Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

División de estudios de posgrado

Especialidad en docencia de las matemáticas

TÓPICOS SELECTOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ABORDAR CONCEPTOS UNIFICADORES DEL CÁLCULO DE UNA VARIABLE

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el diploma de la
Especialidad en docencia de las matemáticas

Presenta:

Ing. Ramón Torres Alonso

Santiago de Querétaro, Qro. Junio de 2013

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Especialidad en docencia de las matemáticas

"TÓPICOS SELECTOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ABORDAR CONCEPTOS UNIFICADORES DEL CÁLCULO DE UNA VARIABLE"

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el diploma de la
Especialidad en docencia de las matemáticas

Presenta:
Ramón Torres Alonso

Dirigido por:
M.D. Ángel Balderas Puga

Sinodales

M.D. Ángel Balderas Puga Presidente	Firma
Dr. Víctor Larios Osorio Secretario	Firma
Dr. Jesús Jerónimo Castro Vocal	Firma
M.D.M. Carmen Sosa Garza Suplente	Firma
M.D.M.Teresa de Jesús Valerio López Suplente	Firma

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad

Dr. Irineo Torres Pacheco
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Junio, 2013
México

RESUMEN

Burkhard Kümmerer tituló su aportación para el estudio ICMI 15 como “TRYING THE IMPOSSIBLE: Teaching Mathematics to Physicists and Engineers”. Es común escuchar comentarios sobre los conocimientos matemáticos de los ingenieros. En general, se asume que éstos poseen amplios conocimientos al respecto porque durante su formación cursaron diversas asignaturas de matemáticas, pero ¿en realidad el ingeniero comprende las matemáticas? ¿En realidad el ingeniero es capaz de utilizar los conocimientos de matemáticas que adquiere durante su formación? ¿Qué tan “imposible” es enseñarle matemáticas a un ingeniero?. En este trabajo hacemos un breve análisis de qué competencias debería desarrollar el ingeniero en formación; por qué es deseable que presente diferentes tipos de pensamiento; cómo las matemáticas ayudan a dicho desarrollo; por qué es importante que el estudiante de ingeniería de desenvuelva en un ambiente contextual práctico mientras estudia matemáticas y por último, esbozamos algunas ideas que pueden desarrollarse en un trabajo posterior para abordar algunos temas de cálculo (y otras materias) por medio de métodos numéricos y relaciones entre problemas reales y las matemáticas.

(Palabras clave: cálculo de una variable, métodos numéricos, competencias matemáticas.)

SUMMARY

Burkhard Kümmerer titled his paper for the 15th ICMI study as "TRYING THE IMPOSSIBLE: Teaching Mathematics to Physicists and Engineers". It is very common to hear comments about the engineer's mathematical knowledge. In general, it is assumed that they have wide knowledge about it because throughout their training, they coursed numerous mathematics subjects, but, does the engineer really understand mathematics? Is the engineer able to use all that math background he acquire during his formation? How "impossible" is to teach math to an engineer?. In this document we make a brief analysis about the following questions: What competencies must the forming engineers develop? Why is it desirable that they have different kinds of thinking? How do mathematics help to develop such skills? Why is it important that engineer students work in a practical contextual environment while study mathematics? And finally, we outline some ideas that can be helpful in a subsequent work to tackle some calculus (and other subjects) topics by mean of through numeric methods and relations between "real" problems and mathematics.

(Key words: calculus, numerical methods, mathematical competencies.)

A Salvador Alonso Olvera.

Agradecimientos

Agradezco el invaluable apoyo de mi familia, extendiendo el concepto lo más amplio posible y a las personas que me han alentado desde un principio en la búsqueda de mi superación personal y profesional. Una de las primeras consecuencias tangibles de ese apoyo es este trabajo.

Asimismo, doy gracias a mis alumnos y alumnas, quienes son el motivo de mis deseos de continua formación como docente.

Finalmente, gracias al CONACYT por existir.

Índice

1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo inicia con una breve reflexión acerca de la relación entre las matemáticas y la ciencia, la tecnología y la ingeniería, pensando, principalmente, en la educación matemática para las ingenierías.

Posteriormente se discute, brevemente, acerca de la falta de vinculación entre diferentes temas de matemáticas con otros temas de las diferentes especialidades de la ingeniería y con temas de las matemáticas mismas. Lo que constituye la problemática esencial que nos interesa y que toca, necesariamente, el problema de los perfiles docentes.

En la tercera sección se plantea el objetivo central de nuestro trabajo.

La parte titulada "Reflexión" constituye el núcleo de nuestro trabajo. En esta sección se discute, primeramente, algunas relaciones entre matemáticas e ingeniería, pensando en contenidos, competencias y enfoques de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la formación de ingenieros. Posteriormente se profundiza la discusión sobre la falta de vinculación de diferentes temas de matemáticas en algunos cursos tradicionales. Luego se abordan algunas problemáticas didácticas que van desde la cuestión de los enfoques hasta el uso de tecnología informática pasando por la cuestión del nivel de rigor necesario en la formación de ingenieros y proponiendo y analizando el enfoque del aprendizaje basado en problemas.

Esta sección termina con ejemplos concretos de relaciones entre diferentes temas de matemáticas de los que se piensa, en un futuro, desarrollar propuestas didácticas completas.

El trabajo se cierra con algunas consideraciones finales y con la línea que nos marcamos para un desarrollo posterior del que este trabajo es la base para tener un marco teórico.

2. PRESENTACIÓN

Una gran motivación que tiene el hombre para crear matemáticas es la necesidad de resolver sus propios problemas. Esto es, las matemáticas aparecen como una herramienta para resolver situaciones tanto de sobrevivencia como para mejorar sus condiciones de vida. Actualmente el ser humano busca tanto comprender el mundo en que vive como modificarlo para sacarle mayor provecho. Ambas motivaciones dan lugar a lo que se conoce como ciencia y tecnología, respectivamente y éstas se sirven de la matemática, entre otras cosas, también como lenguaje. Así, la matemática se desarrolla paralelamente a la ciencia y a la tecnología. En este aspecto, el desarrollo de la matemática no es responsabilidad únicamente del matemático. Requiere del trabajo de científicos e ingenieros, pues son ellos quienes poseen el conocimiento sobre los problemas a resolver, es decir, algunas de las necesidades esenciales que originan la investigación matemática.

Dado que en el quehacer matemático están involucrados al mismo tiempo tanto matemáticos como científicos e ingenieros, éstos últimos deben desarrollar capacidades de comunicación por medio del lenguaje común de las matemáticas en pos de una correcta traducción de un modelo expresado en un determinado lenguaje a otro u otros. Es evidente que el proceso es delicado, pues hay un significado que debe preservarse y en torno al cual giran todos los modelos (Bricio, 1992).

Específicamente, un estudiante de ingeniería debe invertir al menos un tercio de su formación profesional en asignaturas relacionadas con las matemáticas (Kümmerer, 2001), por lo que siempre ha sido importante la cuestión curricular de qué tipo de matemáticas debe aprender el ingeniero. Se da por sentado que algunos elementos de álgebra lineal, cálculo (de una y varias variables), ecuaciones diferenciales, matemáticas discretas, probabilidad y estadística, constituyen el núcleo de las matemáticas para ingenieros en las universidades (Alsina, 2001). Además de la cuestión del contenido de los cursos de matemáticas para formar ingenieros, es extremadamente importante la cuestión de cómo deben abordarse dichos temas. De forma reiterada se afirma que el trabajo del ingeniero consiste en diseñar soluciones que resuelvan problemas aplicando sistemáticamente sus conocimientos científicos y teóricos. Esta concepción de núcleo básico de conocimientos matemáticos implica una cierta independencia del contexto, de la forma de abordar dichos conocimientos, ciertamente de los intereses personales del estudiante, del área de la ingeniería que se estudia, del contexto cultural y social, etc. No es deseable tener estudiantes de ingeniería con buenas calificaciones y no tener conciencia de los problemas del mundo real, ya que las aplicaciones al mundo real son parte de la educación del ingeniero (Pollak, 1988).

