



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

UNA MIRADA A LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA DESDE LA GEOMETRÍA
HIPERBÓLICA

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Ana Luisa Rivas Esquivel

Dirigido por:

Dr. Jesús Jerónimo Castro

SINODALES

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Director

Firma

M. en D. Carmen Sosa Garza

Sinodal

Firma

M. en C. Roberto Torres Hernández

Sinodal

Firma

M. en D. Patricia Spíndola Yáñez

Sinodal

Firma

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad

M. en D. Carmen Sosa Garza
Coord. de la Lic. en Matemáticas Aplicadas

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Julio de 2011
México

RESUMEN

El presente trabajo está dividido en tres partes, la primera es una recopilación de algunos teoremas importantes en la geometría euclidiana; teoremas que para su demostración requieren de cierta perspicacia e ingenio. Es por eso que este capítulo fue llamado Geometría euclidiana: La verdadera belleza de esta geometría.

El segundo capítulo, “Geometría hiperbólica: Conociendo un nuevo mundo“, consiste en introducir al lector al mundo hiperbólico, es decir definir el nuevo plano los modelos que lo representan, además de los objetos matemáticos de estudio usados en ellos, entre los que destacan las rectas, los puntos, los ángulos, los triángulos, etc. Con este capítulo se desea lograr que el lector se familiarice con las construcciones en el plano hiperbólico, así al llegar al tercer capítulo no tendrá problemas para comprender las demostraciones que ahí se hacen.

Finalmente, la tercer parte “De lo euclidiano a lo hiperbólico: Toda una odisea“, se estudian los análogos de algunos teoremas mencionados en el primer capítulo para el plano hiperbólico. Siendo éste el clímax del trabajo aquí presentado.

(Palabras clave: transformación, geometría, euclidiana, hiperbólica)

A mis papás y a mis hermanas
por su paciencia, apoyo y amor

AGRADECIMIENTOS

Gracias..

..a Dios por la vida y por todo lo que me ha dado.

..a mis papás por la formación que me dieron, por su apoyo incondicional, por su amor y por enseñarme siempre luchar por conseguir lo que deseo.

..a mis hermanas por los momentos tan divertidos que pasamos juntas, por sus travесuras, sus risas, su simpleza, su complicidad y ante todo por su amor.

..a mi familia, abues, tíos, primos y sobrinos, porque su cariño es algo invaluable para mí.

..a mis amigos que siempre han estado conmigo en los buenos y en los malos momentos. Y por dejarme compartir tantas cosas hermosas con ellos.

..al Dr. Jesús Jerónimo Castro, por haber confiado en mí y haber dirigido mi trabajo de tesis.

..a la M.D.M. Carmen Sosa Garza, al M.C. Roberto Torres Hernández y a la M.D.M. Patricia Spíndola Yáñez por la asesoría brindada durante mi carrera y en el presente trabajo.

..al Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo, por su asesoramiento en la parte técnica de este trabajo.

..a mis profesores, que siempre tuvieron la paciencia de enseñarme. Porque con ellos aprendí más que matemáticas, aprendí a ser una profesionista integral y una persona de bien.

..al Dr. Gilberto Herrera Ruíz, por su apoyo incondicional durante mi carrera.

..a Egdar González Arreola, Iván González García y Jesús Antonio Torres Hernández porque siempre estuvieron dispuestos a dedicarme un momento cuando algo de geometrías no salía.

..a Maribel Martínez Trujano, por soportar mis momentos de estrés y enojo, y por alentarme siempre a perseguir mis sueños.

..podría seguirme con la lista y no terminar nunca, así que finalmente quiero agradecer a toda aquella persona que directa o indirectamente hicieron que este trabajo fuera posible.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	I
Dedicatoria	III
Agradecimientos	V
Índice general	VII
Índice general	VIII
Índice de figuras	IX
1. Introducción	1
2. Geometría Euclidiana: El inicio	3
2.1. La verdadera belleza de esta geometría	3
2.1.1. Teoremas de Ceva y Menelao	3
2.1.2. Teoremas de Pascal y Brianchon	5
2.1.3. Teorema de Desargues	15
2.1.4. Teorema de Pappus	17
2.1.5. Inversión	19
2.1.6. Teorema de Ptolomeo	23
2.1.7. Generalizando el Teorema de Ptolomeo: Teorema de Casey	24
2.1.8. Teorema de Feuerbach	27
2.1.9. Teorema de Thébault	31
2.1.10. Teorema de Malfatti	35
2.1.11. Circunferencia de Apolonio	42
2.1.12. Teorema de los siete círculos	43
3. Geometría Hiperbólica: Descubriendo un nuevo mundo	49
3.1. Modelos del plano hiperbólico	49
3.1.1. Modelo proyectivo (Beltrami - Klein)	49
3.1.2. Modelo hiperboloide	51
3.1.3. Modelo del disco de Poincaré	52
3.1.4. Modelo del semiplano superior (Poincaré)	53
3.2. Conociendo al plano hiperbólico	54
3.2.1. Puntos	54

3.2.2.	Rectas	55
3.2.3.	Reflexiones	55
3.2.4.	Perpendiculares	56
3.2.5.	Mediatrices	57
3.2.6.	Bisectrices	58
3.2.7.	Círculos	60
3.2.8.	Triángulos	63
4.	De lo euclidiano a lo hiperbólico: Toda una odisea	69
4.1.	Teoremas de Ceva y Menelao	69
4.2.	Círculo de los nueve puntos	70
4.3.	Teorema de Feuerbach	71
4.4.	Círculo de Apolonio	72
4.5.	Propiedades que caracterizan el plano hiperbólico	73
	Bibliografía	79

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Teorema de Ceva	4
2.2. Teorema de Menelao	4
2.3. Potencia de un punto	6
2.4. Eje radical de dos circunferencias	6
2.5. Hexagrama Místico de Pascal	7
2.6. Simediana de un triángulo	8
2.7. Lema 2.2	9
2.8. Cuarteta armónica	10
2.9. Lema 2.3	10
2.10. Lema 2.4	12
2.11. Lema 2.5	14
2.12. Lema 2.6	14
2.13. Teorema de Brianchon	15
2.14. Triángulos perspectivos desde un punto	16
2.15. Triángulos perspectivos desde una recta	16
2.16. Teorema de Desargues	16
2.17. Teorema de Pappus	18
2.18. Puntos inversos	20
2.19. Teorema 2.9	20
2.20. Teorema 2.10	21
2.21. Inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión	21
2.22. La inversión conserva ángulos	22
2.23. Lema 2.7	23
2.24. Teorema de Ptolomeo	24
2.25. Lema 2.8	25
2.26. Teorema de Casey	26
2.27. Lema 2.9	28
2.28. Lema 2.10	28
2.29. Lema 2.11	29
2.30. Teorema de Feuerbach	30
2.31. Primer problema de Thébault	31
2.32. Segundo problema de Thébault	33
2.33. Lema 2.12	33
2.34. Demostración del lema 2.12	34
2.35. Tercer problema de Thébault	34
2.36. Lema 2.13	35

2.37. Lema 2.14	37
2.38. Demostración del problema de Malfatti	38
2.39. Demostración del problema de Malfatti	38
2.40. Demostración del problema de Malfatti	39
2.41. Demostración del problema de Malfatti	39
2.42. Demostración de la circunferencia de Apolonio	42
2.43. Demostración de la circunferencia de Apolonio	43
2.44. Demostración de la circunferencia de Apolonio	43
2.45. Teorema de Ceva para cuerdas	44
2.46. Demostración del teorema de Ceva para cuerdas	45
2.47. Lema 2.15	46
2.48. Teorema de los siete círculos	47
3.1. Modelo de Klein-Beltrami para la geometría hiperbólica	50
3.2. Rectas en el modelo de Klein-Beltrami	51
3.3. Haces de rectas en el modelo de Klein-Beltrami	51
3.4. Modelo del hiperboloide	52
3.5. Rectas en el modelo del disco de Poincaré	52
3.6. Distancia entre dos puntos en el modelo del disco de Poincaré	53
3.7. Distancia entre dos puntos en el modelo del semiplano superior	54
3.8. El h-plano \mathbb{H}^2	54
3.9. h-rectas	55
3.10. h-reflexión de un punto P	55
3.11. b h-perpendicular a c por P	56
3.12. b h-perpendicular a a por P	57
3.13. b h-perpendicular a a por P	57
3.14. m h-mediatrix del h-segmento \overline{PQ}	58
3.15. m h-mediatrix del h-segmento \overline{PQ}	58
3.16. h-bisectriz del h-ángulo $\angle_h APB$	59
3.17. h-bisectriz del h-ángulo $\angle_h APB$	59
3.18. m h-bisectriz del h-ángulo $\angle_h APB$	59
3.19. Transportar una h-distancia	60
3.20. Transportar una h-distancia	60
3.21. Familia de e-círculos e-ortogonales a un e-círculo dado	61
3.22. h-círculo	61
3.23. h-círculo	62
3.24. h-círculo	62
3.25. h-triángulos	63
3.26. h-triángulos	63
3.27. h-triángulos	64
3.28. Suma de los h-ángulos internos de un h-triángulo	65
3.29. Dos h-ángulos de un h-triángulo determinan de manera única al tercero	66
3.30. h y h' no son h-rectas h-paralelas	67
3.31. h-cuadrilátero	67

4.1. Distancia de Hilbert	73
4.2. Extensión de la elipse E en E'	74
4.3. Construcción del triángulo $\triangle ABC$	75
4.4. Mapeo proyectivo P	76

I. INTRODUCCIÓN

A lo largo de mi vida, siempre me he preguntado ¿por qué la luz no viaja en forma recta si es la forma más corta para llegar de un punto a otro?. Al adentrarme en el tema, descubrí que ocurre porque el mundo en el que vivimos no respeta las leyes euclidianas a mayor escala, es decir, localmente la distancia más corta entre dos puntos es una recta, pero si vemos la distancia más corta entre dos planetas, dejará de serlo.

Fueron estos los motivos que me llevaron a estudiar una geometría diferente, en este caso la hiperbólica. El pensar las cosas de otra forma, romper los esquemas y modelos que ya tenemos gracias a años de estudio de la geometría euclidiana no es un paso fácil, a menudo nos encontramos en problemas porque seguimos conceptualizados en la idea de que todo es euclidiano. Sin embargo, con este trabajo, logré introducirme al menos un poco a ese fascinante mundo nuevo.

II. GEOMETRÍA EUCLIDIANA: EL INICIO

II.1. La verdadera belleza de esta geometría

Echando un vistazo rápido en los conceptos básicos que forman la geometría euclidiana, uno se puede topar con ciertos teoremas elegantes, llamados así debido a que construyen a partir de conceptos muy básicos otros muy complejos. A lo largo de este capítulo, se concentra una recopilación de algunos de estos teoremas, de los cuales más adelante se buscará su correspondiente en la geometría hiperbólica y en caso de no haberlo, se darán los motivos.

II.1.1 Teoremas de Ceva y Menelao

Concurrencia y colinealidad son dos propiedades muy comunes en geometría, las cuales no sólo ayudan a demostrar otras propiedades sino que también son útiles para construir conceptos nuevos. Dos teoremas que las abordan de una forma muy simple y elegante, son los mencionados en este apartado.

Giovanni Ceva fue un matemático e ingeniero italiano que realizó grandes trabajos sobre mecánica y geometría, pero su mayor contribución, sin duda, fue el llamado Teorema de Ceva.

Menelao de Alejandría, por su parte, fue un matemático y astrónomo griego que vivió a finales del siglo I. Autor del tratado *Sphaerica*, en el que realizó un sistemático estudio de las propiedades de los triángulos esféricos, que constituyen las bases de la trigonometría esférica. Ambos teoremas son mencionados a continuación:

Teorema 2.1 (Ceva) *Dados D , E y F en los lados BC , AC y AB respectivamente de un $\triangle ABC$, tales que las rectas AD , BE y CF concurren en un punto, entonces*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1 \quad (2.1)$$

donde \overline{BD} denota la distancia del segmento BD . Inversamente, si la relación anterior se cumple para los puntos D , E y F en los lados BC , AC y AB respectivamente de un $\triangle ABC$ entonces las rectas AD , BE y CF son concurrentes.

Demostración Sean R y S las intersecciones de CF y BE con la paralela a BC que pasa por A respectivamente, y sea O la intersección de las rectas BS y CR . Tomando los pares de triángulos semejantes $\triangle AFR \sim \triangle BFC$, $\triangle AES \sim \triangle CEB$, $\triangle ROA \sim \triangle COD$ y $\triangle BDO \sim \triangle SAO$ se tiene que:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{BC}}$$

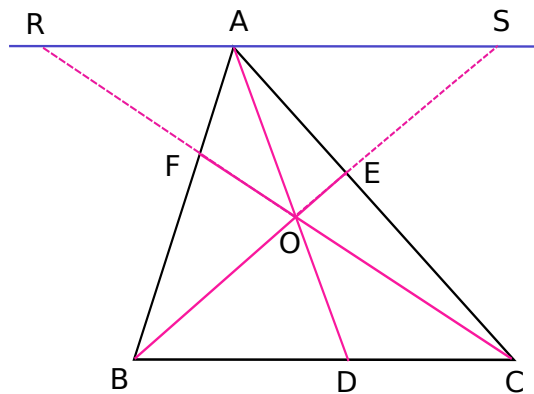


Figura 2.1: Teorema de Ceva

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{RA}}$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AS}}$$

de donde:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AS}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{BC}} = 1$$

Siguiendo el razonamiento anterior de forma inversa, obtenemos el recíproco del teorema. ■

Teorema 2.2 (Menelao) Si una recta interseca las rectas BC , CA y AB de un $\triangle ABC$, en los puntos L , M y N respectivamente, entonces

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = -1 \quad (2.2)$$

Inversamente si L , M y N son puntos sobre los lados BC , CA y AB de un $\triangle ABC$, para el cual se cumple la relación de arriba, entonces L , M y N son colineales.

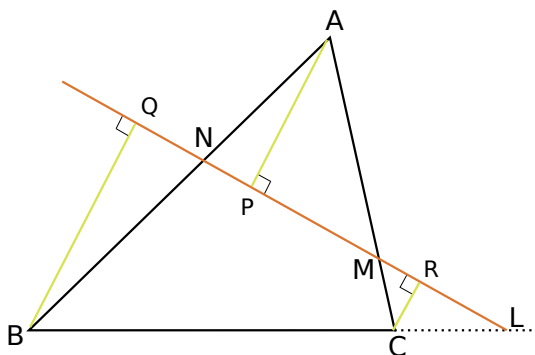


Figura 2.2: Teorema de Menelao

Demostración Sean P , Q y R los pies de las perpendiculares desde A , B y C respectivamente a la recta que pasa por L , M y N . Nos fijamos en los pares de triángulos semejantes $\triangle PAN \sim \triangle QBN$, $\triangle BLQ \sim \triangle CLR$, $\triangle APM \sim \triangle CRM$, tenemos que:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}}$$

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{CR}}$$

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{AP}}$$

de donde:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{AP}} = -1$$

De igual forma, podemos llegar al recíproco del teorema si seguimos los pasos en forma inversa. ■

II.1.2 Teoremas de Pascal y Brianchon

Continuando un poco con las propiedades de concurrencia y colinealidad, se presentan aquí un par de teoremas duales que nos hablan de dichas propiedades relacionando hexágonos y algunas secciones cónicas.

Blaise Pascal fue un matemático, físico, filósofo católico y escritor. Durante su vida, hizo contribuciones importantes en diferentes áreas. En las matemáticas, por ejemplo, estudió las secciones cónicas y produjo importantes teoremas en la geometría descriptiva, también, en colaboración con Fermat, fundaron las bases de la teoría de la probabilidad. A la edad de 16 años, Pascal presenta una hoja de papel en una de las reuniones de Mersenne que contenía una serie de teoremas de geometría descriptiva, incluyendo el hexagrama místico de Pascal (ver teorema 2.3).

Charles Julien Brianchon fue un matemático, químico y militar francés, de quien se desconoce gran parte de su vida. Se sabe que mientras estudiaba en la Escuela Politécnica en París, publicó su primer artículo “Sur les surfaces courbes du second degré” (Sobre las superficies curvas de segundo grado) en el periódico de la escuela, en el cual redescubría el hexagrama místico de Pascal. No conforme con ello prueba también el teorema dual a éste, llamado ahora, Teorema de Brianchon.

Para poder probar dichos teoremas, es necesario que antes se mencionen algunas definiciones y que se demuestren ciertos lemas que a continuación se exponen.

Definición 2.1 Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro O y radio r . Sea también P un punto cualquiera. Llamaremos potencia de P con respecto a \mathcal{C} al número $(\overline{PO})^2 - r^2$ que es constante (Fig. 2.3).

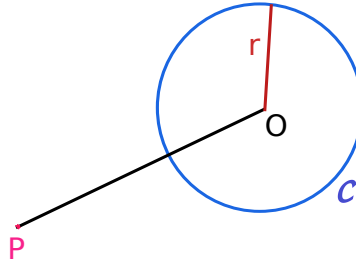


Figura 2.3: Potencia de un punto

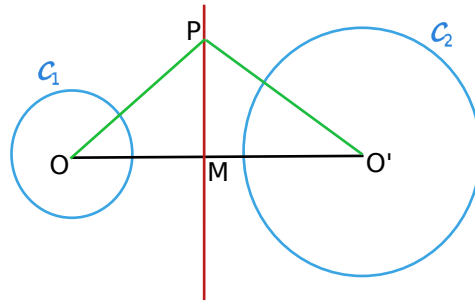


Figura 2.4: Eje radical de dos circunferencias

Lema 2.1 *Dados dos circunferencias, \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto a dichas circunferencias, es una línea recta llamada eje radical (Fig. 2.4).*

Demostración Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos circunferencias no concéntricas, con centros O, O' y radios r, r' respectivamente. Sea P un punto tal que su potencia con respecto a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 es la misma, trazamos la recta PM perpendicular a la línea de los centros OO' Entonces

$$\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PO'}^2 - r'^2$$

Restando \overline{MP}^2 en ambos lados, nos da

$$\overline{OM}^2 - r^2 = \overline{MO'}^2 - r'^2$$

y puesto que $\overline{OM} + \overline{MO'} = \overline{OO'}$, tenemos que

$$\overline{OM} - \overline{MO'} = \frac{r^2 - r'^2}{\overline{OO'}}$$

Luego, sólo existe un punto M en $\overline{OO'}$ que satisface estas relaciones. Si tomáramos un punto cualquiera N , de forma similar tendríamos

$$\overline{OM} - \overline{MO'} = \overline{ON} - \overline{NO'}$$

y esto es

$$\overline{ON} - \overline{MN} - \overline{MO'} = \overline{ON} + \overline{MN} - \overline{MO'}$$

así $\overline{MN} = 0$; es decir, N coincide con M . Por lo tanto, si un punto tiene potencia igual con respecto a dos circunferencias \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , está en una perpendicular a la línea de sus centros. Siguiendo la forma inversa del razonamiento anterior podemos demostrar que si un punto P se encuentra en la recta perpendicular a la línea que une los centros de las circunferencias, tiene la misma potencia respecto a ambas.

■

Teorema 2.3 (Pascal) Sean A, B, C, D, E, F los vértices de un hexágono inscrito en una circunferencia C . Y sean L, M y N las intersecciones de los lados opuestos de dicho hexágono, es decir de AF con CD , FE con BC y AB con ED respectivamente. Entonces, L, M y N son colineales. A dicha recta se le conoce como línea de Pascal.

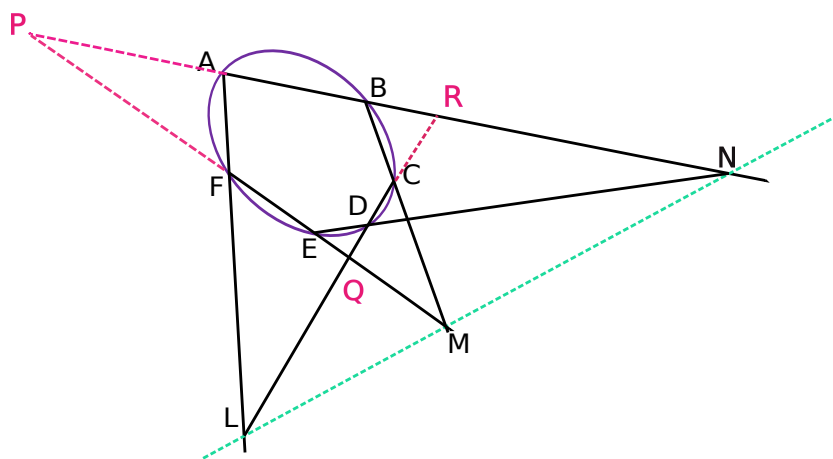


Figura 2.5: Hexagrama Místico de Pascal

Demostración Sean $P = EF \cap AB$, $Q = EF \cap CD$ y $R = CD \cap AB$. Usando el teorema de Menelao en el $\triangle PQR$ con las rectas AF, BC y DE , se tiene que:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{FQ}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{QL}}{\overline{LR}} = 1$$

$$\frac{\overline{RB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}} = 1$$

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{EQ}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{DR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NP}} = 1$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores tenemos que:

$$\left(\frac{\overline{PF}}{\overline{FQ}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{QL}}{\overline{LR}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{RB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{PE}}{\overline{EQ}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{DR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NP}} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{QL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NP}} \cdot \left(\frac{\overline{PF}}{\overline{FQ}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{EQ}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{DR}} \right) = 1 \quad (2.3)$$

Además por potencia de los puntos P , Q y R con respecto a la circunferencia \mathcal{C} , tenemos que:

$$\begin{aligned} \overline{PF} \cdot \overline{PE} &= \overline{PA} \cdot \overline{PB} \\ \overline{QF} \cdot \overline{QE} &= \overline{QD} \cdot \overline{QC} \\ \overline{RA} \cdot \overline{RB} &= \overline{RD} \cdot \overline{RC} \end{aligned}$$

Sustituyendo en 2.3 se tiene que:

$$\frac{\overline{QL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NP}} \cdot \left[\left(\frac{1}{\overline{FQ}} \cdot \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{PE}} \right) \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{EQ}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{DR}} \right] = 1$$

■

Definición 2.2 Dada la mediana de un triángulo, y la bisectriz en el mismo ángulo, la reflexión de la mediana con respecto a la bisectriz es llamada simediana (Fig. 2.6).

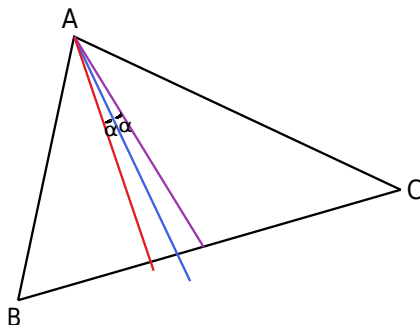


Figura 2.6: Simediana de un triángulo

Lema 2.2 Dado un $\triangle ABC$, inscrito en una circunferencia \mathcal{C} , y un punto T fuera de ella, tal que TB y TC son tangentes a \mathcal{C} , entonces AT es simediana del $\triangle ABC$ (Fig. 2.7).

