



**Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Construcción**

**Análisis de una Estructura Minimalista, en base a una Metodología de
Optimización no-lineal**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en Construcción

Presenta:

D.I. Luz América Sánchez Casanova

Dirigido por:

Dr. Jaime Horta Rangel

SINODALES

Dr. Jaime Horta Rangel
Presidente


Dr. Juan Bosco Hernández Zaragoza
Secretario

M. en C. Joaquín Noriega Montes
Vocal

M. en I. Rubén Ramírez Jiménez
Suplente

M. en I. Humberto Uehara Guerrero
Suplente


Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad



Firma



Firma




Firma



Firma



Firma



Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Septiembre 2007
México

RESUMEN

La búsqueda de nuevas propuestas para crear estructuras es parte de cuantiosos trabajos e investigaciones. Tensegridad es una de ellas, la cual no está completamente explotada a su máximo potencial para la construcción, sobre todo en países poco industrializados como México. Este trabajo aporta una propuesta analizando una estructura factible y la optimización no lineal de la misma. Propone abrir uno de los tantos campos del estudio de la tensegridad; creada por la naturaleza pero entendida, estudiada y aplicada en la rama de la construcción en los años 60's. A pesar de que el concepto de tensegridad tiene más de medio siglo de haber sido puesta en la rama de la construcción, no se ha explotado y utilizado en mayor medida. Tensegridad no es parte de la vida académica y no es parte de soluciones estructurales de bajo costo dentro de la construcción mexicana. Existen autores que han abordado el tema de tensegridad, muchos de ellos se inclinan por el estudio matemático y la comprensión de su sistema numérico, sin embargo las conclusiones están enfocadas justamente a ese campo, las matemáticas. Este documento pretende aportar al estudio de la tensegridad mostrando el potencial que existe, entender su comportamiento de una manera genérica sustentada por el análisis de elemento finito y la optimización. Aportando así un documento compuesto por tres facetas, la propuesta como una estructura de tensegridad, el análisis de la misma y la optimización de esta, para abrir la inquietud en la academia, el de los alumnos de nuestro país y el de esta institución académica.

(Palabras clave: Tensegridad, tensión, compresión, análisis, optimización, estructura)

SUMMARY

The search of new proposals to create structures is part of many papers and thesis. Tensegrity is one of these topics; it has not been completely exploited regarding its maximum potential in the field of construction, especially in countries that are less industrialized like Mexico. This work contributes a proposal by analyzing a feasible structure and its non-linear optimization. This work proposes opening one of the many topics in the research of Tensegrity, which was created by nature but not quite understood, studied or applied to the structure design branch until the 60's. Although the concept of tensegrity appeared worldwide over fifty years ago, the concept has not been extensively used. Tensegrity is not only part the academic world, and it is not part of low cost structural solutions within the construction area in Mexico.. Many researchers have talked about tensegrity, many of them have been more inclined to the mathematical study and the understanding of its numerical system; nevertheless, the conclusions are focused precisely on mathematics. This document contributes in the study of tensegrity, showing the big picture as a structural proposal, to understand its behavior in a generic way; supported by Finite Element Analyses (FEA) and optimization. Thus, this document is made up of three stages, the concept as a structure of tensegrity, its analysis and finally its optimization, all these to promote the interest in future research of structural designs

(Key words: Tensegrity, tension, compression, analysis, optimization, structure)

A mi hijo que me acompañó en el vientre mientras yo aprendía
Parte del tiempo que no he estado contigo
está plasmado en este trabajo.

**A mis Padres, por ese apoyo incondicional,
soy el reflejo de sus enseñanzas y espíritu.**

A mis hermanos, por su cariño y apoyo.

**A todas las personas que directa o indirectamente
me ayudaron a que este proyecto sea una realidad.**

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Institución, la Universidad Autónoma de Querétaro que me abrió las puertas para continuar con mi preparación académica.

Agradezco a mis profesores porque transmitieron su conocimiento, su paciencia y su experiencia.

Agradezco a los Coordinadores de la Maestría, Directores de Postgrado por motivar y dejarme continuar con este proyecto.

Agradezco a los Sinodales porque su opinión hizo mejorar este documento.

Un reconocimiento a todas las personas que trabajan para la Universidad Autónoma de Querétaro, porque su trabajo aporta al país más de lo que ellos se imaginan.

En especial deseo plasmar en este espacio mi agradecimiento al Dr. Jaime Horta Rangel porque aceptó mi propuesta, fue mi guía y apoyo; me enseñó no sólo académicamente si no también el valor de un compromiso. Y al Mtro. Humberto Uehara Guerrero por introducirme en este tema tan fascinante.

INDICE

	Página
Resumen	i
Summary	ii
Dedicatorias	iii
Agradecimientos	iv
Índice	v
Índice de figuras	vii
Índice de tablas	viii
I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Prefacio	1
1.2 Justificación	4
1.3 Objetivo	5
1.4 Hipótesis	6
II. ANTECEDENTES	7
2.1 Tenseguridad	7
2.2 Análisis de Elemento Finito	11
2.3 Optimización	12
III. METODOLOGÍA	17
3.1 La Tenseguridad	18
3.2 Patrones y Nomenclatura	22
3.3 Materiales	25
3.4 Análisis de Elemento Finito	28
3.5 Ingeniería contra Análisis	32
3.6 Optimización	33
3.7 La Optimización en ANSYS	41

3.8	Introducción a la Optimización del Diseño	42
IV	ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN DE ESTRUCTURA	46
V.	RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN	65
VI.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS	82
VII.	CONCLUSIÓN	85
	BIBLIOGRAFÍA	87
	APÉNDICE	91

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura		Página
1.1	Fig.1.1, Mesa minimalista (Kosmos). Diseñadora Kerstin Olby, Olby Design, 1990.	3
1.2	Estructura Simple de Tensegrid 3 elementos a tensión, 10 cables.	5
1.3	Estrucutra de 6 elementos a tensión. 24 cables.	6
2.1	Escultura de Kenneth Snelson, NeedleTower II, 1969.	7
2.2	Escultura de Kenneth Snelson, Cross-weave Cross, 1971 Bamboo y Nylon.	8
2.3	R. Buckminster Fuller, con estructura a tensión, 8 elementos. 16 cables.	9
2.4	Análisis de una viga por elemento finito, deformación por desplazamientos.	11
3.1	Figura multiple elementos, 18 elementos a tensión, 108 cables.	19
3.2	Fotografía de células endocrinas, pertenecientes a una vena umbilical humana.	20
3.3	Modelos de Tensegridad, formadas por tetraedros, basados en la columna vertebral del ser humano.	21
3.4	Modelo por computadora, de 3 elementos a tensión, 7 cables, autores D. Williamson y D. Whitehouse, 2002.	23
3.5	Modelo por computadora, de 4 elementos a tensión, 24 cables, autores D. Williamson y D. Whitehouse, 2002.	24
3.6	Detalle de estructura a tensión, hecha de acero y madera.	25
3.7	Escultura de Kenneth Snelson, Penta Tower, 2001-2003.	27
3.8	Ejemplo de carga puntual en una viga, con un punto de sujeción.	29

3.9	Representación de nodos y elementos, para mostrar grados de libertad.	29
3.10	Muestra de análisis por elemento finito, cargas máximas en Puente.	31
4.1	Imagen para representar los grados de libertad de una barra para el análisis de estudio.	47
4.2	Modelo inicial, Prueba de Tenseguridad. Numeración de barras, 1-6 y Tensores 7-30.	50
4.2.1	Conformación geométrica de barras.	51
4.2.2	Conformación geométrica global de ejemplo de tenseguridad.	51
4.3	Ejemplo de Tenseguridad, fuerzas axiales en barras.	63
4.4	Ejemplo de Tenseguridad, fuerzas axiales en tensores.	63
4.5	Desplazamientos del primer ciclo de Tenseguridad.	64
4.6 (a)	Muestra de tenseguridad, 4 elementos y 24 cables. Octaedro expandido.	68
4.6 (b)	Muestra de tenseguridad, 5 elementos y 20 cables. Tetraedro truncado.	68
4.6.1	Modelo2 en ANSYS de barras, para el segundo análisis. Elementos independientes.	68
4.6.2	Modelo discreto de Tenseguridad2, con cables.	69
4.6.3	Conformación geométrica global, barras y tensores. Modelo de Tenseguridad2.	69
4.6.4	Modelo de Tenseguridad2, muestra de desplazamientos en el modelo.	73
4.6.5	Modelo de Tenseguridad2, restricciones en apoyos.	73
4.6.6	Modelo de Tenseguridad2, Fuerzas axiales en barras.	74
4.6.7	Modelo de Tenseguridad2, Fuerzas axiales en cables.	74

ÍNDICE DE TABLAS Y MACROS

Tabla		Página
4.1	Propiedades del material, barras y cables. Primer modelo.	52
4.2	Lista de elementos seleccionados.1-30.	53
4.3	Macro de Análisis (Lenguaje Fotran).	54
4.4	Macro de Optimización (Lenguaje Fotran).	60
4.5	Resultados del ciclo de optimización. Primer modelo	65
4.6	Propiedades del material, barras y cables. Segundo modelo.	67
4.7	Macro de Análisis y Optimización (Lenguaje Fotran).	76
3.8	Resultados del ciclo de optimización. Segundo modelo.	81

I. INTRODUCCION

1.1 Prefacio

Durante la historia del hombre la modificación de su entorno para satisfacer sus necesidades primordiales ha sido imperiosa y de una gran importancia. Dentro de este proceso de modificaciones, uno de los principales cambios que ha motivado y que ha transformado a la humanidad, lo constituye la generación y evolución de su hábitat.