3. ANTECEDENTES

Un fenómeno identificado por diversos investigadores de matemática educativa, en la formación de futuros profesionistas, es el problema de la vinculación entre los diferentes cursos de matemáticas que conforman la base de dicha formación. Se trata de un fenómeno mediante el cual muchos estudiantes presentan dificultades para vincular conocimientos que adquieren en los diversos cursos de matemáticas (Cálculo Diferencial e Integral, Métodos Numéricos, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra Lineal, etc.) tanto a nivel “interno”, es decir, entre áreas diferentes de la misma matemática como a nivel “externo”, es decir, la vinculación de las matemáticas con tópicos de otras áreas del conocimiento.

Todos los programas de formación de futuros ingenieros se basan en la idea de que un estudiante de ingeniería debe tener una sólida formación matemática. La justificación de esta afirmación, así como diversos contenidos serán abordados brevemente en una sección posterior. Deberían ser claras para todos los docentes, las siguientes cuestiones: no posible que un estudiante de ingeniería comprenda un conjunto de temas de forma aislada, se debe fomentar en los estudiantes la capacidad de formar redes entre los conocimientos de diversas áreas de la matemática y entre estos últimos y temas relativos a otras áreas del conocimiento, cualquier modelo curricular o metodología didáctica debería favorecer que el estudiante pudiera establecer dicha vinculación. Ciertamente no es una tarea ni sencilla ni automática por lo que no se le debería dejar sólo al estudiante. El rol del docente (tanto sus conocimientos como sus herramientas didácticas) juega un papel determinante en la tarea de construir dicha vinculación. Sin embargo, se enfrenta a varios problemas difíciles de resolver, ya que muchos estudiantes de ingeniería no están interesados en las matemáticas principalmente y además, cuentan ya con ciertos conocimientos de matemáticas a su disposición antes de tomar su primer curso de su especialidad (Kümmerer, 2001), los cuales han adquirido en su educación previa.

Es muy probable que la falta de vinculación a la que aludimos se derive del perfil del docente. Consideramos que el perfil ideal básico del profesor de matemáticas en las facultades de ingeniería debería ser el de un experto en matemáticas aplicadas, pudiendo ser un matemático con orientación a las aplicaciones o un ingeniero con una sólida formación en matemáticas, por ejemplo, en Italia ya desde finales de los años ochenta surgieron carreras de ingeniería-matemática (Bricio, 1992). Actualmente en nuestro país están surgiendo también este tipo de carreras, por ejemplo en el Instituto Politécnico Nacional existe la carrera de ingeniería matemática y en la Universidad Autónoma de Querétaro se ofrece una maestría en ciencias con especialidad en ingeniería matemática.

Además el docente debe disponer de amplias herramientas didácticas que le permitan seleccionar, dependiendo del contexto, qué temas deben enseñarse con mayor profundidad.

Nuestra experiencia, primero, como estudiante de ingeniería en sistemas computacionales en el Instituto Tecnológico de Querétaro y después como docente de matemáticas en la misma institución nos ha hecho notar que los cursos de matemáticas básicas se imparten, en muchos casos, de manera aislada sin resaltar relaciones ni con otras áreas de las matemáticas ni con temas del área de especialidad salvo los casos más evidentes, por ejemplo, Cálculo Diferencial con cálculo integral.

Lo anterior impacta en la capacidad del estudiante para articular sus conocimientos de cada área de las matemáticas en el momento de resolver problemas de ingeniería, tal como ha sido afirmado por varios autores (Pollak, 1988; Gómez, 2005; Font, 2004).

4. OBJETIVOS

Nuestro interés central estriba en reflexionar sobre el uso de las matemáticas en la formación de ingenieros, principalmente sobre la poca o nula relación que existe entre diversos temas de matemáticas con otros temas de matemáticas o con temas de diferentes áreas de especialidad en la ingeniería. Específicamente nos interesa reflexionar sobre la relación entre el Cálculo de una variable y los métodos numéricos en el contexto de los programas de matemáticas básicas para ingenieros en sistemas computacionales en el Instituto Tecnológico de Querétaro con el fin de, en el futuro construir una propuesta alternativa de conexión didáctica entre dichas áreas de las matemáticas.

5. REFLEXIÓN

5.1 MATEMÁTICAS E INGENIERÍA

La pregunta "¿por qué aprender matemáticas?" ha sido abordada en varios trabajos. Sería una contradicción tener estudiantes de ingeniería sin plena conciencia de los problemas del mundo real. ¿Qué papel juegan las matemáticas en la creación de esta conciencia? A primera vista, parece que ésta corre a cargo de la formación de especialidad y no de la formación matemática. ¿En qué medida es necesario que la formación matemática sea involucrada en esta responsabilidad? Creemos que la formación matemática que el estudiante de ingeniería adquiere durante el período universitario es crítica, vista no como el cúmulo de conocimientos sobre ciertas áreas de la matemática por sí mismo, sino porque permite el desarrollo de capacidades de pensamiento y razonamiento específicos como los descritos por Pollak (1988), quien sugiere al menos cuatro propósitos de la educación matemática que, vistos de otro modo, podrían considerarse "categorías de matemáticas" que deben ser aprendidas: las matemáticas que se necesitan para la vida diaria, las necesarias para una ciudadanía inteligente, las necesarias para la vocación o profesión y las que son parte de la cultura total humana.

Nadie duda que las matemáticas juegan un papel fundamental para el correcto desenvolvimiento del sujeto en la vida en sociedad. Esta afirmación se sustenta en la necesidad de, entre otras cosas, «la habilidad para razonar a partir de datos, manejar situaciones probabilísticas, [...] pensar algorítmicamente», etc. para poder hablar de una "ciudadanía inteligente" que participe en la toma de decisiones de una sociedad democrática. (Pollak, 1988 pp. 33-34).

Centrando la mirada en el tercer propósito que sugiere Pollak, de manera natural surge la pregunta: ¿Qué matemáticas debe aprender el ingeniero? Y esto nos lleva a considerar al menos una definición de lo que se entiende por ingeniero, del trabajo que se espera que realice y de sus necesidades matemáticas en su práctica actual. Baber (1998) aporta una visión interesante en el contexto de la formación científica del ingeniero:

«La aplicación del conocimiento y principios científicos a la tarea de diseñar y construir un objeto, máquina o sistema de valor económico es una definición típica de ingeniería actualmente. Es especialmente digno de notarse que el ingeniero, regular y sistemáticamente emplea bases teóricas y científicas para verificar – por medio de cálculos sistemáticos antes de que el objeto sea construido – que el diseño propuesto satisfará sus especificaciones.» (p. 40)

Cabe señalar que, aunque el trabajo de Baber consiste en una crítica a la formación científica (matemática, específicamente) del ingeniero en software, es posible rescatar ciertas afirmaciones y señalamientos que pueden generalizarse al área de la ingeniería en sistemas computacionales. Así, Baber sugiere que la formación del ingeniero debe contar con bases sólidas en las ciencias. ¿En qué consisten esas bases? Es decir, ¿qué matemáticas debe aprender el ingeniero para dotarlo de elementos que le permitan ejercer su labor? Parece una pregunta cuya respuesta es compleja, puesto que además de elementos matemáticos, el ingeniero debe ser capaz de desarrollar distintas formas de pensamiento matemático, a saber, pensamiento analítico, geométrico y algebraico. Pero más allá de éstos, es deseable que el ingeniero sea capaz de obtener conclusiones o tomar decisiones basándose en datos; determinar la acción o decisión óptima de entre las múltiples que puede llevar a cabo para alcanzar una meta planteada; desarrollar habilidades en combinatoria, modelado, etc. (Pollak, 1988). Es necesario o al menos deseable que el ingeniero desarrolle estas capacidades para que su trabajo corresponda a la definición que dimos líneas arriba.

