de los temas de interés en la investigación educativa en el área de la didáctica de las matemáticas. En los últimos Estados del Conocimiento publicados por el Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE), los autores hacen referencia a un creciente interés por el estudio de la proporcionalidad (Ávila *et al.*, 2013), el cual es un conocimiento asociado a la multiplicación. Uno de los hallazgos de estas investigaciones ha sido el relevante papel que tiene la construcción del conocimiento multiplicativo en los primeros grados escolares para favorecer este aprendizaje en los siguientes ciclos.

Para identificar el nivel de logro de los aprendizajes que marca el currículo oficial nos basamos en las pruebas estandarizadas EXCALE y Planea. Estas pruebas marcan como un aspecto de mejora en la educación básica la construcción de conocimientos de carácter multiplicativo. Por último, en este capítulo se mencionan algunas dificultades relacionadas a la enseñanza de la multiplicación, y se hace referencia a las propuestas de diversos autores que aportan elementos para disminuir estas dificultades.

1.1 Estudio de la multiplicación desde el currículo oficial

Actualmente, en 2023, existen dos programas de estudio vigentes en México: SEP (2011) y SEP (2017a). El primero se utiliza en los grados de tercero a sexto de primaria, que es la etapa educativa a la que está dirigido el presente estudio. Por otro lado, el segundo programa se aplica a los grados de primero y segundo de primaria.

Ambos programas de estudio contienen especificaciones relevantes sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos multiplicativos. Por lo tanto, es importante revisar y considerar las directrices de ambos programas para asegurar una enseñanza efectiva.

El Programa de estudios (SEP, 2011) especifica la necesidad de que los estudiantes logren varios propósitos sobre el estudio de las matemáticas para la educación primaria. Uno de estos propósitos está enfocado al aprendizaje de la multiplicación y señala que los alumnos “Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y la resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos" (p. 60). Esto comprende un conjunto de conocimientos matemáticos que los alumnos deben ir construyendo a lo largo de su escolaridad dentro de este nivel educativo.

Es fundamental que el trabajo matemático en los distintos grados escolares del nivel primaria contribuya a la construcción del aprendizaje de la multiplicación y los diferentes sentidos de esta operación aritmética. En México, el currículo oficial SEP (2011) propone diferentes aprendizajes esperados para cada grado escolar, los cuales se enfocan en las estructuras multiplicativas. De igual manera, establece estándares curriculares, así como conocimientos y habilidades que los estudiantes deben lograr en el área de matemáticas.

En el periodo que abarca de primero a tercer grado de primaria, el Programa de Estudio (SEP, 2011) marca que los alumnos deben "resolver problemas que impliquen multiplicar o dividir números naturales utilizando procedimientos informales" (p.62). Al respecto es importante considerar que los niños de primero y segundo grado de primaria pueden resolver ciertos problemas multiplicativos sencillos mediante dibujos, conteo, realizar sumas o restas, para posteriormente comenzar a reconocer que son problemas que pueden resolverse por medio de una multiplicación (Broitman *et al*., 2018). Por su parte, en el siguiente periodo —de cuarto a sexto grado de primaria—, los estudiantes deben saber -entre otras cosas- "resolver problemas que impliquen multiplicar o dividir números naturales empleando los algoritmos convencionales" (p.63), por lo que la adquisición de los aprendizajes multiplicativos a través de procedimientos informales desde los primeros grados, es de suma importancia.

Para cumplir con la encomienda que la currícula marca sobre los conocimientos multiplicativos, tradicionalmente, en la práctica educativa, se considera que los algoritmos son herramientas que permitirán a los estudiantes resolver de manera fácil y rápida los problemas, de ahí que los docentes consideren apremiante la necesidad de que los estudiantes aprendan el algoritmo convencional de las operaciones básicas. Como mencionan Block *et al.* (1994), la escuela dedica mucho tiempo y esfuerzo para que los alumnos dominen primero un procedimiento para multiplicar y otro para dividir y después se les propongan algunos problemas para que puedan aplicar las operaciones. Esto trae como consecuencia en la mayoría de los casos, que los alumnos aprendan a hacer mecanizaciones, pero fracasan al intentar resolver los problemas escolares.

Esto nos conduce a una parte de la problemática de esta investigación, que está relacionada con los conocimientos previos que tienen los estudiantes y qué estrategias les permiten enfrentarse a resolver un problema multiplicativo. Algunos de los conocimientos que los estudiantes deben desarrollar en el aula de clases es poder interpretar la información que se le presenta, de esta manera puedan identificar las operaciones que le permitan resolver un problema, comunicar, validar y justificar sus procedimientos e implementar técnicas más eficientes. Por su lado, la escuela tiene la responsabilidad de ampliar las habilidades y destrezas de los estudiantes para desarrollar las competencias matemáticas como lo menciona el Programa de estudio (2011). En el siguiente apartado se muestran lo que las pruebas estandarizadas arrojan sobre esta realidad: qué resultados logran los estudiantes al resolver problemas multiplicativos.

1.2 Resultados de las pruebas estandarizadas EXCALE y Planea

Para identificar el alcance de los conocimientos de los estudiantes y el cumplimiento de lo propuesto en los planes de estudio, en la educación básica de México se utiliza como base los resultados obtenidos en pruebas estandarizadas. Estas pruebas sirven como instrumento de evaluación para verificar el aprendizaje logrado por los estudiantes, y aportan información acerca de la forma en la que se cumplen los objetivos curriculares. Además, permiten realizar comparaciones para detectar grupos de población con necesidades educativas y, con base en esto, promover la mejora de la calidad educativa (Gutiérrez *et al.*, 2018).

En este estudio se ha tomado como referencia dos pruebas estandarizadas: los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (en adelante EXCALE) y el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (en adelante Planea). Estas pruebas arrojan información sobre los centros escolares con respecto al aprendizaje de los estudiantes, e indican lo que los alumnos logran o no aprender en comparación con lo que se determina en la currícula oficial. Por lo tanto, es importante identificar qué resultados se desprenden de dichas pruebas respecto al aprendizaje en torno a los problemas multiplicativos.

Es importante mencionar que se tomaron como referencia resultados anteriores a la contingencia sanitaria por el COVID-19, ya que estudios realizados han evidenciado que posterior a este evento los aprendizajes en los estudiantes no han mejorado, que, por el contrario, ha crecido el rezago en los aprendizajes de los estudiantes (Abrew, 2021). El cierre de las escuelas y la poca disponibilidad de las tecnologías de información y comunicación acrecentaron tanto el abandono escolar como los bajos resultados.

La prueba EXCALE se aplicó por primera vez en 2005 con la finalidad de valorar el grado de aprendizaje que alcanzaban los estudiantes respecto a los aprendizajes que se establecen en los planes y programas de estudio. Se aplicaba en tercero y en sexto de primaria cada cuatro años y de esta manera aportaba información para conocer en qué medida se cumplían los propósitos educativos que se formalizaban en el currículo nacional. Estos resultados no eran individuales, sino del sistema educativo en conjunto, ya que se aplicaba a muestras representativas y cada estudiante respondía sólo una parte de las preguntas (Martínez, 2015). Más adelante se muestran algunos resultados respecto a la resolución de problemas multiplicativos por aprendices tanto en tercer grado como en sexto grado de primaria, ya que este conocimiento matemático se estudia a lo largo de la educación primaria.

En 2013, dicha prueba se aplicó en sexto grado de primaria y uno de los contenidos que incluía está relacionado con que el estudiante "resuelva problemas que implican una multiplicación con números naturales". El resultado de la prueba EXCALE (2013) no es alentador, ya que el 55% de los estudiantes no lograron resolver de forma correcta esos problemas multiplicativos (INEE, 2013), esto representa más de la mitad de la población que fue evaluada. Por esta razón, se percibe que los bajos resultados en sexto grado de primaria muestran que en años anteriores no se logró la construcción de conocimientos relacionados con la multiplicación que den bases a los estudiantes para la resolución de estos problemas.

Lo anterior cobra importancia, ya que como se mencionó, la multiplicación es un conocimiento matemático que se estudia a lo largo de la primaria empezando desde los primeros años, su enseñanza tiene un carácter longitudinal (Oller, 2012 y Burgos *et al*., 2020). Durante la primaria, los estudiantes, deben desarrollar estrategias y procedimientos para resolver problemas multiplicativos, por lo tanto, si en los primeros grados escolares no se logra este aprendizaje, ello va a repercutir en los siguientes ciclos escolares como se muestra en las pruebas estandarizadas.

En 2014 se aplicó la prueba EXCALE a tercero de primaria. Sus resultados también muestran que los estudiantes tienen bajos logros respecto a la resolución de problemas multiplicativos específicamente, problemas de valor faltante. Este tipo de problema se caracterizará más adelante en el capítulo de fundamentación teórica.

La Tabla 1, se presentan los porcentajes de aciertos en cada contenido curricular, que van desde el 44% al 64%. Esto indica que alrededor de la mitad de la población estudiantil no puede resolver un problema multiplicativo de valor faltante.

Tabla 1

Contenido Curricular y Porcentaje de Acierto en la Prueba EXCALE 2014

Contenido curricular	**Porcentaje de acierto**
Resolver problemas de variación proporcional conociendo el valor unitario y cuya solución implique una multiplicación o una suma iterada.	64%
Resolver problemas de variación proporcional conociendo el valor unitario y cuya solución implique una multiplicación.	50%
Identificar la operación que resuelve un problema dado.	44%

Esta prueba se dejó de aplicar en el 2015, ya que se diseñó en coordinación con la SEP un nuevo plan para evaluar el aprendizaje de los estudiantes, que en la actualidad se conoce como Planea. Actualmente, en el año 2023, se aplica esta prueba en coordinación entre la Secretaría de Educación Pública (SEP) y la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (MEJOREDU).

La prueba estandarizada Planea (2018) también es un referente relevante, ya que proporciona información sobre el logro educativo y permite conocer en qué medida los estudiantes alcanzan los Aprendizajes Clave[2] de los campos de formación relacionados con Lenguaje y Comunicación, y Matemáticas. Esta prueba se aplica en tercer grado de preescolar, sexto de primaria, tercero de secundaria y el último grado de la educación media superior. En el caso específico de sexto grado de primaria, se debe prestar atención al contenido curricular relacionado con "resolver problemas de multiplicación de números naturales", que se expone en la prueba. La misma presenta dos diferentes reactivos sobre este contenido, de los cuales uno muestra un 23.6% de logro y el otro un 17.9%. Estos datos revelan el porcentaje de estudiantes que responden correctamente a estos reactivos y tienen habilidades para resolver problemas multiplicativos es bajo.

Los bajos resultados (pruebas Planea y EXCALE) están estrechamente vinculados a la falta de construcción con sentido de este conocimiento multiplicativo por parte de los estudiantes, ya que las pruebas muestran una falta de comprensión sobre el procedimiento que permite al estudiante resolver el problema. Tal como lo propone Charnay (1997), los estudiantes requieren desarrollar nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas, desde la construcción del conocimiento en un sentido interno, que sepan cómo y por qué funciona esa herramienta que usan. El alumno debe ser capaz no solo de repetir algoritmos o procedimientos, sino de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas.

En síntesis, estas pruebas estandarizadas muestran que hay bajos resultados en los conocimientos construidos sobre la multiplicación y en los aprendizajes que se abordan en los siguientes ciclos escolares, como los problemas de valor faltante. Estos bajos resultados

[2] Los Aprendizajes Clave son “el conjunto de conocimientos, prácticas, habilidades, actitudes y valores fundamentales que contribuyen sustancialmente al crecimiento integral del estudiante, los cuales se desarrollan específicamente en la escuela y que, de no ser aprendidos, dejarían carencias difíciles de compensar en aspectos cruciales para su vida” (SEP, 2018, p. 111).

nos permiten inferir que hay una construcción deficiente de estos conocimientos por parte del estudiante, por lo tanto, la enseñanza debe mejorar.

1.3 Algunas dificultades en la enseñanza de la multiplicación

Dentro de sus múltiples objetos de estudio, la investigación educativa busca también comprender por qué los estudiantes no han logrado los aprendizajes de la multiplicación. Diferentes autores han hecho esfuerzos para estudiar la enseñanza y el aprendizaje de esta operación aritmética (Weiss *et al*., 2019; Ivars y Fernández, 2016; Oller, 2012; Burgos *et al.*, 2020). Se han identificado algunas dificultades en el aprendizaje de la multiplicación y se han propuesto algunas ideas para abordar este tema en el aula. Con base en ello, para esta investigación señalamos tres principales dificultades:

• Primero, la necesidad de mejorar las prácticas docentes. Weiss *et al.* (2019) observaron la enseñanza en las clases de matemáticas. Identificaron que el diseño de las situaciones, la formación de los maestros y la gestión de clase son un reto. Esta dificultad está relacionada con que la mayoría de los docentes iniciaron su trayectoria profesional con Programas de Estudios anteriores a 2012; esto es, que se formaron bajo enfoques y principios que guardan una distancia entre lo que sustentan los programas de estudio y lo que se implementa en las aulas. Esta dificultad se podría erradicar con una adecuada formación continua, en la que se articulen los programas de educación básica con las necesidades específicas de los docentes. Los programas de estudio de la educación básica, desde la década de los noventa, están enfocados en el aprendizaje mediante la resolución de problemas (Hernández, 2005), esta reforma fue concretada en los planes y programas de 1993. Por esta razón, los desafíos que los autores han identificado son: determinar los conjuntos de problemas que permiten desarrollar las principales nociones matemáticas, para los cuales dichas nociones son herramientas de resolución; conocer y valorar las diferentes manifestaciones de los conocimientos en la resolución de estos problemas que ponen en juego los alumnos; y conocer formas de hacerlas evolucionar hacia los conocimientos institucionalizados.

• Segundo, el aprendizaje centrado en procedimientos convencionales. Ivars y Fernández (2016) en su estudio caracterizan la evolución de los niveles de éxito y las estrategias empleadas por estudiantes de educación primaria (de 6 a 12 años) cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. Los resultados muestran que los estudiantes de 6 a 8 años emplearon mayormente estrategias de conteo, pero a partir del tercer grado la estrategia más empleada fue el algoritmo. El uso del algoritmo vino ligado a la aparición de una estrategia incorrecta, el uso del algoritmo inverso, esto es que el estudiante resuelve el problema haciendo la operación de dividir, cuando la operación correcta sería multiplicar, o viceversa. Por lo que sugieren que la introducción precoz del algoritmo en tercer grado de primaria a la hora de resolver problemas multiplicativos conlleva la disminución del uso de otras estrategias correctas que implican una comprensión adecuada del problema. Se le recuerda al lector que en tercer grado el Programa de estudios menciona que la resolución se debe basar en los procedimientos informales. Por ese motivo, es importante tomar en cuenta los conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes.

• Tercero, la falta de carácter longitudinal en la enseñanza de la multiplicación, recordando que estos aprendizajes se estudian a lo largo de varios grados escolares en la primaria. En investigaciones previas (Oller, 2012 y Burgos *et al*., 2020) se ha identificado en la educación secundaria que siguen teniendo dificultades cuando se les plantean problemas de proporcionalidad, a pesar de haber expuesto a los estudiantes a este conocimiento multiplicativo desde los primeros años. Los autores identifican esto debido a la falta del manejo de las magnitudes, pues a los estudiantes se les proponen problemas sólo con referentes numéricos, sin mencionar los tipos de magnitudes que se refieren, por ello se propone poner mayor énfasis en la interdependencia del valor numérico, significado, razones, así como ampliar el bagaje de situaciones que se le presenten a los estudiantes (Oller, 2012).

En la presente investigación, se considera fundamental que los docentes desarrollen habilidades para ajustar mejor la interacción con sus estudiantes en el aula. En el capítulo de antecedentes, se abordará la relevancia de las intervenciones docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Con estas mejoras, las intervenciones de los docentes en su práctica cotidiana estarán dirigidas a las necesidades identificadas, serán pertinentes y críticas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Además, es esencial que los docentes dispongan de tiempo para dialogar y socializar sus experiencias en clase tanto con sus compañeros como con el docente

Aunado a lo anterior, se ha identificado la necesidad de fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, en conjunto con las problemáticas previamente descritas. Un estudio realizado por Carraher *et al*. (1999) en su emblemático libro "En la vida diez, en la escuela cero" mostró que los estudiantes resolvían problemas de su entorno laboral con mayor eficiencia que los planteados en el aula. Estos resultados abren interrogantes acerca de cómo se podrían profundizar en los conocimientos matemáticos que los estudiantes han adquirido fuera del entorno escolar, y cómo las interacciones didácticas del maestro en el aula podrían mejorar la enseñanza.

En el citado estudio, los autores encuentran diferencias en los procedimientos que emplean los niños. Por un lado, en el entorno laboral los estudiantes realizaban operaciones utilizando diversas estrategias y cálculos sin la necesidad del lápiz y papel; por otro lado, al realizar los mismos problemas en la escuela resolvían de manera incorrecta los cálculos, recurrían siempre al uso de algoritmos.

Existen investigaciones que se han enfocado en el conocimiento matemático de los niños trabajadores fuera de la escuela. Una de estas investigaciones encontró que las situaciones matemáticas a las que se enfrentan los niños son ricas y complejas, tanto por las características matemáticas de los problemas, como por los procedimientos eficaces que utilizan para resolverlos (Padilla, 2015). Otra investigación, llevada a cabo por Solares (2012), también indaga sobre los conocimientos matemáticos que movilizan los niños jornaleros. En este caso, se reflexiona sobre los posibles vínculos entre los conocimientos que han aprendido fuera de la escuela y el aprendizaje en el aula.

A partir de estas observaciones, en relación con los niños trabajadores, las autoras enfatizan la importancia de conocer las matemáticas que los niños ya utilizan en su vida diaria con el fin de establecer conexiones efectivas con los conocimientos escolares. Es fundamental recordar que la resolución de problemas multiplicativos está estrechamente relacionada con los procedimientos que los estudiantes utilizan, por lo que resulta esencial retomar en el aula los conocimientos matemáticos fundamentales que los niños han adquirido tanto dentro como fuera del salón de clases.

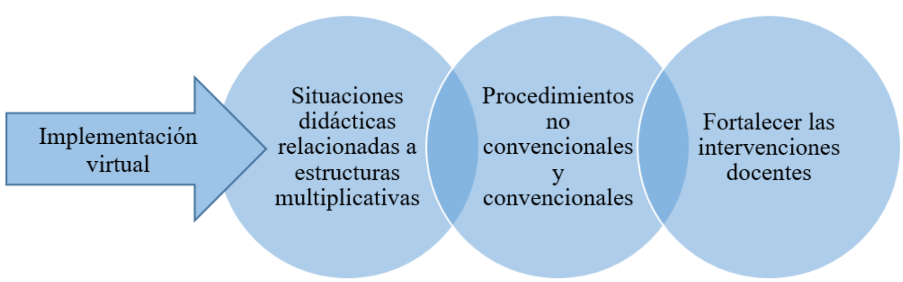
1.4 Objeto de estudio

En el contexto de los aportes previamente mencionados, se han acotado tres rubros que conforman el objeto de estudio de la presente investigación, los cuales se presentan en la Figura 1: situaciones didácticas relacionadas con estructuras multiplicativas, procedimientos convencionales y no convencionales, y fortalecimiento de las intervenciones docentes. Cada rubro proporciona información para entender cómo los docentes pueden implementar situaciones de aprendizaje en el aula que permitan a los estudiantes poner en práctica sus propios procedimientos para resolver problemas multiplicativos. De esta manera, los profesores podrán realizar intervenciones acertadas que movilicen los conocimientos de los estudiantes.

La implementación virtual es una condición que se incluye dentro del objeto de estudio, esto es debido a la contingencia sanitaria por COVID-19. Fue necesario considerar ambientes educativos en modalidad virtual para implementar las situaciones didácticas. A pesar de la contingencia, las escuelas dieron continuidad a las actividades académicas mediante educación virtual, esto trajo consigo complejidades para los docentes (Macchiarola *et al.*, 2020).

Figura 1

Esquema del objeto de estudio



Como ya se mencionó, el objeto de estudio se enfoca en las **situaciones didácticas** relacionadas con los problemas multiplicativos, con un énfasis en los problemas tipo valor faltante, los cuales se tratarán con mayor profundidad en el capítulo tres. También se presta atención a los **procedimientos convencionales y no convencionales**, ya que se ha demostrado que los procedimientos no convencionales que emplean los estudiantes pueden ser aprovechados para mejorar la construcción del conocimiento. Además, se busca identificar cómo los conocimientos matemáticos previos de los niños pueden ser relacionados con los conocimientos escolares. Para lograr esto, se utilizará la ingeniería didáctica de Artigue (1995) para analizar previa y posteriormente las situaciones didácticas a implementar y se buscará identificar elementos que permitan elaborar orientaciones para **fortalecer las intervenciones docentes.** De esta manera, se espera contribuir a la atención de la problemática descrita anteriormente.

La presente investigación busca abordar la problemática previamente descrita mediante la construcción de una secuencia didáctica que promueve la construcción de conocimientos multiplicativos, su implementación y su análisis. Como parte de los resultados se ha concretado la elaboración de orientaciones didácticas que puedan contribuir a los docentes a apoyar la construcción de conocimientos multiplicativos por parte de los estudiantes. En esta perspectiva, se considera que el trabajo profesional del docente va más allá de la transmisión de información y la evaluación del desempeño de los alumnos. En cambio, implica la identificación de situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos, la organización de secuencias didácticas que promuevan la evolución de los procedimientos de los estudiantes, la formulación de problemas desafiantes, la facilitación de la socialización de diferentes estrategias de solución y la reflexión crítica sobre ellas, así como la evaluación continua de múltiples aspectos del proceso de aprendizaje.

Por consiguiente, las orientaciones docentes que se derivan del análisis de las situaciones didácticas y su implementación virtual adquieren un valor significativo en el actual enfoque didáctico. Al contar con dichas orientaciones, los docentes tienen una visión más amplia del contenido que se espera los estudiantes aprendan, esto permite desarrollar su práctica de manera más efectiva y personalizada.

1.5 Preguntas de investigación y objetivos

Con la finalidad de mejorar la práctica docente, desde la didáctica, se plantea la siguiente pregunta general de investigación de este trabajo:

Pregunta general:

¿Qué intervenciones didácticas promueven la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria?

Preguntas específicas:

¿Qué características deben tener las orientaciones didácticas que consideren intervenciones docentes adecuadas para promover la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria?

¿Cuáles son las situaciones didácticas más efectivas para promover la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria?

Objetivos

El objetivo general de esta investigación es:

Proponer orientaciones didácticas que permitan fortalecer las intervenciones docentes para promover la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria, a partir de la implementación de situaciones didácticas.

Objetivos específicos:

Identificar qué elementos son los más adecuados para promover la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria a partir de la implementación de situaciones didácticas diseñadas para este fin.

Elaborar una secuencia didáctica que promueva la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria

Capítulo 2. Antecedentes

En este capítulo, se presentan algunos hallazgos de estudios previos en la investigación educativa que se relacionan con el objeto de estudio de esta investigación. Con el fin de identificar los elementos abordados por otros autores desde el enfoque constructivista, fue necesario revisar los trabajos de varios autores. Entre ellos, se destacan Charnay (1997), Chemello (1997), Ortega, Pecharromán y Sosa (2011) y Chamorro (2006), quienes han identificado la importancia de fomentar la comprensión para el conocimiento multiplicativo.

Las investigaciones de Broitman *et al.* (2018), Blanco *et al*. (2010), Isoda y Olfos (2011), Fernández (2004), Cantoral *et al.* (2005), Solares (2012) y Caballero (2005) proporcionan bases sólidas para valorar y considerar los procedimientos no convencionales en la resolución de problemas, así como las intervenciones docentes en la implementación de situaciones didácticas y la elaboración de orientaciones didácticas. Estos estudios permiten identificar dos elementos relevantes para nuestro objeto de estudio: los procedimientos convencionales y no convencionales, y los factores a considerar en la toma de decisiones sobre las intervenciones docentes. Para profundizar en este aspecto, se consultó la literatura de autores como Moreno y Waldegg (1992), Broitman *et al.* (2018), Isoda y Olfos (2011) y Garnica (2003), quienes han identificado algunos procedimientos que utilizan los niños en la resolución de problemas multiplicativos.

La modalidad virtual de educación es otro elemento que se considera en nuestro objeto de estudio, debido a la contingencia generada por la pandemia de COVID-19, que ha llevado a la implementación de situaciones didácticas en línea. Por lo tanto, se consultó la literatura de otros autores, como Grisolia y Pagano (2008), García y Taberna (2021) y Varón *et al.* (2013), quienes identifican elementos importantes a considerar en este campo.

En este apartado se describen las aportaciones de cada uno de los textos analizados. Como punto de partida se comienza con la teoría constructivista, la cual brinda a los docentes elementos para comprender que los propios estudiantes construyen su conocimiento, resultado también de las experiencias anteriores que ellos tienen más allá de la escuela.

2.1 Construcción del sentido del conocimiento matemático

Charnay (1997) propone que la resolución de problemas es el camino para la construcción del conocimiento matemático escolar. Tener en cuenta en la enseñanza la construcción del sentido, sugiere el autor, es uno de los objetivos esenciales y al mismo tiempo una de las dificultades principales de la enseñanza de la matemática.

Guy Brousseau (citado en Charnay, 1997) resalta la importancia de que el conocimiento matemático se construya con sentido y especifica que éste está determinado de la siguiente manera:

> No sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma (pp. 52-53).

Se entiende por esto, que el estudiante debe ser capaz de resolver problemas nuevos, no sólo repetir o rehacer un procedimiento, sino adaptar y utilizar sus conocimientos para resolver nuevas situaciones.

Charnay (1997) retoma dicho planteamiento de Brousseau y señala que la construcción del sentido de un conocimiento matemático se da en dos niveles. En un *nivel externo*, cuando se indaga sobre la utilización del conocimiento y los límites del mismo, y en un *nivel interno*, cuando se pregunta sobre la forma y el sentido del funcionamiento de una determinada herramienta matemática.

Para que los estudiantes puedan construir un sentido en su aprendizaje, el cálculo no debe abordarse de manera aislada, sino como parte de un problema a resolver (Chemello, 1997). Desde esta perspectiva, el cálculo adquiere significado a través de los problemas que resuelve y también de aquellos que no puede resolver (sus límites de aplicación), en los cuales deberá utilizar un procedimiento diferente. El autor citado también destaca la importancia de reflexionar sobre el procedimiento, analizar cómo y por qué funciona, lo que permitirá construir un sentido interno del aprendizaje.

Así, al asumir que el aprendizaje debe ser significativo para los estudiantes, es evidente que debemos procurar en la escuela mejores experiencias de enseñanza y aprendizaje que permitan a los alumnos construir conocimientos matemáticos con mayor sentido hacia la multiplicación. Es así como Ortega, Pecharromán y Sosa (2011) indican que "el aprendizaje de los conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas es un procedimiento altamente valorado y esta práctica es fundamental en la consolidación de los aprendizajes" (p.100). Desde este punto de vista, los problemas juegan un papel esencial en la enseñanza ya que no se trata sólo de hacer una operación o encontrar un resultado, tiene que ver con el tratamiento que el estudiante hace con el problema y las decisiones que va tomando para su resolución.

2.2 Procedimientos para la solución de problemas multiplicativos

Un problema multiplicativo es un tipo de problema matemático que involucra resolverse por medio de una multiplicación o división para resolver una situación real o ficticia. En este tipo de problemas, se presentan dos o más cantidades que están relacionadas por una multiplicación, y se debe determinar el valor de una o más de estas cantidades desconocidas. (Garnica, 2003)

Belmonte (2006) sugiere que se puede empezar a enseñar la multiplicación a través de los problemas de isomorfismo de medidas propuestos por Vergnaud, los cuales se profundizarán en el apartado de fundamentación teórica. Según Belmonte, estos problemas permiten establecer una conexión entre la multiplicación y la adición. Por lo tanto, los primeros problemas de multiplicación que se presentan a los estudiantes pueden ser resueltos por medio de la suma iterada.

Broitman *et al.* (2018) han identificado los tipos de problemas que habitualmente se proponen a los estudiantes en la escuela primaria. Desde los primeros grados, se les presentan a los estudiantes en los libros de texto diferentes problemas multiplicativos, en su mayoría de valor faltante. En segundo grado de primaria, se introducen problemas multiplicativos en donde los estudiantes recurren al conteo, uso de material concreto, dibujos, sumas iteradas, y comienzan a usar el signo *x* (por) para resolver estos problemas. Moreno y Waldegg (1992), coinciden en reportar que uno de los primeros procedimientos para los problemas multiplicativos de valor faltante en los grados de primero y segundo de primaria, es la suma iterada de un número, con la cual se comienza el estudio de la multiplicación como un medio económico para expresar una unidad repetida varias veces.

Por su parte, Garnica (2003) identificó en su investigación que los estudiantes van desarrollando nuevas estrategias, retoman algunos conocimientos previos y los reestructuran a fin de hacerlos más eficaces. Por ejemplo, para resolver la multiplicación 7 x 6 el estudiante puede conocer la respuesta de 7 x 5= 35, que sería un resultado anterior, y ahora sólo debe operar con 35 + 7 = 42, que es el resultado de 7 x 6.

Otra estrategia es separar unidades y decenas. Al multiplicar 5 x 12 se descompone 5 x 10 y luego se agrega el resultado de 5x2. Para considerar esta estrategia, el estudiante debe reconocer la descomposición de las cifras: el número 12 se descompone en 10 + 2, por lo tanto, ambos números se multiplican por el 5 y los resultados se suman.

Asimismo, en el marco de la Reforma Educativa 2017, se establecieron los "Aprendizajes Clave para la Educación Integral", en los cuales se señala la importancia de enseñar el algoritmo convencional de la multiplicación junto con los procedimientos que los estudiantes ya han establecido (SEP, 2017b). Estos procedimientos permiten que los estudiantes construyan su aprendizaje a partir de procedimientos no convencionales que se complementarán para acercarse a los procedimientos formales, lo que les da la posibilidad de aprender y aplicar distintas estrategias para discriminar entre varias opciones de solución y para que vayan evolucionándolos hacia procedimientos más eficaces y económicos. Algunos autores, como Broitman *et al*. (2018), Luceño (1999, citado en Garnica, 2003) y Solares (2012), han clasificado estas estrategias en procedimientos no convencionales que los estudiantes desarrollan antes de los procedimientos convencionales, como el algoritmo de la multiplicación. A continuación, se presentarán algunos de estos procedimientos.

2.2.1 Valoración de los conocimientos no convencionales

La resolución de problemas multiplicativos que sugiere el Plan y Programa de estudios (2011) señala que, antes de enseñar formalmente las operaciones, es fundamental que los estudiantes de primero a tercer grado resuelvan los problemas con procedimientos propios, lo que se consideran procedimientos no convencionales o informales.

La investigación de Caballero (2005) profundiza en el conocimiento informal que poseen los niños acerca de las cuatro operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación y división. Se indica que los niños tienden a interpretar y abordar las matemáticas convencionales a partir de sus conocimientos matemáticos no convencionales. Esto confirma que un aumento en las experiencias matemáticas no convencionales lleva a la aparición de procedimientos más sofisticados y con una mejor comprensión del problema. Caballero (2005) afirma que "la perspectiva educativa que debería predominar en la escuela ha de ser aquella que tenga en cuenta los conocimientos informales de los niños y a partir de ellos construya el aprendizaje formal" (p.3).

La investigación realizada por Fernández *et al*. (2004) destaca la falta de valoración que se le otorga al aprendizaje matemático informal, también conocido como matemáticas no convencionales, en el contexto escolar. Según su estudio, esta falta de valoración lleva a un bajo rendimiento académico y a una escasa capacidad de pensamiento matemático. Por lo tanto, los autores consideran necesario el desarrollo del aprendizaje matemático informal en el aula.

En su investigación, los autores describen aspectos importantes en la instrucción de las matemáticas, como el papel del docente, el papel del padre, las creencias acerca de las matemáticas, el lenguaje, la institución y las creencias sobre el desarrollo y el aprendizaje del niño. Los resultados obtenidos en su estudio muestran que los niños ya tienen habilidades y nociones previas sobre las matemáticas informales, las cuales les permiten un posterior aprendizaje formal. Estos aprendizajes son de gran importancia, ya que son ideas que los niños han desarrollado a través de sus experiencias cotidianas.

Los primeros acercamientos no convencionales a las matemáticas ayudan a la formación de un pensamiento lógico y en la estructuración de las habilidades de razonamiento, lo que posteriormente influye en el aprendizaje y en el progreso intelectual de los procedimientos convencionales. En resumen, la investigación de Fernández *et al.* (2004) subraya la importancia de valorar y desarrollar el aprendizaje matemático informal en el aula para mejorar el rendimiento académico y la capacidad de pensamiento matemático de los estudiantes.

Los autores mencionados proponen que en la resolución de problemas matemáticos escolares se movilicen las nociones matemáticas previas de los estudiantes, ya sean adquiridas dentro o fuera de la escuela. Además, sugieren valorar las diversas manifestaciones del conocimiento que utilizan los estudiantes al resolver estos problemas, ya que estas serán la base para avanzar hacia conocimientos matemáticos escolares más formalizados, lo que se logra a través de situaciones didácticas y las intervenciones docentes. Los procedimientos no convencionales van evolucionando hacia estrategias más económicas, lo que permite resolver problemas multiplicativos cada vez más rápido y eficazmente. A medida que los estudiantes descubren las relaciones de la multiplicación, enriquecen sus estrategias de cálculo y reconocen algunas de sus propiedades.

Estos conocimientos que han adquirido los estudiantes les permiten resolver problemas por medio de diferentes procedimientos. Algunos autores han identificado ciertos procedimientos no convencionales al resolver problemas multiplicativos. Por ejemplo, Luceño (1999, citado en Garnica, 2003) identifica las siguientes estrategias de desarrollo progresivo, los cuales se describen a partir de su estudio:

1. **Recuento unitario**: el niño puede representar con material concreto o con dibujos la situación matemática. Por ejemplo, si se plantea al estudiante el siguiente problema: “tenemos tres bolsas y en cada una hay cuatro canicas, ¿cuántas canicas hay en total?” (p 17). El niño procederá a contar una a una todas las canicas o bien, a realizar el dibujo de las tres bolsas con cuatro canicas cada una y así poder contar todas las canicas.

2. **Doble recuento**: en este procedimiento se “percibe la regularidad de los recuentos y la repartición de los grupos” (p 17). Al conocer cuántos elementos hay en cada grupo y la cantidad de grupos que se van a formar se lleva la cuenta de los elementos en cada grupo para que posteriormente realice el sobreconteo de todos los elementos. El procedimiento de multiplicar 3 x 4 constaría de las siguientes acciones sucesivas:

   Se lleva la cuenta del número de grupos, en este caso son tres grupos:

   1 2 3

   Se lleva la cuenta de los 4 elementos en cada grupo:

   1,2,3,4 1,2,3,4 1,2,3,4

   Se generan números sucesivos a partir de la serie numérica para realizar el sobreconteo:

   1,2,3,4; 5,6,7,8; 9,10,11,12

   Por lo que al realizar el sobreconteo en cada uno de los grupos llega al resultado de 3 x 4 = 12.

3. **Recuento Transaccional**: “el recuento se hace subvocalmente para concluir con la interiorización de las palabras que marcan el final del grupo” (p 18). Por ejemplo, 3 x 2 = __

   (tres grupos con dos elementos cada uno) 1 - **2** 3 - **4** 5 –**6**

   (resultado de cada grupo) **2** **4** **6**

4. **Estrategia aditiva**: Se utilizan sumas repetidas. Por ejemplo, en 4 x 3, primero se suma 3+3 que da 6 y luego al resultado se suman otra vez 3, dando 9 y finalmente se suman otros 3, esto suma como resultado 12. Esta es conocida también como suma iterada.

5. **Cálculo de productos parciales**: Por ejemplo, en 8 x 7, se puede descomponer el 8 en 5 + 3, cada uno de estos números se multiplica por 7 = 5 x 7 + 3 x 7. Se suman los resultados 35 + 21 = 56.
6. **Cálculos utilizando la multiplicación por diez**: Por ejemplo, en 6 x 35, se descompone el 35 en 10 + 10 + 10 + 5 y estas cantidades se multiplican por 6= 6 x 10 + 6 x 10 + 6 x 10 + 6 x 5. Se suman los resultados 60 + 60 + 60 + 30 = 210.
7. **Cálculos con dobles:** Esta se emplea cuando se añade a sí misma otra cantidad igual. Por ejemplo, 12 + 12 se suma la cantidad dos veces o se multiplica 2x12.

Asimismo, Broitman *et al.* (2018) coincide que el conteo es uno de los primeros recursos de los que disponen y particularmente el que más aparece en las producciones de los estudiantes. La misma autora destaca la importancia de aprovechar y potencializar los recursos con los que ya cuentan los niños, esto permite fortalecer los conocimientos adquiridos en la escuela. Los estudiantes adquieren conceptos matemáticos, destrezas y estrategias que les permiten actuar utilizando dicho conocimiento, de manera intuitiva e informal (Blanco *et al.*, 2010).

Por otra parte, Solares (2012) ha identificado diversos procedimientos tanto para problemas aditivos y multiplicativos en su investigación "Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes". La autora indaga sobre los conocimientos matemáticos que se movilizan en algunas actividades del trabajo agrícola e identifica elementos que pudieran dar cuenta de posibles vínculos, distancias o conflictos entre los conocimientos matemáticos movilizados en contextos escolares y extraescolares. En los procedimientos que usaban los niños identificó algunos no convencionales, otros convencionales y también híbridos.

En lo que se refiere a los procedimientos **no convencionales**, la autora indica que los niños se apoyan en su experiencia para obtener rápidamente algunos resultados, como la memorización de ciertas cantidades y la escritura numérica para apoyar la realización de los cálculos mentales. Uno de los procedimientos fue la estimación, en la cual los niños se apoyan en estrategias de cálculo mental para acercarse al resultado.

Respecto a los procedimientos **convencionales**, particularmente los algoritmos, se explica que pocos alumnos los utilizaban y la mayoría de las veces de una manera poco eficaz, ya sea porque no manejan el algoritmo o porque la operación elegida no era la adecuada. En los casos en los que se utilizaron de manera funcional fue cuando los alumnos los incorporaron a procedimientos no convencionales.

Al integrar su conocimiento extraescolar a los procedimientos escolares, los estudiantes generan una especie de **híbrido,** esto es que emplean e integran conocimientos escolares con sus propios procedimientos para apoyarse en la resolución de problemas. Esto, según la autora, podría ser un ejemplo de vínculo entre conocimientos matemáticos que se movilizan dentro y fuera de la escuela y pueden contribuir para mejorar sus procedimientos.

Con base en su investigación, Solares (2012) ha identificado un reto que la escuela debe atender, que es "lograr dar un lugar relevante a los procedimientos personales (no canónicos, no institucionales) de los alumnos, como los que estos niños y niñas mostraron" (Solares, 2012, p.235). Se debe considerar cómo articular los conocimientos no convencionales con las representaciones convencionales, a fin de contribuir en desarrollar los procedimientos propios de los estudiantes y hacerlos más eficientes buscando la articulación con los procedimientos convencionales.

2.3 El cuadro de multiplicación como una estrategia didáctica

Como se ha mencionado, la multiplicación es un conocimiento matemático, que se aborda desde los primeros años escolares y se continúa en grados superiores. Las situaciones didácticas relacionadas con estructuras multiplicativas, permiten, entre otros aspectos, que los estudiantes establezcan relaciones entre las tablas de multiplicar y, de esta manera, adquieren estrategias para resolver problemas multiplicativos. Aires (2006) reporta que algunas de estas relaciones se pueden observar en el cuadro de multiplicación ya que permite usar cálculos más sencillos para resolver otros más complejos, y a partir eso analizar las relaciones.

La construcción del "cuadro de multiplicación" es retomada en diversos materiales ya que es una herramienta que permite "conocer y usar las propiedades de la multiplicación para realizar variados cálculos" (Aires, 2006, p. 13). El cuadro de multiplicación, también llamado tabla Pitagórica, se atribuye al matemático y filósofo griego Pitágoras de Samos (580 a.C. – 495 a.C.), quien es conocido como "El padre de los números". Esta tabla está representada por una combinación infinita de números, pero en el contexto escolar se presenta regularmente del 1 al 10 como se observa en la Figura 2. Estos números pueden ser multiplicados y sus resultados pueden servir también para resolver divisiones. En esta investigación nos referiremos a la tabla pitagórica como "cuadro de multiplicación".

Figura 2

Cuadro de multiplicación

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	32	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

En los libros de texto gratuitos Desafíos Matemáticos de segundo (SEP, 2017) y tercer grado de primaria (SEP, 2011) se proponen situaciones en las cuales los estudiantes van a desarrollar estrategias para resolver los productos en el cuadro de multiplicación y apoyarse en ellos para resolver problemas. Algunas de las estrategias que se espera construyan los estudiantes para encontrar resultados son recurrir a dobles, mitades, sumar o restar una vez el multiplicando. En el Libro para el maestro (SEP, 2017) se describe la importancia de que los estudiantes tengan un repertorio de productos y estrategias que les permita resolver las multiplicaciones y los problemas que se les presenten. La intención de utilizar el cuadro multiplicativo es para registrar los resultados, consultar los productos que han obtenido y descubrir relaciones y regularidades.

Por su parte, en el libro "Enseñanza de la Multiplicación: Desde el estudio de clases Japonés y las propuestas Iberoamericanas" (Isoda y Olfos, 2011), los autores destacan la importancia de reconocer los conocimientos previos que los alumnos ya han adquirido fuera del aula, así como los atributos de las situaciones problema que promueven la comprensión del alumno. La propuesta es profundizar en el significado de la multiplicación, entendiendo que el producto aumenta en la cantidad del multiplicando cuando el multiplicador aumenta en 1. Esta propiedad permite que los estudiantes construyan de forma autónoma las tablas y verifiquen la precisión de la multiplicación, no como una tarea mecánica de memorización, sino como un proceso de construcción del conocimiento. De esta manera, se fomenta un aprendizaje significativo en el que los estudiantes se involucran de forma activa y participativa. En cuanto a la memorización, plantean que esta se ha de alcanzar por medio de la construcción de la tabla en un proceso con sentido para el alumno, los estudiantes van siendo capaces de recordar las multiplicaciones cuando ellos las requieran y sientan la necesidad de ir aprendiendo las multiplicaciones para hacer más económicos sus procedimientos. Además, dan cuenta de las relaciones de dobles y mitades, por ejemplo, con las tablas del 2, 4 y 8; 3 y 6; y 5 y 10.

Por su parte, Broitman *et al.* (2018), en el libro "La divina proporción" identifica que en tercer grado los estudiantes deben partir de la exploración e identificación de regularidades entre los productos incluidos en el cuadro de multiplicación, como sacar dobles, triples, mitades, etc. Un ejemplo de los procedimientos que realizan los estudiantes de tercero de primaria al resolver un problema multiplicativo es:

"Hay 5 cajas de alfajores y en cada una hay 4 piezas, ¿en total, cuántos alfajores hay?"

Broitman identifica que una posible manera de resolver el problema es la siguiente: 4 + 4 = 8, 8 + 4 = 12 y 12 +4 = 16. Reconoce la suma iterada de 4 en 4, registrando en el cuadro de multiplicación los resultados parciales.