El hombre ha recorrido alrededor de 65 millones de años de historia hasta hoy día. Este transitar evolutivo no sólo ha cambiado la forma de ser, de pensar, de actuar del ser humano, sino también ha generado los cambios requeridos y adecuaciones en su entorno, en particular en su vivienda y en los espacios en los que se desenvuelve. La eficacia en estos cambios se deriva de una necesidad que de manera natural el ser humano se plantea (Robert Ardrey, *La Evolución del Hombre*, Ed. Alianza, España. 2000).

En materia de construcción el hombre ha transitado desde los trabajos en piedra hasta el desarrollo de los nuevos materiales denominados inteligentes, pasando por una gran gama de propuestas y diseños estructurales cada vez más novedosos y que requieren los espacios que exigen sus circunstancias actuales.

Así por ejemplo, las formas (estructuras) espaciales se han convertido en muchas partes del mundo moderno en un entorno cada vez más común, que proporciona un espacio de desenvolvimiento para vivir, para crear y finalmente para mejorar nuestro hábitat. Los sistemas espaciales representan actualmente una opción única para generar espacios creativos ya sean abiertos o cerrados, se les observa de manera asidua en edificios, aeropuertos, museos, e incluso en diseños aeroespaciales. En vivienda (casa-habitación) su uso es aún restringido, se observan sin embargo cada vez más propuestas tipo membrana prefabricadas de una gran versatilidad cuyo objetivo es el de proveer un espacio habitable de bajo costo.

Las formas espaciales simulan con mayor naturalidad y eficacia los diseños propios existentes en la naturaleza, diseños que están a nuestro alcance en todo momento pero que por falta de observación, el ser humano no lo ha asumido plenamente ni lo aplica con suficiencia para su propio hábitat. Estructuras naturales nos proporcionan ejemplos únicos de rigidez estructural sin perder la belleza de sus formas. Algunas formas estructurales planteadas por el hombre se han desarrollado tratando de reproducir a las estructuras naturales, su conformación geométrica imita la forma de una telaraña, o bien un panal de abeja, la forma de una concha de mar, etc. El resultado es una estructura artificial de elementos espaciales cuya forma proporciona por si sola una gran rigidez logrando disminuir significativamente su peso.

El estudio que aquí se aborda se basa en las estructuras a tensión, en la conformación espacial de elementos que rigidizan de manera importante todo el conjunto. Se considerará que esta estructura se conforma con unidades estructurales que pueden ser inestables, para este caso se utilizará un sistema de cables tensados cuyo objetivo primordial es estabilizar dicha unidad estructural, su inclusión sin embargo incide sobre todo el sistema estructural.

El estudio abordará el caso de una estructura minimalista bajo el concepto "Tenseguridad" que si bien no es desconocida en nuestro país, si es más reconocida y utilizada en otras partes del mundo. Uno de los países con un gran auge en este tipo de estructuras es Japón, EEUU y Alemania, en donde se puede observar su uso cada vez más común y asiduo por parte de arquitectos e ingenieros diseñadores.

Definición de Estructura minimalista:

Para un mejor entendimiento del concepto que se eligió para denominar a la estructura como minimalista, se hace una breve explicación del significado, el cual está enfocado a un concepto de arte contemporáneo.

La definición que se encontró en el Diccionario de la Real Academia Española (2007) fue:

- Palabra del idioma inglés -. “Minimal art”.- Corriente artística que utiliza elementos mínimos y básicos, como colores puros, formas geométricas simples (Fig. 1.1) , tejidos naturales, lenguaje sencillo, etcetera.

Por lo tanto una estructura minimalista se define en este estudio como la mínima expresión que se puede conseguir entre los elementos indispensables para obtener una estructura, en este caso de estudio a tensión.



Fig.1.1, Mesa minimalista (Kosmos)
Kerstin, Olby Design AB

1.2 Justificación

El estudio que se presenta aborda el conocimiento, análisis y optimización de una estructura a tensión con la finalidad de aportar un conocimiento más profundo de este tipo de estructuras, ya que en nuestro país existe un mínimo estudio y no se encuentra la suficiente literatura del tema.

Tenseguridad es un concepto relativamente nuevo y con poco uso dentro del mercado de la construcción. Las estructuras a tensión es un tema novedoso y basto para ser estudiado y aplicado a nuevas formas de las estructuras minimalistas.

Este documento tiene la finalidad de estudiar que las estructuras pretensadas a partir de cables metálicos siendo el objetivo desarrollar una estructura ligera bajo un criterio de restricciones impuestas; de esta manera generar una estructura eficiente y racional. El procedimiento se basa en un esquema acoplado de análisis-diseño bajo el criterio de elasticidad lineal, conjuntamente con un modelo de optimización no-lineal. Este procedimiento difiere de análisis tradicionales en donde solo se revisa el planteamiento estático lineal del conjunto y mucho menos se orienta el modelo de estudio a un criterio de optimización. Resulta pues de interés tanto desde un punto de vista de investigación, como desde la perspectiva del medio profesional, el cual requiere de planteamientos que permitan la generación de estructuras ligeras y confiables.

1.3 Objetivo

Proponer una metodología de análisis-diseño de una estructura minimalista (Fig. 1.2) sobre la base de un modelo de optimización no-lineal. La estructura estará compuesta de elementos metálicos presforzados con cables u otro material que pueda ser sugerido, el estudio se llevará a cabo con el programa ANSYS, abarcando de igual manera bajo el mismo programa una propuesta de optimización no lineal. Con el objetivo de observar el comportamiento de dicha estructura y sus implicaciones. Y dando la oportunidad de conocer mejor este tipo de estructuras, relativamente nuevas.



Fig. 1.2, Estructura simple de tensegridad

1.4 Hipótesis

- 1.- El sistema estructural experimenta un comportamiento elástico lineal.
- 2.- Las unidades estructurales del sistema se estabilizan en base a tensores presforzados.

Elementos para la aplicación de las hipótesis:

- Los modelos aplicables de optimización no-lineal serán tipo: Random, gradiente, factorial, ó sub-problema, se aplicarán en función de la convergencia con los mínimos locales requeridos.
- Como función objetivo se utilizará ya sea la longitud total de los elementos estructurales, o bien el volumen total de los elementos.
- Dependiendo del caso se considerarán como variables de diseño las coordenadas (X,Y,Z) de los nodos del sistema "Tensegrity", asimismo se incluirá el preesfuerzo inicial en los cables.
- Como variables de estado serán considerados los esfuerzos en barras y en tensores. En ciertos casos se podrá incluir el desplazamiento máximo del sistema.
- Los elementos finitos utilizados tanto para barras como para los cables serán un elemento unidimensional link de dos nodos con 3 grados de libertad lineal por nodo (fig.1.3).

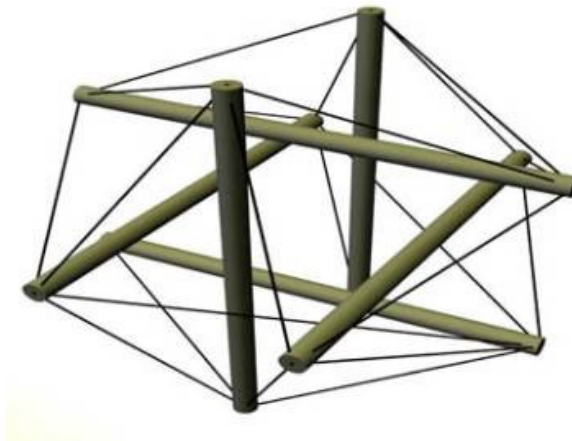


Fig. 1.3 Estructura de 6 elementos de tensegridad

II. ANTECEDENTES

2.1 Tensegridad

La naturaleza usa un balance de tensión y compresión y los elementos que comprimen casi siempre son más pesados y masivos que los componentes a tensión. Un componente a tensión sólo necesita ser lo suficientemente grueso para soportar un peso determinado, mientras que un componente a compresión requiere de más elementos combinados entre sí que ayuden a soportar dicho peso. En la naturaleza es común encontrar los ejemplos de tensión y compresión combinados. De los más comunes y con el cual estamos estrictamente relacionados, el cuerpo humano; los huesos en conjunto con los tendones soportan el peso de nuestro cuerpo. Otro ejemplo es el efecto de tensión en el agua el cual soporta a un mosquito, gracias a que entre las moléculas del agua se forma una malla invisible a tensión.

Una de las teorías acerca de los orígenes de las estructuras a tensión, parte de los estudios de la geometría y arquitectura de formas desarrollada por Richard Buckminster Fuller, en 1961, su influencia es fundamental para llegar a las formas estructurales que hoy conocemos y que son temas de nuestro estudio. Otra teoría con implicaciones en la evolución de las estructuras tensadas se basa en la estructura celular denominada: citoesqueleto y que en base a su estabilidad propia se generan estructuras similares a diferentes escalas. Uno de los primeros tratados a este respecto se atribuye al escultor Kenneth Snelson (Gómez Valentin, Tensegridad. 1ª Ed, Universidad de Cantabria, 2004).

Fuller se esforzó por entender los principios de tensión y compresión en las diferentes ramas de la ingeniería que ya existían en su época, basándose en inventos humanos como el avión y los veleros.

Existe una discrepancia entre quien fue el creador del concepto "Tensegrity" (en el idioma original, Inglés). Las cuales se vierten entre dos grandes personajes, uno de ellos enfocado a la arquitectura y el otro enfocado a la escultura.

De acuerdo a lo estudiado y documentado en diferentes fuentes, no existe un documento oficial que compruebe dicho origen de la palabra, sin embargo, en la literatura podemos encontrar que los principios de "Tensegrity" los presentó Richard Buckminster Fuller y el primero que presentó las ideas plasmadas en un modelo fue Kenneth Snelson.