Nos cuestionamos ahora cómo los modelos de formación se han organizado para satisfacer las necesidades de los futuros ingenieros, antes expuestas. La inclusión de diferentes temas de matemáticas no es un tema reciente. Ya desde hace más de dos décadas, Bony (1988) sugería dos niveles de tópicos matemáticos que deberían o podrían ser enseñados a estudiantes de ciencias e ingenierías, dividiéndolos como sigue:

Nivel básico:

Cálculo, incluyendo ecuaciones diferenciales ordinarias.

Álgebra lineal.

Probabilidad.

Estadística.

Matemáticas discretas.

Temas selectos de geometría.

Nivel avanzado:

Variable compleja.

Series de Fourier, Transformadas de Laplace, convolución.

Integración de Lebesgue.

Teoría de distribuciones.

Ecuaciones diferenciales parciales.

Espacios de Hilbert.

Cálculo tensorial.

Teoría de grupos.

Funciones especiales.

Geometría.

Cálculo de variaciones.

Sistemas dinámicos.

Fractales.

Teoría del caos.

Procesos estocásticos.

Análisis numérico.

Fenómenos no lineales.

Etc.

Da la impresión de que cubrir eficientemente los temas del nivel avanzado es una tarea difícil de lograr en una formación de futuros ingenieros, en el caso que se piense que se tengan que cubrir todas las áreas. Sin embargo, tratando de acotar los temas podríamos buscar cuáles se encuentran en la intersección de diferentes propuestas ya que la utilidad de los temas listados en el nivel avanzado depende, en gran medida, de áreas específicas de la ingeniería.

Recientemente y en el contexto local existen estructuras curriculares de licenciaturas y programas de posgrado que son útiles para ejemplificar. A continuación se citan algunos ejemplos surgidos en la Universidad Autónoma de Querétaro.

La propuesta para la creación de la licenciatura en ingeniería biomédica contempla las siguientes áreas matemáticas:

Cálculo Diferencial.

Álgebra lineal.

Probabilidad y estadística.

Cálculo Integral.

Ecuaciones diferenciales.

Cálculo multivariable.

Análisis numérico

Por su parte, la reestructuración del programa de maestría en ingeniería de vías terrestres, transporte y logística propone en su paquete básico materias con un fuerte contenido matemático como:

Métodos matemáticos de captación.

Análisis e interpretación de datos.

El paquete obligatorio para vías terrestres incorpora:

Diseño geométrico de vías terrestres.

El paquete obligatorio para transporte y logística integra:

Optimización de sistemas I.

Optimización de sistemas II.

Y el paquete especializado propone materias optativas como:

Pensamiento esbelto y seis sigma.

Modelos de investigación de operaciones en transportes.

Modelización avanzada de la demanda de transporte.

Entre otras.

Finalmente, la propuesta para la creación del doctorado en mecatrónica ofrece las siguientes materias optativas, con innegable contenido matemático:

Dinámica y vibraciones.

Procesamiento de señales.

Control inteligente.

Mecánica del medio continuo.

Mecánica estructural y materiales.

Entre otras.

Otro ejemplo del tipo de matemáticas que se necesitan en la formación de ingenieros a nivel global es el programa curricular de la maestría en ciencias en mecatrónica de la Universidad de Ciencias Aplicadas en Aachen en Alemania, que está compuesto por materias como:

Matemáticas avanzadas de ingeniería.

Ciencias computacionales.

Y materias optativas como:

Optimización matemática.

Simulación de estructuras, campos y flujos.

Realidad virtual y simulación gráfica.

Cabe destacar el énfasis que estos programas de posgrado hacen en temas como las transformadas de Laplace y de Fourier por ser técnicas importantes para el análisis y diseño de sistemas mecatrónicos, así como en la adquisición de conocimiento matemático y tecnológico que se aplica tanto en problemas de ingeniería como de administración de negocios ya que los métodos matemáticos y de tecnologías de la información naturalmente versátiles apoyan el objeto de difundir la comprensión de los graduados y su posible empleo en equipos interdisciplinarios (UAS, 2011).

Científicos e ingenieros deben desarrollar ciertas competencias propias de la actividad matemática. Estas capacidades de comunicación se entienden como competencias matemáticas, lo que significa: «poseer habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra matemáticos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden tener un protagonismo» (Niss y Højgaard, 2011. p. 49). En este sentido Devlin (2005) menciona nueve competencias básicas, a saber:

Sentido numérico.

Habilidad numérica.

Habilidad algorítmica.

Razonamiento lógico.

Razonamiento espacial.

Razonamiento relacional.

Sentido de causa y efecto.

Construir y seguir una cadena causal de hechos o eventos.

Manejo de la abstracción.

En este sentido, los cursos de matemáticas deben perseguir que los estudiantes logren desarrollar estas competencias. Desde luego, éstas cobran una notable relevancia en los ingenieros en formación, puesto que empatan las características deseables en un ingeniero profesional.

5.2 FALTA DE VINCULACIÓN ENTRE TEMAS

El trabajo de tesis de maestría de Bell (2003) consiste en una propuesta para desarrollar un curso de geometría analítica en bachillerato. A pesar de que no se refiere al nivel universitario, consideramos que ilustra uno de los problemas mencionados en la sección anterior:

En general, los estudiantes de este nivel (aún aquellos que ya cursaron geometría analítica), conciben a la matemática como una serie de temas o conceptos independientes. [...] Lamentablemente, si un estudiante de matemáticas concibe a esta ciencia como una serie de temas o conceptos independientes, y no como un todo integrado, entonces la posibilidad de que reconozca sus principios generales relevantes es muy reducida y, como consecuencia de ello, se genera en él la ya consabida sensación de que la matemática es un conjunto enorme de reglas y procedimientos difíciles de aprender. (pp. 3-4).

La preocupación de Bell es entonces, desarrollar instrumentos didácticos que le proporcionen al alumno «la posibilidad de aplicar de manera integrada los conceptos matemáticos que ha ido construyendo a lo largo de su formación» (p. 5).

Si bien, coincidimos con la preocupación de Bell (2003) en términos de que el estudiante, en nuestro caso de ingeniería, debe ser capaz de identificar las relaciones que guardan entre sí los diferentes temas de matemáticas que debe cursar, consideramos que además debe desarrollar un pensamiento crítico y analítico lo suficientemente agudo para que pueda identificar también las relaciones que existen entre dichos conocimientos matemáticos y los propios de su área de conocimiento. Es esta una competencia del hacer matemáticas a que se refiere Devlin (2005). Hablamos de la capacidad que desarrolla el estudiante de ingeniería de relacionar sus conocimientos para proponer soluciones a problemas diversos desde diferentes ópticas y con diferentes elementos, tomando en cuenta diferentes factores. Es esta competencia matemática la que permitirá al ingeniero en formación tener más herramientas para desarrollar su trabajo. En otras palabras, si el estudiante de ingeniería concibe las matemáticas como conocimientos "atómicos", independientes entre sí, entonces esto le impediría asimilar los conocimientos para poder aplicarlos a la resolución de problemas matemáticos y de ingeniería en su vida profesional.

