Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

INTERPRETACIONES DE LA DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Magdalena García Jiménez

Dirigida por:

Dr. Eric Moreno Quintero

SINODALES

Dr. Eric Moreno Quintero	Dr. Roberto A. Gómez Loenzo
Presidente	Vocal
Dra. Rebeca del Rocío Peniche Vera	Dra. Luz Angélica Gradilla Hernández
Secretaria	Suplente

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Enero 2013
México

RESUMEN

Este trabajo tiene la finalidad de revisar las interpretaciones de la dualidad de un programa lineal, de una forma simple y eficaz. En él se aborda la historia de la dualidad y cómo a lo largo del tiempo esta teoría ha sido de gran utilidad para la solución de problemas relevantes y de interés para la Matemática Aplicada. Esta revisión no pretende ser exhaustiva, ya que el tema es de gran extensión; sin embargo presenta al lector aspectos representativos de la dualidad en la programación lineal e interpretaciones que no siempre aparecen reunidas en los libros de texto y que por estar dispersas en diversos materiales didácticos, no son tan familiares a los estudiantes de programación lineal.

El tema está dirigido al lector familiarizado con la programación lineal, es decir, que tenga conocimiento de lo que es un programa lineal, sus diversas variantes y que conozca la aplicación del método simplex y sus fundamentos.

En el segundo capítulo encontrará la definición de dualidad y cómo llegar al problema dual a partir del primal sin importar en qué forma se encuentre éste. También encontrará teoremas que le serán muy útiles al tratar con el problema dual y que servirán para un mejor entendimiento de los temas que se verán en los capítulos posteriores. Este capítulo es importante para un buen manejo de los problemas a solucionar ya que brinda las herramientas necesarias para su solución.

Ya que se ha podido llegar al problema dual, a partir del primal, y se ha podido encontrar la solución se revisan las ideas del análisis de sensibilidad, por lo que el siguiente capítulo está dedicado a ello.

Para iniciar con las interpretaciones de la dualidad en programación lineal, se muestra brevemente una interpretación geométrica del dual, y posteriormente se analizan varios problemas de programación lineal junto con sus respectivos duales, analizando las relaciones primal-dual así como las interpretaciones que

pueden darse a estas relaciones, a las variables duales y a los objetivos duales, a fin de mostrar cómo de los planteamientos primales originales pueden surgir otras interpretaciones de los problemas planteados originalmente, que amplían la visión de estos planteamientos y generan propuestas equivalentes para estos problemas.

Partiendo del ejemplo típico del problema de la producción que busca maximizar el ingreso usando recursos limitados y que puede también considerarse como la búsqueda del valor mínimo y de los precios justos de los insumos utilizados, que es la interpretación económica del dual, se analizan de igual forma diversos problemas como el de la dieta a costo mínimo, el problema del transporte a costo mínimo, el problema de apareamiento maximal bipartita y otros más. El último capítulo muestra estos análisis.

Como conclusión general, este trabajo muestra que el concepto de dualidad en la interpretación del dual de un programa lineal aporta información adicional a los problemas planteados, permitiendo una extensión del planteamiento primal y la posibilidad de una interpretación distinta, pero equivalente a la original, que enriquece la discusión de los problemas que se desean resolver.

DEDICATORIAS

A mis padres

Isabel Jiménez Delgado y

Fernando García Trujillo

Por el amor que me han brindado.

AGRADECIMIENTOS

El más sincero de mis agradecimientos a mi asesor el Dr. Eric Moreno Quintero por su paciencia y entusiasmo, así como sus valiosos comentarios y observaciones durante mi formación académica y la elaboración de esta tesis.

A mis amigos, por mantener la mente abierta, por no frenar mi personalidad, por brindarme inspiración y apoyo incondicional.

A mis padres, que con amor me han enseñado el valor de la vida y con ello a poner empeño en cada una de las cosas que hago.

A mis profesores por la formación recibida, porque me llevo de cada uno una enseñanza de vida y porque gracias a cada una de sus personalidades y conocimientos me he formado como profesional y como persona.

Y al universo por permitirnos explorar en su naturaleza y por regalarnos la dicha de aprender de ella.

“Debemos aumentar las luces naturales de nuestra razón, no para resolver dificultades de escuela, sino para que en todas las circunstancias de la vida, la inteligencia muestre a la voluntad el camino que ha de seguir”

RENÉ DESCARTES

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

1 Introducción

1.1 Antecedentes del concepto de dualidad

El término “dual” no es exclusivo de las matemáticas, mucho menos de la programación lineal. En otras áreas del conocimiento la dualidad tiene numerosos significados y aunque es un concepto muy generalizado e importante, no tiene una única definición aceptada universalmente.

Ejemplos de ello son los siguientes. En Mecánica Cuántica se ha hablado de la dualidad *onda-partícula* para describir el comportamiento de la luz; el cual puede verse como el de una partícula (fotón) cuando la luz obedece las leyes de la reflexión como una partícula sólida o puede verse como el de una onda, cuando obedece las leyes de la refracción, como una onda en el agua. La idea en física es que el fenómeno de la luz puede describirse ya sea como partícula o como onda, pero no con ambos conceptos a la vez; de esta manera el concepto de dualidad proporciona un enfoque completo del fenómeno (Zimmerman, 2012).

En Ingeniería Eléctrica, las cantidades y términos que describen los fenómenos eléctricos suelen formar parejas de “duales”, por ejemplo: voltaje e intensidad de corriente; circuito en serie y circuito en paralelo; capacitancia e inductancia. Las relaciones entre estos duales se forman, por ejemplo, al intercambiar el voltaje por la intensidad de corriente en una expresión, con lo que se obtiene una expresión válida de la misma forma, así, mientras que el voltaje *V,* la intensidad de corriente I y la resistencia R se relacionan por la ley de Ohm como: $V = I \times R$, con el concepto de *conductancia G* (dual de la resistencia) se obtiene la relación: $I = V \times G$.

Análogamente, con los conceptos de capacitancia C e Inductancia L, se tienen las expresiones para la corriente (I) y el voltaje (V) en un circuito por las siguientes formas diferenciales duales (Cheevers, 2011).

$$I_c = C\frac{dV_c}{dt} \quad \leftrightarrow V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$

En Geometría Proyectiva hay ejemplos donde las proposiciones vienen en pares duales, con la propiedad de que si en una de ellas se intercambian las palabras “punto” por “línea” o viceversa, se obtiene la proposición dual.

De este modo, la proposición “dos líneas determinan un punto” tiene como dual “dos puntos determinan una línea”. Un buen ejemplo de par de teoremas duales son el de Pascal y el de Brianchon, que se plantean enseguida.

Teorema de Pascal. Los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica, se intersecan en tres puntos que caen en una misma línea recta, denominada la línea de Pascal (Castañeda, 2004). La Figura 1 ilustra el teorema.

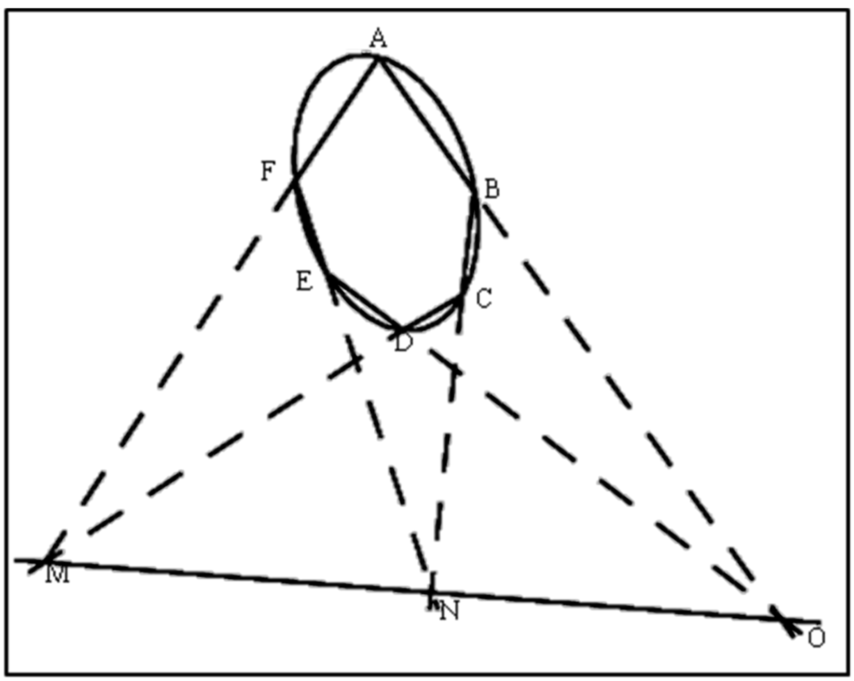


Figura 1. La Línea de Pascal MNO contiene las intersecciones de las prolongaciones de líneas de lados opuestos del hexágono ABCDEF (adaptado de Pascal’s Theorem, Wolfram MathWorld).

Teorema de Brianchon. Las tres diagonales que unen los vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una curva cónica, se cruzan en el mismo punto. El punto de intersección se denomina punto de Brianchon. (Wellman, 1987). La Figura 2 ilustra el teorema.

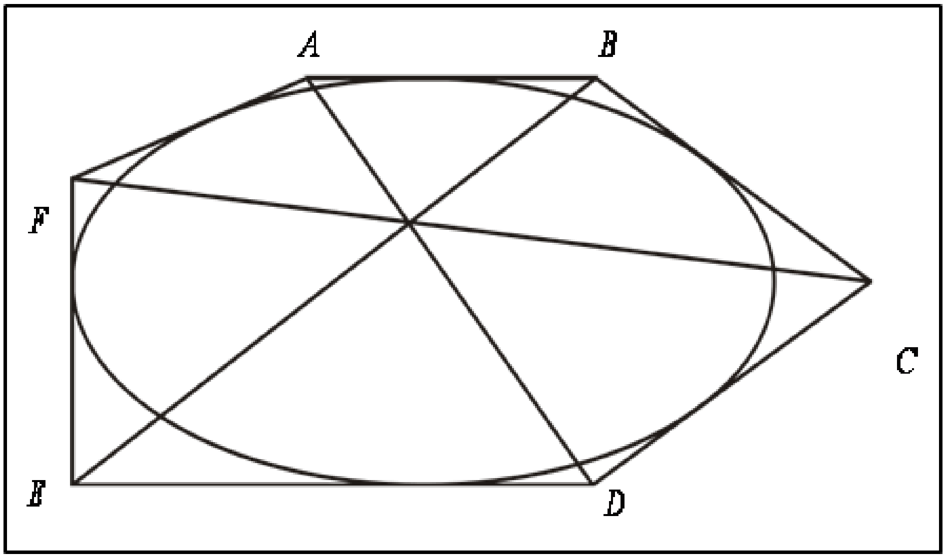


Figura 2. Ejemplo del Teorema de Brianchon.

En algunos casos, existen proposiciones que son su propio dual, el teorema de Desargues es uno de ellos, el cual dice lo siguiente:

Teorema de Desargues. Si las líneas que unen los vértices correspondientes de dos triángulos pasan por un punto común, entonces los puntos de intersección de los lados correspondientes son colineales.

El teorema dual resulta ser:

Si los lados correspondientes de dos triángulos tienen puntos de intersección sobre una misma línea, entonces las líneas que unen los vértices correspondientes pasan por un punto común (Weisstein, 2012). La Figura 3 ilustra el teorema.

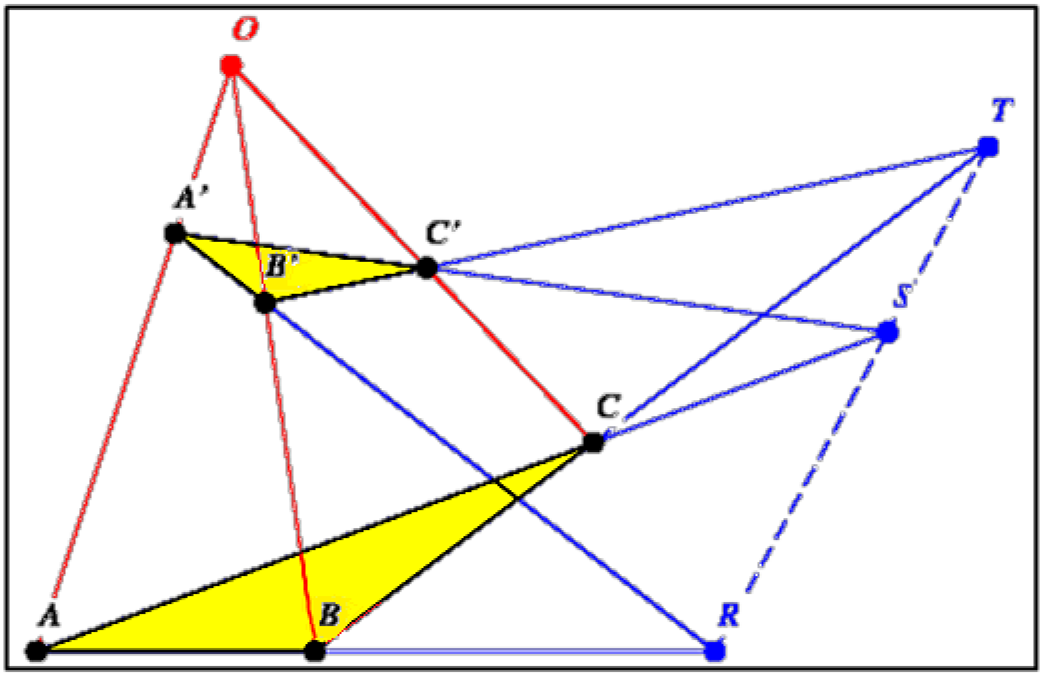


Figura 3. Ejemplo del Teorema de Desargues (adaptado de Desargue's Theorem, Wolfram MathWorld).

De una forma más general, la idea de dualidad en el plano proyectivo puede extenderse a espacios proyectivos de dimensión n, donde los puntos corresponden a hiperplanos y viceversa. La dualidad en este sentido puede hacer que exista una forma de intercambiar concurrencia con colinealidad.

Por ejemplo, dada una línea L en el plano, su punto dual es encontrado trazando una línea L' que pase por el origen y que sea perpendicular a L. El punto dual a L quedará del otro lado del origen, sobre la línea auxiliar L' a una distancia igual al recíproco de la distancia del origen a la línea L. De este modo, para la línea azul, la distancia p_2O es el recíproco de la distancia OX En la Figura 4 se observan tres puntos y tres líneas duales entre sí, un par rojo, uno azul y otro verde. La línea que pasa por dos de los puntos, supóngase verde y azul, es la línea dual al punto de intersección de las líneas duales a dichos puntos, es decir, la línea verde y la azul.

En la geometría de los sólidos (poliedros) la dualidad se observa al intercambiar puntos por caras, con los lados siendo duales de los propios lados.

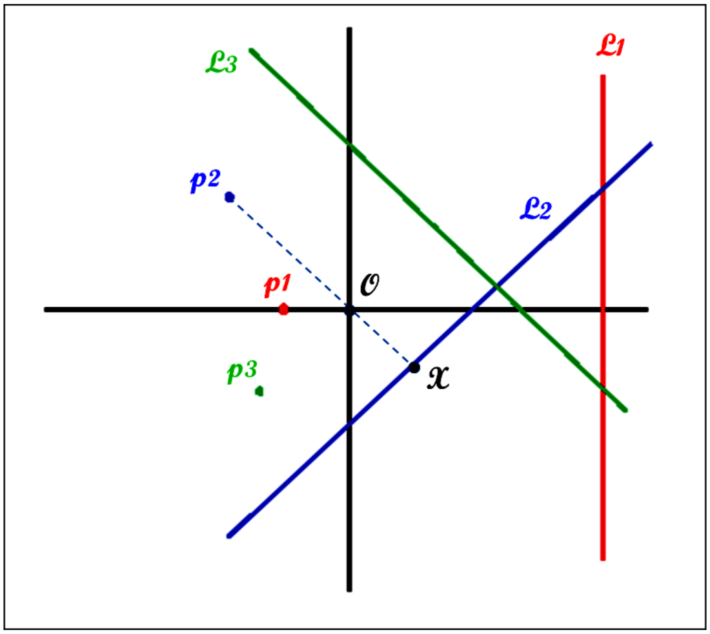


Figura 4. Ejemplo de dualidad en el plano proyectivo

Así por ejemplo considerando los sólidos Platónicos, el icosaedro es el dual del dodecaedro y el cubo es dual del octaedro; el tetraedro es su propio dual. Una propiedad interesante de los sólidos platónicos es que sus duales son también sólidos platónicos. La Figura 5 ilustra estos poliedros y sus duales.

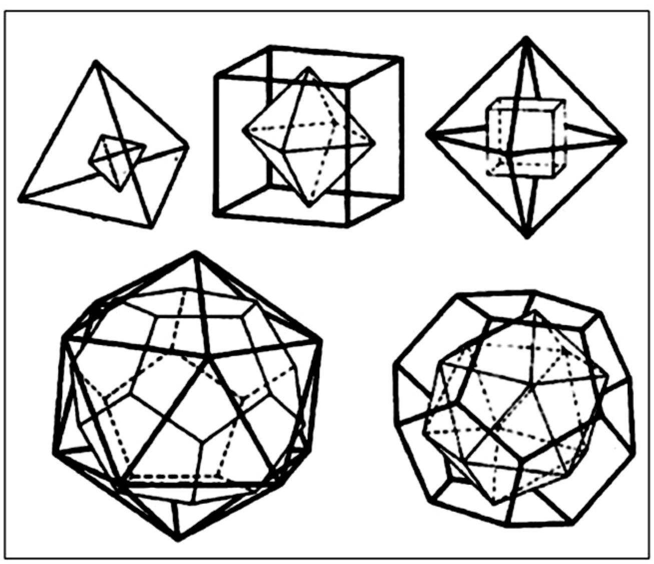


Figura 5. Ilustración de los sólidos Platónicos y sus duales (Annie, 2011).

En Teoría de Gráficas, una gráfica dual *G′* de una gráfica plana es una gráfica que tiene un vértice por cada región de *G*, y una arista por cada arista en *G* uniendo a dos regiones vecinas.

En la Figura 6, se muestran la gráfica G y su dual G’. Puede verse que en cada región determinada por las aristas de G la gráfica dual tiene un vértice y las aristas en G’ están determinadas por la adyacencia entre las regiones de G, es decir, si las regiones A y B son adyacentes, entonces los vértices de G’ que representan dichas regiones estarán unidos por una arista. Siendo G una gráfica plana, su dual G’ también es plana, y además, la gráfica dual del dual G’ es nuevamente G (Bondy & Murty, 1976, p. 141).

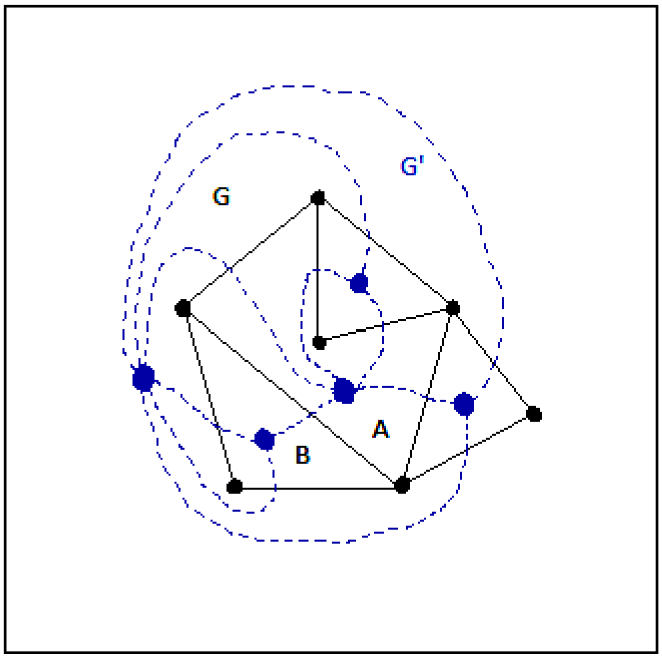


Figura 6. Ilustración de una gráfica G y su gráfica dual G’. Las regiones A y B son adyacentes por lo que existe una arista en G’, entre los vértices que representan las regiones.

En Lógica el concepto de dualidad también aparece de modo natural. Así, se dice que dos conectores binarios ”$*$” y “$+$” son duales entre sí, cuando $\neg(A*B)$ es equivalente con $\neg A + \neg B$, de manera que, por ejemplo, se puede verificar que el dual de una tautología es una contradicción e inversamente.

En Álgebra Booleana al igual que en teoría de conjuntos, los operadores duales satisfacen las leyes de De Morgan, que establecen lo siguiente:

$$\overline{(a+b)} = \bar{a} * \bar{b} \qquad \overline{(a*b)} = \bar{a} + \bar{b}$$

En el Álgebra Booleana se definen los operadores “$*$” y “$+$” de la siguiente forma:

0 * 0 = 0		0 + 0 = 0
0 * 1 = 0	y	0 + 1 = 1
1 * 0 = 0		1 + 0 = 1
1 * 1 = 1		1 + 1 = 0

En la Teoría de Conjuntos se tienen los ya conocidos operadores “$\cap$” (intersección) y “$\cup$” (unión), que también son duales entre sí.

En Álgebra Lineal, dado cualquier espacio vectorial *V* sobre un cierto campo F, se define el espacio dual V* como el conjunto de todos los funcionales lineales en F, es decir, transformaciones lineales de V a F.

Dado que V* es también un espacio vectorial, es natural pensar en su dual V**, que en el caso de dimensión finita V y V** son isomorfos. (Rascón, y otros, 2006).