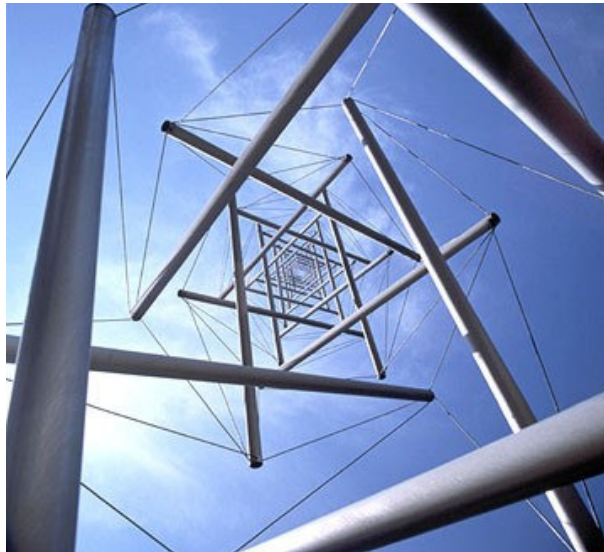


Fig. 2.1, Escultura, Kenneth Snelson
Needle Tower II, 1969

Kenneth Snelson

Kenneth Snelson es un escultor que ha dedicado toda su vida a mostrar y demostrar el trabajo de las estructuras a tensión, a las cuales él denomina “compresión espacial”. Las esculturas (Fig.2.2) de Kenneth Snelson han hecho más popular el concepto del “tensegrity” que cualquier otra persona. Sus construcciones a gran escala muestran como miembros a compresión pueden proporcionar rigidez mientras se mantienen separados entre sí, sin llegar a tocarse uno a otro, sostenido rígidamente solamente por medio de los cables tensados. Por medio de la compresión discontinua y de la tensión continua. Con ello se puede demostrar que la economía en materiales se puede reducir con las estrategias que confían en la tensión.

El encuentro entre Buckminster Fuller y Kenneth Snelson se presentó en un seminario impartido por Fuller en 1948, en “Black Mountain College” en el estado de Carolina del Norte en EEUU. A partir de ese seminario Kenneth basó sus estudios en las estructuras a tensión, y por cuenta propia creó los primeros modelos, mostrándoselos posteriormente a R. Buckminster Fuller (Urner Kirby, 1999, Word of Snelson. 1a Ed.).

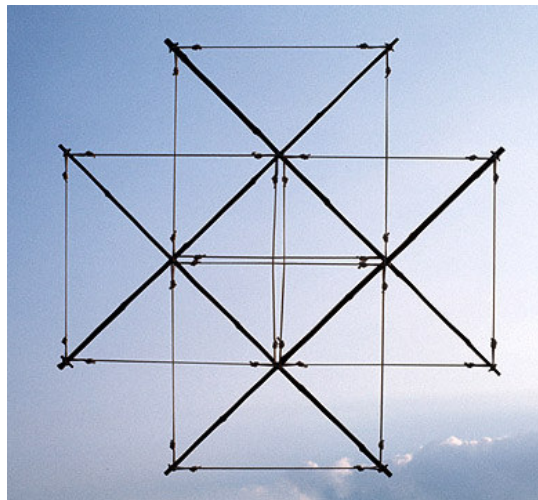


Fig. 2.2, Escultura, Kenneth Snelson
Cross-weave Cross, 1971, Bamboo and Nylon

R. Buckminster Fuller

Indudablemente de R. Buckminster Fuller (Fig.2.3) hay un extenso material, sobre todo en el idioma inglés, ya que es de nacionalidad estadounidense. Incluyo una biografía de lo que consideró lo más trascendente para este trabajo.

R. Buckminster nació en 1895 y muere en 1985, fue una de las figuras más inventivas, más influyentes, e inspirantes del siglo 20 dentro de los Estados Unidos de Norte América y el resto del mundo. Con sus ideas e invenciones, su docencia, influenció al pensamiento actual en una variedad amplia de campos, incluyendo diseño comercial e industrial, las ciencias, las artes y la arquitectura. Su acercamiento básico era aplicar conocimiento científico y creatividad para pensar “fuera de la caja” al procurar solucionar problemas prácticos.

La primera preocupación de Fuller era encontrar maneras de hacer más con menos, y utilizar recursos lo más eficientemente posible. Durante su vida y carrera, tiene alrededor de 25 patentes en los EEUU, escribió 28 libros, recibió 47 grados honorarios de doctorado. Buckminster dio seminarios de verano en la universidad de Black Mountain en 1948 y 1949, siendo director del instituto en el verano de 1949 (Buckminster R. and Marks R., 1973 *The Dymaxion World of Buckminster Fuller*, Anchor books).



Fig. 2.3 R. Buckminster Fuller. 1970

2.2 Análisis de Elemento Finito

El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas ingenieriles o físicos es conocido desde hace tiempo y el concepto de elementos finito parte de esa idea.

Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podríamos remontarnos a la época de la construcción de las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos.

Así el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número pi de 3.1416. El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día se inició bajo el cálculo estructural fundamentalmente para la creación de los aviones. En los años 40's R. Courant propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh- Ritz para aproximar soluciones.

Fueron M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J. Topp quienes presentaron el Analisis de Elementos Finitos, AEF, en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y

placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

En los libros de J.S. Przemieniecki y de O.C Zienkiewicz presentan el AEF en su aplicación al análisis estructural. El libro de O.C Zienkiewicz y Y.K. Cheung presenta una interpretación amplia del AEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En el se demuestra que las ecuaciones de los elementos finitos pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el AEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el AEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada. (Martin. H and Carey G., 1973. Introduction ti Finite Element Analysis, 1st Ed. McGraw-Hill)

Actualmente el AEF se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el AEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de las computadoras. Entre éstas, además de permitir la descentralización de los programas de elemento finito, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos (Fig.2.4) que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño en CAD.

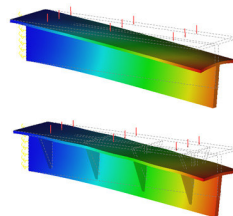


Fig. 2.4 Análisis de una viga por elemento finito, desplazamientos (ANSYS)

2.3 Optimización (Investigación de Operaciones)

El objetivo más importante de la optimización es apoyar en la “toma óptima de decisiones” en los sistemas y en la planificación de sus actividades.

Considero que los orígenes de optimizar son estrictamente desde que el hombre se enfrento a diversos problemas. Y enfatizo que el ingenio humano es ilimitado e infinito. Sin embargo para enmarcar este trabajo en una línea paralela a nuestro estudio debo de ligar el inicio de la optimización formal dentro de una rama. Me enfocaré en la historia a los orígenes militares de la optimización, si bien las guerras no son favorables para salvaguardar vidas humanas son puntas de lanza del desarrollo de nuevas tecnologías.

Aunque su nacimiento como ciencia se establece durante la Segunda Guerra Mundial y debe su nombre a las operaciones militares, los verdaderos orígenes de la Investigación Operativa se remontan mucho más atrás en el tiempo, hasta el siglo XVII, sin embargo, su auge es debido, en su mayor parte, al gran desarrollo de la informática, gracias a la cual es posible resolver problemas en la práctica y obtener soluciones que de otra forma conllevarían un enorme tiempo de cálculo.

Debido al gran éxito de la Investigación Operativa en el campo militar, esta se extendió a otros campos tales como la industria, física, informática, economía, estadística, probabilidad, ecología, educación y servicio social... siendo hoy en día utilizada prácticamente en todas las áreas.

A lo largo de la historia es frecuente encontrarse con la colaboración entre científicos y militares con el fin de dictaminar la decisión óptima en la batalla. Por esto muchos expertos consideran el inicio de la Investigación Operativa en el siglo III a.C. durante la II Guerra Púnica, con el análisis y solución que Arquímedes propuso para la defensa de la ciudad de Siracusa, sitiada por los romanos. Entre sus inventos se encontraban la catapulta, y un sistema de espejos con el que incendiaba las embarcaciones enemigas al enfocarlas con los rayos del sol.

En 1503, Leonardo da Vinci participó como ingeniero en la guerra contra Pisa ya que conocía técnicas para realizar bombardeos, construir barcos, vehículos acorazados, cañones, catapultas y otras máquinas bélicas.

Otro antecedente de uso de la Investigación Operativa se debe a F. W. Lanchester, quien hizo un estudio matemático sobre la potencia balística de las fuerzas opositoras y desarrolló, a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales, la Ley Cuadrática de Combate de Lanchester, con la que era posible determinar el desenlace de una batalla militar.

Thomas A. Edison también hizo uso de la Investigación Operativa, contribuyendo en la guerra antisubmarina, con sus grandes ideas, como la protección antitorpedos para los barcos.

Desde el punto de vista matemático, en los siglos XVII y XVIII, Newton, Leibnitz, Bernoulli y Lagrange, trabajaron en obtener máximos y mínimos condicionados de ciertas funciones. El matemático francés Jean Baptiste-Joseph Fourier esbozó métodos de la actual programación lineal. Y en los últimos años del siglo XVIII, Gaspar Monge asentó los precedentes del Método Gráfico gracias a su desarrollo de la Geometría Descriptiva.

Janos Von Neumann publicó en 1928 su trabajo "Teoría de Juegos", que proporcionó fundamentos matemáticos a la Programación Lineal. Posteriormente, en 1947, visionó la similitud entre los problemas de programación lineal y la teoría de matrices que desarrolló.

En 1939, el matemático ruso L. Kantorovich, en colaboración con el matemático holandés T. Koopmans, desarrolló la teoría matemática llamada "Programación Lineal", por la que les fue concedido el premio Nóbel.

A finales de los años 30 y principios de los 40, George Joseph Stigler planteó un problema particular conocido como régimen alimenticio óptima o más comúnmente conocido como problema de la dieta, que surgió a raíz de la preocupación del ejército americano por asegurar los requerimientos nutricionales de sus tropas al menor costo. Fue resuelto mediante un método heurístico cuya solución difería tan sólo unas centésimas de la solución aportada años más tarde por el Método Simplex.

Durante los años 1941 y 1942, Kantorovich y Koopmans estudiaron de forma independiente el problema del transporte por primera vez, conociéndose este tipo de problemas como problema de Koopmans-Kantorovich. Para su solución, emplearon métodos geométricos que están relacionados con la teoría de convexidad de Minkowski.