Veamos brevemente un caso concreto que se refiere al álgebra lineal. En la investigación de Gómez (2005) se propone la creación de un curso de álgebra lineal a partir de un conjunto de aplicaciones de temas selectos de esta rama de las matemáticas. El autor afirma que «en muchos cursos, la importancia del álgebra lineal en los campos donde se aplica no ha sido comunicada a los estudiantes» (p.1), es decir, frecuentemente no se logra tender un puente entre dicha rama de las matemáticas y temas propios de las disciplinas profesionales, ya sea ingeniería, ciencias computacionales, investigación de operaciones, economía y estadística, entre otras. La preocupación de Gómez consiste en que el alumno pueda vincular ciertos temas del álgebra lineal con otros de su área profesional. Se hace énfasis en la dificultad intrínseca dentro de la misma álgebra lineal, dado que «para aprender los conceptos unificadores y generalizadores del álgebra lineal hay que pagar un precio: aprender una nueva teoría formal que requiere un gran esfuerzo» (Gómez, 2005, p.2). Esta dificultad se deriva de al menos dos factores que podemos identificar en el trabajo de Gómez: i) un gran número de definiciones y teoremas que el estudiante debe aprender (con la promesa de que algún día le serán útiles, como única motivación). ii) «la carencia de conexión entre los nuevos conceptos formales y sus conceptos o concepciones previamente adquiridos en áreas más restringidas» (p. 6) Con base en lo anterior, Gómez propone diseñar actividades para que el estudiante pueda reflexionar sobre el concepto matemático que está adquiriendo, presentando un contexto práctico que implique ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales, geometría, etc.

El ligar los conceptos matemáticos con conceptos de otras áreas del conocimiento puede tener una recaída positiva en términos de la motivación del estudiante. Como señala Alsina (2001):

Sería deseable que los cursos de matemáticas permitan a los estudiantes adquirir un rango de conocimiento esencial, habilidades y formas de pensamiento matemático; cada actividad profesional demanda un particular conocimiento práctico matemático, así que los cursos de matemáticas deberían incluir aplicaciones, ejemplos, procesos de modelado, etc. con los cuales motivar a los estudiantes. (p. 10)

Este tipo de ideas ponen cuestiones interesantes relativas a ¿cómo se elige un contexto adecuado? ¿Qué características debe presentar? Es decir, ¿cualquier problema situado sirve para nuestros fines? Es fundamental que el diseño de actividades con que se pretenda abordar el concepto matemático que se presenta al estudiante y la elección del contexto práctico en que se desarrollará dicha actividad tengan en cuenta en todo momento a qué tipo de futuro profesionista está enfocado.

Además de lo anterior es necesario considerar cómo adaptar el contexto para llevarlo al aula. La elección del contexto podría hacerse buscando que éste sea cercano al estudiante, de manera que le permita asociar un significado al enfoque matemático que éste implique. Es decir, se asume que los conocimientos sobre el contexto podrían favorecer la generación/construcción de conocimientos/significados sobre el modelo matemático en uso. En el nivel universitario podría decirse que las matemáticas se enseñan por considerarlas una disciplina útil tanto para la formación básica como para la de especialidad. Por lo que una alternativa sería investigar sobre el uso de modelos matemáticos en las disciplinas de especialidad y/o en la práctica. Una complejidad que tendría que enfrentarse es que tanto las disciplinas como la práctica obedecen a sus propias lógicas y por tanto es necesario comprenderlas, al menos en cierta medida, para poder elegir el contexto de uso de dichos modelos (Macías, 2012).

También es importante no dejar de lado las implicaciones que tiene adaptar un contexto práctico al aula. «La aplicabilidad universal de las matemáticas yace en su abstracción: ir de lo concreto a lo abstracto significa al mismo tiempo aumentar el número de situaciones en que pueden ser reconocidos paralelismos estructurales» (Kümmerer, 2001. p. 325). Se debe ser consciente de que la mayoría de las áreas de la matemática emergen directa o indirectamente de aplicaciones. Y, que los ingenieros, seguramente aplicarán las matemáticas en sus problemáticas de ingeniería.

Los trabajos de Bell (2003) y Gómez (2005), desde áreas diferentes y desde niveles escolares diferentes plantean la misma problemática de cómo podríamos tender puentes entre las ramas de la matemática en las que estamos interesados y las disciplinas propias del ingeniero buscando que el estudiante logre un aprendizaje significativo.

5.3 ALGUNAS PROBLEMÁTICAS DIDÁCTICAS

5.31 LA CUESTION DEL ENFOQUE

Además de la cuestión del contenido y de las competencias que conforman los cursos de matemáticas del ingeniero, debe mirarse el cómo abordar dichos temas. De forma reiterada se afirma que el trabajo del ingeniero consiste en diseñar soluciones que resuelvan problemas aplicando sistemáticamente sus conocimientos científicos y teóricos. En el caso particular del estudiante de ingeniería, es común que cuando éste se convierte en ingeniero profesional y se enfrenta con los problemas para los cuales, al menos en teoría, la escuela lo preparó, se dé cuenta que no posee los elementos suficientes para desarrollar su trabajo.

Como señalamos antes, el docente, matemático con un fuerte conocimiento sobre un área de la ingeniería en particular o bien, ingeniero con una sólida formación matemática debe decidir con qué profundidad se deben abordar los contenidos de su asignatura y de la cual es experto: enseñar lo “básico” o enseñar lo “actual”; mostrar las técnicas y herramientas utilizadas hoy en el mundo ingenieril para diseñar y resolver problemas o los fundamentos que le permitirán desarrollar las capacidades para aprender a utilizar éstas por su cuenta. Por si esto no fuera suficientemente complejo, el cómo poder lograr un empate entre ambos niveles de profundidad de conocimientos es aparentemente menos complicado que determinar cómo hacerlo antes de que se termine el tiempo del que se dispone para el desarrollo de un curso estándar. En este mismo sentido, es necesario cuestionarse respecto al nivel teórico matemático al que deben abordarse los temas de las asignaturas de matemáticas y desde luego, qué herramientas serán útiles para alcanzar tal nivel de profundidad.

5.32 LA CUESTION DEL RIGOR

Siguiendo a Bony (1988), muy sintéticamente, podría decirse que hay dos categorías de clases de matemáticas para ingenieros: las que hacen énfasis en la eficiencia y las que hacen énfasis en el rigor.

Desde nuestro punto de vista, el docente de matemáticas que trabaja con estudiantes de ingeniería debe cuestionarse respecto a la eficiencia del rigor: «se debe poner atención a la simplicidad o a la fuerza de un teorema, no a la dificultad de su demostración» (p. 23). Si bien es cierto que el estudiante de ingeniería debe entender las matemáticas, porque

Memorizar la fórmula o el método [...] está bien para el libro de texto estándar y para resolver problemas de ayer. Pero simplemente no sirve lo suficiente, a menudo, en el mundo real. Los ejercicios al final de la página del libro de texto de matemáticas usualmente ejercitan lo que se vio al inicio de la página, pero cuando nos topamos con un problema del mundo real, no sabemos en qué página viene, o incluso si viene en el libro. Entender es esencial para aplicar las matemáticas. Comprender cuándo, cómo y por qué funcionan las matemáticas es esencial para un trabajador en la industria. (Pollak, 1988)

Efectivamente, no puede demostrarse todo lo que se afirma en la clase de matemáticas dado que eso no es el trabajo esencial del ingeniero. Además, se corre el riesgo de restarle importancia a las aplicaciones al mundo real y por tanto, al desarrollo de las capacidades de modelado en particular y de resolución de problemas en general. No es deseable ser un estudiante de ingeniería con buenas calificaciones y no tener conciencia de los problemas del mundo real, ya que las aplicaciones al mundo real son parte de la educación del ingeniero. (Pollak, 1988)

Es deseable lograr un balance entre ambas categorías y para tal fin, es necesario utilizar herramientas y definir qué temas de matemáticas deben enseñarse con mayor profundidad.

5.33 EL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

Consideramos que un buen instrumento que permite relacionar los diferentes tipos de matemáticas entre sí y con temas de otras áreas del conocimiento es el aprendizaje basado en problemas (ABP o PBL, por sus siglas en inglés).