El libro "Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir" (Block *et al*., 1994) es otro recurso valioso que ofrece diversas actividades para construir la noción de multiplicación a través de la resolución de problemas. En esta obra, se proponen actividades que fomentan la aplicación de procedimientos y la validación de resultados por parte de los estudiantes. Una de las herramientas que se presenta es la construcción del cuadro de multiplicación, que permite identificar patrones en las tablas y explorar la construcción de conocimientos relacionados con las estructuras multiplicativas, pasar de procedimientos no convencionales a convencionales. La reflexión sobre estos procedimientos en el aula promueve la evolución de los conocimientos multiplicativos. Por esta razón, en la presente investigación se considera como un elemento primordial las intervenciones docentes para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje con los estudiantes

2.4 Las intervenciones docentes: una estrategia fundamental para el trabajo en el aula

Una intervención docente es una estrategia o acción específica que un profesor o docente realiza en el aula o en un ambiente educativo para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Esta intervención puede ser individual o grupal y puede tener diferentes objetivos, como aumentar la motivación de los estudiantes, mejorar su comprensión de los contenidos, desarrollar habilidades específicas, entre otros. Es necesario atender la mejora de las prácticas docentes para enseñar matemáticas, especialmente en la promoción de conocimientos multiplicativos (Block *et al*., 2019).

El Programa de estudios Aprendizajes Clave (SEP, 2017c) se plantea que las intervenciones docentes tienen un papel indispensable para impulsar el aprendizaje de los niños; se menciona que "una intervención adecuada y de calidad puede favorecer el desarrollo de la capacidad para enfrentar, sobreponerse y superar situaciones adversas" (p. 62). A diferencia del Programa de estudios propuesto en 2011 (SEP, 2011), este enfoque destaca la importancia de mejorar las prácticas de enseñanza, como lo son las intervenciones docentes en la enseñanza.

Los docentes deben revisar las recomendaciones propuestas en los nuevos planes de estudio, ya que estas sugieren transformar la estructura del salón de clases y motivar a los estudiantes a crear una atmósfera propicia para el aprendizaje activo. Esto implica dar mayor autonomía al docente para trabajar con su grupo a partir de las necesidades identificadas y fomentar interacciones significativas entre los estudiantes y entre estos y el maestro. A pesar de estas recomendaciones, algunos docentes aún recurren a la exposición de temas sin dejar espacio para la participación activa de los estudiantes, lo que resalta la importancia de explorar medios didácticos que promuevan interacciones significativas.

Por su parte, las intervenciones didácticas deben favorecer la motivación, el docente debe proponer situaciones problemáticas en las que los estudiantes requieren de una participación activa para dar respuestas a las preguntas, esto permite que el alumno sea el protagonista y responsable de su aprendizaje (Fuster y García, 2000). La intervención docente debe llevar a los estudiantes a observar similitudes, diferencias, crear relaciones, respecto al saber matemático que se promueve y planificar el intercambio de conocimientos entre los alumnos de los grados que se atienden (García y Solares, 2022 citado en Hernández, 2022). Es importante reconocer que los alumnos cuentan con conocimientos previos que les permite llegar a la respuesta de las preguntas durante las intervenciones, que los niños tienen mucho qué expresar, preguntar y aprender y la ayuda que brindan los docentes durante la intervención pedagógica favorece la construcción del conocimiento.

De acuerdo con un estudio sobre las ayudas que hacen los docentes, Block *et al*. (2015) la menciona como un tipo de intervención que hacen accesibles las tareas que se llevan a cabo en las clases de matemáticas. Por otro lado, el autor Coll (2000), menciona que el papel del docente en el proceso de aprendizaje es el de proporcionar ayudas, ya que es el estudiante quien construye el significado y el conocimiento. Por lo tanto, las intervenciones docentes son una forma de asistencia en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Esta ayuda pedagógica se logra de distintas maneras: “proporcionando al alumno una información organizada y estructurada; en otras, ofreciéndole modelos de acción que imitar; en otras, formulando indicaciones y sugerencias más o menos detalladas para resolver unas tareas; en otras aún, permitiéndole que elija y desarrolle de forma totalmente autónoma unas determinadas actividades de aprendizaje” (Coll, 2000, p.26).

Broitman, Escobar, Sancha y Urretabizcaya (2014) llevaron a cabo un estudio en el que analizaron las intervenciones de una maestra en el aula al enseñar matemáticas. En colaboración con la docente, elaboraron una secuencia de problemas matemáticos y se centraron en estudiar cómo las interacciones entre los estudiantes y los docentes pueden mejorar el aprendizaje. Los autores destacaron que la discusión que tuvo lugar en la clase tuvo un alto valor en la generación de confrontaciones, reflexiones y argumentaciones. Gracias a la riqueza y variedad de las interacciones -y cuidando ciertas condiciones didácticas- los estudiantes pudieron construir nuevos conocimientos. En conclusión, los autores destacaron la importancia de estudiar las condiciones didácticas que permiten ampliar las oportunidades de aprendizaje.

Otro de los recursos de enseñanza que retomamos para la implementación fue la enseñanza virtual, esta modalidad hace uso de herramientas tecnológicas que permiten la interacción a través de la distancia.

2.5 Educación en modalidad virtual

La educación en modalidad virtual es un tipo de enseñanza que se realiza a través de plataformas digitales y medios tecnológicos, en la que tanto los estudiantes como los profesores pueden interactuar de forma sincrónica o asincrónica sin necesidad de estar presentes físicamente en un mismo lugar (García, 1996, citado en Grisolia y Pagano, 2008).

En la práctica educativa, la pandemia de COVID-19 obligó a los profesores a cambiar de la modalidad presencial a la virtual en un plazo de tiempo corto. Esto supuso un gran reto para los docentes, quienes tuvieron que buscar recursos para optimizar la comunicación y administrar las actividades de los estudiantes utilizando diversas plataformas como Google Meet, Zoom, Classroom, entre otras. El uso de estas herramientas online ha favorecido que los estudiantes en algunos casos se involucren en el contenido y pasen de ser receptores pasivos a actores activos en su aprendizaje (Aparicio y Silva, 2012).

Aunque la educación virtual lleva varios años en desarrollo, ha cobrado mayor relevancia durante la pandemia ya que ha permitido la flexibilidad del aprendizaje de los alumnos, adaptándose a las circunstancias espacio-temporales. Por esta razón, se decidió realizar la intervención de las situaciones didácticas en un entorno virtual.

Grisolia y Pagano (2008) explican que habrá que estar alerta respecto a la práctica efectiva de su apropiación según las situaciones. El profesor debe ser capaz de seleccionar adecuadamente los contenidos y actividades que se propondrán a los alumnos, así como de favorecer secuencias graduales y ordenadas tanto de actividades como de contenidos. Por lo que no se trata de recurrir a los medios porque están allí, sino porque son potencialmente educativos y contribuyen a la eficacia docente a distancia.

En la docencia virtual se hace un uso intensivo de las capacidades que proporciona el Internet, la conexión tanto síncrona como asíncrona entre docentes y estudiantes a través de sus ordenadores (García y Taberna, 2021). Un aula virtual de aprendizaje eficaz y eficiente debe diseñarse con el fin de garantizar la consecución de los objetivos de aprendizaje buscados y la adquisición de los conocimientos y competencias definidos en la materia a impartir.

La labor docente es importante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, ya sea en un ambiente presencial o virtual. Varón *et al.* (2013) describen la importancia de no dejar solos a los estudiantes, sino de desarrollar estrategias que favorezcan la autonomía en el proceso de aprendizaje que llevan a cabo.

La implementación virtual de las situaciones didácticas que se realizaron en la presente investigación sirvió para buscar medios tecnológicos que permitieran la participación activa de los estudiantes, esta decisión se justificará con mayor profundidad en el capítulo de metodología.

Capítulo 3. Fundamentación teórica

En este capítulo se presenta el marco teórico que se utilizará para abordar el objeto de investigación en este estudio. Este marco incluye la perspectiva constructivista, el modelo de aprendizaje aproximativo de Charnay, el proceso de construcción del aprendizaje según Piaget, los planteamientos de Muñoz y Fragoso y el aprendizaje significativo de Ausubel.

Respecto a aspectos didácticos, la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau se utiliza como referente en esta investigación. Para definir las estructuras multiplicativas, se recurre a la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud y se retoman autores como Belmonte y Greer. Además, para abordar los problemas de valor faltante o problemas de proporcionalidad, se recurre a autores como Broitman *et al*., y Block *et al*.

3.1 Perspectiva constructivista sobre el aprendizaje

Existen distintas perspectivas que pueden fundamentar las decisiones que se toman en los procesos de enseñanza y aprendizaje escolar. Por ejemplo, el modelo de aprendizaje empírico, considera que el alumno aprende lo que el profesor explica en clase y no aprende nada de aquello que no explica (Ruíz, 2006). En este camino, el docente transmite los saberes y el estudiante se limita a recibirlos, puesto que se considera que no es capaz de crear conocimientos. De esta manera el docente se adelanta a proporcionar al estudiante las nociones matemáticas que debe poner en práctica en los problemas a resolver, por lo que no permite que él mismo construya su aprendizaje.

En contraposición al modelo empírico, el aprendizaje constructivista considera que el estudiante tiene un papel activo en la construcción de sus propios conocimientos. El aprendizaje se considera una actividad propia del sujeto, donde este construye activamente nuevas ideas o conceptos basados en conocimientos presentes y pasados. La teoría piagetiana asume esta posición constructivista, basada en una tendencia al equilibrio mediante los procesos de asimilación y acomodación. Si un estudiante se enfrenta a nuevos objetos de conocimiento y no los puede asimilar, no podrá conferir un significado, y no será posible la acomodación ni el nuevo conocimiento. Por lo tanto, es importante la interacción activa del niño con su entorno físico y social, se destaca la importancia de las intervenciones escolares en la construcción de conocimientos matemáticos y la socialización entre maestros y estudiantes.

Por otro lado, la equilibración explica la construcción de estructuras cognitivas nuevas y permite que el sujeto pueda anticipar y compensar mejor los siguientes desequilibrios, dando paso a los sucesivos estadios del desarrollo. Esto introduce modificaciones en la mente del sujeto, lo que explica la construcción de estructuras cognitivas. Es relevante mencionar que esta investigación se enfoca en estudiantes de tercero y cuarto año de primaria, quienes se encuentran en la etapa de operaciones concretas y adquieren habilidades para resolver problemas aritméticos, incluyendo los multiplicativos. Asimismo, se destaca la importancia de la interacción activa del niño con su entorno físico y social, así como de las intervenciones escolares y la socialización entre maestros y estudiantes para la construcción de conocimientos matemáticos. Ausubel (1983) planteó la teoría del aprendizaje significativo, una de las principales aportaciones a la pedagogía constructivista. “El aprendizaje significativo involucra la modificación y evolución de la nueva información, así como de la estructura cognoscitiva envuelta en el aprendizaje” (Ausubel, 1983, p.5). El autor plantea que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información. Se entiende por "estructura cognitiva", al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización, esto es, que los estudiantes deben poseer en su estructura cognitiva los conceptos utilizados anteriormente, conceptos que ya están formados para que los nuevos conocimientos puedan vincularse con el anterior. Esto quiere decir que los estudiantes poseen un cúmulo de experiencias y conocimientos que influyen en su aprendizaje y deben ser aprovechados para su beneficio.

Esta teoría aporta, desde una perspectiva constructivista, lo que se debe considerar para la organización y la secuencia de los contenidos, lo que sería el diseño de la secuencia didáctica en esta investigación. Se debe tener en cuenta los conocimientos previos que tiene el alumno para plantearle situaciones que puedan resolver y también situaciones que hagan evolucionar sus estrategias de resolución. Para Ausubel (1983), aprender es sinónimo de comprender, lo que se comprende es lo que se aprende y se podrá recordar mejor. Por esta razón, en esta investigación queremos contribuir justo a esta concepción del aprendizaje, se considera que los estudiantes a través las situaciones didácticas que se les planteen puedan emplear sus procedimientos no convencionales y convencionales y vayan construyendo aprendizajes con significado en torno a la multiplicación.

La teoría constructivista de Ausubel y los modelos de referencia propuestos por Charnay comparten la idea de que el aprendizaje debe ser activo y significativo para el alumno. Es decir, el estudiante debe construir sus propios conocimientos a partir de sus experiencias previas y de las situaciones que se le presenten en el aula. En este sentido, la organización y secuencia de los contenidos deben considerar los conocimientos previos del alumno y plantear situaciones que le permitan resolver problemas y evolucionar en sus estrategias de resolución.

Charnay (2007) propone tres modelos de referencia para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Las situaciones de enseñanza son observadas a través de las relaciones entre el maestro, el alumno y el saber. El modelo normativo está centrado en el contenido, el maestro explica y reproduce el contenido, el saber se presenta acabado y los alumnos aplican ese saber mediante ejercicios. Este modelo responde a lo que llamamos enseñanza tradicional. El modelo iniciativo está centrado en el alumno, el maestro indaga las necesidades y motivaciones del alumno, aquí el saber está relacionado con cuestiones de la vida diaria o intereses del alumno. Por último, el modelo aproximativo está centrado en la construcción del saber por el alumno, desde este enfoque los alumnos construyen los conocimientos matemáticos por medio de las situaciones que propone el maestro. Con la finalidad de cumplir con los objetivos de la presente investigación, se consideró el modelo aproximativo como base del trabajo.

Ante ello es importante considerar que de acuerdo con Charnay (1997), en el modelo aproximativo se concibe al estudiante como un sujeto activo, a partir de sus conocimientos previos interactúa con el saber para lograr nuevos aprendizajes. Pone a prueba sus conocimientos para mejorarlos, modificarlos o construir nuevos saberes. El papel del docente no es el de ser poseedor del conocimiento o transmisor de éste. En el capítulo anterior se mencionó sobre la construcción del conocimiento matemático en un sentido interno y externo (Charnay, 1997), y es en este modelo aproximativo en el que se promueve que el estudiante dé ambos sentidos a sus conocimientos matemáticos.

Desde este modelo aproximativo, podemos identificar que el docente es un apoyo para el alumno, funge como guía en las actividades que propone y organiza una serie de situaciones con distintos obstáculos para movilizar los conocimientos de los estudiantes. En este modelo el docente organiza diferentes fases para el trabajo, para que los estudiantes puedan validar sus procedimientos, así como confrontarlos y defenderlos. El saber está constituido cuando puede ser transferido hacia la autonomía del alumno y lo ha construido con su propia lógica. Estas y otras premisas están apoyadas en la Teoría de Situaciones Didácticas que se aborda a continuación.

3.2 Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), propuesta por Guy Brousseau, es un referente fundamental en la didáctica de las matemáticas. Entre sus contribuciones se encuentra el concepto de la tríada didáctica, compuesta por tres elementos que interactúan para construir el conocimiento: el estudiante, el profesor y el objeto de conocimiento. Como se ha mencionado, podemos considerar que Roland Charnay (1994) integra estos elementos en el modelo aproximativo, donde el aprendizaje se centra en la construcción del conocimiento por parte del alumno. En esta investigación, se fortalecen las intervenciones en cada situación a implementar, se considera que el saber matemático en sí mismo es un objeto de conocimiento relevante y que el docente contribuye a su construcción por medio de sus intervenciones.

El profesor tiene la responsabilidad de proporcionar los medios didácticos adecuados para que los estudiantes puedan interactuar con los saberes culturales necesarios para su desarrollo personal y social, también conocidos como conocimientos previos o bagajes culturales. El estudiante interactúa con el medio y el objeto de conocimiento a través de una situación didáctica propuesta por el docente. El objeto de conocimiento es el saber que se va a enseñar, y el profesor es responsable de establecer las relaciones entre el medio y el sujeto. La TSD, según Fregona y Órus (2011), proporciona una modelización de los procesos de transmisión de los saberes matemáticos y las posibles interacciones entre el profesor y los alumnos en una actividad matemática. Aunque no es un prototipo de enseñanza, esta teoría es útil ya que proporciona elementos que sirven como condiciones en el proceso de adquisición de los saberes matemáticos en el aula, como se verá a continuación.

3.2.1 La noción de situación

La TSD considera una situación como un modelo de interacción entre el estudiante y el medio. Estas situaciones tienen una intencionalidad didáctica, es decir, un propósito explícito de construir un aprendizaje en torno a un conocimiento matemático.

La situación busca que el alumno construya un conocimiento matemático con sentido, que se presenta como la solución óptima del problema que se va a resolver. Sin embargo, un concepto no se puede aprender a partir de una sola situación, sino que es necesario abordar todas las situaciones en las que el concepto aparece para construir un aprendizaje significativo (Chamorro, 2005).

Una situación didáctica es definida por Brousseau (2000) desde dos sentidos:

1. En el sentido clásico, es una situación que se usa con fines didácticos que sirve para enseñar, tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca su efecto.
2. Una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo. De esa manera, comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no. (pp. 20-21)

La finalidad última de una situación didáctica es lograr que el estudiante se apropie de un conocimiento determinado. Esta intervención pedagógica por parte del profesor se planea mediante actividades problematizadoras que parten de un conocimiento previo para la construcción de un nuevo conocimiento. Las situaciones didácticas diseñadas deben permitir la validación de los procedimientos utilizados por los estudiantes y fomentar la socialización, el intercambio de estrategias y la confrontación de los procedimientos utilizados. Estas situaciones implican una interacción bidireccional entre el estudiante y el profesor, y el objeto de conocimiento matemático que se desea enseñar se integra con otros saberes y se enriquece a través de las interacciones entre los alumnos. De esta manera, se favorece el aprendizaje y la construcción de nuevos conocimientos en el aula.

3.2.2 La noción del medio

Como hemos mencionado, para la TSD la construcción del conocimiento se produce cuando se interactúa con una situación didáctica. Dicha situación se caracteriza por estar conformada por un medio didáctico. De acuerdo con Chamorro (2005), el medio son todas las condiciones organizadas por el profesor en torno a un conocimiento o saber determinado, para promover el aprendizaje matemático. El medio se considera como un sistema autónomo y antagonista del sujeto. Se construye para poner en desequilibrio al estudiante.

Una característica fundamental del medio didáctico es su capacidad para permitir que el estudiante plantee soluciones iniciales -lo que llamaríamos estrategia base-, pero también para ofrecer una resistencia adecuada que desafíe y evolucionen sus conocimientos previos. De esta manera, se cuestionan y ponen en tela de juicio los conocimientos previos del estudiante, lo que lo impulsa a elaborar nuevos conocimientos. Es precisamente esto lo que se busca lograr en el aprendizaje.

Fregona y Órus (2011) mencionan que, si bien el docente organiza un medio para la clase, cada estudiante a partir de sus circunstancias establecerá un medio diferente, por lo que es posible hablar de varios "medios". Esto se da por la interacción que cada uno de los estudiantes establece con la propuesta hecha por el profesor, es así, que cada estudiante recibe diferente información a partir de la interacción con el medio. Aquí la importancia de permitir en las aulas la socialización de los procedimientos y que los estudiantes puedan explicar qué es lo que entienden de la situación y cómo la resolvieron.

Asimismo, el docente también cuenta con un medio. Antes de comenzar la situación el profesor toma decisiones en cuanto a las consignas, materiales, organización del grupo, negociaciones y prevé cómo intervenir. Durante la situación, el profesor interactúa con los estudiantes acompañándolos a través de las intervenciones docentes, para favorecer el proceso de enseñanza. Al finalizar la situación, el profesor recoge la información obtenida, tanto los “éxitos” como los “fracasos” en la formulación o interpretación de los mensajes, y en los problemas de medición o construcción. Con base en esto se hacen reflexiones para identificar qué fueron aprendiendo los estudiantes, qué hacen ahora que antes no podían (Fregona y Órus, 2011).

Para los propósitos de esta investigación, la noción de medio permitió no perder de vista la complejidad que deben tener las situaciones didácticas que se propondrán a los estudiantes a través de la secuencia didáctica. En concreto se propondrán problemas multiplicativos de valor faltante, que podrían dar lugar a una interacción en la que el medio “se resista” a los conocimientos previos del alumno, es decir, que la solución implique un reto para los estudiantes. Deben afrontar el problema por medio de los conocimientos con los que cuentan y de esta manera abrir paso a la construcción de nuevos aprendizajes.

Dentro del medio que maneja el profesor, existen las intervenciones que hace a lo largo de la implementación de una situación. Esta práctica posibilita el aprendizaje de contenidos específicos por parte del estudiante (Gómez, 2006). En este trabajo de investigación se proponen, a través de orientaciones docentes, una serie de intervenciones que promueven el diálogo entre estudiantes y la socialización de sus procedimientos, de lo que comprenden o no de las situaciones; asimismo, las intervenciones abarcan la propuesta de contraejemplos para ampliar las estrategias de resolución de los estudiantes.

La elección del medio que realiza el docente para generar diversas estrategias que contribuyan a la comprensión de conceptos matemáticos se conoce como variables didácticas. Estas variables están relacionadas con el rango numérico, el tipo de problemas planteados a los estudiantes, el contexto, la organización de la clase y la gestión del tiempo. (Gómez, 2006)

3.2.3 La noción de variable didáctica

Un elemento fundamental de las situaciones didácticas son las variables didácticas, se entiende a éstas como los elementos de los problemas matemáticos en los que se hacen modificaciones a ciertas características del medio que pueden incidir en los procedimientos de los estudiantes. Brousseau (citado en Block, 2010) se refiere a ellas como "Las características de un problema que se modifican y tienen un efecto cualitativo importante sobre las evoluciones de los procedimientos" (p. 50). Esto permite que los estudiantes avancen en la construcción de sus conocimientos matemáticos. Algunas de estas modificaciones pueden reflejarse en la consigna del problema, aspectos del contexto, el tipo de magnitud en juego, el tamaño de los números, entre otras. Estas variables pueden ayudar a prever y graduar la dificultad de los problemas, propiciar diversos procedimientos y hacer más visibles para el maestro las producciones de los niños y comprenderlas mejor (Block *et al.*, 2010).

A lo largo de las situaciones que se plantearon en la presente investigación se previeron variables didácticas que posibilitan las estrategias para solucionar el problema y generar un aprendizaje. Estas modificaciones permiten llevar al límite las estrategias de los participantes para que las modifiquen o para hacer menos complejo un problema y así construyan los conocimientos matemáticos necesarios, que en esta propuesta son de tipo multiplicativo. Para ello recurrimos a las relaciones que se ponen en juego en las estructuras multiplicativas, según lo propuesto por Vergnaud (1991).

3.3 Teoría de los Campos Conceptuales

En este apartado se abordan desde diferentes autores los distintos tipos de problemas que corresponden a las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1991), (Belmonte, 2003) y (Broitman *et al.*, 2018).

Gérard Vergnaud (1991) propuso la Teoría de los Campos Conceptuales (en adelante TCC) para explicar los procesos de conceptualización de las estructuras aditivas, multiplicativas, del álgebra y relaciones número-espacio. El campo conceptual de las estructuras multiplicativas es el campo en el que se inserta esta investigación.

El autor considera un campo conceptual como un "conjunto de situaciones problema cuyo tratamiento implica conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas en estrecha conexión" (Vergnaud, 1995 citado en Ruiz, 2006, p. 65). La estructura multiplicativa según Vergnaud son el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones (Echeverry, 2013).

3.3.1 Clases de problemas de tipo multiplicativo

Vergnaud (1991) distingue numerosas clases de problemas según la relación multiplicativa. Identifica para este campo tres tipos de problemas: isomorfismo de medidas, problemas de producto de medida y problemas con un espacio único de medidas.

En los problemas de *isomorfismo de medidas* se encuentra una relación cuaternaria, en las que hay cuatro magnitudes y una de ellas se desconoce. Un ejemplo de este tipo de problemas es: "Una bolsa de 6 kilos de naranja (medidas de un tipo), cuesta $12 (medidas de otro tipo) ¿Cuánto costarán 8 kilos de naranja?" Como se puede intuir, es un problema que se resuelve con una multiplicación. La Tabla 2 representa la estructura de este ejemplo:

Tabla 2

Relación cuaternaria y el problema de isomorfismo de medidas

kilos	**pesos**
6	12
8	*x*

Vergnaud (1991) clasifica los problemas de isomorfismo de medida en tres clases principales, según la posición de la incógnita, que es la variable que interviene en el tipo de operación que se utiliza para resolver el problema. A partir de los tres datos conocidos, se determina el valor numérico que corresponde a dicha incógnita, que suele representarse con la letra x. A continuación, se presentan ejemplos de cada tipo de problema y su correspondiente esquema, adaptados al lenguaje utilizado en México. Estos ejemplos son propuestos por Vergnaud, pero se han modificado algunas palabras para contextualizarlos.

1. **Multiplicación** "Tengo 3 paquetes de yogurt. Hay 4 yogures en cada paquete. ¿Cuántos yogures tengo?" (Vergnaud, 2016, p. 197)

1 ---------- 4

3 ---------- x

El esquema nos ayuda a organizar la información, la columna derecha marca la cantidad de paquetes y la columna de la izquierda la cantidad de yogures en cada paquete. El problema proporciona tres datos, por lo que hay que identificar el cuarto dato, que es la cuarta medida, la cantidad de yogures en 3 paquetes. En este problema vemos la introducción a la multiplicación, ya una posible solución es resolverlo mediante una suma iterada

2. **División: búsqueda de valor unitario "**Pagué $15 pesos por 3 paletas ¿Cuánto cuesta una paleta?"

1 ----------- x

3 ----------- $15

Aquí la incógnita cambia de lugar, la columna derecha indica el precio de las paletas y la columna de la izquierda la cantidad de paletas. Se desconoce el precio de cada paleta. En este problema se debe encontrar el valor unitario, la operación que permite resolverlo es una división.

3. **División: búsqueda de la cantidad de unidades** "Jorge tiene $50 y quiere comprar algunos paquetes de chicles que cuestan $10 cada uno. ¿Cuántos paquetes puede comprar?"

1 ----------- $10

x ----------- $50

Como puede observarse la incógnita cambia de lugar, la columna derecha indica el precio de los chicles y la columna de la izquierda la cantidad de chicles. Se desconoce la cantidad de chicles que se pueden comprar. En este problema, al igual que en el anterior la operación que permite resolverlo es una división, pero la diferencia es que en este caso el valor unitario está dado y es necesario buscar la cantidad de unidades. Al trabajar con estructuras multiplicativas los problemas que se les presentan a los estudiantes pueden resolverse con una multiplicación o una división.

Respecto a los problemas de *producto de medidas* se caracterizan por tener una relación ternaria entre tres cantidades, en la que una es el producto de las otras dos. Por ejemplo, "Si se dispone de cuatro camisetas y tres pantalones, ¿de cuántas formas distintas se pueden formar conjuntos?". La Tabla 3 representa la estructura de este ejemplo:

Tabla 3

Producto de medidas. Tabla cartesiana de conjuntos de ropa

	a	**b**	**c**	**d**
e	(a,e)	(b,e)	(c,e)	(d,e)
f	(a,f)	(b,f)	(c,f)	(d,f)
g	(a,g)	(b,g)	(c,g)	(d,g)

La Tabla 3 muestra la información organizada en una tabla cartesiana, donde el conjunto de camisetas se representa como [a,b,c,d] y el conjunto de pantalones como [e,f,g]. Cada elemento de un conjunto se asocia con un elemento del otro conjunto. La tabla cartesiana es un organizador de información que permite calcular el número de combinaciones. Los problemas que involucran la multiplicación de números, como el producto cartesiano, son clasificados como problemas de combinatoria por Greer (Lurduy y Romero, 1999). En estos problemas, se utilizan todos los números y se agrupan los elementos para llegar al resultado final. A diferencia de los problemas de proporcionalidad, donde se asocian dos medidas, en los problemas de combinatoria, dos campos se combinan para formar otro mediante un proceso similar al producto cartesiano (Belmonte, 2006). Este tipo de problemas y de organización de la información ha permitido construir una herramienta matemática presente en las matemáticas escolares: el cuadro de multiplicación. Esta herramienta es recuperada en esta propuesta de investigación.

El cuadro de multiplicación o tabla Pitagórica, es una tabla cartesiana que tiene una relación ternaria y se puede escribir de varias maneras: ya sea que se escriba en los márgenes del cuadro los elementos por relacionar o en las casillas del mismo resultado de la composición (Vergnaud, 1991). Esta manera de construir el cuadro de multiplicación permite organizar los factores y los productos para explorar las relaciones y las regularidades (Broitman *et al.*, 2018). El cuadro de multiplicaciones, es una de las situaciones didácticas que se propone en esta investigación, el cual se encuentra en el capítulo de resultados. En el capítulo anterior se mencionaron algunas de las propiedades que favorecen la construcción del conocimiento multiplicativo, también beneficia la identificación de las relaciones de proporcionalidad directa (Broitman *et al.*, 2018), este tipo de relaciones se profundizan más adelante.

La tercera categoría de los campos conceptuales corresponde a los problemas con un *espacio único de medidas*. Estos son similares a los problemas de isomorfismo de medidas cuando se abordan con el procedimiento llamado escalar (Belmonte, 2006). Por ejemplo, en la Tabla 4 se esquematiza el siguiente problema: “Hacen falta dos metros de tela para hacer una falda, hacen falta tres veces más para hacer un conjunto. ¿Cuánta tela se necesita para hacer un conjunto?” (Vergnaud, 2016, p.221). Aparece un campo de medida (metros) con un operador escalar que relaciona ambas cantidades (multiplicarlo por tres).

Tabla 4

Espacio único de medidas

Falda	2 metros
Conjunto	6 metros

x 3

Una vez abordados todos los tipos de problemas categorizados por Vergnaud, es importante desatacar que el presente trabajo de investigación se centra, en mayor medida, en la categoría de los problemas de isomorfismo de medidas, ya que favorece la reflexión en el proceso de la introducción a la división. Estos problemas multiplicativos son los que son enseñados en primera instancia a los estudiantes por la posibilidad de dar sentido a la multiplicación a través de la suma iterada (Belmonte, 2006). En los problemas de isomorfismo de medidas, dependiendo de cuál de las cantidades sea la incógnita a resolver, como ya se mencionó, se pueden encontrar tres tipos de problemas, multiplicación, división: búsqueda de valor unitario o división: búsqueda de la cantidad de unidades. La dificultad depende si se emplean cantidades discretas o continuas, y si los números son naturales, enteros o decimales. En esta investigación tendrán lugar problemas con números naturales y cantidades discretas.

Por otra parte, también se retoma la clasificación de los problemas de producto de medidas, ya que una de las situaciones que se propone en la construcción del cuadro de multiplicación. El cuadro sirve como herramienta en la cual se puede ir registrando los productos de las multiplicaciones y se pueden observar las propiedades de la multiplicación: la relación de dobles, mitades, productos parciales, la conmutatividad, entre otros, las cuales se verán en el capítulo de metodología se explica con mayor profundidad.

Fue importante profundizar en esta teoría para poder identificar las características de los problemas multiplicativos que se proponen en las situaciones didácticas y cómo éstas favorecen la construcción de conocimientos matemáticos relacionados con la proporcionalidad al plantear problemas multiplicativos de valor faltante.

3.4 Características de las relaciones de proporcionalidad directa

Los *problemas típicos de valor faltante* tienen la misma característica que los problemas de isomorfismo de medidas, los cuales plantean una relación de proporcionalidad entre dos conjuntos de cantidades y se presentan al menos cuatro valores, tres de ellos conocidos y uno desconocido que se debe calcular, todos ellos corresponden a dos conjuntos de cantidades que guardan una relación de proporcionalidad. Block *et al*. (2015) mencionan que “los problemas típicos que se resuelven con una multiplicación o división son también problemas de proporcionalidad, de valor faltante, con tres datos conocidos y uno desconocido” (p. 43).

Los problemas de proporcionalidad directa se caracterizan porque si una variable aumenta, la otra también lo hace en la misma proporción. Las propiedades de la proporcionalidad directa implican que cuando se duplica (o triplica, o reduce a la mitad, etc.) el valor de una magnitud, también se duplica (o triplica, o reduce a la mitad, etc.) el valor de la otra magnitud (Broitman *et al*., 2018). Para representar la proporcionalidad directa entre A y B, en la que un aumento en A se corresponde con un aumento en B, se puede utilizar un operador que afecte a ambas variables y mantenga la correspondencia entre ellas.

Por su parte, Block *et al*. (2015) propone dos definiciones para los problemas de proporcionalidad:

> **Definición 1.** Una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si los factores internos que se corresponden son iguales.
>
> **Definición 2.** Una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si existe un número, siempre el mismo, que multiplicado a cualquiera de las cantidades de un conjunto da como resultado la cantidad correspondiente del otro conjunto. Este número se llama factor constante de proporcionalidad o factor externo constante. (Block, 2015, p. 27).

Para ilustrar lo anterior, se muestra un ejemplo retomado de Block *et al*. (2015, p. 45) pero con modificaciones en el rango numérico: "Doña Inés vende estas canicas a 4 canicas por 16 pesos. La maestra Silvia quiere comprar 12 canicas. ¿Cuánto debe pagar?". El problema se puede esquematizar como se muestra en la Tabla 5, en la que se observa una relación cuaternaria (tres medidas conocidas, una por determinar).

Tabla 5

Esquema de un problema de valor faltante identificando los factores internos y externos

Factor externo
x 4

Factor interno
x 3

canicas	**pesos**
4	16
12	*x*

Factor interno
x 3

x 4

En este problema, se observa que el valor unitario no se proporciona, pero se puede obtener mediante una división, dinero (16 pesos) entre cantidad de canicas (4 canicas), por lo que el precio unitario sería de $4. Con esto acabamos de identificar cómo el *factor externo* permite resolver el problema, ya que para conocer el precio (pesos) de 12 de canicas hay que multiplicarlo por 4, y de igual manera se podría hacer para *n* cantidad de canicas. Pero para su solución no es necesario obtener el valor unitario, ya que su razón interna se puede calcular al identificar que 12 canicas es el triple de cuatro canicas, el contexto favorece para que se hagan grupos de 4 canicas (Block *et al*., 2010). El *factor interno* entonces es por 3, factor que permite operar de 4 a 12 canicas, por lo que en el otro conjunto (pesos) habrá que multiplicar $16 por 3, dando como resultado $48. Es necesario que los factores internos y externos, aumenten en la misma proporción, en este caso el factor interno aumenta por 3 y el factor externo aumenta por 4. Estos procedimientos para resolver problemas de valor faltante han sido descritos por Block y colaboradores (2010) en su libro *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.*

3.4.1 Procedimientos para resolver problemas multiplicativos de valor faltante

Block *et al*. (2015) muestran diversos procedimientos para la solución de los problemas típicos de valor faltante. Entre dichos procedimientos se encuentran:

- La *conservación de las razones internas sin pasar por el valor unitario*, esto es sacar mitades, dobles, triples, etc. Por ejemplo, "En la mesa G habrá 4 niños y se van a poner 3 pasteles. En la mesa L habrá 16 niños. ¿Cuántos pasteles debe poner en la mesa L? (Block *et al*., 2015, p. 46). Este ejemplo esquematizado en la Tabla 6, se observa que la razón interna es cuatro veces, ya que 16 niños se obtiene de *cuatro veces* cuatro niños, por lo que al multiplicar 3 pasteles por 4 (razón interna) se requiere poner en la mesa L 12 pasteles. En este caso la razón externa no es un número entero, por lo que podría dificultar obtener el valor unitario. En este caso a cada niño le corresponde tres cuartos de pastel, que es lo mismo que .75, esta cantidad se obtiene al resolverlo por medio de la razón externa.

Tabla 6

Esquema de un problema de valor faltante identificando la conservación de las razones internas sin pasar por el valor unitario

niños	pasteles
4	3
16	x

- *Procedimiento basado en la conservación de las razones internas pasando por el valor unitario,* en la cual se divide para conseguir el valor de uno para poder llegar a cualquier cantidad multiplicando. Por ejemplo, "La rana verde dio 3 saltos y logró avanzar en total 12 varas. Si da 5 saltos en vez de 3, ¿cuántas varas crees que avance?" (Block *et al*., 2015, p. 47). En este ejemplo se esquematiza en la Tabla 7, en donde se calcula el valor unitario dividiendo 12 entre 3 para calcular cuántas varas brinca por salto y posteriormente pueda utilizar este valor unitario para calcular cualquier cantidad de brincos. En cada salto avanza 4 varas, por lo que al dar 5 saltos avanzará 20 varas.

Tabla 7

Esquema de un problema de valor faltante identificando el procedimiento basado en la conservación de las razones internas pasando por el valor unitario

saltos	varas
3	12
5	x

- *Procedimiento basado en la constancia de la razón externa: uso del factor de proporcionalidad*, en este procedimiento el factor de proporcionalidad multiplica cualquier valor de una de las magnitudes en relación con el valor correspondiente de la otra magnitud. Por ejemplo, "Un tren de un parque da vueltas alrededor de un circuito de 12 km. Calcular los valores que faltan en la siguiente tabla" (Block *et al*., 2015, p. 60). En la Tabla 8 se esquematiza este problema en el cual se identifica que la razón externa que se utiliza para resolver el problema es por 12, entonces cada cantidad de vueltas se multiplicaría por este número.

Tabla 8

Esquema de un problema de valor faltante identificando los factores internos y externos

vueltas	***1***	***2***	***3***	***5***
km	12	24	36	60

Después de haber revisado estos problemas se identifica que hay procedimientos que se propician más que otros para la resolución de problemas, esto se da en función de las características del problema, por lo que proponer a los estudiantes diferentes tipos de problemas favorecerá a que tengan un repertorio más amplio de procedimientos (Block *et al*,. 2015).

Los procedimientos que realizan los estudiantes al resolver un problema tienen relación con las características semánticas, numéricas y contextuales de los problemas. Las relaciones se pueden dar con el contexto del problema que se propone, las relaciones entre los datos (relaciones semánticas), el cálculo numérico implicado (tipo y tamaño de los números), el formato en que se presentan los problemas (cuadros, texto, gráficos), los conocimientos previos de los estudiantes y los propósitos de aprendizaje que se esperan lograr. Vergnaud (1991) identifica la estructura semántica como el principal determinante de la complejidad.

El conocimiento de las características de los problemas multiplicativos permite realizar un análisis previo de los posibles procedimientos, errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes, en función de las características reconocidas en los problemas.

Para esta investigación se considera que los errores y las dificultades son parte del aprendizaje de los estudiantes por lo que se describirán juntos y por medio de intervenciones se realizan algunas correcciones para favorecer que ellos identifiquen el error o apoyarlos ante las dificultades. En cuanto a la dificultad, al estudiante se le dificulta comprender el problema o realizar el procedimiento y en el error, se encuentra un resultado erróneo, en el procedimiento o en el resultado. El diseño de ciertos problemas permite identificar directamente cómo influye la variable didáctica aplicada en la puesta en marcha de los procedimientos.

3.5 Propiedades de la multiplicación

Algunas aportaciones en la didáctica de las matemáticas consideran importante el cálculo multiplicativo como un medio para resolver de manera más cómoda y eficaz situaciones problemáticas (Isoda y Olfos, 2011). Esto se logra a medida que se resuelvan problemas multiplicativos en distintos contextos, se diversifican los tipos de problemas que se presentan a los estudiantes y se promueve la socialización de los procedimientos, esto va a permitir construir conocimientos significativos en torno a la multiplicación.

A continuación, se presentan algunas propiedades de la multiplicación que nos permiten acercarnos a algunos de los procedimientos que van realizando los estudiantes al enfrentarse ante los problemas multiplicativos. Se distinguen distintas propiedades que se pueden considerar en los problemas multiplicativos, esto sirve para diversificar las estrategias y conocimientos que pondrán en marcha los estudiantes.

La multiplicación tiene propiedades que se aplican al realizar operaciones de multiplicación; estas son útiles para comprender mejor las características y comportamientos de la multiplicación (2003, citado en Maza, 1991) retoma estas propiedades:

a) **Propiedad conmutativa**: indica que el orden de los factores no altera el producto. Por ejemplo, el producto de 3 x 5 es el mismo que al multiplicar 5 x 3.
b) **Propiedad asociativa**: los factores se pueden asociar sin que se altere el producto. El modo de agrupar los factores no varía en el resultado de la multiplicación. Por

ejemplo, (3 x 2) x5 es lo mismo que 3x(2 x 5), y lo mismo que 2x(5 x 3). Las tres multiplicaciones dan por resultado 30.

c) **Propiedad del producto neutro**: el 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque todo número multiplicado por 1 da el mismo número, por lo tanto, si un número se multiplica por 1, el producto será igual el mismo número. Por ejemplo, 4 x 1 = 4 y 99 x 1 = 99.

d) **Propiedad del producto cero**: si uno de los factores es cero, el producto es igual a cero. Por ejemplo, 5 x 0 = 0 y 0 x 60 = 60.

e) **Propiedad distributiva**: el producto se distribuye con la suma. Por ejemplo, para resolver cuánto es 4 x 9 se puede descomponer el nueve en 4 + 5, por lo tanto, la multiplicación queda 4(4 + 5). Hay que realizar dos multiplicaciones (4 x 4) + (4 x 5) y al final sumar los resultados 16 + 20 = 36. Estas también serán nombradas en esta investigación como multiplicaciones parciales.

f) **Multiplicación de factores multiplicados en ceros**: cuando uno de los dos factores o los dos factores terminan en ceros se multiplican todas las cifras, menos los ceros finales, que luego se agregan al producto. Por ejemplo, 20 x 8 se multiplica primero 2 x 8 = 16 y luego se agrega el 0, por lo que la respuesta es 160.

Estas propiedades permiten a los estudiantes desarrollar estrategias y competencias a través de las diferentes exposiciones que tienen ante los problemas que se les presentan.

Por lo tanto, el conocimiento de las propiedades de la multiplicación resulta fundamental para comprender mejor sus características y comportamientos, y facilitar así su aprendizaje. Las propiedades conmutativa, asociativa, del producto neutro, del producto cero, distributiva y de la multiplicación de factores multiplicados en ceros, permiten a los estudiantes desarrollar estrategias y competencias a medida que se enfrentan a problemas que involucran multiplicación. Al conocer estas propiedades, los estudiantes pueden abordar con mayor confianza y precisión los problemas que se les presentan, lo que contribuye a su formación matemática.

Capítulo 4. Metodología

En este capítulo se describe el diseño metodológico que se llevó a cabo en esta investigación. Como se mencionó el objetivo que se persiguió es “Proponer orientaciones didácticas que fortalezcan las intervenciones docentes al implementar un conjunto de situaciones didácticas diseñadas para promover la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de 2° ciclo de primaria”. Por esta razón, la presente investigación procura aportar a la práctica de los colegas maestros.

El camino metodológico llevado a cabo, cumplió seis tareas generales. El primer paso fue la búsqueda y análisis de diversas actividades y situaciones didácticas que aportan experiencias para la construcción de conocimientos multiplicativos, posterior a la revisión se seleccionaron cuatro situaciones didácticas, estas fueron retomadas de diferentes materiales y se llevó a cabo el rediseño de la secuencia didáctica. Para cada una de las situaciones se realizó un análisis preliminar (Artigue, 1995) previendo los posibles procedimientos, errores y dificultades que pudieran tener lugar. Se continuó con la implementación virtual de la propuesta didáctica con un grupo de estudiantes de segundo ciclo, después, se realizó un análisis posterior (Artigue, 1995) que permitió tener insumos de reflexión y acrecentar el bagaje de elementos cuyo análisis inició en el análisis previo y con ello, finalmente, poder elaborar las orientaciones docentes. Más adelante se describen estas tareas metodológicas y las decisiones implicadas.