Demostración Prolongamos los lados AB y AC del $\triangle ABC$. Sea PQ la recta de AB a AC que pasa por T , tal que

$$\angle TBP = \angle BPT \quad (2.4)$$

Se cumple que,

$$\angle TBP = \angle BPT \quad (2.5)$$

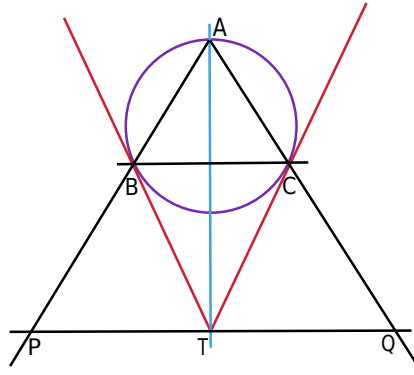


Figura 2.7: Lema 2.2

por ser ángulos seminscritos. Además tenemos que

$$\angle TBP + \angle CBT + \angle ABC = 180 \quad (2.6)$$

y

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180 \quad (2.7)$$

Restando la ecuación (2.6) menos la ecuación (2.7), tenemos:

$$\begin{aligned} \angle TBP + \angle CBT + \angle ABC - \angle ABC - \angle BCA - \angle CAB &= 180 - 180 \\ \Rightarrow \angle TBP + \angle CBT - \angle BCA - \angle CAB &= 0 \\ \Rightarrow \angle TBP + \angle CBT &= \angle BCA + \angle CAB \end{aligned}$$

pero por la ecuación (2.5)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle TBP + \angle CAB &= \angle BCA + \angle CAB \\ \Rightarrow \angle TBP &= \angle BCA \end{aligned} \quad (2.8)$$

Análogamente, $\angle ABC = \angle QCT$. También tenemos que

$$\begin{aligned} \angle PTB + \angle BTC + \angle CTQ &= 180 \\ \Rightarrow 180 - 2\angle BCA + 180 - 2\angle CAB + 180 - \angle ABC - \angle TQC &= 180 \\ \Rightarrow 360 - 2\angle BCA - 2\angle CAB - \angle ABC &= \angle TQC \\ \Rightarrow 360 - \angle BCA - \angle CAB - (\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC) &= \angle TQC \\ \Rightarrow 360 - \angle BCA - \angle CAB - 180 &= \angle TQC \\ \Rightarrow 180 - \angle BCA - \angle CAB &= \angle TQC \\ \Rightarrow \angle TQC &= \angle ABC \end{aligned} \quad (2.9)$$

Luego, $\triangle PTB$, $\triangle BTC$ y $\triangle CTQ$ son isósceles y así, $\overline{PT} = \overline{BT} = \overline{CT} = \overline{QT}$. Entonces T es punto medio del segmento \overline{PQ} y con ello la recta AT es mediana del $\triangle APQ$. Tomando las ecuaciones (2.4) y (2.8) se tiene que:

$$\angle TBP = \angle BPT = \angle BCA$$

y por la ecuación (2.9)

$$\angle TQC = \angle ABC$$

Luego, $\triangle ABC \sim \triangle AQP$

\therefore la recta AT es simediana de $\triangle ABC$

■

Definición 2.3 Sean A, B, C, D puntos sobre una recta como se muestra en la figura 2.8 tales que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$. Entonces diremos que los puntos C y D son conjugados armónicos de los puntos A y B .

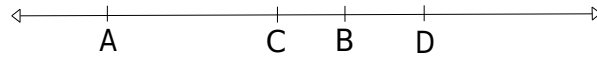


Figura 2.8: Cuarteta armónica

Definición 2.4 Sea \mathcal{C} una circunferencia y P un punto interior a \mathcal{C} . Se traza por P una recta que corta a \mathcal{C} en A y B . Sea P' un punto sobre la recta AB , tal que Q, A, P y B son conjugados armónicos. El lugar geométrico de los puntos Q para todas las distintas posiciones de la recta AB es llamada recta polar del punto P con respecto a \mathcal{C} .

Lema 2.3 Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia \mathcal{C} . Y sea D un punto en el arco BC del lado opuesto al punto A , tal que \overline{AD} es simediana del $\triangle ABC$. Entonces \overline{CB} es simediana de $\triangle ACD$.

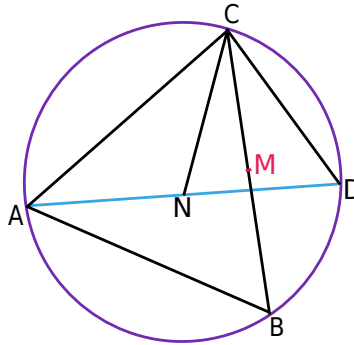


Figura 2.9: Lema 2.3

Demostración Sea M sobre \overline{BC} tal que $\overline{BM} = \overline{MC}$. Sea N en \overline{AD} tal que

$$\angle NCA = \angle DCB \tag{2.10}$$

Como \overline{AM} es mediana del $\triangle ABC$ y \overline{AD} simediana del mismo triángulo,

$$\angle DAB = \angle CAM \tag{2.11}$$

Además, $\angle BDA = \angle BCA$ porque subtienen a la misma cuerda \overline{AB} . Luego,

$$\triangle ABD \sim \triangle AMC \quad (2.12)$$

Como tenemos (2.10), entonces $\angle BCA = \angle DCN$ y

$$\angle ABC = \angle ADC \quad (2.13)$$

ya que subtienen la misma cuerda \overline{AC} . Luego,

$$\triangle ABC \sim \triangle NDC \quad (2.14)$$

Por la ecuación (2.11), se tiene que $\angle MAB = \angle CAD$ y por la ecuación (2.13),

$$\triangle ABM \sim \triangle ADC \quad (2.15)$$

Así, por la ecuación (2.12) tenemos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{MC}}$$

y por la ecuación (2.14)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{ND}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} \\ \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{DC} &= \overline{BC} \cdot \overline{ND} \end{aligned}$$

además, por la ecuación (2.15),

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} &= \frac{\overline{BM}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{CA}} \\ \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{DC} &= \overline{BM} \cdot \overline{AD} \end{aligned}$$

Al juntar las dos últimas ecuaciones, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{BC} \cdot \overline{ND} &= \overline{BM} \cdot \overline{AD} \\ \Rightarrow \overline{ND} &= \frac{\overline{BM} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC}} \end{aligned}$$

pero como M es el punto medio de \overline{BC} , sabemos que $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$ entonces,

$$\begin{aligned} \overline{ND} &= \frac{\overline{AD}}{2} \\ \Rightarrow \overline{ND} &= \frac{\overline{AN} + \overline{ND}}{2} \\ \Rightarrow \overline{ND} - \frac{\overline{ND}}{2} &= \frac{\overline{AN}}{2} \\ \Rightarrow \frac{\overline{ND}}{2} &= \frac{\overline{AN}}{2} \\ \Rightarrow \overline{ND} &= \overline{AN} \end{aligned}$$

luego, N es punto medio de \overline{AD} . Y así, \overline{CN} es mediana de $\triangle ACD$

$\therefore \overline{CB}$ es simediana de dicho triángulo.

Lema 2.4 Sean \mathcal{C} una circunferencia y P un punto fuera de ella, trazamos las tangentes desde P hacia \mathcal{C} y llamamos M y N a los puntos de tangencia. Entonces la recta MN es la polar de P con respecto a \mathcal{C} .

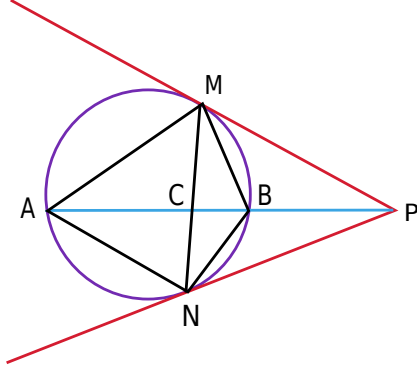


Figura 2.10: Lema 2.4

Demostración Aplicando el Lema 2.2, la recta AP es simediana del $\triangle AMN$. Así como, por el Lema 2.3 MN es simediana del $\triangle AMB$. Tomando el teorema generalizado de la bisectriz en el $\triangle ABM$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{MB} \sin \theta}{\overline{AM} \sin \delta} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} &= \frac{\overline{AM} \sin \delta}{\overline{MB} \sin \theta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Además por la ley de senos en el $\triangle ANB$, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\overline{NB}} &= \frac{\sin \delta}{\overline{AN}} \\ \Rightarrow \frac{\sin \delta}{\sin \theta} &= \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \end{aligned}$$

sustituyendo ésta última igualdad en la ecuación (2.16)

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \quad (2.17)$$

El $\triangle AMP$ y el $\triangle MBP$ son semejantes, debido a que $\angle MAP = \angle PMB$ por ser seminscritos y ambos triángulos comparten el $\angle BPM$. Análogamente $\triangle ANP \sim \triangle NBP$. Esto implica que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PM}} \quad (2.18)$$

y

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PN}} \quad (2.19)$$

Tomando la primera fracción y la última en la ecuación (2.19), y despejando se obtiene:

$$\overline{PA} = \frac{\overline{AN} \cdot \overline{PN}}{\overline{NB}}$$

Y tomando también la primera y la última fracción en la ecuación (2.18) y sustituyendo la ecuación anterior, se tiene que:

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN} \cdot \overline{PN}}{\overline{NB} \cdot \overline{PM}}$$

pero $\overline{PN} = \overline{PM}$, entonces:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}$$

lo que al sustituir en la ecuación (2.17), nos da:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}$$

luego,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{(\overline{AN})^2}{(\overline{NB})^2}. \quad (2.20)$$

Ahora,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{NP}} \cdot \frac{\overline{NP}}{\overline{BP}}$$

que por la primer igualdad de la ecuación (2.19) implica:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{NP}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}$$

y tomando la primera fracción y la última de esa misma ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} &= \frac{(\overline{AN})^2}{(\overline{NB})^2}. \end{aligned}$$

Igualando la ecuación anterior con la ecuación (2.20), llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} &= -\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \end{aligned}$$

Luego, la cuarteta $A, C, B,$ y P es armónica.

\therefore la recta MN es la polar de P con respecto a \mathcal{C} .

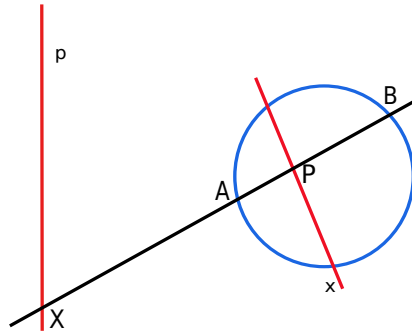


Figura 2.11: Lema 2.5

■

Lema 2.5 Sean X, P puntos, y sus polares con respecto a \mathcal{C} , x, p . Entonces, X está en p si y sólo si P está en x .

Demostración

$P \in x \Leftrightarrow$ Existen $A, B \in \mathcal{C}$, tales que X, A, P y B son conjugados armónicos

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \Leftrightarrow X \in p$$

■

Lema 2.6 Tres puntos son colineales si y sólo si sus polares son concurrentes.

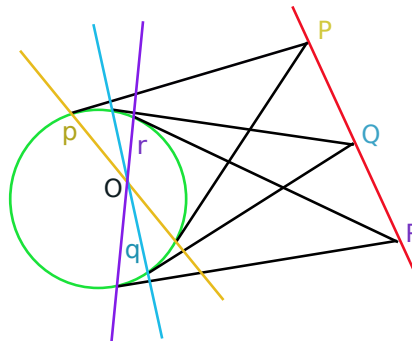


Figura 2.12: Lema 2.6

Demostración Sean P, Q, R puntos colineales y p, q, r las polares de cada uno respecto a \mathcal{C} . Sea O la intersección de la recta p con la recta q . Por el lema 2.5, la polar de O con respecto a \mathcal{C} debe pasar por P y Q . Pero como P, Q y R son colineales, entonces por el mismo lema, la recta r pasa por O . Luego las rectas p, q, r son concurrentes. Sean p, q, r las polares de P, Q y R concurrentes. Llamamos O al punto de concurrencia. $O \in p$, aplicando el lema 2.5,

$P \in o$, donde o es la polar de O con respecto a \mathcal{C} . Análogamente, $Q \in o$ y $R \in o$. Luego P , Q , R son colineales.

$\therefore p, q, r$ son concurrentes si y sólo si P, Q, R son colineales.

■

Teorema 2.4 (Brianchon) *Sea $ABCDEF$ un hexágono formado por seis rectas tangentes a una circunferencia. Entonces, los segmentos \overline{AD} , \overline{BE} y \overline{CF} se intersecan en un solo punto llamado punto de Brianchon.*

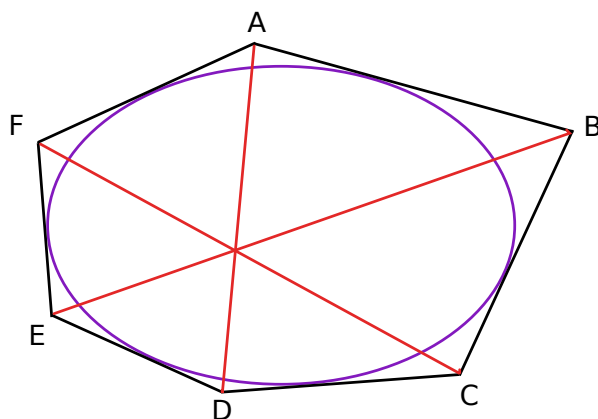


Figura 2.13: Teorema de Brianchon

Demostración Por el lema 2.4, la polar de M respecto a \mathcal{C} es la recta FA que llamaremos m . De igual forma, $q = DC$, $r = ED$, $s = EF$ y $n = AB$. Sean X , el punto de intersección de las rectas m y q , Y el de las rectas r y n , y Z el de las rectas s y p . Por el lema 2.5, x debe pasar por M y x debe pasar por Q , luego, $x = MQ$. Análogamente $y = SP$ y $z = NR$. Por el teorema de Pascal, x, y y z son colineales. Y por el lema 2.6, las rectas MQ, NR y SP son concurrentes.

■

II.1.3 Teorema de Desargues

Durante el Renacimiento y ante la aparición de nuevos problemas en la ciencia aplicada, surgen, en el siglo XVII varios personajes clave en la recuperación de los conocimientos geométricos griegos y en los nuevos enfoques que dieron lugar al nacimiento de la Geometría Proyectiva. Entre dichos personajes, destaca el matemático francés, Gérard Desargues (1591-1661) quien más adelante fue considerado como uno de los padres de dicha disciplina. Aunque la mayor parte de su trabajo fue teórico, Desargues disfrutaba mucho con las posibles aplicaciones de la geometría. Obtuvo resultados muy importantes en el estudio de "la perspectiva", de hecho uno de los teoremas principales en esa rama de las matemáticas fue descubierto por él y por supuesto lleva su nombre.

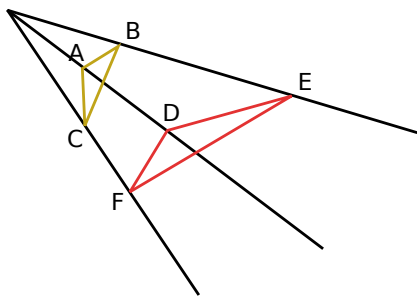


Figura 2.14: Triángulos perspectivos desde un punto

Definición 2.5 Decimos que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son perspectivos desde un punto, si las rectas AD , BE y CF concurren.

Definición 2.6 Sean L , M y N los puntos donde se cortan los pares de rectas, $(AB$ y $DE)$, $(BC$ y $EF)$ y $(AC$ y $DF)$ de dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dados. Decimos que los triángulos son perspectivos desde una recta, si los puntos L , M y N son colineales.

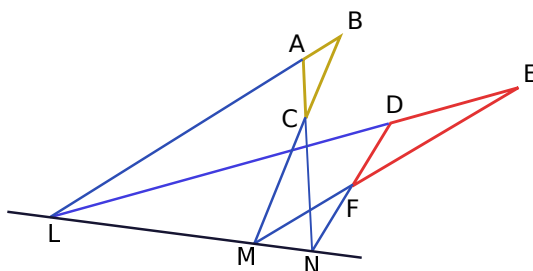


Figura 2.15: Triángulos perspectivos desde una recta

Teorema 2.5 (Desargues) Si dos triángulos son perspectivos desde un punto entonces son perspectivos desde una recta.

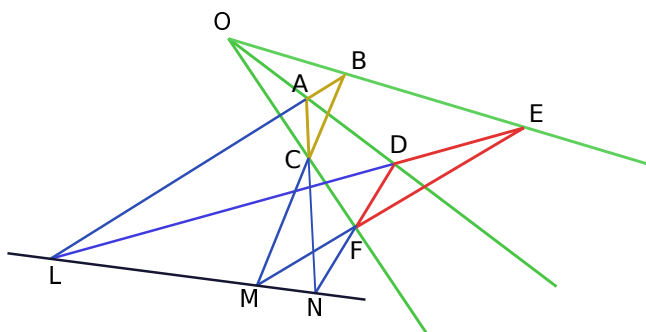


Figura 2.16: Teorema de Desargues

Demostración Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos perspectivas desde un punto O como se muestra en la figura 2.16. Aplicando el teorema de Menelao en los triángulos $\triangle OCA$, $\triangle OCB$ y $\triangle OAB$ con las rectas que pasan por los puntos D, F y N ; E, F y M ; y E, D y L respectivamente, se tiene que:

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DO}} = -1$$

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{OE}}{\overline{EB}} = -1$$

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{OE}}{\overline{EB}} = -1$$

Multiplicando las tres igualdades, tenemos que:

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DO}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{OF}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{OE}} \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{OE}}{\overline{EB}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} = -1$$

$\therefore L, M, N$ son colineales. ■

Teorema 2.6 (Recíproco del Teorema de Desargues) *Si dos triángulos son perspectivas desde una recta entonces son perspectivas desde un punto.*

Demostración Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ perspectivas desde una recta, como se muestra en la figura 2.16, se quiere demostrar que son perspectivas desde un punto, es decir, que sus lados correspondientes, AD , BE y CF concurren. Sea O el punto de intersección de las rectas AD y CF . Basta probar que la recta BE pasa por O , es decir que O, B y E son colineales. Notemos que los triángulos $\triangle LDA$ y $\triangle MFC$ son perspectivas desde el punto N . Así, aplicando el teorema de Desargues a dichos triángulos, se tiene que O, B y E son colineales. ■

II.1.4 Teorema de Pappus

Pappus de Alejandría vivió entre los siglos III y IV. Originario de Alejandría, es conocido como el último de los grandes geómetras griegos. El conocimiento que se tiene sobre su vida es muy limitado. Su obra principal, la Colección matemática, escrita hacia el 340, reviste una particular importancia desde el punto de vista histórico porque, además de ser una exposición completa y sistemática de los conocimientos de su época, recoge fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Alejandría, hoy en gran parte perdidas. La Colección compuesta por ocho libros, contiene una serie de problemas que introducen nociones geométricas importantes, como el foco de una parábola o la directriz de una cónica, y los enunciados de muchos teoremas, entre ellos, el que expresa la superficie y el volumen de las figuras de revolución. Dentro de dicha obra, se encuentra uno de sus teoremas que es considerado como la base de diversas demostraciones en geometría proyectiva, el cual mostraremos a continuación.

Teorema 2.7 (Pappus) Sean A, B y C tres puntos sobre una recta l y D, E y F tres puntos sobre otra recta m . Sean P, Q y R las intersecciones respectivas de las rectas AE con BD , BF con CE y AF con CD . Entonces, los puntos P, Q y R son colineales.

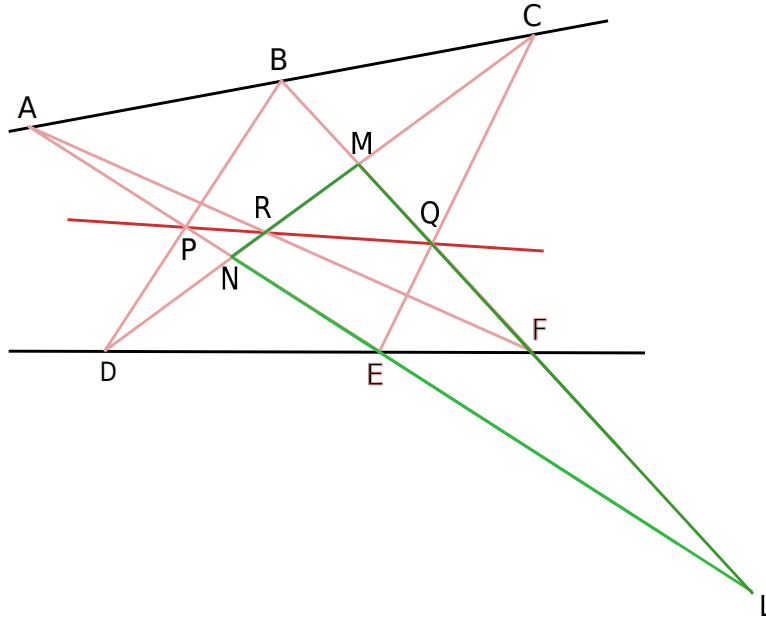


Figura 2.17: Teorema de Pappus

Demostración Sea L la intersección de las rectas AE y BF , M el punto donde las rectas BF y CD concurren y N el punto donde se cortan las rectas CD y AE . Ahora, por el teorema de Menelao en el $\triangle LMN$, con la recta BD tenemos:

$$\frac{\overline{LP}}{\overline{PN}} \cdot \frac{\overline{ND}}{\overline{DM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} = 1$$

con la recta CE :

$$\frac{\overline{LE}}{\overline{EN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MQ}}{\overline{QL}} = 1$$

con la recta AF :

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NR}}{\overline{RM}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{FL}} = 1$$

con la recta AC :

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} = 1$$

con la recta DF :

$$\frac{\overline{LE}}{\overline{EN}} \cdot \frac{\overline{ND}}{\overline{DM}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{FL}} = 1$$

Al multiplicar las tres primeras igualdades, y dividir todo por las dos últimas, se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{LP}}{\overline{PN}} \cdot \frac{\overline{ND}}{\overline{DM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{EN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MQ}}{\overline{QL}} \cdot \frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NR}}{\overline{RM}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{FL}} = 1 \\ & \frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{EN}} \cdot \frac{\overline{ND}}{\overline{DM}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{FL}} \\ \Rightarrow & \frac{\overline{LA}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BL}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{EN}} \cdot \frac{\overline{ND}}{\overline{DM}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{FL}} \left(\frac{\overline{LP}}{\overline{PN}} \cdot \frac{\overline{NR}}{\overline{RM}} \cdot \frac{\overline{MQ}}{\overline{QL}} \right) = 1 \\ & \Rightarrow \frac{\overline{LP}}{\overline{PN}} \cdot \frac{\overline{NR}}{\overline{RM}} \cdot \frac{\overline{MQ}}{\overline{QL}} = 1 \end{aligned}$$

lo que, nuevamente por el teorema de Menelao en el $\triangle LMN$, quiere decir que P , Q y R son colineales. ■

II.1.5 Inversión

Existen diversas transformaciones que son muy utilizadas en las matemáticas, en particular en las geometrías. Entre las más usadas, se encuentran la rotación, la reflexión y la traslación. La inversión por su parte es un tipo transformación muy importante, debido a que facilita la demostración de diversos teoremas. Para poder aplicarla, es necesario definir una circunferencia \mathcal{C} , a la que llamaremos circunferencia de inversión. El radio r de dicha circunferencia será llamado el radio de inversión y su centro O el centro de inversión.

Decimos que dos puntos P y P_1 son inversos con respecto a \mathcal{C} (ver figura 2.18) si además de ser colineales con O , se cumple que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP}_1 = r^2$$

Definida de esta forma, la inversión hace que todo punto, excepto el centro de inversión, tenga un único punto inverso en el plano con respecto a \mathcal{C} . Los puntos que estén en la circunferencia de inversión, serán sus propios inversos. Y siempre que tomemos dos puntos inversos distintos, uno estará dentro de la circunferencia de inversión y el otro fuera.

Se puede definir la inversa de una figura M , como la figura M_1 formada por todos los inversos de los puntos de la figura M .