El aprendizaje basado en problemas para pequeños grupos, autoasistido, autodirigido, interdependiente fue presentado formalmente como una opción de aprendizaje por la escuela médica de McMaster a finales de la década de 1960. «El aprendizaje basado en problemas es un método mediante el cual los alumnos construyen su conocimiento sobre la base de problemas de la vida real. No se trata de resolver problemas y encontrar la solución acertada sobre una información proporcionada previamente, sino todo lo contrario» (Font, 2004). De hecho, una de las ventajas que otorga el ABP en matemáticas es la forma en cómo se concibe al objeto matemático que deseamos que el estudiante aprenda. Mientras tradicionalmente primero se expone la información y posteriormente se busca su aplicación en la resolución de un problema, en el caso del ABP primero se presenta el problema, se identifican las necesidades de aprendizaje, se desarrolla la información necesaria y finalmente se regresa al problema. (ITESM, 2003).

El desarrollo de un ambiente de aprendizaje basado en problemas deberá estar fundamentado en un contexto real significativo para el estudiante y le permitirá la capacidad de adquirir tanto el objeto matemático que queremos transmitir como los diferentes tipos de pensamiento que describimos líneas arriba y que consideramos deseables en un ingeniero (Dochy, et al. 2003).

Tres características básicas de este modelo (Torp y Sage, 1998) citadas por Díaz-Barriga (2012) se describen a continuación:

Compromete activamente a los estudiantes como responsables de una situación problema.

Organiza el currículo en torno a problemas holistas que generan en los estudiantes aprendizajes significativos e integrados.

Crea un ambiente de aprendizaje en el que los docentes alientan a los estudiantes a pensar y los guían en su indagación, lo que les permite alcanzar niveles más profundos de comprensión.

«El ABP pretende una formación en competencias profesionales. De ahí, que entre sus objetivos, se proponga estimular capacidades como el liderazgo, la comunicación, la toma de decisiones, el pensamiento crítico, la creatividad y el trabajo pluridisciplinar.» (Font, 2004)

La gran fuerza del ABP consiste en la oportunidad que presenta al alumno para enfrentar al problema planteado «desde más de una sola óptica, y elegir o construir una o varias opciones viables de solución». Lo que permite desarrollar habilidades de argumentación e integración y transferencia de conocimientos. (Díaz-Barriga, 2012).

En términos generales, buscamos fomentar en el alumno al menos las primeras tres de las cinco habilidades que según Díaz-Barriga (2012), permite el ABP y que planteamos a continuación:

Abstracción: implica la representación y manejo de ideas y estructuras de conocimiento con mayor facilidad y deliberación.

Adquisición y manejo de información: conseguir, filtrar, organizar y analizar la información proveniente de distintas fuentes.

Comprensión de sistemas complejos: capacidad de ver la interrelación de las cosas y el efecto que producen las partes en el todo y el todo en las partes, en relación con sistemas naturales, sociales, organizativos, tecnológicos, etcétera.

Experimentación: disposición inquisitiva que conduce a plantear hipótesis, a someterlas a prueba y a valorar los datos resultantes.

Trabajo cooperativo: flexibilidad, apertura e interdependencia positiva orientadas a la construcción conjunta del conocimiento.

Nosotros compartimos la preocupación por enfatizar el abordaje de problemas «que promuevan el razonamiento, [...] la identificación y empleo de información relevante, la toma de decisiones ante diversos cursos de acción o eventuales soluciones, a la par que planteen conflictos de valores y constituyan un catalizador del pensamiento crítico y creativo» (Díaz-Barriga, 2012), al mismo tiempo que impliquen el manejo de conceptos abstractos y la interrelación de los conceptos que van adquiriéndose.

Definir si una situación puede considerarse problema es bastante subjetivo. Lo que a un estudiante de nivel básico puede representarle un problema quizá no lo sea para un estudiante de nivel superior o incluso para un estudiante del mismo nivel. Depende del acervo de conocimientos que posee quien lo aborda, pero también de la capacidad que tenga el sujeto para relacionar dichos conocimientos de forma que le sean de utilidad en la resolución del problema. Parra (2001) da una definición general e incluso intuitiva: «Un problema plantea una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación» (p. 14). Sin embargo, el sujeto que se enfrenta al problema debe disponer «de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no (disponer) de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata».

Desde este marco de referencia, se considera problema a una situación cuya solución deba realizarse con base en un sistema de conocimientos adquiridos pero que permita derivar ideas nuevas.

Según Parra (2001), «la resolución de problemas se refiere a la coordinación de experiencias previas, conocimiento e intuición, en un esfuerzo para encontrar una solución que no se conoce» (p. 15).

La existencia de temas unificadores (Bony, 1988) da fuerza a nuestro objetivo. Existen temas de matemáticas que nacen o surgen naturalmente en otros temas de física o ingeniería, por ejemplo, el análisis de vibraciones que estudian los ingenieros mecánicos o civiles está naturalmente vinculado con el modelado de ecuaciones diferenciales del mismo modo que la teoría de gráficas aparece de forma natural en el análisis de algoritmos que realiza un ingeniero en sistemas o un ingeniero en software. Los estudiantes han tomado diferentes cursos de matemáticas y han adquirido conocimientos sobre diferentes temas aislados (o al menos es lo que suponemos), pero la identificación y abordaje de temas unificadores que les permitan entrelazar estos conocimientos “dispersos” es de mucha más utilidad.

El problema es el cómo abordar estos temas unificadores.

Siguiendo a Polya (1989), el proceso de resolución de un problema consiste en cuatro pasos claramente identificables:

Comprender el problema.

Concebir un plan.

Ejecutar el plan.

Visión retrospectiva.

La parte que captura nuestra atención es el desarrollo del plan para la resolución del problema. En su descripción sobre “concebir un plan”, Polya sugiere la pregunta: ¿ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema? Y es precisamente esta pregunta la que el estudiante debería plantearse para empezar la construcción del objeto que se desea introducir. Deseamos que el estudiante se cuestione sobre su conocimiento previo. Sabemos (o suponemos) que posee un conjunto de conocimientos aislados sobre el problema (al menos inconscientemente), ya que éste es propio de su área de conocimiento (la ingeniería); por lo tanto, puede generar hipótesis o diferentes estrategias para atacarlo, pero a su vez, éstas le generan dudas que ocasionan preguntas para las cuales no tiene respuesta aún.

Es por eso que podemos seguir a Font (2004) respecto a las características del problema:

El problema así planteado tiene dos características esenciales:

La familiaridad.

El aprendiz ha observado alguna vez o posee información cotidiana sobre el fenómeno descrito como problema.

La contextualidad.

Los fenómenos se presentan dentro de un contexto fácilmente identificable.

Estas características deben servir de motivación al estudiante, de modo que le resulte evidente el objetivo de su aprendizaje.

5.34 EL USO DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA

El uso de herramientas didácticas en la actividad docente, específicamente en los cursos de matemáticas a nivel licenciatura, es aún un tema de debate. El carácter prescindible o imprescindible de éstas depende de factores como la concepción del docente respecto a su actividad y a la matemática misma; de su formación como profesionista y de su formación como docente, etc.

Consideramos que estos factores tienen un impacto directo en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas y que la conjunción de factores tiene una unicidad ligada al profesor. Dos profesores con perfiles, incluso ligeramente diferentes no tendrán jamás exactamente las mismas concepciones por lo que su actividad didáctica en cursos de las mismas materias puede ser incluso muy diferente.

La problemática de la traducción entre el lenguaje común y el lenguaje matemático ha existido siempre. Sin embargo, ahora con la amplia difusión de la informática surgen nuevas necesidades de traducción pues además interviene un lenguaje informático general, uno relativo a un software en específico e incluso otro idioma diferente al del usuario.Respecto a las herramientas didácticas, el uso de la tecnología informática en la enseñanza de las matemáticas ha tenido un gran impacto en las décadas recientes. Ya desde finales de la década de los ochenta se vislumbraba un cambio considerable en la forma de enseñar y aprender matemáticas.