De forma general, la dualidad puede verse como una transformación de conceptos, teoremas o estructuras matemáticas válidos en otros conceptos, teoremas o estructuras nuevos igualmente válidos, en una relación uno a uno, donde si el dual de A es B, entonces el dual de B será A. Siendo posible el caso en que el dual de A es A misma, a lo cual se le da el nombre de auto-dual.

La dualidad permite obtener nuevos teoremas y resultados a partir de los ya conocidos al intercambiar términos o símbolos en los teoremas originales. Y por supuesto que también juega un papel muy importante en la Programación Lineal.

Uno de los descubrimientos más importantes de la Programación Lineal es el de la teoría de dualidad cuya definición se debe a John von Neumann. La primera vez que se escribió de forma explícita el teorema fundamental de dualidad fue en un manuscrito que circuló de forma privada, pero que nunca fue publicado. La aportación de von Neumann estuvo muy relacionada con su desarrollo de la Teoría de Juegos, donde el propósito de maximizar la ganancia esperada de un jugador está íntimamente ligado al propósito de su rival de minimizar la ganancia esperada del primer jugador. Cabe hacer notar, que fue complicado demostrar la validez de la prueba dada por von Neumann. La primera prueba formal publicada se debe a Gale, Tucker y Kuhn (Gale, 2007).

En el desarrollo de las ideas de dualidad, el término “programa dual” surgió de modo natural para indicar el problema asociado a un programa lineal en el que se encontraron propiedades interesantes que luego llevaron a teoremas formales describiendo estas propiedades y sus relaciones con el problema original. A fin de esclarecer las discusiones del nuevo hallazgo (la dualidad) en programación lineal, el matemático Tobías Dantzig, padre de George B. Dantzig, el creador del método simplex, propuso utilizar el término “primal” para referirse al programa original; desde entonces, la literatura ha reportado la pareja de problemas “primal” y “dual” en las discusiones sobre dualidad en programación lineal.

1.2 Impacto de la dualidad en la programación lineal

La dualidad es un concepto que nos amplía el conocimiento de las propiedades que tienen las variables y las restricciones de un programa lineal; ejemplos de ello son:

1. La interpretación económica del problema dual proporciona los precios sombra que miden el valor marginal de los recursos en el problema primal, lo que da un gran poder en la toma de decisiones.

2. Permite interpretar el método simplex, es decir, aporta un mayor conocimiento de lo que se quiere hacer y del papel que juega cada uno de los datos y procedimientos en la solución del problema.

3. Permite interpretar los resultados del análisis de sensibilidad, al conocer el papel que juegan cada una de las variables del primal y dual, es más sencillo dar una interpretación a los cambios que se le puedan hacer al problema original así como las nuevas soluciones.

4. Su relación con el problema primal es tan estrecha que permite moverse de un problema a otro sin dificultades.

En algunos casos se puede ahorrar bastante esfuerzo computacional si se maneja directamente el problema dual (Hillier, y otros, 2006), lo que facilita la capacidad de modelar circunstancias de problemas reales en las que el enfoque primal resulta más laborioso.

En otros casos, sin embargo, la dualidad nos muestra relaciones entre las variables y las restricciones primales y duales que en el planteamiento original del problema primal no son evidentes. Algunos ejemplos de esto son las equivalencias de encontrar un flujo máximo en una red y la del enfoque de encontrar una cortadura mínima en la misma red; o el caso de encontrar un apareamiento maximal y el de hallar el recubrimiento mínimo de nodos en una gráfica bipartita al resolver el problema original.

Cuando se tienen estas interpretaciones alternas de los problemas primales, el modelado en optimización se enriquece, y da mayor alcance a las aplicaciones que se pueden modelar con la programación lineal.

2 Teoría de la dualidad

2.1 Idea intuitiva de dualidad

La dualidad es una relación entre programas lineales, no un tipo de programa lineal; al problema asociado al original (primal) se le conoce como problema dual.

La siguiente idea da una forma de entender la manera en que surge el problema dual de un problema. Para que sea más sencillo de entender se verá con un ejemplo.

Considérese el siguiente programa lineal:

$$\textit{Maximizar}\ \ \mathrm{z} = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

Sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 2$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_j \geq 0\,,\ \ j = 1,2,3$$

Sea *z** el valor óptimo de la función objetivo. Para $\bar{x} = (1, 0, 0)$ solución factible tenemos que $z^* \geq 4$ por lo que 4 es una cota inferior del óptimo. Y si $\bar{x} = (0, 0, 3)$ tenemos $z^* \geq 9$, con lo que 9 es otra cota inferior del óptimo mejor que la anterior. Así se podría continuar hasta acercarse lo más posible al valor óptimo de la función, pero, ¿cómo saber cuándo parar?, el siguiente razonamiento responde a esa pregunta.

Multiplicando las restricciones por las nuevas variables no-negativas: y_1, y_2 (nótese que el número de variables a introducir es igual al número de restricciones); el problema equivalente es como sigue:

$$\textit{Maximizar}\ \ \mathrm{z} = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

Sujeta a

$$y_1(x_1 + 4x_2) \le 2y_1$$

$$y_2(3x_1 - x_2 + x_3) \le 4y_2$$

$$y_1, y_2, x_j \ge 0,\ j = 1,2,3$$

Entonces cada solución factible $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ debe satisfacer ambas desigualdades, y por consiguiente también su suma.

$$y_1(x_1 + 4x_2) + y_2(3x_1 - x_2 + x_3) \le 2y_1 + 4y_2$$

que al reagrupar queda:

$$(y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + y_2x_3 \le 2y_1 + 4y_2 \qquad \ldots\ (1)$$

Ahora, supóngase que las siguientes desigualdades se cumplen:

$$(y_1 + 3y_2) \ge 4, \quad (4y_1 - y_2) \ge 1, \quad y_2 \ge 3 \qquad \ldots\ (2)$$

Es decir, que los coeficientes de las variables x_i en la desigualdad (1) son al menos los valores de los correspondientes coeficientes de la función objetivo. Esto nos permite obtener una cota superior para el valor de la función objetivo:

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \le (y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + y_2x_3 \le 2y_1 + 4y_2$$

En particular para el valor óptimo de la función objetivo se tiene,

$$z^* = 4x_1^* + x_2^* + 3x_3^* \le 2y_1 + 4y_2$$

Puesto que nos interesa encontrar el máximo valor para *z**, la pregunta ahora es, ¿qué tan pequeña puede ser $2y_1 + 4y_2$ para que aún se satisfagan las desigualdades (2)?, esto se puede representar como otro problema de programación lineal como sigue:

$$Minimizar\ \ w = 2y_1 + 4y_2$$

Sujeta a

$$(y_1 + 3y_2) \ge 4$$

$$(4y_1 - y_2) \ge 1$$

$$y_2 \ge 3$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

En este nuevo problema, el objetivo busca el mínimo valor de la cota superior para z^* (es decir, la suma $2y_1 + 4y_2$) con las restricciones de las desigualdades (2), que se requieren para que el objetivo del problema de maximizar esté acotado superiormente conforme a las desigualdades (1) originales.

De hecho el problema resultante es el problema dual asociado al problema original. Esto puede ser comprobado por el lector más adelante, cuando se presente la manera de encontrar el dual a partir del primal (programa original).

2.2 Definición

Asociado a cada problema de programación lineal se tiene otro problema de programación lineal denominado dual, éste será formulado a continuación.

Definición 2.1 Dado el problema primal:

$$Maximizar\ \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\dots,n$$

El problema dual asociado es:

$$Minimizar\ \ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Sujeta a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1,2,\dots,n$$

$$y_i \geq 0, i = 1,2,\dots,m$$

Esta pareja de problemas primal-dual, se dice que están en su *forma canónica*: el problema de maximizar con restricciones menor o igual, y el problema de minimizar con restricciones mayor o igual; ambos con variables no-negativas.

La forma estándar de un programa lineal se expresa con restricciones de igualdad y se escribe como sigue:

$$\begin{cases} Maximizar \quad z = cx \\ Ax + Uh = b \\ x, h \geq 0 \end{cases} \qquad \ldots (3)$$

Donde ***U*** es una matriz identidad y ***h*** es un vector columna de las llamadas variables de holgura. De igual forma el programa lineal dual en su forma estándar se escribe como:

$$Minimizar \quad w = b^t y$$

Sujeta a

$$A^t y - Vk = c^t$$

$$k \geq 0, y \ \text{sin restricciones}$$

Donde ***V*** es una matriz identidad y ***k*** es un vector columna de las llamadas variables de holgura para el problema dual.

También puede darse el caso en que el primal tenga forma mixta, es decir con restricciones de igualdad y desigualdad por lo que a continuación se muestra cómo están relacionadas las restricciones y variables de ambos problemas duales.

1. Si la función objetivo del problema es a maximizar entonces la del dual será a minimizar y viceversa (más adelante se verá la propiedad involutoria de la dualidad que nos dice que la dualidad es relativa).

2. Si la restricción del primal a maximizar tiene signo "≤" o "≥", en el dual la variable correspondiente tendrá signo "≥" o "≤", respectivamente. Si la variable

en el primal es “≤ 0” o “≥ 0”, en el dual la restricción correspondiente tendrá signo “≤” o “≥”, respectivamente.

3. Si la restricción del primal a minimizar tiene signo “≤” o “≥”, en el dual la variable correspondiente será “≤ 0” o “≥ 0”, respectivamente. Si la variable en el primal es “≤ 0” o “≥ 0”, en el dual la restricción correspondiente tendrá signo “≥” o “≤”, respectivamente.

4. Para ambos problemas. En el caso en que la restricción del primal sea “=”, la variable correspondiente del dual será sin restricción de signo (s. r. s.) y al revés si la variable primal es s. r. s. entonces la restricción correspondiente en el dual será “=”.

Lo anterior se resume en la Tabla 1 a continuación.

Correspondencia entre las variables y restricciones de los problemas Primal – Dual (Dual – Primal)			
Función Objetivo	Maximizar	Función Objetivo	Minimizar
Variable	“ ≥ ”	Restricción	“ ≥ ”
	“ ≤ ”		“ ≤ ”
	“ s.r.s ”		“ = ”
Restricción	“ ≥ ”	Variable	“ ≤ ”
	“ ≤ ”		“ ≥ ”
	“ = ”		“ s.r.s ”

Tabla 1. RELACIONES PRIMAL - DUAL

Una propiedad muy importante es la propiedad denominada involutoria de la dualidad (Bazaraa, 2005), que indica que las definiciones de primal y dual son relativas, esto se verá en el siguiente lema, pero antes conviene recordar el siguiente resultado.

Observación 2.1 $Min\ z = -Max\ (-z)$.

Demostración:

Sea min z = cx^*, entonces

$\forall x \geq 0, \quad cx \geq cx' = z_{\min}$

$-cx \leq -cx' = -z_{\min}$

$$Max\ (-z) = Max(-cx) = -cx^* = -Min\ z$$

$-Max\ (-z) = Min\ z.$ ■

Con este resultado será más sencilla la demostración del lema siguiente.

Lema 2.1 (*Propiedad involutoria*). El dual del dual es el primal.

Demostración:

Dado el siguiente problema dual en su forma canónica.

$$Min\ w = b^t y$$

$$s.a.\ A^t y \geq c^t$$

$$y \geq 0$$

Puede reescribirse como sigue:

$$-Max\ (-w) = -(-b^t y)$$

$$s.a. -A^t y \leq -c^t$$

$$y \geq 0$$

El dual del problema anterior es

$$-Min\ z' = -(-cx)$$

$$s.a. -Ax \geq -b$$

$$x \geq 0$$

Pero esto no es más que

$$Max\ z = cx$$

$$s.a.\ Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Que es el problema primal original con z = - z'. ■

A continuación se ejemplifica la construcción del dual a partir del primal con los criterios de la tabla mostrada anteriormente.

Dado el problema:

$$mín\ z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.a. \qquad x_1 + 2x_2 \quad \leq 5$$

$$-x_1 + x_3 \geq 3$$

$$x_2 - x_3 = -4$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$x_1, x_2 \geq 0$, $x_3\ s.r.s.$

Su dual se determina de la siguiente manera:

Función Objetivo. Como es a minimizar, en el dual será a maximizar. Y los coeficientes de las nuevas variables y_j serán los valores del lado derecho (b_i); nótese que como se tienen cuatro restricciones se tendrán la misma cantidad de variables en el dual.

$$máx\ w = 5y_1 + 3y_2 - 4y_3 + 2y_4$$

Restricciones. Utilizando la Tabla 1 se determina el signo correspondiente en cada restricción y variable del dual. Como las variables primales x_1, x_2 son "≥", por la tabla las restricciones correspondientes en el dual serán "≤"; en el caso de la variable x_3 no hay restricción de signo por lo que la restricción correspondiente del dual será igualdad; así:

$$s.a. \quad y_1 - y_2 - y_4 \leq 2$$

$$2y_1 + y_3 + y_4 \leq 2$$

$$y_2 - y_3 - y_4 = 3$$

<u>Variables</u>. La primera restricción en el primal es "≤", por lo que la variable dual correspondiente será "≤ 0".La segunda y cuarta restricciones en el primal son "≥", por lo que las variables duales correspondientes serán "≥ 0". Por último la tercera restricción en el primal es de igualdad, por lo que la variable dual debe ser sin restricción de signo.

Entonces, el dual queda:

$$máx\ w = \ 5y_1 + 3y_2 - 4y_3 + 2y_4$$

$$s.a.\ y_1 - y_2 - y_4 \leq 2$$

$$2y_1 + y_3 + y_4 \leq 2$$

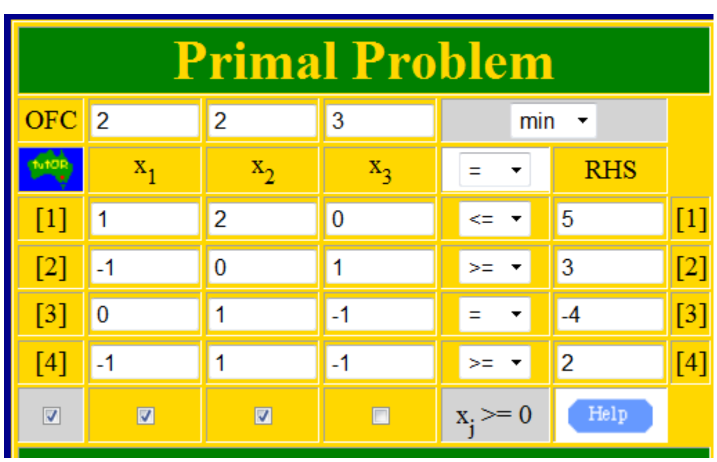
$$y_2 - y_3 - y_4 = 3$$

$$y_1 \ \leq 0, y_2 \geq 0, y_3\ s.r.s., y_4 \geq 0$$

La tarea de encontrar el dual de un programa lineal más grande se vuelve verdaderamente tediosa, por lo que es bueno mencionar la existencia de software que sirve para obtener el dual de un programa lineal.

Un ejemplo es la Universidad de Canberra, Australia que tiene en línea una página Web para obtener el dual de cualquier programa lineal. La liga es: <u>http://www.tutor.ms.unimelb.edu.au/duality/duality.html</u>

Para el problema del ejemplo anterior, los datos se cargan como sigue:



Y el dual que se obtiene es:

Dual Problem

OFC	-5	3	-4	2	max		
	y_1	y_2	y_3	y_4		RHS	
[1]	-1	-1	0	-1	<=	2	[1]
[2]	-2	0	1	1	<=	2	[2]
[3]	-0	1	-1	-1	=	3	[3]

y_1 , y_2 , y_4 >= 0 New Problem

Nótese que los australianos cambian el signo de la variable $y_{1,}$ ya que en el contexto original $y_1 \leq 0$.

También con el paquete WinQSB (Chang, 2003) se puede obtener el dual de un programa lineal (en el menú *Format*).

Para introducir el problema primal en WinQSB es necesario tomar en cuenta que dicho paquete no admite valores negativos del lado derecho por lo que en el ejemplo se cambió la tercera restricción por su equivalente con signo no negativo del lado derecho. Entonces el programa lineal se carga como:

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	2	2	3		
C1	1	2		<=	5
C2	-1		1	>=	3
C3		-1	1	=	4
C4	-1	1	-1	>=	2
LowerBound	0	0	-M		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Y el dual obtenido es:

Variable -->	C1	C2	C3	C4	Direction	R. H. S.
Maximize	5	3	4	2		
X1	1	-1		-1	<=	2
X2	2		-1	1	<=	2
X3		1	1	-1	=	3
LowerBound	-M	0	-M	0		
UpperBound	0	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Unrestricted	Continuous		

2.3 Relaciones Primal – Dual

Existen varios teoremas importantes sobre dualidad que dicen en qué forma las soluciones de ambos problemas se relacionan; se presentan algunos a continuación.

Teorema 2.1 (*Débil de dualidad*). Si $\bar{x}$ es una solución factible para el problema primal canónico y $\bar{y}$ es una solución factible para el problema dual, entonces $z = c\bar{x} \leq yb = \bar{w}$.

Demostración:

Por ser $\bar{x}$ solución factible del primal se tiene $A\bar{x} \leq b$, y para $\bar{y}$ solución factible se cumple $A^t\bar{y} \geq c^t$.

Multiplicando la primera restricción por $\bar{y}^t$ y la segunda por $\bar{x}^t$ se obtiene $y^t Ax \leq y^t b$ y $x^t A^t y \geq x^t c^t$. Además se tiene $\left(x^t A^t y\right)^t = y^t Ax \geq \left(x^t c^t\right)^t = c\bar{x}$, así $w = y^t b \geq y^t Ax \geq cx = z$. ■

Corolario 2.1 Sean $\bar{x}$ y $\bar{y}$ soluciones factibles de los problemas Primal y Dual, respectivamente. Si $c\bar{x} = b^t\bar{y}$, entonces $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son soluciones óptimas de los problemas Primal y Dual, respectivamente.

Demostración:

Supóngase que existe x' solución óptima del primal tal que $cx' > c\bar{x} = b^t \bar{y}$ esto contradice el teorema débil de dualidad. De la misma forma para $\bar{y}$, así $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son soluciones óptimas de los problemas Primal y Dual, respectivamente.■

Antes de pasar al siguiente teorema recordemos que existe una solución factible asociada a una base, por lo que se puede escribir el programa lineal como sigue, donde x_I y x_J son las variables básicas y no-básicas respectivamente:

$$
\begin{gathered}
máx\ z = c^I x_I + c^J x_J \\
s.a.\ A_I x_I + A_J x_J = b \\
x_I, x_J \geq 0
\end{gathered}
\qquad \ldots (4)
$$

Multiplicando A_I^{-1} por la izquierda en la restricción obtenemos

$$x_I + A_I^{-1} A_J x_J = A_I^{-1} b \qquad \ldots (5)$$

Entonces la solución básica factible queda determinada como sigue

$$\bar{x}_I = A_I^{-1} b$$

Multiplicando (5) por c_I se obtiene

$$c^I x_I + c^I A_I^{-1} A_J x_J = c^I A_I^{-1} b$$

y restando de la función objetivo en (4) la ecuación anterior queda

$$\left[c^J - c^I A_I^{-1} A_J\right] x_J = z - c^I A_I^{-1} b$$

Además ya que $z_0 = c_I A_I^{-1} b$ es la solución asociada a la base. Entonces el programa lineal en forma explícita respecto a la base es:

$$
\begin{gathered}
\left[c^J - c^I A_I^{-1} A_J\right] x_J = z - c^I A_I^{-1} b \\
s.a.\ x_I + A_I^{-1} A_J x_J = A_I^{-1} b \\
x_I, x_J \geq 0
\end{gathered}
$$

Y como para cada posible base existe una correspondiente forma explícita del problema entonces si x^* es solución óptima el problema con dicha solución puede ser escrito de forma explícita.

Teorema 2.2 (Fuerte de dualidad). Si el problema primal tiene una solución factible y el correspondiente dual también tiene una solución factible, entonces existen *x** solución factible óptima del problema primal, y *y** una solución factible óptima del problema dual que cumplen:

$$\mathrm{Max\,z} = \mathrm{cx}^* = \mathrm{Min\,w} = \mathrm{y}^*\mathrm{b}.$$

Demostración: Dado el problema Primal en su forma estándar (3) y haciendo

$$c' = (c \quad 0), x' = \binom{x}{h}, B = (A \quad U),$$

Obtenemos el problema equivalente

$$P' \begin{cases} máx\ z = c'x' \\ Bx' = b \\ x' \geq 0 \end{cases}$$

Como por hipótesis el problema primal tiene una solución óptima finita, existe una solución óptima básica *x** de P asociada a una base I. Entonces se puede escribir P en forma explícita respecto a dicha base como sigue:

$$\begin{aligned} &máx\ z, \\ &0x_I' + [(c')^J - z^J]x_J' = z - z_0 \\ &x_I' + (B^I)^{-1}B^J x_J' = (B^I)^{-1}b \\ &x_I', x_J' \geq 0 \end{aligned}$$

Donde $z_0 = (c')^I (B^I)^{-1} b$ y $z^J = (c')^I (B^I)^{-1} B^J$.

La solución óptima básica es $x^* = ((B^I)^{-1}b \quad 0)$, es decir, $x_I^* = (B^I)^{-1}b$ y $x_J^* = 0$.