Teorema 2.8 Sean P y P_1 dos puntos inversos con respecto a \mathcal{C} . Llamemos A y B a los puntos donde la recta OPP_1 corta a \mathcal{C} . Entonces los puntos A , P_1 , B y P son conjugados armónicos.

Demostración Como P y P_1 son puntos inversos, tenemos que $\overline{OP} \cdot \overline{OP}_1 = r^2 = \overline{OA}^2$, lo cual nos dice que A , P_1 , B y P son conjugados armónicos. ■

Teorema 2.9 El inverso de una línea recta que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia que sí pasa por dicho punto. Recíprocamente, el inverso de una circunferencia que pasa por el centro de inversión, es una recta que no pasa por ese punto. Más que eso, la línea recta es perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por el centro de inversión.

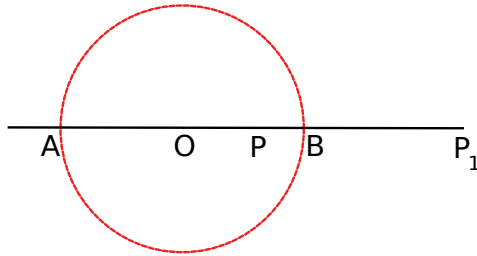


Figura 2.18: Puntos inversos

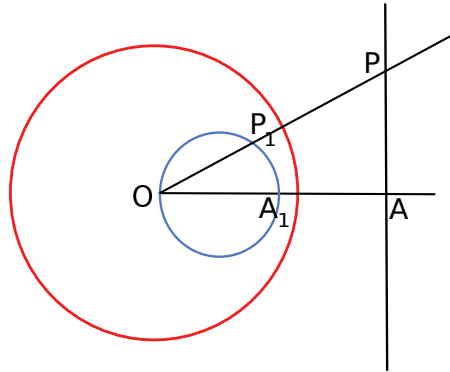


Figura 2.19: Teorema 2.9

Demostración Sea A el pie de la perpendicular desde el centro de inversión O sobre una recta dada, y P un punto cualquiera en dicha recta. Sea P_1 en la recta OP y A_1 en la recta OA los inverso de P y A respectivamente. Entonces tenemos que los triángulos OPA y OA_1P_1 son inversamente semejantes (por definición de puntos inversos). Y así, el $\angle OP_1A_1$ es recto.

Luego P_1 está en la circunferencia de diámetro $\overline{OA_1}$

De igual forma, si P_1 es un punto que está en dicha circunferencia, recorriendo los pasos anteriores al revés podemos inferir que P está en la perpendicular al diámetro $\overline{OA_1}$ que pasa por el inverso de A .

■

Teorema 2.10 *Cualquier circunferencia que pasa por un par de puntos inversos distintos, es su propia inversa y es ortogonal a la circunferencia de inversión; e inversamente, cualquier circunferencia que es ortogonal a la circunferencia de inversión es su propia inversa.*

Demostración Sean P y P_1 puntos inversos con respecto a la circunferencia \mathcal{C} de centro O . Sean A y A_1 las intersecciones de \mathcal{C} con la recta PP_1 . Así, como $\overline{OP} \cdot \overline{OP_1} = \overline{OA}^2$, A y A_1 son conjugados armónicos con respecto a P y a P_1 . Es sabido que dada una circunferencia con diámetro \overline{MN} , va a ser ortogonal a cualquier circunferencia que pase por X y Y , un par de conjugados armónicos de M y N .

Luego, cualquier circunferencia que pase por P y P_1 va a ser ortogonal a \mathcal{C} .

De forma recíproca, podemos seguir los pasos del razonamiento anterior a la inversa, y obtendremos por completo el resultado buscado.

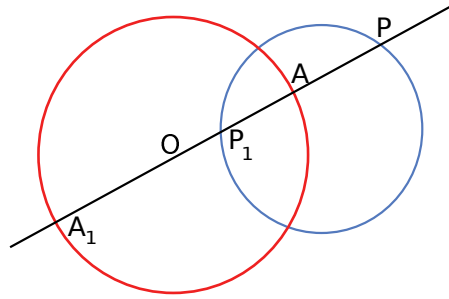


Figura 2.20: Teorema 2.10

■

Teorema 2.11 *La inversión de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia.*

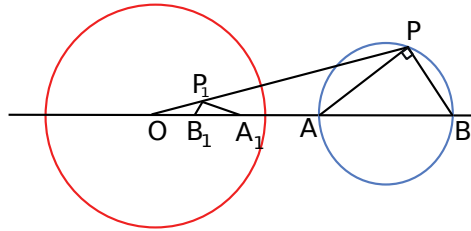


Figura 2.21: Inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión

Demostración Sea O el centro de la circunferencia de inversión y r su radio, y sea \mathcal{C}_1 una circunferencia cualquiera que no pasa por O . Llamemos \overline{AB} al diámetro de \mathcal{C}_1 que pasa por O , y sean A_1 y B_1 los puntos inversos de A y B respectivamente. Sea P un punto cualquiera sobre \mathcal{C}_1 , y llamemos P_1 a su inverso. Sabemos que

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OP}_1 &= \overline{OA} \cdot \overline{OA}_1 = \overline{OB} \cdot \overline{OB}_1 = r^2 \\ \Rightarrow \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} &= \frac{\overline{OB}_1}{\overline{OP}_1} \text{ y } \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}_1}{\overline{OP}_1} \\ \Rightarrow \triangle OPB &\sim \triangle OB_1P_1 \text{ y } \triangle OPA \sim \triangle OA_1P_1 \end{aligned}$$

Además, como AB es diámetro, tenemos que el $\angle APB = 90$, y así,

$$\angle OPB - \angle OPA = \angle OB_1P_1 - \angle OA_1P_1 = 90$$

es decir,

$$180 - \angle A_1B_1P_1 - \angle OA_1P_1 = 90$$

lo que al despejar, nos da

$$\angle A_1B_1P_1 + \angle OA_1P_1 = \angle A_1P_1B = 90$$

de aquí que P_1 está sobre una circunferencia \mathcal{C}_2 se diámetro $\overline{A_1B_1}$, que será la inversión de \mathcal{C}_1 .



Teorema 2.12 Las rectas tangentes a dos curvas inversas en dos puntos inversos A y A_1 forma ángulos iguales con la recta que une el centro de inversión con A y A_1 .

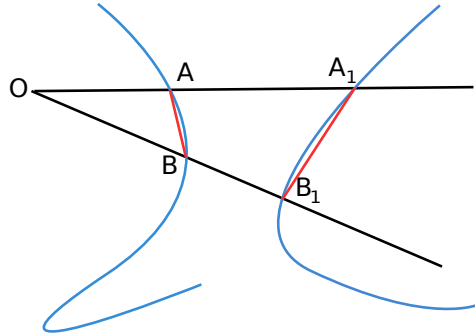


Figura 2.22: La inversión conserva ángulos

Demostración Sean S y S_1 las curvas inversas. Sean A y B dos puntos sobre S y sean A_1 y B_1 sus puntos inversos respectivamente. Se tiene que

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA_1} = \overline{OB} \cdot \overline{OB_1} = r^2$$

$$\Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OB_1A_1$$

$$\Rightarrow \angle OAB = \angle OB_1A_1$$

es decir, las rectas AB y A_1B_1 forman los mismos ángulos con las rectas OA_1 y OB_1 respectivamente.

Si acercamos B hacia A sobre la curva, B_1 se acerca a A_1 y las rectas AB y A_1B_1 se transforman en las tangentes por A a S y por A_1 a S_1 respectivamente. Entonces, en el límite, dichas tangentes deben hacer los mismos ángulos con la recta OA .

Teorema 2.13 Si dos curvas se cortan formando un cierto ángulo, las dos curvas inversas se cortarán formando también el mismo ángulo.

Demostración Basta con trazar las tangentes a las dos curvas por el punto de corte, y las tangentes a las dos curvas inversas por su punto de corte, y aplicar el teorema anterior.

Ahora, si dos curvas son tangentes, deben tener un único punto de corte, por lo que las curvas inversas también deben tener un único punto de corte, lo cual nos lleva a concluir el siguiente teorema:

Teorema 2.14 Si dos curvas son tangentes, sus curvas inversas también lo serán.

Lema 2.7 Dadas una circunferencia \mathcal{C} con centro en O , una recta l que pasa por O y otra circunferencia \mathcal{C}' tangente a l en O , la inversa de \mathcal{C}' con respecto a \mathcal{C} es una recta paralela a l que pasa por los puntos donde \mathcal{C} y \mathcal{C}' se cortan.

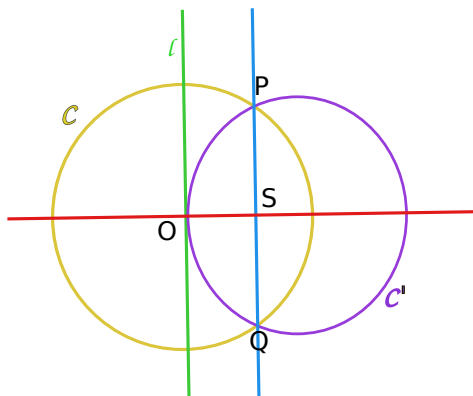


Figura 2.23: Lema 2.7

Demostración Se sabe que la inversa de una circunferencia que corta a la circunferencia de inversión y pasa por su centro es una recta que pasa por los puntos donde ambas se intersectan. Falta probar que dicha recta es paralela a l .

Sean P y Q los puntos donde \mathcal{C} y \mathcal{C}' se cortan. Invertimos \mathcal{C}' con respecto a \mathcal{C} . Su inversa va a ser la recta PQ . Trazamos la perpendicular a l por O . Sea S su intersección con la recta PQ . Como \overline{OP} y \overline{OQ} son radios de \mathcal{C} , son iguales, y como P , S y Q son colineales, $\triangle SQO \cong \triangle SPO$. Entonces, S es punto medio de \overline{PQ} . Ésto con el hecho de que $\overline{OS} \perp \overline{PQ}$ y l tangente a \mathcal{C}' nos dicen que

$$l \parallel PQ$$



II.1.6 Teorema de Ptolomeo

Claudio Ptolomeo es uno de los personajes más importantes en la historia de la Astronomía. Astrónomo, químico, geógrafo y matemático, Ptolomeo propuso el sistema geocéntrico como la base de la mecánica celeste que perduró por más de 1400 años. Sus teorías y explicaciones astronómicas dominaron el pensamiento científico hasta el siglo XVI. Nació en Egipto aproximadamente en el año 85 y murió en Alejandría en el año 165. Aunque debe su fama a la exposición de su sistema ptolomaico, su saber fue mucho más allá. Entre sus diversas aportaciones, está un teorema presentado aquí que lleva su nombre, el cual relaciona los lados de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con sus diagonales.

Definición 2.7 Decimos que un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si existe una circunferencia \mathcal{C} que pasa por los cuatro vértices de dicha figura.

Teorema 2.15 (Ptolomeo) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Entonces

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

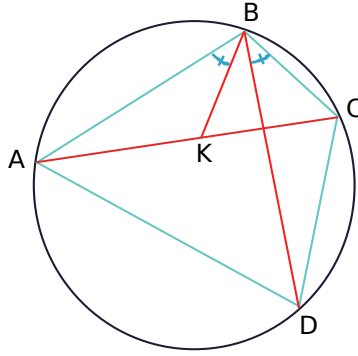


Figura 2.24: Teorema de Ptolomeo

Demostración Sea K en \overline{AC} tal que $\angle ABK = \angle DBC$. Los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BDC$ son iguales porque abarcan la cuerda \overline{BC} . Luego, $\triangle BAK \sim \triangle BDC$, por lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BA}}{\overline{AK}} &= \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \\ \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{DC} &= \overline{BD} \cdot \overline{AK} \end{aligned}$$

De igual forma, $\triangle BCK \sim \triangle BDA$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}}{\overline{CK}} &= \frac{\overline{BD}}{\overline{DA}} \\ \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{DA} &= \overline{BD} \cdot \overline{CK} \end{aligned}$$

Sumando ambas igualdades, se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{BA} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} &= \overline{BD} \cdot \overline{AK} + \overline{BD} \cdot \overline{CK} \\ \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} &= \overline{BD} \cdot (\overline{AK} + \overline{CK}) \\ \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} &= \overline{BD} \cdot \overline{AC} \end{aligned}$$

■

II.1.7 Generalizando el Teorema de Ptolomeo: Teorema de Casey

John Casey respetado geómetra irlandés, nace en 1820 y muere en 1891. Famoso por su teorema que generaliza el teorema de Ptolomeo, contribuyó con muchas pruebas y perspectivas novedosas de la geometría euclidiana. Él junto con Émile Lemoine son considerados como co-fundadores de la geometría moderna del círculo y del triángulo.

Lema 2.8 Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos circunferencias tangentes interiormente a \mathcal{C} (una circunferencia con centro en O y radio r), cada una de las cuales tiene centro en O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 respectivamente. Sea A el punto de tangencia de \mathcal{C}_1 con \mathcal{C} y B el de \mathcal{C}_2 con \mathcal{C} . Entonces la longitud t de la tangente común exterior a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 es

$$t = \frac{AB}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}$$

■

Teorema 2.16 (Casey) Sea \mathcal{C} una circunferencia y sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y \mathcal{C}_4 cuatro circunferencias, que no se cortan entre sí, tangentes por dentro a \mathcal{C} . Denotemos por t_{ij} la longitud de la tangente exterior común de los círculos \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_j . Entonces se cumple que:

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$$

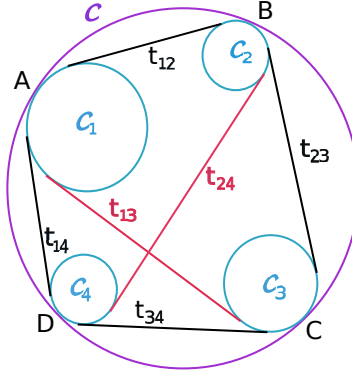


Figura 2.26: Teorema de Casey

Demostración Sean A, B, C y D los puntos de tangencia de las circunferencias $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y \mathcal{C}_4 con \mathcal{C} respectivamente. Y, por el lema 2.8, tenemos que:

$$t_{12} = \frac{\overline{AB}}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}$$

$$t_{34} = \frac{\overline{CD}}{r} \sqrt{(r - r_3)(r - r_4)}$$

$$t_{14} = \frac{\overline{AD}}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_4)}$$

$$t_{23} = \frac{\overline{BC}}{r} \sqrt{(r - r_2)(r - r_3)}$$

Entonces,

$$t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{r^2} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{r^2} \right) \sqrt{(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4)}$$

$$\Rightarrow t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}}{r^2} \right) \sqrt{(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4)}$$

Pero como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, cumple el teorema de Ptolomeo. Así,

$$t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = \left(\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{r^2} \right) \sqrt{(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4)}$$

$$\Rightarrow t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = \left(\frac{\overline{AC}}{r} \sqrt{(r - r_1)(r - r_3)} \right) \cdot \left(\frac{\overline{BD}}{r} \sqrt{(r - r_2)(r - r_4)} \right)$$

Lo que nuevamente por el lema 2.8 nos da lo que queríamos demostrar:

$$\Rightarrow t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = t_{13}t_{24}$$

■

II.1.8 Teorema de Feuerbach

Karl Feuerbach, hermano del famoso filósofo Ludwig Feuerbach, nació en Jena, Alemania, el 30 de mayo de 1800, en una familia protestante. Fue un estudiante brillante de la Universidad de Erlangen, y después de Friburgo, obtuvo a los 22 años su doctorado y comenzó a enseñar matemáticas en el Gymnasium de Erlangen. Ese mismo año publica en Nuremberg un librito de 62 páginas de título largo y difuso en el que presenta y demuestra analíticamente "el más bello teorema de geometría elemental descubierto desde la época de Euclides", según el historiador J. L. Coolidge.

En 1824, Feuerbach es detenido y encarcelado durante un año, junto con 19 estudiantes, en Munich, por sus posiciones políticas. Considerándose responsable de todo, sufre una depresión e intenta suicidarse en dos ocasiones, para salvar a sus compañeros, primero cortándose las venas y después tirándose por una ventana. Tras su liberación, vuelve a vivir con su familia y gracias a una intervención del rey consigue de nuevo un puesto de profesor en Hof, que deberá abandonar como consecuencia de una nueva depresión. En 1828, mejorada su salud, enseña de nuevo en Erlangen, hasta el día en que, desenvainando una espada en clase, amenaza con cortar la cabeza de los alumnos que no sepan resolver la ecuación que ha escrito en el pizarrón. Abandonando la enseñanza, vivirá recluido los seis últimos años de su corta vida dejándose crecer el pelo, la barba y las uñas, contemplando las pinturas de su sobrino, el pintor Anselmo Feuerbach. Este profesor impulsivo y perturbado murió en Erlangen, el 12 de marzo de 1834.

Lema 2.9 *Sea ABC un triángulo, y sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' el incírculo y excírculo respectivos del lado \overline{BC} del triángulo con P y Q como puntos de tangencia. Entonces*

$$\overline{BQ} = \overline{CP}$$

Demostración Denotemos por a , b y c los lados \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} del $\triangle ABC$. Sea s su semiperímetro, es decir, $\frac{a+b+c}{2}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{AG_1} &= \overline{AG_2} \\ \overline{BG_1} &= \overline{BQ} \\ \overline{QC} &= \overline{G_2C} \\ \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BQ} &= \overline{QC} + \overline{CA} = s \end{aligned}$$

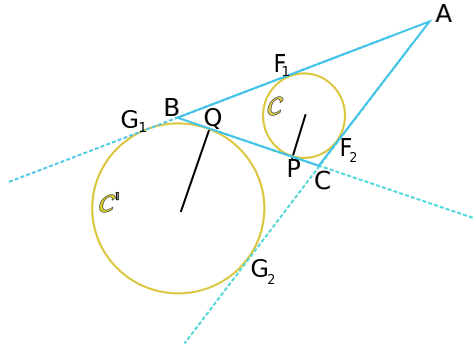


Figura 2.27: Lema 2.9

$$\Rightarrow \overline{QC} = \overline{AB} + \overline{BQ} - \overline{CA} = s - b$$

También, puesto que

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{BP} &= s \\ \Rightarrow \overline{BP} &= s - \overline{AC} = s - b \end{aligned}$$

Luego,

$$\overline{QC} = \overline{BP}$$

Restando \overline{QP} en ambos lados obtenemos:

$$\begin{aligned} \overline{QC} - \overline{QP} &= \overline{BP} - \overline{QP} \\ \Rightarrow \overline{QC} - \overline{QP} &= \overline{BP} - \overline{QP} \\ \Rightarrow \overline{PC} &= \overline{BQ} \end{aligned}$$

■

Lema 2.10 *En un triángulo, los puntos de corte de las bisectrices interna y externa de un ángulo con el lado opuesto y los vértices que forman dicho lado son conjugados armónicos.*

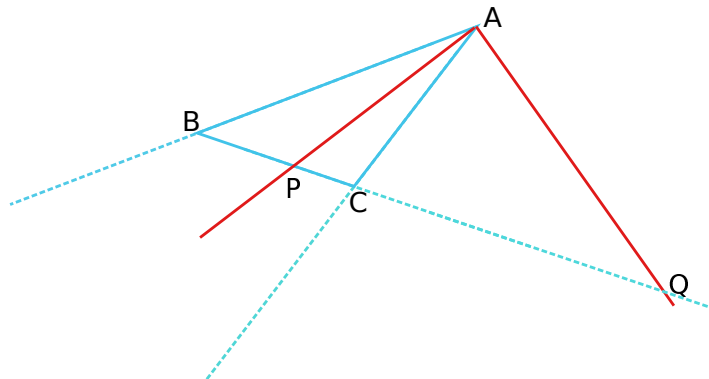


Figura 2.28: Lema 2.10

Demostración Sean P y Q los puntos de corte de las bisectrices interna y externa del ángulo A con el lado \overline{BC} . Sabemos que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{c}{b} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}$$

de donde B, P, C y Q son conjugados armónicos. ■

Lema 2.11 Dado un $\triangle ABC$, la recta tangente a la circunferencia de los nueve puntos \mathcal{C} por el punto medio de \overline{BC} , A' , corta a las rectas AB y AC en P y Q respectivamente. Entonces $\triangle AQP \sim \triangle ABC$

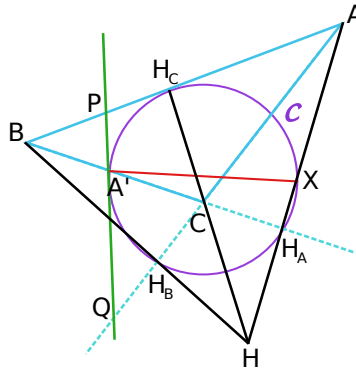


Figura 2.29: Lema 2.11

Demostración Sean X el punto medio del segmento que une el ortocentro H del $\triangle ABC$ con el vértice A . Sean H_a, H_b y H_c los pies de las alturas del $\triangle ABC$ desde A, B y C respectivamente. Como $\angle XH_aA'$ es recto y los tres puntos están en \mathcal{C} , $\overline{XA'}$ es diámetro, y así, $XA' \perp PQ$ (PQ tangente). Sea O el circuncentro del $\triangle ABC$. Es sabido que $AO \perp H_cH_b$. Y como X es punto medio del arco H_cH_b , se tiene que $XA' \perp H_cH_b$. Luego

$$H_cH_b \parallel PQ \tag{2.24}$$

El cuadrilátero H_cH_bCB es cíclico porque los ángulos $\angle BH_cC$ y $\angle BH_bC$ son rectos y abarcan a BC . Entonces,

$$\angle H_cBC + \angle CH_bH_c = 180$$

Pero también como C, H_b y A son colineales,

$$\angle CH_bH_c + \angle H_cH_bA = 180$$

$$\Rightarrow \angle H_cBC = \angle H_cH_bA$$

Luego, $\triangle ABC \sim \triangle AH_bH_c$ y finalmente, por (2.24)

$$\triangle ABC \sim \triangle AQP$$

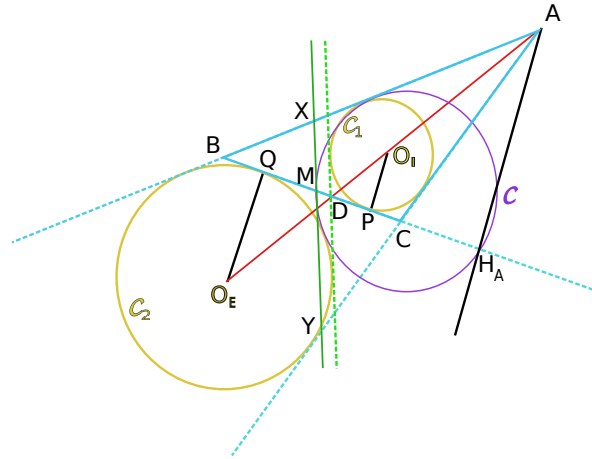


Figura 2.30: Teorema de Feuerbach

■

Teorema 2.17 (Feuerbach) *En un triángulo, la circunferencia de los nueve puntos es tangente al incírculo y a los tres excírculos.*

Demostración Sea ABC un triángulo, y sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 el incírculo y el excírculo de dicho triángulo, correspondiente al lado \overline{BC} , con centros O_I y O_E respectivamente. Sean también P y Q sus respectivos puntos de tangencia con la recta BC . Sean M , D y H_A los pies de la mediana, la bisectriz y la altura respectivamente desde el vértice A .

Se desea demostrar que la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$, \mathcal{C} es tangente a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , entonces invertiremos las figuras de tal forma que se pueda ver más claramente la tangencia en las figuras inversas.