Según Murakami y Hata (1988), los cambios que el uso de la tecnología traería a la educación matemática pueden ser divididos en (i) cambios en la metodología de la educación matemática y (ii) cambios en los tópicos enseñados en la educación matemática.

Las consecuencias de la integración de la informática en la enseñanza de la matemática es un tema de debate, aún hoy. Sin embargo, una de las opiniones coincidentes entre los que impulsan dicha integración es el hecho del ahorro de tiempo que incluso permite cubrir más temas de los que dicta el curso oficial o cubrir los temas oficiales a mayor profundidad (Balderas, 2002) lo que es especialmente importante en las aplicaciones. El mismo Bony (1988) sugiere que las ventajas de los equipos de cómputo deben ser aprovechados, por ejemplo, en el abordaje por medio de métodos numéricos para calcular integrales, soluciones de ecuaciones diferenciales, sistemas lineales, etc.

Siguiendo estas afirmaciones, algunos temas que han sido enseñados de forma tradicional (sin el uso de tecnología informática) han perdido importancia por lo que el tiempo destinado a ellos debe ser reducido (Bony, 1988). El tiempo que se gana, puede aprovecharse para implementar nuevas técnicas que mejoren la comprensión de los temas que permanezcan medulares. En otras palabras, la metodología de la educación matemática tiene que cambiar. Es decir, la metodología convencional en la cual el profesor enseña todo por sí mismo deberá ser reemplazada por una nueva, en la que el profesor pueda, selectivamente, usar tecnología informática para un tema o situación particular en que dicha tecnología sea más efectiva (Murakami, 1988). Pensemos, sólo para dar un ejemplo, en el caso de la descomposición de una fracción en fracciones parciales para calcular una integral o una transformada de Laplace, en este es más efectivo usar un software que permita hacer tal descomposición para que los esfuerzos y la atención del alumno se concentren en lo esencial, que sería el cálculo de la integral o de la transformada inversa.

La integración de software de tipo CAS en la enseñanza de las matemáticas ha sido abordada también por diversos autores (Murakami, 1988, Balderas 2002). Una consecuencia del uso de tecnología es la necesidad de diferenciar el contenido esencial del de menor importancia así como diferenciar entre los contenidos que pueden ser reemplazados con el uso de software de aquellos en los que esto no es posible (Murakami, 1988) y esto trae consigo una gran ventaja: “el decremento de la cantidad de operaciones largas, tediosas y repetitivas y la obtención de mayor espacio para discusiones más conceptuales” (Balderas, 2002).

5.4 RELACIONES ENTRE TEMAS DE DIFERENTES MATERIAS DE MATEMÁTICAS

5.41 RELACIÓN 1: INTERPOLACIÓN

En el quehacer del ingeniero, con frecuencia se encontrará con que tienen que estimar valores intermedios entre puntos asociados con datos. Si sólo se conocen algunos valores aislados se busca entonces una función cuya gráfica incluya a los puntos conocidos lo que nos permitirá aproximar otros valores. De preferencia, la función debe ser lo más sencilla posible por lo que se busca una aproximación mediante una función polinomial (que son muy sencillas en el sentido de que es fácil obtener imágenes, derivar e integrar). Entonces, el método más común que es usa para este propósito es la interpolación polinomial. Dados $n+1$ puntos asociados con datos, hay uno y sólo un polinomio de grado n que pasa a través de todos los puntos. Por ejemplo, hay sólo una línea recta que une dos puntos. De manera similar, únicamente una parábola une un conjunto de tres puntos. La interpolación polinomial consiste en determinar el polinomio único de *n*-ésimo grado que se ajuste a $n+1$ puntos asociados con datos. Este polinomio proporciona un medio para calcular valores intermedios.

La primera cuestión es saber si el problema tiene o no solución, es decir, si existe siempre un polinomio con esas características. Luego, en el caso que exista, debemos ver la manera de construirlo.

Consideremos el problema desde un punto de vista general: de un determinado fenómeno físico se tiene la siguiente información:

$$f(c_0)=b_0,\ \ f(c_1)=b_1,\ \ f(c_2)=b_2,\ldots,\ \ f(c_n)=b_n$$

y queremos aproximar la función f mediante una función polinomial de grado n. Este problema equivale al problema de buscar un polinomio cuya gráfica pase por los puntos

$$(c_0,b_0),(c_1,b_1),(c_2,b_2),\ldots,(c_n,b_n)$$

Se propone el siguiente conjunto de funciones:

$$f_i(x)=\frac{(x-c_0)(x-c_1)\cdots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\cdots(x-c_j)(x-c_n)}{(c_i-c_0)(c_i-c_1)\cdots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\cdots(c_i-c_j)(c_i-c_n)} \quad (1)$$

Estas funciones son polinomios de grado n, es decir, $f_i \in P_n$, además de tener la propiedad de que $f_i(x)=1$ si $x=c_i$ y 0 para los demás casos.

Consideremos ahora el conjunto

$B=\{f_{0,} f_{1,} f_{2,} \ldots, f_n\}$

este conjunto es linealmente independiente y está formado por $n+1$ vectores de $\boldsymbol{P}_n$ por lo que es una base de dicho espacio vectorial y por lo tanto todos los polinomios de grado n son generados por $\boldsymbol{B}$. Tomemos el polinomio

$$g(x)=b_0 f_0(x)+b_1 f_1(x)+\cdots+b_n f_n(x) \in \boldsymbol{P}_n$$

A los polinomios construidos de esta forma se le conocen como polinomios de interpolación de Lagrange. Debido a la propiedad descrita con anterioridad, cada producto $b_j f(c_j)$ toma el valor de $f(c_j)$ en el punto b_j, es decir, $g(c_j)=b_j f_j(c_j)=b_j$.

Así, el polinomio $g(x)$ es el único polinomio de ***n***-ésimo grado que pasa exactamente a través de todos los $n+1$ puntos asociados con los datos. Por lo tanto el problema está totalmente resuelto: siempre existe un polinomio de grado n con las características pedidas.

En este ejemplo de relación se pretende abordar el concepto de espacio vectorial, uno de los más abstractos del álgebra lineal (y por tanto de más difícil acceso a los estudiantes), por medio de un caso práctico dentro de las mismas matemáticas, como son los polinomios de interpolación de Lagrange. Estos polinomios se utilizan posteriormente para abordar el tema de la integración numérica.

5.42 RELACIÓN 2: REGRESIÓN LINEAL POR MÍNIMOS CUADRADOS

En situaciones como la descrita anteriormente, es decir, cuando se desean estimar valores intermedios entre puntos asociados con datos, pero donde además los datos tienen errores sustanciales, la interpolación polinomial es inapropiada y puede dar resultados poco satisfactorios cuando se utiliza para predecir otros valores. Con frecuencia, los datos experimentales son de este tipo. Una estrategia apropiada en tales casos consiste en obtener una función de aproximación que se ajuste a la forma o a la tendencia general de los datos, sin coincidir necesariamente en todos los puntos. Una forma de hacerlo consiste en obtener una curva que minimice la discrepancia entre los puntos y la curva. Una técnica para lograr tal objetivo es la regresión por mínimos cuadrados.

En la ingeniería, aunque algunos datos exhiben un patrón marcado, son pobremente representados por una recta, entonces, una curva podría ser más adecuada para ajustarse a los datos. Una alternativa para superar esta dificultad es ajustar polinomios a los datos mediante regresión polinomial. El procedimiento de mínimos cuadrados se puede extender fácilmente al ajuste de datos con un polinomio de grado superior.