Pero no se considera que ha nacido una nueva ciencia llamada Investigación Operativa o Investigación de Operaciones hasta la II Guerra Mundial, durante la batalla de Inglaterra, donde la Fuerza Aérea Alemana, es decir la Luftwaffe, estaba sometiendo a los británicos a un duro ataque aéreo ya que estos tenían una capacidad aérea pequeña, aunque experimentada en el combate. El gobierno británico, buscando algún método para defender su país, convocó a varios científicos de diversas disciplinas para tratar de resolver el problema de sacar el máximo beneficio de los radares de que disponían. Gracias a su trabajo determinando la localización óptima de las antenas y la mejor distribución de las señales consiguieron duplicar la efectividad del sistema de defensa aérea.

Al apreciar el alcance de ésta nueva disciplina, Inglaterra creó otros grupos de la misma índole para obtener resultados óptimos en la contienda. Al igual que Estados Unidos, al unirse a la Guerra en 1942, creando el proyecto SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs), donde se encontraba trabajando George Bernard Dantzig, quien desarrolló en 1947 el algoritmo del método Simplex (Frederick S. H, 2006,. Introducción a la Investigación de Operaciones, 8^a Ed. McGraw-Hill).

Se destaca que los métodos de optimización también son conocidos con otros nombres como: Investigación Operativa o de operaciones, Métodos cuantitativos y Simulación matemática, entre otros.

III. METODOLOGÍA

Dentro de la metodología se incluye tres pasos fundamentales de la investigación.

- a) **Conceptos y conocimiento**, de las materias involucradas en esta investigación. Con el objetivo de entender y asimilar cada uno de los tres principales elementos como materias aisladas, las cuales nos ayudaron a obtener el resultado final de esta investigación.
 - I) Tenseguridad
 - II) Materiales
 - III) Análisis por Elemento Finito (AEF)
 - IV) Optimización

- b) **Análisis de la estructura de estudio**, donde se obtiene el comportamiento de la estructura a tensión. Aclarando que el resultado de este análisis es estrictamente un elemento de apoyo para ampliar el conocimiento de Tenseguridad y el desempeño como estructura.

- c) **Optimización del elemento de estudio**, la optimización se representa también un elemento de soporte para proponer posibles mejoras a la estructura de estudio.

3.2 La Tensegridad (Definición)

En cualquier sistema estructural debe de existir algún tipo de continuidad que permita que las fuerzas se transmitan de una parte de la estructura a otra. En la mayoría de las estructuras hechas por el hombre esta continuidad es alcanzada por los miembros a compresión con algún miembro ocasionalmente a tensión siendo incorporado donde no puede ser evitado.

La palabra “Tensegrity” (del idioma inglés) es usada para describir una unidad estructural estabilizada mediante tensores. Describe un principio de la relación principal en una estructura en la cual la forma estructural está garantizada por un circuito cerrado de elementos que se encuentran unidos mediante cables sujetos a tensión. Una traducción cercana a este concepto sería quizá: “Integridad de la tensión”.

En el sistema de Tensegridad la continuidad es alcanzada por elementos interconectados continuos a tensión, los elementos a compresión son discontinuos. Esto fue lo que Buckminster Fuller (1961) definió para explicar el concepto de Tensegridad.

“Tensegrity” describe las fuerzas de tensión y empuje, mismas que establecen una relación funcional creando una estructura rígida y estable. Estas estructuras con un peso mínimo, tienen la capacidad de resistir cargas bajo un esquema de racionalidad y eficiencia (Pugh A. 1976, an introduction Tensegrity, University of California Press).

El Sistema de Tensegridad es definido como:

Un sistema de Tensegridad (Fig. 3.1) está establecido cuando un escenario de componentes a compresión interactúan en un escenario de componentes de tensión continua para definir un volumen que se establece en el espacio.

Es importante denotar que la palabra puntal o arista y tendón o ligamento no son usadas en la definición que realizó Fuller. Ya que los componentes no siempre son usados como tales.

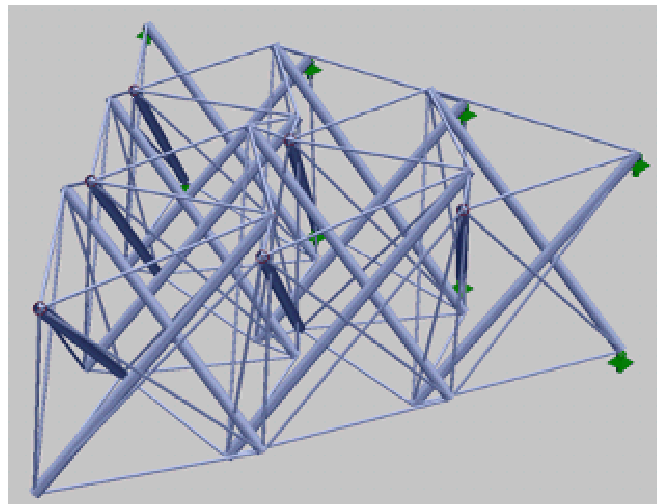


Fig. 3.1 Tensegrity, imagen computada
Lorenz Kuchenstueck, 2005

Aunque sé que no es parte de este estudio considero de suma importancia aportar brevemente lo que existe en conceptos de tensegridad en otras ramas de la ciencia. De todas con otros nombres transmitiendo el mismo principio de tensión continua y compresión discontinua.

En biología

Los esqueletos celulares se les llama citoesqueletos por los biólogos, están constituidos por moléculas de proteínas organizadas en cadena. Los citoesqueletos dan la forma a las células, las ayudan a mover, y mantienen al núcleo en su lugar (Fig.3.2).

Los citoesqueletos poseen tensegridad. Equilibran la compresión con tensión y ceden a fuerzas sin romperse. En las estructuras arquitectónicas, los cables resisten la tensión y las varillas soportan la compresión. En el citoesqueleto, las cadenas de proteínas, finas, gruesas o huecas, cumplen el rol de los cables y las varillas. Todas las proteínas conectadas forman una estructura estable y al mismo tiempo flexible.

Los citoesqueletos responden a la gravedad. El peso puede originar tanto tensión como compresión. Dentro de los biólogos más reconocidos que ha estudiado este tipo de estructuras celulares es el Dr. Donald E. Ingber.

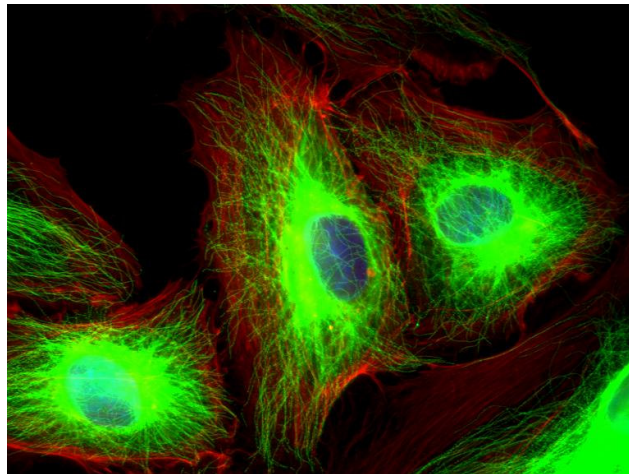


Fig. 3.2 Células endo-helial de la vena umbilical humana

En Osteopatía

Un aumento en la tensión en uno de los miembros (dentro de la estructura icosaedro) da lugar a la tensión creciente en los miembros a través de la estructura, incluso unos en el lado opuesto. Los principios del “tensegrity” se aplican en esencialmente cada escala perceptible del tamaño en el cuerpo humano (Fig.3.3). En el nivel macroscópico, los 206 huesos que constituyen nuestro esqueleto se levantan contra la fuerza de la gravedad y son estabilizados en una forma vertical por el tirón de músculos, de tendones y de ligamentos extensibles. Es decir en la estructura compleja del “tensegrity” dentro cada de nosotros, los huesos son los puntales de la compresión, y los músculos, los tendones y los ligamentos (y todas las estructuras facial internas interconectadas) son los miembros tensión bearing, (A. Gehin, Diembre ‘04 – Enero ‘05, Vol 7, The Osteopath, Magazine).

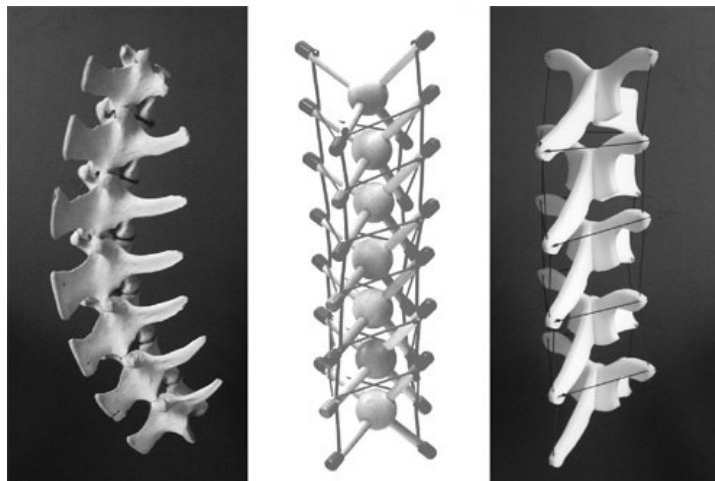


Fig. 3.3, modelos de Tensegridad
Tetraedro - columna

3.2 Patrones y Nomenclaturas

La literatura encontrada no es extensa en la materia de tensegridad, sin embargo se encontró dos fuentes que nos brindan la posibilidad de establecer patrones de como se construye una estructura de tensegridad.

Se encontró tres maneras simples de darle patrones a las estructuras a tensión.