Enfoque y alcance metodológico

El presente trabajo de investigación es un estudio de tipo cualitativo con alcance descriptivo. De acuerdo con Sampieri, Fernández y Baptista (2010) el enfoque cualitativo utiliza la recolección de datos sin medición numérica para comprender el punto de vista de los participantes acerca de los fenómenos que los rodean. Este enfoque nos permitió indagar los procedimientos matemáticos, errores y dificultades de los alumnos participantes al resolver tareas matemáticas multiplicativas, y reflexionar sobre algunas intervenciones docentes que promueven la construcción de distintos conocimientos multiplicativos.

La observación de la interacción entre los participantes y de ellos con la implementadora permitió indagar qué saberes matemáticos ponen en juego los estudiantes al resolver problemas multiplicativos de proporcionalidad directa, enfocándonos en los de valor faltante. Los resultados de toda la implementación permitieron concretar dos tipos de aportes: el análisis de los procedimientos, errores y dificultades, así como una categorización de las intervenciones docentes; y por otro lado, las orientaciones didácticas que pretenden apoyar a colegas docenes que quisieran implementar la secuencia didáctica propuesta.

Población y muestra

Dado que en el currículo oficial mexicano propone a partir de tercer grado una presencia más explícita de las tablas de multiplicar y problemas multiplicativos en el libro de texto Desafíos Mexicanos (SEP 2011a), se decidió que la población participante fueran alumnos de este grado y del grado inmediato, cuarto grado. La muestra estuvo conformada por un total de 8 estudiantes, cuatro participantes de tercer grado y cuatro participantes de cuarto grado de primaria. Se decidió trabajar con una muestra acotada ya que la implementación se realizó de manera virtual a causa de la contingencia COVID-19, además que dentro de la implementación se promovió la socialización de los procedimientos de resolución, pues permite enriquecer los procedimientos que todos los participantes que llevan a cabo a la hora de resolver los problemas que se les planteen. Cabe recordar que el objetivo principal en sí mismo no es la implementación de las situaciones, si no la elaboración de las orientaciones didácticas.

La muestra se dividió en dos grupos, cada grupo estuvo conformado por estudiantes de escuelas públicas: dos de tercer grado y dos de cuarto grado, esto con la intención de tener en cada grupo estudiantes con diferentes niveles de apropiación de conocimientos relacionados con la multiplicación.

Algunos de los criterios que fueron importantes considerando que la implementación se realizaría en modalidad virtual son:

- Manejo básico y autónomo con la computadora, para que puedan realizar las actividades sin ayuda de un adulto.
- Que los participantes tuvieran acceso a una computadora con conexión a internet estable.

Mediante la técnica de muestreo por conveniencia se invitó a los estudiantes de una escuela pública a participar en un taller para resolver distintas actividades matemáticas, esto con la finalidad de conseguir una muestra variada, y así observar diversos procedimientos.

Técnicas y procedimientos

Se diseñó una secuencia didáctica conformada por cuatro situaciones que implicaban problemas multiplicativos de valor faltante, éstas consideran distintas intenciones didácticas, ello por la gradualidad de los problemas que permite que la situación anterior sirva para construir conocimientos y desarrollar estrategias para resolver las siguientes situaciones (Paolone, 2010).

La implementación virtual, se llevó a cabo por medio de la plataforma de meet, mismas sesiones fueron videograbadas con previa autorización de los padres de familia y estudiantes. Las situaciones se presentaron por medio Jamboard de google, esta plataforma permite mostrar diapositivas con los problemas, tablas e imágenes para que los participantes puedan resolver las situaciones.

4.1 La ingeniería didáctica

Para la toma de decisiones de las situaciones didácticas se tomó como eje rector la ingeniería didáctica de Artigue (1995). Esta propuesta surge como metodología de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de la que se hace mención en el capítulo tres, en fundamentación teórica. La ingeniería didáctica propone cuatro fases para la construcción de una situación didáctica:

1° fase: Análisis preliminar, esta fase de concepción se basa frecuentemente en el "análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica" (Artigue, 1995, p. 38).

En nuestra investigación revisamos diversos materiales, planes de estudio (SEP, 2011) y (SEP, 2017) y situaciones orientadas a promover la resolución de problemas multiplicativos de valor faltante y nos acercamos también a estudios sobre los procedimientos que llevan a cabo los estudiantes al resolver problemas multiplicativos.

2° fase: Análisis previo, en esta fase se toman las decisiones de actuar sobre un determinado número de variables de acuerdo con el conocimiento matemático que se pretende construir. Entre estas variables, se destacan las variables didácticas; recordemos que Brousseau (citado en Block, 2016) menciona que éstas son las condiciones que pueden variarse en un problema o situación y permiten que los estudiantes modifiquen sus estrategias de resolución y en consecuencia movilizar los conocimientos para resolver lo planteado. En nuestra investigación el análisis previo permitió identificar -considerando las variables didácticas- los posibles procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes, así como las intervenciones que se pueden realizar.

3° fase: Diseño de instrumentos y experimentación, con apoyo en el análisis previo se tomaron decisiones respecto a las características de las situaciones para el diseño de la secuencia, de esta manera se fueron graduando los problemas que se presentaron. La experimentación es la puesta en marcha de la secuencia, es decir, la implementación virtual. En esta investigación esta es la fase de la ingeniería didáctica donde el investigador entra en contacto directo con la muestra de estudiantes.

4° fase: Análisis posterior y evaluación, se basa en el conjunto de datos recogidos durante la experimentación, por medio de las observaciones realizadas o por las producciones de los estudiantes. La confrontación de este análisis posterior con el análisis previo permite la validación de la investigación. Este análisis permitió analizar los procedimientos, errores y dificultades al resolver los problemas, así como la categorización de las intervenciones. Esto dio paso a la elaboración de las orientaciones didácticas, en la cual se identificaron algunos elementos que fortalecen las intervenciones docentes al implementar cada una de las situaciones didácticas destinadas a la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria.

A lo largo de la investigación se trabajaron estas cuatro fases.

4.2 Tareas metodológicas

A continuación, se mencionan las decisiones metodológicas que se llevaron a cabo en las seis tareas que son la base de la metodología y que corresponden a las fases de la ingeniería didáctica.

1. Selección de cuatro situaciones didácticas del currículo de la SEP y de otras propuestas didácticas para profesores que promueven la construcción de conocimientos matemáticos relacionados con la multiplicación

Esta tarea se apoya en la primera fase de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), específicamente en el *análisis preliminar*. El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza permitió seleccionar las situaciones que estuvieran orientadas a promover la resolución de problemas multiplicativos de valor faltante, de tal manera que a través de ellas se promueva la construcción de conocimientos en torno a la multiplicación.

Las situaciones elegidas para la secuencia didáctica se retoman de varios materiales que se considera tienen un gran valor didáctico ya que promueven la construcción de este conocimiento matemático. Algunos de estos materiales se han desprendido del currículum de la SEP y otras investigaciones. Los materiales que se revisaron fueron:

- Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Tercer grado (SEP, 1994a).
- Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado (SEP, 1994b).
- Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir (Block *et al*., 1994).
- Desafíos matemáticos de tercer y cuarto grado de primaria (SEP, 2011).
- La Enseñanza de la Multiplicación: desde el estudio de clases japonés a las propuestas Iberoamericanas (Isoda y Olfos, 2011).

- Yoltocah: Estrategias didácticas multigrado (Rockwell y Rebolledo, 2017).
- La divina proporción (Broitman *et al*., 2018).

Se eligieron cuatro situaciones didácticas construyendo así una secuencia propia, en la cual estas situaciones fueron relacionadas entre sí para construir conocimientos multiplicativos en torno a los problemas de valor faltante. Para justificar esta afirmación nos hemos acercado a diversos autores. Por su parte, Nemirovsky (1999) expresa la secuencia didáctica como "la organización del trabajo en el aula mediante conjuntos de situaciones didácticas estructuradas y vinculadas entre sí por su coherencia interna y sentido propio y realizadas en momentos sucesivos" (p. 2). Las situaciones que se proponen están enlazadas entre sí por la gradualidad que se observa en los problemas, en los conocimientos matemáticos a los que recurren los estudiantes, y las estrategias que desarrollaron para solucionar los problemas posteriores.

Laura Pitluk define la secuencia como “una estructura didáctica que permite organizar objetivos, contenidos, actividades, tiempos, recursos organizaciones grupales acotados a un eje y se plantean en creciente complejidad, produciendo variaciones cada vez más profundas del mismo eje (Pitluk, 2018, p. 22).

El orden en el que se propone cada situación didáctica dentro de la secuencia, se contempló considerando los conocimientos multiplicativos que se van construyendo, de esta manera se cuida la gradualidad, por lo que una situación aportará para la siguiente. Cada situación propuesta favorece que el estudiante utilice los conocimientos y estrategias que ya posee conocimientos previos y al mismo tiempo, genera una acomodación de esos saberes, desarrollando así herramientas para resolver los siguientes problemas.

Las situaciones que conforman la secuencia didáctica a implementar son:

1. ***Fábrica de juguetes***, que conjuga varias situaciones de los libros de Desafíos Matemáticos de tercer y cuarto grado de primaria (SEP, 2011) y del Fichero de actividades de cuarto grado (SEP, 1994).

2. ***¡Vámonos de compras!*** retomado del libro de "Yoltocah: Estrategias didácticas multigrado" (Rockwell y Rebolledo, 2017).
3. ***Collares***, recuperado de "Los collares" (Block y Reséndiz, 2011).
4. ***Cuadro de multiplicación***, se concreta desde la propuesta de tres diferentes materiales: "Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir" (Block et al., 1994), "La Enseñanza de la Multiplicación: desde el estudio de clases japonés a las propuestas Iberoamericanas" (Isoda y Olfos, 2011) y "La divina proporción" (Broitman et al., 2018).

Se partió de la situación *Fábrica de juguetes*, en la que se plantea un conjunto de problemas con la intención de recuperar nociones previas que tienen los estudiantes sobre la relación entre la suma iterada y la multiplicación en un contexto familiar y lúdico.

La secuencia vincula conocimientos previos para posteriormente enlazar los aprendizajes, dando continuidad entre las actividades ya que en la segunda situación, ¡*Vámonos de compras*!, al aumentar el rango numérico "obligó" en cierta medida a que los participantes fueran abandonando la suma iterada y desarrollaran estrategias como las agrupaciones, el cálculo parcial, el uso de dobles, mitades e incluso usar el algoritmo de la multiplicación. El uso del dinero es un recurso didáctico que permitió reflexionar ciertos procedimientos y favoreció para la comprensión de los problemas. Algunas de estas estrategias comienzan a aparecer y a socializarse en la primera sesión, pero no suelen ser empleadas con frecuencia por los estudiantes; ya que por el rango numérico que se trabaja prefieren seguir operando con cálculos mentales, suma iterada y multiplicaciones. Fue en la segunda sesión de esta situación, en dónde los participantes encuentran útiles las estrategias que se fueron desarrollando en las sesiones anteriores.

Para la tercera situación, Collares, se presentan los problemas por medio de las tablas de variación proporcional. La segunda y tercera sesión de Fábrica de juguetes presenta también estas tablas, por lo que los estudiantes van conociendo cómo se va construyendo la tabla y van "leyendo" los datos que les presentan.

El cuadro de multiplicación permite ir relacionando estas situaciones para la construcción e identificación de las propiedades de la multiplicación. Esta situación se trabaja de manera transversal a las demás situaciones.

En la siguiente fase, que es el rediseño, se especifica qué características tienen estas situaciones.

2. Rediseño de las cuatro situaciones didácticas seleccionadas.

El rediseño mantiene la esencia de las situaciones como se plantean en los materiales antes revisados y a partir de ahí se tomaron decisiones sobre la estructura y variables del problema. Los problemas cuentan con diferentes estructuras semánticas, dichos enunciados representan para el estudiante diferentes niveles de dificultad. Vergnaud señala que “la complejidad de las situaciones está condicionada fuertemente por la estructura semántica del problema determinada por el tipo de relaciones entre datos e incógnitas y las inferencias a las cuales estas relaciones dan lugar en su resolución” (Quaranta, 2007, p.9).

Entre las situaciones y sus problemas se van decidiendo algunas características: el tipo de relaciones entre los datos, la información que se proporciona, el rango numérico, el contexto, y la forma de presentación del problema.

Se buscó que el contexto en el que giran las situaciones fuese “familiar” para los estudiantes, esto con el propósito de que los participantes puedan comprender con mayor facilidad las relaciones matemáticas implicadas en las situaciones, además de contar con un carácter lúdico. Esto fue relevante ya que las actividades lúdicas tienen mayor potencial para motivar a los estudiantes, pero es primordial que las situaciones se encaminen a lograr los propósitos planteados y evitar la desconexión entre el juego y la actividad (González, Molina y Sánchez, 2014). El juego es una forma de integrar a los estudiantes sin importar el bagaje de sus conocimientos, edad, sexo o sus habilidades. Este acercamiento les permite planear estrategias, acatar las reglas del juego, resolver problemas, comunicarse con sus compañeros, trabajar en equipo, experimentar la victoria o la derrota, desarrollar su memoria y su concentración (Martínez y Rivaya, 1998).

Estas cuatro situaciones que conforman la secuencia didáctica tienen dos propósitos:

1. Promover que los estudiantes resuelvan problemas multiplicativos típicos de valor faltante los cuales, por su estructura, pueden ser resueltas con una multiplicación o con una división, a través de procedimientos no convencionales y convencionales.
2. Favorecer la construcción de conocimientos significativos en torno a la multiplicación, identificando algunos procedimientos y propiedades que les permita a los estudiantes desarrollar estrategias para la solución de problemas multiplicativos con apoyo de las intervenciones docentes y la socialización.

A) Fábrica de juguetes

En la situación de *Fábrica de juguetes,* el contexto de juego favorece la comprensión de lo que hay que realizar. En el rediseño se presenta una imagen, Figura 3, con los juguetes y con las piezas que necesitan para armarse. Se seleccionaron vehículos que contaran con 2 (bicicletas), 4 (carros) y 8 (tráiler) llantas para trabajar estas tablas de multiplicar, así como de triciclos y trenes para trabajar las tablas del 3 y del 6 con la intención de favorecer el procedimiento de calcular dobles o mitades.

Figura 3

Juguetes de la situación Fábrica de juguetes

Juguetes que se trabajan en las sesiones 1 y 2.

Juguetes que se trabajan en la sesión 3.

Con esta información los estudiantes podrán resolver problemas de valor faltante, los cuales se presentan tanto en problemas lingüísticos[3] como tablas de variación proporcional.

Algunos de los problemas matemáticos que se presentan son:

- Multiplicación: Se debe identificar cuántas piezas necesitan para armar los juguetes que les solicitan, aquí se presentan problemas multiplicativos de valor faltante.
  Por ejemplo: Para armar 5 carros ¿Cuántas llantas necesita Don Jesús?

En este problema se identifica que para armar un carro se necesitan 4 llantas, entonces la incógnita está en calcular cuántas llantas ocupan 5 carros. La constante de proporcionalidad sería entonces multiplicar la cantidad de juguetes por 4. El rango numérico es bajo y cómodo para los estudiantes por ser el primer acercamiento a las situaciones, hay un mínimo de 5 vehículos y un máximo de 10.

- División agrupamiento: En otros problemas se debe calcular cuántos juguetes pueden armarse de acuerdo con la cantidad de piezas y el tipo juguete, lo cual implica problemas de división tipo agrupamiento. Los problemas de agrupamiento presentan un mayor grado de dificultad ya que no indican entre cuántos grupos hay que dividir, por lo que se trata de averiguar cuántas veces se puede repetir la cantidad de piezas de un juguete, por ello se sugiere proponer un rango numérico bajo.

Por ejemplo: Don Jesús tiene un pedido de 10 carritos, en este momento tiene en su taller 16 llantas ¿para cuántos carritos tiene material por ahora?

En este problema se identifica que un carro ocupa 4 llantas, entonces la incógnita está en calcular cuántos carros puede armar con 16 llantas. La constante de proporcionalidad sería entonces dividir la cantidad de llantas (16 llantas) entre 4 (carros) y las razones internas se identifican al calcular que cuatro veces cuatro nos da 16 llantas.

---

[3] Son aquellos problemas que se presentan a manera de enunciado.

B) ¡Vámonos de compras!

La segunda situación ¡*Vámonos de compras*!, se sitúa en el contexto de compra y venta, en conjunto con el uso del dinero. Esta es una práctica recurrente en los libros de texto (SEP, 2011). Parte del rediseño consiste en que en lugar de comprar diferentes productos (situación aditiva), como se propone originalmente, se compre el mismo producto más de una vez (situación multiplicativa). Dado a este cambio la situación rediseñada presenta dos tipos de problemas, el primero es determinar el monto a pagar-cobrar (multiplicativo) y el segundo es determinar el cambio (aditivo: con una transformación negativa). Por decisión metodológica no se reportan los procedimientos en cuanto al cambio, sino que se enfoca en resolver los problemas multiplicativos. Es por esto que el nombre con el que se encuentra en el material ¡Fíjate en el cambio! se modificó por ¡Vámonos de compras!

Se cuenta con dos tableros tipo oca, cada uno está integrado por 18 casillas en las que se colocan productos de tipo comercial. El primer tablero se utiliza en una sesión y muestra productos de una tienda de abarrotes, y en el segundo tablero usado en otra sesión, considera productos de una tienda de regalos. En ambos casos se trabajó con números naturales para el precio de los productos.

El primer tablero tiene un rango numérico menor que el segundo tablero. En el primer tablero se podrán comprar desde 2 hasta 10 productos de abarrotes que cuestan entre $10 y hasta $68, no se consideraron los centavos. Con el segundo tablero se pueden comprar productos de una tienda de regalos que varían entre $18 y $300 [a continuación se muestran los tableros en la Figura 4]. La decisión de trabajar con dos tableros es porque con el segundo aumenta el rango numérico tanto en el precio como en la cantidad de productos, lo cual tiene la intención de explorar diferentes estrategias de solución.

Figura 4

Tablero 1. Situación "¡Vámonos de compras!" (Tienda de abarrotes)

En esta situación para ir avanzando en el tablero, por la implementación virtual y atendiendo a la situación multiplicativa, se diseñaron dos ruletas, Figura 5, en la aplicación de wordwall.

Figura 5

Ruletas, sesión 1 Situación "¡Vámonos de compras!"

Ruleta: ¿Cuántas casillas avanzas? *Ruleta*: ¿Cuántos productos comprar?

La primera ruleta sirve para que al girarla ésta indicara cuántas casillas se avanza y qué producto hay que comprar, esta se utiliza en amabas sesiones. La segunda ruleta indica cuántos productos se deben comprar, esta se utiliza en la segunda sesión de esta situación didáctica. Se decidió no agregar el número uno en la ruleta: ¿cuántos productos comprar?, ya que, al multiplicar el precio del producto por uno, nos dará el mismo resultado, lo cual nos dio la oportunidad de identificar los procedimientos de los participantes al comprar a partir de dos productos.

Como ya se mencionó, en el segundo tablero, Figura 6, aumenta el rango numérico (Precios entre $18 y $300), por lo que se decidió tener dos ruletas para saber cuántos productos comprar, esto para equilibrar el cálculo numérico con el relacional.

Figura 6

Tablero 2. Situación "¡Vámonos de compras!" (Tienda de regalos)

Para identificar que ruleta se debe girar, el tablero se dividió en dos colores, verdes y azules [en la Figura 7 se muestran las ruletas]. En las casillas verdes los precios de los productos son más bajos que en las casillas azules, por lo que en la ***ruleta para las casillas verdes*** se pueden comprar 8, 16, 22 o 25 productos. Se repiten estas cantidades en la ruleta para duplicar la posibilidad de caer en ellas, ya que cada vez que cae en una cantidad ésta se elimina de la ruleta. La ***ruleta para las casillas azules***, indica que pueden comprar menos productos: 3, 5, 7, 9 y 10 productos, aquí no se repiten las cantidades en la ruleta, pero sí se van eliminando de la ruleta (la misma aplicación las elimina conforme se usan).

Figura 7

Ruletas, sesión 2 Situación "¡Vámonos de compras!"

Ruleta: casillas verdes

Ruleta: casillas azules

Algunos de los problemas matemáticos que se presentan son:

- *Multiplicación*: Se calcula el total que debe pagar por los productos que va a comprar. En cada implementación estos problemas irán cambiando ya que se trata de una situación de azar.

Por ejemplo: *Luis cayó en la casilla de una lata de frijoles que cuesta $26 y le tocó comprar 5 latas, ¿cuánto debe de pagar?*

- *División*: Se proponen pocos problemas que abocan a la división. Estos problemas se plantean para la construcción del cuadro de multiplicación y para que los alumnos identifiquen la multiplicación como operación inversa a la división.

Por ejemplo: *José compró varios carritos, si pagó $66, ¿Cuántos carritos compró si cada carrito cuesta $22?*

Los aspectos de la multiplicación con la que se enfrentan los niños a través de esta situación didáctica son los problemas multiplicativos de valor faltante. Esta situación favorece la identificación de dobles y mitades al construir las tablas de multiplicar del 5 y 10 en la tiendita de abarrotes, así como la propiedad distributiva para la tabla de multiplicación del 9 en la tiendita de regalos.

C) Collares

En la situación de *Collares* se recurre al contexto de juego al tener que armar con base a un modelo dado varios collares. Esta situación es la que menos cambios estructurales tuvo, se mantuvo la información en tablas, en las cuales se presentan los diferentes modelos.

Se propone el armado de diferentes modelos de collares, cada uno de ellos tiene diferente cantidad de perlas, de las cuales hay tres colores: azul, verde y rojo. Los estudiantes tienen que calcular cuántas perlas necesitan para armar varios collares o calcular cuántas perlas necesitan para formar un sólo collar de determinado modelo. La información de los modelos de collares que permite plantear los problemas se organiza en tablas, los datos que se incluyen son: cantidad de collares y cantidad de perlas en cada collar.

La situación se trabajó en dos sesiones, cada una con tres modelos diferentes en la que se va complejizando el cálculo relacional conforme avanza de modelo.

Los aspectos de la multiplicación con la que se enfrentan los niños a través de esta situación didáctica son los problemas multiplicativos de valor faltante. Se plantean problemas que impliquen resolverse con una multiplicación o con una división (reparto y agrupamiento). Esta situación favorece la reflexión sobre las relaciones de proporcionalidad, la identificación de dobles y mitades y además la propiedad distributiva. En esta situación se construye la tabla del 7 y se plantean problemas para trabajar algunas de las propiedades y estrategias de resolución que se estuvieron trabajando a lo largo de las diferentes sesiones.

Algunos de los problemas matemáticos que se presentan son:

- *Multiplicación*: Se debe calcular las perlas necesarias para formar la cantidad de collares que se piden. Todos los collares deben tener la misma cantidad de perlas de cada color que el collar modelo.

Por ejemplo: *Si en un collar hay 7 perlas azules, ¿cuántas perlas azules se necesitan para armar 9 collares?*

En este problema la constante de proporcionalidad es 7, por lo que hay que multiplicar 9 collares por 7 perlas azules.

- *División reparto*: En estos problemas no debe sobrar ni faltar ninguna perla y todos los collares deben tener la misma cantidad que el collar modelo.

Por ejemplo: *Si en 2 collares hay 10 perlas rojas, ¿cuántas perlas rojas lleva cada collar si todos los collares tienen la misma cantidad y no sobran perlas?*

En este problema la constante de proporcionalidad es por 5, por lo que un procedimiento podría ser multiplicar 1 collar por 5 perlas rojas o identificar que la razón interna se calcula sacando la mitad de 10.

- *División agrupamiento*: ¿Cuántos collares puedo hacer si tengo 42 perlas rojas y cada collar lleva 6 perlas rojas?

En este problema la constante de proporcionalidad es por 6, y la razón interna se calcula multiplicando por 7.

Estos problemas se presentan en tablas de proporcionalidad, [a continuación se muestra un ejemplo del Modelo 1]. Esta tabla se presenta en la sesión 6 en la cual los participantes identifican los datos: la cantidad de collares y la cantidad de perlas de cada color.

Modelo 1	
1 collar	***2 collares***
2 azules	4 azules
5 verdes	___ verdes
3 rojas	___ rojas

Al implementar estas situaciones es importante considerar la exhaustividad y la equitatividad como condiciones para resolver los problemas multiplicativos. De esta manera no sobran ni faltan perlas y todos los collares quedan con la misma cantidad.

Se trabajó con diferente rango numérico en cada modelo. En esta situación el cálculo numérico disminuye en comparación con las situaciones anteriores, pero el cálculo relacional se complejiza porque a medida que se ve avanza en la situación se transita de problemas que evocan a multiplicar a problemas que se pueden resolver con una división y, por último, a problemas en los que no se da el valor unitario de perlas por collar, recordando que la obtención de este valor puede ser o no necesario, dependiendo del procedimiento que lleven a cabo.

D) Cuadro de multiplicación

Para hablar del dominio matemático de las multiplicaciones, nos acercamos a la situación del *cuadro de multiplicación*. El cuadro corresponde a un modelo matemático, en el cual se "sugiere la técnica para resolver este género de tareas y en otras, es necesario que el alumno recuerde algunos conocimientos aprendidos anteriormente" (Quiroz y Rodríguez, 2015 p.67). Para la construcción del cuadro de multiplicación se indaga primero los conocimientos previos de los estudiantes, se exploran sus procedimientos y por medio de las intervenciones y la socialización se favorece el desarrollo de estrategias para resolver los problemas o puedan reconstruir resultados

El cuadro de multiplicación, es la cuarta situación didáctica, sin embargo se trabaja de manera paralela junto con las tres situaciones centrales nombradas anteriormente. Autores como Isoda y Olfos, (2011), Broitman *et al.* (2018) y el libro de texto Desafíos Matemáticos de segundo (SEP, 2017), tercer y cuarto grado de primaria (SEP, 2011) proponen este recurso didáctico para ahondar en el significado de la multiplicación. Algunos de los elementos asociados a la multiplicación con la que enfrentamos a los niños a través de esta situación didáctica son: las sucesiones, la proporcionalidad (dobles y mitades), propiedad distributiva, estrategias para multiplicar con números grandes a través de la descomposición de la multiplicación, el procedimiento usual para multiplicar y resolver problemas de división utilizando la operación inversa, que es la multiplicación (Broitman *et al.*, 2018). La revisión y construcción del cuadro de multiplicación se puede realizar en diferentes momentos durante la sesión: al inicio, en el desarrollo o al finalizar, esto de acuerdo con las necesidades de cada situación.

Como se ha mencionado, la construcción del cuadro se trabaja en cada una de las situaciones, de manera transversal, aportando estrategias que favorecen la comprensión y la diversidad de procedimientos. De manera general aquí se mencionan las tablas de multiplicar que se propone trabajar en cada una de las sesiones:

- Tablas del 2, 4 y 8 en la segunda sesión de la situación didáctica de *Fábrica de juguetes*
- Tablas del 3 y 6 en la tercera sesión de *Fábrica de juguetes*
- Tablas del 5 y 10 en la cuarta sesión, en la situación *¡Vámonos de compras!*
- Tabla del 9 en la quinta sesión, *¡Vámonos de compras!*
- Tabla del 7 en la sexta sesión, en la situación de *Collares*

Algunos de los problemas matemáticos que se presentan son:

- *Cálculo de dobles y mitades*.
  Por ejemplo: Situación "*Fábrica de juguetes*" construir las tablas 2 y 4.
  "Si tengo 2 carros con 4 llantas, ¿qué puedo hacer para calcular cuántas llantas habrá en 4 carros?"
- *Propiedad distributiva*.
  Por ejemplo: Situación "Collares" construir la tabla del 7.
  "Lucero me comentó que para construir la tabla del 7, se fijó en los resultados de las tablas del 2 y del 5, me dijo que para calcular 7x7 sumó 35+14, ¿por qué sumó esos resultados?, ¿podemos utilizar su estrategia para calcular 7x9?"
- *Recordar productos*.
  Por ejemplo: Situación "Vámonos de compras" construir la tabla del 9.
  "Para anotar lo que cuestan 6 plumas por $9 puedes apoyarte de la multiplicación 9x5 y sumar 9".

El cuadro de multiplicar es un recurso que permite tanto registrar las multiplicaciones como recurrir a él para observar los resultados que ya se construyeron. El llenado es progresivo, en cada sesión se registran los productos de las tablas que se construyeron. Una parte de la construcción la dirigen los estudiantes, esto es, ellos con base en sus conocimientos previos y percepción van a registrar los productos de manera vertical u horizontal, incluso puede que los estudiantes lo llenen considerando ambos ejes. Esto permite a los estudiantes, de manera implícita, identificar la propiedad de la conmutatividad en la multiplicación. Por otro lado, en cada sesión se recuperarán procedimientos que realizan los estudiantes para llegar a los resultados, por ejemplo, la suma iterada, la propiedad distributiva, el cálculo de dobles o mitades. Esto permite dialogar sobre las relaciones que van encontrando para favorecer una mejor comprensión de la multiplicación.

El rango numérico que se trabaja para la construcción del cuadro de multiplicación va del 1 al 10 como factores y como producto un máximo de 100.

3. Análisis previo de las cuatro situaciones didácticas para anticipar procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes y las intervenciones del docente.

Se llevó a cabo un *análisis previo* (para conocerlo completo, ver anexo 1) de las situaciones didácticas rediseñadas, llevando a cabo la fase número dos de la propuesta en la ingeniería didáctica. Con base en las características de los problemas de cada situación didáctica se previeron los posibles procedimientos, errores y dificultades que puedan presentar los estudiantes al resolver los problemas multiplicativos, así como las posibles intervenciones que se pueden llevar a cabo para indagar más sobre sus procedimientos, y favorecer que los estudiantes avancen en la construcción de dichos conocimientos.

El análisis previo fue punto de partida para anticipar las intervenciones didácticas para cada situación. Las intervenciones que se proponen están encaminadas a que el implementador, es decir el docente frente al grupo, promueva en los estudiantes reflexiones y cuestionamientos en torno al conocimiento multiplicativo por medio de preguntas y contraejemplos, favoreciendo la búsqueda de soluciones distintas para una misma situación y su posible aplicación en otros momentos. Las intervenciones docentes pueden ir desde recordar una consigna, indagar los conocimientos previos de los estudiantes, hacer preguntas sobre un procedimiento llevado a cabo, fomentar la explicación de procedimientos y la elaboración de justificaciones sobre sus resultados obtenidos, entre otras.

Este análisis previo se retoma cuando se realiza el análisis posterior. Después de realizar esta tarea se dio paso a invitar a estudiantes para dar paso a la implementación virtual.

4. Implementación virtual de las cuatro situaciones didácticas ya rediseñadas.

La tercera fase de la ingeniería didáctica, es el diseño de *instrumentos y experimentación*. El rediseño de las situaciones, nuestro instrumento, se implementó de manera virtual. Primeramente, se realizó una implementación acotada del instrumento a manera de "pilotaje" de la secuencia didáctica, esto permitió tres acciones:

1. Verificar la claridad de los problemas, la pertinencia de las consignas y organización para considerar adecuaciones.
2. Identificar si lo previsto en el análisis previo ocurría cuando los estudiantes resolvían las distintas tareas matemáticas propuestas.
3. Poner a prueba las intervenciones docentes previstas de tal manera que se pueda identificar cuáles de ellas son pertinentes para el trabajo con los estudiantes y a la vez construir referentes nuevos para dichas intervenciones y para las orientaciones didácticas.

Posterior al pilotaje, se tomaron en cuenta algunos cambios para la implementación. Esta se llevó a cabo en siete sesiones en modalidad virtual como una alternativa para fortalecer el trabajo didáctico en la educación a distancia a causa del confinamiento social por la pandemia de COVID19. Sin lugar a dudas en la actualidad existe una apremiante necesidad de fortalecer la práctica docente en modalidad virtual, por lo tanto, en esta investigación se tomaron decisiones metodológicas bajo esta realidad.

La organización de las actividades se muestra en la Tabla 9. Como se observa, se presentan tres momentos que guían el trabajo en las sesiones: la situación didáctica central, la construcción del cuadro de multiplicación y otros problemas multiplicativos.

Tabla 9

Organizaciones de las sesiones

	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Sesión 5	Sesión 6	Sesión 7
Situación didáctica	Fábrica de juguetes			¡Vámonos de compras!		Collares	
Construcción del cuadro de multiplicación	Act. de inicio	Tabla del 2, 4 y 8	Tabla del 3 y 6	Tabla del 5 y 10	Tabla del 9	Tabla del 7	Propiedades del cuadro
Problemas multiplicativos	Problemas que se plantearon a partir del diálogo con los niños y conforme se avanza en la sesión.						

- **Situación didáctica**: Se presentan las tres situaciones centrales: Fábrica de juguetes, en tres sesiones; ¡Vámonos de compras! en dos sesiones; y Collares en dos sesiones.
- **Construcción del cuadro de multiplicaciones**: Situación que se plantea de manera transversal, esto es porque se construye a lo largo de las siete sesiones.
  Como se observa, en las primeras cuatro sesiones se trabaja la relación de dobles y mitades, y en las siguientes dos sesiones, con las tablas del 7 y del 9, se trabaja la propiedad distributiva, en el cual se propone construir principalmente estas tablas a partir de la descomposición.
- **Problemas multiplicativos**: Se plantea un problema de cierre que se desprende conforme al desarrollo de la sesión, de acuerdo con lo que se observó en la intervención. Estos problemas multiplicativos sirven para profundizar los procedimientos que llevan a cabo los participantes.

En cada sesión se contempla un tiempo de trabajo de hora y media aproximadamente. Es importante considerar periodos de descanso, estas pausas permiten descansar la mirada y tomar un tiempo para levantarse, esto mejora el rendimiento. Estimar el tiempo requerido por el docente para realizar cada sesión ayuda a gestionar las actividades. La distribución aproximada del tiempo de estos tres momentos es la siguiente:

- **Construcción del cuadro de multiplicaciones**: 30 minutos
- **Situación didáctica**: 40 minutos
- **Problemas multiplicativos**: 20 minutos

Con cada grupo se cubrieron las siete sesiones, dos sesiones por semana. Al concluir con el primer grupo se procedió a trabajar con el segundo grupo de trabajo, por lo que la implementación con ambos grupos se cubrió en siete semanas. Al término de la implementación se procedió con las transcripciones de algunas intervenciones que se relacionaban con los procedimientos, errores o dificultades de los participantes; además de las intervenciones hechas por la aplicadora a fin de considerar el resultado del análisis para la toma de decisiones dentro de las orientaciones didácticas.

5. Análisis posterior de la implementación de las cuatro situaciones didácticas

La cuarta y última fase de la ingeniería didáctica es el *análisis posterior* y *validación.* La validación en esta metodología es interna, ya que no hay una comparación estadística de los grupos, en este caso sirve la validación para determinar si lo que se consideró se cumplió y qué variantes no previstas tuvieron lugar. Para la validación se confronta el conjunto de hipótesis construidas en el análisis previo con los resultados obtenidos en el análisis posterior (Artigue, 1995).

Las sesiones de implementación fueron grabadas para la posterior transcripción de los procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes; así como de las intervenciones realizadas por la investigadora/implementadora. La categorización de las intervenciones docentes fue realizada con el software de Atlas.ti. En el caso concreto de las intervenciones didácticas llevadas a cabo, existió la necesidad de proponer una categorización específica para sistematizar la información. Dicha caracterización permite identificar cómo las intervenciones docentes son diversas y éstas deben tener una intencionalidad didáctica concreta. Cada una de las categorías construidas se muestra en la Tabla 10. Se considera que esta categorización es una de las contribuciones de esta investigación hacia futuros estudios.

Tabla 10

Categorización de las intervenciones docentes

Intervenciones para profundizar en los procedimientos o confrontarlos	
Estas preguntas estimulan el pensamiento reflexivo, el cuestionamiento de las decisiones que se toman para resolver alguna situación y los pasos que siguieron, favorecen el aprendizaje y el intercambio de ideas. Además, promueve el análisis de lo que han aprendido.	
Confrontar procedimientos con resultados diferentes	Al identificar que dos o más estudiantes llegaron a resultados diferentes, se hace una observación grupal, los participantes comparten con sus compañeros su procedimiento, de esta manera, cada estudiante regresa a ver su procedimiento y resultado para identificar si hay un error. Se dialogó también sobre el tipo de procedimiento que utilizaron.
Confrontar procedimientos diferentes con el mismo resultado correcto	Al identificar que dos o más participantes llegaron al mismo resultado correcto por medio de diferentes procedimientos se les pide que compartan con sus compañeros qué fue lo que hicieron y por qué utilizaron esa estrategia. Esto permite que los participantes reconozcan que hay más de una manera de llegar al resultado.
Explicar los procedimientos llevados a cabo	Que el participante de manera individual comparta con la entrevistadora qué es lo que hizo, por qué escogió ese procedimiento.
Indagar lo que comprende del problema	Explorar qué es lo que el estudiante identifica en el problema, para que exprese qué es lo que va hacer. Sirve para permitir al estudiante un momento de reflexión sobre las decisiones que va a tomar para resolver el problema.
Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema	Explorar los conocimientos con los que cuenta el participante antes de resolver un problema los cuales servirán como estrategia base.

<table>
<tr><td>Llevar al límite un procedimiento</td><td>Si un estudiante muestra alto dominio de una estrategia para resolver un problema planteado, se propone un ejemplo contextualizado con un mayor nivel de complejidad variando el cálculo relacional o numérico. Esto para observar hasta qué punto su estrategia base funciona e identificar qué hace para resolver el problema, dándole apoyo y seguimiento para que pueda dar solución a la situación. Hay que reconocer que en este caso su estrategia podría dejar de funcionar y buscaría cambiar de procedimiento.</td></tr>
<tr><td>Socialización de procedimientos</td><td>Se pide que uno o más participantes compartan con los demás compañeros qué procedimiento utilizaron, que expliquen los pasos y en qué consiste la estrategia. Esto permite ampliar el bagaje de estrategias que pueden emplear al resolver un problema similar. Les permite reflexionar sobre el procedimiento que llevaron a cabo (metacognición).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intervenciones que implican proponer contraejemplos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se propone a los participantes un contraejemplo, esto es, es un referente el cual permite al estudiante tener un acercamiento al problema que se plantea. Se busca favorecer por medio de una situación hipotética la búsqueda de soluciones distintas para una misma situación y las apliquen en otros momentos. Se propone una posible solución para que el estudiante reflexione sobre ese procedimiento, invitándolo a descubrir, tener mayor claridad y ver más posibilidades para abordar un problema.</td></tr>
<tr><td>Ampliar estrategias</td><td>Cuando el estudiante puede resolver el problema porque domina esa estrategia de resolución, se propone por medio de un contraejemplo otra manera de resolverlo, para que ésta pueda ser utilizada en ocasiones diferentes.</td></tr>
</table>

Crear puentes entre el contraejemplo y sus procedimientos	Se presenta un contraejemplo que permite dialogar sobre las cualidades y ventajas de cada procedimiento, tanto del participante como el del contraejemplo. De esta manera se pueden identificar regularidades, similitudes o diferencias entre ellos.
Desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas	Cuando se identifica que el estudiante tiene dificultad para resolver la situación, se propone un problema de menor dificultad, de tal manera que pueda desarrollar una estrategia para enfrentar la situación inicialmente planteada.
Intervenciones para favorecer la comprensión del problema	
Se busca generar confianza en los participantes para que se acerquen a los problemas y se animen a utilizar otros procedimientos que les ayuden a resolver los problemas con un mayor sentido.	
Favorecer un procedimiento más económico	A través del diálogo el estudiante descubre que un procedimiento que hizo se puede hacer de manera más económica.
Disminuir las dificultades a las que se enfrentan	El docente al identificar un error o dificultad del participante, plantea preguntas que le permitan expresar qué es lo que se le dificulta del problema o consigna y mencione también que es lo que sí comprende.

Fuente: elaboración propia.

En los resultados se hará referencia a un conjunto de intervenciones, por ahora se muestra un ejemplo de las intervenciones que se realizaron es la siguiente:

En la Situación didáctica "Fábrica de Juguetes", segunda sesión, primer grupo. Se trabajó con el siguiente problema.

Consigna. En la siguiente tabla proporcional de la situación Fábrica de juguetes, hay que completar las llantas que son necesarias para el armado de tráileres.

Juguete: tráiler	**Llantas necesarias**
1 tráiler	8 llantas
2 tráileres	
3 tráileres	
4 tráileres	32 llantas
6 tráileres	48 llantas
8 tráileres	
10 tráileres	

La participante comienza una suma iterada: 8 veces 8 para calcular el total de llantas para 8 tráileres. El procedimiento que utiliza para construir la tabla es el sobreconteo.

Comienza a calcular las llantas necesarias para dos tráileres, suma a partir del 8, 8+8=16 llantas, continúa la cuenta a partir del 16, para calcular para tres tráileres: 16+8= 24 llantas. Para calcular las llantas necesarias de 8 tráileres realiza sobreconteo a partir del 48, que es la cantidad de llantas para 6 tráileres, 48+8= 56 llantas, y luego 56+8= 64 llantas para 8 tráileres y así sucesivamente hasta llegar a 10 tráileres.

Se propone un contraejemplo a manera de intervención para ampliar sus estrategias, que es *calcular con dobles.*

Contraejemplo: ¿Te platico la estrategia que me comentó un niño? En la tabla observó que estaba el resultado de 4 tráileres, él sabía que el doble de 4 es…, (suspensión para que ella diga la respuesta, que es 8), ¿cómo nos sirve el resultado de 4 tráileres para calcular las llantas de 8 tráileres?

Con base a este tipo de intervenciones los participantes observan con mayor detenimiento los resultados que tienen y favorece la identificación de los factores internos de la proporcionalidad. La relación de factores internos es, si el doble de 4 es 8, entonces el resultado de 4 tráileres que son 32 llantas, favorece para llegar al resultado de 8 tráileres cuando calculan 2 veces 32 o multiplican 2x32, por lo que en 8 tráileres hay 64 llantas.

En el capítulo de resultados, en el apartado de orientaciones docentes, se muestran algunas de las intervenciones que se realizaron con los estudiantes al momento de llevar a cabo sus procedimientos, o al intervenir ante errores y dificultades identificadas; de igual manera, en el capítulo de conclusiones, se retoman intervenciones que resultaron relevantes.

6. Elaboración de orientaciones didácticas para el trabajo de la multiplicación en grupos de 3° y 4° grado de primaria.

Con base en el análisis posterior de los resultados de la implementación se elaboran orientaciones para el trabajo docente, que permita la construcción de conocimientos multiplicativos en los estudiantes. En específico, las orientaciones serán apoyo para que los profesores puedan realizar la implementación de las situaciones didácticas propuestas en esta investigación, con sus grupos escolares. Se busca dar recomendaciones concretas sobre la práctica educativa que fue implementada y que está orientada al logro de la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria.

Las orientaciones didácticas propuestas proporcionan al docente elementos para que conozcan la situación didáctica, puedan realizar algunas modificaciones de acuerdo con sus necesidades y la implementen con sus estudiantes. Su estructura considera los siguientes aspectos:

1. Presentación de la situación
2. Propósitos: del maestro, del alumno y las intenciones didácticas con las que se relaciona
3. Materiales
4. Consignas generales
5. Problemas y posibles procedimientos
6. Ejemplos de procedimientos correctos e intervenciones propuestas
7. Ejemplo de errores e intervenciones propuestas
8. Ejemplo de dificultades e intervenciones propuestas
9. Recomendaciones para la situaciones propuestas
10. Recomendaciones para la implementación virtual

4.3 Consideraciones éticas

En este apartado se menciona la manera en la que se cuidó la privacidad de los participantes. Se garantizó que los datos de los participantes no podrán ser vistos o utilizados por otras personas ajenas al estudio ni tampoco para propósitos diferentes a la investigación. La confidencialidad es una manera de proteger sus derechos y su dignidad.