Sabemos por el lema 2.9, que $\overline{BQ} = \overline{CP}$ lo cual implica que $\overline{MQ} = \overline{MP}$. Sea \mathcal{C}_i la circunferencia con centro en M y radio \overline{MP} , la cual es ortogonal a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , debido a que la recta $MP \perp O_I P$ y la recta $MQ \perp O_E Q$. Al invertir sobre \mathcal{C}_i , \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 se mantienen invariantes (teorema 2.10), y \mathcal{C} , se transforma en una recta l , ya que dicha circunferencia pasa por el centro de inversión M (inverso del teorema 2.9). Ahora demostremos que la recta l es tangente a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 .

Sabemos que las rectas BO_I y BO_E son las bisectrices interna y externa del $\angle ABC$, de donde se tiene que los puntos O_E , D , O_I y A son conjugados armónicos (lema 2.10). Además, como las rectas $O_E Q$, $O_I P$ y AH_A son perpendiculares al lado \overline{BC} , los puntos Q , D , P y H también son conjugados armónicos. Entonces D y H_A son inversos con respecto a \mathcal{C}_i . Luego, l pasa por D .

Por el lema 2.7, se tiene que la recta l debe ser paralela a la tangente en M a \mathcal{C} . Sean X y Y los puntos de corte de dicha recta con las rectas AB y AC respectivamente. Sabemos también por el lema 2.11 que $\triangle A Y X \sim \triangle ABC$, por lo cual el triángulo formado por las rectas l , AB y AC también es semejante al $\triangle ABC$, es decir, el ángulo entre las rectas l y AC es B . Como l pasa por D , debe ser la reflexión de la recta BC sobre la bisectriz AD , que es tangente a \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 .

Invirtiendo nuevamente sobre \mathcal{C}_i , l se transforma en \mathcal{C} y las circunferencias \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 se invierten sobre ellas mismas, y así concluimos que la circunferencia de los nueve puntos es tangente a \mathcal{C}_1 y a \mathcal{C}_2 . ■

II.1.9 Teorema de Thébault

Victor Thébault vivió del año 1882 al 1960. Fue un matemático francés, de quien se desconoce casi toda su vida. Entre los únicos datos que se tienen de él, se encuentran sus tres problemas propuestos en la geometría, los que le dieron la fama que tiene hoy en día.

Teorema 2.18 (Primer problema de Thébault) *Dado un paralelogramo $ABCD$, trazamos cuadrados sobre sus lados CDX_1Y_1 , BCX_2Y_2 , ABX_3Y_3 y DAX_4Y_4 con centros en O_1 , O_2 , O_3 y O_4 respectivamente. Entonces el cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$ es un cuadrado.*

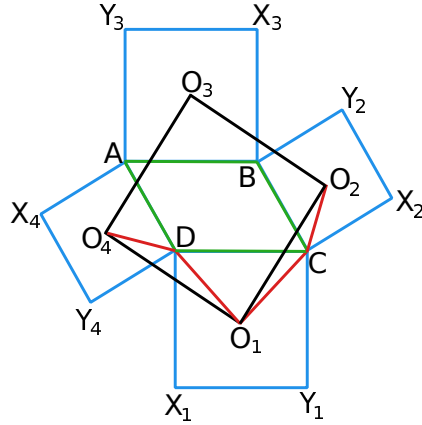


Figura 2.31: Primer problema de Thébault

Demostración Como $\overline{AD} = \overline{BC}$, $DAX_4Y_4 \cong BCX_2Y_2$

$$\Rightarrow \overline{O_4D} = \overline{CO_2} \quad (2.25)$$

Además en el cuadrado CDX_1Y_1 , tenemos que

$$\overline{DO_1} = \overline{O_1C} \quad (2.26)$$

Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} \perp \overline{Y_4D}$ y $\overline{BC} \perp \overline{CX_2}$ se tiene que $\overline{Y_4D} \parallel \overline{CX_2}$. Considerando la transversal DC que las corta, los ángulos internos son iguales

$$\angle Y_4DC = \angle DCX_2 \quad (2.27)$$

Pero $\angle O_4DY_4 = 45 = \angle CDO_1$ y $\angle O_2CX_2 = 45 = \angle DCO_1$ entonces

$$\begin{aligned} \angle Y_4DC &= \angle Y_4DO_1 + \angle O_1DC \\ &= \angle Y_4DO_1 + \angle O_4DY_4 \\ &= \angle O_4DY_4 + \angle Y_4DO_1 \\ &= \angle O_4DO_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\angle DCX_2 &= \angle DCO_2 + \angle O_2CX_2 \\ &= \angle DCO_2 + \angle DCO_1 \\ &= \angle O_1CO_2\end{aligned}$$

Luego, por la ecuación (2.27) tenemos que:

$$\angle O_4DO_1 = \angle O_1CO_2 \quad (2.28)$$

Juntando las ecuaciones (2.25), (2.26) y (2.28), concluimos que

$$\triangle O_1CO_2 \cong \triangle O_1DO_4$$

Entonces, $\overline{O_1O_2} = \overline{O_4O_1} = d$ y

$$\angle O_4O_1D = \angle O_2O_1C \quad (2.29)$$

Análogamente, $\overline{O_2O_3} = \overline{O_3O_4} = d$ Además, $\angle DO_1C = 90$

$$\begin{aligned}\angle O_4O_1O_2 &= \angle O_4O_1D + \angle DO_1O_2 \\ &= \angle O_2O_1C + \angle DO_1O_2 \quad \text{por (2.29)} \\ &= \angle DO_1C \\ &= 90\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\angle O_1O_2O_3 &= 90 \\ \angle O_2O_3O_4 &= 90 \\ \angle O_3O_4O_1 &= 90\end{aligned}$$

$\therefore O_1O_2O_3O_4$ es un cuadrado. ■

Teorema 2.19 (Segundo problema de Thébault) *Dado un cuadrado ABCD, construimos sobre dos de sus lados adyacentes triángulos equiláteros ($\triangle ADE$ y $\triangle DCF$). Entonces el $\triangle EFB$ es equilátero.*

Demostración Como $\triangle ADE$ y $\triangle DCF$ son equiláteros, $\overline{CF} = \overline{DF} = \overline{DE} = \overline{CB}$. Además,

$$\begin{aligned}\angle BCF &= \angle BCD + \angle DCF \\ &= 90 + 60 \\ &= 150\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle EDF &= 360 - \angle EDA - \angle ADC - \angle CDF \\ &= 360 - 60 - 90 - 60 \\ &= 150\end{aligned}$$

Luego, $\triangle EFD \cong \triangle BFC$ y con ésto, $\overline{EF} = \overline{FB}$ Análogamente, $\overline{FB} = \overline{BE}$.

$\therefore \triangle BEF$ es equilátero.

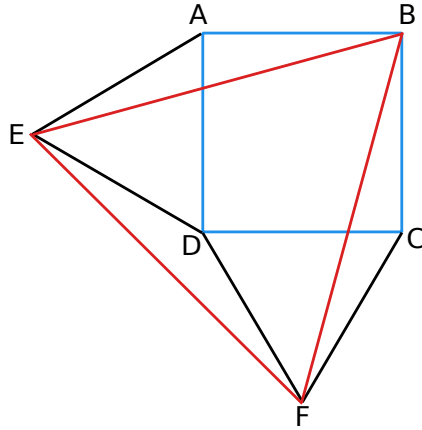


Figura 2.32: Segundo problema de Thébault

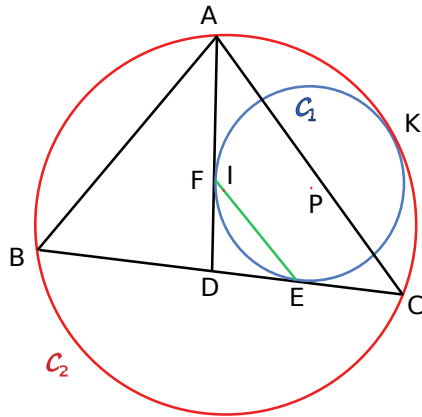


Figura 2.33: Lema 2.12

■

Lema 2.12 Sea D un punto en el lado \overline{BC} de un $\triangle ABC$. Trazamos la recta AD . Sea P el centro de la circunferencia \mathcal{C}_1 , la cual toca a la recta DC y a la recta DA en E y F respectivamente, y a la circunferencia circunscrita \mathcal{C}_2 del $\triangle ABC$ en K . Entonces la cuerda que une los puntos de contacto E y F , pasa por el incentro del $\triangle ABC$.

Demostración Sean M y N los puntos de intersección de las rectas KE y KF con \mathcal{C}_2 y sea J el punto de intersección de las rectas AM y EF . KE es la bisectriz interna del $\angle BKC$. Entonces, M es el punto medio del arco BC que no contiene a K . Y así, la recta AM es la bisectriz interna del $\angle ABC$. Luego, la recta AM pasa por I .

Como \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son tangentes en K , se tiene que las rectas EF y MN son paralelas. Nos fijamos en \mathcal{C}_2 , A , K , las rectas AJM y KFN y en las rectas paralelas MN y JF . Se puede deducir fácilmente que los puntos A , K , F y J son concíclicos. Por el teorema de Miquel aplicado al $\triangle AFJ$, considerando los puntos F en la recta AF , E en la recta FJ , y J en la recta AJ , tenemos que la circunferencia \mathcal{C}_4 , que pasa por E , J y K , es tangente a AJ en J . La circunferencia \mathcal{C}_5 , con centro en M y que pasa por B , también pasa por I . Esta

Demostración Tenemos que la recta $QG \perp BC$, $BC \perp PE$, entonces, la recta $QG \parallel PE$. Por el lema 2.12, las rectas GF y EH pasan por I . Los triángulos $\triangle DFG$ y $\triangle QGF$ son isósceles en D y Q respectivamente, entonces se cumplen dos cosas, la recta DQ en la mediatriz de \overline{GF} y es la bisectriz interna del ángulo $\angle GDF$. Análogamente, la recta DP en la mediatriz de \overline{EH} y es la bisectriz interna del ángulo $\angle EDH$. Como los ángulos $\angle GDF$ y $\angle EDH$ son suplementarios, sus bisectrices son perpendiculares. Luego, la recta $DQ \perp DP$. Así, la recta $GF \parallel DP$ y la recta $DQ \parallel EH$. Usando el recíproco del teorema de Pappus en el hexágono $PEIGQD$, podemos concluir que P, I y Q son colineales. ■

II.1.10 Teorema de Malfatti

Giovanni Francesco Malfatti, conocido también como Gian Francesco fue un matemático italiano que vivió del 26 de septiembre de 1731 al 9 de octubre de 1807. Estudió en el colegio de San Francisco Saverio en Boloña. En el año de 1754, se fue a vivir a Ferrara, donde se volvió profesor de la Universidad. Fue uno de los fundadores de la Sociedad Italiana de la Ciencia en 1782.

Malfatti conjeturó que tres circunferencias tangentes entre sí, se podían inscribir en un triángulo, siendo cada una tangente a dos lados del mismo. Hoy en día, dichos círculos, reciben el nombre de círculos de Malfatti debido a su trabajo.

Lema 2.13 Sea un $\triangle ABC$, con semiperímetro s , su circunferencia inscrita con centro en I y radio r , tangente al lado \overline{BC} en X . Sea también la circunferencia excrita con centro en I_e y radio r_e , tangente al lado \overline{BC} en X_e . Llamemos a, b y c a los lados \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} del triángulo. Entonces, el radio de la circunferencia inscrita se puede calcular como

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

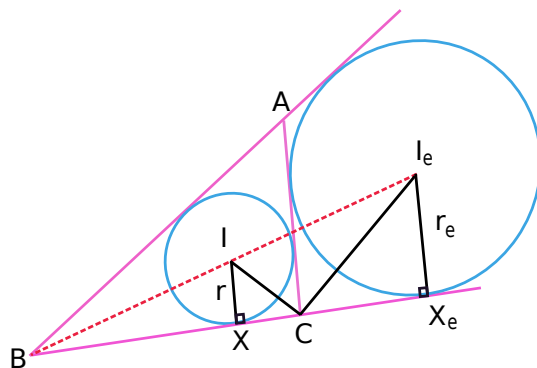


Figura 2.36: Lema 2.13

Demostración Como podemos observar en la figura 2.36, $\triangle BIX \sim \triangle BI_eX_e$, luego

$$\frac{r}{r_e} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BX_e}} = \frac{s-b}{s} \quad (2.30)$$

Además, la recta CI es bisectriz interna del $\angle BCA$ y la recta CI_e es bisectriz externa del mismo ángulo, entonces sabemos que $\angle ICI_e = 90$. Como también:

$$\begin{aligned} \angle XCX_e &= \angle XCI + \angle ICI_e + \angle I_eCX_e = 180 \\ \Rightarrow \angle XCI + 90 + \angle I_eCX_e &= 180 \\ \Rightarrow \angle XCI + \angle I_eCX_e &= 90 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pero en el $\triangle CX_eI_e$, tenemos que

$$\begin{aligned} \angle X_eI_eC + \angle CX_eI_e + \angle I_eCX_e &= 180 \\ \Rightarrow \angle X_eI_eC + 90 + \angle I_eCX_e &= 180 \\ \Rightarrow \angle X_eI_eC + \angle I_eCX_e &= 90 \end{aligned}$$

lo que junto con la ecuación (2.31) nos implica que

$$\angle X_eI_eC = \angle XCI$$

Luego, $\triangle IXC \sim \triangle CX_eI_e$ y así,

$$\frac{r}{s-c} = \frac{s-a}{r_e} \Leftrightarrow r_e = \frac{(s-c)(s-a)}{r}$$

Sustituyendo este último valor en la ecuación (2.30), tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_e} &= \frac{s-b}{s} \\ \Rightarrow r &= r_e \left(\frac{s-b}{s} \right) \\ \Rightarrow r &= \left(\frac{(s-c)(s-a)}{r} \right) \left(\frac{s-b}{s} \right) \\ \Rightarrow r^2 &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \end{aligned}$$

■

Lema 2.14 Dado un triángulo inscrito en una circunferencia de diámetro uno, la medida de sus lados será el seno del ángulo opuesto a cada uno.

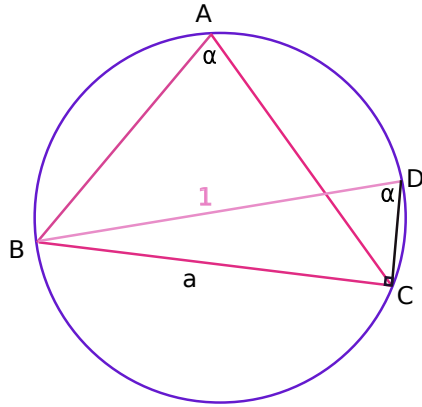


Figura 2.37: Lema 2.14

Demostración Sea $\triangle ABC$ un triángulo inscrito en una circunferencia \mathcal{C} de diámetro uno. Llamemos α al ángulo en A y a al lado \overline{BC} del triángulo. Sea \overline{BD} un diámetro de \mathcal{C} . Tenemos que $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$ porque abarcan la misma cuerda BC y además, $\angle BCD = 90$ entonces por el teorema de Pitágoras en el $\triangle BDC$, se tiene que

$$\sin \alpha = \frac{a}{\overline{BD}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = a$$

De forma análoga se obtienen los lados restantes. ■

Teorema 2.21 (Problema de Malfatti) Dado un $\triangle ABC$, inscribir en él tres circunferencias tangentes entre sí y cada una de ellas tangentes a dos lados del triángulo.

Demostración Se desea trazar los círculos que Malfatti propone. Para ello veremos primero las condiciones necesarias para su existencia, concluyendo así con una construcción que nos propone Heinrich Dörrie en su libro

Sean a, b y c los lados \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} de un $\triangle ABC$ dado. Sea s su semiperímetro, es decir, $s = \frac{a+b+c}{2}$. Sean \mathcal{P} , \mathcal{Q} y \mathcal{R} los tres círculos de Malfatti buscados. Denotemos por P, Q y R a sus centros y por p, q y r a sus radios respectivos.

Llamemos U y V a los puntos de tangencia de \mathcal{P} y \mathcal{Q} con el lado \overline{AB} del triángulo, y t su distancia, es decir $t = \overline{UV}$. Sean u, v y w la distancia de los vértices A, B y C a los puntos de tangencia de \mathcal{P}, \mathcal{Q} y \mathcal{R} respectivamente.

Sea \mathcal{J} la circunferencia inscrita del $\triangle ABC$. Denotemos por J y j su centro y radio respectivos. Sean a_1, b_1 y c_1 sus tangentes desde los vértices A, B y C como se muestra en la figura anterior. Como

$$\begin{aligned} b_1 + c_1 &= a \\ c_1 + a_1 &= b \\ a_1 + b_1 &= c \end{aligned}$$

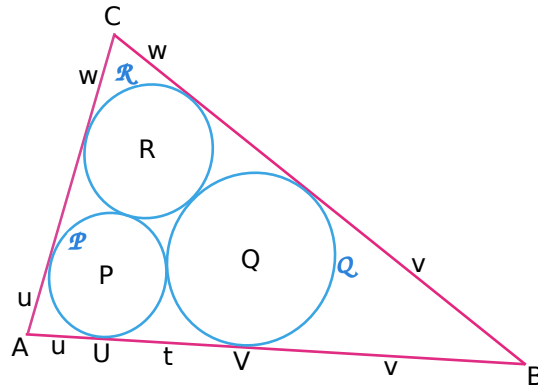


Figura 2.38: Demostración del problema de Malfatti

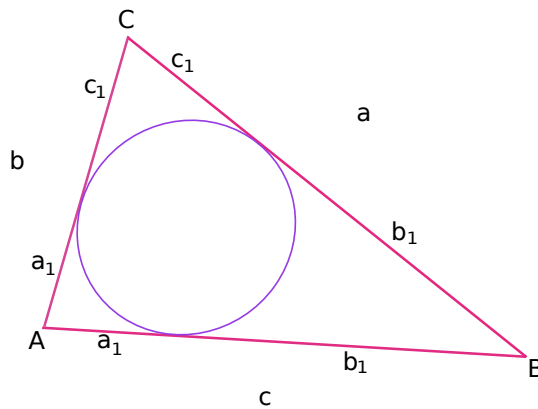


Figura 2.39: Demostración del problema de Malfatti

tenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= s - a \\ b_1 &= s - b \\ c_1 &= s - c \end{aligned}$$

Además, sabemos que P y J están sobre la bisectriz del ángulo en A ya que \mathcal{P} y \mathcal{J} son tangentes a los lados AB y CA del $\triangle ABC$, y por triángulos semejantes, tenemos que

$$\frac{p}{j} = \frac{u}{a_1} \Rightarrow p = \frac{j}{a_1} \cdot u \quad (2.32)$$

Análogamente,

$$q = \frac{j}{b_1} \cdot v \quad (2.33)$$

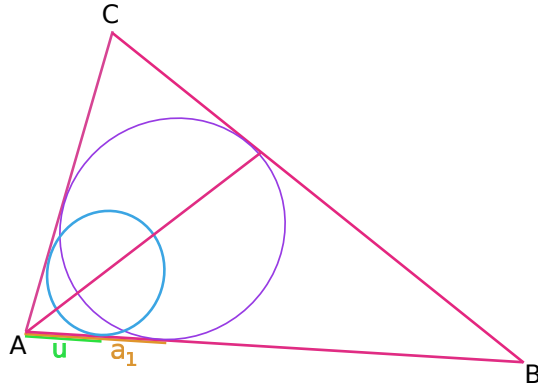


Figura 2.40: Demostración del problema de Malfatti

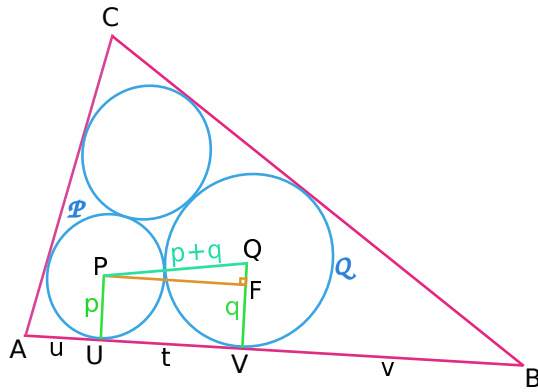


Figura 2.41: Demostración del problema de Malfatti

Sea F en \overline{QV} tal que $\overline{PF} \perp \overline{QV}$. Así, $\overline{PF} = t$. Por el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ}^2 &= \overline{PF}^2 + \overline{FQ}^2 \\
 \Rightarrow (p+q)^2 &= t^2 + (p-q)^2 \\
 \Rightarrow t^2 &= (p+q)^2 - (p-q)^2 \\
 \Rightarrow t^2 &= p^2 + 2pq + q^2 - (p^2 - 2pq + q^2) \\
 \Rightarrow t^2 &= p^2 + 2pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2 \\
 \Rightarrow t^2 &= 4pq \\
 \Rightarrow t &= 2\sqrt{pq} \\
 \Rightarrow t &= 2\sqrt{\left(\frac{j}{a_1} \cdot u\right) \left(\frac{j}{b_1} \cdot v\right)} \quad (\text{sustituyendo las ecuaciones 2.32 y 2.33}) \\
 \Rightarrow t &= 2\sqrt{uv} \sqrt{\frac{j^2}{a_1 b_1}} \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

Ahora, por el lema 2.13, sabemos que

$$j^2 = \frac{a_1 b_1 c_1}{s}$$

lo que al sustituir en la ecuación (2.34) nos da

$$t = 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{a_1 b_1 c_1}{s}}$$

$$\Rightarrow t = 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{c_1}{s}}$$

Pero el lado \overline{AB} del triángulo está formado por tres segmentos, entonces:

$$\begin{aligned} c &= \overline{AU} + \overline{UV} + \overline{VB} \\ &= u + t + v \\ &= u + v + 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{c_1}{s}} \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo camino con los dos lados restantes del $\triangle ABC$, obtenemos:

$$a = v + w + 2\sqrt{vw}\sqrt{\frac{a_1}{s}}$$

$$b = u + w + 2\sqrt{uw}\sqrt{\frac{b_1}{s}}$$

Para simplificar un poco los cálculos, imaginemos que el semiperímetro del $\triangle ABC$ es uno. Entonces obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$a = v + w + 2\sqrt{vw}\sqrt{a_1} \quad (2.35)$$

$$b = u + w + 2\sqrt{uw}\sqrt{b_1} \quad (2.36)$$

$$c = u + v + 2\sqrt{uv}\sqrt{c_1} \quad (2.37)$$

Ahora, tomando valores adecuados, podemos ver a a, b, c, u, v, w como senos cuadrados de seis ángulos agudos, $\lambda, \mu, \nu, \psi, \varphi, \chi$:

$$a = \sin^2 \lambda$$

$$b = \sin^2 \mu$$

$$c = \sin^2 \nu$$

$$u = \sin^2 \psi$$

$$v = \sin^2 \varphi$$

$$w = \sin^2 \chi$$

Además, como

$$a_1 + a = 1$$

$$b_1 + b = 1$$

$$c_1 + c = 1$$

tenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos^2 \lambda \\ b_1 &= \cos^2 \mu \\ c_1 &= \cos^2 \nu \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.35), (2.36) y (2.37) tenemos:

$$\begin{aligned} \sin^2 \lambda &= \sin^2 \varphi + \sin^2 \chi + 2 \sin \varphi \sin \chi \cos \lambda \\ \sin^2 \mu &= \sin^2 \chi + \sin^2 \psi + 2 \sin \chi \sin \psi \cos \mu \\ \sin^2 \nu &= \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi + 2 \sin \psi \sin \varphi \cos \nu \end{aligned} \quad (2.38)$$

Tomando, por ejemplo, la ecuación (2.38) observamos que es la ley de cosenos aplicada a un triángulo, cuyos lados miden $\sin \lambda = \sin(180 - \lambda)$, $\sin \varphi$, $\sin \chi$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que dicho triángulo está inscrito en una circunferencia de diámetro uno, y así, por el lema anterior, tenemos que los ángulos de dichos triángulos son $180 - \lambda$, φ y χ . Luego,

$$\varphi + \chi = \lambda$$

Análogamente, tenemos

$$\chi + \psi = \mu$$

$$\psi + \varphi = \nu$$

Si llamamos $\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}$, las tres últimas igualdades se convierten en

$$\begin{aligned} \psi &= \sigma - \lambda \\ \varphi &= \sigma - \mu \\ \chi &= \sigma - \nu \end{aligned} \quad (2.39)$$

Construcción: Finalmente, y después de muchos cálculos, podemos dar una construcción que nos determina los círculos de Malfatti para un triángulo dado.