Se puede reescribir la función objetivo como sigue:

$$z = z_0 + 0x_I' + [(c')^J - z^J]x_J'$$

$$z = (c')^I(B^I)^{-1}b + [(c')^I - (c')^I(B^I)^{-1}B^I]x_I' + [(c')^J - (c')^I(B^I)^{-1}B^J]x_J'$$

Donde

$$(c')^I - (c')^I(B^I)^{-1}B^I \le 0$$
$$(c')^J - (c')^I(B^I)^{-1}B^J \le 0$$

La última desigualdad se da por ser $\bar{x}^*$ solución óptima. Al reescribir las desigualdades, se obtiene:

$$(c')^I \le (c')^I(B^I)^{-1}B^I$$
$$(c')^J \le (c')^I(B^I)^{-1}B^J$$

Que es equivalente a:

$$(c')^I(B^I)^{-1}(B^I \quad B^J) \ge ((c')^I \quad (c')^J)$$

pero $B = (B^I \quad B^J)$ y $c' = ((c')^I \quad (c')^J)$, además $B = (A \quad U)$ y $c' = (c \quad 0)$, así que la desigualdad queda:

$$(c')^I(B^I)^{-1}(A \quad U) \ge (c \quad 0)$$

O bien

$$(c')^I(B^I)^{-1}A \ge c$$
$$(c')^I(B^I)^{-1}U \ge 0$$

Aplicando la traspuesta se tiene:

$$A^t[(c')^I(B^I)^{-1}]^t \ge c^t$$
$$U^t[(c')^I(B^I)^{-1}]^t \ge 0$$

Sea $\bar{y} = [(c')^I (B^I)^{-1}]^t$, entonces $\bar{y}$ es solución factible del problema dual ya que las desigualdades anteriores son las restricciones del dual D.

Al evaluar en la función objetivo dual se obtiene $b^t\,\bar{y} = b^t(c^I(B^I)^{-1})^t = (c^I(B^I)^{-1}b)^t = (c^Ix^*)^t = c^Ix^*$; ya que es un escalar, entonces $\bar{y}$ es óptimo para el dual y $b^t\,\bar{y} = c^Ix^*$.■

2.4 Teorema Fundamental de Dualidad

Teorema 2.3 (Fundamental de dualidad). Para los problemas primal y dual, una de las siguientes proposiciones se cumple:

1. Ambos problemas tienen soluciones óptimas x^* y y^*, con $cx^* = y^*b$.

2. Uno de los problemas tiene valor objetivo no acotado, por lo que el otro problema debe ser no factible.

3. Ambos problemas son no factibles.

Demostración:

1. Sean $\bar{x}$ y $\bar{y}$ soluciones factibles de los problemas primal y dual respectivamente. El teorema débil de dualidad establece $\bar{z} = c\bar{x} \leq b^t\bar{y} = \bar{w}$, entonces el algoritmo simplex garantiza que existe el óptimo para el primal y por el teorema 2.2 existe la solución óptima del dual tal que $z^* = w^*$.

2. Por contradicción. Supóngase sin pérdida de generalidad que $z \to \infty$ y que existe $\bar{y}$ solución factible del dual. Entonces, existe $\bar{x}$ tal que $b^t\bar{y} \leq c\bar{x}$ lo que contradice el teorema débil de dualidad.

3. Esta posibilidad se muestra en el ejemplo 3 a continuación.

■

Enseguida se muestran ejemplos de los tres casos.

Ejemplo 1. Para el siguiente problema lineal ambos problemas tienen soluciones óptimas.

$$\text{máx } z = 2x$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & x \leq 7 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Se puede ver que la solución óptima es $x = 7, z_{máx} = 14$.

Su problema dual es:

$$mín\; w = 7y$$

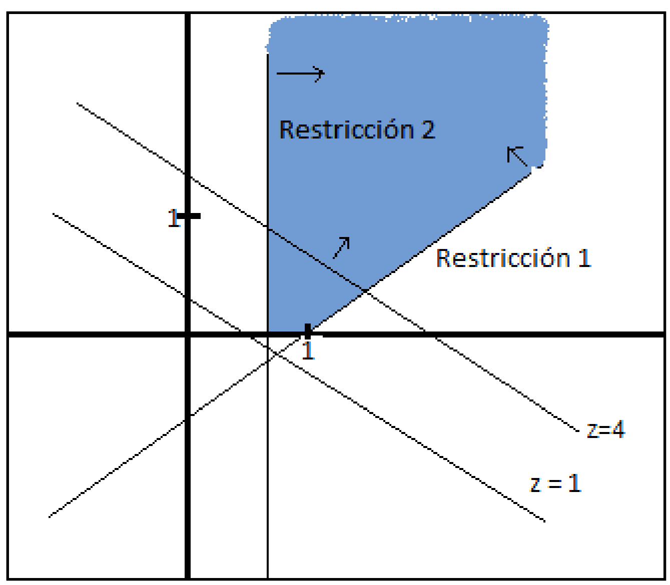
$$s.a. \; y \geq 2$$
$$y \geq 0$$

Cuya solución es $y = 2, w_{mín} = 14$.

Ejemplo 2. El siguiente problema lineal tiene valor objetivo no acotado, por lo que el dual es no factible.

$$máx\; z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.a. \quad 2x_1 - 3x_2 \leq 2$$
$$3x_1 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Gráficamente se ve que $z \to \infty$; la función objetivo no está acotada.

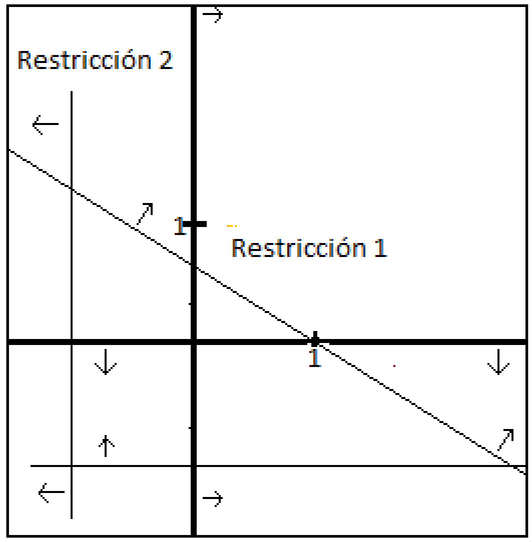


El dual de este programa lineal está dado por:

$$mín\; w = 2y_1 + 2y_2$$
$$s.a. \quad 2y_1 + 3y_2 \geq 2$$

$$-3y_1 \geq 3$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0$$

Del gráfico se ve que no hay factibilidad para este problema.



Ejemplo 3. Dado el siguiente problema lineal.

$$\begin{aligned} &Máx\ z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ &s.a. \quad -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ &\qquad\quad x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ &\qquad\quad x_1 - x_2 - x_3 \leq -3 \\ &\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Se observa que al cambiar la tercera restricción $x_1 - x_2 - x_3 \leq -3$ por su equivalente con el lado derecho no negativo $-x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$, la primera y tercera restricción implican la no factibilidad del problema.

La primera restricción indica:

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

Y la tercera dice:

$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$

entonces debería suceder:

$$3 \leq -x_1 + x_2 + x_3 \ \leq 1$$

Lo que es imposible por lo que no se tiene factibilidad en el primal.

Ahora, considérese el dual del problema anterior.

$$Mín\ w = y_1 + 5y_2 - 3y_3$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad -y_1 + y_2 + \ y_3 \ &\geq 2 \\ y_1 - \ y_2 - y_3 \ &\geq -1 \\ y_1 + \ 2y_2 - y_3 \ &\geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \ &\geq 0 \end{aligned}$$

Se ve que como en el primal, la primera restricción y la segunda implican:

$$2 \leq -y_1 + y_2 + \ y_3 \leq 1$$

Por lo que el dual tampoco es factible.

Los problemas primal y dual están tan estrechamente relacionados que al obtener la solución óptima de uno, se obtiene de inmediato mucha información de la solución óptima del otro.

2.5 Holguras complementarias

A continuación se presenta el concepto de holguras complementarias que al igual que el teorema fundamental de dualidad permiten usar el problema dual para resolver el primal.

Para aplicar los siguientes teoremas, nuestro problema primal debe estar en forma estándar.

Teorema 2.4 (Débil de holguras complementarias). Una condición necesaria y suficiente para que un par de soluciones factibles de problemas lineales duales P y D sean óptimas es que:

y (**Ax** – **b**) **=** 0 y (**c** – **yA**) **x =** 0.

Que es equivalente a:

1. Si una de las restricciones se satisface como desigualdad estricta, la variable correspondiente del dual es nula (e.i. si **Ax – b > 0**, entonces **y = 0**; si **c – yA > 0**, entonces **x = 0**).

2. Si una variable de uno de los problemas es positiva, la restricción correspondiente del dual se satisface como ecuación (e.i. si **y > 0**, entonces **Ax - b = 0**; si **x > 0**, entonces **c – yA = 0**).

Demostración:

Sean P y D en su forma estándar

$$\text{P} \begin{cases} Maximizar\ z = cx \\ Ax + h = b \\ x, h \geq 0 \end{cases} \qquad \ldots (6)$$

$$\text{D} \begin{cases} Minimizar\ w = by^t \\ y^tA - k^t = c \\ y, k \geq 0 \end{cases} \qquad \ldots (7)$$

Sean $(\bar{x}, \bar{h})$ y $(\bar{y}, \bar{k})$ soluciones factibles de (6) y (7) respectivamente. Entonces

$$\bar{h} = b - A\bar{x},$$

$$\bar{k}^t = \bar{y}^tA - c$$

multiplicando por $\bar{y}^t$ en la primera ecuación por la izquierda y $\bar{x}$ en la segunda por la derecha, queda:

$$\bar{y}^t\bar{h} \; = \; \bar{y}^t b - \bar{y}^t A\bar{x},$$

$$\bar{k}^t\bar{x} \; = \; \bar{y}^t A\bar{x} - c\bar{x}$$

Sumando ambas ecuaciones resulta:

$$\bar{y}^t\bar{h} + \; \bar{k}^t\bar{x} \quad = \; \bar{y}^t b - c\bar{x}$$

Necesidad.

Si las soluciones son óptimas, $\bar{y}^t b = c\bar{x},$ por lo que $\bar{y}^t\bar{h} + \bar{k}^t\bar{x} = 0$, pero $\bar{y}^t, \bar{h}, \; \bar{k}, \bar{x} \geq 0$ lo que implica $\bar{y}^t\bar{h} = 0$ y $\bar{k}^t\bar{x} = 0$.

1. Si uno de los problemas lineales se satisface como desigualdad, i.e.

$\bar{k} > 0$ entonces $\bar{x} = 0$

$\bar{h} > 0$ entonces $\bar{y}^t = 0$

2. Si una de las variables de unos de los problemas es positiva, i.e.

$\bar{x} > 0$ entonces $\bar{k} = 0$

$\bar{y}^t > 0$ entonces $\bar{h} = 0$

Suficiencia.

Si se satisfacen las condiciones del teorema (incisos 1 y 2), $\bar{y}^t\bar{h} = 0$ y $\bar{k}\bar{x} = 0$ por lo que $\bar{y}^t b = c\bar{x}$, entonces por el corolario 2.1 $\bar{x}$ y $\bar{y}^t$ son soluciones óptimas de P y D respectivamente.■

El teorema débil de holguras complementarias indica las posibilidades para las variables y restricciones primales y duales cuando se sabe que alguna variable es positiva o que alguna restricción se cumple con desigualdad estricta (o sea, con holgura positiva). Sin embargo, no dice si es posible que simultáneamente sean cero tanto las variables como las holguras, de modo que en los productos $\bar{y}^t\bar{h} = 0$ y $\bar{k}^t\bar{x} = 0$ ambos factores sean nulos. El siguiente teorema muestra que eso no ocurre.

Teorema 2.5 (Fuerte de holguras complementarias). Si los problemas lineales duales tienen una solución factible, entonces existe una pareja de soluciones óptimas de P y D tales que

$$y^t + (Ax - b) > 0 \ \text{ y } \ (c - yA) + x^t > 0.$$

Que es equivalente a:

1. Si una de las restricciones de uno de los problemas lineales es igualdad, entonces la variable correspondiente del otro problema es positiva (e.i. si $Ax - b = 0$, entonces $y > 0$, si $c - yA = 0$, entonces $x > 0$).

2. Si una variable de uno de los problemas es nula, entonces la restricción correspondiente del otro es desigualdad estricta (e.i. si $y = 0$, entonces $Ax - b > 0$, si $x = 0$, entonces $c - yA > 0$).

Demostración:

La demostración de este teorema es un poco larga por lo que no se verán los detalles en este texto; una referencia detallada se encuentra en Prawda, J. (1992). Para el desarrollo de la demostración se requieren los resultados siguientes:

Lema de Farkas. Sean $\boldsymbol{A}$ matriz $m \times n$, $b \in \mathrm{R}^n$. Entonces, uno y sólo uno de los sistemas siguientes tiene solución:

$$Ax \le b, \text{ con } x \ge 0 , \quad x \in \mathrm{R}^n$$

ó

$$yA \ge 0, \ yb < 0 , \quad \text{con } y \ge 0 , \quad Y \in \mathrm{R}^m$$

Basándose en el Lema de Farkas, se puede probar el siguiente teorema:

Teorema 1. El sistema de desigualdades:

$AX \geq 0$, con $X \geq 0$, $X \in \mathrm{R}^{n}$

donde A es antisimétrica (o sea $A^T = -A$) posee una solución x^* tal que: $Ax^* + x^* > 0$

Y con base en este teorema, se puede probar el siguiente resultado

Teorema 2. El sistema de desigualdades lineales:

$$Ax - tb \geq 0, y \geq 0 \qquad \ldots(8)$$

$$-yA^T + t\,c^T \geq 0, x \geq 0 \qquad \ldots(9)$$

$$yb^T - cx \geq 0, t \geq 0 \qquad \ldots(10)$$

Con A matriz $m \times n$; x, $c \in \mathrm{R}^{n}$; y, $b \in \mathrm{R}^{m}$, $t \in \mathrm{R}$

Tiene al menos una solución y^*, x^*, t^* que cumple:

$$Ax^* - t^*b + y^{*T} > 0 \qquad \ldots(11)$$

$$-yA^T + t^*c^T + x^{*T} > 0 \qquad \ldots(12)$$

$$y^*b^T - cx^* + t^* > 0 \qquad \ldots(13)$$

El Teorema 2 es la base para demostrar el Teorema Fuerte de Holgura Complementaria:

Al tener ambos programas soluciones factibles, el teorema fundamental de dualidad asegura que existen soluciones óptimas factibles x^* y y^* para el primal y dual respectivamente**,** que además cumplen la igualdad de los objetivos primal y dual: $cx^* = y^*b$.

Eligiendo el valor particular $t = 1$ en las hipótesis del Teorema 2, y puesto que $y^*b^T - cx^* = 0$, la desigualdad (13) queda confirmada y las desigualdades (11) y (12) dan el resultado deseado para las soluciones óptimas x^* y y^*:

$Ax^* - b + y^{*T} > 0$

$c^T - y^* A^T + x^{*T} > 0$

■

2.6 Precios Sombra

Sean P y D en su forma canónica y sea B la matriz óptima básica del problema primal y c_B el vector de costos correspondiente, entonces el valor óptimo de la función objetivo primal está dado por $z^* = c_B B^{-1} b = y^* b$, de donde:

$$y^* = \frac{\partial z^*}{\partial b} = c_B B^{-1} \text{ o sea que } \quad y_i^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_i}$$

Así la tasa de cambio del valor objetivo óptimo z* respecto al i-ésimo requerimiento b_i es justamente la variable dual i-ésima y_i. El hecho de que $y_i^* \geq 0$ implica que z^* crece o se mantiene constante cuando b_i crece.

Económicamente, se piensa en y^* como un vector de *precios sombra* para el vector del lado derecho, es decir, si la restricción *i*-ésima representara una demanda de producto de al menos b_i unidades del producto *i* y cx representara el costo total de producción, entonces y_i^* es el *precio justo* que se debería pagar por tener una unidad extra del producto *i*.

La idea de precio sombra se muestra en el siguiente ejemplo:

Un productor independiente elabora dos tipos de salsa de tomate que vende en jarras al supermercado de la zona. Para la realización de una jarra de la primera salsa se requieren 3 kg. de tomates y 4 tazas de vinagre. Para la segunda se requieren 5 kg. de tomates y 3 tazas de vinagre. La primera salsa le produce un beneficio de $24 por jarra y la segunda $30. El supermercado le impone al productor las siguientes condiciones:

- Producir por lo menos 5 jarras de salsa a la semana, para garantizar la oferta de distribución.

- El supermercado vende tomates y vinagre al productor, pero con límite de a lo más 47 kg de tomate y 3 botellas de vinagre por semana, para no afectar las ventas al público.
- Cada botella de vinagre contiene 16 tazas y el supermercado monopoliza la venta de tomate y vinagre.

El programa lineal a resolver para el problema es el siguiente, donde las unidades en las restricciones son kg de tomate y tazas de vinagre:

Variable -->	Salsa1	Salsa2	Direction	R. H. S.
Maximize	24	30		
tomates	3	5	<=	47
vinagre	4	3	<=	48
Num_jarras	1	1	>=	5
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

La solución óptima es:

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	Salsa1	9.0000	24.0000	216.0000	0	basic	18.0000	40.0000
2	Salsa2	4.0000	30.0000	120.0000	0	basic	18.0000	40.0000
	Objective	Function	(Max.) =	336.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	tomates	47.0000	<=	47.0000	0	4.3636	36.0000	80.0000
2	vinagre	48.0000	<=	48.0000	0	2.7273	28.2000	62.6667
3	Num_jarras	13.0000	>=	5.0000	8.0000	0	-M	13.0000

Que indica usar 47 kg de tomate y 48 tazas de vinagre para producir 13 jarras que generan un ingreso máximo de \$336. Como puede verse, los precios sombra de los ingredientes son: \$4.3636 por kg de tomate y \$2.7273 por taza de vinagre. Así, esos valores son los correspondientes aumentos al ingreso óptimo de \$336 por cada unidad que se aumente de los insumos. Es decir, disponer de 1 kg de tomates más aumenta el ingreso óptimo en \$4.3636 y una taza de vinagre disponible adicional lo aumenta en $2.7273, por lo que el insumo más valioso son los tomates.

Podría preguntarse entonces si conviene conseguir más tomates o más vinagre para aumentar el ingreso, y en qué cantidades. En la solución óptima aparecen a un lado de los precios sombra los valores mínimo y máximo entre los que pueden variar los coeficientes del lado derecho (restricciones) sin que cambie la base óptima. Así, mientras se disponga de cantidades que no se superen los 80kg de tomate y las 62.667 tazas de vinagre, la base sigue siendo óptima, y el cálculo del ingreso extra puede hacerse con los precios sombra de la tabla.

Si el supermercado permite al productor obtener un kg de tomates más, el programa lineal queda:

Variable -->	Salsa1	Salsa2	Direction	R. H. S.
Maximize	24	30		
tomates	3	5	<=	48
vinagre	4	3	<=	48
Num_jarras	1	1	>=	5
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

Y su solución óptima es la siguiente

	10:42:38		Tuesday	August	14	2012		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	Salsa1	8.7273	24.0000	209.4546	0	basic	18.0000	40.0000
2	Salsa2	4.3636	30.0000	130.9091	0	basic	18.0000	40.0000
	Objective	Function	(Max.) =	340.3636				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	tomates	48.0000	<=	48.0000	0	4.3636	36.0000	80.0000
2	vinagre	48.0000	<=	48.0000	0	2.7273	28.8000	64.0000
3	Num_jarras	13.0909	>=	5.0000	8.0909	0	-M	13.0909

Observe que el aumento en el óptimo es $340.3636 - $336.00 = $4.3636, que es el precio sombra por kg de tomate encontrado para el problema original.

2.7 Dual simplex

El método dual simplex es una herramienta muy útil debido a que al contrario del algoritmo simplex, éste no requiere de variables artificiales para funcionar. Aunque también tiene una pequeña desventaja, el problema debe ser dual factible para poder utilizar el método.

Es importante recordar que la forma en que opera el método simplex es: a partir de una solución básica factible se trata de llegar a una solución básica óptima, buscando la factibilidad del dual.

Supóngase que $x^* = (x_I, x_J)$ es solución óptima básica del problema de maximizar en forma general, en la Tabla 2 se muestra el resultado de la última iteración del algoritmo simplex aplicado a dicho problema (sin pérdida de generalidad se han ordenado las variables de esa manera para un mejor manejo de la tabla), así $z_{máx} = z_0$ y $x_I \geq 0$, ahora por holguras complementarias $y_I = 0$, y $-y_J = c^J - z_J$.

	x_I $\quad$ x_J	$\bar{x}_I$
x_I	U $\quad$ $(A^I)^{-1}A^J$	$(A^I)^{-1}b$
$-z$	0 $\quad$ $c^J - z_J$	$-z_0$

Tabla 2. Resultado de la última iteración del Simplex a un problema de maximización.

Debido a este último resultado el algoritmo dual simplex busca $y_J \geq 0$ o lo que es lo mismo $c^J - z_J \leq 0$, que en la tabla simplex es el objetivo. O sea que el objetivo del algoritmo simplex es obtener la factibilidad en el dual.

El algoritmo dual simplex parte más bien de la factibilidad del dual y trata de llegar a la factibilidad en el primal. Esto se debe a que la única solución factible para ambos es el óptimo, así ambos algoritmos garantizan la optimalidad en la última tabla.

La manera de operar del algoritmo dual simplex es muy similar a la del algoritmo simplex que ya se conoce, la diferencia radica en que se comienza con la factibilidad en el primal y se quiere llegar a la del dual, además la forma de elegir las variables que entran o salen de la base también es diferente como ya se vio (2.6.1).

Algoritmo Dual simplex para un problema de maximizar

Paso 1. Considérese una solución básica que sea dual factible.

Paso 2. Encontrar una $\bar{x}_p = mín\,\{\bar{x}_i\}$, si $\bar{x}_p < 0$ indicará que la variable x_l saldrá de la base, seguir con el paso 3, de lo contrario la solución es básica factible también para el primal por lo que es óptima, y el algoritmo termina.