Como nuestra investigación está dirigida a estudiantes se hizo la invitación para participar en el proyecto a una escuela de sostenimiento público. Se dialogó con el supervisor de la zona escolar, con la directora y con los padres de familia.

Con los padres de familia se llevó a cabo una reunión virtual, este acercamiento permitió la lectura del consentimiento informado (ver anexo 2), en el cual se les compartió información de la propuesta. Para finalizar la reunión se les pidió a los padres de familia y a los participantes que dijeran en voz alta si aceptaban o no participar libremente en el “Taller de matemáticas”. Tanto los padres de familia como los participantes fueron grabados durante esta reunión virtual con pleno consentimiento.

Esta secuencia fue implementada y aportó para la elaboración de las orientaciones docentes. La secuencia didáctica aporta a la construcción de un saber, el conocimiento multiplicativo para resolver problemas de valor faltante. En el siguiente capítulo se muestran estas orientaciones dirigidas a docentes a manera de resultado de la presente investigación.

Capítulo 5. Resultados del análisis posterior de la implementación

Este capítulo está conformado por una de las aportaciones que desde esta investigación se pretende generar. Se presentan los frutos recogidos en el análisis de la implementación de las cuatro situaciones didácticas, con la muestra del estudio. Estos resultados pueden ser de interés de otros investigadores que deseen abordar elementos sobre los procedimientos, errores, dificultades que estudiantes presentan ante problemas de tipo multiplicativo, o sobre los propios problemas y sus características matemáticas. Dicho aporte es utilizado a la vez como base para las orientaciones docentes que se espera puedan ser de ayuda a profesores que deseen implementar con sus estudiantes la secuencia didáctica propuesta, dichas orientaciones se presentan en el siguiente capítulo.

5.1 Análisis de la implementación de las cuatro situaciones didácticas

Se presenta en este apartado lo correspondiente al análisis posterior realizado entre los resultados de la implementación y el análisis previo llevado a cabo cuando se rediseñaron las cuatro situaciones didácticas que conforman la secuencia. En concreto en este análisis posterior se muestran los siguientes elementos:

- Procedimientos llevados a cabo por los estudiantes al resolver los problemas
- Errores y dificultades presentados al momento de que los participantes resuelven las situaciones planteadas
- Intervenciones docentes relevantes que llevó a cabo la implementadora y el impacto surgido de éstas

En este capítulo se hace alusión a algunos fragmentos de los diálogos generados en la implementación, los cuales dan cuenta de las argumentaciones de los participantes, sus reflexiones, sus dificultades, etc. De igual manera se muestran algunos ejemplos específicos que ilustran lo reportado.

Como se podrá observar la línea rectora de los datos que se presentan serán los procedimientos de los participantes para cada uno de los problemas implicados en las secuencias didácticas, relacionado con ello se muestran algunos de los errores, dificultades y/o intervenciones. La selección de los procedimientos se realizó bajo el criterio de elegir los que se presentaron en mayor proporción o por el contrario los procedimientos que fueron innovadores, por lo cual se buscó profundizar en ellos con los participantes y favorecer la socialización.

En el capítulo de metodología se ha explicado que toda la secuencia didáctica fue implementada en siete sesiones, en cada una de ellas se iban alternando distintos tipos de problemas multiplicativos de tal manera que se facilitara la construcción de conocimientos en torno a la multiplicación. Dado que en este capítulo el interés radica en mostrar los procedimientos, errores, dificultades e intervenciones dejaremos de lado un momento la organización por sesiones y el orden concreto en el que se fueron presentando los problemas a los participantes. Se ha organizado este capítulo más bien por tipo de problema que se planteaba y los procedimientos identificados.

5.1.1 Fábrica de juguetes

Como se ha mostrado en el capítulo de metodología el contexto de esta situación didáctica es el armado de juguetes: bicicletas, triciclos, autos, tráileres y trenes. Se presentan a los estudiantes problemas en los que deben enfrentar las siguientes tareas matemáticas:

- Calcular cuántas piezas necesita para armar los juguetes que les solicitan. Se presentan así problemas multiplicativos de valor faltante que evocan a la multiplicación.
- Calcular cuántos juguetes pueden armar de acuerdo a la cantidad de piezas con las que se cuenta. Se presentan así problemas multiplicativos de valor faltante que evocan a la división tipo agrupamiento.

Para ambos tipos de problemas se presentaron variables didácticas, principalmente relacionadas con el cálculo numérico, se alterna o modifica el tamaño de los números. De igual manera se variaron las relaciones entre los datos y la incógnita.

A lo largo de la situación didáctica se plantearon un total de seis problemas verbales de tipo valor faltante y cinco tablas de variación proporcional que deben ser completadas.

A continuación se muestran las imágenes de apoyo que se presentaron a los participantes para la resolución de los problemas:

A) Problemas verbales de valor faltante.

Se plantearon seis problemas de valor faltante durante la situación didáctica. Estos se presentan en la Tabla 11, en la cual se concreta el tipo de problema que tuvo lugar.

Tabla 11

Problemas que se presentan en la situación Fábrica de juguetes y el tipo de problema

Problemas	Tipo problema
1. ¿Cuántas llantas necesitas para armar 5 bicicletas?	• Problema típico de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación con números menores a 10.
2. Don Jesús tiene un pedido de 10 carritos, en este momento tiene en su taller 16 llantas ¿para cuántos carritos tiene material por ahora?	• Problema de división tipo agrupamiento.
3. Para armar 4 tráileres ocupas 32 llantas, ¿cuántas llantas necesitas para armar 8 tráileres?	• Problema multiplicativo de proporcionalidad, cuyos *factores internos* pueden calcularse basándose en el doble de 32 llantas.
4. En la fábrica de juguetes quieren hacer 7 triciclos, ¿cuántas llantas necesitan?	• Problema típico de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación con números menores a 10.

5. En la fábrica de juguetes tienen 27 vagones, si a cada tren le ponen 3 vagones, ¿para cuántos trenes alcanzan los vagones?	• Problema de división tipo agrupamiento.
6. A cada vagón le ponen 6 ruedas, si un tren tiene 12 vagones, ¿cuántas ruedas necesitará el tren?	• Problema multiplicativo que implica resolverse con una multiplicación con un número mayor a 10, por lo que aumenta el grado de dificultad.

Como puede observarse en la tabla los problemas planteados se concretan en tres categorías:

I. Problemas típicos de valor faltante que se resuelven por medio de una multiplicación.
II. Problemas típicos de valor faltante que se resuelven por medio de una división de tipo agrupamiento.
III. Problema multiplicativo de proporcionalidad, cuyos *factores internos* pueden calcularse basándose en la mitad y el doble.

Se muestran a continuación los procedimientos llevados a cabo por los participantes e intervenciones para la primera categoría de problema, posteriormente se presentan algunos errores y dificultades, así como sus intervenciones.

I. *Problemas típicos de valor faltante que se resuelven por medio de una multiplicación*.

En esta categoría se aumentó del rango numérico como una variable didáctica. Como se recordará, en el marco teórico se recurrió a la definición de variable didáctica como aquella en las que se modifican ciertas características de un problema para incidir de manera cualitativa en la evolución de los procedimientos (Block, 2010), como consecuencia de esta variable los estudiantes pusieron en marcha diferentes procedimientos.

Recordando los problemas:

- ¿Cuántas llantas necesitas para armar 5 bicicletas? (problema 1)

- ➢ En la fábrica de juguetes quieren hacer 7 triciclos, ¿cuántas llantas necesitan? (problema 4)
- ➢ A cada vagón le ponen 6 ruedas, si un tren tiene 12 vagones ¿cuántas ruedas necesitará el tren? (problema 6)

En la tabla 12 se muestra el resultado del análisis posterior realizado, a partir de lo que construyeron los participantes:

Tabla 12

Procedimientos utilizados en los problemas típicos de valor faltante que se resuelven por medio de una multiplicación

Tipo de problema	**Procedimientos**	
Resolución: Multiplicación que implica números menores a 10	•Suma iterada	• Uso directo de la multiplicación
Resolución: Multiplicación que implica números mayores a 10	•Suma iterada	• Multiplicación de factores multiplicados en ceros

Los principales errores y/o dificultades enfrentados al resolver los problemas fueron:

- Error al mencionar resultados memorizados.
- Dificultad para llevar el sobreconteo después de varias sumas iteradas.
- Dificultad para multiplicar con números mayores a diez.

Ante esos errores y dificultades en específico y ante el proceso de resolución de los problemas en general, algunas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora fueron:

- ✓ **Indagar lo que comprende del problema:**

  ¿Qué vas hacer para resolverlo?

  Ahora, ¿qué juguetes vas armar?
- ✓ **Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema:**

  ¿Cómo sabías que tenías que multiplicar?

- ✓ **Confrontar procedimientos con resultados diferentes:**

  ¿Estás de acuerdo con tu compañero, que necesitamos 75 ruedas? (problema 6)

- ✓ **Confrontar procedimientos diferentes con el mismo resultado correcto:**

  ¿Qué otro procedimiento utilizaron para calcular la cantidad de llantas?

- ✓ **Explicar los procedimientos llevados a cabo:**

  ¿Y qué fue lo que sumaste?

  ¿Qué fue lo que hiciste?

- ✓ **Llevar al límite un procedimiento:**

  Si en lugar de hacer 5 bicis, hacemos 10, ¿cuántas llantas necesitaremos? (problema 1)

  Ahora, ¿cuántas llantas necesitamos para armar 20 bicicletas? (problema 1)

- ✓ **Socialización de procedimientos:**

  Platícanos, ¿qué fue lo que hiciste para calcular la cantidad de llantas?

  ¿Cómo sacaste el doble?

- ✓ **Crear puentes entre el contraejemplo y sus procedimientos:**

  Contraejemplo: ¿Para multiplicar 6x12 te sirve el resultado de 6x10, que faltaría hacer? Por ejemplo, un niño me dijo que *para multiplicar 12x6 para calcular las ruedas necesarias, entonces los 12 vagones se pueden descomponer en 10+2. Se multiplica 10x6 y luego 2x6 y se suman los resultados. ¿Qué opinan de este procedimiento?* (problema 6)

Considerando el problema:

A cada vagón le ponen 6 ruedas, si un tren tiene 12 vagones
¿Cuántas ruedas necesitará el tren?

Se identificaron dos tipos de procedimientos: suma iterada (6+6+6+6…) y multiplicación de factores multiplicados en ceros (se descompone el 12 en 10+2 y se multiplica 10x6 y 2x6, luego se suman ambos resultados). De estos procedimientos es importante destacar que en sí mismo este problema presenta un reto para los estudiantes ya que tienen que identificar las partes de un tren, ver como se relacionan entre sí y cuáles son los datos que necesitan para resolverlo. Ninguno de los participantes tiene memorizados resultados en multiplicaciones mayores a diez, por lo que recurren a otras estrategias, en este caso el estudiante planteó un procedimiento innovador: *calculó con la mitad de 12 y luego al resultado le sacó el doble.* Se quiso indagar más cómo usó esta estrategia y que la compartiera con sus compañeros.

Procedimiento: calculó con la mitad de 12 y luego al resultado le sacó el doble.

Intervención: socializar su procedimiento

I[4]: Platícanos, ¿por qué sumaste dos veces el 36?

P5: Primero multipliqué el 6 (cantidad de ruedas por vagón) por el número que me de la mitad del 12 y luego le sumo la mitad más la mitad.

I: ¿Cómo fue que pensaste en esta estrategia?

P5: Pues, porque no sé multiplicar por 12, pero sí por 6

I: ¿Y tienes memorizado cuánto es 6x6?

P5: Sí, 36. Entonces esa es la cantidad por 6 y faltan las otras 6, por eso sumo (36+36).

Esta estrategia fue muy interesante y muestra, que las relaciones de dobles y mitades son grandes herramientas que los estudiantes van comprendiendo para apoyarse al resolver problemas. Pero también es importante reconocer que este estudiante tiene mejor consolidadas las nociones de la multiplicación, por esto, desde un sentido interno, está más seguro sobre qué puede hacer y cómo hacerlo.

Se muestran los procedimientos para el segundo tipo de problemas:

II. Problemas típicos de valor faltante que se resuelven por medio de una división de tipo agrupamiento.

Para este tipo de problemas se buscó manejar un rango numérico más acotado, considerando que el cambio del cálculo relacional que ahora es un poco más complejo pues se tiene relación con una división tipo agrupamiento.

[4] La abreviación I significa el diálogo de la implementadora y la clave P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 y P8 es la abreviación que se hizo para distinguir a los ocho participantes, cada uno representa a un niño o niña diferente pero por cuestiones de privacidad se asigna una clave.

Recordando los problemas:

- Don Jesús tiene un pedido de 10 carritos, en este momento tiene en su taller 16 llantas ¿para cuántos carritos tiene material por ahora? (problema 2)
- En la fábrica de juguetes tienen 27 vagones, si a cada tren le ponen 3 vagones, ¿para cuántos trenes alcanzan los vagones? (problema 5)

En la Tabla 13 se muestra el resultado del análisis posterior llevado a cabo, a partir de lo que los participantes realizaron:

Tabla 13

Procedimientos utilizados en los problemas típicos de valor faltante que se resuelven por medio de una división de tipo agrupamiento

Tipo de problema	Procedimientos		
Resolución: división tipo agrupamiento	•Uso directo de la división	• Uso directo de la multiplicación	• Resta iterada

Los principales errores y/o dificultades enfrentadas al resolver los problemas fueron:

- Dificultad para comprender el problema por el dato extra que se da de los 10 carritos. Los estudiantes deben discernir qué datos del problema necesitan para calcular la cantidad de carritos que pueden hacer con 16 llantas, ya que en el problema además de dar información extra, de 10 carritos, no menciona de manera explícita la cantidad de 4 llantas para cada carro.
- Dificultad para comprender que procedimiento van a utilizar para calcular cuántos trenes con tres vagones pueden hacer con 27 vagones. De aquí se desprenden dos errores:
- Error al recurrir a la suma tratando de resolver el problema, observan que tienen las cantidades de 3 y 27 vagones y suman las cantidades.
- Error al recurrir a la multiplicación tratando de resolver el problema, observan que tienen las cantidades de 3 y 27 vagones multiplican las cantidades.

Ante esos errores y dificultades en específico y ante el proceso de resolución de los problemas en general, algunas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora fueron:

- ✓ **Explicar los procedimientos llevados a cabo:**

  ¿Cómo usaste la tabla del 3 para calcular la cantidad de vagones en cada tren? (tenemos 27 vagones)

  ¿Por qué cambiaste la multiplicación de 27x3 por 3x9?

- ✓ **Socialización de procedimientos:**

  Platícanos, ¿por qué fuiste sumando el 4? (sumó el 4 hasta llegar al 16)

  Platícanos, ¿por qué fuiste restando de 4 en 4? (a partir del 16)

  Platícanos, ¿En este caso cómo te sirve multiplicar?

- ✓ **Indagar lo que comprende del problema:**

  ¿Qué nos pide el problema?

  ¿Por qué buscaste un número que multiplicado por 3 te diera 27?, ¿el 9 qué significa?

- ✓ **Disminuir las dificultades a las que se enfrentan:**

  ¿Por qué multiplicaste 27x3?, el 81 qué representa, ¿trenes o vagones? (problema 5)

De los procedimientos enlistados en la Tabla 13 es importante destacar un ejemplo del último, que es la resta iterada y se invita por medio de una intervención a explicitar el procedimiento. El problema es el siguiente:

Don Jesús tiene un pedido de 10 carritos, en este momento tiene en su taller 16 llantas, ¿para cuántos carritos tiene material por ahora?

Procedimiento: resta iterada disminuyendo el divisor del dividendo

Intervención: socializar su procedimiento

I: ¿Para cuántos carritos le alcanza a Don Jesús?

P5: Para 4 carritos

I: Platícanos, ¿qué fue lo que hiciste?

P5: Primero resté 16-4 y el resultado me dio 12, luego estuve volviendo a restar hasta que me diera 0.

I: ¿Por qué fuiste restando de 4 en 4?

P5: Porque tiene sólo 16 llantas y no le alcanza, sólo le alcanza para 4 carros. Porque de las 16 llantas necesita 4 llantas para armar un carro y así lo fui haciendo.

Este procedimiento le permite al participante llevar el control a partir del total de las llantas que tiene e ir quitando las que necesita para cada carro. Identifica cuántos grupos de 4 llantas puede formar si tiene 16.

Por otra parte, algunos participantes en un inicio tuvieron la *dificultad para comprender el problema por el dato extra que se da de los 10 carritos*, por lo que en un inicio tratan de ocupar esa cantidad, pero no encuentran cómo llegar al resultado, por lo que se interviene para *indagar lo que comprenden del problema.*

Dificultad para comprender el problema por el dato extra que se da de los 10 carritos

Intervención: Indagar lo que comprende del problema

I: ¿Qué te pide el problema?

P4: Saber cuántas llantas necesito para 10 carros

I: ¿Cuál es la pregunta del problema?

P4: ¿Para cuántos carritos tiene material por ahora?

I: ¿Te alcanzan las 16 llantas para los 10 carritos?

P4: No

I: ¿Para cuántos carritos si te alcanza?

P4: Ahh ya, tengo que ver cuántos carros puedo armar

Retomar la pregunta ¿para cuántos carritos tiene material por ahora? acerca a los estudiantes a darse cuenta de qué no les preguntan por el total de llantas necesarias para 10 carros, sino enfocarse en que sólo tienen 16 llantas por lo que ellos deben descubrir para cuántos carros alcanza. Esta es una de las problemáticas a las que se enfrentan continuamente los estudiantes, identificar los datos y cómo operar con ellos, para partir de ahí y buscar diferentes estrategias para resolverlo.

Por otra parte, para el problema:

En la fábrica de juguetes tienen 27 vagones, si a cada tren le ponen 3 vagones, ¿Para cuántos trenes alcanzan los vagones?

Los estudiantes se apoyaron más en la multiplicación como operación inversa para resolver el problema, veían cuántas veces cabe el 3 en el 27 para poder responder. Algunos estudiantes, ya tenían memorizadas algunas de estas respuestas. De igual manera es importante identificar algunos errores presentados al momento de resolver y mostrar la intervención realizada.

Procedimiento: Uso directo de la multiplicación

Intervención: Explicar los procedimientos llevados a cabo

I: Veo que ya tienes el resultado, ¿Qué fue lo que hiciste?

P4: Usé la tabla del 3

I: ¿Cómo usaste la tabla del 3 para calcular la cantidad de vagones en cada tren? (tenemos 27 vagones)

P4: 3x1=3, 3x2=6 y así hasta llegar al 27

I: Platícanos, ¿en este caso cómo te sirve multiplicar?

P4: Para ver cuántos trenes hay, cada tren tiene 3 vagones y en total hay 27, conté los números que me salieron, me salieron 9, eran 9 trenes.

En otro ejemplo, el participante recurre a realizar una suma, 27+3= 30 por lo que propone reflexionar sobre su procedimiento por medio de *indagar lo que comprende del problema* y porqué recurrió a la suma.

Error recurre a la suma tratando de resolver el problema

Intervención: Disminuir las dificultades a las que se enfrentan

I: Platícanos, ¿el 30 qué significa?

P6: La respuesta

I: ¿Recuérdame cuál es la pregunta?

P6: ¿Para cuántos trenes alcanzan los vagones?

I: Entonces **¿**podrías armar 30 trenes sólo con 27 ruedas?

P6: Si

I: ¿Cada tren cuántos vagones ocupa?

P6: 3

I: Si armamos 30 trenes con 3 vagones cada uno ¿cuántos vagones necesitamos?

P6: Muchos

I: ¿Y cuánto te dio?

P6: 64

I: ¿Y nos alcanzará con 27 vagones?

P6: Creo que no

Después de la intervención, el participante se da cuenta que no se resuelve con una suma y busca otra manera de resolverlo. Realiza algunos dibujos para ilustrar los trenes con tres vagones, lo que le permite comprender mejor el problema y termina resolviéndolo por medio de una resta sucesiva.

I: ¿Qué fue lo que hiciste?

P6: Ah, pues vi que no era una suma, sino que tenía que tomar 3 vagones de los 27 para armar un tren y así le fue haciendo, tomaba de tres en tres.

Mostraremos ahora lo relacionado con el tercer tipo de problema de valor faltante trabajado en esta situación didáctica Fábrica de Juguetes:

III. Problema multiplicativo de proporcionalidad, cuyos <u>factores internos</u> pueden calcularse basándose en el doble

Como se ha indicado al inicio de la descripción de esta situación didáctica, se planteó un solo problema de este tipo:

Para armar 4 tráileres ocupas 32 llantas
¿Cuántas llantas necesitas para armar 8 tráileres?

En la Tabla 14 se muestra el resultado del análisis posterior llevado a cabo, a partir de lo que los participantes realizaron:

Tabla 14

Procedimientos utilizados en el problema multiplicativo de proporcionalidad, cuyos factores internos pueden calcularse basándose en el doble

Tipo de problema	Procedimientos		
Problema multiplicativo de proporcionalidad, cuyos factores internos pueden calcularse basándose en el doble	•Suma iterada	• Uso directo de la multiplicación	• Apoyarse en el factor interno de proporcionalidad calculando el doble

Los principales errores y/o dificultades enfrentadas al resolver los problemas fueron:

- Dificultad para identificar la relación del doble entre 4 y 8 tráileres.
- Error al multiplicar 8x8 mentalmente.

Ante esos errores y dificultades en específico y ante el proceso de resolución de los problemas en general, algunas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora fueron:

✓ **Confrontar procedimientos con resultados diferentes**

¿Les dio el mismo resultado?, ¿platíquenos, qué fue lo que hicieron?

✓ **Confrontar procedimientos diferentes con el mismo resultado correcto**

¿Usaste la misma estrategia que tu compañero o hiciste algo diferente?

✓ **Explicar los procedimientos llevados a cabo**

¿Por qué decidiste multiplicar 8x8 para llegar al resultado?

✓ **Indagar lo que comprende del problema**

Platíquenme, ¿qué es lo que entienden de este problema?, ¿cómo lo podemos resolver?

Favorecer un procedimiento más económico

Nos dan una respuesta, que para 4 tráileres ocupamos 32 llantas, ¿nos sirve esa información para calcular para 8 tráileres?

✓ **Disminuir las dificultades a las que se enfrentan**

¿Qué estrategia podemos utilzar para multiplicar 8x8?

De estos procedimientos es importante destacar que en una resolución un participante recurre a realizar una multiplicación de manera mental, apoyándose en la memorización. El estudiante realiza el procedimiento de manera correcta, pero se equivoca en el resultado por lo que se interviene para *confrontar su procedimiento con el resultado de otros compañeros*.

Error al llegar al resultado de la multiplicación 8x8.

Intervención: Confrontar procedimientos con resultados diferentes.

I: Platícanos, ¿qué fue lo que hiciste para llegar al resultado?

P4: Multipliqué 8x8 (su resultado es 66)

I: ¿Por qué decidiste multiplicar 8x8 para llegar al resultado?

P4: Porque se me hace más fácil la tabla

I: ¿Alguien realizó otro procedimiento?, ¿cuál fue?

P2: Sumando 32+32, porque en el problema nos dice la respuesta para 4 carros, y 4+4 nos da 8 carros. Me dio 64

I: ¿Les dio el mismo resultado?

P4: No

I: ¿Por qué será?

P2: Pues una está mal

I: ¿Cómo lo podemos sabes?

P2: mmm 8x5 es 40, más 8…48, más 8… 56, más 8… nos da 64

P4: Entonces 8x8 es 64

En este problema se observa una diversificación de procedimientos: la multiplicación, calcular el doble de 32 llantas y la suma iterada a partir de 8x5. Esta diversidad de procedimientos se identificó en mayor medida cuando el problema les plantea un reto numérico, saben qué hacer pero no tienen memorizada la respuesta por lo que deben buscar con apoyo de sus conocimientos previos herramientas que le permitan llegar al resultado, mostrando así un pensamiento creativo. Esto les permite identificar que existen diferentes maneras de resolver un problema también y además comprobar su resultado.

Como se ha mencionado al inicio de esta situación didáctica, además de los seis problemas verbales de valor faltante presentados, se trabajó con los participantes problemas a través de tablas de valor proporcional, las cuales se abordan a continuación.

B) Problemas presentados en las tablas de variación proporcional

En las tablas de variación proporcional, los participantes deben identificar los datos que se proporcionan: tipo de juguete y cantidad de llantas necesarias para completar la tabla. En esta situación se presentaron un total de cinco tablas de variación proporcional, cada una con diseño didáctico distinto, fueron variando de tipo de juguetes y la cantidad de los mismos. De igual manera la cantidad de llantas era diferente, pues cada juguete ocupa una cantidad distinta de llantas. A continuación, se muestra cada tabla de variación proporcional:

Tabla proporcional 1

Juguete: carro	**Llantas necesarias**
1 carro	4 llantas
2 carros	
3 carros	
4 carros	

Tabla proporcional 2

Juguete: bicicleta	**Llantas necesarias**
1 bicicleta	2 llantas
3 bicicletas	
5 bicicletas	
7 bicicletas	

Tabla proporcional 3

Juguete: tráiler	**Llantas necesarias**
1 tráiler	8 llantas
2 tráileres	
3 tráileres	
4 tráileres	32 llantas
6 tráileres	48 llantas
8 tráileres	
10 tráileres	

Tabla proporcional 4

Juguete: triciclo	**Llantas necesarias**
1 triciclo	3 llantas
2 triciclos	
3 triciclos	
4 triciclos	12 llantas
5 triciclos	15 llantas
6 triciclos	
7 triciclos	
8 triciclos	
9 triciclos	
10 triciclos	

Tabla proporcional 5

Juguete: tren	**Llantas necesarias**
1 tren	6 vagones
2 trenes	
4 trenes	24 vagones
5 trenes	30 vagones
8 trenes	
9 trenes	
10 trenes	

A partir de los resultados se realizaron preguntas a los participantes, éstas tenían las siguientes intenciones:

- Favorecer la identificación de las relaciones en las tablas;
- Identificar cómo resolvieron el problema, los diferentes procedimientos que pueden llevar a cabo, qué dificultades tuvieron y cómo resolver los errores;
- Construir el cuadro de multiplicación.

Como se puede observar, las primera y cuarta tabla de proporcionalidad llevan un orden consecutivo (1,2,3,4…) para la cantidad de juguetes (carros y triciclos) ello tiene como propósito que los participantes identifiquen características de la proporcionalidad, como es el aumento de los juguetes en proporción a la cantidad de llantas. Estas tablas permiten, de manera implícita, identificar el factor constante de proporcionalidad, cada carro se multiplica por 4 llantas.

En el resto de las tablas (bicicletas, tráileres y trenes) se rompe el listado consecutivo de cantidad de juguetes. Esto da un poco da mayor dificultad a la tarea matemática. También se proporcionan algunas respuestas consecutivas para favorecer la identificación de algunas estrategias, por ejemplo, las razones internas, ya que con ellas pueden ayudar para calcular la mitad o el doble de llantas. Los procedimientos identificados en la resolución de las tablas de proporcionalidad se muestran en la Tabla 15:

Tabla 15

Procedimientos utilizados en los problemas presentados en las tablas de variación proporcional

Tipo de problema	**Procedimientos**			
Tablas de variación proporcional -*carros y triciclos- (cantidad de juguetes consecutivos)*	•Sobre conteo	• Uso directo de la multiplicación	• Uso de razones internas para calcular por medio del doble o la mitad el total de llantas	

Tablas de variación proporcional - *bicicletas, tráileres y trenes- (cantidad de juguetes no consecutivos)*	•Sobre conteo	• Uso directo de la multiplicación	• Uso de razones internas para calcular por medio del doble o la mitad el total de llantas	• Propiedad distributiva[5]

Los principales errores y/o dificultades enfrentadas al resolver los problemas fueron:

- Error en el sobreconteo, principalmente cuando se realiza con números grandes y varias veces, se pierde el control de lo que se lleva.
- Error en el cálculo de la multiplicación memorística de tráileres (8 llantas).
- Dificultad para multiplicar por diez.
- Dificultad para calcular el doble en números como 7, 8 y 9.
- Dificultad para identificar la cantidad de juguetes que deben poner en los espacios vacíos de la tabla de bicicletas y carros.

Ante esos errores y dificultades ciertas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora se enlistan a continuación. Algunas de ellas se implementaron en diferentes momentos de la situación didáctica, por ello en la descripción no se especifica la tabla proporcional en la que se utilizó; por el contrario, en otros problemas se especifica entre paréntesis la tabla proporcional y el tipo de juguete implicado.

✓ **Indagar lo que comprende del problema**

Observen la tabla, ¿qué datos nos proporciona y cómo podemos resolverla?
¿Está organizada la información igual que en la tabla anterior?
En el espacio vacío de la tabla (carros y bicicletas), ¿cuántos juguetes vamos anotar?, ¿por qué?

✓ **Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema**

Usas alguna estrategia para multiplicar por 10, ¿cómo sabes que es 40? (Tabla proporcional 1)

---

[5] La propiedad distributiva es la suma de dos resultados parciales de la multiplicación que nos va a dar el mismo resultado que el de una multiplicación. Por ejemplo es la mismo 3x9 que 3x (4+5), que a su vez es igual que 3×4 + 3×5.

- ✓ **Llevar al límite un procedimiento**

  Observemos la tabla, si vemos que para 5 carros ocupamos 20 llantas, ¿en 10 carros cuántas llantas vamos a ocupar? (Tabla proporcional 1)

- ✓ **Socialización de procedimientos**

  ¿Cómo fuiste resolviendo la tabla?, ¿qué estrategia usaste?

- ✓ **Ampliar estrategias**

  Oigan y si tienen 20 llantas, ¿cuántos carros pueden armar? (apoyándose con la tabla) pueden identificar de manera implícita la relación inversa de la multiplicación. (Tabla proporcional 1)

- ✓ **Crear puentes entre el contraejemplo y sus procedimientos**

  Contraejemplo: Si nosotros quisiéramos calcular cuántas llantas necesitamos para 8 bicis, un niño me dijo que él sumó el resultado de 5 bicis y de 3 bicis, ¿Qué opinas de su procedimiento?,¿crees que sea una buena estrategia?, Podemos ocupar los resultados que ya tenemos para resolver otros problemas (Tabla proporcional 2)

  Contraejemplo: Juan tiene 2 carros y Lucía tiene 4 carros, ¿qué relación ven entre 2 carros y 4 carros? Juan ocupará 8 llantas ¿cuántas llantas necesitamos para 4 carros?, ¿qué relación ven entre 8 llantas y 16 llantas? ¿Pasará lo mismo con 3 carros y 6 carros? (Tabla proporcional 1)

- ✓ **Favorecer un procedimiento más económico**

  Sumaron 4 más 4 que da 8, a 8 le sumaron 4 y que da 12, le sumaron 4 y da 16, sumaron otros 4 y da 20. Pero me pregunto, ¿hay otra forma de hacerlo además de sumando?, ¿cuál?

  En la tabla nos ponen las llantas necesarias para 4 y 6 tráileres, ¿para qué cantidad de juguetes podríamos ocupar esos resultados?, ¿cómo le hacemos? (Tabla proporcional 3)

- ✓ **Disminuir las dificultades a las que se enfrentan**

  Si no se acuerdan cuánto es 9x6, ¿qué podrían hacer? (Tabla proporcional 5)

De estos procedimientos es importante destacar un ejemplo del último procedimiento enlistado en la Tabla 15, para las tablas de valor proporcional con cantidad de juguetes consecutivos: uso de razones internas para calcular el total de llantas.

Para este procedimiento, Block *et al.* (2015) identifican que se caracteriza por establecer relaciones entre las cantidades del mismo conjunto dentro de una relación proporcional, es decir, consiste en obtener la razón entre las cantidades de una misma magnitud en comparación con la razón interna en la otra magnitud. Por ejemplo, la razón interna entre 2 y 4 tráileres es la misma razón entre 16 y 32 llantas, ambas razones internas son dobles.

Como se ha mencionado el resto de las tablas (tráileres, trenes y bicicletas) el cálculo relacional se complejiza al tener que calcular cantidades salteadas; por ejemplo: 1,3,5,7… bicicletas. Esto podría provocar una dificultad, por lo que fue importante recordar a los estudiantes leer los datos que se proporcionan en las tablas. También se buscó indagar con mayor profundidad sobre otros procedimientos. Para ello se realizaban intervenciones específicas, por ejemplo:

Procedimiento: multiplicar mentalmente 2x3

Intervención: indagar conocimientos base para enfrentarse al problema

I: ¿Cuántas llantas necesitas para armar 3 bicis?

P2: 6 llantas

I: ¿Qué fue lo que hiciste para saberlo?

P2: Por la tabla del 2

I: ¿Qué fue lo que multiplicaste?

P2: 2 veces el 3, sume 3 más 3 y me dio 6

Aquí se identifica que el participante tiene las nociones base para multiplicar, que son las veces que se repite un número. El rango numérico bajo facilita este tipo de procedimientos, por lo que también se recurre a aumentar la cantidad de bicicletas, para *llevar al límite un procedimiento.*

Intervención: llevar al límite un procedimiento.

I: Oigan y si en la fábrica de juguetes nos pidieran armar más bicis, por ejemplo para 10 bicis ¿cuántas llantas necesitamos?

P1: Pues fácil, 20 llantas

I: ¿Por qué es fácil?

P1: Porque 10 más 10 son 20

I: Y ¿para 12 bicicletas?

P1: Mmm... 24 llantas

I: ¿También fue fácil de calcular?

P1: si, más o menos, porque 12+12 son 24

I: ¿Y por qué sumas 12+12?

P1: Pues porque pregustaste por 12 bicis, y cada una tiene 2 llantas, sumas 2 veces el 12

En la tabla proporcional de bicicletas, los estudiantes se enfrentan a calcular el doble y aunque se aumenta el rango numérico a más de 10 juguetes siguen utilizando este conocimiento que han construido cuando se multiplica por dos, que es sumar dos veces el mismo número. Con base a esto se identificó que los estudiantes muestran mayor dificultad al calcular el doble de 7, 8 y 9 que por 11, 12, 13 y 14. El tamaño de las cantidades es una variable que influye en los procedimientos que se pueden llevar a cabo, pero no siempre una cantidad más grande será necesariamente más difícil de calcular. El número 13 al sumarlo dos o tres veces no provoca transformación en las unidades, por ejemplo, se suman 3+3+3=9 y las decenas se van llevando de 10 en 10 llegando a 30, por lo que el control en la cuenta es más sencilla a diferencia de sumar 8+8, aquí la suma de esta cantidad se transforma y crea 1 decena más 6 unidades.

De estos procedimientos es importante destacar que el sobreconteo fue muy recurrido por los participantes, en mayor medida en las tablas de proporción con cantidades de juguetes consecutivos. Esto es, porque cuando las cantidades son continuas el cálculo relacional es menos complejo, ya que pueden recurrir al sobreconteo. Por ejemplo, la tabla proporcional de bicicletas (2 llantas) en comparación con la tabla proporcional de triciclos (3 llantas), se observa que el cálculo numérico es menos complejos en las bicicletas, pero el cálculo relacional se complejiza porque la tabla no es continua. Esta variable influye en que los estudiantes en la tabla de bicicletas deben llevar mayor control de las cantidades que no se solicitan.

Procedimiento: sobreconteo

Intervención: indagar lo que comprende del problema

I: Observen la tabla, ¿qué datos nos proporciona y cómo podemos resolverla?

P7: Viene que ésta es de triciclos, cuántos triciclos necesitamos y cuántas llantas son.

I: ¿Cómo le explicarías a tu compañera esta tabla? ¿Cómo se lee, en que se debe fijar para resolverla?

P7: Que se fije primero cuántas llantas hay y después cuántos son los triciclos y debe ir sumando de tres en tres.

I: ¿Cuántas llantas necesitas para 6 triciclos?

P7: Pues sumarle al 15 (llantas) tres más

En este procedimiento se observa una línea muy delgada con el procedimiento de la suma iterada, que utilizan para dos y tres triciclos ya que en ambas se suma el mismo número varias veces. Pero en el sobreconteo se identifica que hay una relación con la propiedad distributiva, ya que se parte de una cantidad conocida, en este caso para 5 triciclos se ocupan 15 llantas y a partir de esa cantidad se va sumando. El sobreconteo se observó que lo emplean cuando no tienen memorizado un resultado pero recurren a uno conocido y que esté cerca de la multiplicación que estén buscando.

Como se ha mencionado, a lo largo de la resolución de las tablas de proporcionalidad existieron pocas ocasiones de error en los participantes, sin embargo, en la tercera tabla (tabla de tráileres) un error que se presentó fue cuando algunos estudiantes recurrieron a la memorización de resultados y multiplicaban 8x8, y anotaban un resultado erróneo, por lo que se propuso la intervención para *confrontar procedimientos con resultados diferentes.*

Error en el cálculo de la multiplicación de 8x8.

Intervención: confrontar procedimientos con resultados diferentes.

I: ¿Cuántas llantas necesitamos para 8 tráileres?

P4: 58 llantas

I: ¿Qué fue lo que hiciste para saberlo?

P4: multipliqué en mi mente 8x8 y me acordé del resultado

I: ¿Cómo podríamos comprobar que necesitamos 58 llantas para 8 tráileres?

P1: lo que yo hice fue ver que para 4 tráileres ya estaba que eran 32, entonces sumé dos veces el 32 y me dio 64 llantas

I: Tenemos dos resultados diferentes, ¿cómo podemos saber cuál es el correcto?

P3: sumando de 8 en 8

P1: a mí no me serviría sumar de 8 en 8 porque es mucho sumar y me puedo equivocar.

I: ¿Podríamos sumar de 8 en 8 pero sin empezar desde 1 tráiler?

P3: sí, sumando a partir de 6 tráileres

I: Muy bien, hagámoslo, ¿48 más 8?

P1 y P3: 56 y más 8 serían 64

I: Entonces, lo que hicimos fue apoyarnos de la respuesta que tenemos de 6 tráileres y luego sumamos 2 tráileres más, que en la tabla también podemos ver la respuesta de 6 tráileres, verdad, ¿cuánto es?

P3: 16 llantas

I: Ahora me acuerdo, que un niño me dijo que usaba una estrategia similar, por ejemplo para 8 tráileres, podemos ocupar los resultados de 6 tráileres más 2 tráileres, ¿por qué creen que funciona esta estrategia? (aquí se presenta un contraejemplo).

P3: Por que suma 6+2 que dan 8 tráileres y es lo mismo que hicimos.

De igual manera, en este tipo de tablas es importante destacar que en las relaciones en donde los números en juego son mayores, los participantes buscaban otras opciones más allá de la suma iterada o el sobreconteo. En este caso se indagó qué estrategias utilizan cuando multiplican por diez. A pesar de que se podría llegar a considerar muy sencillo multiplicar por diez, algunos estudiantes aún tienen dificultad para interiorizar esta propiedad de la multiplicación: factores multiplicados en ceros. Una intervención oportuna es preguntar a otros estudiantes qué estrategias ocupan cuándo multiplican por 10, para que entre pares puedan profundizar en el procedimiento que emplean y puedan recurrir a estas estrategias para futuras situaciones.

Dificultad para multiplicar por diez.

Intervención: profundizar en el procedimiento que emplean.

I: Para calcular para 10 tráileres, ¿qué hiciste para saber que son 80 llantas?

P4: Sumé 64 más 8 y luego otra vez más 8

I: ¿Hay alguna estrategia que conozcas que te permita llegar al resultado sin tener que sumar?, ¿qué pasa cuando multiplicas por 10?

P4: No sé, es que sumando llego mejor.

I: Muy bien, pero vamos a ver, ¿qué estrategias podemos usar cuándo multiplicamos por 10?

P2: Yo multiplico el número sin los ceros y después le pongo al final el cero que tenía el número.

I: Explícanos, ¿cómo sería en este caso?

P2: pues es como si multiplicas 8x1 que es 8 y le agrego un cero, así que queda 80

I: ¿Y funcionaría para cualquier multiplicación?

P2: pues sí, en 6x10 son 60, y en 5x10, 50

I: Oye, ¿y por qué le agregas un cero?

P2: Pues porque el 10 tiene un cero, multiplicas el por uno y agregas el cero

I: Gracias, entonces (regresando con el participante P4) crees que esta estrategia te ayudó

P4: creo que sí

I: Tú dime, para 10 carros, ¿cuántas llantas necesitas?

P4: mmm sería 4 llantas que tienen los carros… mmm (pausa) 4x1 son 4 y un cero… 40 llantas.

La socialización que se dio entre compañeros fue muy fructífera, ya que se ha observado que entre pares explican sus procedimientos de manera más natural y tienen relaciones lógicas que pueden ir aprendiendo a explicar a otros, cómo es que su mente realiza ciertos procedimientos. Esta metacognición, pensar en lo que están haciendo no es nada sencillo para las personas, por eso es importante promover en los salones de clase espacios para que los estudiantes expliquen a otros compañeros qué es lo que hicieron y fundamenten por qué tomaron esa estrategia, por qué les funcionó. Esta es una habilidad que poco a poco irán desarrollando.

El siguiente ejemplo también se muestra un procedimiento con números mayores a diez en el cual calculan con dobles.

Procedimiento: Calcular el doble de 24 vagones para obtener lo de 8 trenes.

Intervención: Socialización de procedimientos.

I: ¿Cómo fuiste resolviendo la tabla?

P1: Pues primero sumé 6+6 y me dio 12 y lo anoté para 2 trenes. La verdad no me acordaba de la tabla del 8 pero vi que para 4 trenes hay ya anotado 24 vagones, entonces como el doble de 4 es 8 sumé dos veces 24+24 y así me dio 48.

P3: También se ve la mitad de 4 trenes, serían 2 trenes y la mitad de 24 es 12, así como había dicho

I: Están encontrando muchos dobles y mitades, ¿ven algún otro doble o mitad que podamos usar?

P2: Sí, el de 5 trenes, ya está y su doble es 10. Pero ahí es más fácil multiplicar 10x6 y es 60.

Las relaciones que identifican los participantes son muy valiosas, ya que se observa que las van empleando cuando las requieren y no siempre son necesarias para resolver todos los problemas, ya que pueden utilizar otra estrategia que para ellos sea más cómoda o económica. Esto les permite ampliar su bagaje de procedimientos comprendiendo desde un sentido interno, el por qué les funciona esa estrategia en ciertos momentos y qué otras pueden seleccionar.

ASPECTOS Y REFLEXIONES RELEVANTES SOBRE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA FÁBRICA DE JUGUETES

Con base a la implementación se puede rescatar que el rango numérico bajo, tanto de los problemas verbales como de las tablas de variación proporcional, favoreció mucho para que los estudiantes pusieran en marcha primeros acercamientos para su solución. A los estudiantes, les gustó el armado de juguetes y comprendían la relación entre juguete – llantas para comprender lo que tenían que realizar. Por medio de las intervenciones con los estudiantes se identificó que utilizaban mucho las secuencias numéricas, muchas veces de manera mental o en voz baja.

Respecto a las tablas de variación proporcional, se había contemplado podría ser una dificultad para los estudiantes al "leer" la información, encontrar las relaciones entre ella y resolver. Sin embargo, con base a la implementación se identificó que los estudiantes a pesar de no haberse enfrentado anteriormente a este tipo de representación del problema -así lo mencionaron en las reuniones virtuales – no presentaron grandes obstáculos. Inclusive, compartieron que la información se veía más organizada y en la resolución se notaba que identificaban mejor las relaciones (sobre todo la proporcionalidad) que en otros materiales (como el cuadro de multiplicación).