La técnica de mínimos cuadrados tiene como objetivo minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los valores de los datos y los de la regresión estimada, es decir, minimizar la suma de los residuos al cuadrado, entendiendo como residuo la diferencia entre los datos observados y los valores del modelo de regresión. De un conjunto de n parejas (x_i, y_i) de datos, se debe encontrar la ecuación del polinomio de grado n que pase lo más cerca de los puntos experimentales de forma que éstos estén repartidos uniformemente alrededor de la recta. Esto es,

$$S=\sum_{i=1}^{n} d_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n\right)\right]^2$$

Para minimizar la función S de $n+1$ variables ($a_{0,} a_{1,} \ldots, a_n$), se debe hallar la derivada parcial de S con respecto a cada variable e igualar a 0. Estas ecuaciones se resuelven de forma simultánea, lo cual genera un sistema de ecuaciones que puede representarse de forma matricial. Esta matriz se reduce por algún método familiar al alumno, por ejemplo, el método de reducción de Gauss – Jordan. La solución de este sistema de ecuaciones proporciona los coeficientes del polinomio de regresión de grado n que minimiza la distancia entre éste y cada punto observado.

Los conocimientos que entran en juego en el método de mínimos cuadrados son minimización de funciones de varias variables, lo cual implica derivadas parciales, así la como representación de sistemas de ecuaciones de forma matricial y su solución por algún método de reducción. De este modo, se busca relacionar temas de cálculo multivariable y álgebra lineal.

5.43 RELACIÓN 3: MÉTODOS DE NEWTON – COTES

Los métodos de Newton – Cotes son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar:

$$I=\int f(x)\,dx \approx \int f_n(x)\,dx$$

donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma

$$f_n(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es el grado del polinomio.

Existen formas cerradas y abiertas de las fórmulas de Newton – Cotes. Las formas cerradas son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración. Las formas abiertas tienen límites de integración que se extienden más allá del intervalo de los datos. Por lo general, éstas no se usan para integración definida, sino para evaluar integrales impropias y obtener soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Con este antecedente, se reconoce que el llamado “método de los rectángulos” que se aborda como introducción a la integral definida en cualquier curso de cálculo integral es un caso particular de un método de Newton – Cotes que emplea un polinomio de grado cero (constante) para aproximar la integral.

Por otro lado, la “regla del trapecio” es la primera de las formas cerradas de integración Newton – Cotes. Corresponde al caso en que el polinomio de interpolación es de primer grado.

$$I=\int f(x)\,dx \approx \int f_1(x)\,dx$$

Dado que la integral definida es un límite, una forma de obtener una aproximación más exacta es segmentar más finamente el intervalo $[a, b]$. Sin embargo, se debe tener en cuenta el costo computacional que esto implica. Así, otra forma de obtener una mejor aproximación consiste en utilizar polinomios de grado superior para unir los puntos. Las fórmulas que resultan de tomar integrales bajo esos polinomios se conocen como reglas de Simpson.

La regla de Simpson 1/3 resulta cuando se utiliza un polinomio de interpolación de segundo grado

$$I=\int f(x)\,dx\approx\int f_2(x)\,dx$$

Si se designa a a y b como x_0 y x_1 y $f_2(x)$ se representa por un polinomio de Lagrange de segundo grado, la integral se transforma en

$$I\approx\int\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx$$

que después de la integración y de manipulaciones algebraicas, se obtiene la siguiente expresión:

$$I\approx(b-a)\frac{f(x_0)+4\mathrm{f}(x_1)+f(x_2)}{6}$$

donde $a=x_0, b=x_2$ y x_1 es el punto a la mitad entre a y b y que está dado por $\frac{(b-a)}{2}$.

De manera similar a la obtención de la regla del trapecio y Simpson 1/3, es posible ajustar un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos e integrarlo:

$$I=\int f(x)\,dx\approx\int f_3(x)\,dx$$

para obtener

$$I\approx(b-a)\frac{f(x_0)+3\mathrm{f}(x_1)+3\mathrm{f}(x_2)+f(x_3)}{8}$$

Es evidente la relación que existe entre el Cálculo Integral y los métodos de interpolación que se abordan en la materia de métodos numéricos. Analizarla supondría que el estudiante haga un esfuerzo por vincular sus conocimientos sobre Cálculo Integral, el concepto de integral definida, la interpretación de área bajo la curva, etc., con las técnicas de interpolación analizadas con anterioridad.

Así, es factible el desarrollo a futuro de un recorrido didáctico que tome en cuenta las tres relaciones descritas aquí anteriormente y que incorpore más aplicaciones de un tema de matemáticas a otro.

5.44 OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DEL ÍNDICE DE GINI PARA MÉXICO

Siguiendo a Devlin (2005), los futuros ingenieros deben ser capaces de desarrollar un razonamiento relacional, que les permita utilizar las herramientas técnicas y matemáticas que han adquirido a lo largo de su formación. Numerosas aplicaciones extramatemáticas, tanto en el ámbito de la ingeniería como en otras disciplinas pueden ser abordadas con técnicas matemáticas. Creemos que llevar al ingeniero en formación a reflexionar sobre cómo poder realizar estos vínculos tanto dentro de su área de especialidad como fuera de ella fomentará en él la competencia mencionada al inicio. En este tenor, es factible abordar el análisis de situaciones sociales haciendo uso de herramientas matemáticas con que cuenta.

Una relación interesante que surge del entorno social es la distribución de la riqueza en una determinada población en un determinado instante de tiempo.

La curva de Lorenz permite representar la concentración del ingreso de una región en un período determinado. «[...] representa gráficamente el porcentaje de los ingresos totales ganados por varias porciones de una población cuando ésta está ordenada por tamaño de ganancias» (Gastwirth, 1971, p. 1037).

Se ordena la información de los individuos en cuanto a ingreso de forma ascendente, posteriormente se establece el porcentaje del ingreso que le corresponde al porcentaje con ingreso más bajo de la población. El porcentaje acumulado de la población se grafica en el eje horizontal y el porcentaje de ingreso acumulado para esa población se grafica en el eje vertical.

El coeficiente de Gini es una medida de la desigualdad, tradicionalmente utilizada para medir la desigualdad en la distribución individual del ingreso en un país. Toma valores entre 0 y 1, donde 0 corresponde a la perfecta igualdad (todos tienen los mismos ingresos) y 1 a la perfecta desigualdad (una persona tiene todo el ingreso). Entre mayor sea la desigualdad, más alto será el valor del coeficiente de Gini (SEDESOL, 2011).

Varias medidas de inequidad tratan de expresar de diferentes formas el grado de inequidad o variabilidad por medio de un número. El coeficiente de Gini es la medida de divergencia mejor conocida y la usada más ampliamente, basada en la curva de Lorenz. Está definida como el área entre la función identidad y la curva de Lorenz. (Shkolnikov, Andreev y Begun, 2003)

El estudiante de ingeniería posee, al menos en teoría, los elementos para construir la curva de Lorenz o una aproximación de ella dada una colección de datos. Podría diseñarse en un futuro trabajo una secuencia didáctica que lleve al estudiante a construir la curva de Lorenz por medio de una curva de regresión polinomial con los datos ordenados.

Una vez construida, se puede plantear al alumno el cálculo del coeficiente de Gini por medio de la integral definida por medio de algún método numérico estudiado durante el curso.

Suponemos que para poder desarrollar este trabajo, el estudiante sería capaz de identificar la problemática y proponer alternativas para su solución.

Un problema que nos interesa abordar en el futuro es la poca o nula relación que existe entre diversos temas de Cálculo de una variable con problemas propios de la ingeniería en sistemas computacionales en el Instituto Tecnológico de Querétaro. A lo largo de la revisión de la literatura, hemos dado fe de la importancia que se le concede al hecho de involucrar un contexto práctico en el abordaje de algunos temas de matemáticas.

Creemos que la cuidadosa elección de temas selectos de matemáticas, y métodos numéricos, de la mano de un adecuado uso de la tecnología permitirían el diseño y la implementación de secuencias didácticas que faciliten al estudiante de ingeniería la comprensión de diferentes temas que se abordan como el desarrollo de competencias deseables en un ingeniero.