La primera dada por Anthony Pugh, en 1976 (Universidad de California), donde simplemente describe como se crean las estructuras a partir de formas geométricas, iniciando por 2 Dimensiones hasta llegar a un conjunto de complejas formas a tensión.

Pugh describe dos principales patrones:

a) Figuras de dos dimensiones

- Con dos o más elementos (máximo 8)

b) Figuras cursando los puntales (a través de su centro)

- Cubo a base de cuatro puntales
- Icosaedro
- Puntales en triangulo
- El octaedro expandido y sus variaciones
- Patrones en diamante

Las otras dos maneras de proporcionar una patrón a estas estructuras están dadas por Darrell Williamson and Drew Whitehouse (Fig.3.4), los cuales representan los patrones de las estructuras de una manera sencilla, tomando cada uno de los elementos de la estructura por una letra, donde la estructura a tensión consiste de:

N= Miembros a compresión (puntales)

S= Los elementos tensionados (los cables)

M= Las etapas

P= Los puntales por etapa

Por lo tanto:

Sí (N, S; P1, P2, del PM.) El sistema de tensegridad tiene N puntales, su geometría externa se caracteriza por los coordenadas $2N$ de los “nodos”, o los “extremos” de los puntales. La “forma que resulta” de tendesgridad entonces depende de las características de los componentes constitutivos (es decir, de las longitudes de los puntales y las longitudes del resto de los cables), de la geometría interna (o de la topología) de cómo los puntales y los cables están conectados, y en la existencia de la misma tensión, o del pre-tensado, que es necesario para proporcionar la rigidez para la estructura.

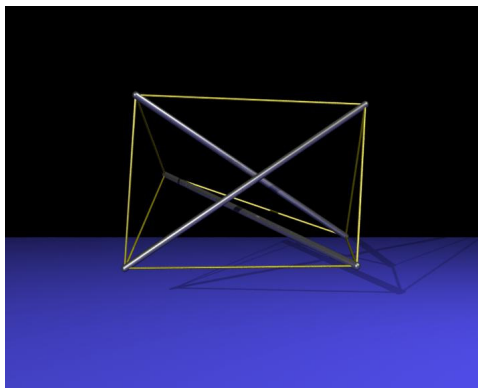


Fig. 3.4, Arreglo = N3,S9;M3, P6

Mientras que René Motro (Fig.3.5) define la nomenclatura con números y letras indistintamente.

Cada término con las iniciales siguió por el número de elementos, siendo enumerados:

N = nodos

S = puntales o componentes comprimidos

C = cables o componentes a tensión

R = sistema = sistema irregular dependiendo del caso

SS = sistema esférico

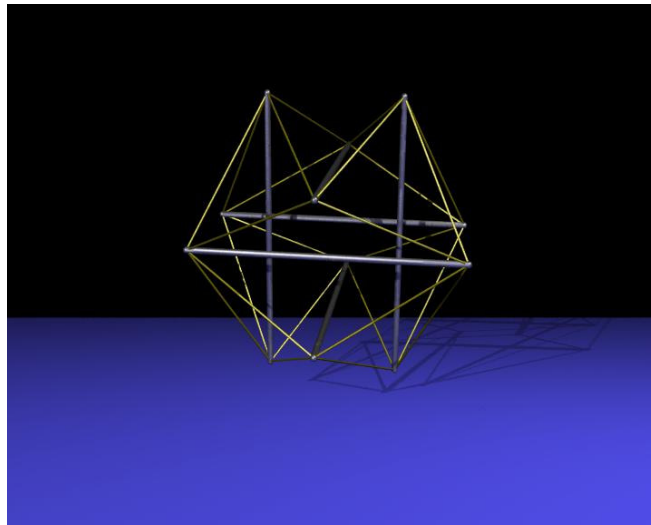


Fig. 3.5, Arreglo = N12,S4;C42

René Motro

Nota a resaltar: Se destaca que existe otro tipo de nomenclatura, se expusieron las más representativas y simples, sólo como conocimiento general de la estructura a Tensegridad.

3.3 Materiales

En la mayoría de los documentos estudiados, no se encuentra una definición para el uso de los materiales que se deben emplear en las estructuras de tensegridad.

Los materiales están basados de acuerdo a su rigidez, en caso de los elementos aislados y resistencia a la tensión de acuerdo a los elementos tensionados.

Ya que no es parte primordial del objetivo de este estudio, los materiales se mencionan sin mayor descripción que su mención con el objetivo de tenerlos en cuenta en esta sección de la metodología.

A continuación describen brevemente algunos materiales que se han nombrado en algunos documentos y estudios recientes.

Acero

El acero se usa en una gran variedad de tipos y formas, las estructuras de tensegridad por lo general utilizan el acero en tubo, y dependerá de cada usuario o creador de una estructura de tensegridad que calibre y diámetro de tubo de acero utilice, también de la longitud de la estructura, es un material con alta resistencia.



Fig. 3.6 Estructura a tensión con acero

Aluminio

De igual manera que el acero, el aluminio se encuentra en una gran variedad de formas para la construcción, en la actualidad se usa en una gran variedad de elementos estructurales, las principales ventajas son su peso ligero (un tercio del peso del acero) y su alta resistencia a la corrosión; y entre las desventajas está su suavidad, su baja rigidez y su variación de dimensiones por su expansión térmica. Y por su puesto un costo mucho mayor al del acero.

Madera

Las innovaciones técnicas aun supera algunas de las limitaciones tradicionales de la madera, como eran las de formas y tamaño, ampliando estas mediante la laminación y los adhesivos. Cabe mencionar las nuevas técnicas de sujeción permiten que la madera se utilice en mayor medida para las construcciones. Otras de las ventajas que la madera a adquirido son que a base de químicos y tratamientos con vapor, la hacen altamente flexible. De las desventajas es el movimiento de su estructura debido a la humedad y los cambios de temperatura.

Cable de acero

Un cable de acero es un conjunto de alambres de acero o hilos de hierro que forman un cuerpo único como elemento de trabajo. Combinando la disposición de los alambres y los cordones se obtienen cables de composiciones muy diversas. Los fabricados con alambres gruesos resisten bien el desgaste por rozamiento, pero tienen una gran rigidez y son poco resistentes a la flexión. Los cables compuestos por un gran número de alambres finos son muy flexibles, pero poco resistentes al rozamiento y a la corrosión.

Nylon

Capacidad del material de recuperar su tamaño y forma luego de la deformación. Uno de los factores fundamentales que han hecho posible la producción de hilados que se usan en la construcción es la capacidad de incrementar la temperatura de ruptura bajo altas cargas. El nylon (Fig.3.7) muestra inicialmente una recuperación rápida que ocurre en unos pocos minutos luego del cese de la carga.

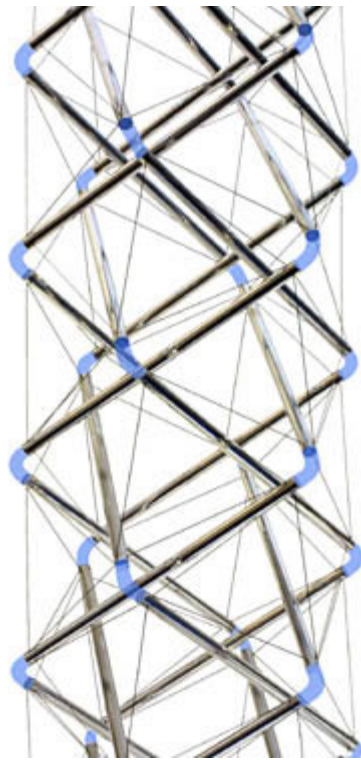


Fig.3.7 Escultura, Kenneth Snelson
Penta Tower, 2001-03

3.4 Análisis de Elemento Finito (Definición)

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un elemento continuo en un conjunto en pequeños elementos interconectados por un patrón de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del elemento u objeto continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no.

En cualquier sistema que se analiza podemos distinguir entre:

- Dominio. Espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- Condiciones de contorno. Variables conocidas y que condicionan el cambio del sistema: cargas, desplazamientos, temperaturas, voltaje, focos de calor, etc.
- Incógnitas. Variables del sistema que deseamos conocer después de que las condiciones de contorno han actuado sobre el sistema: desplazamientos, tensiones, temperaturas, etcétera.

Normalmente, esta técnica es muy utilizada en el ámbito de la ingeniería debido a que muchos problemas físicos de interés se formulan mediante la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales, a partir de cuya solución es posible modelar dicho problema (transmisión del calor, electromagnetismo y cálculo de estructuras, entre otros). Esta técnica actualmente se encuentra automatizada en las herramientas software comerciales como AMSYS, llamadas herramientas de análisis por elementos

finitos para problemas físicos tanto de propósito general, como aplicadas a problemas físicos particulares, como en el caso de este estudio.

Como se mencionó, el análisis de elementos finitos propone, para solucionar el problema, el dominio discretizado en subdominios denominados elementos. El dominio se divide mediante puntos en el caso lineal, mediante líneas en el caso bidimensional, o superficies imaginarias en el tridimensional. De forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de porciones u elementos, en que se subdivide. Los elementos se definen por un número discreto de puntos, llamados nodos, que conectan entre sí los elementos. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema.

En el caso de elementos estructurales estas incógnitas son los desplazamientos nodales, ya que a partir de éstos podemos calcular el resto de incógnitas que nos interesen: tensiones y deformaciones. A estas incógnitas se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Los grados de libertad de un nodo son las variables que nos determinan el estado o posición del nodo.

Por ejemplo si el sistema a estudiar es una viga (Fig.3.8) en voladizo con una carga puntual en el extremo y una distribución de temperaturas tal y como muestra la figura.