Fue así que las tablas favorecieron la identificación de los factores internos, aunque en los estudiantes no fue un procedimiento espontáneo, ya que utilizaban como primer procedimiento el sobreconteo o la memorización de cantidades al multiplicar. Fue con base a contraejemplos que pudieron apoyarse para posteriormente calcular la mitad o sacar el doble.

También se trabajó el propiedad distributiva, esta estrategia no fue muy empleada por lo que los contraejemplos sirvieron para ir comprendiendo como el resultado de dos multiplicaciones pueden construir el resultado de otra multiplicación, por ejemplo, en el caso de calcular las llantas necesarias para 8 bicicletas, se pueden fijar en los resultados que ya tienen anotados en la tabla y sumar los resultados de 3 y 5 bicicletas.

Al final de la implementación de la situación se identificó que los participantes se seguían sintiendo cómodos con la suma iterada y memorización de algunos resultados, siempre y cuando el rango numérico sea bajo. Cuando este aumenta recurren a otras de las estrategias, teniendo más éxito en la comprensión del cálculo de dobles. La socialización entre los participantes favoreció la comprensión de los problemas y la diversificación de procedimientos correctos respuestas de los participantes.

5.1.2 ¡Vámonos de compras!

En esta situación didáctica, el contexto gira en torno a la compra y venta de productos, se realiza por medio de un tablero tipo oca. En este juego de azar se determina el producto que se debe comprar y la cantidad de ellos por medio de dos ruletas.Se presentan a los estudiantes problemas en los que deben enfrentar las siguientes tareas matemáticas:

- Calcular el total que deben pagar por medio de problemas multiplicativos de valor faltante que evocan a la multiplicación.
- Estrategias para multiplicar números de más de dos cifras utilizando procedimientos no convencionales o convencionales como el algoritmo de la multiplicación.
- Resolver problemas de resta cuando el cajero deba dar cambio.

En este estudio se decidió no tomar en cuenta el análisis de procedimientos para el último tipo de tarea enlistada, dado que se trata de un problema aditivo y no multiplicativo.

Durante la situación se fueron presentando variables didácticas que se veían reflejadas en el cambio de tablero entre sesiones. Dichas variables didácticas involucraron un aumento en el rango numérico, tanto en el precio de los productos como en la cantidad que deben comprar, esto influyó de igual manera en el cambio de ruletas, ya que en la primera sesión se compran de 2 a 10 productos y para la segunda sesión se aumenta como se observa:

Ruleta: casillas verdes

Ruleta: casillas azules

A continuación, se presenta el primer tablero que se diseñó para la compra de productos:

Tablero “Tienda de abarrotes”. *Con él se plantean problemas típicos de valor faltante que se resuelven con una multiplicación de una o dos cifras por dos cifras.*

A lo largo de la situación didáctica los participantes resolvieron problemas verbales de tipo valor faltante al comprar y vender los productos, por un lado los participantes en cada turno tenían que realizar una compra y otro participante jugaba el rol de cajero o vendedor.

Problemas verbales de valor faltante.

En la Tabla 16 se presentan algunos ejemplos de problemas de valor faltante que tuvieron lugar durante la implementación. Se muestran los productos que compraron y se concreta el tipo de problema que tuvo lugar. Estos problemas sólo son un ejemplo de la gran gama de problemas que pueden enfrentar los estudiantes a lo largo de las sesiones.

Tabla 16

Problemas que se presentan en la situación ¡Vámonos de compras! y tipo de problema

Productos que compraron[6]	**Tipo problema y posibles procedimientos**
9 refrescos fanta a $12, ¿cuánto pagarás? Total que se pagó: $108	• Problema típico de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de una cifra por dos cifras.
4 submarinos a $23, ¿cuánto pagarás? Total que se pagó: $92	• Problema típico de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de una cifra por dos cifras.
10 yogures a $10, ¿cuánto pagarás? Total que se pagó: $100	• Problema típico de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de dos cifras por dos cifras.
10 paquetes de yogur a $55, ¿cuánto pagarás? Total que se pagó: $550	• Problema típico de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de dos cifras por dos cifras.
8 moños a $25, ¿cuánto pagarás? Total que se pagó: $200	• Problema típico de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de una cifra por dos cifras.
22 carritos a $22, ¿cuánto pagarás? Total que se pagó: $484	• Problema típico de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de dos cifras por dos cifras.

Como puede observarse en la tabla los problemas planteados se concretan en dos categorías:

IV. Problemas típicos de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de una cifra por dos cifras.

V. Problemas típicos de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de dos cifras por dos cifras.

[6] Se muestran los productos que compraron los participantes, estos ejemplos van cambiando en cada implementación.

Se muestran a continuación los procedimientos llevados a cabo por los participantes en la primera categoría.

IV. *Problemas típicos de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de una cifra por dos cifras.*

Los problemas que dieron lugar durante la intervención, dan cuenta de que el rango numérico aumentó en comparación con la situación didáctica anterior, esto con la intención de observar cómo van evolucionando sus procedimientos. Esto trajo consigo que los estudiantes identificaran, de manera explícita, las características del problema para emplear diferentes procedimientos como se muestra en la Tabla 17.

Tabla 17
Procedimientos utilizados en los problemas típicos de valor faltante que se resuelven con una multiplicación de una cifra por dos cifras.

Tipo de problema	**Procedimientos**		
Resolución: Multiplicación que implica la descomposición de cifras (9 refrescos fanta a $12)	•Suma iterada	• Multiplicaciones parciales	• Uso directo de la multiplicación
Resolución: Multiplicación que implica números que terminan en cero (8 mayonesas a $30)	•Suma iterada	• Multiplicación de factores multiplicados en ceros	
Problema multiplicativo de proporcionalidad, en el cual calculan el doble (4 submarinos a $23) (8 moños a $25)	•Suma iterada	• Agrupaciones, en el cual realizan una suma iterada hasta llegar a una cantidad en la que pueden calcular el doble	• Uso directo de la multiplicación

Los principales errores y/o dificultades enfrentados al resolver los problemas fueron:

- Error al mencionar resultados memorizados.

- Error al llevar el sobreconteo después de varias sumas iteradas.
- Dificultad para multiplicar con números mayores a diez.

Ante esos errores y dificultades en específico y ante el proceso de resolución de los problemas en general se empleó como principal estrategia de intervención la confrontación de procedimientos y resultados entre el comprador y el vendedor. Otro recurso que se propuso fue la estimación de resultados. Como se mencionó en el capítulo 1 y 2, se deben valorar los procedimientos no convencionales como la estimación, ya que permite a los estudiantes acercarse al resultado e ir construyendo mayores conocimientos matemáticos (SEP, 2011), esto además se vio favorecido gracias al contexto de dinero. Algunas de las intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora fueron:

- ✓ **Confrontar procedimientos con resultados diferentes:**

  ¿Cuánto le vas a pagar al cajero?, ¿estás de acuerdo con que eso es lo que te debe de pagar?

  ¿Te dio el mismo resultado que a tu compañera?, ¿qué fue lo que hicieron?

  Tenemos diferentes resultados, a tu compañera le dio $108 y a ti te dio $105 es poca la diferencia, ¿qué creen que pasó?, ¿en dónde te diste cuenta que hay que corregir? (9 refrescos marca Fanta a $12)
- ✓ **Confrontar procedimientos diferentes con el mismo resultado correcto:**

  ¿Por qué crees que tu compañera sumó primero dos veces el 23 y luego sumó dos veces el 46?, ¿qué fue lo que hiciste tú? (4 submarinos a $23)
- ✓ **Explicar los procedimientos llevados a cabo:**

  ¿Qué fue lo que hiciste para llegar al resultado?
- ✓ **Socialización de procedimientos:**

  Platícanos, ¿por qué agregaste el cero al final? (8 mayonesas a $30)

  ¿Hay alguna estrategia para multiplicar con esos ceros?
- ✓ **Desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas:**

  ¿Crees que ir registrando lo que llevas sumado te puede ayudar?

  Tú ya habías calculado cuánto pagarías por 2 submarinos, ¿tener esa cantidad te podría ayudar para calcular para 4 submarinos? (4 submarinos a $23)

Si tienes \$100, ¿cuántos moños puedes comprar? (8 moños a \$25)

Al comprar 8 mayonesas a \$30 cada una, gastarás más o menos de \$100 (8 mayonesas a \$30)

¿Vas a comprar muchos o pocos refrescos?, ¿cómo cuánto crees que te vas a gastar? (9 refrescos fanta a \$12)

Considerando el problema:

Por 4 submarinos a \$23, ¿cuánto pagarás?

El participante tiene un error al realizar la suma de las unidades, se observa que fue realizando la suma mentalmente por lo que en algún punto pierde el control de lo que llevaba, por lo que se dialoga con él para identificar qué es lo que hizo y que estrategias podría tomar en cuenta.

Error al llevar el sobreconteo después de varias sumas iteradas.

Intervención: desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas:

I: Platícanos, ¿qué fue lo que hiciste para llegar al resultado?

P7: Fui sumando 23+23+23+23 y me dio 91

I: ¿Podrías ir diciéndome cómo fuiste sumando, que primero y qué después?

P7: Sí, fue 23+23 son 46, aquí llevo dos, más 23 son 69, llevo 3 y más 23…91 y ya son los cuatro submarinos.

I: ¿Crees que ir registrando lo que llevas sumado te puede ayudar?

P7: Puedo ir haciendo una suma escrita.

Con la siguiente intervención se logró que el participante buscara otros procedimientos más económicos y comprobar su resultado:

I: Tú ya habías calculado cuánto pagarías por 2 submarinos, ¿tener esa cantidad te podría ayudar para calcular para 4 submarinos?

El participante se da cuenta que puede sumar dos veces el 46 identificando que no le dio el mismo resultado.

En este problema se puede comprobar cómo en las sumas con transformación hay que tener mayor cuidado ya que aumenta el nivel de complejidad para llevar el control de lo que se va sumando y que entre más larga sea la suma podría ser conveniente ir registrando algunos resultados para disminuir la carga mental. La comprobación, por medio de diferentes procedimientos es importante para poder estar más seguros del resultado.

Una estrategia muy interesante que se desarrolló a causa de la dificultad para multiplicar de manera mental por dos cifras, fueron las agrupaciones. Estas permitieron llevar mayor control de lo que iban sumando e identificar que con el cálculo de dobles podían llegar al resultado de manera más rápida. Es importante reconocer que este estudiante ha consolidado las nociones de la multiplicación, por esto, desde un sentido interno, está más seguro sobre qué puede hacer y cómo hacerlo.

Considerando el problema:

Por 8 moños a $25, ¿cuánto pagarás?

Surge como primera opción el procedimiento de *suma iterada haciendo agrupaciones de conteo, 25+25=50* (cálculo de 2 moños). Se procede a dialogar con el participante para que pueda *socializar su procedimiento.*

> *Procedimiento: a*grupaciones, en el cual realizan una suma iterada hasta llegar a una cantidad en la que pueden calcular el doble.
> *Intervención:* socialización de procedimientos.

I: Platícame, ¿qué fue lo que hiciste?

P5: Sumé 8 veinticincos, bueno vi que con dos veces ya llevaba 50 y así me fui (dando a entender que sumó los cuatro cincuentas que había anotado)

I: Si tienes $100, ¿cuántos moños puedes comprar?

P5: 4 moños, ahí ya llevo la mitad

I: ¿Y qué haces después?

P5: se sumarían los dos cienes

Este procedimiento surgió de manera espontánea cuando el estudiante anotó las cantidades que debía de sumar. Al comenzar la cuenta observó que al sumar dos veces el 25 llegaba a un número con el que le era fácil seguir agrupando. El participante hace uso de los conocimientos previos que va desarrollando al resolver un problema. Esta estrategia le permitió simplificar la suma que debía de hacer. A continuación se muestran los procedimientos para la segunda categoría:

V. *Problemas típicos de valor faltante que implica resolverse con una multiplicación de dos cifras por dos cifras.*

Para estos problemas, se observó que los estudiantes se enfrentaron a un gran reto, el aumento del rango numérico. Tenían que calcular dos cifras por dos o tres cifras, por lo que se vieron, en cierta medida, “obligados” a buscar otras estrategias para resolverlos ya que la suma iterada se volvió muy costosa, además que en algunas ocasiones mostraron errores en el cálculo. Esto no quiere decir que no usaron la suma iterada, de hecho fue de los primeros procedimientos que utilizaron y con eso se daban cuenta que debían buscar otras estrategias que les fueran más económicas y seguras.

Estos problemas se presentaron principalmente con segundo tablero

Tablero “Tienda de regalos”. *Con él se plantean problemas típicos de valor faltante que se resuelven con una multiplicación de dos cifras por dos o tres cifras.*

En la Tabla 18 se muestra el resultado del análisis posterior llevado a cabo, a partir de lo que los participantes realizaron:

Tabla 18

Procedimientos utilizados en los problemas típicos de valor faltante que se resuelven con una multiplicación de dos cifras por dos cifras

Tipo de problema	Procedimientos		
Resolución: Multiplicación que implica la descomposición de cifras (16 moños a $25) (22 carritos a $22) (25 moños a $25) (25 diademas a $35)	•Suma iterada	• Multiplicación parcial	• Uso directo de la multiplicación • Algoritmo convencional de la multiplicación
Resolución: Multiplicación que implica números que terminan en cero (10 yogures a $10) (10 paquetes de yogur a $55)	•Suma iterada	• Multiplicación de factores multiplicados en ceros	

Los principales errores y/o dificultades enfrentadas al resolver los problemas fueron:

- Error al llevar el sobreconteo después de varias sumas iteradas.
- Dificultad para multiplicar con números mayores a diez.
- Dificultad para operar con el algoritmo convencional de la multiplicación

Ante esos errores y dificultades en específico y ante el proceso de resolución de los problemas en general, algunas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora fueron:

✓ **Confrontar procedimientos diferentes con el mismo resultado correcto**
¿Hiciste el mismo procedimiento que tu compañero o realizaste otro procedimiento?, ¿por qué preferiste realizar una multiplicación?

✓ **Confrontar procedimientos con resultados diferentes**

Te dio cerca a lo que le dio a tu compañera, a ti te dio 635 y a ella 625, ¿qué pasa con esos 10 pesos de diferencia?, ¿Por qué te habrá dado a ti $10 más? (25 moños a $25)

- ✓ **Explicar los procedimientos llevados a cabo**

  ¿Cómo fuiste multiplicando?

  Indagar lo que comprende del problema

  ¿Son muchos o poquitos carros los que vas a comprar?, entonces, ¿vas a pagar mucho o poquito dinero? (22 carros a $22)

  Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema

  Y qué pasa con los ceros, ¿cuántos ceros vas agregar?, ¿por qué? (10 yogures a $10)

- ✓ **Desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas**

  Para no hacer tantas sumas, ¿qué otro cálculo podemos hacer?

De los errores más comunes que surgieron fue cuando los participantes recurrían a la suma iterada y esta era muy larga, por lo que perdían el control de la cuenta, y una dificultad que tuvieron que enfrentar fue el uso del algoritmo convencional para multiplicar dos cifras por dos cifras. En el siguiente problema el estudiante no quiso recurrir a la suma iterada por lo extensa que esta sería, y aunque podría recurrir a realizar agrupaciones con el número 25 prefirió realizar una multiplicación usando el algoritmo convencional. El participante iba realizando la multiplicación cuando se equivocó al realizar la suma con transformación. El problema es el siguiente:

Por 25 moños a $25, ¿cuánto pagarás?

Error al realizar la suma con transformación en el algoritmo convencional

Intervención: confrontar procedimientos con resultados diferentes.

I: Te dio cerca a lo que le dio a tu compañera, a ti te dio 635 y a ella 625, ¿qué pasa con esos 10 pesos de diferencia?, ¿Por qué te habrá dado a ti $10 más?

P3: Sumé uno de más (se refiere que al multiplicar 5x2+2 debió anotar 12 y no 13).

Este error ocasiona que el resultado final no sea correcto, pero demuestra que reconoce el valor posicional de cada cifra al anotarlas correctamente, además que conoce los pasos y pudo identificar de manera autónoma y rápida, dónde estaba el error, permitiéndole corregirlo. El compañero que estuvo como su pareja, de comprador y vendedor, también recurrió al algoritmo para llegar a la respuesta y mencionó que para él era la manera más rápida y segura de resolverlo. Los dos reconocen las ventajas del uso del algoritmo pero es importante es que lo utilicen comprendiendo el por qué es una buena herramienta para realizar operaciones más grandes y economizar procesos.

Las multiplicaciones parciales que se proponen desde las primeras sesiones, por medio de la propiedad distributiva, sirven como un método introductorio al algoritmo convencional, ya que fomenta la comprensión de los valores posicionales de cada cifra. En este caso, el estudiante reconoce que el número 25 es igual a 20+5.

Por otra parte, en el problema de:

Por 22 carros a $22, ¿cuánto pagarás?

El participante se vio nervioso para comenzar a operar, por lo que se interviene para *indagar lo que comprende del problema* y posteriormente proponga algún procedimiento que le permita llegar al resultado y lo *socialice.*

Procedimiento: algoritmo convencional de la multiplicación
Intervención: socializar procedimiento

Primero se realiza una serie de intervenciones para acercar al participante a los datos con los que cuenta y proponga primeras soluciones:

- ✓ ¿Cuánto cuesta cada carrito?, ¿cuántos vas a comprar?
- ✓ ¿Son muchos o poquitos carros los que vas a comprar?, entonces, ¿vas a pagar mucho o poquito dinero?
- ✓ Platícame, ¿qué vas hacer para calcular el resultado?

Con base a estas preguntas el participante identifica que la suma iterada sería muy extensa por lo que propone resolverlo por medio del algoritmo convencional de la multiplicación.

I: Veo que anotaste ya los 22 carritos que vas a comprar, ahora ¿qué sigue, qué más vas hacer?

P1: voy a multiplicar 2x22 (el participante no multiplica 2x2 y luego 2x2 de nuevo, sino que calcula de manera mental la multiplicación parcial y anota la respuesta) y luego otra vez 2x22 (aunque no menciona de manera explícita que realmente está multiplicando 20x22 respeta el espacio en el algoritmo)

I: Oye, ¿por qué dejaste un espacio cuando multiplicaste la segunda vez 2x22?

P1: porque hay que dejar un espacio, porque ya estoy multiplicando otros números

Aquí se identifica que el estudiante está recurriendo a los productos parciales que se emplean en el algoritmo convencional y aunque no menciona el valor de 20x22 está respetando el espacio que ocupa. Esto aumenta la comprensión del uso del algoritmo como una herramienta que permite simplificar los productos de la multiplicación.

ASPECTOS Y REFLEXIONES RELEVANTES SOBRE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA ¡VÁMONOS DE COMPRAS!

Con base a la implementación se remarca la importancia de dos aspectos, el primero, es el acercamiento a estas actividades relacionadas con la compra de productos, ya que es una dinámica que interesó mucho a los participantes, queriendo comprar de manera continua. Comunicarse con su compañero comprador – vendedor los motivaba a participar y estar a atentos a lo que tenían que pagar sus compañeros. También se identificaron factores como la planeación de estrategias, la diversificación de estrategias y el seguimiento de las reglas del juego. Es el segundo aspecto es el uso del dinero favoreció la descomposición de cantidades cuando tenían que pagar al cajero o al recibir su cambio. Esta técnica se podría profundizar más y con un mayor grado de comprensión por parte de los estudiantes apoyándose del dinero.

Con base a la implementación, se identificó que aunque el rango numérico presentó mayor grado de dificultad para algunos estudiantes, la socialización permitió que observaran e interiorizaran algunas estrategias que utilizaban sus compañeros para resolver los problemas. Además, realizar intervenciones en las cuales se les hagan preguntas de estimación, permite a los estudiantes acercarse a estrategias de cálculo que son útiles para acercarse al resultado y tomar decisiones sobre cómo va a proceder para resolver el problema.

Esta dificultad estuvo contemplada desde el análisis previo, por esta razón se decidió separar los productos en casillas verdes y azules. Esta variable influyó en que en las casillas azules, el rango numérico resulta ser más "complejo" de operar en comparación con las otras casillas, ya que la transformación de unidades se da con mayor facilidad y el cálculo de dobles se limita un poco por estas cuestiones. Por lo tanto, la cantidad de productos que deben comprar según la ruleta de las casillas azules disminuye, siendo estas 3, 5, 7, 9 y 10 productos. Como se observa, se trata de procurar un equilibrio entre el precio de los productos y la cantidad que deben comprar. Si el cálculo numérico se complejiza en el tablero, disminuye la cantidad de productos que hay que comprar y si el cálculo es menos complejo en el tablero la cantidad de productos que hay que comprar aumenta. De esta manera los participantes van haciendo uso de diferentes estrategias según el producto y la cantidad que deben comprar.

Las multiplicaciones parciales fueron de los procedimientos más empleados ya que les permitía mantener el control de las cantidades multiplicadas y este procedimiento a su vez les permitió ir construyendo con mayor comprensión el algoritmo convencional de la multiplicación.

Por último, los participantes mencionaron que se sintieron más identificados con el tablero de Tienda de regalos. Dialogaron sobre el juguete que querían comprar e incluso externaron en que casillas no quieren caer por considerar que costaban mucho dinero los productos. Tener en consideración las variables en el cálculo numérico en el segundo tablero fue importante ya que favoreció para que el rango numérico no fuera tan elevado y pudieran operar con él por medio de diferentes procedimientos.

5.1.3 Collares

Esta situación trabaja el contexto de una boutique en donde se diseñan collares, cada modelo de collar tiene diferente cantidad de perlas. Se manejan tres colores de perlas: azules, verdes y rojas. Se retoman las tablas de variación proporcional que se trabajaron en la situación de Fábrica de juguetes. Las tablas organizan la información de cada modelo de collar y va cambiando la información con cada modelo. Se indica el número del modelo, la cantidad de perlas que ocupa cada collar y la cantidad de collares que hay que armar.

Se presentan a los estudiantes problemas en los que deben enfrentar las siguientes tareas matemáticas:

- Calcular cuántas perlas necesitan para armar varios collares -cuando se les da el collar modelo-.
- Calcular cuántas perlas necesitan para formar el collar modelo -cuando se les dan cantidades de varios collares-

Las variables didácticas que se incluyeron fueron: aumentar el rango numérico conforme se cambia de modelo, la modificación del lugar de la incógnita en la tabla y no incluir el valor unitario en una de las tablas. Esto permite que los estudiantes tengan que poner en marcha otros procedimientos para resolverlas. Cuando se hace el cambio de la incógnita se baja el rango numérico.

A lo largo de la situación didáctica se plantearon un total de seis tablas de variación proporcional que deben ser completadas. A continuación, se muestran las tablas que se trabajaron:

Modelo 1	
1 collar	***2 collares***
2 azules	4 azules
5 verdes	___ verdes
3 rojas	___ rojas

Modelo 2	
1 collar	***4 collares***
3 azules	___ azules
4 verdes	16 verdes
6 rojas	___ rojas

Modelo 3	
1 collar	***7 collares***
2 azules	___ azules
5 verdes	35 verdes
7 rojas	___ rojas

Modelo 4	
1 collar	***5 collares***
5 azules	25 azules
6 verdes	___ verdes
12 rojas	___ rojas

Modelo 5	
1 collar	***2 collares***
6 azules	___ azules
7 verdes	14 verdes
___ rojas	10 rojas

Modelo 6	
2 collar	***4 collares***
4 azules	8 azules
6 verdes	___ verdes
12 rojas	___ rojas

Problemas presentados en las tablas de variación proporcional

En las tablas de variación proporcional, los participantes deben identificar los datos que se proporcionan: cantidad de collares y cantidad de perlas.

Como puede observarse en las tablas de variación proporcional los problemas planteados se concretan en tres categorías:

I. Tablas de variación proporcional que se resuelven por medio de una multiplicación.
II. Tabla de variación proporcional que se resuelve por medio de una división de tipo reparto.
III. Tabla de variación proporcional en el cual no se proporciona valor unitario.

Se muestran en la Tabla 19 los procedimientos llevados a cabo por los participantes en las tres categorías.

Tabla 19

Procedimientos utilizados en las tablas de variación proporcional

Tipo de problema	**Procedimientos**				
Tablas de variación proporcional *(se resuelven por medio de una multiplicación)*	• Sobre conteo	• Suma iterada	• Uso directo de la multiplicación	• Suma de resultados parciales	• Uso de razones internas para calcular el doble
Tablas de variación proporcional *(se resuelven por medio de una división de tipo reparto)*	• Reparto uno a uno	• Uso de razones internas para calcular la mitad			
Tablas de variación proporcional *(no se proporciona valor unitario)*	• Calcular el valor unitario de cada color de perla, luego multiplicar la	• Calcular el factor constante de proporcionalidad. En este caso es multiplicar por 2	• La cantidad de perlas rojas se podría calcular o comprobar al sacar		

	cantidad de perlas por collar por la cantidad de collares que se pide.	(de manera explícita).	el doble de las perlas verdes, ya que 12 es el doble de 6.

I. *Tablas de variación proporcional que se resuelven por medio de una multiplicación.*

Esta categoría se trabaja con los modelos 1, 2, 3 y 4. En estas tablas de variación proporcional se va aumentando el rango numérico, tanto en la cantidad de collares como en la cantidad de perlas que tiene cada modelo. Los principales errores y/o dificultades enfrentadas al resolver estos modelos fueron:

- Error en el sobreconteo, principalmente en los modelos 3 y 4.
- Error en el cálculo de la multiplicación memorística.
- Dificultad para multiplicar por diez.
- Dificultad para identificar la relación de dobles.
- Dificultad para identificar la suma de resultados parciales.

Ante esos errores y dificultades ciertas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora se enlistan a continuación. Algunas de ellas se implementaron en diferentes momentos de la situación didáctica, por ello en la descripción no se especifica la tabla proporcional en la que se utilizó; por el contrario, en otros problemas se especifica entre paréntesis la tabla proporcional y el tipo de juguete implicado.

✓ **Indagar lo que comprende del problema**

Observen la tabla, ¿qué datos nos proporciona y cómo podemos resolverla?

En el espacio vacío de la tabla, ¿qué vamos anotar?, ¿por qué?

¿Ahora para cuántos collares nos piden?

¿Cómo le explicarías a otro niño esta tabla?

✓ **Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema**

¿Qué estrategias usas cuando debes multiplicar con números mayores a 10? (modelo 4)

¿En qué te fijaste para saber cuántas perlas necesitas?, ¿Qué hiciste?

- ✓ **Socialización de procedimientos**

  ¿Cómo le explicarías a otro niño cómo calculaste la cantidad de perlas rojas para 5 collares?, ¿qué estrategia usaste? (modelo 4)

- ✓ **Ampliar estrategias**

  Para comprobar el resultado, ¿qué podemos hacer? (aplica para ambos contraejemplos)

  Contraejemplo: Un niño me dijo que para calcular la cantidad de perlas rojas para 7 collares (modelo 3) sumó los resultados que tenía en 2 perlas azules y 5 perlas verdes, ¿por qué creen que hizo eso?

  Contraejemplo: Un niño me dijo que para calcular la cantidad de perlas rojas para 4 collares (modelo 2) sumó dos veces el 12 que tiene anotado en las perlas azules, ¿por qué creen que hizo eso?

- ✓ **Favorecer un procedimiento más económico**

  ¿Les sirve el resultado de 35 perlas verdes para calcular las perlas rojos sin ir sumando de 7 en 7?

- ✓ **Disminuir las dificultades a las que se enfrentan**

  ¿Qué podríamos hacer para comprobar el resultado?

  Contraejemplo: Les platico que fue lo que me dijo un niño, él se fijó que el 12 es el doble del 6, y él dijo que si con 6 perlas verdes ocupa 30 para 5 collares, con 12 perlas rojas iba a ocupar el doble de 30, ¿cuánto es el doble de 30?

En los primeros tres modelos, se observó que los participantes no empleaban el cálculo del doble o sumar los productos parciales. Estos procedimientos se vieron reflejados cuando aumentó el cálculo numérico, o para comprobar un resultado, o cuando algún compañero mencionaba que lo había utilizado y entonces los demás empezaban a fijarse.

Considerando la tabla de variación proporcional del Modelo 1:

¿Cuántas perlas verdes y rojas necesitamos para hacer 2 collares?

Modelo 1	
1 collar	***2 collares***
2 azules	4 azules
5 verdes	___ verdes
3 rojas	___ rojas

Este modelo permite a los estudiantes observar las relaciones entre las perlas y la cantidad de collares. Se enfoca más en comprender lo que se realizará y se opera con números bajos, menores a 10. El procedimiento más empleado fue el cálculo mental, ya sea que lo calcularan por medio de una suma iterada o por la memorización de resultados, pero con una mayor comprensión de que estaban calculando el doble de perlas que hay en un collar. Para esto, se dialogó con los participantes para que explicaran que es lo que habían hecho.

Procedimiento: cálculo mental por medio de la suma iterada y multiplicación.

Intervención: indagar lo que comprende del problema.

I: ¿En qué te fijaste para saber que debías hacer?

P5: Observé que si hay dos azules, 2+2 son 4 (se refiere a las 2 perlas azules y a los 2 collares)

I: ¿Y en qué más te fijaste para poderla resolver?

P5: Pues que ahora hay que hacer el doble de collares. Si son 5 verdes, 5+5 son 10 verdes y así con 3 rojas, se multiplica por dos.

I: ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo sacar el doble?

Esta tabla aunque pudiera parecer "fácil" su propósito es permitir a los estudiantes comprender la información que se muestra en la tabla y partir de ahí para que en las siguientes tablas se pueda aumentar el rango numérico.

Durante la implementación surgieron pocos errores, esto se considera por el bajo rango numérico. Un error fue cuando recurrieron a la *memorización de resultados*, por ejemplo, en el modelo 3: ¿Cuántas perlas rojas necesitamos para hacer 7 collares?, [se presenta a continuación la tabla como la resolvió el estudiante]. En estas situaciones se reconoce que el estudiante identifica el procedimiento al que debe recurrir y está en el proceso de memorizar las tablas, ya que el margen de error es pequeño con respecto a la respuesta correcta.

Error en el cálculo de la multiplicación memorística

Intervención: indagar conocimientos base para enfrentarse al problema

Modelo 3	
1 collar	7 collares
2 azules	14____ azules
5 verdes	35 verdes
7 rojas	48____ rojas

El participante multiplicó mentalmente 7x7 pero se equivoca por un número. Con la intervención se promueve el diálogo con el estudiante para tratar de fomentar que compruebe su resultado y además identificar el cálculo parcial como estrategia para llegar al resultado si se desconoce o comprobarlo.

Error en la memorización de las tablas.

Intervención: Crear puente entre el contraejemplo y sus procedimientos.

I: Platícanos, ¿qué fue lo que hiciste para llegar al resultado?

P1: Multipliqué 7x7

I: ¿Qué podríamos hacer para comprobar el resultado?

P1: mmm... ¿sumando?

I: Te digo lo que me dijo un niño que le hizo, me dijo que se fijó en el resultado de 35 perlas. Si con 35 perlas hacemos 5 collares, ¿cuántos collares hacen falta?

P1: 2 collares

I: Si sumamos la cantidad de perlas de 5 y 2 collares, ¿cuántas perlas nos da?

P1: 49, ¡ay, no me dio! (refiriéndose a su resultado anterior)

I: ¿Por qué crees que funcione la estrategia que me comentó el otro niño?

P1: Pues porque sumamos las cantidades que ya teníamos.

El objetivo de la comprobación no es que el estudiante dude de sus resultados, sino que busque diversas estrategias que le permitan confirmar su resultado y estar seguros. El cálculo parcial permite recurrir a esas multiplicaciones conocidas y partir de ahí para seguir operando.

II. Tabla de proporcionalidad que se resuelve por medio de una división de tipo reparto.

En el modelo 5, que se muestra a continuación, se cambia el lugar de la incógnita con la intención de que los estudiantes pongan en marcha otros procedimientos, ya que ahora deben calcular las perlas que ocupa un solo collar, cantidad que anteriormente se daba. Esto permite que el estudiante observe la relación entre la multiplicación y división como operaciones inversas.

Modelo 5	
1 collar	***2 collares***
6 azules	___ azules
7 verdes	14 verdes
___ rojas	10 rojas

El modelo disminuye el rango numérico, tanto en la cantidad de collares como en la cantidad de perlas que tiene. La principal dificultad enfrentada al resolver este modelo fue:

- Identificar el procedimiento que deben realizar para calcular las perlas para un collar.

Ante esa dificultad ciertas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora se enlistan a continuación.

✓ **Indagar lo que comprende del problema**

Observen la tabla, ¿en qué es diferente en comparación con las tablas anteriores?

¿Cómo van a calcular las perlas rojas en el espacio vacío de la tabla?

✓ **Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema**

¿Cómo van a calcular las perlas rojas en el espacio vacío de la tabla?

✓ **Socialización de procedimientos**

¿Qué fue lo que hiciste para calcular las perlas rojas?

¿Cómo le explicarías a otro niño cómo calculaste la cantidad de perlas rojas para 1 collar?, ¿qué estrategia usaste?

- ✓ **Llevar al límite un procedimiento**

  Oye, y si en lugar de tener 10 perlas rojas en dos collares, tuviéramos 16, ¿cuántas perlas habría en un collar?, ¿por qué?

Considerando la tabla de variación proporcional del Modelo 5:

¿Cuántas perlas rojas lleva 1 collar?

Modelo 5	
1 collar	***2 collares***
6 azules	___ azules
7 verdes	14 verdes
___ rojas	10 rojas

Este problema debe ir acompañado de la siguiente consigna: “No debe sobrar ni faltar ninguna perla y los dos collares deben tener la misma cantidad de perlas. Las condiciones de exhaustividad y equitatividad son importantes en estos problemas de reparto para evitar que los estudiantes distribuyan las 10 perlas rojas en 4 y 6 en cada collar.

Este problema evoca a resolverse con una división o buscar un número que multiplicado por dos dé como resultado 10. La mayoría de los participantes identificaron como procedimiento base calcular la mitad de las perlas rojas, ya que eran para dos collares. Por esta razón se propuso otro problema para llevar al límite su procedimiento, en un inicio lo resolvió correctamente pero luego tuvo un error cuando se aumentó el rango numérico.

Error al aumentar el rango numérico.

Intervención: llevar al límite un procedimiento.

I: ¿Qué fue lo que hiciste para calcular las perlas rojas?

P1: sumé 5+5

I: ¿Por qué sumaste 2 veces el 5?

P1: Porque son 2 collares... o también con la tabla del 5, 5x2=10

I: Oye, ¿y si en lugar de tener 10 perlas rojas en dos collares, tuviéramos 16?

P1: pues saco la mitad de 16 que es… ¿8?

I: Bien, y si queremos hacer 4 collares y tenemos 20 perlas azules, ¿cuántas perlas ocuparemos en 1 collar?

P1: En 1 collar ocupamos 10 perlas azules

I: Entonces, si en un collar ocupamos 10 perlas, ¿cuántas usaremos en 4 collares?

P1: ah no, serían 5

I: ¿por qué 5 perlas?

P1: porque podemos buscar una multiplicación que nos de ese resultado, y la multiplicación es 4x5=20

En este problema se puede observar que el estudiante comprende bien la relación de mitad que se trabaja en esta tabla y es la estrategia que usa aun cuando el rango numérico aumenta. Pero cuando se le cambia la cantidad de collares de 2 a 4, la estrategia de calcular la mitad deja de funcionar, por lo que busca otro procedimiento. En la pizarra de Jamboard se ilustra la nueva información para que el estudiante pueda visualizarla y recurrir a ella cuando la necesite. Esto favoreció para que pudiera observar la relación entre la multiplicación y la división en la tabla de variación proporcional. Aunque se equivocó en un inicio, pudo rectificar su respuesta por medio de la intervención y de la tabla que se ilustró en la que tuvo que pensar no puede ocupar 10 perlas para 4 collares cuando sólo tiene 20 perlas, esto le serviría sólo si se tratara de dos collares, como se venía manejando, por lo que proponer diversos problemas favorece a diferentes procedimientos y a estar atentos.

III. Tabla de variación proporcional en el cual no se proporciona valor unitario.

Por último, en el modelo 6 se presenta un reto para los participantes, ya que desde que leen la información de la tabla deben identificar que no se da la cantidad de perlas de un collar, sino que se dan los datos para 2 y 4 collares, por lo que no se brinda el valor unitario. En este modelo no se aumentó el rango numérico, ya que el cálculo relacional se complejizó.

Los principales errores y/o dificultades enfrentadas al resolver este modelo fueron:

- Error al calcular las perlas verdes y rojas por no contemplar que se da la cantidad de perlas para dos collares.

- Dificultad para identificar el procedimiento que deben realizar para calcular el valor unitario.
- Dificultad para identificar la relación de dobles.

Ante esos errores y dificultades ciertas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora se enlistan a continuación.

✓ **Indagar lo que comprende del problema**

Observen la tabla, ¿en qué es diferente en comparación con las tablas anteriores?

Observen la tabla, ¿que datos nos proporciona del modelo?

¿Cómo van a calcular las perlas verdes y rojas?

✓ **Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema**

¿El modelo menciona cuántas perlas azules lleva un solo collar?

¿Cómo podríamos saber cuántas perlas azules lleva un solo collar?

✓ **Confrontar procedimientos con resultados diferentes**

¿Por qué crees que tu compañero anotó que en 4 collares se ocupan 24 perlas verdes?

✓ **Confrontar procedimientos diferentes con el mismo resultado correcto**

¿Cómo le explicarías a tu compañero cómo calculaste la cantidad de perlas verdes?, ¿qué estrategia usaste?

✓ **Socialización de procedimientos**

¿Qué fue lo que hiciste para calcular las perlas verdes?

✓ **Llevar al límite un procedimiento**

Oye, y si en lugar de tener 4 collares, tuviéramos 5, ¿cuántas perlas azules habría?, ¿por qué?

Considerando la tabla de variación proporcional del Modelo 6:

¿Cuántas perlas verdes y rojas necesitamos para hacer 4 collares?

Modelo 6	
2 collares	***4 collares***
4 azules	8 azules
6 verdes	___ verdes
12 rojas	___ rojas

Este problema evoca a resolverse con una división para calcular el valor unitario de perlas en un collar o multiplicar por dos la cantidad de perlas, ya que la relación entre collares (columnas) es por dos, el factor constante de proporcionalidad.

La mayoría de los participantes identificaron como procedimiento base calcular la mitad de las perlas verdes y rojas, ya que eran para dos collares. Por esta razón se propuso otro problema para llevar al límite su procedimiento, en un inicio lo resolvió correctamente pero luego tuvo un error cuando se aumentó el rango numérico.

> Al no darse el valor unitario, los participantes tienen el *error* de multiplicar por cuatro las perlas verdes y rojas.
>
> *Intervención*: indagar lo que comprende del problema.

I: ¿En qué nos debemos fijar en la tabla para calcular cuántas perlas necesitamos?

P6: En los collares

I: ¿Qué observas en los collares?

P4: Que hay que armar 4 collares

P6: Que en uno son dos collares y en el otro son 4 collares

P5: Primero chequé la tabla y vi que ya teníamos dos collares y que el resultado lo parto a la mitad y me dio 2 (el factor constante de proporcionalidad es 2), al 6 me dio 3 y al 12 en 6 (valores unitarios 3 perlas verdes y 6 perlas rojas), vi los resultados y multipliqué.

Con base a este diálogo se observa que cada estudiante identifica diferente información con la que empezará a operar. El participante P4 calcula la cantidad de perlas [se presenta a continuación la tabla como la resolvió el estudiante] sin identificar que las 6 perlas verdes no se ocupan para un collar, sino para dos.

Modelo 6	
2 collares	4 collares
4 azules	8 azules
6 verdes	24 verdes
12 rojas	48 rojas

10x4=40
2x4=8

El participante P6 se da cuenta de que en la información en la tabla no da los datos de un collar, mientras que el participante P5 menciona la cantidad de perlas para un collar, identifica la proporcionalidad entre collares, así que calculó el valor unitario por medio de la mitad de perlas. Con base a este modelo se pueden observar diferentes procedimientos que van llevando a cabo los estudiantes que les permiten acercarse a resolver el problema. La diversidad de estrategias permite comprender un problema desde diferentes puntos de vista.

Después de observar que los estudiantes se fijan en el valor unitario se interviene para aumentar el rango numérico y llevar al límite su procedimiento.

Intervención: llevar al límite un procedimiento.

I: ¿Qué fue lo que hiciste para calcular las perlas verdes?
P1: multipliqué 3x4
I: ¿Por qué multiplicaste por tres?
P1: Porque son 2 collares... en cada uno hay 3 perlas verdes
I: Oye, ¿y si en lugar de tener 6 perlas verdes en dos collares, tuviéramos 10?
P1: pues saco la mitad de 10 que es… 5
I: Bien, y entonces, ¿cuántas perlas necesitamos para 4 collares?
P1: pues 20

En este problema se puede observar que el estudiante comprende bien la relación de mitad que se trabaja en esta tabla y es la estrategia que usa aun cuando el rango numérico aumenta. Posterior a esto se podría aumentar también la cantidad de collares para armar, en lugar de 4 collares se puede preguntar por 5 collares. El aumento de las cantidades, sobre todo al inicio debe ser de manera gradual, y se recomienda anotar las nuevas cantidades en la pizarra de Jamboard para tener el referente visual del nuevo modelo.

ASPECTOS Y REFLEXIONES RELEVANTES SOBRE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA COLLARES

Con base a la implementación se identificó que las tablas de variación proporcional les permiten a los participantes llevar un mejor control respecto a la relación de proporcionalidad tanto con los factores internos, como con el factor constante de proporcionalidad.

En general, esta situación se considera que fue muy exitosa para los participantes, comprender los datos de las tablas y el rango numérico facilitó su ejecución. Collares, se puede extender -como se mostró- para llevar al límite sus procedimientos, proponiendo otras cantidades, tanto de collares como de perlas. Aumentar el rango numérico o cambiar el lugar de la incógnita promoverá diferentes procedimientos, así como diferentes errores y dificultades que se deberán prever.

Las dificultades o errores más recurrentes a las que se enfrentaron los participantes fueron cuando se aumentaba el rango numérico, o se cambia el lugar de la incógnita o no se daba el valor unitario. Así que fue importante prever las intervenciones que permitieran que los estudiantes expresaran lo que entendían y lo que iban hacer, para que ellos se dieran cuenta de qué podrían realizar para resolverlo o identificar el error y buscar otra manera de llegar al resultado. Por esta razón, al inicio de cada tabla se les preguntaba que observaban en ella, esto con el fin de seguir promoviendo la lectura e interpretación de los datos.

La socialización permitió que los estudiantes identificaran características de las tablas y estas a su vez permitían una mejor comprensión de los procedimientos que podrían realizar. Las relaciones de la multiplicación se hacían evidentes en las tablas de variación y como estrategias de solución o comprobación de resultados se trabajó el cálculo de dobles y mitades y las multiplicaciones parciales.