Paso 3. Si todos los elementos de la fila correspondiente a $\bar{x}_p$ son positivos o cero, entonces existe una clase de soluciones del dual tal que $\omega \to -\infty$. De lo contrario escoger y_p^l tal que:

$$\frac{c^l - z_l}{y_p^l} = mín\left\{\frac{c^j - z_j}{y_p^j}\middle| y_p^j < 0\right\}$$

Que fija la variable que entra a la base, en este caso x_l. Ir al paso 2.

Ejemplo. Dado el siguiente problema lineal, resolver con el algoritmo simplex dual.

$$\begin{aligned} máx\ z = \ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.a.\quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \ \leq 7 \\ & 3x_1 \qquad - 2x_3 \geq 9 \\ & \qquad\qquad\quad x_3 \leq 6 \\ & \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En su forma explícita:

$$
\begin{aligned}
&máx\ z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
&s.a.\quad 2x_1 + x_2 + x_3 + h_1 \qquad\qquad = 7 \\
&\qquad -3x_1 \qquad + 2x_3 \qquad + h_2 \qquad = -9 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad x_3 \qquad\qquad + h_3 = 6 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Paso 1.

Se debe escoger una base, sean $I = \{2,5,6\}$, $J = \{1,3,4\}$, se tiene $detA^I \neq 0$, por lo que I es base. A continuación se pone el problema en forma explícita respecto a esa base para ver si es dual factible.

$$c^J - z_J = c^J - c^I(A^I)^{-1}A^J$$

$$= (3 \quad 1 \quad 0) - \left[(2 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= (3 \quad 1 \quad 0) - \left[(2 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= (3 \quad 1 \quad 0) - (4 \quad 2 \quad 2)$$

$$= (-1 \quad -1 \quad -2)$$

Como $c^J - z_J \leq 0$, el problema es dual factible, se puede utilizar dual simplex para su solución.

		x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
x_2	2	1	1	1	0	0	7
h_2	-3	0	2	0	1	0	-9
h_3	0	0	1	0	0	1	6
$-z$	-1	0	-1	-2	0	0	-14

Paso 2.

Según el algoritmo, h_2 debe salir de la base.

Paso 3. Escogemos el mínimo de los cocientes $\{\frac{-1}{-3}\}$, en este caso únicamente tenemos uno así que debemos usarlo, por lo que x_1 es quien debe entrar a la base. Realizando las operaciones pertinentes se tiene

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
x_2	0	1	7/3	1	2/3	0	1
h_2	1	0	-2/3	0	-1/3	0	3
h_3	0	0	1	0	0	1	6
$-z$	0	0	-5/3	-2	-1/3	0	-11

Se ha obtenido la factibilidad primal por lo que $x^* = (3\ \ 1\ \ 0)$ es la solución óptima y $z_{máx} = 11$.

El lector puede resolver el problema utilizando el método simplex y se dará cuenta que necesita hacer más operaciones de pivoteo para llegar a la solución, para este ejercicio en particular el esfuerzo computacional es mínimo ya que es un problema pequeño y es por ello que podría no apreciarse la importancia del simplex dual, pero recuérdese que en la práctica los problemas no suelen ser así de pequeños. Más adelante se verá que el Simplex Dual es también una herramienta poderosa en el análisis de sensibilidad.

3 Análisis de sensibilidad

Como ya se había mencionado el análisis de sensibilidad es una de las herramientas más importantes cuando de programación lineal se trata, ya que es gracias a él que dado un problema lineal y su solución se pueden hacer cambios al problema original con la garantía de que el resultado actualizado será óptimo sin necesidad de repetir todos los cálculos Esto puede ser muy útil al tratar con problemas cuya cantidad de variables y restricciones sea complicada de manejar.

Para hacer la comprensión del tema lo más clara y sencilla posible, se considerará el siguiente problema lineal.

$$\begin{aligned}
&máx\ z = cx \\
&s.a.\ \ Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

En este capítulo se trabajará con el programa lineal siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
máx\ z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\
s.a.\ \ x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
x_1 \qquad + x_3 \geq 5 \\
2x_1 + x_2 - x_3 \leq 12 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (14)$$

En su forma estándar:

$$máx\ z = 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & x_2 + 2x_3 + h_1 && = 8 \\ & x_1 \quad + x_3 \quad - h_2 && = 5 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \quad + h_3 && = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3 && \geq 0 \end{aligned}$$

Cuya tabla óptima es:

Phase 2 (Iter 5								
Basic	x1	x2	x3	Sx4	sx5	Rx6	sx7	Solution
z (max)	0.00	3.00	0.00	0.00	3.00	blocked	1.00	36.00
x3	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00	8.00
x1	1.00	1.00	0.00	0.00	0.50	0.00	0.50	10.00
Sx4	0.00	2.00	0.00	1.00	1.50	-1.00	0.50	13.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00					
Upper Bound	infinity	infinity	infinity					
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n					

Tabla 3. Tabla óptima con el algoritmo de dos fases (usando el paquete Tora. Las variables de holgura se designan con S o s, y las artificiales con R).

La Tabla 3 indica la solución óptima z* = 36 con $x_1 = 10$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 8$.

Además en el problema se tiene lo siguiente:

$$c = (2 \quad 1 \quad 2),\ b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.1 Cambios en el vector del lado derecho *b*

Si es necesario modificar alguno de los valores del lado derecho b por b′ entonces será reemplazado $(A^I)^{-1}b$ por $(A^I)^{-1}b'$. Se tendrán dos casos:

1. Si $(A^I)^{-1}b' \geq 0$ y como el vector de costos no presenta cambios, la base óptima que se tenía sigue siendo óptima.
2. Si $(A^I)^{-1}b' < 0$ para alguna $i \in I$ entonces se habrá perdido factibilidad en el dual. por lo que aplicamos el dual simplex para obtener la nueva solución óptima.

Ejemplo 1. Si en el problema (14) hubiera la necesidad de cambiar $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ por $b' = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Se tiene:

$$\mathrm{A^I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (\mathrm{A^I})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Analizando $(\mathrm{A^I})^{-1}\mathrm{b}'$:

$$(\mathrm{A^I})^{-1}\mathrm{b}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \geq 0$$

La base óptima original sigue siendo óptima y los valores óptimos se mantienen.

Ejemplo 2. Ahora supóngase que se cambia $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ por $b' = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Analizando $(\mathrm{A^I})^{-1}\mathrm{b}'$:

$$(\mathrm{A^I})^{-1}\mathrm{b}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix} \geq 0$$

Al igual que en el ejercicio anterior la base óptima es la misma pero ahora los valores óptimos cambian a $z^* = 42$ cuando $x_1 = 11$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 10$.

Ejemplo 3. Ahora supóngase que se cambia $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ por $b' = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Analizando $(\mathrm{A^I})^{-1}\mathrm{b}'$:

$$(\mathrm{A^I})^{-1}\mathrm{b}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Como hay valores negativos del lado derecho, es decir no hay factibilidad en el primal, se debe usar el dual simplex para encontrar la nueva solución óptima.

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
x_3	0	1	1	0	1	0	2
x_1	1	1	0	0	.5	.5	5
h_1	0	2	0	1	.5	.5	-2
$-z$	0	3	0	0	3	1	6

En este caso todos los elementos de los renglones correspondientes a $\bar{x}_3$ y $\bar{h}_1$ son no negativos por lo que el problema no tiene solución.

3.2 Cambios en la matriz de restricciones A

Al hacer algún cambio en la matriz de restricciones se tienen dos casos.

3.2.1 Cambios en columnas no básicas

Supóngase que la columna no básica A_j es cambiada por A_j', entonces habrá que actualizar la columna correspondiente por $(A^I)^{-1}A_j'$ y su coeficiente de costo reducido por $c^j - z_j' = c^j - c^I(A^I)^{-1}A_j'$.

Como únicamente es importante el signo de los coeficientes de costo reducido, si $c^j - z_j' \leq 0$ la solución continua siendo óptima.

Si por el contrario $c^j - z_j' > 0$, se habrá perdido la optimalidad por lo que se aplica el algoritmo simplex para obtener la solución óptima correspondiente al nuevo problema.

Ejemplo 1. Sea $A_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la columna por la que será cambiada A_2. Entonces se deben realizar los siguientes cálculos:

$$(A^I)^{-1}\mathrm{A}_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c^j - z_j' = 1 - (2 \quad 2 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= 1 - 4 = -3 \leq 0$$

Entonces la solución continúa siendo óptima.

3.2.2 Cambios en columnas básicas

En este caso supóngase que la columna básica A_j es cambiada por A_j', entonces puede suceder que $A^{I\prime}$ ya no sea una base.

Para determinar si $A^{I\prime}$ es base o no, se debe calcular $y_j' = (A^I)^{-1}A_j'$. Si algún elemento de y_j' es cero se dirá que $A^{I\prime}$ ya no forma una base. Si esto sucede deberá agregarse una variable artificial que tomará el lugar de la variable x_i', cuyo valor correspondiente de y_j' fue cero, en la base para luego proseguir con el método de las dos fases, que se usa comúnmente en programación lineal.

Si $A^{I\prime}$ sigue siendo base, entonces se tienen las siguientes posibilidades:

1. Si hay factibilidad primal $x_I' \geq 0$ y factibilidad en el dual $c_J - z_J \leq 0$, entonces x_I' es solución factible óptima y únicamente se debe pivotear para hacer la columna unitaria.
2. Si xI' es solución factible pero no es óptima i. e. $c_J - z_J > 0$. Se debe aplicar el algoritmo simplex pero a la transformación en la tabla óptima (se obtiene al calcular yj' = (AI)-1Aj' y cj - zj' = cj - cI(AI)-1Aj' y tomando a xI' como solución factible inicial).

Si x_I' cumple las condiciones de optimalidad pero no es factible, se puede aplicar dual simplex para obtener la nueva solución óptima.

Ejemplo 1. Sea $A_1' = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ la columna por la que será cambiada A_1. Primero se verificara que A_I' sea una base.

$$y_1' = (A^I)^{-1}A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Para $\bar{x}_3$ se tiene que $y_1' = 0$ por lo que A_I' ya no es una base. Entonces se agregará una variable artificial a_1 que tome el lugar de $\bar{x}_3$ en la base y se calcula $c_3 - z_3'$.

$$c^3 - z_3' = 2 - (2 \quad 2 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2 - 3 = -1.$$

La nueva tabla queda:

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	a_1	
a_1	0	1	0	0	1	0	1	8
x_1	1	1	1.5	0	0.5	0.5	0	10
h_1	0	2	0.5	1	1.5	0.5	0	13
$-z$	0	-3	-1	0	-3	-1	0	-36
φ	0	-1	0	0	-1	0	0	8

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	a_1	
x_2	0	1	0	0	1	0	1	8
x_1	1	0	1.5	0	-0.5	0.5	-1	2
h_1	0	0	0.5	1	-0.5	0.5	-2	3
$-z$	0	0	-1	0	0	-1	3	-12
φ	0	0	0	0	0	0	1	16

Fin de fase 1.

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
x_2	0	1	0	0	1	0	8
x_1	1	0	1.5	0	-0.5	0.5	2
h_1	0	0	0.5	1	-0.5	0.5	3
$-z$	0	0	-1	0	0	-1	-12

La solución óptima es $z^* = 12$ cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ y $x_3 = 0$.

Ejemplo 2. Sea $A_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ la columna por la que será cambiada A_1. Primero se verificara que A_I' sea una base.

$$y_1' = (A^I)^{-1} A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} > 0$$

Por lo que A_I' aún es base.

$$c^1 - z_1' = 2 - (2 \quad 2 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 2 - 5 = -3$$

La tabla queda:

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
x_3	1	1	1	0	1	0	8
x_1	3/2	1	0	0	1/2	1/2	10
h_1	1/2	2	0	1	3/2	1/2	13
$-z$	-3	-3	0	0	-3	-1	-36

Pivoteando para volver la columna unitaria se obtiene:

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
x_3	0	1/3	1	0	2/3	-1/3	4/3
x_1	1	2/3	0	0	1/3	1/3	20/3
h_1	0	10/3	0	2	8/3	2/3	58/3
$-z$	0	-1	0	0	-2	0	-16

Entonces la nueva solución óptima es $z^* = 16$ cuando $x_1 = 20/3$, $x_2 = 4/3$ y $x_3 = 0$.

3.3 Adición de una nueva restricción

Supóngase que es necesario agregar una nueva restricción al problema. Podrían suceder dos cosas.

1. La nueva restricción se satisface con la solución óptima que se tenía. Si esto sucede, la solución seguirá siendo óptima para el nuevo problema.
2. La nueva restricción no se satisface con la solución óptima que se tenía. En cuyo caso se puede usar el algoritmo dual simplex para obtener la nueva solución óptima.

El lector puede darse cuenta fácilmente que al agregar una nueva restricción la región de soluciones factibles no puede ser mayor a la que se tenía.

Ejemplo 1. Supóngase que se desea añadir la siguiente restricción al problema (14):

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \ \leq 18$$

Entonces la solución óptima del problema original es $z^* = 36$ cuando $x_1 = 10$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 8$ debe satisfacer la nueva restricción para continuar siendo óptima.

Sustituyendo se tiene:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 + 2(0) - 8 = 2 \leq 18$$

Satisface la desigualdad por lo que la solución continúa siendo óptima para el nuevo problema.

Ejemplo 2. Supóngase que al problema (14) se agrega la restricción:

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \ \geq 7$$

Sustituyendo $x_1 = 10$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 8$ en la restricción:

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = -10 + \frac{1}{2}(0) + 8 = -2 < 7$$

Por lo que no satisface la nueva restricción, por lo tanto se debe poner la nueva restricción en su forma estándar.

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - h_4 = 7$$

Para un mejor manejo se multiplica por -1 y se obtiene:

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + h_4 = -7$$

A continuación se agrega la fila correspondiente a la tabla óptima del problema original.

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	h_4	
x_3	0	1	1	0	1	0	0	8
x_1	1	1	0	0	1/2	½	0	10
h_1	0	2	0	1	3/2	½	0	13
h_4	1	-1/2	-1	0	0	0	1	-7
$-z$	0	-3	0	0	-3	-1	0	-36

Pivoteando para que las columnas básicas sean unitarias queda:

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	h_4	
x_3	0	1	1	0	1	0	0	8
x_1	1	1	0	0	1/2	½	0	10
h_1	0	2	0	1	3/2	½	0	13
h_4	0	-1/2	0	0	1/2	-1/2	1	-9
$-z$	0	-3	0	0	-3	-1	0	-36

Se observa que el problema es dual factible respecto a esa base por lo que se aplica dual simplex.

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	h_4	
x_3	0	1	1	0	1	0	0	8
x_1	1	1	0	0	1/2	½	0	10
h_1	0	2	0	1	3/2	½	0	13
h_4	0	-1/2	0	0	1/2	-1/2	1	-9
$-z$	0	-3	0	0	-3	-1	0	-36

Pivoteando:

	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	h_4	
x_3	0	1	1	0	1	0	0	8
x_1	1	1/2	0	0	1	0	1	1
h_1	0	3/2	0	1	2	0	1	4
h_3	0	1	0	0	-1	1	-2	18
$-z$	0	-2	0	0	-4	0	-2	-18

La nueva solución óptima es $z^* = 18$ cuando $x_1 = 1, x_2 = 0$ y $x_3 = 8$.

Hay más cambios que puede sufrir un programa lineal, pero por no ser necesario utilizar alguno de ellos en los temas vistos en este documento no fueron tomados en cuenta.

4 Interpretación geométrica del dual

La interpretación geométrica que a continuación es presentada muestra claramente la relación entre las variables primales y las restricciones duales, así como el papel que juega el vector del lado derecho “b” (vector primal de requerimientos) como vector de costos en la función objetivo del problema dual, debido a que la interpretación geométrica del problema dual que se muestra examina la región factible del dual junto con el espacio de columnas de la matriz de restricciones primales. (Luenberger, 1989).

Para que el lector aprecie con mayor claridad este hecho se tiene el siguiente ejemplo.

Considérese el siguiente problema con las variables x_1, x_2, x_3, x_4 y dos restricciones que serán llamadas y_1, y_2:

Variable -->	X1	X2	X3	X4	Direction	R. H. S.
Minimize	8	3	5	10		
Y1	0.5	-2	2	3.5	=	2
Y2	3	-2	-1	1	=	1
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Figura 7. Problema Primal para el ejemplo de la interpretación geométrica.

El problema dual asociado es:

Variable -->	Y1	Y2	Direction	R. H. S.
Maximize	2	1		
X1	0.5	3	<=	8
X2	-2	-2	<=	3
X3	2	-1	<=	5
X4	3.5	1	<=	10
LowerBound	-M	-M		
UpperBound	M	M		
VariableType	Unrestricted	Unrestricted		

Figura 8. Problema Dual para el problema del ejemplo de interpretación geométrica.

En el que las variables son y_1, y_2 y cuyas restricciones son x_1 a x_4.

Se tiene que:

1) Las restricciones primales pueden escribirse como igualdad vectorial, es decir:

$$x_1\begin{bmatrix}0.5\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}3.5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \qquad \ldots (15)$$

   Donde a_1 = (0.5, 3); a_2 = (-2, -2); a_3 = (2, -1) y a_4 = (3.5, 1) son los vectores columna de la matriz de restricciones primales. Entonces el vector (2,1) del lado derecho es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz de restricciones primales, con los pesos $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. La combinación lineal que minimiza el objetivo primal es la solución de este problema.

2) La región factible del problema dual se muestra en la Figura 9, donde se ven las cuatro restricciones duales x_1, x_2, x_3, x_4 que se corresponden con las cuatro variables primales del mismo nombre. Y en color rojo se ve también el vector (2, 1) que es el vector de costos de la función objetivo dual: $w = 2y_1 + y_2$, representada en la figura por la línea punteada. Además, en la región factible dual están graficados también los vectores columna de la matriz de restricciones primal a_1, a_2, a_3, y a_4.

3) El vector de costos dual (2, 1) es el gradiente de la función objetivo dual, y apunta en la dirección de crecimiento de esa función. Como el dual es de maximizar, de la gráfica se ve que el óptimo dual ocurre en la intersección de las restricciones x_1 y x_4, marcada con el punto rojo.

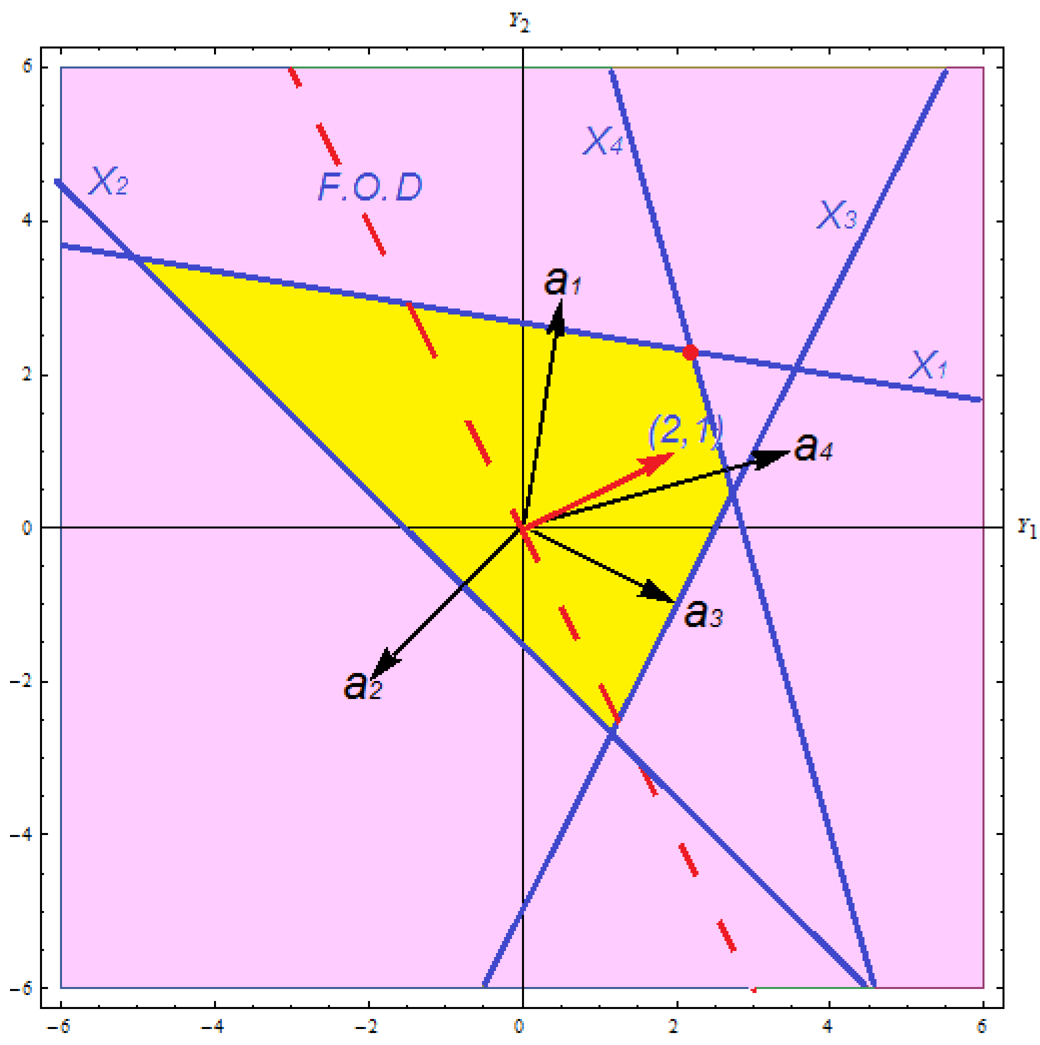


Figura 9. Interpretación geométrica de la dualidad.