1. Dibujemos tres ángulos, λ , μ y ν cuyos senos sean iguales a los lados del triángulo dado (donde el semiperímetro del triángulo debe ser uno).

2. Dibujemos la semisuma de los ángulos λ , μ y ν

$$\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}$$

así como los tres nuevos ángulos

$$\psi = \sigma - \lambda$$

$$\varphi = \sigma - \mu$$

$$\chi = \sigma - \nu$$

3. Tracemos el seno cuadrado de los tres ángulos ψ , φ y χ . Éstas serán las tangentes desde los vértices del triángulo a los tres círculos de Malfatti

■

II.1.11 Circunferencia de Apolonio

Si entre los matemáticos griegos Euclides representa el maestro sistematizador, y Arquímedes el genio investigador, el tercer talento del helenismo, Apolonio de Perga, personifica el virtuosismo geométrico.

Apolonio polarizó su actividad investigadora en una dirección casi monotemática con una sagacidad tan magistral que sus investigaciones sobre cónicas, donde aparecen sus bellísimos descubrimientos sobre ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, rectas máximas y mínimas, etc., le convierten en el primer especialista que registra la Historia de la Geometría.

La mayor parte de los exiguos datos conocidos sobre la vida de Apolonio provienen de unas pocas noticias que el propio autor reseña en las introducciones a algunos de los libros de su magna obra Las Cónicas. Se sabe que nació hacia el año 262 a.C., en Perga; estudió en el Museo de Alejandría con los sucesores de Euclides; y residió tanto en la propia capital Alejandrina como en Éfeso y Pérgamo, ciudad donde murió hacia el 190 a.C.

Teorema 2.22 (Circunferencia de Apolonio) *Si A, B , son dos puntos fijos y $\frac{p}{q}$ es una razón fija, el lugar geométrico de los puntos P que satisfacen $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q}$ es una circunferencia con centro en la recta AB .*

Demostración Sabemos que sobre la recta AB hay exactamente dos puntos del lugar geométrico buscado (si $\frac{p}{q}$ no es 1). Por A y B trazamos segmentos paralelos $\overline{RS}, \overline{BT}$ con $\overline{BT} = q$ y $\overline{RA} = \overline{AS} = p$. Sean C y C' las intersecciones de \overline{TS} y \overline{TR} con la recta AB .

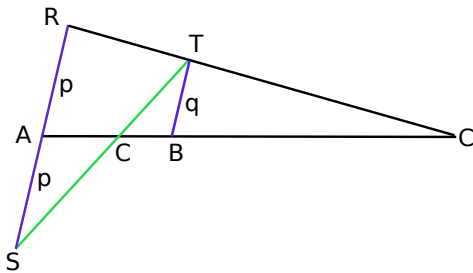


Figura 2.42: Demostración de la circunferencia de Apolonio

Se tiene que $\triangle ASC \sim \triangle BTC$, entonces $\frac{AC}{CB} = \frac{AS}{BT} = \frac{p}{q}$. También se sabe que $\triangle AC'R \sim \triangle BC'T$, así, $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AR}{TB} = \frac{p}{q}$. Luego, C y C' pertenecen al lugar geométrico. Supóngase que P es un punto en el lugar geométrico, entonces, $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q} = \frac{AC}{CB}$. Con ello, la recta PC es la bisectriz interna del $\angle APB$, y como también $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q} = \frac{AC'}{C'B}$, se tiene que la recta PC' es la bisectriz externa del mismo ángulo. Y como sabemos que las bisectrices interna y externa de un ángulo forman un ángulo de 90° , se tiene que $\angle CPC' = 90^\circ$; lo que nos garantiza que P está en la circunferencia de diámetro $\overline{CC'}$.

Falta probar que si, consideramos un punto P sobre la circunferencia de diámetro $\overline{CC'}$, P está en el lugar geométrico. Trazamos paralelas a las rectas PC y PC' por B y llamamos E y F a su intersección con la recta AP respectivamente.

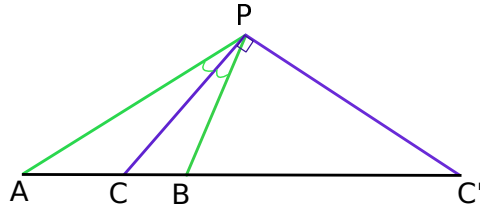


Figura 2.43: Demostración de la circunferencia de Apolonio

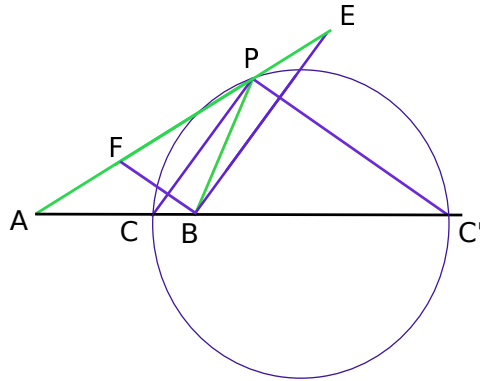


Figura 2.44: Demostración de la circunferencia de Apolonio

Notemos que $\triangle ACP \sim \triangle ABE$, entonces $\frac{\overline{AP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{p}{q}$. De igual forma $\triangle ABF \sim \triangle AC'P$ implica que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{p}{q}$. Si igualamos ambas, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\overline{PE}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\overline{PE}} &= \frac{1}{\overline{PF}} \\ \overline{PE} &= \overline{PF} \end{aligned}$$

es decir, P es el punto medio de \overline{EF} . Además, el $\triangle EBF$ es rectángulo, entonces la circunferencia con centro en P y radio \overline{PE} pasa por B ; y así, $\overline{PE} = \overline{PB}$. Luego, $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PE}} = \frac{p}{q}$.

$\therefore P$ está en el lugar geométrico. ■

II.1.12 Teorema de los siete círculos

Antes de enunciar dicho teorema, demostraremos dos resultados que nos serán de fundamental importancia para su demostración.

Teorema 2.23 (Ceva para cuerdas) Sean A, B, C, D, E y F , seis puntos consecutivos sobre una circunferencia. Las cuerdas \overline{AD} , \overline{BE} y \overline{CF} concurren si y sólo si $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EF} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{FA}$

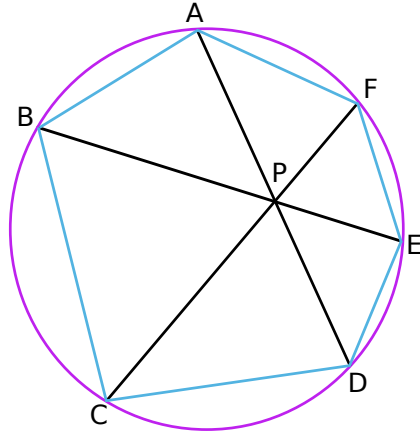


Figura 2.45: Teorema de Ceva para cuerdas

Demostración (i) Supóngase que \overline{AD} , \overline{BE} y \overline{CF} concurren en un punto P . Por semejanza de triángulos, obtenemos las siguientes proporciones:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} &= \frac{\overline{PA}}{\overline{PE}} \\ \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} &= \frac{\overline{PF}}{\overline{PB}} \\ \frac{\overline{CD}}{\overline{FA}} &= \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} \\ \frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} &= \frac{\overline{PB}}{\overline{PF}} \end{aligned}$$

que al multiplicarlas, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} &= \frac{\overline{PA}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PF}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} &= \frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{FA}} &= 1 \\ \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{CD} &= \overline{DE} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{FA} \end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar.

(ii) De forma inversa, supongamos que

$$\overline{AB} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{CD} = \overline{DE} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{FA} \quad (2.40)$$

Si nos fijamos en los arcos de circunferencia, ABC , CDE y EFA , al menos uno debe ser menor que el semicírculo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es el arco CDE . Sea P la intersección de las rectas BE y CF . Trazamos la recta AP , y llamamos X a la

intersección de la recta AP con la circunferencia (el cual debe caer en el arco CDE). Por la parte (i), tenemos que se cumple:

$$\overline{AB} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{CX} = \overline{XE} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{FA}$$

y así, junto con la ecuación (2.40) se tiene que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{XE}}$$

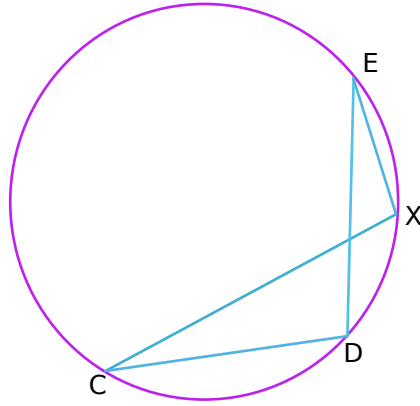


Figura 2.46: Demostración del teorema de Ceva para cuerdas

Si X no coincide con D , sin pérdida de generalidad, podemos decir que X está en el arco DE , así, $\overline{CD} < \overline{CX}$ y $\overline{DE} > \overline{XE}$. Por consecuencia, $\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} < \frac{\overline{CX}}{\overline{XE}}$ lo que contradice la igualdad anterior. Luego, X coincide con el punto D . ■

Lema 2.15 Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos circunferencias con radios p y q respectivamente, tangentes externamente, inscritas en una circunferencia \mathcal{C} de radio R , tangentes a ella en los puntos A y B respectivamente. Entonces

$$\frac{\overline{AB}}{4R^2} = \left(\frac{p}{R-p} \right) \cdot \left(\frac{q}{R-q} \right)$$

Demostración Sea M el punto de tangencia de \mathcal{P} y \mathcal{Q} . Extendemos \overline{AM} y \overline{BM} de tal forma que corten a \mathcal{C} en D y E respectivamente. Llamaremos P, Q y C a los centros de las circunferencias \mathcal{P}, \mathcal{Q} y \mathcal{C} respectivamente. Trazamos \overline{CD} y \overline{CE} . También dibujamos \overline{PQ} , segmento que debe pasar por M .

$$\overline{CA} = \overline{CD} \text{ implica que } \angle CAD = \angle CDA$$

$$\overline{PA} = \overline{PM} \text{ implica que } \angle PAM = \angle PMA$$

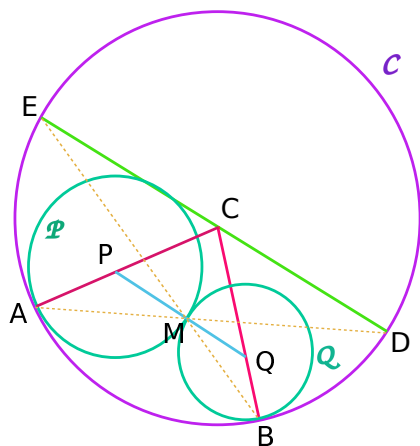


Figura 2.47: Lema 2.15

Luego, $\angle PMA = \angle CDA$ y así la recta $CD \parallel PM$. De la misma forma la recta $CE \parallel QM$. Pero como P , M y Q son colineales, entonces también D , C y E lo son. Note también que $\angle EBA = \angle EDA$ porque abarcan la misma cuerda \overline{EA} . Así, tenemos tres pares de triángulos semejantes:

$$\triangle MDE \sim \triangle MBA$$

$$\triangle BMQ \sim \triangle BEC$$

$$\triangle AMP \sim \triangle ADC$$

Entonces,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}}$$

Como $\overline{DE} = 2R$, tenemos que

$$\frac{\overline{AB}}{2R} \cdot \frac{\overline{AB}}{2R} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}} = \frac{p}{R-p} \cdot \frac{q}{R-q}$$

■

Teorema 2.24 (De los siete círculos) *Dados seis círculos, todos tangentes a un séptimo círculo, y cada uno tangente a dos de los otros círculos exteriormente, las tres líneas dibujadas entre los seis puntos de tangencia con el séptimo círculo, pasan por el mismo punto. Es decir, si llamamos P_i al punto de tangencia de la circunferencia \mathcal{C}_i con \mathcal{C}_7 , el séptimo círculo, tenemos que las rectas P_1P_4 , P_2P_5 y P_3P_6 son concurrentes.*

Demostración Denotemos por r_i al radio de la circunferencia \mathcal{C}_i . Sea $f(x) = \sqrt{\frac{x}{r_7-x}}$. Entonces, por el lema 2.15, se tiene que

$$\overline{P_iP_{i+1}} = 2r_7 f(r_i) f(r_{i+1})$$

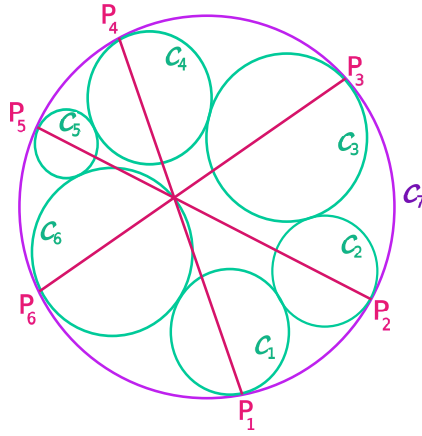


Figura 2.48: Teorema de los siete círculos

Así,

$$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_3P_4} \cdot \overline{P_5P_6} = 8r_7^3 f(r_1)f(r_2)f(r_3)f(r_4)f(r_5)f(r_6) = \overline{P_2P_3} \cdot \overline{P_4P_5} \cdot \overline{P_6P_1}$$

Por el teorema de Ceva para cuerdas, se tiene que las rectas P_1P_4 , P_2P_5 y P_3P_6 concurren.

■

III. GEOMETRÍA HIPERBÓLICA: DESCUBRIENDO UN NUEVO MUNDO

III.1. Modelos del plano hiperbólico

La geometría euclidiana está construida a partir de cinco postulados. Cuatro hechos con mucha estética, cuidado y esmero y un quinto largo y complicado, menos intuitivo. Éste es, sin duda, el que más controversia ha causado a lo largo de la historia. Fueron muchos los que intentaron deducirlo a partir de los otros cuatro, llegando siempre a falsas demostraciones. Creían que al suponer lo contrario del quinto postulado, deberían llegar necesariamente a una contradicción. Sin embargo, algunos de ellos, decidieron ver las cosas desde otra perspectiva. Pensaban, ¿qué pasaría si al suponer lo contrario del quinto postulado no se llegara a una contradicción?. Fue así, como a principios del siglo XIX, de manera independiente Nikolai Ivanovitch Lobachevsky y Janós Bolyai sentaron las bases de una nueva geometría, la hiperbólica. Obtenida a partir de negar y plurizar el quinto postulado de Euclides: “Son muchas las paralelas a una recta que pasan por un punto fuera de ella”. Lamentablemente, las ideas nuevas, radicales y diferentes siempre han sido mal vistas por la sociedad, tachadas de locura y excentricismo por parte de sus creadores. Incluso se dice que grandes matemáticos, como el propio Gauss tenían resultados en la geometría hiperbólica, pero por temor al descrédito no los hicieron públicos. Sin embargo Lobachevski y Bolyai estaban convencidos de su solidez lógica, y por tanto de su posible existencia, no así el resto del mundo. Fueron necesarias muchas décadas para que fuera reconocida por la comunidad matemática. El descubrimiento de modelos analíticos del plano hiperbólico, así como de modelos basados en la geometría euclidiana hicieron que dicha tarea se facilitara, pues si la geometría euclidiana era consistente, también lo sería la hiperbólica.

Dar un modelo consiste en definir y describir cuáles serán nuestros puntos, rectas, circunferencias, ángulos, etc., es decir dar el conjunto de conceptos que nos permitirán ilustrar y entender con mayor facilidad ideas que quizá sean muy abstractas. Posterior al desarrollo de los cimientos de la geometría hiperbólica y a su aceptación, grandes matemáticos distinguidos, se dieron a la tarea de encontrar un modelo que lograra representar el plano hiperbólico. Hoy en día, existen diversos de estos modelos, que se relacionan unos con otros mediante proyecciones biyectivas. De hecho, para cada dos de ellos, existe una función que nos permite utilizarlos indistintamente. A continuación se presentarán algunos que si bien no son los únicos, han sido las herramientas más frecuentes debido a lo descriptivos y accesibles que son.

III.1.1 Modelo proyectivo (Beltrami - Klein)

Eugenio Beltrami (1835 - 1900), fue un matemático italiano famoso por su trabajo en geometría diferencial y física matemática. En 1868 escribió un Ensayo sobre la interpretación

de la geometría no euclidiana en el que se presentaba un modelo de geometría no euclidiana bidimensional dentro de la geometría euclidiana tridimensional. La base del modelo es la superficie llamada pseudoesfera. En este modelo se satisfacen los primeros cuatro postulados de Euclides pero no el quinto. El modelo de Beltrami fue completado por Félix Klein en 1871.

Félix Klein (1849 - 1925), matemático alemán conocido principalmente por su trabajo en la teoría de grupos, teoría de funciones, geometría no euclidiana y otras conexiones entre la geometría y la teoría de grupos. Demostró que las geometrías métricas, euclidianas o no, constituyen casos particulares de la geometría proyectiva.

El modelo Klein-Beltrami, representa el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , como un disco abierto \mathcal{D} en el que las “rectas” son cuerdas euclidianas (segmentos abiertos) cuyos extremos están en la frontera de \mathcal{D} . A dicha frontera, se le llama “circunferencia al infinito” del plano hiperbólico, y a sus puntos “puntos al infinito”, aunque no sean parte como tal del plano hiperbólico.

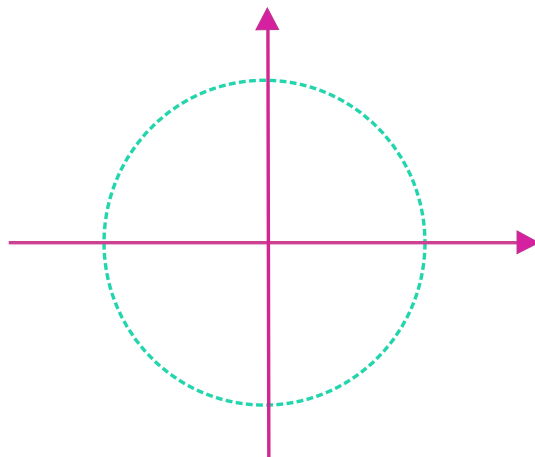


Figura 3.1: Modelo de Klein-Beltrami para la geometría hiperbólica

$$\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

Visto de esta manera, por cada par de puntos de \mathbb{H}^2 pasa una única línea recta. Ahora, en la figura 3.2, las rectas l y n no son paralelas debido a que se intersectan. Las rectas n y m son llamadas asintóticamente paralelas o simplemente paralelas, debido a que se intersectan en la frontera de \mathcal{D} , la cual por construcción no está incluida en el modelo. Las rectas l y m reciben el nombre de divergentemente paralelas o ultraparalelas, debido a que su intersección está por fuera del disco \mathcal{D} y de su frontera.

Tenemos entonces, tres tipos de haces de líneas en el plano hiperbólico: los concurrentes, los paralelos y los ultraparalelos que consisten en tomar las rectas hiperbólicas de haces proyectivos concurrentes; lo que los distingue es en dónde queda el punto de concurrencia.

Si P y Q son los dos extremos de la cuerda que pasa por los puntos X y Y en el

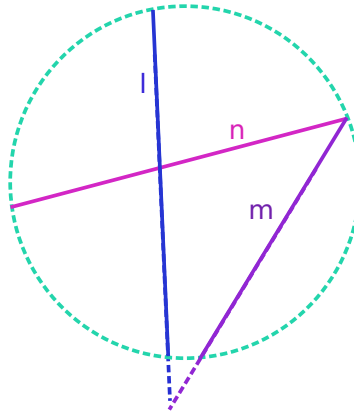


Figura 3.2: Rectas en el modelo de Klein-Beltrami

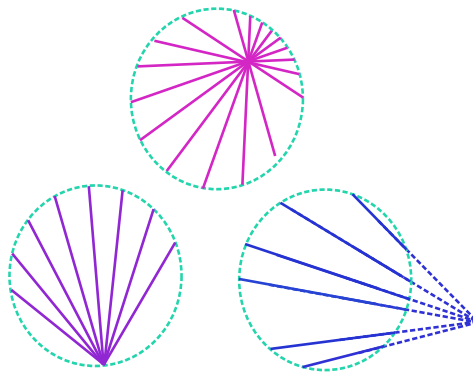


Figura 3.3: Haces de rectas en el modelo de Klein-Beltrami

disco de Klein-Beltrami, la distancia hiperbólica entre X y Y se calcula mediante

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{(\overline{XP})(\overline{YQ})}{(\overline{YP})(\overline{XQ})} \right|$$

donde, por ejemplo, \overline{XP} representa la distancia euclidiana entre los puntos X y P .

III.1.2 Modelo hiperboloide

El segundo modelo, se llama modelo del hiperboloide, y se obtiene del anterior cuando ubicamos al disco \mathcal{D} , en el plano $z = 1$ y proyectamos desde el origen, los puntos $Q \in \mathcal{D}$ en puntos Q' de la hoja superior del hiperboloide de dos mantos $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ como se muestra en la figura 3.4.

En este plano, las rectas son hipérbolas euclidianas que se obtienen al cortar el manto superior del hiperboloide con un plano por el origen, de igual manera, si proyectamos desde el origen las rectas hiperbólicas del modelo anterior sobre la “cazuela“ (como en la figura 3.4, m se proyecta sobre m' desde el origen). De esta forma, podemos encontrar una biyección entre éste y el modelo proyectivo.

El modelo del hiperboloide, así como el de Klein-Beltrami no suelen ser muy utilizados, debido a que ninguno de ellos son modelos conformes, es decir, dadas dos “rectas” (definidas de diferente manera para cada uno) que se cortan en un punto, el ángulo formado

se intersectan ni en \mathcal{D} , ni en su frontera, ni fuera de él. Y por último, las rectas l y n son asintóticamente paralelas, debido a que su intersección se encuentra en la frontera de \mathcal{D} , la cual por construcción no está contenida en el modelo. En este modelo, el ángulo entre dos

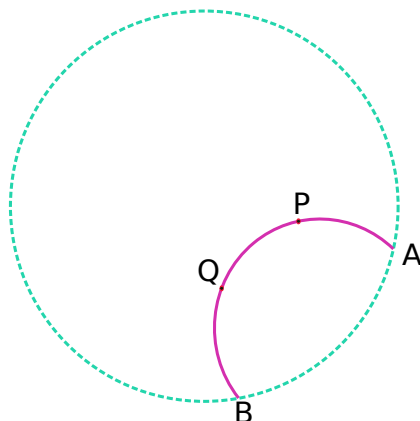


Figura 3.6: Distancia entre dos puntos en el modelo del disco de Poincaré

rectas que se intersectan es el ángulo (euclidiano) entre las tangentes a los arcos euclidianos correspondientes. La distancia entre puntos en el modelo de Poincaré se calcula de la siguiente manera. Sean P y Q dos puntos en \mathcal{D} (véase la figura 3.6). Estos dos puntos determinan una única recta no euclidiana en \mathcal{D} que se aproxima a la frontera de \mathcal{D} en los dos puntos euclidianos A y B . Nótese que A y B no son puntos en \mathcal{D} pues están en su frontera. Si nuevamente, denotamos a \overline{XY} , como la distancia euclidiana del punto X al punto Y , entonces, la distancia (no euclidiana) de P a Q se calcula mediante

$$d(P, Q) = \left| \ln \frac{(\overline{PA})/(\overline{PB})}{(\overline{QA})/(\overline{QB})} \right|$$

III.1.4 Modelo del semiplano superior (Poincaré)

Poincaré no se conformó con dar un modelo para representar el plano hiperbólico, propuso un segundo modelo que consiste en el conjunto de puntos que se encuentran en un semiplano abierto, o de forma más precisa, un semiplano euclidiano abierto.