5.1.4 Cuadro de multiplicación

La situación de Cuadro de multiplicación se trabajó de manera transversal, en conjunto con las tres situaciones centrales: Fábrica de juguetes, ¡Vámonos de compras! y

Collares. La construcción del cuadro de multiplicación se planteó en forma paulatina, a lo largo de 7 sesiones. En la Tabla 20, se muestra la propuesta de que las tablas no se enseñen de manera ascendente de la 1 a la 10 o de manera descendente de la 10 a la 1, sino que se presenten por agrupamientos, esto con la intención de que identifiquen regularidades en las multiplicaciones como se muestra a continuación.

Tabla 20

Relaciones y propiedades de la multiplicación de acuerdo a las tablas de multiplicar

Fábrica de juguetes		
Sesión 1	Tabla del 2, 4 y 8	Relación de dobles y mitades
Sesión 2	Tabla del 2, 4 y 8	Relación de dobles y mitades División como operación inversa a la multiplicación
Sesión 3	Tabla del 3 y 6	Relación de dobles y mitades División como operación inversa a la multiplicación
¡Vámonos de compras!		
Sesión 4	Tabla del 5 y 10	Relación de dobles y mitades División como operación inversa a la multiplicación
Sesión 5	Tabla del 9	Propiedad distributiva División como operación inversa a la multiplicación
Collares		
Sesión 6	Tabla del 7	Propiedad distributiva División como operación inversa a la multiplicación
Sesión 7	Propiedades de la multiplicación	Propiedad conmutativa División como operación inversa a la multiplicación

Para construir el cuadro de multiplicación se plantearon problemas verbales que permitieron a los estudiantes enfrentar diferentes tareas matemáticas de acuerdo a la sesión. Es importante aclarar que cada estudiante resolvió los problemas por medio del procedimiento que ellos escogieron, pero por medio de preguntas y contraejemplos se propone la identificación de las siguientes relaciones y propiedades de la multiplicación:

- Resolver problemas por medio del cálculo de dobles y mitades.
- Resolver problemas por medio de la propiedad distributiva.
- Resolver problemas por medio de la propiedad conmutativa.
- Resolver problemas por medio de la división como operación inversa a la multiplicación.

Al ser estos los procedimientos que se proponen para los estudiantes al resolver los problemas, como manera de diversificar sus estrategias, se mencionarán algunos de los errores, dificultades e intervenciones que tuvieron lugar durante la implementación en cada una de estas tareas.

I. *Resolver problemas por medio del cálculo de dobles y mitades.*

Esta tarea se trabajó principalmente en las sesiones 1, 2, 3 y 4 con problemas como los siguientes:

1. Si para armar 5 carros ocupas 20 llantas, ¿cuántas llantas necesitas para armar 10 carros? (sesión 2)
2. Para armar 6 tráileres ocupas 48 llantas, ¿para armar 3 tráileres cuántas llantas ocupas? (sesión 2)
3. Luisa no se acordaba de cuántas llantas ocuparía para armar 8 triciclos, pero como ella ya había anotado que para 4 triciclos ocupaba 12 llantas, decidió que para calcular para 8 triciclos sacaría el doble de 12 llantas ¿Por qué Luisa sumó dos veces el 12? (sesión 3)
4. Si tuvieras que comprar 5 paquetes de submarinos ($23 cada uno), ¿cuánto pagarías? Un chico me dijo que lo que él hizo fue pensar que iba a comprar 10 paquetes y luego sacó la mitad ¿Por qué crees que hizo eso? (sesión 4)

Los principales errores y/o dificultades al resolver estos modelos fueron:

- Error en el cálculo para obtener el doble o la mitad.
- Dificultad para saber cómo calcular el doble o la mitad.
- Dificultad para identificar la relación de dobles y mitades.

Ante esos errores y dificultades ciertas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora se enlistan a continuación. Algunas de ellas se pueden implementar en cualquier momento de la secuencia y otras, que son más específicas se anota entre paréntesis a qué sesión corresponde.

- ✓ **Indagar lo que comprende del problema**

  ¿Qué relación encuentran entre los 5 carros y los 10 carros?, ¿cómo podemos resolver el problema? (sesión 2)

  ¿Qué relación encuentran entre los 6 tráileres y los 3 tráileres?, ¿cómo podemos resolver el problema? (sesión 2)

  ¿Qué relación encuentran entre los 4 triciclos y los 8 triciclos?, ¿cómo podemos resolver el problema? (sesión 3)
- ✓ **Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema**

  ¿En qué te fijaste para calcular la mitad/ el doble?, ¿Qué hiciste?
- ✓ **Socialización de procedimientos**

  ¿Cómo le explicarías a otro niño cómo calculaste la mitad/ el doble?

  Platícanos, ¿por qué sumaste dos veces el 12? (sesión 3)
- ✓ **Disminuir las dificultades a las que se enfrentan**

  Para multiplicar por 5 un chico me dijo que lo que él hizo fue multiplicar primero por diez y luego sacó la mitad ¿Por qué crees que hizo eso? (sesión 4)
- ✓ **Ampliar estrategias**

  Para comprobar el resultado, ¿qué podemos hacer? (se menciona el contraejemplo)

  Contraejemplo: Luisa no se acordaba de cuántas llantas ocuparía para armar 8 triciclos, pero como ella ya había anotado que para 4 triciclos ocupaba 12 llantas, decidió que para calcular para 8 triciclos sacaría el doble de 12 llantas ¿Por qué Luisa sumó dos veces el 12? (sesión 3)

En los primeros problemas que se plantean, se hace explícita la relación de proporcionalidad para trabajar los factores internos, ya que los estudiantes pueden ver entre los datos que se proporcionan que 3 tráileres son la mitad de 6, por lo que pueden recurrir a calcular la mitad de 48 llantas o que 8 triciclos son el doble de 4, por lo que al sumar dos veces el 12 puede llegar al resultado. Para el problema:

Para armar 6 tráileres ocupas 48 llantas,
¿Para armar 3 tráileres cuántas llantas ocupas?

Procedimiento: uso de razones internas para calcular por medio de la mitad el total de llantas.

Intervención: indagar conocimientos base para enfrentarse al problema.

I: ¿Cuántas llantas se necesitan?

P4: 24 llantas

I: ¿Qué fue lo que hiciste para calcularlo?

P4: Multipliqué 8x3

I: Para calcularlo me gustaría que usaran la información que viene en el problema, ¿nos sirve el resultado de 48 llantas?, ¿por qué?

P3: pues es la mitad de 48

I: Dinos, ¿por qué sacaste la mitad?

P3: porque ahí tienen 6 tráileres y nos piden 3 tráileres

El procedimiento de calcular mitades o dobles, en un inicio no fue muy recurrido, los estudiantes utilizaban principalmente la suma iterada o la multiplicación directa. Por esta razón se proponían por medio de los contraejemplos, para que analizaran el por qué funcionaban y qué es lo que habían hecho otros niños. El rango numérico bajo que se trabajó en la primera situación didáctica favoreció para identificar la proporcionalidad entre las cantidades, los estudiantes se daban cuenta de una de las condiciones que menciona Block *et al.* (2010) en cuanto a la relación que guarda una cantidad respecto a la otra, es así que si 10 carros es el doble de 5 carros, entonces hay que calcular con el doble de 20 llantas para llegar al resultado de 10 carros. Posteriormente en otros problemas con un rango numérico más grande los estudiantes pueden recurrir a calcular dobles y mitades para facilitar el cálculo o sirve también para comprobar sus resultados.

Los participantes hicieron alusión a que preferían sumar porque era más rápido y seguro para llegar al resultado pero al aumentar el rango numérico ese procedimiento se hacía muy extenso y continuamente perdían el control de la suma iterada. Por lo que calcular por medio de dobles y mitades les permitía diversificar sus estrategias e incluso, en la situación Fábrica de juguetes, sesión 3, una participante recurrió a esta estrategia para calcular las ruedas que necesitan 12 vagones, poniendo en cada uno 6 ruedas. La participación no multiplicó directamente 12x6, ni realizó la multiplicación de factores multiplicados en ceros para descomponer 12 en 10+2, sino que pensó en sacar la mitad de 12, ya que la tabla del 6 si la conocía y al resultado de 6x6 le calculó el doble, por lo que sumó 36+36 y llegó al resultado de 72 ruedas.

II. Resolver problemas por medio de la propiedad distributiva.

Esta tarea se trabajó principalmente en las sesiones 5 y 6 con problemas como los siguientes:

1. ¿Cuánto van a pagar ustedes por 3 plumas? "Un niño llamado Luis me dijo que para calcular cuánto pagar por 3 plumas que cuestan $9 sumó los resultados de 3x5 y 3x4. ¿Le salió bien el resultado a Luis?, ¿qué fue lo que hizo?, ¿qué opinas de su procedimiento?"
2. Se acuerdan que un niño me comentó que para construir la tabla del 7, se fijó en los resultados de las tablas del 2 y del 5, me dijo que para calcular 7x7 sumó 35+14, ¿por qué sumó esos resultados?, ¿cómo podemos utilizar su estrategia para calcular 7x9?

Los principales errores y/o dificultades enfrentadas al resolver estos modelos fueron:

- Error al realizar las multiplicaciones parciales.
- Error en el cálculo mental al sumar las multiplicaciones parciales.
- Dificultad para identificar la propiedad distributiva.

Ante esos errores y dificultades ciertas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora se enlistan a continuación.

- ✓ **Ampliar estrategias**

  ¿De qué manera podemos descomponer el 9? Por ejemplo 6+3 nos da 9, ¿qué otra? ¿Cómo podemos utilizar los resultados de la tabla del 6 y la del 3 para multiplicar 9x7? ¿Si observamos en el cuadro de multiplicar en qué resultados nos debemos de fijar?

- ✓ **Desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas**

  Para no hacer tantas sumas, ¿qué otro cálculo podemos hacer? (se mencionan los contraejemplos)

  Se acuerdan que un niño me comentó que para construir la tabla del 7, se fijó en los resultados de las tablas del 2 y del 5, me dijo que para calcular lo de 7x7 sumó 35+14, ¿por qué sumó esos resultados?, ¿podemos utilizar su estrategia para calcular 7x9?, ¿Cómo?

  "Un niño llamado Luis me dijo que para calcular cuánto pagar por 3 plumas que cuestan $9 sumó los resultados de 3x5 y 3x4. ¿Le salió bien el resultado a Luis?, ¿qué fue lo que hizo?, ¿qué opinas de su procedimiento?"

Este procedimiento resultó innovador para los estudiantes, y aunque en un momento tuvieron dificultad para comprender cómo por medio de dos multiplicaciones podían llegar a un resultado, las tablas de variación proporcional, que se trabajaron en la situación Fábrica de juguetes, favorecieron que los estudiantes pudieran comprender esta propiedad. Por ejemplo, por medio del problema:

Se acuerdan que un niño me comentó que para construir la tabla del 7, se fijó en los resultados de las tablas del 2 y del 5, me dijo que para calcular lo de 7x7 sumó 35+14, ¿por qué sumó esos resultados?, ¿cómo podemos utilizar su estrategia para calcular 7x9?

Procedimiento: suma de resultados parciales para calcular 7x9.

Intervención: desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas.

I: ¿Qué fue lo que hiciste para calcular cuánto es 7x9?

P1: pues me fijé también en la fila del 2 y del 5

I: ¿Y qué más tuviste que hacer?

P2: Pues vi que 9x2 son 18 y 9x5 son 45 y luego nada más hay que sumarlos

I: ¿Cuánto te da?

P2: (mentalmente realiza la suma: 45+10+8) 63

I: ¿Además de fijarnos en la fila del 2 y del 5, nos podríamos fijar en otras tablas para llegar al resultado?

P1: ¿Cómo?

I: Por ejemplo, si sumamos 5+2 nos da 7 que es la cantidad que vamos a multiplicar por nueve, pero podríamos usar 4+4 y multiplicarla por 9?

P2: Pues creo que no, porque 4+4 son 8 y no 7 ni 9.

I: Entonces, además de fijarnos en el 4, ¿en qué otro número hay que multiplicar?

P4: pues sería 3 para que diera 7

Estas intervenciones permitieron que los estudiantes reflexionaran sobre por qué funciona el descomponer un número e identificar cómo se debe descomponerlo para poder emplear esta propiedad de manera efectiva.

La descomposición de cantidades permitió obtener resultados parciales para finalmente sumarlos y obtener el resultado final. Esta propiedad favorece que los alumnos vayan memorizando tablas de multiplicar que no tengan en su repertorio o que sean multiplicaciones altas por medio de la construcción de ellas ya que les ayuda a componer las tablas por ellos mismos (Isoda y Olfos, 2011).

III. Resolver problemas por medio de la propiedad conmutativa

Esta tarea se trabajó directamente en la sesión 7 con el siguiente planteamiento:

1. Marquen en el cuadro de multiplicación los círculos que les piden:

Pon un círculo rojo en los resultados de las multiplicaciones de 5x2 y 2x5.

Ahora pon un círculo verde en los resultados de las multiplicaciones de 8x4 y 4x8.

Por último, pon un círculo azul en el resultado de la multiplicación de 6x6.

Después de marcar los círculos en el cuadro de multiplicar, los estudiantes pueden ver de manera más explícita cómo los resultados se repiten en ambos lados de la diagonal.

Ante esta actividad la principal dificultad enfrentada fue:

- Identificar la propiedad conmutativa.

Las intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora se enlistan a continuación.

✓ **Socialización de procedimientos**

¿Por qué el resultado de 48 aparece en 8x6 y ustedes lo pueden usar para anotar el resultado de 6x8?, ¿se repiten otros resultados que podamos recuperar para construir la tabla del 6?

✓ **Indagar lo que comprende del problema**

¿Qué similitud o diferencia encuentras entre los resultados que están de un lado de la diagonal con las del otro lado?

¿Por qué solo pusimos un círculo azul?

¿Por qué creen que en ambos lados de la línea diagonal se repiten las cantidades de los productos?

Con estas preguntas, los estudiantes pueden identificar en el cuadro de multiplicación una diagonal verde, como se muestra a continuación, que sugiere que el cuadro se divide en dos, y mediante el diálogo se propone que los alumnos se den cuenta de la conmutatividad, a partir de la simetría de los productos con respecto a una diagonal. De esta manera se puede concluir que en ambos lados se encuentran los mismos resultados de las multiplicaciones, siguiendo el eje vertical y horizontal.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	32	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

La propiedad conmutativa puede surgir antes de la sesión 7, por ejemplo, uno de los participantes identificó que 6x8 da el mismo resultado que 8x6. En la situación Fábrica de juguetes, sesión 2, se trabajó por medio de los tráileres la tabla del 8, así que en la sesión 3 cuando el estudiante debe construir la tabla del 6 observó que ya tenía ese resultado en la fila del 6, a partir de aquí se dialogó sobre que otros resultados podían obtener con las respuestas que ya tenían anotadas en el cuadro de multiplicar. Por medio de la pregunta:

¿Por qué el resultado de 48 aparece en 8x6 y ustedes lo pueden usar para anotar el resultado de 6x8?, ¿se repiten otros resultados que podamos recuperar para construir la tabla del 6?

Procedimiento: usar los resultados de las multiplicaciones para aplicar la propiedad conmutativa.
Intervención: socializar procedimientos.

I: Platícanos, ¿cómo llegaste al resultado de 6x8?
P4: Pues solo me acordé que ya tenía anotado la tabla del 6.
I: Muy bien, y ¿por qué el resultado de 48 aparece en 8x6 y ustedes lo pueden usar para anotar el resultado de 6x8?,
P4: Porque 6x8 y 8x6 valen lo mismo.
I: De los resultados que tienes anotados en el cuadro de multiplicar, ¿se repiten otros resultados que podamos recuperar para construir la tabla del 6?
P2: Si, tenemos también 6x2 y 6x4

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3										
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5										
6										
7										
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9										
10										

En el cuadro de multiplicar, se puede observar que ya han construido la tabla del 2, 4 y 8, y dentro de esas respuestas se podría profundizar para construir esas mismas tablas de manera vertical ya que esta propiedad permite identificar que en ambos ejes, vertical y horizontal, se pueden anotar los resultados de las multiplicaciones por la conmutatividad. Con esto, los estudiantes exploran si en una multiplicación cambia el resultado al alternar el orden de los factores, por lo que se dan cuenta que el cambio no cambia el resultado, sino que es el mismo. Autores como Isoda y Olfos (2011) proponen enseñar tempranamente la conmutatividad de la multiplicación, para ejercitar y aplicar las tablas.

Durante la intervención, esta propiedad permitió que los estudiantes recurrieran a identificar la suma iterada que para ellos fuera más sencillo de operar. Por ejemplo, se les preguntaba ¿qué es más sencillo, multiplicar 5x8 u 8x5? Después de haber comprendido que el resultado será el mismo se procede a indagar ¿qué es más sencillo sumar, si 5 veces el 8 u 8 veces el 5? Esto dio pie a que los estudiantes también reflexionaran sobre qué suma es más sencilla de hacer para resolver una multiplicación.

IV. Resolver problemas por medio de la división como operación inversa a la multiplicación.

Esta tarea se trabajó en todas las sesiones con diferentes problemas como los siguientes:

1. Si tienes 20 llantas, ¿cuántos carros puedes armar?
2. ¿Cuántos tráileres se pueden armar con 16 llantas?
3. Vas a la tienda y compras unos chicles Hubba Bubba, ¿cuánto cuestan? (cuestan $25), ¿con cuántas monedas de $5 vas a pagar?
4. Si la maestra les da $54, ¿cuántas plumas pueden comprar?
5. Si tenemos 42 perlas verdes, ¿cuántos collares podemos hacer si utilizamos 7 perlas verdes por collar?

Los principales errores y/o dificultades enfrentadas al resolver este modelo fueron:

- Error al realizar la división

- Dificultad para identificar a la división como operación inversa a la multiplicación en el cuadro de multiplicar

Ante esos errores y dificultades ciertas intervenciones que tuvieron lugar por parte de la implementadora se enlistan a continuación.

- ✓ **Indagar lo que comprende del problema**
  ¿En qué parte del cuadro de multiplicación podemos encontrar las 20 llantas que tenemos de los carros?
- ✓ **Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema**
  ¿Creen que el cuadro de multiplicación nos sirva para algo más además de para multiplicar?, ¿nos servirá para dividir?
- ✓ **Confrontar procedimientos diferentes con el mismo resultado correcto**
  Tu compañero fue repartiendo de 3 en 3 las llantas que tiene para armar los triciclos hasta que ocupó las 21 llantas que tenía. Platícanos, ¿cuál fue el procedimiento que tú usaste?
- ✓ **Socialización de procedimientos**
  ¿Qué fue lo que hiciste para calcular cuántas plumas a $9 puedes comprar con $54?
- ✓ **Desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas**
  Un niño me dijo que él se dio cuenta que en el cuadro de multiplicar 8x2 da 16 y que cuando repartió las 16 llantas de tráiler pudo armar 2, ¿qué pasa si tenemos 32 llantas de tráiler?, ¿en qué nos debemos fijar?

En la primera sesión, se les pregunta directamente para qué sirve el cuadro de multiplicar, con esto se pretende indagar los usos que los estudiantes pueden reconocer en el cuadro. La mayoría de los participantes mencionaron que sirve para ver las respuestas de las multiplicaciones, y algunos de ellos cuando lo construyeron lo hicieron en orden progresivo de la tabla del 1 a la del 10 por lo que no identifican que con el cuadro pueden recurrir a otras relaciones, como resolver problemas que hacen alusión a la división por medio de la operación inversa que es la multiplicación.

Dificultad para identificar a la división como operación inversa a la multiplicación en el cuadro de multiplicar

Intervención: indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema

I: ¿Para qué nos sirve el cuadro de multiplicar?

P8: Para multiplicar

I: Sin hacer el cálculo en su mente o por escrito, observen el cuadro de multiplicación y díganme, si tenemos 16 llantas de carros, ¿cuántos carros podemos armar?, ¿nos sirve el cuadro para conocer el resultado?

Con esta intervenciones identificamos que niños no reconocían esta operación inversa pero nos apoyamos de otros participantes que si la veían:

I: ¿Cómo nos sirve el cuadro?, ¿en qué nos tenemos que fijar?

I: Si sabemos que un carro tiene 4 llantas, hay que observar los resultados de la tabla del 4, ¿dónde podemos encontrar el resultado de 16 llantas?, ¿en qué casilla?

Con este diálogo, los estudiantes comprendieron mejor la relación entre los profuctos y los ejes y se pudo preguntar a cada estudiante un problema

I: Muy bien, y si tenemos 64 llantas de tráileres, ¿en qué tabla debemos fijarnos?

P8: en la del 8

I: si tenemos 24 llantas de tráileres, ¿cuántos podemos armar?

P8: 3 tráileres

I: ¿En dónde lo podemos encontrar?

P7: en la de 8x3

I: Entonces el cuadro de multiplicar, además de multiplicar para qué otra cosa nos sirve

P7 y P8: Para dividir

En un inicio, no fue claro cómo el cuadro les podría servir para dividir. Por medio de estar intervenciones se permitió ampliar su uso al realizar muchas preguntas para consolidar esta relación, además que con el rango numérico acotado en el cuadro de multiplicación con los resultados de las tablas del 2,4 y 8 se visualizó mejor los productos de las multiplicaciones que eran las cantidades que se debían dividir.

Al introducir esta relación desde las primeras sesiones les permitió a los estudiantes apoyarse del cuadro de multiplicar para dividir, y para otros estudiantes que ya tenían memorizados más productos, podían recurrir a esta relación inversa al multiplicar en donde 3x8 son 24 y 24 entre 8 son 3. Investigaciones han sugerido que integrar el aprendizaje de la multiplicación al mismo tiempo que con el de la división mejora la comprensión de las relaciones multiplicativas.

ASPECTOS Y REFLEXIONES RELEVANTES SOBRE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA COLLARES

Con base a la implementación se identificó que el cuadro de multiplicación es una herramienta que acercó a los estudiantes a identificar las relaciones y propiedades de la multiplicación, permitió visualizar los múltiplos, comprender los divisores, trabajar la proporcionalidad, la propiedad distributiva, la conmutatividad y la identificación del aumento y decremento constante en las tablas. El cuadro de multiplicación permite ir desarrollando el pensamiento lógico, ya que permite encontrar patrones, como se mencionó, los estudiantes se dan cuenta de la relación entre las cantidades (Broitman, 2001)

El cuadro se puede abordar de manera horizontal o de manera vertical. Esto se debe a la propiedad conmutativa pero además permite la interacción con el cuadro, ya que los estudiantes pueden experimentar varias maneras en las que se puede ir construyendo, haciendo de esto una participación activa en su propio proceso de aprendizaje. En esta propuesta se trabajó con un cuadro de diez filas por diez columnas, pero una gran ventaja del cuadro es que se puede ampliar tanto como se requiera, por ejemplo, se podría agregar el cero en las filas y columnas para reflexionar sobre la propiedad del producto cero, en el cual si uno de los factores es cero, el producto es igual a cero; o profundizar en la propiedad del producto neutro, recordando que el 1 es el elemento neutro de la multiplicación ya que todo número multiplicado por 1 da el mismo número; o crear un cuadro que contenga más filas y columnas, por ejemplo, quince filas por quince columnas y de esta manera se amplía el rango numérico para trabajar los cálculos utilizando la multiplicación por diez, en el cual la cifra 15 se descompone en 10+5 y se multiplica con la otra cantidad, por ejemplo en 15x8 se multiplica 10x8 y 5x8 y luego se suman los resultado.

El cuadro de multiplicación se mostraba siempre en las diapositivas de jamboard para que los estudiantes pudieran recurrir a ella y apoyarse para resolver los problemas. Recordando que en capítulos anteriores, Broitman (2001) sugiere realizar reflexiones sobre los productos del cuadro de multiplicación. Los estudiantes deben dialogar sobre las propiedades que identifican y son ellos quienes deben analizan si son o no válidas estas propiedades al responder preguntas como: ¿por qué funciona lo que hace el niño?, ¿están de acuerdo con su procedimiento?, ¿pasará lo mismo con otros números?, etcétera. Con estas preguntas se propone a los estudiantes seguir con el análisis de la tabla que se ha trabajado desde sesiones anteriores.

Capítulo 6. Orientaciones didácticas para docentes

Este capítulo tiene la finalidad de contribuir con algunas especificaciones para docentes que deseen implementar la secuencia didáctica fruto de este estudio. Especialmente se enfoca en prever los posibles procedimientos, errores y dificultades de los estudiantes a la hora de resolver los problemas y preparar o fortalecer las intervenciones docentes. Estas intervenciones permiten favorecer el diálogo con los estudiantes y así indagar sobre sus conocimientos previos, estimular el pensamiento reflexivo para la comprensión del problema, promover la explicación de sus procedimientos y proponer otros problemas que les permitan desarrollar estrategias para enfrentar situaciones similares.

La secuencia didáctica se conforma por cuatro situaciones didácticas: Fábrica de juguetes, ¡Vámonos de compras!, Collares y el Cuadro de multiplicación. La última situación se desarrolla de manera transversal a lo largo de las otras tres situaciones. Principalmente están dirigidas a docentes de grupos de tercer o cuarto grado. Al ser orientaciones, se considera que cada docente podrá hacer modificaciones pertinentes desde su experiencia y el conocimiento de su grupo.

A continuación, se presentan los elementos que se incluyen en las orientaciones:

6.1 Descripción de los elementos de las orientaciones

Los elementos que se consideran en las orientaciones están organizados en el siguiente orden:

- Generalidades de la situación
- Propósitos
- Materiales
- Consignas generales
- Problemas
- Procedimientos, errores, dificultades e intervenciones
- Recomendaciones para la situación
- Relación con la situación de cuadro de multiplicación

Respecto a los materiales, en estos links se localiza todo lo necesario para cada situación:

Fábrica de juguetes:

https://docs.google.com/document/d/18coF7UM9ZQIx78HCxIQETHDPWH1kWSfj/edit

¡Vámonos de compras!

https://docs.google.com/document/d/1Ve0NsoyCRR7jdy3MIwsU_CoJ--mg5b2IpFQv6TDNkQs/edit

Collares

https://docs.google.com/document/d/1FYi9NaFaNXp7LHqxYOgKURoECVPe7Rw0/edit

Cuadro de multiplicación

https://docs.google.com/document/d/1Fo2j2CboChs1vEVsW8PtLeCcpEBOa2Dy/edit

Esta es la organización propuesta, por sesiones, para la implementación de toda la secuencia didáctica:

	Sesión 1	**Sesión 2**	**Sesión 3**	**Sesión 4**	**Sesión 5**	**Sesión 6**	**Sesión 7**
Situación didáctica	Fábrica de juguetes			¡Vámonos de compras!		Collares	
Construcción del cuadro de multiplicación	Act. de inicio	Tabla del 2, 4 y 8	Tabla del 3 y 6	Tabla del 5 y 10	Tabla del 9	Tabla del 7	Propiedades del cuadro
Problemas multiplicativos	Problemas que se plantearon a partir del diálogo con los niños y conforme fue avanzando la sesión.						

Sobre el cuadro de multiplicación como situación transversal

Se propone, con esta situación, que las tablas no se enseñen de manera ascendente de la 1 a la 10 o de manera descendente de la 10 a la 1, sino que se presenten por agrupamientos, como se muestra en la organización de las sesiones. A partir de la situación central que se haya trabajado, en cada sesión se realiza un cierre con el cuadro de multiplicación, con una duración aproximada de media hora. En esta parte de la sesión, se construirán las tablas de multiplicar por medio de problemas verbales relacionados con la situación. En cada sesión el cuadro va cambiando, esto es porque en la primera sesión se muestra sin respuestas ya que sirve para reflexionar sobre su uso y construcción y a partir de la segunda sesión se va construyendo paulatinamente de acuerdo con las tablas que se trabajen. En cada siguiente sesión se muestra con las respuestas de los productos que los estudiantes hayan construido en la sesión anterior.

Las tablas de multiplicar del 2,4 y 8 se trabajan en la sesión 2 para trabajar las relaciones de dobles y mitades y así sucesivamente el resto de lecciones. Finalmente, en la sesión 7 ya se cuenta con el cuadro de multiplicación construido por lo que se procede a seguir identificando propiedades de la multiplicación que les permita a los estudiantes encontrar estrategias para llegar al resultado del problema que se les plantee. La tabla de multiplicar del 1 se puede construir en esta última sesión o cuando los estudiantes hagan uso de reflexiones en torno a ella en alguna sesión anterior.

Entre los conocimientos multiplicativos que los estudiantes pondrán a prueba o construirán se encuentran:

- La relación de mitades y dobles, por ejemplo, para calcular los resultados de la tabla del 4, nos apoyamos sacando el doble de la tabla del 2, o con la mitad de la tabla del 6 nos dan los resultados de la tabla del 3.
- Cálculos utilizando la multiplicación por diez: 6x35= 6x10+6x10+6x10+6x5= 60+60+60+30= 210.
- La propiedad distributiva, se puede utilizar para calcular multiplicaciones que no están memorizadas y hacer una aproximación por medio multiplicaciones parciales, por ejemplo: 9x7, el 7 se descompone en 5+2 y ambos se multiplican por 9, 5x9+2x9 y se suman los resultados.
- La propiedad conmutativa, por ejemplo, en el cuadro de multiplicación con el uso de los ejes: vertical y horizontal puede observarse que es lo mismo 5x4 que 4x5. Por lo que el cuadro se puede construir de manera horizontal o vertical.
- Emplear la división como operación inversa a la multiplicación para resolver problemas, por ejemplo 40 entre 8, se calcularía buscando un número que multiplicado por 8 dé como resultado 40, 8 x __= 40.

6.1.1 Orientaciones didácticas situación: Fábrica de juguetes

<table>
<tr><th colspan="6">Generalidades</th></tr>
<tr><td>Contexto de la situación</td><td colspan="5">Armado de juguetes (bicicletas, carros, tráileres triciclos y trenes) tomando como referencia una “fábrica de LEGO”</td></tr>
<tr><td>Tipos de problemas propuestos</td><td colspan="5">Problemas verbales típicos de valor faltante (multiplicación y división tipo agrupamiento)
Tablas de variación proporcional</td></tr>
<tr><td>Número de sesiones</td><td>Tres</td><td colspan="2">Tiempo sugerido</td><td colspan="2">90 minutos por sesión</td></tr>
<tr><td>Trabajo con cuadro de multiplicaciones</td><td>Sesión 1
Actividad de introducción</td><td colspan="2">Sesión 2
Tablas del 2, 4 y 8</td><td colspan="2">Sesión 3
Tablas del 3 y 6</td></tr>
<tr><th colspan="6">Propósitos</th></tr>
<tr><th colspan="3">Propósitos del maestro</th><th colspan="3">Propósito del estudiante</th></tr>
<tr><td colspan="3">Favorecer la identificación de la relación proporcional entre dobles y mitades para la solución de problemas multiplicativos de valor faltante.
Indagar su conocimiento en torno a la construcción del cuadro de multiplicación.</td><td colspan="3">Calcular cuántas piezas (llantas, vagones o ruedas) necesitan para armar un juguete o calcular cuántos juguetes se pueden armar con determinado número de piezas (llantas, vagones o ruedas).</td></tr>
</table>

Materiales: >Ilustración con información de los juguetes y la cantidad de piezas

>Tablas de variación proporcional con la información de los juguetes

>Cuadro de multiplicación con preguntas.

Sesión 1. Problemas verbales de valor faltante/ Introducción cuadro de multiplicación

Presentar la siguiente imagen:

Consignas:

En grupo vamos a observar la imagen, con base en esta información vamos a identificar cuántas llantas necesitamos para armar los juguetes que nos solicitan o calcular cuántos juguetes podemos armar con la cantidad de piezas que nos dan.

Se presentan, de uno en uno tres problemas típicos de valor faltante. El orden que se recomienda ayuda a que los estudiantes se vayan familiarizando con las tareas planteadas, movilicen sus conocimientos previos, pongan en marcha sus procedimientos base y se animen a hablar de ellos.

Problemas	Posibles procedimientos
1. ¿Cuántas llantas necesitas para armar 5 bicicletas?	**Suma iterada** o **usar directa la multiplicación**.
2. Don Jesús tiene un pedido de 10 carritos, en este momento tiene en su taller 16 llantas ¿para cuántos carritos tiene material por ahora?	**Dividir 16 entre 4** y la respuesta sería el cociente, **por medio de una multiplicación** 4 x **___** = 16 y el número desconocido sería el resultado o **la resta iterada** disminuyendo el divisor del dividendo: 16-4 sucesivamente hasta llegar a cero, y para obtener la respuesta hay que determinar cuántas veces se restó.
3. Para armar 4 tráileres ocupas 32 llantas ¿Cuántas llantas necesitas para armar 8 tráileres?	Mismos procedimientos que en el problema uno, pero además podrían **fijarse en los *<u>factores internos</u>* de la relación proporcional** porque implican calcular el doble de 32 llantas. (32 X 2 o 32+32)

Ejemplos de errores, dificultades e intervenciones posibles

Error al llegar al resultado de la multiplicación 8x8. (problema tres)
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención*: Confrontar procedimientos con resultados diferentes. ¿Por qué decidiste multiplicar 8x8? ¿Alguien realizó otro procedimiento?, ¿cuál fue? ¿Les dio el mismo resultado? ¿Cómo podemos saber cuál es el correcto?
Dificultad para comprender el problema por el dato extra que se da de los 10 carritos (problema dos)
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *I Intervención*: Indagar lo que comprende del problema ¿Qué te pide el problema?, ¿Cuál es la pregunta del problema? ¿Te alcanzan las 16 llantas para los 10 carritos? ¿Para cuántos carritos si te alcanza?

Relación con la situación del Cuadro de multiplicación

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Después de haber resuelto y dialogado los problemas anteriores, se procede hacer un primer acercamiento al cuadro de multiplicación. Se presenta el cuadro sin ninguna respuesta. Consigna: *"Les voy a mostrar un cuadro y ustedes me van ayudar a contestar unas preguntas para conocer un poco más sobre él"*.

Preguntas base (en el diálogo pueden surgir otras):

1. *¿Este cuadro lo habían visto antes?*
2. *¿Lo han utilizado antes? ¿Para qué sirve este cuadro? ¿Saben cómo se llama?*
3. *¿Cómo se acomodan los resultados en las casillas?*
4. *¿Por qué creen que se repiten los números en la parte de arriba (horizontal) y a la izquierda (vertical)?*
5. *¿Qué tablas de multiplicar te sabes? Para ti, ¿cuál es la tabla que sientes que es más fácil de "trabajar"?, ¿por qué?*
6. *Si quisiéramos anotar cuántas llantas se necesitan para armar 8 bicis, ¿dónde lo anotaremos?, ¿por qué?*

Puede ser que algunos de los estudiantes no recuerden cómo usarlo, o que nunca lo hayan trabajado, así que dialogar sobre la manera en la que se puede leer y dónde anotar el producto de las multiplicaciones para construirlo será un proceso.

Recomendaciones para la sesión:

Al identificar que los estudiantes resuelven correctamente el primer problema, proponer otros ejemplos con un rango numérico más alto, por ejemplo, para 7, 10, 12, 15 bicicletas, aumentando de manera gradual.

Entre cada uno de los problemas hay que dejar tiempo para que los estudiantes analicen los problemas y propongan soluciones; ante todo, permitir que realicen los procedimientos que deseen, de manera libre y ampliando nuestra mirada para saber entender lo que están decidiendo. Se recomienda hacer pausa entre cada problema para invitarlos a socializar sus procedimientos.

Sesión 2. Tablas de variación proporcional/ Cuadro de multiplicación: tablas 2, 4 y 8

A lo largo de esta sesión se presentan de una en una, tres tablas de variación proporcional (de bicicletas, carros y tráileres):

Tabla proporcional 1

Juguete: carro	**Llantas necesarias**
1 carro	4 llantas
2 carros	
3 carros	
4 carros	

Tabla proporcional 2

Juguete: bicicleta	**Llantas necesarias**
1 bicicleta	2 llantas
3 bicicletas	
5 bicicletas	
7 bicicletas	

Tabla proporcional 3

Juguete: tráiler	**Llantas necesarias**
1 tráiler	8 llantas
2 tráileres	
3 tráileres	
4 tráileres	32 llantas
6 tráileres	48 llantas
8 tráileres	
10 tráileres	

Cada vez que se muestre una tabla se sugiere dejar un espacio para que los estudiantes las interpreten, deben identificar los datos que se proporcionan: tipo de juguete y cantidad de llantas necesarias para completar la tabla. Al final del trabajo con cada tabla deben de ir a la construcción correspondiente del cuadro de multiplicaciones para dialogar sobre las relaciones de dobles y mitades entre las tablas.

En la segunda y tercera tabla, se propone un orden no consecutivo para presentar la cantidad de juguetes que se tienen que armar. Hay que estar atentos a la posibilidad de que los niños puedan llenar "de corrido" esta tabla como la primera, sin fijarse que no es consecutivo, no hay que darles las respuestas ni decirles que están mal, sino hacerlos pensar con preguntas como:

Observen la tabla, ¿qué datos nos proporciona y cómo podemos resolverla?

¿Está organizada la información igual que en la tabla anterior?

Consigna: De manera individual hay que completar la siguiente tabla que nos ayudará a ver cuántas llantas necesitamos para el armado de... (mencionar el nombre del juguete: bicicletas, carros o tráileres).

Procedimientos que los estudiantes pudieran llevar a cabo:

Tabla 1 (Carro)	**Sobreconteo** (a partir de 4 llantas van aumentando de 4 en 4), **cálculo de dobles** (p.e. para calcular para 8 carros, duplican lo que les salió para 2 carros y luego sacan el doble de 8 que es 16) y **multiplicación directa** (4x2, 4x3…).

Tabla 2 (Bicicleta)	Los mismos que en tabla uno, además aparece el **cálculo parcial** (si se pregunta para 7 bicicletas, se podría descomponer el 7 en 5 y 2 y multiplicar 5x2=10 y sumarlo con el resultado de 2x2=4).
Tabla 3 (Tráiler)	Los mismos y considerar también el **cálculo de dobles** (Con la respuesta de 32 llantas en 4 tráileres se puede calcular o comprobar la cantidad de llantas para 8 tráileres) **y cálculo de mitades** (con 48 llantas para 6 tráileres se puede calcular o comprobar las llantas necesarias para 3 tráileres).

Los procedimientos que no aparezcan a lo largo de la sesión pueden plantearse como contraejemplos y dialogar con ellos al respecto. P.e.: *"Ahora me acuerdo, que un niño me dijo que usaba una estrategia similar, por ejemplo para 8 tráileres, podemos ocupar los resultados de 6 tráileres más 2 tráileres, ¿creen que funciona esta estrategia?, ¿por qué?"*

Relación con la situación del Cuadro de multiplicación

El cuadro de multiplicación se va construyendo paulatinamente, primero la tabla del 4 con ayuda de la tabla de variación proporcional de los carros, Con la tabla de bicicletas se construye la tabla de multiplicar del 2 y con la de tráileres la tabla de multiplicar del 8.

A continuación, se presentan las c*onsignas* que se van a mencionar cuando los estudiantes finalicen cada tabla de variación proporcional:

- *Ya que resolvieron la tabla con las llantas necesarias para armar (mencionar en cada caso el nombre del juguete), van a anotar las respuestas que ya obtuvieron en el cuadro de multiplicación*. Sin decirles dónde anotarlo, p.e. *"¿en dónde crees que iría el resultado de las llantas que lleva un coche? ¿y las llantas de dos coches?"*

Ejemplos de preguntas para reflexionar sobre la **tabla del 4** y llenar las casillas faltantes: Si tienes 20 llantas, ¿cuántos carros puedes armar? Si para armar los 5 carros ocupas 20 llantas ¿Cuántas llantas necesitas para armar 10 carros?

Para construir la **tabla del 2,** nos apoyamos con el armado de las bicicletas y en un contraejemplo: "Jorge me dijo que para encontrar cuántas llantas necesita para armar 8 bicicletas sumó el resultado de 3 y 5 bicicletas ¿qué opinas de su procedimiento?"

Por último, para construir la **tabla del 8** se proponen las siguientes preguntas: Para armar 6 tráileres ocupas 48 llantas, ¿para armar 3 tráileres cuántas llantas ocupas?, ¿recuerdan cuántas llantas ocupan 8 tráileres?, con base en la información de la tabla, ¿cuántos tráileres se pueden armar con 16 llantas?

Sesión 3. Problemas verbales de valor faltante y tablas de variación proporcional/ Cuadro de multiplicación: tablas de multiplicar del 3 y 6

Al inicio se presentan tres problemas verbales y posteriormente dos tablas de variación proporcional. Se incorporan nuevos juguetes: los triciclos y los vagones de un tren.

Se les presenta la siguiente imagen para que puedan identificar que a cada triciclo se le ponen tres llantas y a los trenes le ponen tres vagones o seis ruedas.

Triciclo: 3 llantas

Tren: 3 vagones
1 vagón: 6 ruedas

Consignas: En grupo vamos a observar la cantidad de piezas que necesita cada triciclo y tren para que lo puedan armar. Con base en ello iremos contestando algunas preguntas.

Se comienza con los tres problemas de valor faltante, mostrarlos de uno en uno.

Problemas	Posibles procedimientos
1. En la fábrica de juguetes quieren hacer 7 triciclos, ¿cuántas llantas necesitan?	**Suma iterada** o **usar directa la multiplicación**
2. En la fábrica de juguetes tienen 27 vagones, si a cada tren le ponen 3 vagones, ¿para cuántos trenes alcanzan los vagones?	**Dividir 27 entre 3** y la respuesta sería el cociente, **por medio de una multiplicación** 3 x ___ = 27 o **la resta iterada**: 27-3 sucesivamente hasta llegar a cero, y para obtener la respuesta hay que determinar cuántas veces se restó
3. A cada vagón le ponen 6 ruedas, si un tren tiene 12 vagones ¿cuántas ruedas necesitará el tren?	Mismos procedimientos, además podrían realizar **cálculos parciales** ya que es un número mayor a 10: 12=10+2 por lo tanto 12x 6 = 10x6 + 2x6**.**

Un ejemplo de procedimiento es el siguiente:

Procedimiento: calculó con la mitad de 12 y luego al resultado le sacó el doble.

I: *Platícanos, ¿por qué sumaste dos veces el 36?*

P5: primero multipliqué el 6 (cantidad de ruedas por vagón) por el número que me de la mitad del 12 y luego le sumo la mitad más la mitad.

I: ¿Cómo fue que pensaste en esta estrategia?

P5: Pues, porque no sé multiplicar por 12, pero sí por 6

I: ¿Y tienes memorizado cuánto es 6x6?

P5: Sí, 36. Entonces esa es la cantidad por 6 y faltan las otras 6, por eso sumo.

Después de estos problemas verbales se muestran dos tablas de variación proporcional, primero para el armado de triciclos y después para los trenes.

Consigna: De manera individual hay que completar la siguiente tabla que nos ayudará a ver cuántas llantas necesitamos para el armado de... (mencionar juguete).

Juguete: triciclo	**Llantas necesarias**
1 triciclo	3 llantas
2 triciclos	
3 triciclos	
4 triciclos	12 llantas
5 triciclos	15 llantas
6 triciclos	
7 triciclos	
8 triciclos	
9 triciclos	
10 triciclos	

Juguete: tren	**vagones necesarios**
1 tren	6 vagones
2 trenes	
4 trenes	24 vagones
5 trenes	30 vagones
8 trenes	
9 trenes	
10 trenes	

Procedimientos para todas las tablas: **sobreconteo** (a partir de 3 llantas van aumentando de 3 en 3), **cálculo de dobles** (p.e. para calcular para 10 triciclos, duplican lo que les salió para 5 triciclos carros) y **multiplicación directa** (5x3).