4) Los vectores columna primales a_1, a_2, a_3, a_4 asociados a las variables primales se corresponden con las restricciones duales x_1, x_2, x_3, x_4 y resultan perpendiculares a las fronteras de dichas restricciones duales, ya que si (a_x, a_y) son las coordenadas del vector columna primal $\boldsymbol{a}$, la pendiente de la restricción dual correspondiente es: $-a_x / a_y$.

5) Las restricciones duales x_1 y x_4 son entonces activas en la solución óptima dual, indicando que las respectivas variables primales óptimas x_1^* y x_2^* son positivas en el primal.

6) La solución óptima dual es: $y_1^* = 2.2$, $y_2^* = 2.3$, $w^* = 6.7$, mientras que la solución óptima primal es: $x_1^* = 0.15$, $x_2^* = x_3^* = 0$, $x_4^* = 0.55$. De donde se concluye que la combinación lineal de vectores columna primal que resuelve la ecuación (15) es: $0.15a_1 + 0.55a_4 = (2, 1)$

5 Interpretaciones económicas del dual

En los capítulos anteriores, se han mostrado las relaciones entre los programas lineales primal y dual, resaltando las ligas existentes entre las variables de uno y las restricciones del otro, entre los objetivos a optimizar y los vectores de constantes en las restricciones, y también entre las posibilidades de los distintos tipos de soluciones que pueden tener los programas lineales.

En este capítulo se exploran las interpretaciones que pueden darse al dual de un programa lineal, en diversos ejemplos de problemas típicos que surgen en la programación lineal.

La posibilidad de dar una interpretación útil al dual de un problema típico de programación lineal da otra visión del problema primal, y permite extender la comprensión del planteamiento original con la información adicional que aporta la teoría de dualidad, generando en ocasiones, enfoques que no estaban en la descripción del problema primal o que por lo menos no eran evidentes en él.

Partiendo del problema primal, y luego de construir el respectivo dual, la interpretación de este último se centra en comprender el significado de las variables duales, y de su participación en el objetivo y en las restricciones duales. Los valores óptimos de las variables duales o precios sombra, son entonces el primer elemento que permite establecer una interpretación útil del problema dual.

En las siguientes secciones se muestran ejemplos varios de estas interpretaciones.

5.1 El problema de la producción

Este problema puede presentarse de dos formas, el primer tipo trata de maximizar el ingreso por la venta de n productos que se fabrican usando m recursos en cantidades limitadas $b_1, b_2, \dots, b_n$ y en el segundo tipo se trata de minimizar el costo de producir m productos que se solicitan en cantidades de al menos $b_1, b_2, \dots, b_m$ y que se fabrican con n recursos cuyos costos se conocen. En seguida se verá cada uno de ellos.

Problema tipo I. Una empresa produce n artículos, que puede vender a precios unitarios $P_1, P_2, \dots, P_n$. Para producirlos utiliza m recursos, de los cuales sólo tiene cantidades limitadas $b_1, b_2, \dots, b_m$. La cantidad de recurso i que se requiere en la producción de cada artículo j se denota por a_{ij}. Entonces el problema de producción que surge es el de maximizar el ingreso obtenido de producir x_i unidades de cada artículo, considerando los recursos que utiliza cada artículo y limitado por la cantidad disponible de cada recurso. El programa lineal asociado es como sigue:

$$
\begin{aligned}
max\ \ I &= P_1x_1 + P_2x_2 + \ \dots + P_nx_n \\
s.a. \qquad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n \ \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n \ \leq b_2 \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n \ \leq b_m \\
& x_1,\ x_2, \dots x_n \ \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Tienda de comida rápida.

Una tienda de comida rápida vende 4 platillos usando raciones de 5 ingredientes de la manera siguiente:

Platillo	**Pollo**	**Arroz**	**Jamón**	**Verdura**	**Queso**	**Precio$**
1	1	2	0	3/2	½	48
2	2/3	2	1/3	1	½	46
3	½	2	1	½	1	50
4	¼	5/2	0	2	3/2	46
Raciones disponibles	325	1000	350	400	400	

El problema primal trata de maximizar el ingreso de la venta de los platillos, sujeto a las restricciones de disponibilidad de insumos:

Variable -->	Platillo 1	Platillo 2	Platillo 3	Platillo 4	Direction	R. H. S.
Maximize	48	46	50	46		
Pollo	1	0.666	0.5	0.25	<=	325
Arroz	2	2	2	2.5	<=	1000
Jamón		0.333	1		<=	350
Verdura	1.5	1	0.5	2	<=	400
Queso	0.5	0.5	1	1.5	<=	400
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

La solución óptima del primal es como sigue:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
Platillo 1	100.0000	48.0000	4,800.0000	0	basic	46.0000	60.0000
Platillo 2	100.0000	46.0000	4,600.0000	0	basic	38.8000	48.0000
Platillo 3	300.0000	50.0000	15,000.0000	0	basic	44.0000	86.0000
Platillo 4	0	46.0000	0	-25.0000	at bound	-M	71.0000
Objective	Function	(Max.) =	24,400.0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
Pollo	316.6000	<=	325.0000	8.4000	0	316.6000	M
Arroz	1,000.0000	<=	1,000.0000	0	18.0000	960.0000	1,050.2260
Jamón	333.3000	<=	350.0000	16.7000	0	333.3000	M
Verdura	400.0000	<=	400.0000	0	4.0000	374.9249	412.5749
Queso	400.0000	<=	400.0000	0	12.0000	350.0000	425.0000

Entonces la cantidad óptima de platillos de cada tipo que la tienda de comida rápida debe preparar para garantizar el mayor ingreso sujeto a la cantidad de recursos disponibles es de 100 platillos del tipo 1, 100 del tipo 2, 300 del tipo 3 y no debe realizar platillos del tipo 4.

Con el software WinQSB se obtiene el planteamiento del problema dual:

Variable -->	Pollo	Arroz	Jamón	Verdura	Queso	Direction	R. H. S.
Minimize	325	1000	350	400	400		
Platillo 1	1	2		1.5	0.5	>=	48
Platillo 2	0.666	2	0.333	1	0.5	>=	46
Platillo 3	0.5	2	1	0.5	1	>=	50
Platillo 4	0.25	2.5		2	1.5	>=	46
LowerBound	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Una interpretación del dual de este problema de producción podría ser:

La función objetivo dual tiene como variables los ingredientes y sus coeficientes de costo son las disponibilidades de ellos (en raciones). El objetivo primal es maximizar el ingreso por venta de platillos. Entonces, para que el objetivo dual también represente un valor, las variables duales pueden interpretarse como el precio de los ingredientes para los platillos.

Si por alguna razón la tienda decide no operar, y otra empresa quiere comprar el lote de ingredientes para preparar los platillos, el comprador querrá minimizar el valor del lote de ingredientes (el objetivo dual), pero la tienda de comida rápida pedirá que el equivalente de los platillos en ingredientes no valga menos que el precio de venta de éstos. Las restricciones duales representan ese equivalente de platillos en términos de los ingredientes, por eso se pide que su valor sea mayor o igual al precio de venta de los correspondientes platillos.

Los coeficientes de la función objetivo dual son las disponibilidades de recursos, así que las variables duales: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 pueden verse como los precios que se fijarán a los cinco insumos para lograr una transacción justa, es decir los precios sombra de los insumos. Las restricciones duales indican la composición de cada platillo en cuanto al valor de sus componentes; por ejemplo, la restricción de "Platillo 1" indica que el platillo 1 usa una porción de pollo (con valor y_1), usa 2 porciones de arroz (cada una con valor y_2), etc. y en total el valor del platillo 1 expresado por los precios de sus insumos debe ser al menos el valor de venta de un plato de dicho platillo.

Solución óptima dual:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
Pollo	0	325.0000	0	8.4000	at bound	316.6000	M
Arroz	18.0000	1,000.0000	18,000.0000	0	basic	960.0000	1,050.2260
Jamón	0	350.0000	0	16.7000	at bound	333.3000	M
Verdura	4.0000	400.0000	1,600.0000	0	basic	374.9249	412.5749
Queso	12.0000	400.0000	4,800.0000	0	basic	350.0000	425.0000
Objective	Function	(Min.) =	24,400.0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
Platillo 1	48.0000	>=	48.0000	0	100.0000	46.0000	60.0000
Platillo 2	46.0000	>=	46.0000	0	100.0000	38.8000	48.0000
Platillo 3	50.0000	>=	50.0000	0	300.0000	44.0000	86.0000
Platillo 4	71.0000	>=	46.0000	25.0000	0	-M	71.0000

Así la solución óptima del problema dual da el valor justo de cada uno de los insumos el cual es: 0 para el pollo, 18 para el arroz, 0 para el jamón, 4 la verdura y 12 el queso, luego el valor total del lote es igual al valor máximo de ingresos que podría aportar la venta de los platillos. Nótese que los ingredientes que tienen precio sombra cero (pollo y jamón) son insumos que en la producción óptima del primal tienen sobrantes que ya no pueden usarse para preparar nuevos platillos.

Además, la información de los precios sombra, indica que el ingrediente más valioso es el arroz, pues tiene el mayor precio sombra (18), lo que indica que si es posible conseguir más arroz, por cada porción conseguida se podrá aumentar la producción, y la función objetivo primal aumentará su valor justo en 18 unidades monetarias.

Problema tipo II. Una empresa recibe un pedido para producir m artículos, en cantidades de $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Para producirlos, usa n recursos, que compra a costos unitarios: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Llamando a_{ij} a las unidades de artículo i que se obtienen con cada unidad de recurso j, el problema de producción es el de minimizar el costo de producir los m artículos comprando y_j cantidades de recurso j, y garantizando generar al menos b_i unidades de cada artículo, y considerando los recursos que utiliza cada artículo. El programa lineal asociado es como sigue:

$$min\ C = c_1y_1 + c_2y_2 + \ \ldots + c_ny_n$$

$$s.a. \qquad a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ \ldots + a_{1n}y_n \ \geq b_1$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ \ldots + a_{2n}y_n \ \geq b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ \ldots + a_{mn}y_n \geq b_m$$

$$y_1,\ y_2, \ldots y_n \ \geq 0$$

Esta clase de problemas suele presentarse en empresas del sector gubernamental, donde unidades de producción especializadas en un producto abastecen a un organismo que da un servicio y deben hacerlo a costo mínimo. Ejemplos de ello son las refinerías de PEMEX que generan gasolinas combinando diversos destilados con costos de producción conocidos para surtir al sistema de distribución a gasolineras, o las plantas de asfalto o de concreto hidráulico que producen mezclas de asfalto o concreto para el mantenimiento carretero que realizan los municipios o la Secretaría de Comunicaciones y Transportes.

Ejemplo. Procesadora de maíz.

Una planta industrial produce almidón, miel, harina y aceite a partir de distintos granos de maíz que consigue en el mercado: Amarillo, Blanco y Sur Central. El rendimiento de producto en cada tipo de grano y su costo por tonelada es como sigue:

Grano	**Almidón (kgs)**	**Miel (lts)**	**Harina (kgs)**	**Aceite (lts)**	**Precio Dlls/ton**
Amarillo (1 ton)	300	100	650	120	270
Blanco (1 ton)	200	80	570	160	275
Sur Central (1 ton)	180	60	700	140	256

La planta recibe un pedido de: 30 toneladas de almidón, 25 000 litros de miel, 40 toneladas de harina y 35 000 litros de aceite. El problema primal es entonces minimizar el costo de producir el pedido, generando *por lo menos* las cantidades pedidas de cada producto. El programa lineal es:

Variable -->	Amarillo	Blanco	Sur Central	Direction	R. H. S.
Minimize	270	275	256		
Kg_Almidón	300	200	180	>=	30000
Lt_Miel	100	80	60	>=	25000
Kg_Harina	650	570	700	>=	40000
Lt_Aceite	120	160	140	>=	35000
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Con solución óptima:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
Amarillo	187.5000	270.0000	50,625.0000	0	basic	206.2500	343.7500
Blanco	78.1250	275.0000	21,484.3800	0	basic	216.0000	304.4706
Sur Central	0	256.0000	0	31.3125	at bound	224.6875	M
Objective	Function	(Min.) =	72,109.3800				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
kg_Almidón	71,875.0000	>=	30,000.0000	41,875.0000	0	-M	71,875.0000
Lt_Miel	25,000.0000	>=	25,000.0000	0	1.5938	17,500.0000	29,166.6700
kg_Harina	166,406.3000	>=	40,000.0000	126,406.3000	0	-M	166,406.3000
Lt_Aceite	35,000.0000	>=	35,000.0000	0	0.9219	30,000.0000	50,000.0000

Entonces, la planta deberá comprar 187.5 toneladas de grano Amarillo, 78.125 toneladas del Blanco y nada de Sur Central para lograr el costo mínimo de \$72,109.38 y cubrir la demanda. Los productos que resultaron con excedentes son el Almidón y Harina, con 41.875 y 126.4063 toneladas respectivamente; los otros productos se generaron justamente en las cantidades pedidas.

El problema dual es el siguiente:

Variable -->	Kg_Almidón	Lt_Miel	Kg_Harina	Lt_Aceite	Direction	R. H. S.
Maximize	30000	25000	40000	35000		
Amarillo	300	100	650	120	<=	270
Blanco	200	80	570	160	<=	275
Sur Central	180	60	700	140	<=	256
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Una interpretación del dual es como sigue:

La planta desea valorar su producción, a fin de maximizar el ingreso por el pedido que tiene que producir, con lo que las variables duales y_1, y_2, y_3, y_4, son los precios de: el Kg_almidón, el Lt_Miel, el Kg_harina y el Lt_aceite respectivamente, La función objetivo dual es:

$$Ingreso = 30000y_1 + 25000y_2 + 40000y_3 + 35000y_4$$

El comprador del pedido acepta pagar los precios que pida la planta siempre que sean justos, de modo que el valor del contenido de almidón, miel, harina y aceite de cada tonelada de grano no rebase el precio de mercado del propio grano usado para producirlos. Por ejemplo, una tonelada de maíz amarillo contiene 300 kg de almidón, 100 lt de miel, 650 kg de harina y 120 lt de aceite; entonces con los precios que fije la planta esa tonelada tendría el valor siguiente (primera restricción dual):

$$Ton\_Amarillo = 300y_1 + 100y_2 + 650y_3 + 120y_4$$

Este valor debe ser igual o menor al precio de una tonelada de maíz amarillo: 270 dlls.

Análogamente con las demás restricciones.

La tabla de solución para el primal WinQSB nos proporciona la información necesaria para la resolución del dual, por lo que no es necesario resolverlo nuevamente. La solución para el dual está dada por los precios sombra de las variables del primal por lo que los precios justos de los productos son: 1.59 por litro de miel, 0.92 por litro de aceite y nada por kg de almidón y harina. Almidón y harina, son los únicos productos que excedieron la cantidad solicitada originalmente en el pedido, por lo que su precio sombra resulta cero. De la tabla óptima del primal también puede verse que el precio sombra más grande es el de la miel ($1.59 por litro), es decir es el producto que resulta más caro producir. Si el pedido aumenta en un litro de miel, el costo total aumenta en $1.59 y viceversa, si el pedido se reduce en un litro de miel, el costo baja en $1.59.

5.2 El problema de la dieta

Este problema se ha tipificado como el problema de minimizar el costo de una dieta basada en n alimentos $x_1, x_2, \dots, x_n$ cuyos costos son $c_1, c_2, \dots, c_n$ y tales que el valor nutricional aportado por ellos cubra al menos las cantidades $b_1, b_2, \dots, b_m$ de m nutrientes conociendo que la cantidad de nutriente i que aporta el alimento j es a_{ij}. El programa lineal asociado es:

$$
\begin{array}{ll}
 & min\ \ c = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n \\
s.a. & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
 & x_1, \quad x_2, \dots x_n \geq 0
\end{array}
$$

(nótese la similitud con el segundo problema de producción)

Ejemplo. Dieta para alimentar ratones.

Problema primal: Un veterinario usa avena, cacahuates y leche en polvo para alimentar ratones, la siguiente tabla muestra las unidades de nutrientes en cada uno de los alimentos así como su costo por kilo:

Contenido nutricional:	Grasa	Proteína	Vitaminas	Fibra	Costo/ kg.
Avena (1kg)	2	12	6	0	15

Cacahuates (1kg)	18	10	12	4	22
Leche en polvo (1kg)	7	20	5	0	10
Mínimo requerido (unidades)	125	223	112	45	

El programa lineal queda:

$$\min \omega = 15x_1 + 22x_2 + 10x_3$$
$$2x_1 + 18x_2 + 7x_3 \geq 125$$
$$12x_1 + 10x_2 + 20x_3 \geq 223$$
$$6x_1 + 12x_2 + 5x_3 \geq 112$$
$$20x_1 + 4x_2 \qquad \geq 145$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Al introducir el problema en WinQSB se obtiene:

Variable -->	Avena	Cacahuate	Leche en	Direction	R. H. S.
Minimize	15	22	10		
Grasa	2	18	7	>=	125
Proteína	12	10	20	>=	223
Vitaminas	6	12	5	>=	112
Fibra	20	4		>=	145
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

La solución óptima del primal arrojada por el software es:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
Avena	6.4080	15.0000	96.1195	0	basic	3.4207	91.0000
Cacahuate	4.2102	22.0000	92.6238	0	basic	6.8000	28.1429
Leche en polvo	5.2001	10.0000	52.0013	0	basic	7.5568	27.1327
Objective	Function	(Min.) =	240.7446				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
Grasa	125.0000	>=	125.0000	0	1.0174	120.0135	329.4474
Proteína	223.0000	>=	223.0000	0	0.1439	151.4194	402.7143
Vitaminas	114.9706	>=	112.0000	2.9705	0	-M	114.9706
Fibra	145.0000	>=	145.0000	0	0.5619	131.2174	303.5510

Entonces el veterinario debería alimentar a los ratones con una dieta de 6.4 kg de avena, 4.2 kg de cacahuate y 5.2 kg de leche en polvo para proporcionarles los nutrimentos necesarios al menor costo, si utiliza esa cantidad de alimentos el costo total sería de $240.74.

El planteamiento del problema dual es:

Variable -->	Grasa	Proteína	Vitaminas	Fibra	Direction	R. H. S.
Maximize	125	223	112	145		
Avena	2	12	6	20	<=	15
Cacahuate	18	10	12	4	<=	22
Leche en	7	20	5		<=	10
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Una interpretación del problema dual de la dieta es:

Si en vez de alimentar a los ratones con avena, cacahuates y leche se les dieran los nutrientes directamente, un laboratorio que produzca los nutrientes como complemento alimenticio para la dieta, buscará maximizar la venta de los nutrientes, fijando los precios de: Grasa, Proteína, Vitaminas y Fibra (que son las variables del dual y_1, y_2, y_3, y_4). Pero el comprador pedirá que el costo de los nutrientes en el complemento alimenticio no supere el precio de su equivalente en ingredientes naturales. Por ejemplo, en la primera restricción del dual un kg de avena contiene 2 unidades de grasa, 12 de proteína, 6 de vitaminas y 20 de fibra, por lo que con las variables duales, su valor sería:

$$Precio\ por\ kg\ de\ avena = 2y_1 + 12y_2 + 6y_3 + 20y_4$$

Este valor del kg de avena, en términos de las variables duales, no debe superar el valor de compra de un kg. de avena: $15. Lo mismo sucede con las otras restricciones.

Las variables duales son los precios sombra de los nutrientes.

Así los precios que el laboratorio debe dar a los nutrientes para que su valor no supere al de los ingredientes naturales deben ser: 1.01 la unidad de grasa, 0.143 la de proteína, 0 la de vitaminas y 0.56 la de fibra.

De la tabla primal se ve que el mayor de los precios sombra es el de la grasa ($1.01 por unidad), lo que indica que es el nutriente más caro. Si la dieta solicita aumentar la grasa en una unidad, eso impactará al costo total en $1.01 y viceversa, si se reduce la cantidad de grasa en una unidad, el costo total también se reduce en $1.01. El único nutriente que tiene precio sombra cero son las vitaminas, pues en la mezcla óptima, se tiene un exceso de vitaminas. La dieta solicita al menos 112 unidades, pero la solución óptima da 114.976 unidades.

5.3 El problema del transporte

Las aplicaciones reales de los problemas de transporte y asignación tienden a requerir un número muy grande de restricciones y variables, de manera que una solución con método simplex puede requerir en principio de un buen esfuerzo computacional. Por fortuna una característica clave de estos problemas es que la mayor parte de los coeficientes a_{ij} de las restricciones son iguales a cero, como resultado se han podido desarrollar algoritmos simplificados especiales que logran ahorros computacionales sorprendentes para explorar esta estructura especial del problema.

Un problema de transporte consta de:

- Un conjunto de *m* puntos de oferta. Cada punto de oferta *i* tiene asociado una oferta a_i.
- Un conjunto de *n* puntos de demanda. Cada punto de *j* tiene asociada una demanda b_j.
- Cada unidad enviada desde un punto de oferta *i* a un punto de demanda *j* tiene un costo unitario de transporte c_{ij}.

Considérese x_{ij} como el número de unidades enviadas desde el punto de oferta *i* al punto de demanda *j*. El programa lineal del problema del transporte es entonces:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad i = 1, \dots, m \quad \text{(restricciones de oferta)}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, n \quad \text{(restricciones de demanda)}$$
$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n$$

Las restricciones de oferta indican que en cada nodo origen el total de carga enviada a los nodos destino es igual a la oferta disponible en ese origen. Las restricciones de demanda indican que en cada nodo destino el total de carga recibida desde nodos origen iguala a la demanda en ese nodo destino.

Si la oferta total es igual a la demanda total, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Se dice que el problema está balanceado o equilibrado.