El modelo del semiplano superior tiene un origen físico. Si, por ejemplo, se sumerge una cuchara en un vaso con agua, y se mira a través del vaso, parecería que la cuchara está doblada, lo cual se debe a que la luz no continúa viajando en línea recta cuando pasa de un medio a otro, sino que modifica su trayectoria de acuerdo a la ley de refracción. De esta forma, las “líneas” dejan de tener la forma recta que conocemos, y se convierten en curvas. Por ejemplo, en este modelo, las ”rectas” hiperbólicas corresponden a las semicircunferencias ortogonales al eje X , así como las semirectas con un extremo en dicho eje. Los diferentes tipos de rectas en este modelo, serán vistos con detalle en la siguiente sección.

Éste será el modelo que se utilizará de aquí en adelante. La notación será la que Michael Barot ocupa en su libro, el prefijo e- para los objetos euclidianos y el prefijo h- para los objetos hiperbólicos, así, se tendrán los h-puntos y los e-puntos, las h-rectas y las e-rectas, etc.

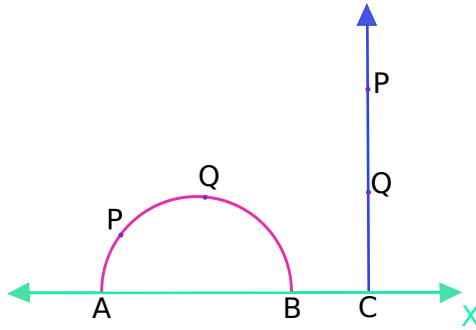


Figura 3.7: Distancia entre dos puntos en el modelo del semiplano superior

Para calcular la distancia entre dos h-puntos en este modelo, se hace lo siguiente. Sean P y Q dos h-puntos en el semiplano superior (véase la figura 3.7). Si la h-recta que pasa por P y Q es una semicircunferencia, entonces intersectará al eje X en dos e-puntos A y B . En este caso, la h-distancia entre los puntos P y Q está dada por

$$d(P, Q) = \left| \ln \frac{(\overline{PA})/(\overline{PB})}{(\overline{QA})/(\overline{QB})} \right|$$

donde nuevamente, \overline{PA} representa la e-distancia del punto P al punto A . Si la h-recta es una e-semirrecta vertical, entonces intersectará al eje X en un punto C . En este caso la h-distancia será

$$d(P, Q) = \left| \ln \frac{\overline{PC}}{\overline{QC}} \right|$$

III.2. Conociendo al plano hiperbólico

Como se mencionó anteriormente, el modelo del semiplano superior de Poincaré es el que será utilizado en el presente trabajo para representar al plano hiperbólico. Para familiarizarse un poco más con la geometría hiperbólica, iremos describiendo con detalle en esta sección cada uno de los objetos matemáticos más usados en el estudio de las geometrías.

III.2.1 Puntos

Un h-punto está definido como un e-punto en el semiplano superior abierto. Es decir, el h-plano se puede escribir como $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$.

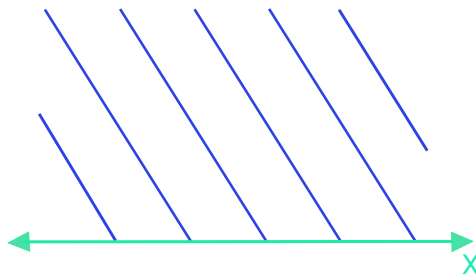


Figura 3.8: El h-plano \mathbb{H}^2

III.2.2 Rectas

Las h-rectas pueden tomar dos formas diferentes, e-semicircunferencias ortogonales al eje X o e-semirrectas perpendiculares al mismo. En la figura 3.9, las rectas l y n se intersectan, así que no son paralelas. Las rectas k , l y m son divergentemente paralelas, pues no se intersectan ni en el semiplano ni en su frontera (eje X). Las rectas k y n son asintóticamente paralelas, pues se intersectan en la frontera del semiplano que por construcción no pertenece al modelo.

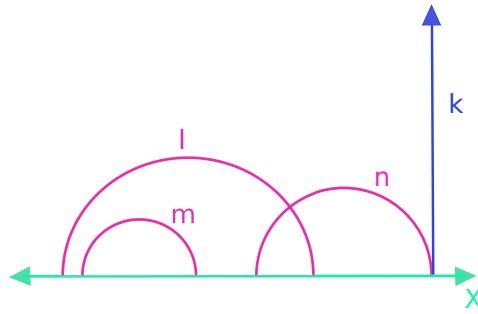


Figura 3.9: h-rectas

III.2.3 Reflexiones

La definición de la h-distancia no es muy difícil, sin embargo es poco útil para trabajar. Si se tiene un e-círculo, por ejemplo, y se desea trazar otro de igual tamaño, no es necesario conocer la medida de su radio, únicamente se transporta la medida de éste con un compás. Así, para hacer construcciones no es necesaria la medida, sino tener una herramienta constructiva para manejarla.

Para manejar las h-distancias usamos una herramienta constructiva que nos lo permite, la h-reflexión. Denotaremos la imagen de un objeto a como a_r .

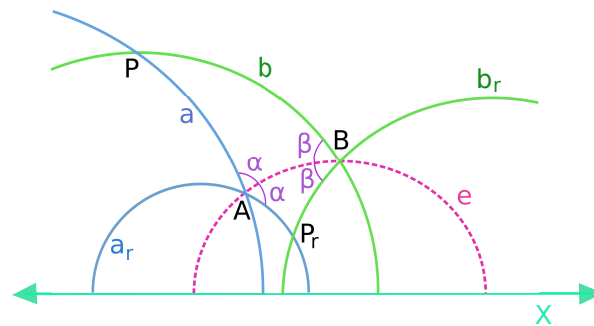


Figura 3.10: h-reflexión de un punto P

La h-reflexión ρ_e en una h-recta e cumple las siguientes propiedades:

- (i) Es una función biyectiva.
- (ii) Es una involución, es decir $\rho_e^2 = I$.
- (iii) La imagen de una h-recta es una h-recta.
- (iv) La h-recta e se refleja en sí misma.

- (v) Intercambia los dos h-semiplanos definidos por e .
- (vi) Invierte los h-ángulos orientados.

Se desea construir entonces, la imagen P_r de un h-punto P (ver figura 3.10). Por la proposición (iv), si $P \in e$ ya está, y $P_r = P$. Ahora bien, si $P \notin e$ sabemos que P_r está del otro lado de e que P .

Tomamos dos h-puntos fijos A y B en e y llamamos a a la h-recta que pasa por P y por A , de igual forma, la h-recta b es la que pasa por P y por B . Como los h-puntos A y B están en e , $A_r = A$ y $B_r = B$. También sabemos por la propiedad (iii) que la imagen a_r de la h-recta a es otra h-recta. Entonces la recta a_r debe pasar por A_r y por P_r . Análogamente, b_r la imagen de b , debe pasar por $B = B_r$ y por P_r .

La propiedad (vi) nos dice que a_r interseca a la h-recta e en A por el inverso del h-ángulo en el que a interseca a e . Con ésto la h-recta a_r quedá completamente definida y se puede construir. De igual forma, construimos la h-recta b_r . Y así, el h-punto deseado P_r , es la intersección de las h-rectas a_r y b_r .

La reflexión es una transformación muy conocida en la geometría euclidiana, es la e-inversión con respecto a una e-circunferencia e (ver Sección II.1.5).

III.2.4 Perpendiculares

De igual forma que en la geometría clásica, en la geometría hiperbólica se puede definir perpendicularidad entre dos h-rectas. Veremos que la h-recta perpendicular por un h-punto dado, a una h-recta dada es única.

Sea a una h-recta y P un h-punto con $P \notin a$. Al construir una perpendicular b a a por P , se quiere que b sea h-ortogonal a la h-recta a lo cual implica que $b = \rho_a(b)$. Por lo tanto, b contiene también a $P_r = \rho_a(P)$. Es decir, b es la h-recta que pasa por los puntos P y P_r .

A continuación, se presenta la construcción de b dados la h-recta a y el h-punto P . Se puede dividir en tres casos, (i) si a es una e-semicircunferencia y P no está en a , (ii) si a es una e-semicircunferencia y P está en a y (iii) si a es una e-semirrecta.

En el caso (i) (véase figura 3.11), debemos encontrar $P_r = \rho_a(P)$, y trazar la h-recta que une a los h-puntos P y P_r . Dicha h-recta b será la h-perpendicular buscada a la h-recta a .

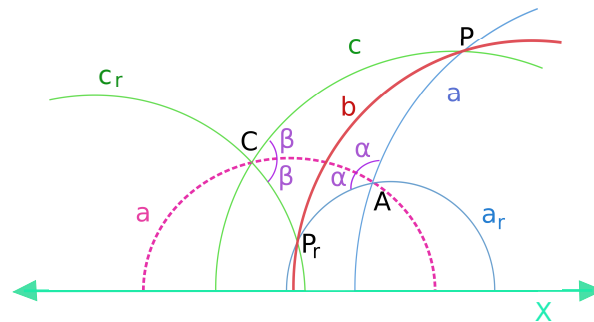


Figura 3.11: b h-perpendicular a c por P

Para el caso (ii) (véase figura 3.12), primero tomamos el e-centro de la e-semicircunferencia a , y lo llamamos M . Tomamos la e-recta que pasa por los e-puntos M y P , llamada f . Trazamos la e-perpendicular a f por P , y la intersectamos con X en el e-punto R . Se dibu-

ja b , la e-semicircunferencia con e-centro en R y e-radio \overline{RP} . De esta forma, b será la h-perpendicular buscada.

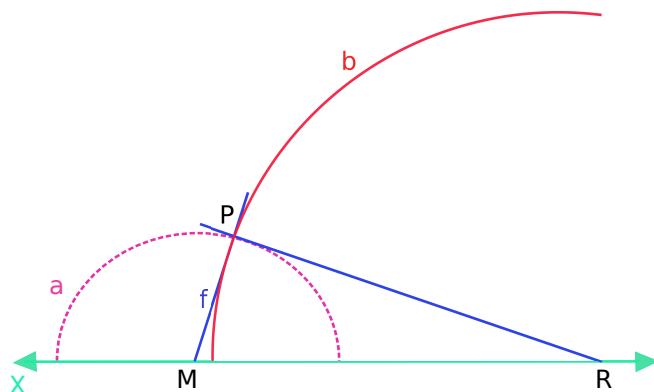


Figura 3.12: b h-perpendicular a a por P

En el último caso (iii) (véase figura 3.13), en el cual la h-recta a es una e-semirrecta tomamos el punto donde a toca a X , y lo llamamos Q . Posteriormente se traza la e-semicircunferencia con e-centro en Q y radio \overline{QP} . Dicha e-semicircunferencia será la h-recta b buscada.

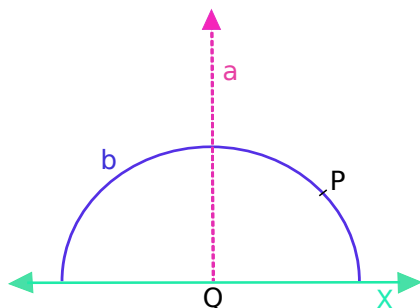


Figura 3.13: b h-perpendicular a a por P

III.2.5 Mediatrices

Después de haber resuelto el problema de trazar una h-perpendicular a una h-recta, por un h-punto dado, surge una nueva pregunta, ¿cómo podemos trazar la h-mediatrix de un h-segmento, es decir dado un h-segmento \overline{PQ} , podremos encontrar una h-recta h-perpendicular a él y que pase por su h-punto medio?. Supongamos que ya tenemos la solución, que es la h-recta m y reflejamos todo en m . Ahora, la h-recta PQ queda fija porque corta a m de forma h-perpendicular. Ésto implica que $P_r = \rho_m(P)$ y $Q_r = \rho_m(Q)$ van a ser elementos de la h-recta PQ . Si denotamos por F la intersección de las h-rectas m y PQ , entonces $\|PF\|_h = \|QF\|_h = \|Q_rF\|_h$, lo que nos dice que P y Q_r tienen la misma h-distancia a F y están del mismo lado de m . Luego, $P = Q_r$. De forma análoga, tenemos que $Q = P_r$.

Así, nuestro problema se convierte simplemente en construir algo que nos refleje P en Q y viceversa. Tendremos entonces dos casos cuando la e-recta PQ intersekte a X y cuando no lo haga.

En el primer caso, si la e-recta PQ intersekte a X , sea H dicha intersección. Trasladamos la e-distancia \overline{PH} a partir de H con sentido contrario a P y sea P' el e-punto extremo de

dicho e-segmento como se muestra en la figura 3.14. Llamamos N al e-punto medio del e-segmento $\overline{P'Q}$. Sea \mathcal{C} la e-circunferencia con e-centro en N y e-radio \overline{NQ} . Y sea h la e-recta e-perpendicular a la e-recta PQ . Sea también C la intersección de \mathcal{C} con h . Por último, trazamos la e-circunferencia m con e-centro en H y e-radio \overline{HC} . m será entonces la h-mediatrix del h-segmento \overline{PQ} .

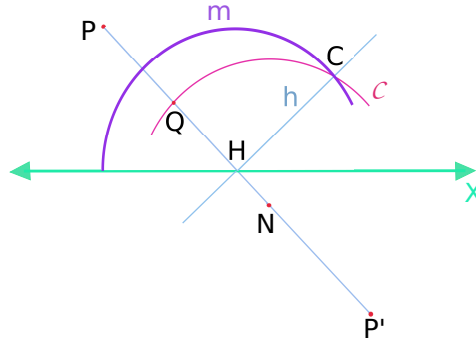


Figura 3.14: m h-mediatrix del h-segmento \overline{PQ}

En el segundo caso (ver figura 3.15) en el que la e-recta PQ no intersecta al eje X , tomamos la e-mediatrix m del e-segmento \overline{PQ} , la cual va a intersectar a X en un ángulo recto. Luego, m define una h-recta. Y así se deduce que m es la h-mediatrix del h-segmento \overline{PQ} .

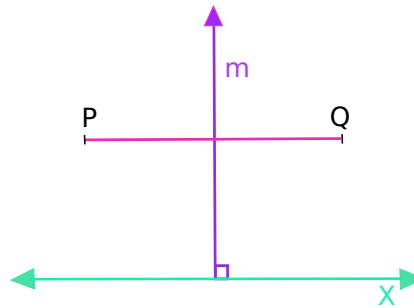


Figura 3.15: m h-mediatrix del h-segmento \overline{PQ}

III.2.6 Bisectrices

De igual forma que en el apartado anterior, aquí construiremos el análogo a una e-bisectriz. Definamos entonces la h-bisectriz de un ángulo $\angle_h APB$ como la h-recta que pasa por P y divide el h-ángulo $\angle_h APB$ en dos partes iguales. Llamemos a a la h-recta que pasa por los h-puntos A y P y llamemos b a la h-recta que pasa por B y P . Como el h-ángulo se mide con las e-tangentes a las h-rectas a y b en el h-punto P , basta con construir la e-bisectriz m de estas e-tangentes y finalmente la h-recta que pase por P y que tenga a m como e-tangente.

Al igual que en las construcciones anteriores consideremos dos casos, (i) en el cual las h-rectas a y b son ambas e-semicircunferencias y (ii) en el que una de las dos h-rectas a y b corresponde a una e-semirrecta. Nótese que no podrían ambas h-rectas ser e-semirrectas porque entonces no se intersectarían y no existiría P .

(i) Las h-rectas a y b son e-semicircunferencias: (Figura 3.16) Sea s_a el e-segmento \overline{AP} , y M_a su e-punto medio. Se traza p_a la e-recta e-perpendicular a s_a por M_a . Llamamos C_a a la intersección de p_a con X . Sea r_a la e-recta que pasa por los e-puntos C_a y P . Trazamos la e-perpendicular t_a a esta e-recta por el e-punto P . A' será entonces la intersección de las e-rectas t_a y p_a .

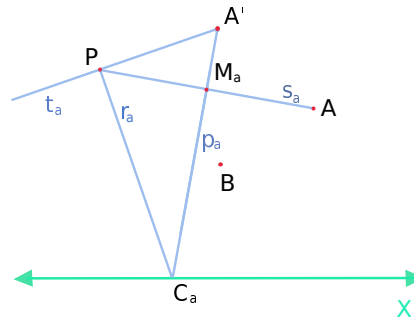


Figura 3.16: h-bisectriz del h-ángulo $\angle_h APB$

De igual forma (ver figura 3.17) haremos ahora con el h-punto B . Sea s_b el e-segmento \overline{BP} , y M_b su e-punto medio. Se traza p_b la e-recta e-perpendicular a s_b por M_b . Llamamos C_b a la intersección de p_b con X . Sea r_b la e-recta que pasa por los e-puntos C_b y P . Trazamos la e-perpendicular t_b a esta e-recta por el e-punto P . B' será entonces la intersección de las e-rectas t_b y p_b .

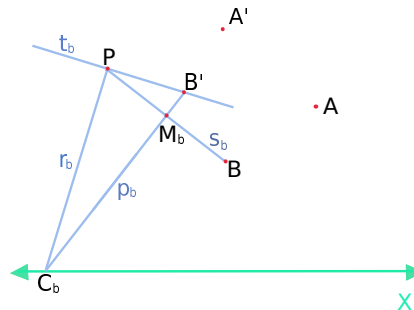


Figura 3.17: h-bisectriz del h-ángulo $\angle_h APB$

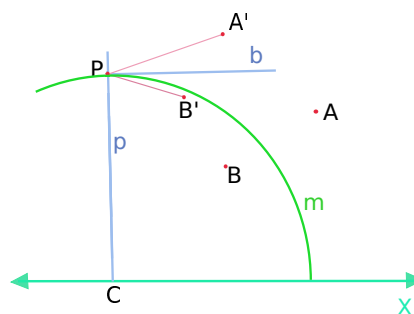


Figura 3.18: m h-bisectriz del h-ángulo $\angle_h APB$

Ahora, (ver figura 3.18) sea b la e-bisectriz del e-ángulo $\angle A'PB'$. Trazamos la e-perpendicular p a la e-recta b por el e-punto P . Intersectamos la e-recta p con X para obtener el e-punto C . Finalmente dibujamos la e-circunferencia m con e-centro en C y e-radio \overline{CP} . Luego, la h-recta m es la h-bisectriz del h-ángulo $\angle_h APB$.

(ii) Una de las dos h-rectas a y b es una e-semirrecta: La construcción es análoga al caso anterior, tomando el e-punto B' como el e-punto B .

III.2.7 Círculos

Sabemos que un e-círculo está definido como el conjunto de e-puntos que e-equidistan a un e-punto fijo, de igual forma en la geometría hiperbólica podemos imaginarnos que si trasladamos una h-distancia fija a partir de un h-punto M fijo en varias direcciones obtenemos un h-círculo.

Ésto nos lleva a un primer problema, ¿cómo trasportamos una h-distancia si aún no podemos medirla de manera formal?. Si existiera un h-compás con el cual pudiéramos tomar nuestra h-distancia y trazarla sobre una h-recta desde un h-punto dado en esa h-recta, nuestro problema estaría resuelto. Veamos entonces, se quiere construir un h-punto C en la h-recta PQ que tenga la misma h-distancia de P que A de B y que esté más cerca de Q , es decir tenemos que trazar la h-distancia $\|\overline{AB}\|_h$ a partir de P en dirección de Q (ver figura 3.19).

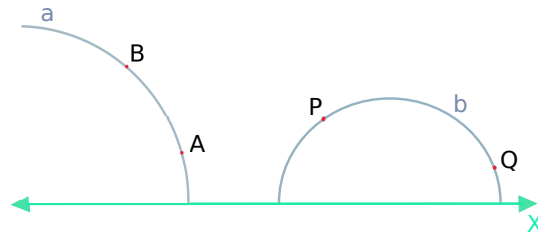


Figura 3.19: Transportar una h-distancia

Para empezar construimos la h-mediatrix de A y P (ver figura 3.20). Por la h-reflexión ρ_m en m obtenemos una h-recta $a' = \rho_m(a)$ que pasa por los h-puntos $A' = \rho_m(A)$ y $B' = \rho_m(B)$. Como m es la h-mediatrix del h-segmento \overline{AP} , se tiene que $P = A'$, y por lo tanto $\|AB\|_h = \|A'B'\|_h = \|PB'\|_h$. En el segundo paso construimos la h-bisectriz n del h-ángulo $\angle_h B'PQ$. Obtenemos el punto $C = \rho_n(B')$ en la recta $a'' = \rho_n(a') = b$. Como n pasa por P tenemos $\rho_n(P) = P$ y por ello $\|AB\|_h = \|PB'\|_h = \|PC\|_h$. Y así, el problema está solucionado.

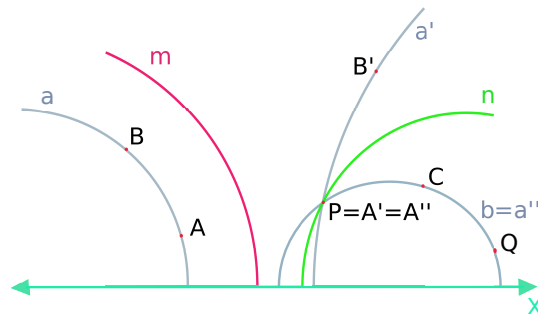


Figura 3.20: Transportar una h-distancia

Una vez que ya sabemos cómo transportar distancias, nos daremos a la tarea de construir h-círculos. Un h-círculo tiene el aspecto de un e-círculo, pero con diferente h-centro.

Si completamos las h-rectas que pasan por un h-punto M arbitrario a e-círculos, obtenemos una familia de e-círculos que se intersectan en dos e-puntos M y N . Sea H un e-punto en la e-recta MN que no esté en el e-segmento \overline{MN} . Entonces las e-tangentes de H a cualquiera de estos e-círculos miden todos igual, ya que $\|\overline{HM}\|_e \cdot \|\overline{HN}\|_e$ vale siempre lo mismo (potencia de un e-punto con respecto a una e-circunferencia, ver definición 2.1). Denotaremos esta longitud por t . Luego, el e-círculo con e-centro en H y e-radio t intersecta a cada e-círculo de esta familia en un e-ángulo recto (3.2.7).

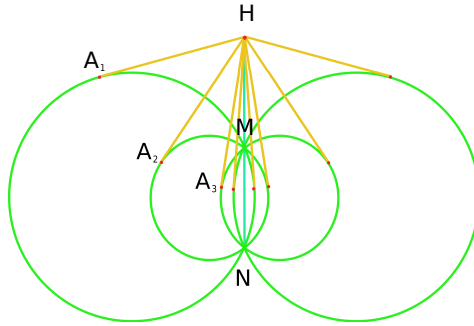


Figura 3.21: Familia de e-círculos e-ortogonales a un e-círculo dado

Se quiere demostrar entonces que un h-círculo es un e-círculo y viceversa que un e-círculo contenido en el h-plano es un h-círculo.