Específicos de tabla dos: **cálculo parcial** (descomponer un número en multiplicaciones más sencillas, p.e. 9 trenes se suman las respuestas de 4 y 5 trenes).

Específicos tabla tres: **cálculo de dobles** (Con la respuesta de 24 vagones calcular lo de 8 trenes) **y cálculo de mitades** (con 24 vagones para 4 trenes se puede calcular o para 2 trenes).

Relación con la situación del Cuadro de multiplicación

Ahora, en esta sesión se van a construir las tablas del 3 (con apoyo de tabla de variación proporcional de triciclos) y del 6 (con la tabla de variación proporcional de trenes). Se anotan los resultados obtenidos en las tablas y se calculan los productos faltantes.

Se sugiere recurrir a las mismas consignas que la sesión pasada. Se muestra el cuadro de multiplicación con los resultados que construyeron en la sesión 2, que son las tablas del 2, 4 y del 8.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3										
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5										
6										
7										
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9										
10										

Para reflexionar sobre la tabla del 3 se hacen las siguientes preguntas:

• *Si tienes 21 llantas, ¿cuántos triciclos puedes armar?*

• *Luisa no se acordaba de cuántas llantas ocuparía para armar 8 triciclos, pero como ella ya había anotado que para 4 triciclos ocupaba 12 llantas, decidió que para calcular para 8 triciclos sacaría el doble de 12 llantas. ¿Por qué Luisa sumó dos veces el 12?*

La primera pregunta sirve para cambiar la incógnita en el problema y evoca a un problema de división, el segundo, es un contraejemplo, y como en la sesión anterior. En esta pregunta, algún estudiante podría identificar que en cuadro de multiplicación ya tiene registrado el resultado en la tabla 3x8 que se construyó en la sesión anterior, y basarse en ello para dar su respuesta. Esto por la propiedad de la conmutatividad de la multiplicación.

Recomendaciones para la sesión:

- Es importante observar cuáles son las estrategias más utilizadas por los estudiantes. Una variable que se puede implementar es que cuando los estudiantes ya “dominen” algún procedimiento (p.e. sumas iteradas) restringir su uso, mencionando que pueden emplear el procedimiento que gusten excepto ese.
- Al resolver las tablas de variación proporcional, se puede fijar la mirada en los procedimientos que llevan los estudiantes al resolverla o se puede mencionar de manera explícita que la resuelvan apoyándose de los resultados que ahí vienen para identificar dobles, mitades o cálculos parciales.

6.1.2 Orientaciones didácticas situación: ¡Vámonos de compras!

<table>
<tr><th colspan="4">Generalidades</th></tr>
<tr><td>Contexto de la situación</td><td colspan="3">Contexto de compra y venta de productos en un tablero tipo oca. Se hace alusión a una tienda de abarrotes y a una tienda de regalos.</td></tr>
<tr><td>Tipos de problemas propuestos</td><td colspan="3">Problemas verbales típicos de valor faltante (multiplicación)</td></tr>
<tr><td>Número de sesiones</td><td>Dos</td><td>Tiempo sugerido</td><td>90 minutos por sesión</td></tr>
<tr><td>Trabajo con cuadro de multiplicaciones</td><td colspan="2">Sesión 4 Tablas 5 y 10</td><td>Sesión 5 Tabla del 9</td></tr>
<tr><th colspan="4">Propósitos</th></tr>
<tr><th colspan="3">Propósitos del maestro</th><th>Propósito del estudiante</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Favorecer, por medio de las intervenciones docentes y la socialización, el desarrollo de diferentes estrategias, entre ellas el cálculo de mitades y dobles y el cálculo parcial, en el cual descomponen las cifras para resolver la multiplicación.
- Indagar los procedimientos multiplicativos que realizan los estudiantes al resolver multiplicaciones de dos cifras por dos cifras.</td><td>Resolver correctamente los problemas para permanecer en la casilla y llegar en primer lugar a la meta o ser quien llegue más lejos.</td></tr>
</table>

Materiales: >Dos *tableros*, uno en cada sesión: Tablero “Tienda de abarrotes” precios entre $10 y $68. Sesión 5. Tablero “Tienda de regalos” precio entre $18 y $300.

>*Ruletas*: una que indica la cantidad de casillas que avanzan: 1 a 6 casillas y otras que indican la cantidad de productos que deben comprar.

>*Dinero*: billetes y monedas que suman $1000: 4 billetes de $100; 5 billetes de $50; 5 billetes de $20; 10 monedas de $10; 20 monedas de $5; 50 monedas de $1.

>Cuadro de multiplicación con preguntas.

Sesión 4. Problemas de valor faltante/ Cuadro de multiplicación: tablas 5 y 10

Se presenta el tablero “Tienda de abarrotes” para que los estudiantes observen los productos que hay y el precio que estos tienen (entre $10 y $68). El juego se desarrolla por turnos en el cuál, de los participantes, uno es el comprador, otro es el vendedor y los otros participantes observan y comentan los procedimientos de sus compañeros.

Posteriormente, se mencionan las consignas y se presentan las dos ruletas que sirven para indicar cuántas casillas se avanza y qué producto hay que comprar.

Consignas:

- En grupo jugaremos a que vamos a una tiendita en la que compraremos. Para saber qué producto es y cuántos productos comprar será necesario girar dos ruletas: una indica cuántas casillas avanzan y otra, cuántos productos tienen que comprar.
- Después de haber girado las dos ruletas y avanzar las casillas, deben determinar cuánto pagarán. Pueden realizar cualquier procedimiento.
- Nos organizaremos para ver quién será el cajero. El comprador deberá decir cuánto tiene que pagar y el cajero verificará si la cantidad es la correcta.
- Paguen con la cantidad exacta o más cercana al total. El cajero dará el cambio en caso de que sea necesario y el comprador debe comprobar que sea correcto.
- Ganará el primero que llegue a la meta o, si se acaba el tiempo, llegue más lejos.

Tablero "Tienda de abarrotes"

Ruleta: ¿Cuántas casillas avanzas? *Ruleta*: ¿Cuántos productos comprar?

Se presentan a continuación algunos ejemplos de problemas típicos de valor faltante que pueden tener lugar durante el juego. Así como en la situación anterior, se recomienda hacer pausas entre cada problema para invitarlos a dialogar sobre sus procedimientos.

Problemas	
1. Producto que compró: 8 mayonesas a $30, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $240
2. Producto que compró: 9 refrescos fanta a $12, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $108
3. Producto que compró: 4 submarinos a $23, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $92
4. Producto que compró: 10 yogures a $10, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $100
5. Producto que compró: 10 paquetes de yogur a $55, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $550

Los procedimientos que los aprendices pudieran llevar a cabo para los primeros cuatro problemas son la **suma iterada** o **usar directa la multiplicación**.

En el problema 4, al recurrir a la suma iterada de dos submarinos, se puede identificar el **cálculo de dobles** para obtener el resultado de 4 submarinos.

Además, para los problemas 1, 4 y 5 se pueden **multiplicar los factores y agregar el cero.** En los problemas dos y tres se podrían presentar las **multiplicaciones parciales (**se descomponen los números de dos cifras para realizar multiplicaciones más sencillas).

Ejemplos de errores, dificultades e intervenciones posibles

Error al mencionar resultados memorizados (8 mayonesas a $30)
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención*: Explicar los procedimientos llevados a cabo: ¿Cómo llegaste a ese resultado?, ¿cuánto es 8x3? *Intervención*: Confrontar procedimientos con resultados diferentes: ¿De qué manera podemos comprobar el resultado? ¿Les dio el mismo resultado?
Error al llevar el sobreconteo después de varias sumas iteradas (9 refrescos fanta a $12)
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención*: Desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas: ¿Crees que ir registrando lo que llevas sumado te puede ayudar?
Dificultad para multiplicar con números mayores a diez. (9 refrescos fanta a $12) (4 submarinos a $23) (10 yogures a $10) (10 paquetes de yogur a $55)
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención*: Desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas: Platícanos, ¿por qué agregaste el cero al final? ¿Hay alguna estrategia para multiplicar con esos ceros?

Relación con la situación del Cuadro de multiplicación

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5										
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7										
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9										
10										

Se muestra el cuadro con los resultados de las sesiones anteriores y se les solicita que anoten las respuestas en los espacios para la tabla del 5 y del 10 por medio del procedimiento que ellos prefieran.

Se toma como pretexto las monedas de $5 y de $10 para establecer relaciones de dobles y mitades, y seguir trabajando factores multiplicados en cero. Se plantean algunas preguntas como las siguientes:

- *Vas a la tienda y compras unos chicles Hubba Bubba, ¿cuánto cuestan? (cuestan $25), ¿con cuántas monedas de $5 vas a pagar?*
- *Por un paquete de papel higiénico ¿cuánto pagas? (pagan $50), ¿cuántas monedas de $10 necesitas?*
- *Les voy a dar 11 monedas de $5, ¿cuánto dinero tienes? díganme, ¿qué producto cuesta exactamente la cantidad que les di?*

Primera pregunta: busca que identifiquen en el cuadro de multiplicación la respuesta, podrán observar en la tabla del 5 el producto de 25, relacionando en el eje horizontal los $5 y el eje vertical la cantidad de monedas. Esto favorece la relación inversa de la multiplicación con la división.

Segunda pregunta: busca que los estudiantes identifiquen en el cuadro de multiplicación la relación que hay entre la multiplicación y la división. Además, con la intervención de reflexionar sobre qué regla sirve para calcular multiplicaciones por 10, 100 o 1000.

Tercera pregunta: Aunque el resultado no se puede anotar en el cuadro de multiplicación porque en los ejes, vertical y horizontal, llega hasta la tabla del 10, permite identificar en dónde iría el resultado, además de trabajar las multiplicaciones parciales con la descomposición del 11, en 6+5, entre otros.

Recomendaciones para la sesión:

- Si se identifica que un problema es complejo para un estudiante, se puede recurrir a la ventana donde se muestra el dinero y sugerirle al estudiante su uso.
- En la ruleta de “cuántos productos comprar”, se recomienda ir eliminando la cantidad que cae, para permitir otras cantidades y posibilidades de resolución.

Sesión 5. Problemas verbales de valor faltante/ Cuadro de multiplicación: tabla del 9

En esta sesión se cambia el tablero por el de una “Tienda de regalos”, aumenta el rango numérico. Los colores de las casillas, verdes y azules, van a influir en la cantidad de productos que los participantes deberán comprar (hay una ruleta por color de casilla).

Tablero *“Tienda de regalos”*

Se usan las mismas consignas que en la sesión 4, se agrega la nueva condición de las dos ruletas que indican la cantidad de productos que deberán comprar de acuerdo al color de la casilla que caigan.

Consigna extra:
• De acuerdo al color de la casilla giraremos otra ruleta que indica cuántos productos tienen que comprar.

Ruleta: ¿Cuántas casillas avanzas? *Ruleta*: casillas verde *Ruleta*: casillas azules

Se presentan a continuación algunos ejemplos de problemas típicos de valor faltante que pudieran tener lugar durante la implementación.

Problemas	
1. Producto que compró: 8 moños a $25, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $200
2. Producto que compró: 16 moños a $25, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $400
3. Producto que compró: 22 carritos a $22, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $484
4. Producto que compró: 25 moños a $25, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $625
5. Producto que compró: 25 diademas a $35, ¿cuánto pagarás?	Total que se pagó: $875

Uno de los procedimientos que sigue apareciendo en la **suma iterada**, pero se espera que con el aumento del rango numérico los estudiantes busquen otras estrategias ya que esta se vuelve muy extensa por la cantidad de números que deben repetir.

Entre las primeras estrategias se encuentra la **suma por agrupaciones**, esta la podemos encontrar en los problemas uno, dos, cuatro y cinco. Esto es porque el número 25 al sumarlo dos veces nos da 50 y al calcular el doble, tenemos que con 4 piezas se paga $100.

Las **multiplicaciones parciales,** junto con el **algoritmo convencional** de la multiplicación surgen como procedimientos que permiten hacer más económica la multiplicación.

A continuación, se muestra un ejemplo de intervención para el problema 2: 16 moños a $25, para que el participante ante la dificultad de operar con esta cantidad *desarrolle una estrategia base*, y explore por medio de las agrupaciones el cálculo del doble:

I: Dime, con $100 ¿cuántos moños se pueden comprar?

P6: mmm 4

I: Si tu compañera quiere comprar 16 moños, ¿cuánto va a pagar? ¿Puedes utilizar la información que tenemos para calcularlo?

P6: Lo intentaré, sumo de cuatro en cuatro. Con otro billete de $100, son $200

Con $300 cuatro moños más. Ahora si tengo 12, 16… le pagaría con otro billete de $100.

Y del moño que habré pagado son $400

Ejemplos de errores, dificultades e intervenciones posibles

En los cinco problemas se pueden encontrar los siguientes errores y dificultades.

Error al llevar el sobreconteo después de varias sumas iteradas
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: ¿Crees que puedas resolver esto de manera diferente? ¿Con $100 cuántos productos puedes comprar? (favorece las agrupaciones y a partir de aquí se puede calcular con dobles)
Dificultad para multiplicar con números mayores a diez
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: ¿Quieres intentar otra manera de resolverlo? Proponer un contraejemplo: Un niño me dijo que para calcular cuánto debía pagar por 25 diademas a $35 lo que hizo fue descomponer 25 en 20+5 y 35 en 30+5 y luego fue multiplicando, ¿cómo crees que multiplicó estos números?
Dificultad para operar con el algoritmo convencional de la multiplicación
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención:* Disminuir las dificultades a las que se enfrentan ¿Qué hiciste aquí? (señalando el procedimiento que se quiere que el alumno explique) ¿Cómo hiciste esta operación? (se señala el resultado que está incorrecto para guiar al estudiante a identificarlo)

Relación con la situación del Cuadro de multiplicación

En esta sesión se construirá la tabla del 9. A diferencia de la sesión anterior que primero construye el cuadro de multiplicación y luego responden las preguntas, ahora, primero se presentan los problemas que permiten construir el cuadro de multiplicación con los productos de la tabla del 9.

Se menciona la c*onsigna: "Analicen y respondan las siguientes preguntas, registren en el cuadro de multiplicación sus respuestas. En la tienda de regalos tenemos que cada pluma cuesta $18, el día de hoy tenemos un descuento, cada pluma va a costar $9."*

De este planteamiento se trabajan 3 diferentes preguntas:

- *¿Cuánto van a pagar ustedes por 3 plumas?*
- *¿Cuánto van a pagar por 5 plumas?, si pagamos con monedas de $5, ¿cuántas monedas de $5 daríamos?*
- *Si la maestra les da $54, ¿cuántas plumas pueden comprar?*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7										
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9										
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Primera pregunta: algunos estudiantes pueden identificar que en el cuadro ya tienen el registro de 3x9 y 5x9, esto se debe por la propiedad conmutativa.

Segundo problema: observar la relación de la multiplicación como operación inversa a la división. Para esto deben haber calculado cuánto pagarán, en este caso serán $45. Luego buscar un número que multiplicado por 5 de 45, 5x___= 45.

Tercer problema: los estudiantes pueden recurrir a dividir 54 entre 9 y el resultado es el cociente, se pueden apoyar con las respuestas del cuadro o utilizando la multiplicación como operación inversa 9x__=54.

Se espera que los estudiantes identifiquen que el cuadro de multiplicación es una herramienta que además de registrar multiplicaciones también sirve para dividir.

Recomendaciones para la sesión:

- Si se identifica que un problema es complejo para un estudiante se puede disminuir el rango numérico y mencionar que la tienda acaba de iniciar unos descuentos.
- El dinero, en esta sesión, puede que no sea suficiente para pagar si es que le tocará comprar muchos productos con un precio alto, por lo que, a manera de préstamo, es conveniente prever unos billetes que pudieran necesitar los estudiantes.

Recomendaciones para la implementación virtual

- Compartir pantalla para que los participantes vean la ruleta cuando va girando.
- En la diapositiva donde va el dinero de cada participante permitir que ellos lo muevan. Esto sirve para hacer el pago y en caso necesario darle cambio. Se puede ir borrando los billetes y monedas que han pagado.

6.1.3 Orientaciones didácticas situación: Collares

<table>
<tr><th colspan="5">Generalidades</th></tr>
<tr><td>Contexto de la situación</td><td colspan="4">Contexto de una boutique en donde se diseñan collares, cada modelo de collar tiene diferente cantidad de perlas. Se manejan tres colores de perlas: azules, verdes y rojas.</td></tr>
<tr><td>Tipos de problemas propuestos</td><td colspan="4">Tablas de variación proporcional (multiplicación y división tipo reparto)</td></tr>
<tr><td>Número de sesiones</td><td>Dos</td><td colspan="2">Tiempo sugerido</td><td>90 minutos por sesión</td></tr>
<tr><td>Trabajo con cuadro de multiplicaciones</td><td colspan="2">Sesión 6
Tabla del 7</td><td colspan="2">Sesión 7
Propiedades del cuadro</td></tr>
<tr><th colspan="5">Propósitos</th></tr>
<tr><th colspan="4">Propósitos del maestro</th><th>Propósito del estudiante</th></tr>
<tr><td colspan="4">Observar los diferentes procedimientos que emplean los estudiantes al calcular los valores faltantes en una tabla de variación proporcional, en la cual puedan fortalecer estrategias como el cálculo parcial, el cálculo de dobles y mitades.
Propiciar el desarrollo de primeras nociones sobre las relaciones de los factores internos y los factores externos de manera implícita.</td><td>Calcular las perlas que necesitan para formar diferentes collares o para identificar las perlas necesarias en un collar.</td></tr>
</table>

Materiales: >Se presentan seis tablas de variación proporcional, tres en cada sesión.

>Cuadro de multiplicación con preguntas.

Sesión 6. Tablas de variación proporcional / cuadro de multiplicación: tabla del 7

Se presenta la siguiente imagen, mencionando que en una boutique se están diseñando collares y partir de ella se comienza a dialogar con los estudiantes.

Modelo
14 azules
8 verdes
6 rojas

Con base en la imagen se les pregunta: si este modelo tiene 14 perlas azules, ¿cuántas perlas azules necesitaremos para hacer dos collares? Luego se menciona que para saber cuántas perlas necesitan para armar varios collares se anotan los datos en tablas para organizar la cantidad de perlas por color y la cantidad de collares que se quieren hacer.

Posteriormente, se mencionan las consignas.

Consignas:

- En una boutique están diseñando collares, tienen varios modelos y cada modelo tiene una cantidad diferente de perlas.
- Para saber cuántas perlas necesitan para armar varios collares han anotado los datos en tablas para organizar la cantidad de perlas por color que usa cada modelo.

Se muestra de una en una, tres tablas de variación proporcional (modelo 1, 2 y 3). En ellas se pueden trabajar el cálculo de dobles, mitades y de multiplicaciones parciales. Las tablas son las siguientes:

Modelo 1	
1 collar	***2 collares***
2 azules	4 azules
5 verdes	___ verdes
3 rojas	___ rojas

Modelo 2	
1 collar	***4 collares***
3 azules	___ azules
4 verdes	16 verdes
6 rojas	___ rojas

Modelo 3	
1 collar	***7 collares***
2 azules	___ azules
5 verdes	35 verdes
7 rojas	___ rojas

Las tres tablas presentan la incógnita en el mismo lugar, proporcionan el valor unitario de perlas para un collar y va aumentando de manera progresiva el rango numérico. Al terminar con el modelo 3, los estudiantes se apoyan con él para encontrar regularidades, entre ellas el cálculo parcial.

Los procedimientos de los estudiantes para el Modelo 1 pueden ser: **sobreconteo** (a partir de 4 perlas azules ir aumentando de 2 en 2), **cálculo de dobles** (p.e. duplican la cantidad de 5 perlas verdes: 5+5) y **multiplicación directa** (5x2 y 3x2).

Estos procedimientos pueden también presentarse en el Modelo 2: **sobreconteo** (a partir de 16 perlas verdes ir aumentando de 4 en 4), **cálculo de dobles** (p.e. ya que tengan la cantidad de perlas azules para 4 collares se duplican la cantidad 12+12), **multiplicación directa** (3x4 y 6x4) y además la **suma iterada** para las perlas azules (3+3+3+3).

Para el Modelo 3, pueden recurrir a los procedimientos anteriores y considerar también el **cálculo parcial (**al obtener la cantidad de perlas azules para 7 collares, se suman con las 35 perlas verdes: 14+35 dan el total de 49 perlas rojas)

Ejemplos de errores, dificultades e intervenciones posibles

Error al llevar el sobreconteo después de varias sumas iteradas
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención*: Desarrollar una estrategia base cuando se proponen otros problemas. ¿Crees que ir registrando lo que llevas sumado te puede ayudar? *Contraejemplo*: Un niño me dijo que para calcular las 7 perlas rojas para 7 collares se fijó en el resultado de 35 perlas, ¿por qué crees?.... Si con 35 perlas hacemos 5 collares, ¿cuántos collares hacen falta para hacer 7?.... si sumamos la cantidad de perlas de 5 y 2 collares, ¿cuántas perlas nos da?
Error al mencionar resultados memorizados (6 perlas rojas en 4 collares) (7 perlas rojas en 7 collares)
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención*: Explicar los procedimientos llevados a cabo. ¿Cómo llegaste a ese resultado?, ¿cuánto es 6x4? *Intervención*: Confrontar procedimientos con resultados diferentes. ¿De qué manera podemos comprobar el resultado?, ¿Les dio el mismo resultado?
Dificultad para identificar las relaciones en la tabla
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención:* Indagar lo que comprende del problema. ¿Cómo le explicarías a un compañero cómo está organizada la tabla a otro niño? ¿Qué datos nos muestra la tabla?, ¿qué nos hace falta completar en la tabla?

Relación con la situación del Cuadro de multiplicación

Después de haber resuelto las tres tablas de variación proporcional se registra en el cuadro de multiplicación la tabla del 7.

Se menciona la consigna: "*Apóyate de las respuestas que anotaste en el modelo 3 y escribe en el cuadro de multiplicación los resultados que obtuviste*". Después de que los estudiantes registren en el cuadro de multiplicación los resultados de la tabla del 7, queda de la siguiente manera:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14			35		49			
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Posteriormente se realizan dos preguntas, la primera es para que retome la estrategia del cálculo parcial y calcular los productos faltantes y la segunda es para emplear el cuadro de multiplicación para apoyarse y resolver la pregunta:

> *Se acuerdan que un niño me comentó que para construir la tabla del 7, se fijó en los resultados de las tablas del 2 y del 5, me dijo que para calcular lo de 7x7 sumó 35+14, ¿por qué sumó esos resultados?, ¿podemos utilizar su estrategia para calcular 7x9?, ¿cómo?*

La intención de este contraejemplo es proponer a los estudiantes la estrategia del cálculo parcial, que permite recurrir a resultados conocidos, que ya están además registrados en el cuadro. De esta manera los estudiantes exploran el cuadro de multiplicación.

Cuando está construida la tabla del 7 se menciona la segunda pregunta:

> *Apóyate en el cuadro de multiplicación para analizar y responder la siguiente pregunta: Si tenemos 42 perlas verdes, ¿cuántos collares podemos hacer si utilizamos 7 perlas verdes por collar?*

El cuadro de multiplicación permite observar la relación de la multiplicación como operación inversa a la división. Observarán el producto de 42 en la tabla del 7, ya sea en el eje vertical u horizontal, identificando que el 7 es la cantidad de perlas que se pone en cada collar, por lo que el otro eje proporciona la información que se pueden realizar 6 collares.

Recomendaciones para la sesión:

- Al comenzar la sesión, es importante mostrar la imagen con el collar, que los estudiantes identifiquen los tres colores diferente y hacerles preguntas específicas de cuántas perlas se ocuparían para hacer más collares.
- Como se mencionó al inicio, se debe cuidar el cálculo numérico es muy importante. Esta situación se puede extender con diferentes modelos que tengan mayor número de piezas o que se solicite realizar más collares. Esto, siempre y cuando se identifique que los estudiantes comprenden lo que hay que realizar y de esta manera pongan en marcha otros procedimientos.

Sesión 7. Tablas de variación proporcional / propiedades del cuadro de multiplicación

Con el mismo contexto que en la sesión anterior, se muestran de uno en uno los modelos. En ellos se trabaja el cálculo de dobles, mitades y uso de la división. Las tablas son:

Modelo 4	
1 collar	***5 collares***
5 azules	25 azules
6 verdes	___ verdes
12 rojas	___ rojas

Modelo 5	
1 collar	***2 collares***
6 azules	___ azules
7 verdes	14 verdes
___ rojas	10 rojas

Modelo 6	
2 collar	***4 collares***
4 azules	8 azules
6 verdes	___ verdes
12 rojas	___ rojas

Cada modelo presenta una variable diferente, por lo que se espera que los estudiantes diversifiquen sus procedimientos. Se recuerdan las consignas de la sesión anterior y se agrega una especificación para los problemas de división.

Consignas:

- Para saber cuántas perlas necesitan para armar varios collares han anotado los datos en tablas para organizar la cantidad de perlas por color que usa cada modelo.
- Recuerden que no debe sobrar ni faltar ninguna perla y todos los collares deben tener la misma cantidad de perlas que el collar modelo.

Los procedimientos para el Modelo 4 pueden ser: **sobreconteo** (a partir de 25 perlas azules ir aumentando de 5 en 5), **cálculo de dobles** (p.e. duplican la cantidad de 30 perlas verdes: 30+30), **multiplicaciones parciales**, en las cuales se descomponen los números de dos cifras (el 12 se descompone en 10+2 y luego se multiplica 10x5+2x5) y **multiplicación directa** (6x5 y 12x5).

En el Modelo 5 se puede realizar la **multiplicación directa** (6x2) o la **suma iterada** (6+6) para las perlas azules. Para las perlas rojas, se cambia el lugar de la incógnita, en dado caso de que un estudiante tenga dificultad se puede realizar el dibujo de dos cintas que simulen los collares y el estudiante **reparta uno a uno** las 10 perlas, pueden **calcular la mitad** de 10 perlas, **dividir** 10 entre 2 y la respuesta sería el cociente o por medio de una **multiplicación** 2x___=10.

Por último, en el Modelo 6 se puede **calcular el valor unitario** de las perlas al dividir la cantidad entre 2 y luego **multiplicarlo** por la cantidad de collares que se pide, en este caso por 4 o **calcular el factor constante de proporcionalidad**, en este caso el estudiante identifica que 4 collares es el doble de 2 por lo que duplican la cantidad

Ejemplos de errores, dificultades e intervenciones posibles

Error al calcular las perlas verdes y rojas por no contemplar que se da la cantidad de perlas para dos collares. Modelo 6: ¿Cuántas perlas verdes y rojas necesitamos para hacer 4 collares?
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención:* Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema: ¿Cómo podríamos saber cuántas perlas azules lleva un solo collar? *Intervención:* Confrontar procedimientos con resultados diferentes ¿Por qué crees que tu compañero anotó que en 4 collares se ocupan 24 perlas verdes?
Dificultad para identificar el procedimiento para realizar la división tipo reparto. *Modelo 5: ¿Cuántas perlas rojas necesitamos para hacer sólo un collar?*
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención:* Indagar lo que comprende del problema. ¿Cómo van a calcular las perlas rojas para un collar? *Intervención:* Socialización de procedimientos. ¿Cómo le explicarías a otro niño cómo calculaste la cantidad de perlas rojas para 1 collar? *Intervención:* Llevar al límite un procedimiento. Oye, y si en lugar de tener 10 perlas rojas en dos collares, tuviéramos 16, ¿cuántas perlas habría en un collar?, ¿por qué?
Dificultad para multiplicar por diez. *Modelo 4: ¿Cuántas perlas rojas necesitamos para hacer cinco collares?*
Preguntas que pueden ayudar como intervenciones: *Intervención:* Indagar conocimientos base para enfrentarse a la pregunta o problema ¿Qué estrategias usas cuando debes multiplicar con números mayores a 10? *Intervención:* Socialización de procedimientos ¿Cómo le explicarías a otro niño cómo calculaste la cantidad de perlas rojas para 5 collares?, ¿qué estrategia usaste? (modelo 4)

Relación con la situación del Cuadro de multiplicación

La tabla ya está construida por lo que se presentan problemas para trabajar algunas de las propiedades y estrategias de resolución. Se muestra, un fragmento del modelo 5 [como se presenta en la imagen].

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	32	45	54	56	64	72	80
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Modelo 5	
1 collar	2 collares
_____ rojas	10 rojas

Se menciona la *consigna*:

- Con ayuda del cuadro de multiplicación resuelve el siguiente problema:
- *¿En qué fila o columna te fijarías para calcular cuántas perlas rojas lleva un collar si tenemos 10 perlas rojas en 2 collares? Márcalo en el cuadro de multiplicación.*

Esta pregunta favorece que los estudiantes identifiquen en el cuadro de multiplicación la relación entre los ejes y los productos que se tienen, así como la multiplicación como operación inversa a la división.

Se presenta otro cuadro de multiplicación en donde se observa que está marcada una diagonal con color verde [como se presenta en la imagen] y se dan las siguientes consignas:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	32	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Marquen en el cuadro de multiplicación los círculos que les piden:

Pon un círculo rojo en los resultados de las multiplicaciones de 5x2 y 2x5.

Ahora pon un círculo verde en los resultados de las multiplicaciones de 8x4 y 4x8.

Por último, pon un círculo azul en el resultado de la multiplicación de 6x6.

Ya que los participantes terminan de marcar los círculos en el cuadro de multiplicación se realizan las siguientes preguntas:

- *¿Qué similitud o diferencia encuentras entre los resultados que están de un lado de la diagonal con las del otro lado?*
- *¿Por qué solo pusimos un círculo azul?*
- *¿Por qué creen que en ambos lados de la línea diagonal se repiten las cantidades de los productos?*

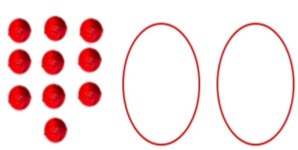
Esta actividad propone identificar la propiedad conmutativa a través de preguntas e indicaciones que deben seguir los estudiantes. La diagonal verde sugiere que el cuadro se divide en dos.

Recomendaciones para la sesión:

- Se pueden incluir otros modelos con la variable de calcular las perlas en cada collar o manejar tablas sin dar el valor unitario de un collar, este último hay que introducirlo a medida que los estudiantes vayan comprendiendo cómo obtener el valor unitario.

Recomendaciones para la implementación virtual

- En la implementación virtual no se puede manejar material concreto que permita manipular y armar los collares pero se pueden dibujar círculos de colores en Jamboard que permitan una mejor visualización.



- Para el modelo 5 se puede proporcionar 10 perlas rojas y dos collares vacíos para que los estudiantes puedan distribuirlos en partes iguales y registrar la cantidad de perlas que ocupa cada collar.

Con esta situación se termina la secuencia didáctica propuesta por las tres situaciones antes mencionadas y de manera transversal, la construcción del cuadro de multiplicación.

Capítulo 7. Conclusiones

El presente estudio ha dado cuenta del desarrollo de una investigación centrada en aportar a la construcción de conocimientos matemáticos en torno a la multiplicación, a través de una secuencia didáctica.

Para presentar las conclusiones, el capítulo está organizado en seis apartados que pretenden responder a las preguntas de investigación.

7.1 La construcción de conocimientos matemáticos multiplicativos en una secuencia didáctica

Dentro de la construcción e implementación de la secuencia didáctica, se pudo constatar que hay elementos que favorecen el aprendizaje y permiten un mayor acercamiento a la comprensión del problema y otros que favorecen, en específico, a la construcción de conocimientos multiplicativos. Se enlistarán estos elementos conforme a lo que se identificó en la implementación:

- El *contexto* en el que se plantean las situaciones: una fábrica de juguetes, una tiendita para comprar productos, o elaborar collares, son actividades lúdicas, que como refirió González, Molina y Sánchez (2014) son parte de una metodología de aprendizaje. El juego permite a los estudiantes interesarse y aprender en el aula y esto se observó cuando los estudiantes se emocionaban al avanzar en el tablero de ¡Vámonos de compras!, o al armar varios juguetes y collares. Además ellos querían proponer una cantidad diferente para armar, en el caso de los juguetes, o en la cantidad de perlas que podría tener otro collar. Esto los hace involucrarse en la situación y estar más al pendiente de lo que sucede. Sin embargo, también se reconoce que una limitación es el tiempo, el espacio y la organización del grupo para realizarlos, por lo que el docente debe gestionar los recursos con los que cuenta.
- El *uso de dinero.* Aún con las complejidades que este recurso puede presentar, en lo sucedido en estas implementaciones permitió a los estudiantes a disminuir sus dificultades, comprobar sus resultados y probar otros procedimientos. David Barba y Cecilia Calvo (2013) señalan que el uso del dinero sirve como un modelo en la

enseñanza de las matemáticas y que aporta un acercamiento al entorno inmediato, abordando situaciones que ellos van a vivir, o ya han vivido, en su realidad familiar y social al hacer la compra de productos. Tal como lo plantean estos autores, algunas intervenciones permitieron hacer uso del dinero como una herramienta para seguir indagando respecto a sus procedimientos, como:

- ✓ Apoyo para transitar dificultades como visualizar el pago de cantidades grandes por varios productos, por ejemplo, un participante llegó a comentar que con $24 podía comprar 2 carros a $22. Gracias a esta manipulación el estudiante pudo identificar que con esa cantidad no podía comprar más de un carro e identificó que lo que hacía era sumar las unidades de los dos 22 y las decenas no las operaba.

- ✓ Apoyo para transitar dificultades como visualizar la cantidad de dinero que requieren para comprar varios artículos, por ejemplo, problemas en donde se pregunte "¿Con un billete de $100 cuántos moños de $25 puedes comprar?", esto favorece la agrupación de cantidades y las relaciones proporcionales de dobles.

- ✓ Resolver problemas de división. Por ejemplo, si tienes $50 y lo quieres cambiar por monedas de $10, ¿cuántas monedas te tengo que dar? o ¿Si te doy $54 cuántas plumas de $9 puedes comprar?

- Las *tablas de variación proporcional* y el *cuadro de multiplicación* permitieron mostrar de manera explícita las relaciones y propiedades de la multiplicación. Los participantes resolvieron las tablas de variación proporcional tanto de los juguetes, como de los diferentes modelos de collares, y el cuadro de multiplicación por medio de diversos procedimientos que permitían identificar la relación de dobles, mitades, cálculos parciales y la conmutatividad con mayor comprensión gracias a la organización de la información.

En la secuencia didáctica que se propone en esta investigación se coincide con lo que se plantea en la Enseñanza de la multiplicación (Isoda y Olfos, 2011) y el Programa de estudios de tercer y cuarto grado (SEP, 2011) en los cuales sugieren la exploración de distintos significados de la multiplicación como la relación proporcional entre medidas, resolver los problemas por medio de la descomposición de uno de los factores, la conmutatividad y la identificación del aumento y decremento constante en las tablas. Además es importante mencionar que actualmente, en el libro de matemáticas de segundo grado (SEP, 2017) se está proponiendo que los estudiantes, por medio de diversos procedimientos, no necesariamente la multiplicación, sino otros no convencionales, reconozcan, tanto en las tablas de variación proporcional como el cuadro de multiplicación, las relaciones de dobles y mitades entre las tablas del 2,4 y 8; 3 y 6; y 5 y 10; el aumento y decremento constante entre las tablas del 9 y del 10 y la propiedad conmutativa en la multiplicación.

Lo acontecido en la implementación afirma las potencialidades que tienen, tanto las tablas de proporcionalidad como el cuadro de multiplicación. Éstas son una gran herramienta que pueden tener una mayor presencia dentro del salón de clases y estudiarlas de manera más profunda para identificar valiosas propiedades de la multiplicación y cómo están estrechamente ligadas a conocimientos sobre las relaciones proporcionales. Pero cabe preguntar, si a pesar de lo que ya se propone actualmente en el libro de segundo grado (SEP, 2011) y lo que se ha propuesto en otros países y otros autores los docentes realmente están promoviendo en grados superiores, como tercer y cuarto grado, que los estudiantes utilicen estas relaciones y propiedades como estrategias para resolver problemas.

Aunado a lo anterior, es importante señalar que se mostró un mejor desempeño por parte de los participantes para resolver los problemas multiplicativos y utilizar diferentes y pertinentes procedimientos para llegar al resultado. Entre los primeros procedimientos que se identificaron se encuentran la suma iterada y la multiplicación directa. Fue a partir del diálogo que se daba durante las sesiones, cuando compartían sus estrategias y comprendían las relaciones y propiedades de la multiplicación que sus procedimientos fueron diversificándose, utilizando otras estrategias.

Lo anterior implica un largo camino de trabajo por parte de los docentes. Por una parte, se requiere proponer situaciones en las que los estudiantes identifiquen estas relaciones y las puedan utilizar con mayor sentido, respecto a cuándo es más conveniente apoyarse de una multiplicación directa, o cuándo calcular por medio de dobles o mitades, o realizar multiplicaciones parciales para llegar al resultado o usar la conmutatividad para sumar iteradamente o multiplicar. Por otra parte, el docente debe realizar el análisis previo de los problemas que les presente a los estudiantes. Esto quiere decir, que el maestro debe anticipar los posibles procedimientos, errores y dificultades a los que se enfrentarán los estudiantes y considerar las intervenciones que realizará para favorecer la comprensión del problema y que el estudiante justifique la elección del procedimiento que llevará a cabo.

7.2 Las decisiones metodológicas: características de problemas multiplicativos y las variables didácticas

El rediseño de las situaciones didácticas para construir la secuencia didáctica resultó ser un reto que se pudo enfrentar gracias a los referentes teóricos-metodológicos como la Teoría de Campos Conceptuales y su clasificación de problemas multiplicativos, así como la Teoría de Situaciones Didácticas que permitió definir algunas variables didácticas que se ponen en juego durante la implementación, en concreto estas variables son: el lugar de la incógnita, el rango numérico, el contexto, la presentación de la información y las magnitudes.

Con esto, se pudo identificar qué variables son las que permiten realizar cambios en los procedimientos de los estudiantes:

- El ***lugar de la incógnita***. Los primeros problemas que se presentaron evocaban a resolverse con una multiplicación -regularmente recurrían a la suma iterada-, esto no presentó dificultad en los participantes, siempre y cuando el rango numérico no aumentara. Pero al cambiar la incógnita de lugar y sugerir un problema que se resolviera por medio de una división presentó un reto para los estudiantes, ya que el procedimiento que utilizaban tenía que cambiar.

  Al final de la secuencia se propone otro cambio en el lugar de la incógnita, en el cual no se proporciona el valor unitario, pero la ausencia de este valor no causó mucha dificultad, ya que los participantes resolvieron el problema por medio de las razones externas, al calcular el factor constante de proporcionalidad. Por esta razón, en futuras implementaciones de la situación de Collares, a partir del propósito de lo que se quiera estudiar se considera conveniente bloquear esta estrategia y que los estudiantes tengan que calcular el valor unitario.

- El ***rango numérico*** nos permitió darle gradualidad a los problemas. Al inicio de cada situación se comenzaba con un rango numérico bajo y posteriormente iba aumentando el cálculo relacional con la intención de poner al límite sus procedimientos base y que buscarán hacer evolucionar sus estrategias hacía algunas más económicas. Esto es, que cuando el rango numérico es bajo, se puede complejizar el cálculo relacional por ejemplo moviendo la incógnita de lugar.
- El ***contexto*** demostró jugar un rol importante, ya que las tres situaciones centrales se considera que tienen contextos significativos los cuales demostraron ser útiles para referir a lo que tenían que realizar. Además, generalmente, se trabaja en el aula con términos numéricos, en los cuales sólo se pregunta, ¿Cuánto es 6 por 3?, en esta propuesta se considera relevante el contexto ya que permite hacer preguntas como ¿Cuántas ruedas pondrás en 6 triciclos?
- La ***presentación de la información*** permitió variar las reflexiones y la manera en la que los estudiantes se aproximan por medio de diversos procedimientos a la resolución. Esto es, porque en cada representación los datos están ordenados de manera diferente, se proponen imágenes para apoyar la información o las tablas de variación proporcional. Además de que permite que los aprendices reconozcan que un problema puede presentarse de varias formas.
- La relación entre las ***magnitudes*** que se presentaron y se mantuvieron en las dos primeras situaciones centrales fueron de *distinta naturaleza*, por un lado en ¡Vámonos de compras! a cada producto le corresponde un precio, y en Fábrica de juguete por cada juguete le corresponde una cantidad de llantas, pero en Collares, por cada cantidad de perlas en un collar se tendrían la cantidad de perlas en la cantidad de collares que se solicita, por lo que se tienen dos *magnitudes de la misma naturaleza* (Block *et al*., 2015).

La implementación en modalidad virtual a partir de la contingencia del COVID-19 fue una decisión metodológica que permitió continuar con la investigación y poder acercarnos a los estudiantes a pesar de la distancia. El material que se utilizó en cada situación fue elaborado por la investigadora de manera digital, pero este mismo podría trasladarse a las aulas de manera presencial.

7.3 Los puentes entre los procedimientos convencionales y los no convencionales

Desde diferentes estudios (Carraher *et al.*, 1999) e investigaciones, autores como Solares (2012) y Padilla (2015) han identificado que los estudiantes cuentan con conocimientos previos, que han sido adquiridos tanto fuera de la escuela: en actividades laborales o sociales como dentro de ella, que les permite resolver los problemas que se les plantean. Por lo que esta investigación considera necesario, que los estudiantes puedan trasladar estos conocimientos al aula. De tal manera que al proponerles un problema no se les mencione cuál es el procedimiento que deben de hacer, ni abusar de la resolución de operaciones exclusivamente numéricas, sino que permitan que el estudiante comprenda el problema y busque primeras soluciones. Recordando al medio didáctico, el problema debe permitir que el estudiante plantee soluciones iniciales –procedimientos propios- pero que los desafíe para que evolucionen sus procedimientos y elaboren nuevos conocimientos.

Se observó en los resultados de la investigación cómo algunos participantes seguían confiando en la suma iterada como procedimiento para resolver problemas multiplicativos, pero a lo largo de la secuencia empiezan a desarrollar estrategias más económicas para llegar al resultado, en algunos casos procedimientos híbridos. Estos procedimientos híbridos, que menciona la investigadora Solares (2012), les permiten a los estudiantes por un lado llevar el control de sus datos por medio de una suma pero apoyarse de la multiplicación para hacer más económico el procedimiento de sumar 9 veces el 2. Estas nociones le permitirán posteriormente servir como puente cuando se introduzca el algoritmo de la multiplicación de una cifra por dos cifras.

Se observó también el poco uso del algoritmo convencional de la multiplicación. A partir del diálogo se identificó que la mayoría de los estudiantes habían tenido escasos acercamientos a este procedimiento, por lo que al emplearlo había ciertas dificultades, sobre todo para reconocer el valor posicional de las cifras. Por lo que se recomienda antes de introducir el algoritmo convencional, permitir y promover el uso del cálculo parcial en algoritmos no convencionales, favoreciendo la comprensión del valor de cada cifra al ser multiplicada. Esto nos lleva a considerar estos procedimientos como puentes, ya que permite avanzar a la construcción del sentido interno del algoritmo convencional, por medio de los cálculos parciales y promover que el estudiante construya el cómo y por qué funciona.