Si la oferta total supera a la demanda total (16) se puede balancear el problema de transporte incorporando un punto de demanda artificial o dummy que tenga como demanda el excedente de oferta del problema, como las asignaciones al punto artificial no son reales, se le asigna un costo unitario de cero, en general el costo unitario no necesariamente debe ser igual a cero, basta con que tenga igual valor a todos los puntos de oferta disponibles de forma de no generar preferencias.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j{}^{**} \qquad \ldots (16)$$

La demanda ficticia:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Costo:

$$c_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Así como un problema de transporte puede no estar balanceado cuando la demanda es inferior a la oferta también es posible que la demanda supere a la oferta, en este caso se recurre a un punto de oferta artificial llamado origen ficticio o_{m+1}, con valor de oferta equivalente a la diferencia entre oferta y demanda.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

La oferta artificial:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Costo:

$$c_{m+1,j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Para facilitar la discusión sobre el dual del problema de transporte, conviene generalizar el problema relajando las restricciones de igualdad estricta a restricciones de desigualdad en el problema original. De esta forma, la formulación general del problema de transporte con *m* orígenes y *n* destinos queda:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \dots, m$$ (restricciones de oferta)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, n$$ (restricciones de demanda)

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n$$

De este modo, las restricciones de oferta indican que el total de carga enviada por cada origen a los nodos destino no supera la oferta disponible en ese origen. Y las restricciones de demanda indican que en cada destino el total de carga recibida desde nodos origen es al menos la demanda de ese nodo destino.

Entonces, el dual asociado al problema primal anterior es:

$$\max \omega = -\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$s.a. -u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \forall (i, j)$$

$$u_i, v_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n$$

Donde u_i es la variable dual asociada a la restricción primal del origen O_i mientras que v_j es la variable dual asociada a la restricción primal del destino D_j. En sentido estricto, siguiendo las reglas para escribir el dual de un programa lineal, las restricciones de oferta en el primal ("≤"), dado que es un problema de minimizar, dan origen a variables duales $u_i \leq 0$, pero cambiando signo a las u_i se obtienen todas las variables duales no-negativas, como se ve en el planteamiento anterior.

Así, las variables duales u_i representan el costo de compra de la carga a transportar en el lugar de origen (punto de oferta) y las variables v_j representan el precio de venta de la carga en el destino (punto de demanda). El objetivo dual entonces representa el ingreso neto obtenido al pagar en el origen la carga a costos u_j y venderla en el origen a precios v_j; es el problema económico del exportador que compra en origen y vende en destino, pagando además el costo del transporte (Ruiz & Landín, 2002). Las restricciones duales puede rescribirse como:

$$v_j \leq u_i + c_{ij} \quad \forall\, i,j$$

La restricción dual indica que el precio de la carga en el destino *j,* no debe superar la suma de su precio en el origen *i* más el costo de transportarla.

Ejemplo. Problema de transporte con dos orígenes y tres destinos.

Una empresa industrial tiene dos plantas de producción, con capacidad mensual de 150 y 300 unidades respectivamente. Hay tres centros de consumo con demandas de 100, 180 y 170 unidades mensuales respectivamente. La matriz de costos unitarios de distribución se indica en la tabla siguiente. La Figura 10 ilustra la red de transporte.

El objetivo primal es planificar la distribución abasteciendo las demandas de los tres centros de consumo con el mínimo costo.

Destino / Origen	**D1**	**D2**	**D3**
Planta A	10	20	30
Planta B	20	50	40

Tabla 4. Matriz de costes unitarios de distribución para el ejemplo del problema de transporte.

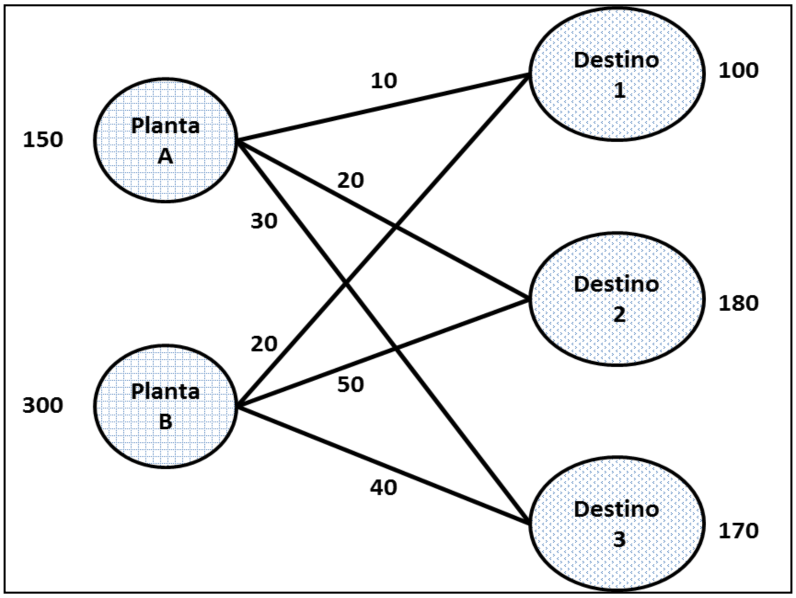


Figura 10. Diagrama para el ejemplo del problema de transporte.

Si se representa mediante x_{ij} la cantidad de artículos enviados desde la planta *i* al centro de consumo *j* el modelo lineal correspondiente a este problema (primal) es:

$$MIN\ Z = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 20x_{21} + 50x_{22} + 40x_{23}$$
$$s.a.\quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 150$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 300$$
$$x_{11} + x_{21} \geq 100$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 180$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 170$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Cuya solución óptima es:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X11	0	10.0000	0	20.0000	at bound	-10.0000	M
X12	150.0000	20.0000	3,000.0000	0	basic	-M	40.0000
X13	0	30.0000	0	20.0000	at bound	10.0000	M
X21	100.0000	20.0000	2,000.0000	0	basic	0	40.0000
X22	30.0000	50.0000	1,500.0000	0	basic	30.0000	M
X23	170.0000	40.0000	6,800.0000	0	basic	0	60.0000
Objective	Function	(Min.) =	13,300.0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
O1	150.0000	<=	150.0000	0	-30.0000	150.0000	180.0000
O2	300.0000	<=	300.0000	0	0	300.0000	M
D1	100.0000	>=	100.0000	0	20.0000	0	100.0000
D2	180.0000	>=	180.0000	0	50.0000	150.0000	180.0000
D3	170.0000	>=	170.0000	0	40.0000	0	170.0000

Indicando que se deben enviar 150 unidades de carga del origen 1 al destino 2; 100 unidades del origen 2 al destino 1; 30 unidades del origen 2 al destino 2 y 170 unidades del origen 2 al destino 3. Esta solución da un costo total de $13,300 y resuelve el problema del transportista de satisfacer la demanda a costo mínimo.

El planteamiento del problema dual, con WinQSB es:

Variable -->	O1	O2	D1	D2	D3	Direction	R. H. S.
Maximize	150	300	100	180	170		
X11	1		1			<=	10
X12	1			1		<=	20
X13	1				1	<=	30
X21		1	1			<=	20
X22		1		1		<=	50
X23		1			1	<=	40
LowerBound	-M	-M	0	0	0		
UpperBound	0	0	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Nótese que las variables duales O_1, y O_2 correspondientes a los nodos origen 1 y 2, y las variables u_1 y u_2 en el planteamiento original, son no-positivas. De modo que rescribiendo el programa dual para tener todas las variables no-negativas, resulta:

$$MAX\ W = -150u_1 - 300u_2 + 100v_1 + 180v_2 + 170v_3$$

$$
\begin{aligned}
s.a.\quad -u_1 + v_1 &\leq 10 \\
-u_1 + v_2 &\leq 20 \\
-u_1 + v_3 &\leq 30 \\
-u_2 + v_1 &\leq 20 \\
-u_2 + v_2 &\leq 50 \\
-u_2 + v_3 &\leq 40 \\
u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Y la solución óptima de este programa es:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
O1	30.0000	-150.0000	-4,500.0000	0	basic	-180.0000	-150.0000
O2	0	-300.0000	0	0	at bound	-M	-300.0000
D1	20.0000	100.0000	2,000.0000	0	basic	0	100.0000
D2	50.0000	180.0000	9,000.0000	0	basic	150.0000	180.0000
D3	40.0000	170.0000	6,800.0000	0	basic	0	170.0000
Objective	Function	(Max.) =	13,300.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
X11	-10.0000	<=	10.0000	20.0000	0	-10.0000	M
X12	20.0000	<=	20.0000	0	150.0000	-M	40.0000
X13	10.0000	<=	30.0000	20.0000	0	10.0000	M
X21	20.0000	<=	20.0000	0	100.0000	0	40.0000
X22	50.0000	<=	50.0000	0	30.0000	30.0000	M
X23	40.0000	<=	40.0000	0	170.0000	0	60.0000

Lo que indica que el precio de la carga en el origen 1 es 30; cero en el origen 2; 20 en el destino 1; 50 en el destino 2 y 40 en el destino 3.

En la solución dual óptima se nota que los precios de venta en los destinos D1, D2 y D3 son 20, 50 y 40 respectivamente, coinciden con los costos de transporte desde el origen O2; es por eso que el precio de compra en O2 resulta cero, conforme a la interpretación de las restricciones duales. Por otra parte, de la tabla primal se nota que el rango de variación de la disponibilidad en O2 es desde 300 hasta infinito (“M” en el listado de WinQSB) con un precio sombra cero; esto indica que aunque se aumentara la disponibilidad de carga en O2, el costo total seguiría siendo el mismo. En cambio, por cada unidad de carga que se aumentara en el origen O1, el costo disminuiría en 30. Esta situación podría entonces sugerir transferencia de carga de O2 a O1, a fin de reducir costos.

5.4 El problema de la ruta más corta

De manera general el problema de la ruta más corta tiene que ver con la determinación de la distancia más corta entre un origen y un destino aunque también podría tratarse de la ruta con menor costo entre el origen y el destino.

Así este problema puede verse como una red con costos o distancias en los arcos y en la que se tienen m nodos de los cuales uno es el origen y otro el destino.

Sean x_{ij} las variables primales que indican el flujo del nodo *i* al nodo *j* de modo que es 1 ó 0 dependiendo de si se usa el arco *(i, j)* o no se usa en la ruta.

Su planteamiento original es el siguiente: (de Bazaraa, p. 483)

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = \begin{cases} 1 \ \text{si} & i = 1 \\ 0 \ \text{si} & i \neq 1 \text{ ó } m \\ -1 \ \text{si} & i = m \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \qquad i, j = 1,2,\ldots,m$$

Sin embargo, el problema puede ponerse como un programa lineal ordinario con variables no-negativas (de modo que no tiene que plantearse como programa entero) ya que la matriz de restricciones es *unimodular* (o sea que cualquier subdeterminante es 1, 0 ó –1) lo que garantiza que las soluciones son enteras del tipo 0, 1. Entonces el problema queda:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = \begin{cases} 1 \text{ si} & i = 1 \\ 0 \text{ si} & i \neq 1 \text{ o } m \\ -1 \text{si} & i = m \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1,2,\ldots,m$$

El dual se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\max \quad w_1 - w_m \\ &s.a. \quad w_i - w_j \leq c_{ij} \quad i, j = 1,2,\ldots,m \\ &\qquad\quad w_i \ \text{ s.r.s.} \quad i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

El problema primal busca minimizar el costo total de la ruta del nodo inicial al nodo final, con las restricciones primales indicando el equilibrio de flujo (lo que entra menos lo que sale es igual a la disponibilidad de flujo en el nodo; considerando que flujos entrantes son positivos y salientes son negativos).

Las variables duales son “precios” asignados en los nodos 1, 2,…, m. El dual puede representar el *problema del importador* (a diferencia del dual del transporte que representa el problema del exportador). El importador distribuye un producto en el nodo origen (nodo 1); el cual compra en el nodo final (nodo *m)* y utiliza la red de transporte con los costos asociados a los tramos de la ruta por donde circula. Por ejemplo, el nodo final puede ser un lugar en el extranjero o una ciudad grande donde compra producto para vender en un área rural remota.

Su ingreso neto es el objetivo dual, la diferencia entre el precio de venta en el origen (nodo 1) y el precio de compra en el destino (nodo *m*): $w_1 - w_m$. Las restricciones duales que se pueden rescribir:

$$w_i \leq c_{ij} + w_j \quad \textit{con } i, j = 1, 2, \ldots, m$$

indican que para que el importador venda su producto en el nodo *i*, el precio de venta en dicho nodo no debe exceder el precio del producto en el nodo *j* (el nodo previo de donde trae el producto) más el precio de transportarlo.

Un ejemplo de ruta más corta con 6 nodos:

Considérese la red de transporte siguiente, donde los valores en los arcos indican el costo de cruzar por esos arcos:

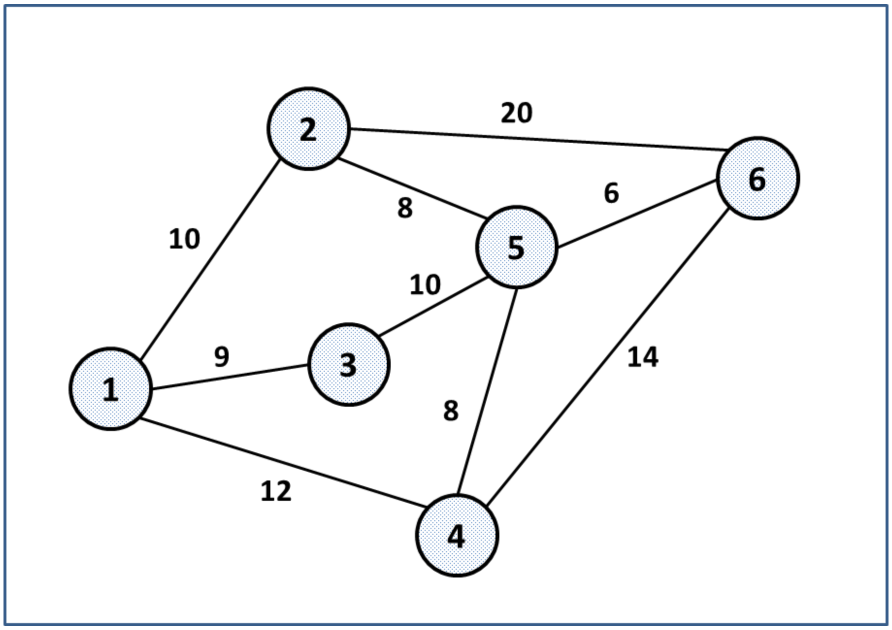


Figura 11. Diagrama para el ejemplo del problema de la ruta más corta.

El programa primal es:

Variable -->	X12	X13	X14	X25	X26	X35	X45	X46	X56	Direction	R. H. S.
Minimize	10	9	12	8	20	10	8	14	6		
Nodo1	1	1	1							=	1
Nodo2	-1			1	1					=	0
Nodo3		-1				1				=	0
Nodo4			-1				1	1		=	0
Nodo5				-1		-1	-1		1	=	0
Nodo6					-1			-1	-1	=	-1
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M		

Cuya solución óptima es la siguiente, donde se ve la ruta más corta :

Nodo1 – Nodo2 – Nodo5 – Nodo6 con costo mínimo de 24.

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X12	1.0000	10.0000	10.0000	0	basic	2.0000	11.0000
X13	0	9.0000	0	1.0000	at bound	8.0000	M
X14	0	12.0000	0	2.0000	at bound	10.0000	M
X25	1.0000	8.0000	8.0000	0	basic	0	9.0000
X26	0	20.0000	0	6.0000	at bound	14.0000	M
X35	0	10.0000	0	0	basic	9.0000	18.0000
X45	0	8.0000	0	0	basic	6.0000	8.0000
X46	0	14.0000	0	0	at bound	14.0000	M
X56	1.0000	6.0000	6.0000	0	basic	-M	6.0000
Objective	Function	(Min.) =	24.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
Nodo1	1.0000	=	1.0000	0	0	1.0000	M
Nodo2	0	=	0	0	-10.0000	0	1.0000
Nodo3	0	=	0	0	-8.0000	0	1.0000
Nodo4	0	=	0	0	-10.0000	0	1.0000
Nodo5	0	=	0	0	-18.0000	0	1.0000
Nodo6	-1.0000	=	-1.0000	0	-24.0000	-1.0000	0

El problema dual es:

Variable -->	Nodo1	Nodo2	Nodo3	Nodo4	Nodo5	Nodo6	Direction	R. H. S.
Maximize	1					-1		
X12	1	-1					<=	10
X13	1		-1				<=	9
X14	1			-1			<=	12
X25		1			-1		<=	8
X26		1				-1	<=	20
X35			1		-1		<=	10
X45				1	-1		<=	8
X46				1		-1	<=	14
X56					1	-1	<=	6
LowerBound	-M	-M	-M	-M	-M	-M		
UpperBound	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Unrestricted	Unrestricted	Unrestricted	Unrestricted	Unrestricted	Unrestricted		

Representa el problema del importador que compra su producto en el nodo 6 (el extranjero) y lo vende en el nodo 1 (origen). La diferencia de su venta menos su costo es el objetivo dual. Las restricciones duales expresan la condición de que los flujos factibles son tales que el precio de venta en un origen “i” no debe exceder el precio de venta del producto en el nodo previo desde donde viajó (nodo *j)* más el costo de transporte involucrado.

5.5 Flujo Máximo

El problema de flujo máximo es un problema típico de redes que al igual que el de la ruta más corta puede ser escrito como un programa lineal.

Este problema considera una red que tiene *n* nodos y *m* arcos para transportar carga desde el nodo origen (nodo 1) hasta el nodo destino (nodo *n)*. Cada arco *(i, j)* tiene una capacidad máxima de flujo u_{ij} y el objetivo es encontrar el flujo máximo *f* que se puede enviar desde el origen hasta el destino.

Si se define a x_{ij} como el flujo que pasa a través del arco (i, j), el problema lineal que representa el problema de flujo máximo es el siguiente (Bazaraa et al, 1990, p. 564-566):

$$\begin{aligned} \max \quad & f \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \begin{cases} f & \text{si } i = 1 \\ -f & \text{si } i = N \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \\ & x_{ij} \leq u_{ij} \quad i, j = 1,2,\dots,n \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1,2,\dots,n \end{aligned} \qquad \dots (17)$$

El primer conjunto de restricciones representa el flujo de conservación en los nodos: la primera suma indica el flujo saliente al nodo en cuestión y la segunda el flujo entrante, así, cuando se trata del nodo origen esta restricción debe dar como resultado la cantidad total de flujo que pasa por la red o sea *f*, para los nodos intermedios se debe tener un flujo neto cero debido a que el flujo que entra a cada nodo es el mismo que sale de él por lo que la restricción es igual a cero y para el nodo destino la restricción debe ser igual a la cantidad total de flujo pero con signo negativo, es decir: $-f$.

El segundo grupo de restricciones indica la cantidad máxima de flujo que puede pasar por cada arco y el resto de las restricciones indican que no está permitido tener flujos negativos en la red.

Para tratar con el dual de este problema es necesario introducir el concepto de cortadura.

Una *cortadura* en una gráfica es un conjunto de arcos tales que si se quita uno del conjunto, la grafica resulta desconectada. En una red de caminos que conectan origen con destino, una cortadura es un grupo de arcos tales que si se extraen de la grafica, resulta imposible viajar del origen al destino.

Entonces, sea A un conjunto de nodos que contiene al nodo origen (nodo 1) pero no al nodo destino (nodo n) y $\overline{A}$ el conjunto complemento, la cortadura queda determinada por $(A,\overline{A}) = \left\{ arcs\ (i,j) : i \in A,\ j \in \overline{A} \right\}$ y la capacidad de la cortadura es la suma de las capacidades de los arcos (i, j) en la cortadura. Luego la cortadura de mínima capacidad es llamada cortadura mínima de la red.

Sean g_i y h_{ij} las variables duales asociadas a las restricciones de conservación de flujo del primal, y a las restricciones primales de capacidad límite en los arcos respectivamente. Entonces, el problema dual asociado con el problema de flujo máximo primal es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\min \quad w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} h_{ij} \\ &s.a. \\ &\qquad g_N - g_1 = 1 \\ &\qquad g_i - g_j + h_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1,2,\ldots,n \\ &\qquad g_i, h_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1,2,\ldots,n \end{aligned} \qquad \ldots (18)$$

Según Bazaraa et al (1990), dada una cortadura $(A,\overline{A})$ cualquiera y escogiendo los siguientes valores para las variables duales:

$$g_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \in A \\ 1 & \text{si} \quad i \in \overline{A} \end{cases}$$

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) \in (A,\overline{A}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \ldots (19)$$

Se satisfacen todas las restricciones del dual por lo que la solución es factible, además el valor de la función objetivo asociado a dicha solución factible iguala la capacidad de la cortadura. Así, el resultado óptimo del dual no es más que la cortadura mínima de la red.

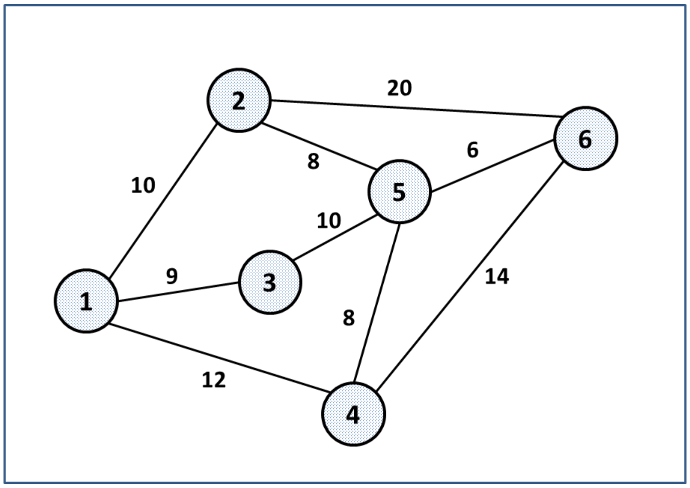
El transporte de carga es un ejemplo donde la búsqueda de flujo máximo y cortadura mínima aparecen de modo natural (Moreno, E. 2004).