El discretizado del dominio puede ser:

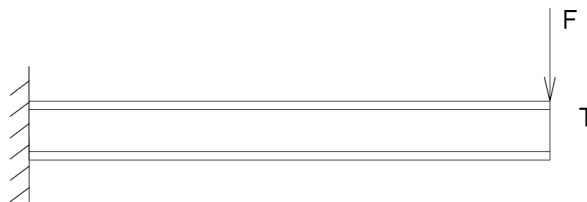


Fig.3.8 Carga puntual a Viga

Los grados de libertad de cada nodo serán (Fig.3.9):

- Desplazamiento en dirección x
- Desplazamiento en dirección y
- Giro según z

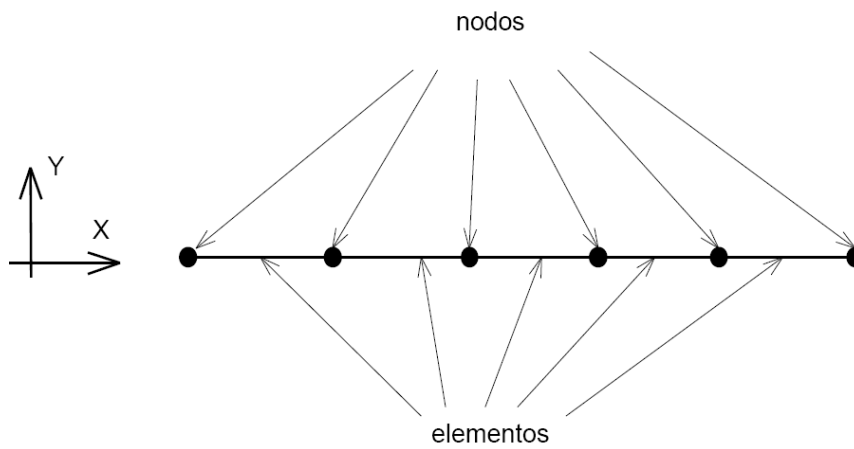


Fig.3.9 Nodos y Elementos

Temperatura

El elemento o sistema, debido a las condiciones de contorno: empotramiento, fuerza puntual y temperatura, evoluciona hasta un estado final, es decir forma final. En este estado final, conocidos los valores de los grados de libertad de los nodos del sistema podemos determinar cualquier otra incógnita deseada: tensiones, deformaciones, fractura, etc.

También será posible obtener la evolución temporal de cualquiera de los grados de libertad. Planteando la ecuación diferencial que rige el comportamiento del continuo hacia el elemento, se llega a fórmulas que relacionan el comportamiento en el interior del mismo con el valor que tomen los grados de libertad nodales. Este paso se realiza por medio de unas funciones llamadas de interpolación, ya que éstas interpolan el valor de la variable nodal dentro del elemento. El problema se formula en forma matricial debido a la facilidad de manipulación de las matrices mediante el cálculo del “software”. Conocidas las matrices que definen el comportamiento del elemento, en el caso estructural serán las llamadas matrices de rigidez, amortiguamiento y masa, se ensamblan y se forma un conjunto de ecuaciones algebraicas, lineales o no, que resolviéndolas nos proporcionan los valores de los grados de libertad en los nodos del sistema. (Zienkiewicz, O. C. - Taylor, R. L. 1994. El Método de los Elementos Finitos. Ed. McGraw Hill / CIMNE Barcelona).

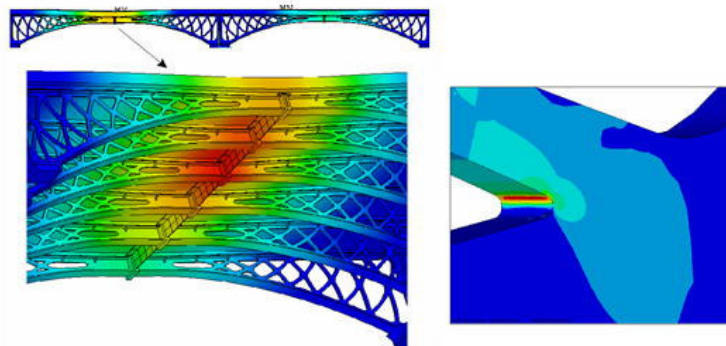


Fig. 3.10, Análisis por elemento finito

3.5 Ingeniería contra Análisis

Al ejecutar una simulación en un proceso debe estar considerada simplemente como una tarea dentro de un programa de diseño de un producto determinado. Cuando se trata en un proceso interactivo con elementos, la simulación de modelos va encaminada a la mejora del diseño.

Realmente es el análisis del diseño quién dice al final cuales serán los beneficios de la integración mejorada de la simulación en el proceso del diseño. Esto es primordialmente porque las definiciones básicas de los roles son diferentes. Un análisis especial es primordialmente tomado a partir de un comportamiento calculado de un sistema con uno o más parámetros específicos, es difícil o difícilmente se pueden apartar de estos parámetros.

El analista del diseño típicamente define los parámetros una vez que el diseño ya existe y esta en proceso, mientras perseguirá más objetivos tangibles del producto. En el desarrollo una parte o el producto, el analista puede empezar con una simple geometría conceptual para establecer las bases y los puntos de referencia. En las manos de un diseñador el analista que usa elemento finito se convertirá en una herramienta poderosa de gran influencia para futuros diseños. (V. Admans y A.Askenzi, 1999, Finite Element Analysis, On Word Press.)

3.6 Optimización (Definición)

El enfoque fundamental de la Optimización es el enfoque de sistemas, por el cual, a diferencia del enfoque tradicional, se estudia el comportamiento de todo un conjunto de partes o subsistemas que interaccionan entre sí, se identifica el problema y se analizan sus repercusiones, buscándose soluciones integrales que beneficien al sistema como un todo.

Para hallar la solución, la optimización generalmente representa el problema como un modelo matemático, que es analizado y evaluado previamente.

Tales problemas se pueden modelar matemáticamente como reduciendo al mínimo o maximizando una función generalmente de muchas variables (posiblemente) conforme a los apremios que dependen lineal o no linealmente de estas variables, el problema a que referimos genéricamente como problema de la optimización.

Actualmente la Investigación Operativa incluye gran cantidad de ramas como la Programación Lineal, Programación No Lineal, Programación Dinámica, Simulación, Teoría de Colas, Teoría de Inventarios, Teoría de Grafos, etcetera.

Arbol de la Optimización

Aquí se pueden distinguir cada uno de los elementos por los cual se puede llegar a una optimización y se menciona brevemente lo que se considera de mayor importancia para este estudio. (Goux J.P and Linderoth J. 2003,NEOS Guide).

Discretos

- Programación Entera
- Programación Estocástica

Continuos

- No restringidas
 - Ecuaciones No lineales
 - Mínimos Cuadrados no lineales
 - Optimización Global
 - Optimización No Diferenciable
- Restringida
 - Programación Lineal
 - Programacion Semidefinida
 - Restringida No lineal
 - Limite Restringido
 - Programación Cuadratica
 - Programación de redes
 - Programación Estocástica

Los problemas de la optimización se componen de tres ingredientes básicos:

-**Una función objetivo** que deseamos minimizar o maximizar. Por ejemplo, en un proceso de fabricación, puede ser que deseamos maximizar el beneficio o minimizar el costo. En un modelo definido por el usuario con datos experimentales, podríamos minimizar la desviación total de datos observados que provienen de predicciones basadas en el modelo. Al diseñar un panel del automóvil, puede ser que deseamos maximizar la fuerza.

- **Un conjunto de incógnitas** o variables las cuales afectan el valor de la función objetivo. En el problema de fabricación, las variables pudieron incluir las cantidades de diversos recursos usados o el tiempo requerido en cada actividad.

En problema de ajuste de datos, las incógnitas son los parámetros que definen el modelo. En el problema del diseño del panel, las variables usadas definen la forma y las dimensiones del panel.

- **Un conjunto de restricciones** que permiten a las incógnitas tomar ciertos valores pero excluir otros. Para el problema de fabricación, no tiene sentido pasar una cantidad negativa de tiempo en alguna actividad, así que restringimos a todas las variables de “tiempo” a que sean positivas. En el problema de diseño del panel, deseamos probablemente limitar el peso del producto y restringir su forma.

El problema de la optimización es entonces:

Encontrar los valores de las variables que minimizan o maximizan la función objetivo mientras que satisface las restricciones.

Función objetivo

Casi todos los problemas de optimización tienen una sola función objetivo. (Cuando no lo hacen pueden ser reformulados a menudo de modo que lo hagan!)

Las dos excepciones interesantes son:

Función no objetivo. En algunos casos (por ejemplo, diseño de las disposiciones del circuito integrado), la meta es encontrar un conjunto de variables que satisfaga las restricciones del modelo. El usuario no desea necesariamente optimizar algo, así que no hay razón para definir una función objetivo. Este tipo de problemas es generalmente llamado: *problema de factibilidad*.

Funciones objetivos múltiples. A menudo, el usuario quisiera optimizar un número de diversos objetivos simultáneamente. Por ejemplo, en el problema del diseño del panel, sería agradable reducir al mínimo el peso y maximizar fuerza simultáneamente. Generalmente, los diversos objetivos no son compatibles; las variables que optimizan un objetivo pueden estar lejos de óptimo para los otros. En la práctica, los problemas con objetivos múltiples son reformulados como problemas de un solo objetivo o formando una combinación cargada de diversos objetivos o bien substituyendo algunos de los objetivos por restricciones. Estos acercamientos y otros se describen en nuestra sección en la optimización multi-objetivo.

Variables

Éstas son esenciales. Si no hay variables, no podemos definir la función objetivo y las restricciones del problema.

Restricciones o Coaccionantes

Las restricciones no son esenciales. De hecho, el campo de la optimización libre es grande e importante para el cual los muchos de algoritmos y el software están disponibles. Se ha discutido que casi todos los problemas realmente tienen restricciones. ¡Por ejemplo, cualquier variable que denota el “número de objetos” en un sistema puede solamente ser útil si es menos que el número de partículas elementales en el universo sabido! En la práctica sin embargo, las respuestas que tienen buen sentido en términos de problema físico o económico subyacente pueden ser obtenidas a menudo sin poner restricciones en las variables.