Otro punto importante que se considera necesario reflexionar en la práctica docente del aula es qué tanto hay que solicitar a los estudiantes registrar forzosamente su procedimiento como una operación y cuándo hacerlo, ya que una fortaleza que se identificó fue el cálculo mental que se hizo presente entre los procedimientos para llegar al resultado, así como intervenciones que favorecieran el redondeo de cantidades y la estimación de resultados. Los alumnos recurren al cálculo mental a medida de que se van apropiando de estrategias para resolver los problemas. Entonces, por qué no en lugar de pedir que anoten datos, procedimiento y resultado en cada problema como usualmente se estila en muchas las aulas de clase, mejor abrir el diálogo y la interacción en la cual puedan expresar y justificar la elección y pertinencia del procedimiento y enseñar estrategias del cálculo mental como es la descomposición para el cálculo parcial, el uso de dobles y mitades, y el redondeo, en el cual se aumenta o disminuye una cifra para poder calcular con ella y luego agregar o quitar lo mismo.

7.4 Las intervenciones docentes, aspecto fundamental en la construcción de conocimientos matemáticos

Con base en esta experiencia de investigación y para contestar a la pregunta general: ¿Qué intervenciones didácticas promueven la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria?, se propone la categorización de intervenciones, que permite identificar a partir de lo que se quiere indagar las preguntas que se pueden realizar.

Esto nos lleva a la categorización de las intervenciones que se proponen a partir de la investigación, y forman parte importante de los resultados de esa investigación. Aquí se identifican diferentes tipos de intervenciones que se pueden realizar a partir de lo que se quiera indagar, o bien fortalecer la construcción de conocimientos matemáticos multiplicativos.

Las intervenciones que se emplearon en las diferentes situaciones didácticas son el fruto del análisis previo que se llevó a cabo sobre los posibles procedimientos, errores y dificultades a las que los estudiantes podrían enfrentarse. Se reconoce la importancia de estas intervenciones, ya que como investigadores y docentes debemos tener cuidado en cómo intervenimos, pues implica favorecer u obstaculizar los procedimientos de los estudiantes.

Se identificó que existen diferentes tipos de intervenciones, unas son más generales y pueden realizarse en diferentes tareas y momentos; y otras que favorecen a una tarea en específico. A continuación se comparten algunas de estas intervenciones específicas que se consideran enriquecedoras para interactuar y movilizar conocimientos.

Intervenciones para ***identificar conocimientos previos de los estudiantes***. Como se ha mencionado, los estudiantes cuentan con un bagaje de conocimientos que permiten poner en marcha diversos procedimientos. Explorar estos conocimientos permite que tengan a la mano una estrategia base para resolver el problema. Se considera valioso que los estudiantes expresen qué es lo que van hacer, ya que esto permite que tengan un momento de reflexión para tomar decisiones sobre su quehacer. Estas intervenciones se suelen hacer en un primer momento, antes de comenzar la situación. Al respecto se encontró como asertivo:

- Indagar sobre sus ideas previas, ¿Para qué creen que sirva el cuadro de multiplicación?, ¿Alguna vez habían visto un cuadro como este?, ¿Cómo se acomodan los números en las casillas?, ¿En qué debemos fijarnos para obtener los resultados de la multiplicación?
- Permitir que expresen sus reflexiones de manera grupal, de esta forma se promueve la circulación de saberes, por ejemplo, ¿Por qué la división nos permite llegar al resultado?, ¿Cómo sabes cuántas veces el 2 cabe en el 8?, ¿Cómo sabías que podías sacar el doble?, ¿Cómo calculas el doble?

Intervenciones para ***identificar errores y dificultades***. Es importante tener en cuenta que un clima de confianza es vital para que los estudiantes expresen sus ideas, su sentir y sus dudas. Por ello, se debe brindar seguridad y estímulo, mostrarse siempre respetuoso hacia sus comentarios sean o no acertados, ya que el error no es muestra de falta de conocimiento, sino que es parte fundamental del aprendizaje. En el error se identifica el aprendizaje que ha construido y al aplicarlo en diferentes situaciones tendrá la oportunidad de verificar si funciona o no y de esa manera buscar otras estrategias para llegar al resultado.

Analizar los errores de los estudiantes e identificar las posibles dificultades (Ruíz, 2006) abre un panorama al docente, que le permitirá hacer mejores intervenciones con sus estudiantes. Estas intervenciones se suelen hacer una vez que han comenzado a realizar los cálculos necesarios para llegar al resultado. Se consideran importantes las siguientes sugerencias:

- Ante las dificultades es importante que ellos identifiquen elementos que sí comprenden y partan de ahí para proponer primeros acercamientos, como ¿Qué es lo que sí entiendes del problema?, ¿Qué es lo que te pide el problema?, ¿Qué información te da el problema?, ¿Llevas algún registro de lo que vas sumando?
- Se puede solicitar que un compañero explique a otro que es lo que entiende del problema, e incluso que es lo que va a realizar, por ejemplo, ¿Le podrías explicar a tu compañero cómo pensó tu mente para resolver el problema?, ¿Cómo le explicarías a tu compañero cómo está organizada la tabla?
- Proponer otro problema con menor grado de dificultad o con un rango numérico más bajo que sirva de estrategia base para resolver el problema, por ejemplo, Tienes que comprar 22 carritos que cuestan $22, si en lugar de comprar 22 carros, sólo compras 10, ¿cuánto tendrías que pagar?, ¿con ese resultado podrías calcular ahora los 12 que faltan, cómo?
- Utilizar el cuadro de multiplicación para obtener un resultado, por ejemplo, "Si tenemos $54 y queremos comprar plumas que cuestan $9, ¿cuántas plumas podemos comprar?", ¿Cómo nos puede ayudar el cuadro de multiplicación en este problema?, ¿El cuadro nos ayuda a resolver problemas de división? ¿en qué hay que fijarnos?

- Confrontar procedimientos cuando dos o más estudiantes han llegado a diferentes resultados. Se puede intervenir preguntando ¿Por qué escogiste ese procedimiento?, ¿De qué otra forma puedes resolverlo?, ¿Por qué tu procedimiento no llegó al resultado?

Intervenciones para ***ampliar estrategias por medio de contraejemplos***. Cuando un estudiante resuelve el problema por medio de algún procedimiento que domina, se pueden proponer por medio de contraejemplos otras estrategias que sean más económicas o que permitan enriquecer la identificación de las propiedades de la multiplicación, sin la intención de juzgar su procedimiento. Estas intervenciones se pueden realizar durante o al final de sus procedimientos. Al respecto se sugiere: utilizar contraejemplos que permitan a los estudiantes reflexionar sobre otros procedimientos.

Intervenciones para ***confrontar y justificar procedimientos***. Al identificar que dos o más estudiantes realizaron diferentes procedimientos se puede buscar el intercambio de saberes entre los participantes. Estas intervenciones se suelen hacer al término del procedimiento, cuando los estudiantes pueden reconocer la pertinencia de su procedimiento. Se sugiere solicitar que compartan con sus compañeros qué fue lo que hicieron y por qué utilizaron esa estrategia. Esto favorece para que los estudiantes reconozcan que existe más de un procedimiento correcto para llegar al resultado e inclusive se promueven procedimientos más económicos.

A partir de estas intervenciones y la socialización se identificó que los participantes enriquecieron y ampliaron el bagaje de sus procedimientos. Esto permitió que resolvieran los problemas multiplicativos cada vez con mayor seguridad ya que economizaban sus procedimientos por medio de diversas estrategias. Se reitera que una de las complejidades de las intervenciones radica en ser cautos con no decir las respuestas a los estudiantes.

7.5. Las orientaciones didácticas para fortalecer la práctica docente.

Pensar, identificar y categorizar estas intervenciones didácticas permite tener en consideración distintos elementos que se considera pertinente poner a consideración de docentes que deseen implementar con sus estudiantes la secuencia didáctica propuesta. Para esto, llevaron a cabo orientaciones didácticas.

Este aporte se considera muy valioso, ya que desde la investigación, se reconocen a estas intervenciones como ayudas que permiten la interacción entre el docente y el alumno o entre compañeros para buscar una explicación sobre el por qué el estudiante empleó ese procedimiento, o indagar conocimientos, o favorecer la ampliación de estrategias sin mencionar de manera explícita lo que se debe hacer o si está correcto o no el procedimiento o resultado.

Se sugiere que las intervenciones promuevan en los estudiantes la exploración y socialización de diversos procedimientos –convencionales y no convencionales- para resolver problemas de tipo multiplicativo específicamente del tipo "valor faltante". Se identificó que permitir y solicitar que los estudiantes expliquen sus procedimientos favorece a una mejor apropiación del conocimiento multiplicativo y a su vez ampliar el bagaje de procedimientos al comprender los procesos realizados por otros compañeros.

Por mi parte, como docente, aprendí mucho sobre el tipo de intervenciones que se pueden hacer y cómo hacerlas, estas deben ser claras, abiertas y respetando los procesos de cada estudiante, permitiendo que las dificultades y errores permitan analizar lo que sí sabe y apoyarlo en las dificultades ya sea por medio de contraejemplos, para que analice el procedimiento o proponiendo un problema que sea más accesible. Anteriormente consideraba los errores como falta de conocimiento, actualmente considero que los estudiantes hacen uso de los conocimientos que tienen para resolver los problemas y que nosotros debemos estar ahí para ayudarles hacerlos evolucionar y que comprendan mejor el problema. En clase, debemos prever preguntas y contraejemplos para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, teniendo en cuenta estas intervenciones como herramienta de reflexión acerca del conocimiento multiplicativo.

Regresando a la pregunta de investigación específica: ¿Qué características deben tener las orientaciones didácticas que consideren intervenciones docentes adecuadas para promover la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria? en las Orientaciones didácticas se identificaron elementos pertinentes para llevar a cabo la secuencia didáctica. Se espera que esta propuesta acompañe a los docentes como una guía para la aplicación de las situaciones didácticas.

Como parte de estos elementos necesarios en una situación se considera importante conocer de manera general en qué consiste cada situación y tener claro los *propósitos* tanto del docente como de los estudiantes, ya que de esta manera las preguntas irán dirigidas en este sentido. Además, es muy importante, que a los estudiantes les queden claras las *consignas* sobre lo que van a realizar, aquí también se pueden prever intervenciones para indagar si se entendió lo que van hacer, que expliquen a otros compañeros lo que entienden o recuerden las consignas.

El *tipo de problema* que se propone en las situaciones didácticas permiten que el estudiante ponga en marcha diferentes conocimientos que sirven de base para resolver los problemas, teniendo como resultado que vayan buscando economizar sus procedimientos con un mayor nivel de comprensión sobre el problema y lo que harán para resolverlo. De esta manera se pueden anticipar los *posibles procedimientos, errores y dificultades* a las que se pueden enfrentar al resolver los problemas y a partir de aquí identificar las *intervenciones* que sean más pertinentes para dialogar con los estudiantes y favorecer la comprensión del problema.

Como ya se mencionó, entre los elementos que se incluyen en las orientaciones, las intervenciones docentes cobran gran relevancia ya que en cada elemento, las preguntas sirven para recabar y profundizar la información que recibimos.

7.6 Aciertos, retos y procesos por desarrollar en el marco de este estudio

La secuencia didáctica propuesta en este estudio implica fortalezas, complejidades y oportunidades didácticas que quedan pendientes para seguir enriqueciéndola.

Para comenzar, la implementación virtual permitió acercarnos a los estudiantes para crear un ambiente de aprendizaje en donde se presentaran las situaciones didácticas proponiendo problemas multiplicativos a través de la plataforma Jamboard. Este acierto permitió la indagación de los procedimientos, errores y dificultades a los que los estudiantes se enfrentan al resolver problemas multiplicativos e identificar cuáles fueron las intervenciones más pertinentes y de esta manera elaborar las Orientaciones para los docentes. Por otro lado, los participantes desarrollaron habilidades tecnológicas que les permitirá seguir trabajando de manera virtual en un futuro.

Un aspecto que se considera fue complejo e implicó un gran reto está relacionado con la segunda pregunta de investigación, la cual es: ¿Cuáles son las situaciones didácticas más efectivas para promover la construcción de conocimientos multiplicativos en estudiantes de segundo ciclo de primaria? Para contestar esta pregunta se propuso elaborar una secuencia didáctica que promoviera la construcción de conocimientos multiplicativos. Esta tarea, fue compleja ya que se tuvo que realizar una exhaustiva investigación de otras situaciones didácticas, realizar adecuaciones a partir de los objetivos para permitir la gradualidad entre situaciones y así desarrollar una secuencia didáctica.

Se considera que la secuencia logró identificar los procedimientos, errores y dificultades que tienen los estudiantes y realizar intervenciones que favorecieron la construcción de conocimientos multiplicativos. El reto sigue, y es que los maestros diseñemos, implementemos y evaluemos las situaciones que les propongamos a nuestros estudiantes. La Teoría de Situaciones Didácticas nos da elementos para mejorar nuestro quehacer en el aula. Es así que por parte de la investigación queda abierta la oportunidad de que otro investigador implemente esta secuencia didáctica y con base a su análisis pueda seguir enriqueciéndola.

En futuros desarrollos, sería interesante explorar otras variables como el trabajo con números decimales, proponer más problemas en los cuales no se proporcione el valor unitario, e incluso implementarlo de manera presencial. Este estudio se encontró de manera más personal con los estudiantes, al escucharlos y hablar con ellos, para reconocer sus conocimientos matemáticos que les permite resolver los problemas que se les plantean y que uno como docente, sirva como guía para que sigan diversificando sus procedimientos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrew, N. (2021, 22 de agosto). N*ivelación de aprendizajes, una de las tareas prioritarias de la pandemia.* Banco de Desarrollo de América Latina (CAF). Consultado el 20 de agosto de 2022. https://www.caf.com/es/actualidad/noticias/2021/08/nivelacion-de-aprendizajes-una-de-las-tareas-prioritarias-de-la-pandemia/

Aires, B. (2006). *Matemática: Cálculo mental con números naturales. Apuntes para la enseñanza.* Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires/Secretaría de Educación Dirección General de Planeamiento Dirección de Currícula.

Aparicio, R. y Silva, M. (2012). Pedagogía de la interactividad. *Comunicar. Revista Científica Iberoamericana de Comunicación y Educación.* Nº 38 XIX: 51-58.

Artigue, M. (1995) Ingeniería didáctica. En Artigue, M. *et al. Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-69) Iberoamérica.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, *1* (1-10).

Ávila, A., Block, D., Carvajal, A., Camarena, P., Eudave, D., Sandoval, I., ... y López-Bonilla, G. (2013). *La investigación en educación matemática en México*: 2002-2011. México: COMIE/ANUIES.

Barba, D., y Calvo, C. (2013), *Calcular usando el contexto del dinero,* Suma, 72, 91-98.

Belmonte, J. (2006). Las relaciones multiplicativas: el cálculo multiplicativo y de división. Cálculo mental y con calculadora, *En* Chamorro, M. *Didáctica de matemáticas para primaria* (pp. 159 -185) Pearson Educación.

Blanco, M., Martínez, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 223-234). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Block, D., Fuenlabrada, I., Balbuena, H., y Ortega, L. (1994). *Lo que cuentan las cuentas de multiplicar y dividir*. México: SEP Libros del Rincón.

Block, D., Mendoza, T., y Ramírez, M. (2015). *¿Al doble le toca el doble?: La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Ediciones SM.

Broitman, C. (2010) La enseñanza de la multiplicación en los primeros años. En *Las operaciones en el primer ciclo* (págs. 51-95) Ediciones Novedades

Broitman, C., Escobar, M., Sancha, I., y Urretabizcaya, J. (2014). *Interacciones entre alumnos de diversos niveles de conocimientos matemáticos. Un estudio en un aula plurigrado de escuela primaria. Yupana*, (8), 11-30.

Broitman, C., Itzcovich, H., Novembre, A., Escobar, M., Sancha, I., Grimaldi, V. y Ponce, H. (2018). *La divina proporción*: la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria y en los inicios de la escuela secundaria. Santillana.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, 12(01), 5-38.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal.

Burgos, M., Castillo, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2020). *Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34, 40-68.

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil*. Servicio de Publicaciones. 58

Cantoral, R., Farfan, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., y Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático.*Trillas

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (1999). *En la vida diez, en la escuela cero*. Siglo XXI.

Chamorro, M. (2005) Capítulo 2. Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas, En *Didáctica de las matemáticas infantil* (pp. 39-62) Pearson Educación.

Chamorro, M. (2006) Capítulo III. Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas, En Chamorro, M. *Didáctica de matemáticas para primaria* (pp. 69-84) Pearson Educación.

Charnay, R. (1997). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra, C. y Saiz, I. (eds.) *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp. 3-10). Editorial Paidós Educador

Chemello, G. (1997). *El cálculo en la escuela: las cuentas son un problema*. Los CBC y la enseñanza de la Matemática.

Coll, C. (2000). Constructivismo e intervención educativa. En *Barbera, Elena (2000). El constructivismo en la práctica. Caracas: Laboratorio educativo, 157p*, 11-32.

Echeverry, H (2013). *Estrategias didácticas que promueven el aprendizaje de la estructura multiplicativa a partir de la resolución de problemas*. [Tesis maestría, Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira]

Fernández, K., Gutiérrez, I., Gómez, M., Jaramillo, L., & Orozco, M. (2004). *El pensamiento matemático informal de niños en edad preescolar. Creencias y prácticas de docentes de Barranquilla*. *Zona próxima*, (5), 42-72.

Fregona, D. y Órus, P. (2011). *La noción de medio en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas.* Libros del Zorzal.

Fuster, J. y García, M. (2000) Cuídate, desde la globalidad En Barbera, Elena (2000). *El constructivismo en la práctica.* Caracas: Laboratorio educativo, 157p, 83-90

Garnica, J. (2003). *Actividades del" basta numérico" y de resolución de problemas como potenciadoras de estrategias emergentes que dan significado al algoritmo de la multiplicación en el tercer grado de la educación primaria* (Tesis Doctoral, Universidad Pedagógica Nacional).

González, A., Molina, J., y Sánchez, M. (2014). *La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemática*s. Educación matemática, 26(3), 109-133. Recuperado en 08 de junio de 2021, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262014000300109&lng=es&tlng=es.

González, Alicia. (2004). "Planificación de secuencias didácticas". En: *Enseñar matemática. Números, formas, cantidades y juegos.* Sáiz, Irma (et al). No.56. Ediciones Novedades Educativas. Serie 0 a 5. La educación en los primeros años. Pp 87-107

Hernández, F. (2022). *El valor posicional: una secuencia didáctica para segundo ciclo de una escuela primaria multigrado.* [Tesis maestría, Universidad Autónoma de Querétaro]

Hernández, A. T. (2005). Reseña de" La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas" de Alicia Ávila (directora). Educación Matemática, 17(1), 179-183

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México. (2018) *Resultado de las evaluaciones Planea.*

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México. (2013) *Resultado de las evaluaciones de EXCALE.*

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México. (2014) *Resultado de las evaluaciones de EXCALE.*

Isoda, M. y Olfos, R. (2011). Enseñanza de la Multiplicación: desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas. *Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso*.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). *Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años*. Educación matemática, 28(1), 9-38.

Lurduy, J. y Romero, J. (1999). *Estructura multiplicativa y formación de profesores para la educación básica*. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/12254/1/Lurduy1999Estructura.pdf

Macchiarola, V., Pizzolitto, A. L., Solivellas, V. P., & Muñoz, D. J. (2020). *La enseñanza con modalidad virtual en tiempos del covid19*. La mirada de los estudiantes de la Universidad Nacional de Río Cuarto. Contextos de Educación, (28).

Martínez, Á. y Rivaya, F. (1998). Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la geometría elemental. Madrid: Síntesis.

Martínez, F. (Coord). (2015). *Las pruebas ENLACE y EXCALE. Un estudio de validación*. Recuperado de: https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1C148.pdf

Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. En *Educación Matemática.* Vol. 4. p. 7-15.

Nemirovsky, M. (1999). *Sobre la enseñanza del lenguaje escrito: y temas aledaños*. Ciudad de México: Paidós.

Oller, A. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Valladolid]

Ortega, T., Pecharromán, C. y Sosa, P. (2011). *La importancia de los enunciados de problemas matemáticos*. Educatio Siglo XXI, 29(2), 99-116. 59

Padilla, E. (2015). *Conocimientos matemáticos de menores trabajadores: el caso de la proporcionalidad*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]

Paolone, M. (2010). Secuencias didácticas en Matemática. *Novedades Educativas, Bs. As, 22*(238), 58-61.

Pitluk, L. (2006) *La planificación didáctica en el Jardín de Infantes. Las unidades didácticas, los proyectos y las secuencias didácticas*. El juego trabajo. Rosario: Editorial HomoSapiens.

Pozo, J. I. (1989). *Asimilación y acomodación*. Recuperado de http://aprendeenlinea. udea. edu. co/lms/moodle/pluginfile. php/138771/mod_pag e/content/1/cap1/04. U1-Pozo_Teorias_cognitivas. pdf http://dspace. unitru. edu. pe/bitstream/handle/unitru/12966/rodriguez% 20hilario% 20diana% 20elizabet. pdf.

Quiroz, R. y Rodríguez, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Revista Educación Matemática*, 27(3), 45-79.

Reséndiz, L., y Block, D. (2011). "Los collares "secuencia didáctica sobre problemas de proporcionalidad de valor faltante. En Isoda, M. y Olfos, R. (Coords.), *Enseñanza de la multiplicación: Desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas*, 275-301.

Rivero, M. (2012). *Teoría genética de Piaget: constructivismo cognitivo*. Recuperado de: http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/32321/6/Teoria%20de%20Jean%20Piaget.pdf

Rockwell, E., & Rebolledo, V. (2016). *Yoltocah. Estrategias didácticas multigrado*. México: autores. Recuperado de https://yoltocah.mx/wp-content/uploads/2018/05/Yoltocah-2018.pdf

Ruíz, M. (2006) Capítulo II. Aprendizaje y matemáticas, En Chamorro, M. *Didáctica de matemáticas para primaria* (pp. 31 -68) Pearson Educación.

Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ta. ed.). DF. DF México: McGraw Hill.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programa de estudios de la Secretaría de Educación Pública*

Secretaría de Educación Pública. (2011a). Libro de texto *Desafíos matemáticos* tercer grado.

Secretaría de Educación Pública. (2011b). Libro de texto *Desafíos matemáticos* cuarto grado.

Secretaría de Educación Pública. (2017a). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. Secretaría de Educación Pública: México.

Secretaría de Educación Pública. (2017b). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Educación Primaria 4. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. Secretaría de Educación Pública: México.

Secretaría de Educación Pública. (2017c). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Educación Primaria 2. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. Secretaría de Educación Pública: México.

Secretaría de Educación Pública. (s.f.). Evaluación Diagnóstica para las Alumnas y los Alumnos de Educación Básica. Consultado el 20 de agosto de 2022. http://planea.sep.gob.mx/Diagnostica/

Solares, D. (2012). *Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes* (Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional).

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.

Weiss, E., Block, D., Civera, A., Dávalos, A., y Naranjo, G. (2019). La enseñanza de distintas asignaturas en escuelas primarias: una mirada a la práctica docente. *Revista mexicana de investigación educativa*, *24*(81), 349-374.

ANEXOS

Anexo 1. Material para las situaciones didácticas

SITUACIÓN: Fábrica de juguetes

SESIÓN 1

CONTEXTO:

- En la fábrica de LEGO arman bicicletas, carros y tráileres.
- Para el armado hay que identificar cuántas llantas hay que poner a cada juguete. Cada uno lleva un número diferente de llantas.

CONSIGNA:

- En grupo vamos a observar la imagen, con base en esta información vamos a identificar cuántas llantas necesitamos para armar los juguetes que nos solicitan o calcular cuántos juguetes podemos armar con la cantidad de piezas que nos dan.

Ilustración con la información de los juguetes

Imagen 1. Armado de juguetes

PREGUNTAS:

1. ¿Cuántas llantas necesitas para armar 5 bicicletas?
2. Don Jesús tiene un pedido de 10 carritos, en este momento tiene en su taller 16 llantas ¿para cuántos carritos tiene material por ahora?
3. Para armar 4 tráileres ocupas 32 llantas ¿Cuántas llantas necesitas para armar 8 tráileres?

CUADRO DE MULTIPLICACIÓN

Diálogo y reflexiones sobre el uso y construcción del cuadro de multiplicación

CONSIGNA: Vamos a platicar un poco sobre lo que conocen de esta tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Preguntas para promover la reflexión en torno al cuadro de multiplicación.

- ¿Este cuadro lo habían visto antes?
- ¿Lo han utilizado antes?, ¿Saben para qué sirve este cuadro?
- ¿Saben cómo se llama?
- ¿Cómo se acomodan los resultados en las casillas?
- ¿Por qué creen que se repiten los números en la parte de arriba (horizontal) y a la izquierda (vertical)?
- ¿Qué tablas de multiplicar te sabes?
- Para ti, ¿cuál es la tabla que sientes que es más fácil de "trabajar"? ¿Por qué?
- ¿Cómo irías construyendo esta tabla?, ¿qué pondrías primero?
- Si quisiéramos anotar cuántas llantas se necesitan para armar 5 bicis, ¿dónde lo anotaremos?
- ¿Creen que el cuadro de multiplicación nos sirva también para los problemas de división?

SITUACIÓN: Fábrica de juguetes

SESIÓN 2

CONSIGNAS PARA LAS TABLAS:

- Resuelve las siguientes tablas.
- Después de haber resuelto cada tabla anota tus respuestas en el cuadro de multiplicación.

CONSIGNAS PARA LAS PREGUNTAS.

- Analicen y respondan las preguntas, se pueden apoyar de las respuestas que ya tienen o en su caso anotar en el cuadro de multiplicación las nuevas respuestas.
- Termina de construir las tablas del 2, 4 y 8.

1. Vamos a completar la siguiente tabla que nos ayudará a ver cuántas llantas necesitamos para el armado de carros.

Juguete: carro	Llantas necesarias
1 carro	4 llantas
2 carros	
3 carros	
4 carros	

PREGUNTAS:

- Si tienes 20 llantas, ¿cuántos carros puedes armar?
- Si para armar los 5 carros ocupas 20 llantas ¿Cuántas llantas necesitas para armar 10 carros?

2. En esta otra tabla vamos a completar las llantas necesarias para el armado de bicicletas.

Juguete: bicicleta	Llantas necesarias
1 bicicleta	2 llantas
3 bicicletas	
5 bicicletas	
7 bicicletas	

Contraejemplo:

- Un niño llamado Jorge me dijo que para encontrar cuántas llantas necesita para armar 8 bicicletas sumó el resultado de 3 y 5 bicicletas. ¿Le salió bien el resultado a Jorge?, ¿Qué opinas de su procedimiento?
  ¿Qué es lo que hizo Jorge?

3. En esta otra tabla vamos a completar las llantas necesarias para el armado de bicicletas.

Juguete: tráiler	Llantas necesarias
1 tráiler	8 llantas
2 tráileres	
3 tráileres	
4 tráileres	32 llantas
6 tráileres	48 llantas
8 tráileres	
10 tráileres	

PREGUNTAS:

- Con base en la información de la tabla, ¿cuántos tráileres se pueden armar con 16 llantas?
- Para armar 6 tráileres ocupas 48 llantas, ¿para armar 3 tráileres cuántas llantas ocupas?
- Se acuerdan que en la sesión pasada nos dijeron que para 4 tráileres ocupan 32 llantas, ¿recuerdan cuántas llantas ocupan 8 tráileres?
- Si tienes 10 tráileres, ¿cuántas llantas necesitas?

Se muestra el cuadro vacío y al término de la sesión se habrán construido las tablas del 2,4 y 8.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

SITUACIÓN: Fábrica de juguetes

SESIÓN 3

CONTEXTO:

- En otra área de la fábrica de LEGO arman triciclos y trenes. A cada triciclo le ponen 3 llantas y a los trenes le ponen vagones y ruedas.
- Para el armado de juguetes hay que identificar cuántos vagones o ruedas le ponen a los trenes y cuántas llantas ocuparemos para armar varios triciclos

CONSIGNA:

- En grupo vamos a observar la imagen, observen la cantidad de piezas que necesita cada triciclo y tren para que lo puedan armar. Con base en esta información vamos a ir contestando algunas preguntas.

Ilustración con la información de los juguetes

Imagen 2. Armado de juguetes

Triciclo: 3 llantas

Tren: 3 vagones

1 vagón: 6 ruedas

PREGUNTAS

1. En la fábrica de juguetes quieren hacer 7 triciclos, ¿cuántas llantas necesitan?
2. En la fábrica de juguetes tienen 27 vagones, si a cada tren le ponen 3 vagones, ¿para cuántos trenes alcanza?
3. A cada vagón le ponen 6 ruedas, si un tren tiene 12 vagones ¿cuántas ruedas necesitará el tren?

CUADRO DE MULTIPLICACIÓN

CONSIGNAS PARA LAS TABLAS.

- Resuelve las siguientes tablas.
- Después de haber resuelto cada tabla anota tus respuestas en el cuadro de multiplicación.

CONSIGNAS PARA LAS PREGUNTAS.

- Analicen y respondan las preguntas que se hacen.
- Termina de construir la tabla del 6.

1. En la fábrica registraron en una tabla cuántas llantas utilizan para hacer hasta 10 triciclos.

Juguete: triciclo	Llantas necesarias
1 triciclo	3 llantas
2 triciclos	
3 triciclos	
4 triciclos	
5 triciclos	15 llantas
6 triciclos	
7 triciclos	
8 triciclos	
9 triciclos	
10 triciclos	

Contraejemplo:

- Luisa no se acordaba de cuántas llantas ocuparía para armar 8 triciclos, pero como ella ya había anotado que para 4 triciclos ocupaba 12 llantas, decidió que para calcular para 8 triciclos sacaría el doble de 12 llantas. ¿Por qué Luisa sumó dos veces el 12?

2. En la fábrica van a armar trenes con 6 vagones y quieren saber cuántos vagones necesitarán para armar hasta 10 vagones. Anota en la tabla el número de vagones que se necesitan.

Juguete: tren	vagones necesarios
1 tren	6 vagones
2 trenes	
4 trenes	
5 trenes	30 vagones
8 trenes	
9 trenes	
10 trenes	

PREGUNTAS:

- Para armar 5 trenes con 6 vagones, necesitamos 30 vagones, ¿para 10 trenes cuántos vagones ocupamos?

Se muestra el cuadro con los resultados construidos en la sesión anterior y al término de ésta sesión se habrán construido las tablas del 3 y del 6

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3										
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5										
6										
7										
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9										
10										

SITUACIÓN: ¡Vámonos de compra!

SESIÓN 4

CONTEXTO:

- Los estudiantes simulan que irán a una tienda de abarrotes en la cual deberán comprar muchos productos y calcular cuánto pagarán por ellos.

CONSIGNAS:

- En grupo jugaremos a que vamos a una tiendita en la que compraremos algunos productos. Para saber qué producto es y cuántos productos vamos a comprar será necesario girar dos ruletas: la primera ruleta indica cuántas casillas avanzan y la segunda ruleta indica cuántos productos tienen que comprar.
- Después de haber girado las dos ruletas y avanzar las casillas, moverán su ficha, en este caso un carrito de compras y deben determinar cuánto pagarán. Pueden realizar los cálculos que consideren necesarios y usar cualquier procedimiento.
- Nos organizaremos para ver quién será el cajero de cada comprador. El comprador deberá decir cuánto tiene que pagar y el cajero verificará si la cantidad es la correcta.
- Paguen con la cantidad exacta o más cercana al total. El cajero dará el cambio en caso de que sea necesario y el comprador debe comprobar que sea correcto.
- Ganará el primero que llegue a la meta o, si se acaba el tiempo, quien llegue más lejos.

PROBLEMAS

- Los productos que pueden comprar los participantes se van modificando en cada implementación por lo que los problemas a los que se enfrentan son situaciones de azar.

TABLERO “Tienda de abarrotes”

RULETAS

Casillas que avanzas

Cantidad de productos que compras

CUADRO DE MULTIPLICACIÓN

CONSIGNA.

- Analicen y respondan las preguntas, se pueden apoyar de las respuestas que ya tienen registradas en el cuadro o en su caso anoten en el cuadro de multiplicación las nuevas respuestas.

PREGUNTAS:

1. ¿Qué producto puedes comprar con 11 monedas de $5?
2. Vas a la tienda y compras unos chicles Hubba Bubba, cuestan $25, ¿con cuántas monedas de $5 vas a pagar?
3. Por un paquete de papel higiénico pagas $50, ¿cuántas monedas de $10 necesitas?
4. Sólo nos quedan 4 monedas de $10, ¿podríamos comprar un paquete de galletas oreo?

Se muestra el cuadro con las multiplicaciones que construyeron en la sesión anterior y al término de ésta sesión se habrán construido las tablas del 5 y del 10.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5										
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7										
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9										
10										

SITUACIÓN: ¡Vámonos de compra!

SESIÓN 5

CONTEXTO:

- Los estudiantes simulan que irán a una tienda de regalos en la cual deberán comprar muchos productos y calcular cuánto pagarán por ellos.

CONSIGNAS:

- En grupo jugaremos a que vamos a una tiendita en la que compraremos algunos productos. Para saber qué producto comprarán será necesario girar la ruleta que indica cuántas casillas avanzan.
- De acuerdo al color de la casilla giraremos otra ruleta que indica cuántos productos tienen que comprar.
- Después de haber girado las dos ruletas y avanzar las casillas, deben determinar cuánto pagarán. Pueden realizar los cálculos que consideren necesarios y usar cualquier procedimiento.
- Nos organizaremos para ver quién será el cajero de cada comprador. El comprador deberá decir cuánto tienen que pagar y el cajero verificará si la cantidad es la correcta.
- Paguen con la cantidad exacta o más cercana al total. El cajero dará el cambio en caso de que sea necesario y el comprador debe comprobar que sea correcto.
- Ganará el primero que llegue a la meta o, si se acaba el tiempo, quien llegue más lejos.

PROBLEMAS

- Los productos que pueden comprar los participantes se van modificando en cada implementación por lo que los problemas a los que se enfrentan son situaciones de azar.

TABLERO “Tienda de regalos”

RULETAS

Casillas que avanzas

Cantidad de productos que compras.

Si caes en casillas verdes

Si caes en casillas azules

DINERO

CUADRO DE MULTIPLICACIÓN

CONSIGNA.

- Analicen y respondan las preguntas, registra en el cuadro de multiplicación tus respuestas.

1. En la tienda de regalos tenemos que cada pluma cuesta $18, el día de hoy tenemos un descuento, cada pluma va a costar $9.
2. ¿Cuánto van a pagar por 3 plumas?
3. ¿Cuánto van a pagar por 5 plumas?, Si pagamos con monedas de $5, ¿cuántas monedas de $5 daríamos?
4. Si la maestra les da $54, ¿cuántas plumas pueden comprar?

Se muestra el cuadro con las multiplicaciones que construyeron en la sesión anterior y al término de ésta sesión se habrá construido la tabla del 9.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7										
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9										
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

SITUACIÓN: Collares

SESIÓN 6

CONTEXTO:

- En una boutique están diseñando collares, tienen varios modelos y cada modelo tiene una cantidad diferente de perlas.

CONSIGNAS:

- Para saber cuántas perlas necesitan para armar varios collares. Han anotado los datos en tablas para organizar la cantidad de perlas por color que usa cada modelo.

PREGUNTAS

1. ¿Cuántas perlas verdes y rojas necesitamos para hacer 2 collares del modelo 1?

*Todos los collares deben tener la misma cantidad de perlas de cada color que el collar modelo.

Modelo 1	
1 collar	**2 collares**
2 azules	4 azules
5 verdes	_____ verdes
3 rojas	_____ rojas

2. ¿Cuántas perlas azules y rojas necesitamos para hacer 4 collares del modelo 2? Todos los collares deben tener la misma cantidad de perlas de cada color que el collar modelo.

Modelo 2	
1 collar	4 collares
3 azules	____ azules
4 verdes	16 verdes
6 rojas	____ rojas

3. ¿Cuántas perlas azules y rojas necesitamos para hacer 7 collares del modelo 3? Todos los collares deben tener la misma cantidad de perlas de cada color que el collar modelo.

Modelo 3	
1 collar	7 collares
2 azules	____ azules
5 verdes	35 verdes
7 rojas	____ rojas

CUADRO DE MULTIPLICACIÓN

CONSIGNAS.

- Apóyate de las respuestas que anotaste en la tabla del modelo 3 y escribe en el cuadro de multiplicación los resultados que obtuviste.
- Anota los resultados que faltan en el cuadro de multiplicación para construir la tabla del 7.
- Apóyate en el cuadro de multiplicación para analizar y responder las siguientes preguntas.

Contraejemplo:

1. Lucero me comentó que para construir la tabla del 7, se fijó en los resultados de las tablas del 2 y del 5, me dijo que para calcular lo de 7x7 sumó 35+14, ¿por qué sumó esos resultados?, ¿podemos utilizar su estrategia para calcular 7x9?, ¿Cómo?
2. Si tenemos 42 perlas verdes, ¿cuántos collares podemos hacer si utilizamos 7 perlas verdes por collar?

Se muestra el cuadro con las multiplicaciones que construyeron en la sesión anterior y al término de ésta sesión se habrá construido la tabla del 7.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7										
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	32	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

SITUACIÓN: Collares

SESIÓN 7

PREGUNTAS

1. ¿Cuántas perlas verdes y rojas necesitamos para hacer 5 collares del modelo 4?

   *Todos los collares deben tener la misma cantidad de perlas de cada color que el collar modelo.

Modelo 4	
1 collar	**5 collares**
5 azules	25 azules
6 verdes	_____ verdes
12 rojas	_____ rojas

2. ¿Cuántas perlas azules necesitamos para hacer 2 collares del modelo 5?

   ¿Cuántas perlas rojas necesitamos para hacer sólo un collar en el modelo 5?

   *No debe sobrar ni faltar ninguna perla y todos los collares deben tener la misma cantidad de perlas que el collar modelo.

Modelo 5	
1 collar	**2 collares**
6 azules	_____ azules
7 verdes	14 verdes
_____ rojas	10 rojas

3. ¿Cuántas perlas verdes y rojas necesitamos para hacer 4 collares del modelo 6?

   *Recuerda que no debe sobrar ni faltar ninguna perla y todos los collares deben tener la misma cantidad de perlas que el collar modelo.

   ¿Cuántas perlas verdes y rojas necesitamos para hacer 4 collares del modelo 6?

Modelo 6	
2 collares	**4 collares**
4 azules	8 azules
6 verdes	_____ verdes
12 rojas	_____ rojas

CUADRO DE MULTIPLICACIÓN

El cuadro ya está construido en su totalidad por lo que se procede a presentar otros problemas para trabajar algunas propiedades y relaciones de la multiplicación.

1. Para resolver el modelo 5, ¿en qué fila o columna te fijarías para calcular cuántas perlas rojas lleva un collar si tenemos 10 perlas rojas en 2 collares?

Márcalo en el cuadro.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	32	45	54	56	64	72	80
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Contraejemplo:

- Un niño de otra escuela me dijo que cuando busca el resultado de 10 perlas rojas en 2 collares se fija en la columna del 2, y ve que con 10 perlas puede formar 2 collares con 5 perlas cada uno, ¿están de acuerdo?, ¿qué es lo que observa el niño en el cuadro de multiplicación?

2. Observa el cuadro de multiplicación y marca los círculos que te piden.

Pon un círculo rojo en los resultados de las siguientes operaciones:

En 5x2

En 2x5

Ahora pon un círculo verde en los resultados de las siguientes operaciones:

En 8x4

En 4x8

Por último, pon un círculo azul

En 6x6

- ¿Qué similitud o diferencia encuentras entre los resultados que están de un lado de la diagonal con las del otro lado?
- ¿Por qué solo pusimos un círculo azul?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Contraejemplo:

Jesica, una niña, observó que los números se repetían en ambos lados de la línea diagonal, ¿por qué creen que sucede eso?

Anexo 2. Consideraciones éticas

Santiago de Querétaro, a 29 de septiembre del 2021

Estimado padre o madre de familia,

A través de la presente le hacemos una invitación a usted y a su hijo o hija a participar en un club de **actividades matemáticas** para la mejora del aprendizaje. Esta actividad será realizada en el marco de una investigación educativa titulada "*Situaciones didácticas para la resolución de problemas multiplicativos en primaria. Orientaciones para docentes de segundo ciclo*", el cual se lleva a cabo por la Lic. Raquel Alcántara Perea, quien cursa la Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas. Dicho trabajo académico permitirá contar con elementos para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel de primaria.

El "club de actividades matemáticas" se realizará en modalidad de taller virtual, donde se propondrá a su hijo(a) la resolución de actividades matemáticas dentro de una secuencia didáctica, la cual estará dividida en seis sesiones. Cabe aclarar que las actividades no tienen ningún valor diagnóstico, ni serán reportadas a autoridades escolares. Los resultados emanados de las actividades serán empleados exclusivamente con fines de esta investigación. La decisión de participar en el presente estudio de investigación es completamente voluntaria.

Dado que el club será llevado a cabo en modalidad virtual, es importante cerciorarnos que su hijo(a) tenga la posibilidad de conectarse a una plataforma de videoconferencia (meet) por medio de una computadora, y que tenga una conexión a internet estable. Las sesiones se llevarán a cabo a las 12 pm, los días martes y jueves, con una duración aproximada de 1 hora y media. Es importante comentarle también que existirá la seguridad de que durante el taller, nadie ajeno a la investigación podrá acceder a la plataforma y sólo intervendrá la investigadora con los participantes, y en algunas ocasiones la asesora de la investigación.

No se proporcionará ninguna compensación económica por participar, el propósito es obtener mayor conocimiento acerca de las resoluciones que realizan los estudiantes y de antemano se agradece todo el apoyo que nos puedan proporcionar.

El proceso es estrictamente confidencial. Las sesiones serán grabadas con fines educativos para documentar los procedimientos de los estudiantes. Se asegura que el nombre y rostro de todos los participantes no serán utilizados en ningún informe cuando los resultados de la investigación sean publicados. El estudio no conlleva ningún riesgo y, por el contrario, puede beneficiar a los participantes al fortalecer sus conocimientos matemáticos. Para esta investigación lo más importante es cuidar la integridad de los participantes en todo momento al realizar las actividades. De igual manera, es importante señalar que el participante tiene derecho a retirarse de las actividades emanadas de esta investigación en cualquier momento sin ningún tipo de sanción.

Apreciamos la atención prestada a la presente, quedamos en contacto para cualquier duda que pueda surgir. Agradeceremos puedan confirmarnos la disposición para que su hijo(a) participe en el club de actividades matemáticas enviando un correo electrónico a la dirección adjunta a esta invitación.

Datos de contacto de la investigadora:

Lic. Raquel Alcántara Perea
Correo: ralcantara07@alumnos.uaq.mx

Consentimiento para el niño

Hola amiguito(a), te invitamos a participar en un taller con otros niños de tu misma edad y grado escolar para ayudarnos a resolver distintas actividades matemáticas. Te pedimos que asistas a seis sesiones en diferentes días. Las sesiones durarán aproximadamente una hora y media. Podrás compartir tus conocimientos y aprender con otros compañeros.

Es importante que sepas que el estudio no conlleva ningún riesgo y, por el contrario, puede beneficiarte a ti y otros niños cuando compartan sus conocimientos y experiencias. Cualquier duda que tengas la puedes consultar en cualquier momento. Tienes derecho a retirarte de la investigación sin ningún tipo de sanción. Lo que más nos importa es que vengas con mucho interés, ganas de compartir y aprender.

______________________ ______________________

Nombre y firma del participante Nombre y firma del padre, madre o tutor

Fecha: ______________________

____

Raquel Alcántara Perea

Responsable técnico