Cuando se desea enviar o transportar alguna carga en una red desde un origen a un destino se busca la forma de llevar la mayor cantidad de carga o lo que es lo mismo se busca obtener el máximo flujo posible en la red. Ejemplos de ello son los movimientos de ciertos productos (abarrotes, frutas y verduras en tiempo de cosechas, ropa, etc.) desde el lugar de producción hacia alguna ciudad, mercado o puerto.

Por otro lado, el encargado de la inspección y control de los vehículos de carga (inspección sanitaria, cumplimiento del peso, vigilancia, etc.) enfrenta costos proporcionales a los niveles de flujo controlado y busca minimizar dichos costos. Si un planificador de caminos se propone ayudar al encargado buscará un proyecto para inspeccionar flujos de transporte, por lo que será suficiente escoger una cortadura en la red. De esta forma cualquier transportista que intenta evitar arcos incluidos en la cortadura no alcanzaría el destino *n*, porque estaría operando en una red desconectada. Entonces, la mejor elección para el planificador es una cortadura de mínima capacidad, para minimizar los costos de control o inspección.

Un ejemplo de flujo máximo en una red con 6 nodos.

La red que se muestra representa las posibilidades de difusión de un contaminante en una red de canales que distribuye agua. El contaminante está en el nodo 1 y puede alcanzar el nodo final 6 moviéndose por la red. Los arcos representan los canales que llevan el agua, y los números en los arcos representan la capacidad máxima de contaminante (p. ej. miles de litros) que puede moverse por ellos. El interés es saber cuál es el flujo máximo de contaminante que puede alcanzar el nodo final 6, para estimar las medidas de control necesarias.



El planteamiento de flujo máximo como programa lineal es:

Variable -->	F	X12	X13	X14	X25	X26	X35	X45	X46	X56	Direction	R. H. S.
Maximize	1											
Nodo 1	-1	1	1	1							=	0
Nodo2		-1			1	1					=	0
Nodo3			-1				1				=	0
Nodo4				-1				1	1		=	0
Nodo5					-1		-1	-1		1	=	0
Nodo6	1					-1			-1	-1	=	0
Cap12		1									<=	10
Cap13			1								<=	9
Cap14				1							<=	12
Cap25					1						<=	8
Cap26						1					<=	20
Cap35							1				<=	10
Cap45								1			<=	8
Cap46									1		<=	14
Cap56										1	<=	6
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous		

Cuya solución óptima es:

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
F	28.0000	1.0000	28.0000	0	basic	0	M
X12	10.0000	0	0	0	basic	-1.0000	M
X13	6.0000	0	0	0	basic	-1.0000	0
X14	12.0000	0	0	0	basic	-1.0000	M
X25	0	0	0	-1.0000	at bound	-M	1.0000
X26	10.0000	0	0	0	basic	-1.0000	M
X35	6.0000	0	0	0	basic	-1.0000	0
X45	0	0	0	-1.0000	at bound	-M	1.0000
X46	12.0000	0	0	0	basic	-1.0000	M
X56	6.0000	0	0	0	basic	-1.0000	M
Objective	Function	(Max.) =	28.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
Nodo 1	0	=	0	0	0	0	M
Nodo2	0	=	0	0	1.0000	0	10.0000
Nodo3	0	=	0	0	0	0	6.0000
Nodo4	0	=	0	0	1.0000	0	2.0000
Nodo5	0	=	0	0	0	0	6.0000
Nodo6	0	=	0	0	1.0000	0	M
Cap12	10.0000	<=	10.0000	0	1.0000	0	20.0000
Cap13	6.0000	<=	9.0000	3.0000	0	6.0000	M
Cap14	12.0000	<=	12.0000	0	1.0000	0	14.0000
Cap25	0	<=	8.0000	8.0000	0	0	M
Cap26	10.0000	<=	20.0000	10.0000	0	10.0000	M
Cap35	6.0000	<=	10.0000	4.0000	0	6.0000	M
Cap45	0	<=	8.0000	8.0000	0	0	M
Cap46	12.0000	<=	14.0000	2.0000	0	12.0000	M
Cap56	6.0000	<=	6.0000	0	1.0000	0	9.0000

Esta solución indica que el flujo máximo de contaminante que puede llegar al nodo final 6 es de 28, con los flujos indicados para los arcos (1,2); (1,3); (1,4) (2,6); (3,5); (4,6) y (5,6). El problema dual es:

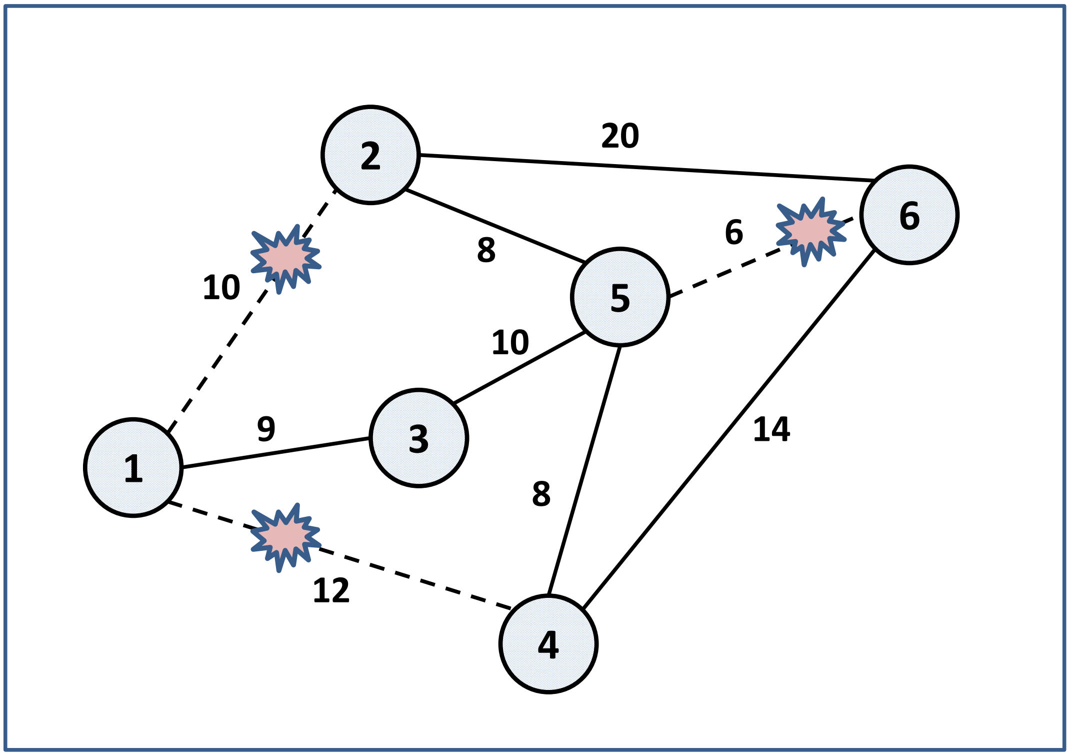
Variable -->	Nodo 1	Nodo2	Nodo3	Nodo4	Nodo5	Nodo6	Cap12	Cap13	Cap14	Cap25	Cap26	Cap35	Cap45	Cap46	Cap56	Direction	R. H. S.
Minimize							10	9	12	8	20	10	8	14	6		
F	-1					1										>=	1
X12	1	-1					1									>=	0
X13	1		-1					1								>=	0
X14	1			-1					1							>=	0
X25		1			-1					1						>=	0
X26		1				-1					1					>=	0
X35			1		-1							1				>=	0
X45				1	-1								1			>=	0
X46				1		-1								1		>=	0
X56					1	-1									1	>=	0
LowerBound	-M	-M	-M	-M	-M	-M	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	stricted	stricted	stricted	stricted	stricted	stricted	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous	tinuous		

El objetivo dual, que es la suma de *capacidades en los arcos* representa la capacidad de una cortadura en la red original, y el objetivo trata de minimizar esa capacidad de una cortadura. La solución óptima del dual es:

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	Nodo 1	0	0	0	0	at bound	0	M
2	Nodo2	1.0000	0	0	0	basic	0	0
3	Nodo3	0	0	0	0	basic	0	0
4	Nodo4	1.0000	0	0	0	basic	0	0
5	Nodo5	0	0	0	0	basic	0	0
6	Nodo6	1.0000	0	0	0	basic	0	0
7	Cap12	1.0000	10.0000	10.0000	0	basic	0	20.0000
8	Cap13	0	9.0000	0	3.0000	at bound	6.0000	M
9	Cap14	1.0000	12.0000	12.0000	0	basic	0	14.0000
10	Cap25	0	8.0000	0	8.0000	at bound	0	M
11	Cap26	0	20.0000	0	10.0000	at bound	10.0000	M
12	Cap35	0	10.0000	0	4.0000	at bound	6.0000	M
13	Cap45	0	8.0000	0	8.0000	at bound	0	M
14	Cap46	0	14.0000	0	2.0000	at bound	12.0000	M
15	Cap56	1.0000	6.0000	6.0000	0	basic	0	9.0000
	Objective	Function	(Min.) =	28.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	F	1.0000	>=	1.0000	0	28.0000	0	M
2	X12	0	>=	0	0	10.0000	-1.0000	M
3	X13	0	>=	0	0	6.0000	-1.0000	0
4	X14	0	>=	0	0	12.0000	-1.0000	M
5	X25	1.0000	>=	0	1.0000	0	-M	1.0000
6	X26	0	>=	0	0	10.0000	-1.0000	M
7	X35	0	>=	0	0	6.0000	-1.0000	0
8	X45	1.0000	>=	0	1.0000	0	-M	1.0000
9	X46	0	>=	0	0	12.0000	-1.0000	M
10	X56	0	>=	0	0	6.0000	-1.0000	M

Esta solución dual indica que los arcos incluidos en la cortadura de capacidad mínima son: (1,2); (1,4) y (5,6). De este modo, el problema dual puede servir para encontrar cuáles arcos de la red (canales) deben ser cerrados para desconectar el origen 1 del nodo final 6. En la gráfica siguiente se muestra esta cortadura, cuya capacidad total de 28 coincide con el flujo máximo. Si se bloquean esos canales, el contaminante no logrará alcanzar al nodo final 6.

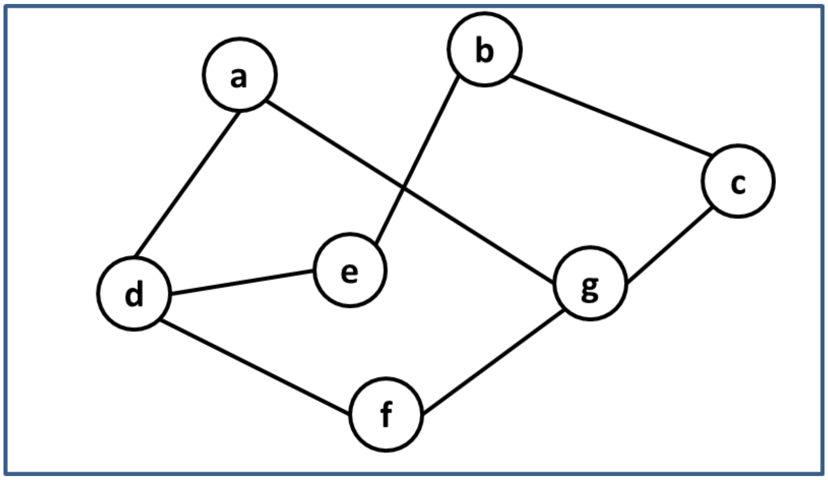


Desde un punto de vista práctico, también es importante notar que la cortadura mínima sugiere los arcos que suman la capacidad mínima para lograr aislar el origen 1 del nodo final 6. Como el esfuerzo o costo de bloquear un canal es mayor a medida que más capacidad tiene, esta solución de cortadura mínima representa también la de menor costo para el control deseado. Así, no es necesario bloquear todos los arcos de la red y por lo tanto se disminuye el costo para el control.

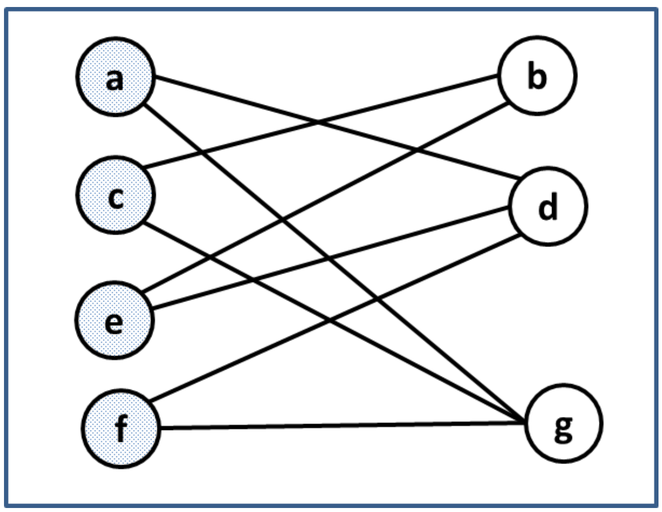
5.6 Apareamiento maximal bipartita

En teoría de gráficas, se llama *bipartita* a una gráfica en la cual los nodos se pueden clasificar en dos tipos, digamos S y T de modo que cualquier arco (*i, j)* de la gráfica siempre va de un nodo tipo S a un nodo tipo T. Es decir, no hay arcos que unan nodos del mismo tipo. Enseguida se da un ejemplo.

La gráfica ***G***, con los nodos a, b, c, d, e, f, g que se muestra enseguida:



Puede redibujarse para mostrar su carácter bipartita como sigue:



Los nodos tipo *S* son: **a, c, e, f**; los nodos tipo *T* son: **b, d, g**.

Un *apareamiento* (también llamado *acoplamiento*) en una gráfica bipartita es un subconjunto de arcos tal que entre ellos no se tienen nodos en común. En la gráfica anterior, el subconjunto de arcos: {(a, g), (c, b), (f, g)} no forman apareamiento, pues el nodo *g* está tanto en el primer arco como en el tercero. En cambio, el subconjunto {(c, b), (f, g)} sí forma un apareamiento.

El problema del *Apareamiento maximal* en una gráfica bipartita consiste en encontrar el apareamiento de mayor tamaño que puede formarse en la gráfica, es decir el de mayor número de elementos. La representación como programa lineal, suponiendo que hay *S* nodos del primer tipo y *T* nodos del segundo tipo es la siguiente:

$$Max\ Z = \sum_{\substack{i \in S \\ j \in T}} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{T} X_{ij} \leq 1 \quad para\ i = 1, 2, \dots, S$$

$$\sum_{i=1}^{S} X_{ij} \leq 1 \quad para\ j = 1, 2, \dots, T$$

$$X_{ij} = 1 \text{ ó } 0 \ \ para\ i = 1, 2, \dots, S; \ \ j = 1, 2, \dots, T$$

Donde, la variable x_{ij} representa al arco (i, j) y será 1 ó 0 según pertenezca al apareamiento o no; el hecho de que la matriz de restricciones resulte unimodular permite reescribir el problema con condiciones de no-negatividad y plantearlo como programa lineal ordinario. El primer grupo de restricciones indica que cada nodo tipo S puede estar asociado a lo más a un arco del apareamiento; el segundo tipo de restricciones indica lo mismo para cada nodo del tipo T.

El programa dual del problema de máximo apareamiento bipartita es:

$$Min\ \ W = \sum_{i=1}^{S} U_i + \sum_{j=1}^{T} V_j$$

$$U_i + V_j \geq 1 \ \ \text{para todo arco } (i, j) \ \text{ con } i \in S, \ \ j \in T$$

$$U_i, V_j \geq 0 \quad i \in S, \quad j \in T$$

Las variables duales están asociadas a los nodos de la gráfica, las variables U_i a los nodos tipo S y las V_j a los nodos tipo T. El objetivo dual es la suma de esas variables duales, y las restricciones duales están asociadas a los arcos de la gráfica. Las restricciones duales indican que la suma de la variable dual asociada al origen *i* más la variable dual asociada al destino *j* para todo arco *(i, j)* debe ser al menos uno. Este planteamiento se puede interpretar como un *problema de recubrimiento de nodos* para la gráfica original.

Un recubrimiento de nodos es un subconjunto de nodos con la propiedad de que cada arco *(i, j)* de la gráfica incide al menos en un nodo del recubrimiento. El programa dual se interpreta entonces como *el problema del recubrimiento mínimo de nodos* para la gráfica. Este resultado es en realidad el Teorema de König que dice:

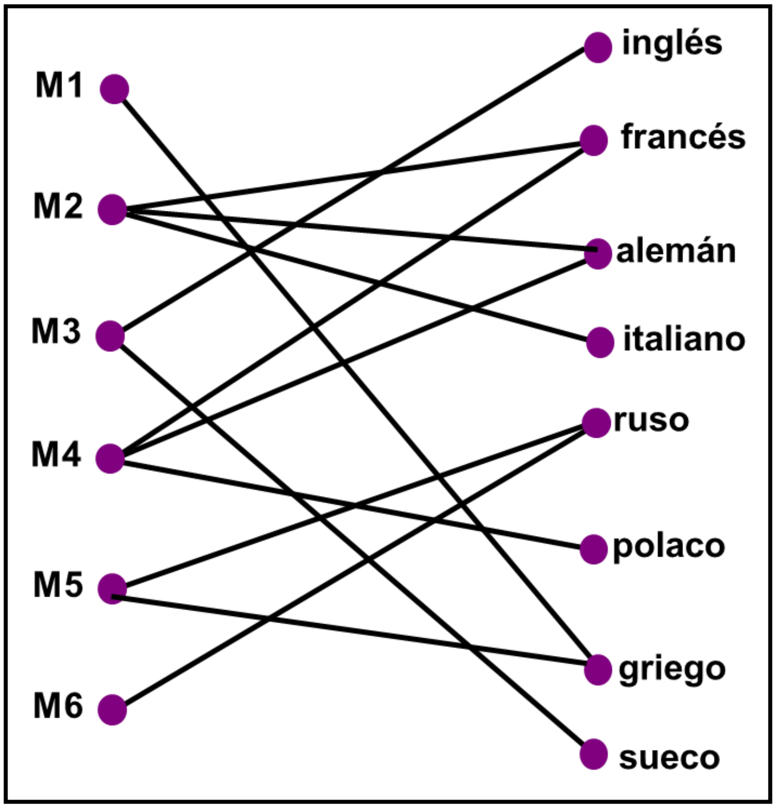
Teorema de König. El número de arcos en un apareamiento maximal bipartita es igual al número de nodos de un recubrimiento mínimo de nodos de la gráfica (Borowski & Borwein, 1989).

El siguiente ejemplo ilustra el uso del máximo apareamiento.

Un departamento universitario de lenguas con 6 miembros que conocen varios idiomas, ofrece a la Unión Europea traducir textos variados de un paquete de 8 posibles trabajos. Las compatibilidades de los miembros del departamento y los idiomas requeridos en cada trabajo se muestran en la gráfica. ¿Cuál es el máximo número de trabajos que se pueden hacer? La tabla siguiente muestra las compatibilidades entre los profesores del departamento y los trabajos solicitados.