Iniciemos primero con la segunda parte. Sea c un e-círculo en el h-plano y sea g una h-recta que corta a c en Q en un e-ángulo recto. Trazamos l , la e-perpendicular por el e-centro de c a X . Sea M la intersección l con g .

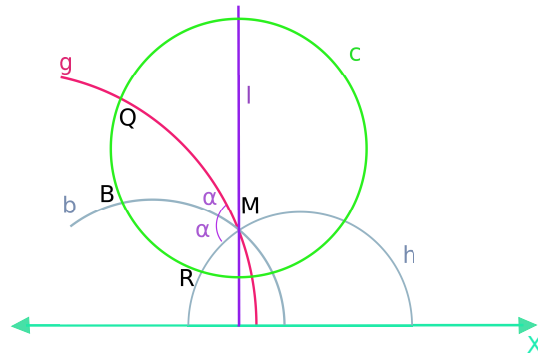


Figura 3.22: h-círculo

Dibujamos h , otra h-recta por M . Llamemos R a su intersección con c . Trazamos la h-bisectriz b del h-ángulo $\angle_h QMR$. Por la parte anterior (3.2.7) se sabe que cualquier otra h-recta que pase por M va a cortar a c en un e-ángulo recto, en particular el e-ángulo que se forma entre b y c es recto. Y así, si h-reflejamos c en b , obtendremos nuevamente a c . Más aún, la imagen de Q es R . Luego, $\|\overline{MQ}\|_h = \|\overline{MR}\|_h$. Por lo tanto, cualquier e-círculo que se encuentre sobre el h-plano va a ser un h-círculo.

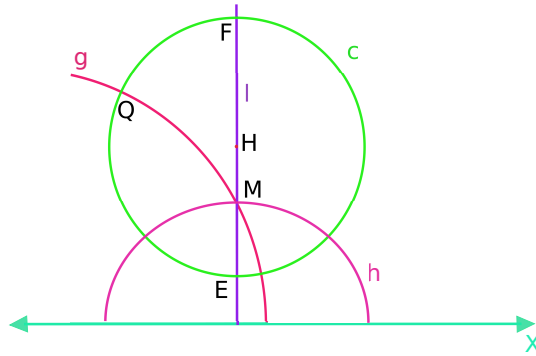


Figura 3.23: h-círculo

Regresando ahora, demostraremos la primer parte de nuestra proposición, cualquier h-círculo es en realidad un e-círculo. Tomemos entonces dos h-puntos M y Q . Se quiere construir el h-círculo con h-centro en M y con h-radio \overline{MQ} . Dibujamos l , una h-recta que es e-semirrecta por el h-punto M . Transportamos la h-distancia $\|\overline{MQ}\|_h$ a l a partir de M en ambas direcciones para obtener los h-puntos E y F . Tomamos el e-punto medio H del e-segmento \overline{EF} . Sea c el e-círculo con e-centro H que pasa por Q . El cual por la primer parte es un h-círculo.

Únicamente falta verificar que el h-punto M es el h-centro de dicho h-círculo. Trazamos entonces la h-perpendicular h a l por M . h-Reflejando en h , notamos que se conserva l , luego F es la imagen de E y viceversa. También la imagen de c tiene que ser un e-círculo c' . Pero c' tiene que pasar por E y por F , y su e-centro debe estar en l , así que no queda más que c' sea c . Lo cual sólo pasa si h corta a c en un e-ángulo recto. Por lo tanto, M es el h-centro de c .

Habiendo visto que un h-círculo es un e-círculo en el h-plano y al revés, dados dos h-puntos M y Q , estamos listos para dar una construcción de un h-círculo c con h-centro M y que pasa Q . Sea l la e-recta e-perpendicular en N a X por el h-punto M . Llamemos D al punto medio del e-segmento \overline{MN} . Sea \overline{ME} en el e-segmento \overline{MD} tal que $\|\overline{ME}\|_h = \|\overline{MQ}\|_h$. Dibujemos la h-recta h-perpendicular g a la h-recta l por el h-punto M . Sea F la e-inversión del e-punto E con respecto al e-círculo g . Sea H el punto medio del e-segmento \overline{EF} . Y finalmente el e-círculo c con e-centro en H y e-radio \overline{HQ} será el h-círculo buscado.

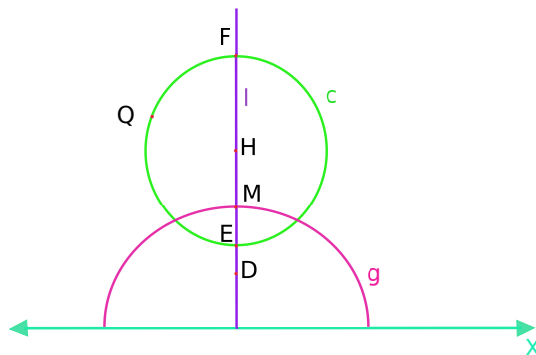


Figura 3.24: h-círculo

III.2.8 Triángulos

Una biyección del h-plano se llama h-congruencia si conserva todas las h-distancias. Dados dos h-triángulos $\triangle_h ABC$ y $\triangle_h A'B'C'$ con sus h-lados respectivos iguales (ver figura 3.25), demostraremos que existe una h-congruencia φ que manda al h-punto A en A' , al h-punto B en B' y al h-punto C en C' .

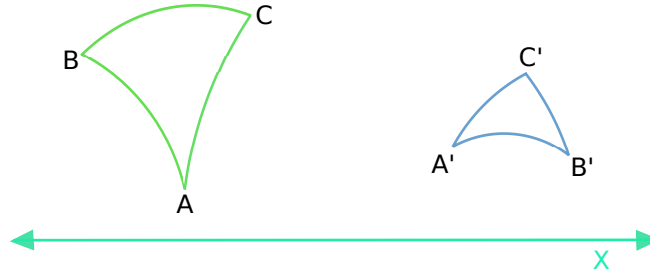


Figura 3.25: h-triángulos

Si $A = A'$ pondríamos $\varphi_1 = id$, la identidad. Si no, trazamos la h-mediatriz m del h-segmento $\overline{AA'}$ (ver figura 3.26), sea $\varphi_1 = \rho_m$, la h-reflexión en m . Lo cual implica que $A' = \varphi_1(A)$. Llamemos ahora $B_1 = \varphi_1(B)$ y $C_1 = \varphi_1(C)$.

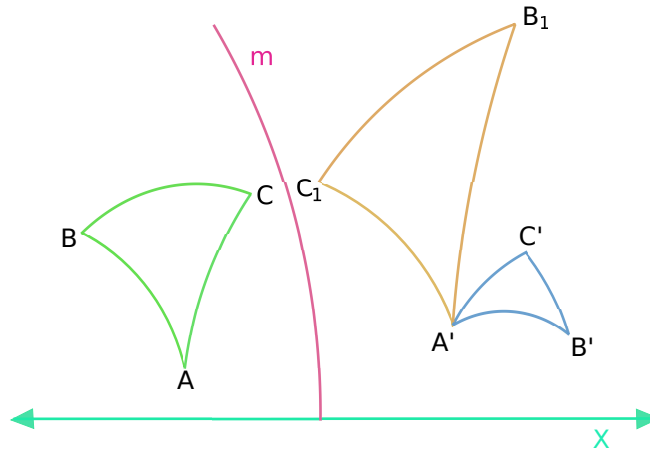


Figura 3.26: h-triángulos

Si $B_1 = B'$ ponemos $\varphi_2 = id$. Si no, trazamos la h-bisectriz b del h-ángulo $\angle_h B_1 A' B'$ (ver figura 3.27) y hacemos $\varphi_2 = \rho_b$, la h-reflexión en b . En cuyo caso, $A_2 = \varphi_2(A') = A'$ porque b pasa por A' . También tenemos que $B_2 = \varphi_2(B_1)$ está en la h-semirrecta $\overrightarrow{A'B'}$ que inicia en A' y pasa por B' y que $\|A'B_2\|_h = \|A'B_1\|_h = \|AB\|_h = \|A'B'\|_h$, así que $B_2 = B'$ porque los dos h-puntos están a la vez en el h-círculo con h-centro A' y h-radio $\|A'B'\|_h$ y por otro lado en la h-semirrecta $\overrightarrow{A'B'}$. Finalmente, nombramos $C_2 = \varphi_2(C_1)$.

Si $C_2 = C'$ entonces $\varphi_3 = id$. De no ser así, $\varphi_3 = \rho_c$ donde c es la h-recta $A'B'$. Luego, $\varphi(C_2) = C'$. Por lo tanto la h-congruencia φ que se busca está dada por $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$.

En la geometría euclidiana, se tiene una propiedad muy útil que nos da la medida exacta de la suma de los e-ángulos internos de un e-triángulo; 180° . A pesar de que en la

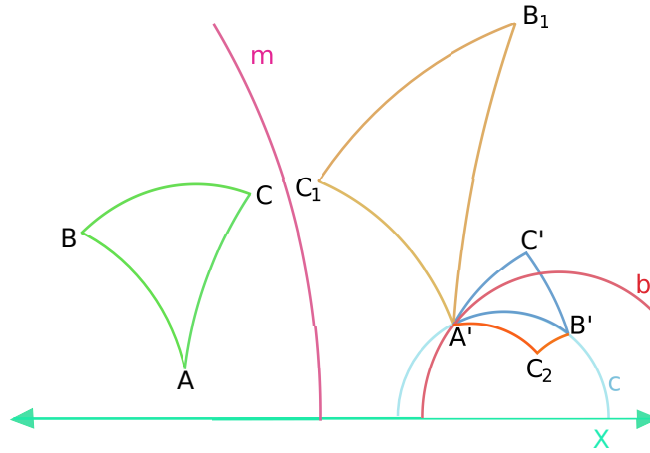


Figura 3.27: h-triángulos

geometría hiperbólica no se tiene dicha propiedad, se puede demostrar que los h-ángulos internos de un h-triángulo siempre van a sumar menos de 180° .

Sea $\triangle_h ABC$ un h-triángulo. Completamos las tres h-rectas AB , BC y CA por simetría al otro e-semiplano, es decir, las e-semirectas serán e-rectas y las e-semicircunferencias se convertirán en e-círculos, a quienes les llamaremos a , b y c respectivamente (ver figura 3.28). e-Reflejamos los h-puntos A , B y C con respecto a X , con lo cual obtenemos los e-puntos A' , B' y C' . Sea e un e-círculo con e-centro en C' . Aplicando la e-inversión ρ_e en e , obtenemos $A^* = \rho_e(A)$, $B^* = \rho_e(B)$, $C^* = \rho_e(C)$, $a^* = \rho_e(a)$, $b^* = \rho_e(b)$ y $c^* = \rho_e(c)$.

Si C se encuentra en el exterior de c , entonces también C' lo está. Por lo tanto la e-inversión en e manda el interior de c al interior de c^* y el exterior de uno al exterior del otro. Si C y por lo tanto C' , están dentro de c entonces la e-inversión en e mandaría el interior de c al exterior de c^* , luego el e-punto C^* queda fuera del e-círculo c^* .

Se tiene que a^* y b^* son e-rectas que se intersectan en C^* y c^* es un e-círculo que intersecta a a^* en B^* y a b^* en A^* (propiedades de la e-inversión) y además, el e-punto C^* está en el exterior de c^* como vimos anteriormente. Debido a que la e-inversión ρ_e conserva e-ángulos obtenemos que $\angle_h CAB + \angle_h ABC + \angle_h BCA = \angle_e b^* c^* + \angle_e c^* a^* + \angle_e a^* b^*$ que evidentemente es menor que 180° .

En la geometría euclidiana, podemos hablar de que dos e-triángulos son e-semejantes, donde la e-semejanza está definida como la composición de una materia (una e-rotación y una posible e-reflexión o e-simetría axial) con una e-homotecia. En la e-rotación se puede cambiar el e-tamaño y la e-orientación de una figura pero no se altera su forma. Por lo tanto, dos e-triángulos son e-semejantes si tienen similar forma.

La posibilidad de aumentar el tamaño de una figura sin modificar su forma es tan obvia y natural que durante milenios se pensó que era una consecuencia de los axiomas de la geometría, y se trató en vano de demostrarlo desde la Grecia antigua. Sin embargo, al estudiar otras geometrías, los matemáticos del siglo XIX, se dieron cuenta que sólo sucedía en los espacios euclidianos, es decir, sin curvatura. Lo que nos lleva a la afirmación “en la geometría hiperbólica no existe la h-semejanza de figuras”.

De hecho, se más adelante se verificará, que el teorema de e-semejanza de e-triángulos (aaa), en realidad define h-triángulos h-congruentes en el h-plano, lo cual es una consecuen-

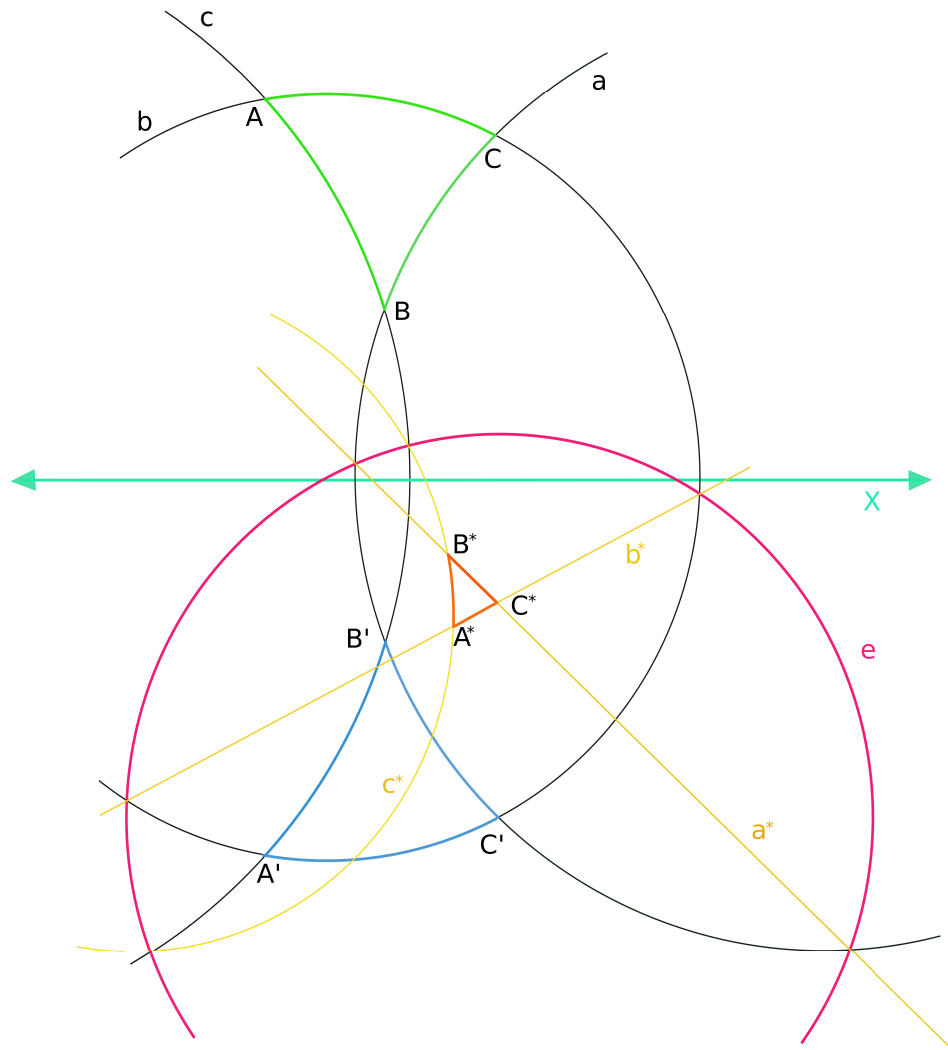


Figura 3.28: Suma de los h-ángulos internos de un h-triángulo

cia inmediata del hecho de que la suma de los h-ángulos internos de un h-triángulo es menor que 180° .

Entonces, en el h-mundo, se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 3.1 *Dos h-triángulos son h-congruentes si coinciden en alguno de los siguientes puntos:*

- (lll) *En los tres h-lados.*
- (lal) *En dos h-lados y el h-ángulo intermedio.*
- (laa) *En un h-lado y dos h-ángulos.*
- (lla) *En dos h-lados y un h-ángulo no intermedio, si el h-lado opuesto al h-ángulo dado es mayor al otro h-lado.*
- (aaa) *En los tres h-ángulos*

Demostración Dados dos h-triángulos $\Delta_h ABC$ y $\Delta_h A'B'C'$, denotaremos los h-lados del primero como a, b y c y sus ángulos como α, β y γ . De forma análoga, los h-lados y ángulos del segundo h-triángulo serían $a', b', c', \alpha', \beta'$ y γ' respectivamente.

- (III) Se vio al inicio de esta sección.
- (IaI) Se tiene que $b = b', c = c'$ y $\alpha = \alpha'$. (ver figura 3.27) Podemos suponer que $A = A'$, si no es así, en vez de considerar al $\Delta_h ABC$, se considerará al h-triángulo que se obtendrá de h-reflejar al $\Delta_h ABC$ en la h-mediatriz del h-segmento $\overline{AA'}$. De igual forma, podemos suponer que $B = B'$, porque de no ser así, consideraremos en vez del $\Delta_h ABC$, al h-triángulo que se obtiene de h-reflejar al $\Delta_h ABC$ en la h-bisectriz del h-ángulo $\angle_h BAB'$. También podríamos suponer que las h-rectas AC y $A'C'$ son iguales, porque ambas forman un h-ángulo α con la h-recta AB . Si no fuera así, sólo podría ser porque la h-recta AC fuera el h-reflejo de AC' en AB , caso en el cual consideraríamos en vez del h-triángulo $\Delta_h ABC$ al h-triángulo que se obtiene de reflejar al $\Delta_h ABC$ en la h-recta AB . Y como C y C' se encuentran en la h-semirrecta que empieza en A y pasa por C a la misma h-distancia b , entonces $C = C'$.
- (IaA) Consideraremos aquí dos subcasos. Primeramente si los h-ángulos fueran adyacentes al h-lado dado. Por ejemplo, $\alpha = \alpha', c = c'$ y $\beta = \beta'$. De igual forma que el caso anterior, podemos suponer que $A = A', B = B'$ y que las h-rectas AC y AC' son iguales. Lo que me implicaría que las h-rectas BC y BC' también lo son. Por lo tanto $C = C'$.

Ahora, tomando el segundo subcaso, en el que uno de los dos h-ángulos es opuesto al h-lado dado. Notemos que en la geometría euclidiana ésto no sería un problema, ya que siempre podemos obtener un tercer e-ángulo en un e-triángulo a partir de los otros dos; pero en el h-mundo no es así. Supongamos entonces que tenemos un h-triángulo $\Delta_h ABC$ y que conocemos el h-lado c y los h-ángulos β y γ . Veamos que el tercer ángulo α está unívocamente determinado por los otros dos.

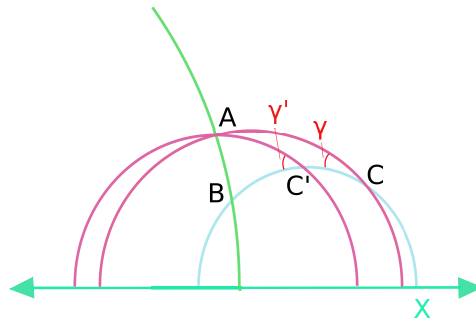


Figura 3.29: Dos h-ángulos de un h-triángulo determinan de manera única al tercero

Si ésto no ocurriera, existiría otro punto C' en BC tal que $\gamma' = \angle_h AC'B = \angle_h ACB = \gamma$ y por lo tanto, existiría un h-triángulo $\Delta_h ACC'$ cuyos ángulos internos suman $\angle_h CAC' + \gamma + (180^\circ - \gamma') = 180^\circ + \angle_h CAC' >_e 180^\circ$ lo cual entra en contradicción con el hecho de que la suma de h-ángulos internos en un h-triángulo es menor que 180° . Luego, nos encontramos en la situación del primer subcaso de (IaA).

- (L1a) Aquí supondremos que $b = b' >_h c = c'$ y $\beta = \beta'$. Nuevamente, igual que en los casos anteriores, podemos suponer que $A = A'$ y $B = B'$. Así, C' está sobre la h-recta BC a la misma h-distancia de A que el h-punto C . Y eso, como en el caso euclidiano nos obliga a que $C = C'$.
- (aaa) Como se mencionó anteriormente, este caso es el más interesante, debido a que en la geometría euclidiana implica e-semejanza y no e-congruencia. Primeramente notaremos que dos h-rectas h y h' que intersectan a una misma h-recta g en un mismo h-ángulo α son h-paralelas.

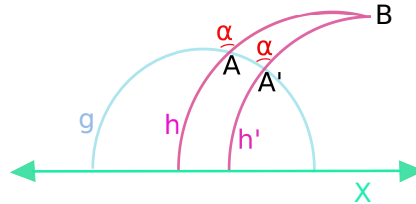


Figura 3.30: h y h' no son h-rectas h-paralelas

Sino lo fueran se intersectarían en un h-punto B y entonces la suma de los h-ángulos internos del h-triángulo $\triangle_h ABA'$ sería mayor de 180° . Supongamos entonces, que tenemos dos h-triángulos no congruentes $\triangle_h ABC$ y $\triangle_h A'B'C'$ pero que coinciden en sus h-ángulos correspondientes (ver figura 3.31).

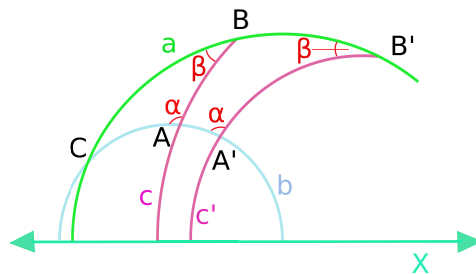


Figura 3.31: h-cuadrilátero

Como siempre podemos suponer que $C = C'$ y que B' está en la h-recta CB y A' en la h-recta CA . Así, el h-cuadrilátero determinado por los h-puntos $AA'B'B$ tiene una suma de h-ángulos internos igual a 360° , con contradicción. Luego los h-triángulos con h-congruentes.



IV. DE LO EUCLIDIANO A LO HIPERBÓLICO: TODA UNA ODISEA

En el primer capítulo se estudiaron una serie de teoremas que son fundamentales en la geometría euclidiana, además de que poseen una elegancia y belleza inigualable. Después de haber conocido un poco al h-plano, en el capítulo anterior, podemos darnos el lujo de probar el análogo en la geometría hiperbólica de algunos de estos teoremas, y dar también ciertas propiedades que caracterizan al h-plano.

IV.1. Teoremas de Ceva y Menelao

Consideremos al h-plano en el modelo proyectivo de Klein. La métrica que utilizaremos es

$$d_h(x, y) = \frac{(1 - (x, y))^2}{(1 - (x, x)^2)(1 - (y, y)^2)}$$

donde $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ es el producto escalar en el e-plano.

$$\Rightarrow d_h(x, y) = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 + (x, y)^2 - 2(x, y)}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}$$

El modelo de Klein de la geometría hiperbólica suele ser el más conveniente para probar propiedades de incidencia, debido a que aquí las geodésicas o h-rectas, son representadas como e-segmentos dentro del círculo unitario.