Optimización continua

Es en la cuál, todas las variables se permiten que tomen valores de subintervalos de la línea verdadera

- Optimización no restringida
- Optimización restringida.

Optimización discreta

Es el cual requiere que algunas o todas las variables tengan valores de números enteros.

Programación de números enteros

- Optimización Multi-Objetivo

Donde se quisiera optimizar simultáneamente un número diverso objetivos

- Optimización no restringida

El problema de la optimización no restringida es central para el desarrollo del software de la optimización. Los algoritmos restringidos de la optimización son a menudo extensiones de algoritmos no restringidos, mientras que los cuadrados no lineales menores y los algoritmos no lineales de la ecuación tienden a ser especializaciones. En el problema de la optimización no restringida, buscamos localmente minimizar una función real con valor, $f(x)$, donde x es un vector de “n” variables verdaderas. Es decir buscamos un vector, x^* , tal que

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ para toda } x \text{ cerca del } x^*. \quad (3a)$$

Los algoritmos globales de la optimización intentan encontrar un x^* que reduzca al mínimo “f” sobre todos los vectores posibles “x”. Esto es un problema mucho más difícil de solucionar. Actualmente, no se conoce ningún algoritmo eficiente para realizar esta tarea. Para muchos usos, los mínimos locales son bastante buenos, particularmente cuando el usuario puede dibujar en su propia experiencia y proporcionar un buen punto de partida para el algoritmo.

El método de Newton realiza una clase importante de los algoritmos que requieren cómputo del vector del gradiente.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}, \quad (3b)$$

y la matriz de Hessian

$$\nabla^2 f(x) = (\partial_j \partial_i f(x)). \quad (3c)$$

Aunque el cálculo o la aproximación del Hessian puede ser una operación que desprecia el tiempo, hay muchos problemas para los cuales se justifica este cómputo. Describimos los algoritmos en los cuales el usuario provee el Hessian explícitamente antes de trasladarse encendido a una discusión de los algoritmos que no requieren el Hessian

El método de Newton forma un modelo cuadrático de la función objetivo alrededor de la actual interacción (repetición) \mathbf{x}_k . La función modelo se define como:

$$q_k(s) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T s + \frac{1}{2} s^T \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) s \quad (3d)$$

En el método básico de Newton, las siguientes repeticiones se obtienen del minimizar de \mathbf{x}_k . Cuando la matriz de Hessian

$\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ definido positivamente, el modelo cuadrático tiene un minimizador único que puede ser obtenido solucionando el simétrico $n \times n$

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_k) s_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (3e)$$

Las siguientes repeticiones son entonces

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \beta \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad (3f)$$

para una cierta constante positiva β

En la mayoría de las circunstancias, sin embargo, el método básico de Newton tiene que ser modificado para alcanzar convergencia.

Optimización Restringida, se conoce como:

- Optimización Restringida No lineal
- Optimización Restringida vinculada
- Programación cuadrática
- Programación lineal
- Programación Semi-definida
- Programación Estocástica
- Programación Interconectada
- Optimización Global
- Optimización no Diferenciada

Nota: Agregada sólo como referencvia de estudio.

3.7 La Optimización en ANSYS

En el paquete de análisis ANSYS existen dos diferentes tipos de optimización fundamentalmente.

La primera referencia como optimización del diseño trabaja completamente con los Lenguaje de Diseño Paramétricos de ANSYS (APDL, por su siglas en inglés. Y está dentro de su propio módulo (/OPT. La optimización del diseño en gran parte se concentra con controladores definidos por el usuario, donde:

APDL = Función/Parámetros;

que no están determinados o minimizados usando los métodos estándares de optimización, Ejemplo: minimización de la función, gradientes, diseño de experimentos.

La Introducción de la Optimización de diseño para el método de optimización de primer orden describe la teoría para las restricciones del diseño.

Optimización Topológica

Describe una segunda técnica, donde es una optimización de la configuración de la forma. Este a veces se refiere a la optimización del arreglo en la literatura dentro de optimización. El Objetivo de la Optimización Topológica es encontrar el mejor uso del material para un cuerpo tomando un criterio objetivo. Ejemplo: rigidez global, frecuencia natural, etcétera. Trabaja tomando el máximo/mínimo valor del objeto para dar las restricciones, como la reducción de volumen.

3.8 Introducción a la Optimización del Diseño

Con el módulo de Optimización de ANSYS se puede determinar un diseño óptimo, donde sea el mejor diseño predefinido. Donde el diseño óptimo de una estructura de marco quizás pueda determinarse para el peso máximo o mínimo, o bien en una transferencia de calor, obtener la mínima temperatura, o en una diseño magnético de un motor, el máximo punto del torque. En muchas otras situaciones la mini-maximación de una función simple no será el único objetivo, y la atención deberá estar dirigida a la satisfacción de las restricciones predeterminadas puestas en el diseño, Ejemplo límites en la tensión, geometría, fluido de calor, etcétera.

Las rutinas o corridas en ANSYS emplean tres tipos de variables que caracterizan el proceso de diseño las cuales son:

- Variables de Diseño
- Variables de Estado
- Función Objeto

Las variables independientes en una análisis de optimización son las variables de diseño, el vector de las variables de diseño están indicadas por:

$$X = [X_1, X_2, X_3, \dots, X_n] \quad (3g)$$

Las variables están sujetas a “n” restricciones con mayor o menor número de límites que se representan como:

$$\underline{X}_i \leq X_i \leq \bar{X}_i \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (3h)$$

Donde:

n = número de variables de diseño.

Las restricciones de las variables de diseño están referidas a menudo como restricciones laterales y están definidas comunmente como espacio factible de diseño.

Para minimizar se dice que:

$$f = f(x)$$

$$g_i(x) \leq \bar{g}_i \quad (i= 1,2,3,\dots m_1) \quad (3i)$$

$$\underline{h}_i \leq h_i(x) \quad (i= 1,2,3,\dots m_2) \quad (3j)$$

$$w_i \leq w_i(x) \leq \bar{w}_i \quad (i= 1,2,3,\dots m_3) \quad (3k)$$

Donde:

f = función objetivo

g_i, h_i, w_i = variables estables contenidas en el diseño, con barra baja y barra alta, representando bajo y alto vinculaciones respectivamente (MIN y MAX).

$m_1 + m_2 + m_3$ = número de variables de estado restringidas con límites de valores altos y bajos.

Las variables de estado pueden estar referenciadas también como variables dependientes en tanto estas varíen con el vector "x" de las variables de diseño.

El mejor escenario de Diseño

Un escenario de diseño está generado por métodos o herramientas y si una función objetivo está definida, el mejor escenario de diseño es computado y su número esta propuesto. El mejor escenario está determinado bajo una de las siguientes condiciones:

- 1.- Sí uno o más escenarios factibles existen, el mejor escenario de diseño es factible con una función objeto del valor más pequeño.
- 2.- Sí todos los escenarios son no factibles, el mejor escenario de diseño es el más cercano a lo que el usuario busca, es el más factible, independientemente del valor de la función objeto.

Métodos de Optimización y Herramientas de Diseño

Los procedimientos de Optimización ofrecen muchos métodos y herramientas que de varias maneras intentan direccionar el problema matemático descrito arriba. Los métodos actuales de Optimización del paquete ANSYS efectúan la minimización de la función objeto de la ecuación $f = (x)$.

Esto se mostrará cuando los métodos o herramientas transforme un problema restringido que está eventualmente minimizado. Las herramientas en otra manera, no efectúan la minimización directamente. La utilización de las herramientas ofrecen significados alternos para el espacio entendido del diseño y el comportamiento de las variables dependientes. (Structural Analysis Guide, 1998, realse 5.5. ANSYS Inc.)

Herramientas de Optimización en ANSYS

A continuación se mencionan las herramientas que el paquete de análisis de elemento finito ofrece, las cuales serán utilizadas por la investigadora, dependiendo de la mejor opción a criterio de la misma.

- Herramienta de Corrida simple
- Herramienta de Random
- Herramienta de Barrido
- Herramienta Factorial
- Herramienta de Gradiente

IV. ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA

Matrices estructurales

El modelo discreto correspondiente a los elementos unidimensionales (viga) utilizados para modelar los elementos de un sistema reticular 3-D, tiene la forma (Cook R., et. al., 1988)

$$\left\{ \int_B [B]^T [D] [B] dv + \int k [N]^T [N] da \right\} \{U\} = \int_B [N]^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} dv + \int_{\partial B} [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} d\partial B + \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \quad (4.a)$$

en donde:

[B] : matriz de derivadas de funciones de forma

[D] : matriz de constantes elásticas

[N] : matriz de funciones de forma

b_x, b_y, b_z : fuerzas de cuerpo

p_x, p_y, p_z : presiones actuantes en la superficie del cuerpo

P_x, P_y, P_z : fuerzas puntuales aplicadas en los nodos del modelo discreto.

k : modulo de rigidez del suelo.

La ecuación (39) se puede mostrar en una forma mas compacta:

$$([K_s] + [K_c])\{U\} = \{f\} \quad (4.b)$$

Siendo:

[K_s] : matriz de la estructura.

[K_c] : matriz de rigidez del cimiento elástico.

{U} : vector de desplazamientos nodales.

$\{f\}$: vector carga.

Los grados de libertad de la viga se muestran en la figura:

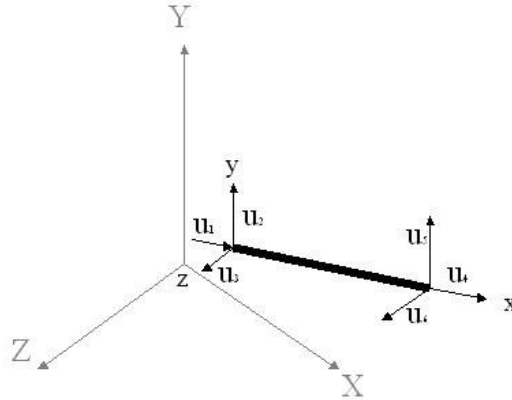


Fig. 4.1 Elemento finito unidimensional – viga 3D. Grados de libertad

El caso correspondiente a un elemento “Tensegrity” difiere solamente, en que se consideran los desplazamientos angulares nulos. De esta manera el modelo se simplifica, y la matriz de rigidez tiene ahora la forma siguiente:

$$[k] = \frac{EA}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.c)$$

En adición son considerados los efectos de preesfuerzo, es decir las deformaciones iniciales ϵ_0 .