Miembro	**inglés**	**francés**	**alemán**	**italiano**	**ruso**	**polaco**	**griego**	**sueco**
1							**X**	
2		**X**	**X**	**X**				
3	**X**							**X**
4		**X**	**X**			**X**		
5					**X**		**X**	
6					**X**			

La gráfica bipartita siguiente ilustra estas compatibilidades:



El programa planteado en WinQSB es:

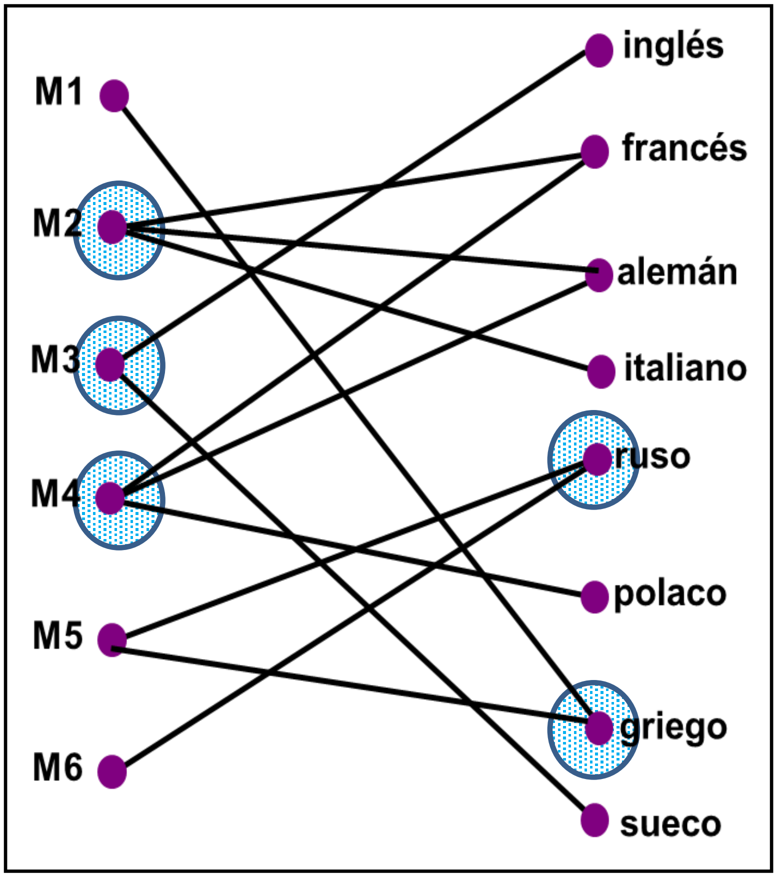
Variable -->	M1Gr	M2Fr	M2Al	M2It	M3In	M3Su	M4Fr	M4Al	M4Po	M5Ru	M5Gr	M6Ru	Direction	R. H. S.
Maximize	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
M1	1												<=	1
M2		1	1	1									<=	1
M3					1	1							<=	1
M4							1	1	1				<=	1
M5										1	1		<=	1
M6												1	<=	1
In					1								<=	1
Fr		1					1						<=	1
Al			1					1					<=	1
It				1									<=	1
Ru										1		1	<=	1
Po									1				<=	1
Gr	1										1		<=	1
Su						1							<=	1
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		

Cuya solución es:

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	M1Gr	1.0000	1.0000	1.0000	0	basic	1.0000	M
2	M2Fr	0	1.0000	0	0	at bound	-M	1.0000
3	M2Al	1.0000	1.0000	1.0000	0	basic	1.0000	M
4	M2It	0	1.0000	0	0	at bound	-M	1.0000
5	M3In	1.0000	1.0000	1.0000	0	basic	1.0000	M
6	M3Su	0	1.0000	0	0	at bound	-M	1.0000
7	M4Fr	1.0000	1.0000	1.0000	0	basic	1.0000	M
8	M4Al	0	1.0000	0	0	basic	1.0000	1.0000
9	M4Po	0	1.0000	0	0	at bound	-M	1.0000
10	M5Ru	1.0000	1.0000	1.0000	0	basic	1.0000	2.0000
11	M5Gr	0	1.0000	0	0	basic	0	1.0000
12	M6Ru	0	1.0000	0	0	basic	0	1.0000
	Objective	Function	(Max.) =	5.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	M1	1.0000	<=	1.0000	0	0	0	1.0000
2	M2	1.0000	<=	1.0000	0	1.0000	0	1.0000
3	M3	1.0000	<=	1.0000	0	1.0000	0	1.0000
4	M4	1.0000	<=	1.0000	0	1.0000	1.0000	1.0000
5	M5	1.0000	<=	1.0000	0	0	0	1.0000
6	M6	0	<=	1.0000	1.0000	0	0	M
7	In	1.0000	<=	1.0000	0	0	1.0000	M
8	Fr	1.0000	<=	1.0000	0	0	1.0000	1.0000
9	Al	1.0000	<=	1.0000	0	0	1.0000	M
10	It	0	<=	1.0000	1.0000	0	0	M
11	Ru	1.0000	<=	1.0000	0	1.0000	1.0000	2.0000
12	Po	0	<=	1.0000	1.0000	0	0	M
13	Gr	1.0000	<=	1.0000	0	1.0000	1.0000	2.0000
14	Su	0	<=	1.0000	1.0000	0	0	M

Esta solución indica que sólo se podrán hacer 5 trabajos, que en este caso son: M1 traduce Griego; M2 Traduce Alemán; M3 traduce Inglés; M4 traduce Francés y M5 traduce Ruso.

De la solución óptima se tienen también los precios sombra positivos para los nodos: M2, M3, M4, Ru (ruso) y Gr (griego). Estos nodos forman el recubrimiento mínimo de la gráfica como se muestra enseguida.



Cualquier arco de la gráfica tiene un extremo en alguno de los nodos del recubrimiento {*M2, M3, M4, Ru, Gr*}.

La interpretación del dual como recubrimiento de nodos es útil para la planeación de los trabajos. Supóngase que para organizar las traducciones se requiere conocer las recomendaciones de diccionarios bilingües a usar, las fuentes de Internet, las tarifas usuales en el mercado, los formatos de traducción, etc.

Entonces basta con convocar a una junta a las cinco personas que representan el recubrimiento mínimo de nodos: los miembros del departamento: M2, M3, M4 y a los solicitantes de trabajos en Ruso y en Griego para detallar toda esa información para cualquier idioma solicitado. No es necesario reunir a los 6 profesores del departamento con los 8 solicitantes de traducciones.

5.7 Juego de dos personas de suma cero

Sea un juego de suma cero para dos personas cuya matriz de pagos es:

	Jugador de las columnas			
Jugador de los renglones	Estrategia 1	Estrategia 2	$\cdots$	Estrategia n
Estrategia 1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
Estrategia 2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Estrategia m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

Tabla 5. Matriz de recompensas general de un juego de dos personas (jugador de los renglones y jugador de las columnas).

Si el juego no tiene punto silla, o sea, no hay dos estrategias tales que si alguno de los jugadores abandona su estrategia empeora su situación, entonces los jugadores deben elegir al azar sus estrategias. De este modo las recompensas de cada uno serán los valores esperados asociados a la distribución de probabilidades con las que jugarán sus estrategias. Sean entonces:

x_i = probabilidad de que el jugador de los renglones elija la estrategia "i"

y_j = probabilidad de que el jugador de las columnas elija la estrategia "j"

a_{ij} = *ganancia para el jugador de los renglones cuando éste usa la estrategia "i" y su adversario usa la estrategia "j". Con i = 1, 2, …, m j = 1, 2, …n*

El programa lineal del jugador de los renglones es:

$$\max z = v$$
$$s.a. \quad v \leq a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m$$
$$v \leq a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m$$
$$\vdots$$
$$v \leq a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1 \qquad x_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,\dots,m); v \ s.r.s.$$

Las restricciones primales indican que la recompensa esperada *v* del primer jugador es el mínimo de los valores esperados obtenidos con las probabilidades x_i elegidas por el primer jugador, para cualquier estrategia del oponente. La última restricción garantiza que las probabilidades x_i sumen uno.

De esta manera, el primer jugador maximiza el mínimo de los posibles valores esperados.

Puede verse al programa lineal del jugador de los renglones como el problema primal y al del jugador de las columnas como su problema dual. Además, es fácil ver que al sacar el dual a partir del problema del jugador de los renglones el problema resultante es efectivamente el problema del jugador de las columnas. El programa dual es el programa lineal del jugador de las columnas, es entonces:

$$\begin{aligned} &\min\ u = w \\ &s.a. \quad w \geq a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ &\quad w \geq a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\qquad \vdots \\ &\quad w \geq a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \\ &y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1 \\ &y_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,\ldots,n); w \ \text{s.r.s.} \end{aligned}$$

Las restricciones duales indican que la recompensa esperada *w* que el oponente está dispuesto a ceder al primer jugador es el máximo de los valores esperados para el primer jugador para cualquier estrategia que utilice el oponente, por lo que su objetivo será minimizar ese máximo valor esperado que recibiría el primer jugador. De igual forma que en el primal, las ultimas restricciones garantizan que las probabilidades y_j sumen uno.

Ejemplo: Violaciones al reglamento de camiones de carga.

Las autoridades del transporte de carga carretero en todo el mundo enfrentan el problema de controlar a los camioneros que violan los reglamentos buscando aumentar su productividad. Las prácticas más comunes de los camioneros para mover más carga y así aumentar sus ingresos son:

B1) llevar sobrecargado el camión;

B2) exceder el límite de velocidad autorizado;

B3) reducir las horas de sueño de sus conductores.

Estas medidas permiten mover más carga y aumentar el negocio del transportista, pero a la vez aumentan el riesgo de accidentes y de daños al camino. Las autoridades de transporte tienen varias medidas de control. Por ejemplo:

A1) aumentar el patrullaje en los caminos;

A2) colocar básculas de pesaje en ciertos puntos del camino;

A3) colocar topes en zonas donde se excede la velocidad;

A4) realizar inspecciones a vehículos y a conductores que mueven carga.

Las autoridades enfrentan altos costos por los accidentes y por el exceso de carga que dañan los caminos, mientras que los camioneros buscan aumentar sus ingresos moviendo más carga al violar los reglamentos. La situación se presta para modelar como un juego entre autoridades del transporte y camioneros, donde las estrategias del primer jugador (la autoridad) son A1, A2, A3 y A4, mientras que las estrategias del segundo jugador (camioneros) son B1, B2 y B3.

Supongamos que se ha estimado el ahorro en reparaciones de camino y en el pago de servicios de auxilio para la autoridad de transporte por los accidentes de camiones (en millones de pesos al semestre) como se indica en la tabla, según la combinación de estrategias de los jugadores (autoridad vs camioneros).

	B1: sobrecarga	**B2: exceso de velocidad**	**B3: reducir sueño de los conductores**
A1:Patrullaje	95	120	25
A2: Básculas	60	–150	–140
A3: Topes	70	120	20

A4: Inspecciones	120	-90	65

Los valores negativos en la tabla indican que esa combinación de estrategias representa una pérdida para la autoridad del camino; por ejemplo, si se decide poner básculas en el camino para detectar sobrecarga, pero el camionero decide reducir las horas de sueño del conductor, la medida de control no tiene efecto y el costo estimado por accidentes derivados de conductores cansados es de 140 millones que paga la autoridad por reparar el camino y pagar servicios de auxilio a los accidentados. En cambio, las combinaciones con entradas positivas indican que la medida de control sí tiene efecto y genera ahorros para la autoridad del transporte.

Entonces, el programa lineal que representa el problema de la autoridad de transporte es el siguiente:

Variable -->	X1	X2	X3	X4	V	Direction	R. H. S.
Maximize					1		
EstrB1	95	60	70	120	-1	>=	0
EstrB2	120	-150	120	-90	-1	>=	0
EstrB3	25	-140	20	65	-1	>=	0
SumProb	1	1	1	1		=	1
LowerBound	0	0	0	0	-M		
UpperBound	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Unrestricted		

Las variables primales son X_1, X_2, X_3, X_4 que representan las probabilidades con las que la autoridad elige sus estrategias A1 – A4, y *V* que es el mínimo valor esperado del juego. Las tres primeras restricciones primales indican el valor esperado para la autoridad para cada estrategia B1 – B4 del oponente (camioneros). La última restricción representa la suma unitaria de las probabilidades X_1, X_2, X_3, X_4.

La solución óptima del juego se muestra enseguida.

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0.6200	0	0	0	basic	-4.1176	40.0000
2	X2	0	0	0	-181.8000	at bound	-M	181.8000
3	X3	0	0	0	-4.2000	at bound	-M	4.2000
4	X4	0.3800	0	0	0	basic	-40.0000	210.0000
5	V	40.2000	1.0000	40.2000	0	basic	0	1.0000
	Objective	Function	(Max.) =	40.2000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	EstrB1	64.3000	>=	0	64.3000	0	-M	64.3000
2	EstrB2	0	>=	0	0	-0.1600	-155.0000	95.0000
3	EstrB3	0	>=	0	0	-0.8400	-68.4043	47.8571
4	SumProb	1.0000	=	1.0000	0	40.2000	0	M

Esta solución muestra que la autoridad deberá emplear su estrategia A1 el 62% del tiempo, y la estrategia A4 el 38% del tiempo restante, sin usar A2 ni A3; con esto tendrá un ahorro esperado de 40.2 millones de pesos al semestre.

El planteamiento del programa dual, que representa el interés del camionero es el siguiente:

Variable -->	Y1	Y2	Y3	W	Direction	R. H. S.
Minimize				1		
EstrA1	-95	-120	-25	1	>=	0
EstrA2	-60	150	140	1	>=	0
EstrA3	-70	-120	-20	1	>=	0
EstrA4	-120	90	-65	1	>=	0
SumProb	1	1	1		=	1
LowerBound	0	0	0	-M		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Unrestricted		

Las variables primales Y_1, Y_2, Y_3 representan las probabilidades que el camionero tiene de elegir sus estrategias B_1 – B_3, mientras que *W* es el máximo valor esperado que puede recibir en el juego el oponente (o sea, la autoridad en este caso). Las restricciones duales muestran que *W* es siempre mayor o igual que el valor esperado del juego cuando la autoridad usa sus estrategias A1 – A4.

La solución dual es:

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	Y1	0	0	0	64.3000	at bound	-64.3000	M
2	Y2	0.1600	0	0	0	basic	-95.0000	155.0000
3	Y3	0.8400	0	0	0	basic	-155.0000	68.4043
4	W	40.2000	1.0000	40.2000	0	basic	1.0000	M
	Objective	Function	(Min.) =	40.2000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	EstrA1	0.0000	>=	0	0	0.6200	-4.1176	40.0000
2	EstrA2	181.8000	>=	0	181.8000	0	-M	181.8000
3	EstrA3	4.2000	>=	0	4.2000	0	-M	4.2000
4	EstrA4	0.0000	>=	0	0	0.3800	-40.0000	210.0000
5	SumProb	1.0000	=	1.0000	0	40.2000	0	M

Indicando que los camioneros deberán usar su estrategia B2 el 16% del tiempo, su estrategia B3 el 84% restante y no usar la estrategia 1. El valor obtenido del juego es el mismo que en el primal: 40.2.

Desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, los vectores de probabilidad solución; el primal $(0.62, 0, 0, 0.38)$ y el dual $(0, 0.16, 0.84)$ son las soluciones del equilibrio de Nash. Mientras los jugadores se mantengan en esas soluciones la autoridad estará segura de no recibir menos del valor del juego: 40.20, y los camioneros estarán seguros de no dejar que el oponente gane más del valor del juego: 40.2

6 Conclusiones

La dualidad permite resolver de manera más rápida y sencilla algunos problemas de programación lineal, además, con ella se puede obtener una solución para un problema que ha sido resuelto con anterioridad y al que se le han realizado algunos cambios, lo que es muy útil en la práctica, sin tener que resolver todo el problema nuevamente y facilita profundizar en el contenido económico del problema.

Con el concepto de precio sombra se puede considerar a las variables duales en la solución óptima como *valores implícitos* asociados a las constantes de las restricciones primales, con la propiedad de que indican el efecto que en la solución primal tendrían variaciones en estas constantes. Este enfoque de las variables duales como precios sombra permite interpretar económicamente los problemas duales extendiendo la visión original del problema primal hacia planteamientos distintos pero equivalentes del mismo problema.

De esta forma, los objetivos duales cambian un enfoque de Max a uno de Min y viceversa, planteando un problema diferente pero que llega a la misma solución objetivo óptima, con restricciones duales que suelen revelar condiciones de interés en el problema primal, que originalmente no se habían contemplado. Así, por ejemplo se encuentra que maximizar el ingreso del problema de la producción sujeto a restricciones de insumos es equivalente a minimizar el valor del lote de insumos sujeto a que las combinaciones que de ellos se usan en la producción sean al menos el valor del artículo producido. Igualmente, encontrar un apareamiento maximal en una gráfica bibartita equivale a encontrar un recubrimiento mínimo de sus nodos, y encontrar un flujo máximo en una red equivale a encontrar una cortadura mínima.

Buscar la interpretación del dual de un programa lineal de un problema particular abre una oportunidad a explorar planteamientos alternos al problema original, que generalmente llevan a profundizar en la naturaleza del planteamiento primal y a visiones extendidas del problema que mejoran su comprensión y enriquecen la discusión del mismo.

A manera de resumen, enseguida se muestran los casos analizados en este trabajo, en una breve síntesis que indica los significados de los problemas en sus versiones primal y dual. Este resumen puede sugerir a los lectores interesados los pasos a seguir para interpretar problemas de interés particular con la ayuda de la teoría de dualidad expuesta en este trabajo.

Problema Primal	**Problema dual asociado**
1P. Producción tipo I: Maximizar el ingreso por la fabricación de *n* artículos usando *m* insumos sujetos a disponibilidad en cantidades limitadas *b.*	1D. Minimizar el valor total de los *m* insumos disponibles en cantidades *b,* sujetos a que el valor equivalente de producto fabricado sea al menos el precio de venta de los productos.
2P. Producción tipo II: Minimizar el costo de producir *n* artículos con costos *c*, sujeto a producir al menos cantidades *b* de cada uno.	2D. Maximizar el valor de los *n* artículos producidos sujeto a que el equivalente de valor de los contenidos en los insumos no rebase el costo *c* de adquirir esos insumos.
3P. Transporte: Minimizar el costo de transportar el total de unidades enviadas, de cierto producto, de m puntos de oferta a n puntos de demanda, sujeto a cantidades a_{ij} de oferta y b_j de demanda en cada nodo.	3D. Exportador: Maximizar el ingreso neto obtenido al pagar en el origen (punto de oferta la carga a precio u_i y venderla en el destino (punto de demanda) a precios v_j, sujeto a que el precio de la carga en el destino *j,* no debe superar la suma de su precio en el origen *i* más el costo de transportarla.

4P. Ruta más corta: Minimizar la distancia entre un origen y un destino en una red de n nodos con distancias d_{ij} en los arcos.	4D. Importador: Maximizar el ingreso neto, i.e. la diferencia entre el precio de venta en el origen (nodo 1) y el precio de compra en el destino (nodo *m*). Sujeto a costos asociados a los tramos de la ruta por donde circula.
5P. Flujo máximo: Maximizar la cantidad de flujo f que es posible pasar a través de una red de *n* nodos y *m* arcos desde un nodo origen (nodo 1) a uno destino (nodo n), sujeto a capacidades maximas de flujo u_{ij} para cada arco *(i, j)*.	5D. Encontrar la cortadura de menor capacidad en la red.
6P. Apareamiento maximal: encontrar el apareamiento de mayor tamaño en la gráfica, dado que el primer grupo de restricciones indica que cada nodo tipo S puede estar asociado a lo más a un arco del apareamiento y el segundo tipo de restricciones indica lo mismo para cada nodo del tipo T.	6D. Recubrimiento mínimo: minimizar la cantidad de variables activas, dado que las variables duales están asociadas a los nodos de la gráfica según pertenezcan a cada tipo en la gráfica y las restricciones duales indican que la suma de la variable dual asociada al origen *i* más la variable dual asociada al destino *j* para todo arco *(i, j)* debe ser al menos uno.
7P. Juego de suma cero: Maximizar el mínimo de los posibles valores esperados del primer jugador, dado que las restricciones indican que la recompensa esperada *v* del primer jugador es el mínimo de los valores esperados obtenidos con las probabilidades x_i elegidas por el primer jugador, para cualquier estrategia del oponente.	7D. Minimizar el máximo valor esperado que recibiría el primer jugador dado que las restricciones duales indican que la recompensa esperada *w* que el oponente está dispuesto a ceder al primer jugador es el máximo de los valores esperados para el primer jugador para cualquier estrategia que utilice el oponente.

7 Referencias

Annie. (2011). *El mundo de los poliedros*. Obtenido de LOS POLIEDROS REGULARES: http://elmundodelospoliedros.blogspot.com/2010/12/presentacion.html/

Balinski, M., & A.W.Tucker. (1969). Duality of lineal programs: a constructive approach with applications. *SIAM Review , 11* (3), 347-377.

Bazaraa, M. S. (2005). *Programación lineal y flujo en redes* (Segunda edición ed.). México, D. F.: Limusa Noriega Editores.

Bazaraa, M. S., & Jarvis. (1977). *Linear Programing and NetworkFlows.* USA: John Wiley and Sons.

Borowski, J. E., & Borwein, J. M. (1989). *Collins Dictionary of Mathematics.* United Kingdom.

Castañeda, C. A. (2004). *Nueva visita a la geometría descriptiva.* Universidad Nacional de Colombia.

Cheevers, E. (2011). *Circuit Duals...or how to solve two circuits at once, and other party tricks*. Obtenido de División of Natural Sciences and Engineering.Swarthmore College: http://www.swarthmore.edu/NatSci/echeeve1/Class/e12/Lectures/Duals/Circuit%20Duals.pdf

Cook, W. J. (1998). *Combinatorial Optimization.* Canada: Wiley Inter-Science.

Evans, J. R. (1992). *Optimization Algorithms for Networks and Graphs.* New York: Marcel Dikker.

García Laguna, J. (2012). *Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Valladolid.* Recuperado el 2012, de Página personal de

Juan García Laguna. Notas 05: Dualidad y DEA: www.eio.uva.es/~laguna/io32/DEA-notas-05.doc

González, A. J. (2002). *Flujo Máximo.* Recuperado el 2012, de http://profesores.elo.utfsm.cl/~agv/elo320/01and02/redesDeFlujo/maximumFlow.pdf

Kjeldsen, T. H. (2002). *ScienceDirect*. Recuperado el 5 de Junio de 2012, de ScienceDirect: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086000922894

Leighton, W. B. (1987). *Geometría descriptiva.* Reverte.

Luenberger, D. G. (1989). *Programación Lineal y No Lineal.* México: Addison Wesley Iberoamericana.

Moreno Quintero, E. (2004). *Planner-User Interactions in Road Freight Transport. A Modelling Approach with a Case Study from Mexico. PhD Thesis.* Institute for Transport Studies. University of Leeds. UK.

Papadimitrious, R. H. (1198). *Combinatorial optimization: algorithms and Complexity.* New York: Prentice Hall.

Prawda, J. (1992). *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones* (Vol. I). México: Limusa - Noriega Editores.

Rascón, G. D., & et. al. (2006). *Álgebra lineal.* USON.

Ruiz, F. L., & Landín, G. A. (2002). La Dualidad en el Problema de Transporte. *II Conferencia de Ingeniería de Organización*, (págs. 681-688).

Shively, L. S. (1984). *Introducción a la geometría moderna.* Editorial Continental.

Weisstein, E. W. (2012). *"Desargues' Theorem"*. Recuperado el 2012, de MathWorld, Wolfram Web Resourse: http://mathworld.wolfram.com/DesarguesTheorem.html

Zimmerman, J. A. (2012). *Wave Particle Duality*. Obtenido de http://physics.about.com/od/lightoptics/a/waveparticle.htm