Teorema 4.1 Sean A' , B' y C' en los h-lados (o en sus prolongaciones) \overline{BC} , \overline{AC} y \overline{AB} de un h-triángulo $\triangle_h ABC$. Entonces las tres h-rectas AA' , BB' y CC' concurren si y sólo si

$$\frac{d_h(A', B)}{d_h(A', C)} \cdot \frac{d_h(B', C)}{d_h(B', A)} \cdot \frac{d_h(C', A)}{d_h(C', B)} = 1 \quad (4.1)$$

Demostración Consideremos un triángulo geodésico con vértices en a , b y c en el modelo proyectivo. Aquí las geodésicas coinciden con e-segmentos. En el lado bc tomemos un punto $a' = (b + \lambda_3 c + \lambda_3)$, donde $\lambda_3 = \frac{\|b-a'\|}{\|a'-c\|}$ es la razón de longitudes euclidianas. Calculemos $\frac{d_h(b, a')}{d_h(c, a')}$. Usando

$$d_h(x, y) = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 + (x, y)^2 - 2(x, y)}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}$$

y después de algunas transformaciones, tenemos

$$d_h(b, a') = \lambda_3^2 \cdot \frac{\|b\|^2 + \|c\|^2 - \|b\|^2\|c\|^2 + (b, c)^2 - 2(b, c)}{(1 - \|b\|^2)((1 + \lambda_3)^2 - \|b + \lambda_3 c\|^2)}$$

$$d_h(c, a') = \frac{\|b\|^2 + \|c\|^2 - \|b\|^2\|c\|^2 + (b, c)^2 - 2(b, c)}{(1 - \|c\|^2)((1 + \lambda_3)^2 - \|b + \lambda_3 c\|^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{d_h(b, a')}{d_h(c, a')} = \lambda_3^2 \cdot \frac{(1 - \|c\|^2)}{(1 - \|b\|^2)}$$

Relaciones análogas pueden ser escritas con los otros dos h-lados del h-triángulo. Multiplicándolas, obtenemos la ecuación (4.1), con la ayuda del teorema clásico de Ceva. ■

Podemos hablar también de un teorema análogo al teorema de Menelao, que se expone a continuación

Teorema 4.2 Sean A' , B' y C' en los h-lados (o en sus prolongaciones) \overline{BC} , \overline{AC} y \overline{AB} de un h-triángulo $\triangle_h ABC$. Entonces los tres h-puntos A' , B' y C' son h-colineales si y sólo si

$$\frac{d_h(A', B)}{d_h(A', C)} \cdot \frac{d_h(B', C)}{d_h(B', A)} \cdot \frac{d_h(C', A)}{d_h(C', B)} = 1 \quad (4.2)$$

aunque no se expone la demostración, se piensa que debería ser similar a la demostración anterior.

IV.2. Círculo de los nueve puntos

Antes de estudiar el Teorema de Feuerbach, consideraremos seis puntos en los lados de un triángulo $\triangle ABC$ dado, en los cuales se interseca la circunferencia de Euler (de los nueve puntos). Tres de estas intersecciones, son en $\overline{M_a}$, $\overline{M_b}$ y $\overline{M_c}$; puntos sobre los lados a , b y c del $\triangle ABC$ tales que las cevianas $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$ y $\overline{CM_c}$ bisectan el área del triángulo. En la geometría euclidiana estas líneas suelen ser llamadas medianas, así que en adelante nos referiremos a ellas como h-medianas. En la geometría hiperbólica, al dividir un triángulo con una h-mediana, se obtienen dos triángulos cuya suma de ángulos es la misma. De acuerdo con esto, es natural formular una definición para las e-alturas de un e-triángulo en términos de dichos ángulos y generalizar la definición para la geometría hiperbólica.

Sea H_a el pie de la e-altura desde el e-vértice A al e-lado \overline{BC} (ver figura ??). Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \angle AH_a B - (\angle H_a A B + \angle A B H_a) &= \angle AH_a C - (\angle H_a A C + \angle A C H_a) \\ &= \frac{1}{2}(\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)) = 0 \end{aligned}$$

Llamaremos h-alturas a las cevianas con una propiedad similar en la geometría hiperbólica. Verifiquemos entonces la existencia de h-alturas.

Denotemos por $\sphericalangle_X Y Z$ el valor de $\angle_h X Y Z - \angle_h Z X Y - \angle_h Y Z X$, donde los ángulos son dirigidos, $\sphericalangle_h X Y Z > 0$ si y sólo si la rotación alrededor de Y a lo largo del arco más corto de X a Z es contra las manecillas del reloj (ver figura ??).

Consideremos el $\triangle_h ABC$ (véase figura ??), en el cual el orden de los vértices A , B y C es contra las manecillas del reloj. Usando la regla anterior, es posible verificar que cuando movemos un punto X en la h-recta BC en dirección de B a C , el valor de $\sphericalangle_h B X A$

es continuamente decreciente, mientras que el valor de $\sphericalangle_h AX C$ es continuamente creciente. Entonces $\sphericalangle_h B X A - \sphericalangle_h A X C > 0$ cuando X se aleja sobre el h-rayo CB y $\sphericalangle_h B X A - \sphericalangle_h A X C < 0$ cuando X se aleja sobre el h-rayo BC . Por lo tanto debe existir un punto H_a para el cual $\sphericalangle_h B X A = \sphericalangle_h A X C$. Dicho h-punto será el pie de la h-altura del $\triangle_h ABC$ desde el h-vértice A .

Sean H_b y H_c los pies de las h-alturas en las h-rectas CA y AB respectivamente. Se necesita que $\sphericalangle_h C H_b B = \sphericalangle_h B H_b A$ y $\sphericalangle_h A H_c C = \sphericalangle_h C H_c B$. Un poco más adelante probaremos que el círculo de Euler pasa por estos tres puntos.

IV.3. Teorema de Feuerbach

La sección anterior es de vital importancia para el desarrollo de ésta. Pero aún no podemos dar una demostración formal del Teorema de Feuerbach, sin haber mencionado antes el siguiente teorema.

Teorema 4.3 (Teorema del segmento) *Dadas dos líneas a y b , cada una tangente a un círculo dado ω , sea una tercera línea c tangente a ω y que intersecta a a y a b en A y B respectivamente. Sea ω_c un círculo por A y por B , tal que el ángulo central del arco AB es ϕ . Entonces existen dos circunferencias que son cada una tangentes a ω_c , a a y a b y que permanecen fijas aún cuando C varía mucho.*

Si se quiere ver la prueba de este importante teorema, se puede recurrir a (). Consideremos el teorema de Feuerbach en el modelo del disco de Poincaré, desde un punto de vista euclidiano. Ignorando los pies de las h-medianas, las cuales no se necesitan, consideremos sólo las h-alturas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ del h-triángulo $\triangle_h ABC$. Tendremos entonces el siguiente teorema.

Teorema 4.4 *Dados dos h-triángulos $\triangle_h ABC$ y $\triangle_h A'B'C'$, tales que los cuadriláteros $ABB'A'$, $ACC'A'$ y $BCC'B'$ son cíclicos. Entonces, existen cuatro círculos que son tangentes a los circuncírculos de los h-triángulos ABC' , $AB'C$, $A'BC$ y $A'B'C'$.*

Demostración Haciendo una e-inversión con centro en A , tenemos que los círculos circunscritos a ABC' y $AB'C$ se transforman en líneas, y el resto de los círculos se mantienen en círculos. Así, dos de los cuatro círculos ahora son rectas.

Supongamos entonces la siguiente construcción. Los puntos B , B' , C' y C son concíclicos. Las rectas BB' , CC' se intersectan en A' . Necesitamos probar que hay cuatro círculos tangentes a las líneas $B'C$, $C'B$ y también a los circuncírculos de los triángulos $A'BC$ y $A'B'C'$.

Sea P el otro punto donde se intersectan la línea $C'B$ y el círculo $A'B'C'$. De igual forma Q es el otro punto de intersección de la línea CB' y el círculo BCA' . Entonces usando el teorema del ángulo inscrito, tenemos

$$\angle B'PB = \angle B'A'C' = \angle B'QB$$

y

$$\angle PB'A' = \angle PC'A' = \angle BB'Q$$

Vemos que el cuadrilátero $B'PBQ$ es un deltoide (cometa), y dos de sus lados son cuerdas de los circuncírculos de $A'BC$ y $A'B'C'$. Notemos entonces que

$$\angle PC'B' = \angle BCB'$$

Ésto es, los ángulos centrales de los arcos PB' y QB de los circuncírculos de $A'C'B'$ y $A'BC$ son iguales. Y entonces, por el teorema 4.3 para las líneas $C'B$ y CB' , hay cuatro círculos que son tangentes a las líneas $B'C$ y $C'B$ y también a los círculos $A'BC$ y $A'B'C'$. ■

IV.4. Círculo de Apolonio

Aún no sabemos si el círculo que Apolonio propone en el plano euclidiano sigue manteniendo su forma al pasar al plano hiperbólico, por lo que en adelante nos referiremos a él como “la curva de Apolonio”. A continuación se probará que dicha curva es analítica y cerrada.

Teorema 4.5 Sean A y B dos h -puntos arbitrarios, y sea $a = \overline{AB} > 0$ la distancia entre ellos. Para toda $k > 1$, el conjunto $\Gamma = \{M \in \mathbb{H}^2 \mid \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = k\}$ es una curva analítica cerrada. La curva Γ encierra un conjunto estrictamente convexo en \mathbb{H}^2 que contiene al h -punto A .

Demostración Sin pérdida de generalidad, posemos suponer que el plano \mathbb{H}^2 tiene curvatura $k = 1$. Aplicando la fórmula de cosenos para el h -plano () en el h -triángulo $\triangle_h ABM$, obtenemos una ecuación de la curva Γ en coordenadas polares r y φ :

$$\cosh kr = \cosh a \cosh r + \sinh a \sinh r \cos \varphi$$

donde $\frac{a}{k+1} \leq r \leq \frac{a}{k-1}$. Si $r = \frac{a}{k+1}$ entonces $\varphi = \pi$, el cual corresponde al punto P_1 . Si $r = \frac{a}{k-1}$ entonces $\varphi = 0$, el cual corresponde al punto P_2 . Sea

$$\Phi(r, \varphi) = \cosh kr - \cosh a \cosh r - \sinh a \sinh r \cos \varphi$$

Para verificar que la curva Γ dada por la ecuación $\Phi(r, \varphi) = 0$ es analítica basta con probar que para cualquier punto de Γ se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

o que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$$

. Como la curva Γ es simétrica con respecto a AB , podemos suponer que $0 \leq \varphi \leq \pi$, para lo cual tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \sinh a \sinh r \sin \varphi > 0$$

Considerando también los dos puntos restantes, $\varphi = \pi$ y $\varphi = 0$, tenemos que cuando $\varphi = \pi$ y $r = \frac{a}{k+1}$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = k \sinh \frac{ka}{k+1} + \sinh \left(a - \frac{a}{k+1} \right) = (k+1) \sinh \frac{ka}{k+1} > 0$$

Y si $\varphi = 0$ y $r = \frac{a}{k-1}$, se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = k \sinh \frac{ka}{k-1} - \sinh \left(a + \frac{a}{k-1} \right) = (k-1) \sinh \frac{ka}{k-1} > 0$$

Con esto probamos que la curva Γ es analítica. En particular, tiene una línea tangente en cualquiera de sus puntos. ■

IV.5. Propiedades que caracterizan el plano hiperbólico

En este apartado, se dará una caracterización de la geometría hiperbólica entre la geometría de Hilbert por la propiedad de que las tres h-medias en cualquier h-triángulo concurren.

Comenzaremos definiendo la geometría de Hilbert en un conjunto abierto convexo. Sea K un conjunto convexo, abierto, acotado y no vacío en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. La distancia de Hilbert d_K en K está definida de la siguiente forma. Para cualquier punto $x \in K$ definimos $d_K(x, x) = 0$.

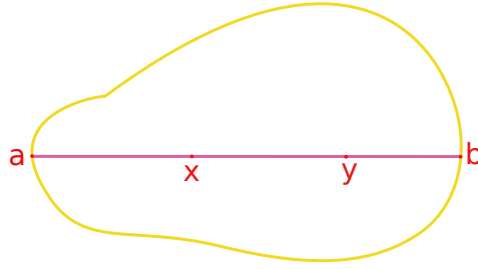


Figura 4.1: Distancia de Hilbert

Para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in K$, llamemos a y b a los puntos de intersección de la frontera de K , ∂K con la recta que pasa por x y y como se muestra en la figura 4.1. Estando los puntos en ese orden, se tiene que la razón cruzada está definida como:

$$(a, x, y, b) = \frac{\|y - a\|}{\|x - a\|} \cdot \frac{\|x - b\|}{\|y - b\|}$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana de \mathbb{R}^n . Definimos entonces la distancia de Hilbert como:

$$d_K(x, y) = \frac{1}{2} \ln(a, x, y, b)$$

Definido de esta forma, el espacio métrico (K, d_K) es llamado una geometría de Hilbert. Cuando K coincide con la bola unitaria abierta $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$, (K, d_K) se convierte en el modelo de Klein del h-plano. Además, como la razón cruzada es invariante bajo cualquier mapeo proyectivo P , entonces (K, d_K) y $(P(K), d_{P(K)})$ son isométricas a la geometría de Hilbert. En el caso particular en el que K es un elipsoide abierto (elipse en el caso $n = 2$), $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} < 1\}$ con $a_i \in \mathbb{R}$, se tiene que (K, d_K) es isométrica a la geometría hiperbólica.

Se quiere caracterizar a la geometría hiperbólica entre la geometría de Hilbert, pero por la parte anterior notamos que es equivalente a caracterizar elipsoides entre conjuntos convexos abiertos. El hecho de que las medianas de cualquier triángulo concurren, es bien sabido para la geometría de curvatura seccional constante (ver). Feng Luo conjeturó que esta propiedad caracteriza a la geometría hiperbólica entre la geometría de Hilbert, y posteriormente Ren Guo () la demostró.

Para la demostración, es necesario conocer antes dos resultados importantes, si se desea estudiarlos más a fondo, o ver sus demostraciones, se puede recurrir a la bibliografía mencionada en cada uno.

Lema 4.1 () *Cualquier conjunto convexo, abierto y acotado $K \in \mathbb{R}^2$ contiene una única elipse abierta E con e-área maximal. Más aún, $\partial K \cap \partial E$ contiene al menos tres puntos.*

Lema 4.2 () *Sea un conjunto abierto convexo y no vacío $K \in \mathbb{R}^n$. Dado un r fijo, $2 \leq r \leq n - 1$, si todo “plano” r -dimensional que atraviesa a K por P , un punto fijo en K , lo corta en un elipsoide (elipse si $r = 2$), K por sí mismo es un elipsoide.*

Finalmente, estamos listos para demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.6 *Sea K un conjunto convexo, abierto, acotado y no vacío en \mathbb{R}^n con una distancia de Hilbert d_K . Si las tres medianas de cualquier triángulo en (K, d_K) concurren (llamada propiedad M), entonces K es un elipsoide abierto.*

Demostración Demostrando por reducción al absurdo, se niega la conclusión y se desea llegar a la negación de la hipótesis. Primero consideraremos el caso $n = 2$. Si K no es una elipse, trataremos de encontrar un triángulo que no cumpla la propiedad M . Consideremos la elipse $E \in K$ con e-área maximal. Si el número de puntos de contacto entre E y la frontera de K es 3 o 4, extendemos un poco la elipse E para obtener la elipse E' (ver figura 4.2).

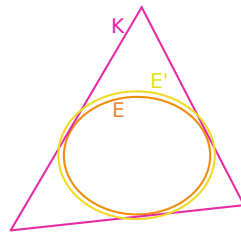


Figura 4.2: Extensión de la elipse E en E'

De manera un tanto más formal, tenemos que si E está definida por

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} < 1$$

entonces E' estará definida como

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} < 1 + \varepsilon$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Dado que E es de área maximal, $\partial E'$ debe intersectar a ∂K en 6 u 8 puntos. Por lo tanto, siempre podemos encontrar una elipse (aún llamada E) tal que el número de puntos de $\partial E \cap \partial K$ es al menos 5.

Supongamos entonces que K no es una elipse, entonces existe un conjunto abierto $U \subset K - E$. Sean p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 cinco puntos en el orden como se muestra en la figura 4.3, cada tres de ellos no alineados, en $\partial K \cap \partial E$. Tomamos un punto $u \in U$, entre p_1 y p_4 .

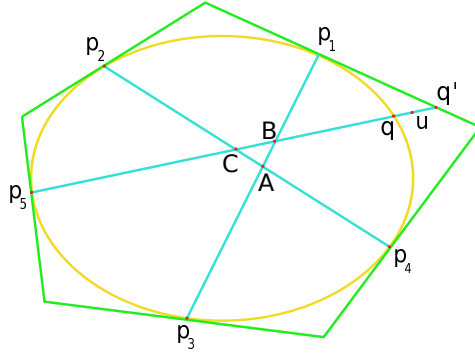


Figura 4.3: Construcción del triángulo $\triangle ABC$

Sea $A = \overline{p_1p_3} \cap \overline{p_2p_4}$. Si el segmento p_5u pasa por A , podemos elegir otro punto $u \in U$. Así, podemos decir que el segmento p_5u no pasa por A . Sean entonces $B = \overline{p_5u} \cap \overline{p_1p_3}$ y $C = \overline{p_5u} \cap \overline{p_2p_4}$. Se afirma que el $\triangle ABC$ no cumple la propiedad M. Dado que el $\triangle ABC$ también está en (E, d_E) que corresponde a una geometría hiperbólica, se tiene que bajo la distancia d_E , las tres medianas concurren. Llamemos A', B' y C' a los tres puntos medios (bajo d_E) de los lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ y \overline{AB} respectivamente. Los puntos medios de los lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ y \overline{AB} del $\triangle ABC$, bajo d_K , serían entonces A'', B' y C' respectivamente. Faltaría únicamente probar que $A'' \neq A'$ para finalizar la demostración. Y como $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren, entonces $\overline{AA''}, \overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ no deberían hacerlo para que eso fuera cierto.

Prolongamos el segmento $\overline{p_5u}$ hasta que corte a ∂E y a ∂K en q y q' respectivamente (ver figura ??). Como se mencionó anteriormente, la razón cruzada es invariante bajo cualquier mapeo proyectivo, así que podemos considerar una proyección P del segmento $\overline{p_5u}$ a la recta real \mathbb{R} , tal que $P(p_5) = 0, P(C) = 1, P(B) = b, P(Q) = x$ y $P(q') = x'$ (ver figura ??).

Notemos que $x < x'$. Además, sea $m = P(A')$ ($m' = P(A'')$ respectivamente) el punto medio del segmento que va de 1 a b . Tomando los puntos 0, 1, m y x , tenemos que

$$\begin{aligned}
 d_K(1, m) &= \frac{1}{2} \ln(0, 1, m, x) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{\|m - 0\|}{\|1 - 0\|} \cdot \frac{\|1 - x\|}{\|m - x\|} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{m \cdot \|1 - x\|}{\|m - x\|} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{m(x - 1)}{x - m}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

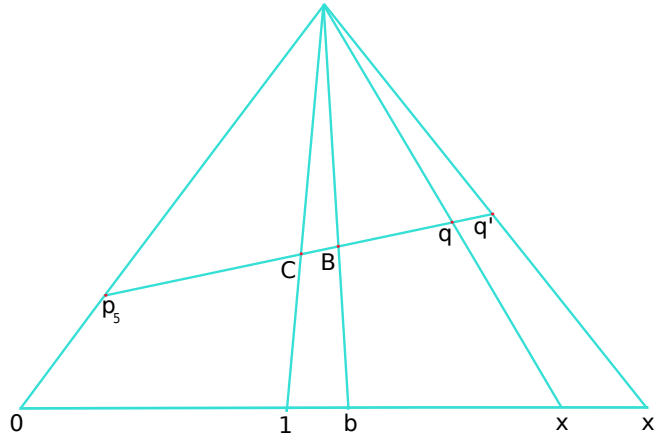


Figura 4.4: Mapeo proyectivo P

Tomando también los puntos $0, m, b$ y x se tiene que

$$\begin{aligned}
 d_K(m, b) &= \frac{1}{2} \ln(0, m, b, x) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{\|b - 0\|}{\|m - 0\|} \cdot \frac{\|m - x\|}{\|b - x\|} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{b}{m} \cdot \frac{\|m - x\|}{\|b - x\|} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{b(x - m)}{m(x - b)}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Como m era el punto medio del segmento que va de 1 a b , se tiene que

$$d_K(1, m) = d_K(m, b)$$

y sustituyendo las ecuaciones (4.3) y (4.4) tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \ln \frac{m(x - 1)}{x - m} &= \frac{1}{2} \ln \frac{b(x - m)}{m(x - b)} \\
 \Rightarrow \frac{m(x - 1)}{x - m} &= \frac{b(x - m)}{m(x - b)} \\
 \Rightarrow m^2(x - 1)(x - b) &= b(x - m)^2 \\
 \Rightarrow \frac{m^2}{(x - m)^2} &= \frac{b}{(x - 1)(x - b)} \\
 \Rightarrow \frac{m}{x - m} &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(x - 1)(x - b)}} \\
 \Rightarrow m &= \frac{\sqrt{b}(x - m)}{\sqrt{(x - 1)(x - b)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow m = \frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}} - \frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}} \\
&\Rightarrow m + \frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}} = \frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}} \\
&\Rightarrow m \left(1 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}} \right) = \frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}} \\
&\Rightarrow m \left(\frac{\sqrt{(x-1)(x-b)} + \sqrt{b}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}} \right) = \frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}} \\
&\Rightarrow m = \frac{\frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}}}{\frac{\sqrt{(x-1)(x-b)} + \sqrt{b}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}}} \\
&\Rightarrow m = \frac{\sqrt{bx}\sqrt{(x-1)(x-b)}}{\sqrt{(x-1)(x-b)}(\sqrt{(x-1)(x-b)} + \sqrt{b})} \\
&\Rightarrow m = \frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{(x-1)(x-b)} + \sqrt{b}} =: f(x)
\end{aligned}$$

Definimos a m como una función $f(x)$ (de igual forma $m' = f(x')$). Como la derivada $f'(x) < 0$, la función $f(x)$ es monótona decreciente en x . Entonces, $m = f(x) > f(x') = m'$ y por lo tanto, $A' \neq A''$. Para el caso general ($n > 2$) se tiene que, si todo triángulo en K tiene la propiedad M, por el caso $n = 2$, la intersección de K con un 2-plano es una elipse. Entonces, por el lema 4.2, K es un elipsoide. ■

BIBLIOGRAFÍA

- A. Akopyan. On some classical constructions extended to hyperbolic geometry. *arXiv: 1105.2153v1*, 2011.
- M. Barot. *Un paseo a Hiperbolía*. SMM, CIMAT, 2005.
- J. Bracho. *Introducción analítica a las geometrías*. Fondo de cultura económica, México, D.F., 2009.
- R. Bulajich and J. Gómez. *Geometría*. UNAM, 2006.
- C. Dodge. *Euclidean geometry and transformations*. Dober Publications, Inc., 2004.
- H. Eves. *Estudio de las geometrías (Tomo I)*. UTEHA, 1969.
- E. Kasner and J. Newman. *Las matemáticas y la imaginación*. SMM, 2006.
- A. Lascurian. *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. UNAM, 2005.
- V. Prasolov and V. Tikhomirov. *Geometry (Translated from de russian)*. American Mathematical Society, 2001.
- A. Ramírez-Galarza and J. Seade. *Introducción a la geometría avanzada*. UNAM, 2005.