La elección de estos temas selectos de matemáticas, específicamente de temas de cálculo de una variable, de métodos numéricos que puedan ser útiles, así como de herramientas tecnológicas, debe girar en torno a tres ejes rectores:

El uso de temas selectos de la materia de métodos numéricos como medio para resolver problemas del Cálculo de una variable;

La resolución de problemas propios de la ingeniería por medio de métodos numéricos directamente y

El análisis de problemas de ingeniería por medio de métodos numéricos indirectamente, con temas selectos de Cálculo como intermediario.

6. COMENTARIOS FINALES

El objetivo de la revisión que hicimos a lo largo de este trabajo es sentar las bases para un posterior esfuerzo por desarrollar las secuencias didácticas que hemos descrito en la sección final.

Nuestro interés se centra en la importancia que tienen las aplicaciones y los contextos prácticos en la enseñanza de las matemáticas enfocada a ingenieros en formación.

Numerosos autores (Alsina (2001); Balderas (2002); Bony (1988); Bricio (1992); Murakami y Hata (1988)) han hecho énfasis, desde sus perspectivas y sus líneas de trabajo de la creciente relevancia del uso de tecnología informática en la labor docente y a su vez, de la gradual tendencia a abordar métodos numéricos como parte importante (si no, fundamental) del plan curricular del futuro ingeniero.

Una de las opiniones profesionales que recaba Bricio (1992) en su trabajo sobre el futuro de las matemáticas aplicadas afirma que las matemáticas están íntimamente ligadas a otras ciencias y disciplinas como la física, la química, la ingeniería, la biología, la economía y la computación; tanto teóricas como experimentales. Es entonces urgente que la formación del ingeniero contemple esta relación y que fomente en el estudiante de ingeniería la toma de conciencia de una múltiple red de relaciones entre temas, aparentemente, distantes.

Llevando esta reflexión al ámbito social, vale la pena cuestionarnos respecto del impacto que tiene la formación de ingenieros competentes y capaces de generar ciencia y tecnología para mejorar el contexto social en nuestro país.

Conviene observar que en los países desarrollados no se discute la necesidad de hacer matemática aplicada, sólo existe la preocupación por generar estrategias que permitan allegarse los fondos para ello dada la crisis actual. En los países como el nuestro, tenemos que prepararnos y a la vez convencer a la sociedad de cuánto puede serle útil la Ciencia y la Tecnología, y por lo tanto la Matemática Aplicada. De otra manera la aplicación de la Matemática se verá frenada y también nuestro desarrollo. (Bricio, 1992)

Dado que el uso de la ciencia y tecnología en la sociedad mexicana es muy desigual, la generación de éstas es pobre y crece lentamente (Menchaca, 2011).

Con base en lo dicho anteriormente, es incuestionable la necesidad de abordar diferentes temas de la matemática desde un contexto práctico.

Se esbozan algunas relaciones entre temas de diferentes materias que son impartidas a estudiantes de ingeniería en sistemas computacionales del Instituto Tecnológico de Querétaro que podrían ser abordadas desde un contexto práctico.

También nos planteamos las siguientes preguntas para un análisis posterior: ¿Qué tipo de aplicaciones aparecen y cómo se relacionan con los temas enseñados? ¿Qué papel juega lo conceptual, lo técnico y la modelación matemática en dichas aplicaciones? ¿De dónde provienen dichas aplicaciones, de los cursos de especialidad o de la práctica?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2001) Why the professor must be a stimulating teacher. En Holton D. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (pp 3 - 12). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Baber, R. (1998). Software engineering education: issues and alternatives. *Annals of Software Engineering,* 6, 39–59

Balderas, A. (2002). *About the success of integration of information technology in math education.* En A. Rogerson, (Ed.), Proceding of the International Conference: The Humanistic Renasissance in Mathematics Education.

Bell, A. (2003). *Temas selectos de geometría analítica, una propuesta didáctica de cómo utilizar su historia y aplicaciones para su enseñanza.* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro.

Bony, J. M. (1988). What mathematics should be taught to students in physical sciences, engineering, ...? . En A. G. Howson, J. P. Kahane, P. Lauginie, E. de Turckheim (Eds.), *Mathematics as a service subject* (pp. 20-27). Cambridge: Cambridge University Press.

Bricio D. (1992). Ideas sobre el futuro de la Matemática Aplicada. *Reunión Nacional de Matemáticas*, Coahuila, México, 65-89.

Chapra, S. y Canale, R. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGraw Hill.

Devlin K. (2005). What does “Doing Math” mean? *Mathematical Association of America*. www.maa.org/devlin/devlin_04_05.html (04/2005-13/04/13).

Díaz-Barriga, F. (2012). *Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida*. (1ª. Ed.) México: McGraw Hill.

Dochy, F., Segers, M., Van den Bossche, P. y Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning: a meta-analysis. Learning and Instruction, 13 (5), 533-568.

Font, A. (2004). Las líneas maestras del aprendizaje por problemas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 18(1), 79-75.

Gastwirth, J. (1971). A General Definition of the Lorenz Curve. *Econometrica.* 39(6), 1037-1039.

Gómez, R. (2005). *Propuesta didáctica para la enseñanza del álgebra lineal en ingeniería.* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro.

ITESM (n.d.) El Aprendizaje Basado en Problemas como técnica didáctica. Obtenido el 27/04/2013, en www.ub.edu/mercanti/abp.pdf

Kümmerer, B. (2001). TRYING THE IMPOSSIBLE. Teaching Mathematics to Physicists and Engineers. En Holton D. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (pp 321 - 334). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Macías, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros* (Tésis de maestría). CICATA IPN. México.

Menchaca, A. (2011). El único camino hacia el desarrollo de México pasa por el conocimiento. Recomendaciones para el futuro presidente de México. México, Academia Mexicana de Ciencias.

Murakami, H. y Hata, M. (1988). Mathematical Education in the Computer Age. En R. F. Churchhouse, B. Cornu, A. G. Howson, J.-P. Kahane, J. H. van Lint, F. Pluvinage, A. Ralston, M. Yamaguti (Eds.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching Proceedings From a Symposium Held in Strasbourg, France in March 1985 and Sponsored by the International Commission on Mathematical Instruction*. (pp. 85-94). Cambridge: Cambridge University Press.

Niss, M., y Højgaard , T. (Eds.). (2011). Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark (English Edition). Roskilde: Roskilde University

Parra, B. (2001). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas en México. Secretaría de Educación Pública. *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer nivel. Programa de actualización permanente*. México: SEP.

Pollak, H. O. (1988). Mathematics as a service subject – Why? En A. G. Howson, J. P. Kahane, P. Lauginie, E. de Turckheim (Eds.), *Mathematics as a service subject* (pp. 28-34). Cambridge: Cambridge University Press.

Polya, G. (1989) *Cómo plantear y resolver problemas.* (1ª Ed.) México: Trillas.

SEDESOL – Secretaría de Desarrollo Social. (2011). *Avances y retos de la política social. Publicación quincenal de la Subsecretaría de Propspectiva, Planeación y Evaluación.* Obtenido el 02/05/2012, en http://www.sedesol.gob.mx/work/models/SEDESOL/Resource/1800/1/images/boletin_10_SPPE.pdf

Shkolnikov, V., Andreev , E. y Begun, A. (2003). Gini coefficient as a life table function: computation from discrete data, decomposition of differences and empirical examples. *DEMOGRAPHIC RESEARCH*. 8(11), 305-358. Obtenido el 27/04/2013, en www.demographic-research.org/Volumes/Vol8/11/8-11.pdf

Torp, L. y Sage, S. (1998). *El Aprendizaje basado en problemas*. Buenos Aires: Amorrortu.

UAS - University of Applied Sciences, Aachen (2011). Mechatronics Master of Science. Aachen, Rector of the FH Aachen.

Woods, D. (2006) *Preparing for PBL*. (3ª edición) Ontario: McMaster University.