PROGRAMA ANSYS

Características generales

El Programa ANSYS (Análisis de Sistemas) es un programa de modelación que permite simular procesos fenomenológicos multipropósito. Ha sido diseñado para abordar problemas muy diversos, en su esquema general se divide en bloques de desarrollos, a saber:

- Mecánico (en el cual se incluye el análisis estructural)
- Térmico
- Magnético
- Eléctrico
- Fluidos

Dispone además de subrutinas para diseño probabilístico, así como de optimización. Varias son sus ventajas con respecto a sistemas similares: una de ellas es la capacidad del programa para desarrollar análisis de campos acoplados, es decir, de resolver problemas por ejemplo: Fluido-estructural; Termo-estructural; Electromagnético; etc.

Sin embargo, una de las circunstancias que lo hacen particularmente viable para hacer investigación es la capacidad del sistema para admitir programación e interactuar con el usuario. La forma de comunicarse es a través del lenguaje APDL que es en esencia un lenguaje Fortran modificado.

Formulación del Problema

El problema se plantea como un problema de optimización no-lineal. Las variables de diseño asocian las coordenadas $(X_i; Y_i; Z_i)$ de los nodos. Una variable de diseño adicional es la deformación inicial de los cables ϵ_0 , o sea, la tensión de preesfuerzo. Las variables de estado se refieren a las condiciones del caso Tensegrety, es decir que las barras estén sujetas a esfuerzos de compresión mientras que los tensores trabajen exclusivamente a tensión. Finalmente como **Función Objetivo (Z)** se elige la longitud total de barras y tensores.

La formulación matemática se plantea como sigue:

$$\text{MIN } Z = \sum_{i=1}^r L_i (X_i; Y_i; Z_i; \epsilon_0) \quad r = \text{No. de nodos} \quad (4.d)$$

$$\text{Tal que:} \quad \sigma_c (X_i; Y_i; Z_i; \epsilon_0) > 0 ; \quad \sigma_b (X_i; Y_i; Z_i; \epsilon_0) < 0 \quad (4.e)$$

$$\text{Además:} \quad a_i \leq \sum_{i=1}^r (X_i; Y_i; Z_i) \leq d_i ; \quad 0 < \epsilon_0 \leq \epsilon_f \quad (4.f)$$

Aquí:

Z: Función Objetivo

$X_i; Y_i; Z_i$: Coordenadas del nodo i.

σ_c : Esfuerzo en los cables (tensión)

σ_b : Esfuerzo en las barras (compresión)

a_i, d_i : valores límites establecidos

ϵ_0, ϵ_f : deformaciones en cables iniciales y finales (o limite)

Estudio de un Caso de Tensegridad

Se procedió a estudiar un caso particular Tensegrity para lo cual se eligió un sistema arbitrario de conformación de barras y tensores, siendo el objetivo establecer las coordenadas del sistema que conduzca a la generación de esfuerzos de compresión exclusivamente en barras y de tensión exclusivamente en los tensores. El total de barras es de 6, mientras que de tensores es de 24, lo que hace que el sistema tenga un total de 30 elementos. En la siguiente figura (fig. 4.2) se muestra el modelo geométrico inicial elaborado en ANSYS. El ejemplo es de prueba y las dimensiones son elegidas arbitrariamente, de manera que el Tensegrity se ubique en el contexto de un cubo de un metro de lado.

1

SYS

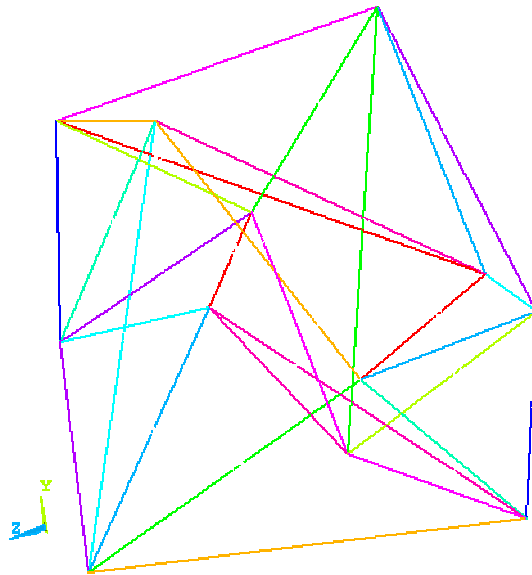


Fig. 4.2 Prueba Tensegrity. Numeración de barras (1-6) y Tensores (7-30).

1

SYS

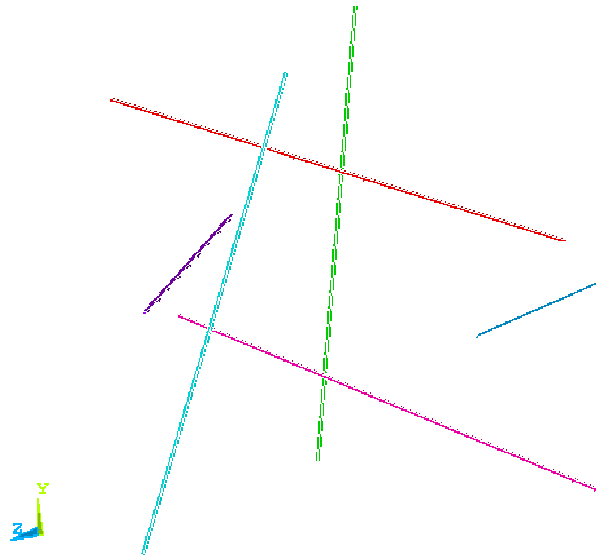


Fig. 4.2.1 Conformación geométrica de barras

1

SYS

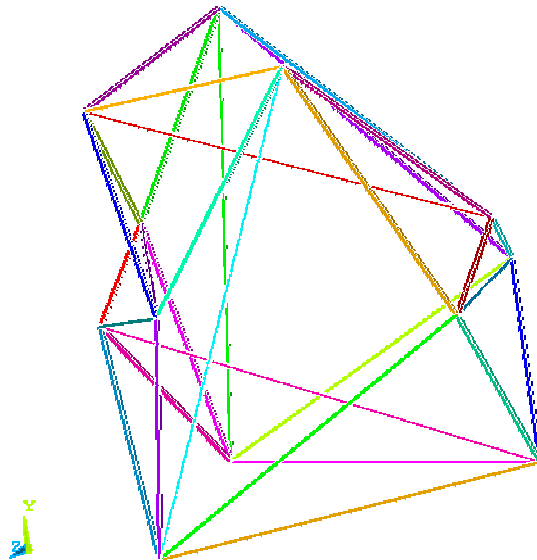


Fig. 4.2.2 Conformación Geométrica global del ejemplo Tensegrity

Para las secciones estructurales de las barras (material 2) se han considerado todas las secciones de tubo de acero de 3 cm de diámetro exterior, mientras que los tensores (material 1) son cables de acero de alta resistencia de 3/8". A continuación se desglosan los datos del material utilizados en el programa ANSYS.

Propiedades del Material (Tabla, 4.1)

MATERIAL NUMBER = 1 EVALUATED AT TEMPERATURE OF 0.0000

EX = 0.16800E+08

NUXY = 0.20000

ALPX = 0.12000E-04

DENS = 0.47300

PRXY = 0.20000

MATERIAL NUMBER = 2 EVALUATED AT TEMPERATURE OF 0.0000

EX = 0.21000E+08

NUXY = 0.25000

ALPX = 0.12000E-04

DENS = 0.78000

PRXY = 0.25000

El elemento finito aplicado para los dos elementos estructurales es una barra 3-D sin desplazamientos angulares, el elemento finito de acuerdo a la nomenclatura ANSYS corresponde a un Link8

LIST ALL SELECTED ELEMENTS. (LIST NODES). (Tabla, 4.2)

ELEM	MAT	TYP	REL	ESY	SEC	NODES	
1	2	1	2	0	1	1	2
2	2	1	2	0	1	3	4
3	2	1	2	0	1	5	6
4	2	1	2	0	1	7	8
5	2	1	2	0	1	9	10
6	2	1	2	0	1	11	12
7	1	1	1	0	1	5	2
8	1	1	1	0	1	5	11
9	1	1	1	0	1	5	4
10	1	1	1	0	1	5	3
11	1	1	1	0	1	3	2
12	1	1	1	0	1	3	9
13	1	1	1	0	1	3	1
14	1	1	1	0	1	9	4
15	1	1	1	0	1	9	1
16	1	1	1	0	1	9	12
17	1	1	1	0	1	1	8
18	1	1	1	0	1	1	10
19	1	1	1	0	1	12	10
20	1	1	1	0	1	12	7
21	1	1	1	0	1	10	7
22	1	1	1	0	1	10	8
23	1	1	1	0	1	7	6
24	1	1	1	0	1	7	11
25	1	1	1	0	1	6	8
26	1	1	1	0	1	6	11
27	1	1	1	0	1	6	2
28	1	1	1	0	1	11	4
29	1	1	1	0	1	2	8
30	1	1	1	0	1	4	12

Modelo de Análisis/optimización en ANSYS

El Macro contiene dos subrutinas la primera, contiene el análisis del sistema que cicla las veces que sea requerido por el ciclo de optimización, éste macro se denomina **OPT_TENS** y contiene tanto la generación del modelo como las condiciones del modelo de análisis de la estructura, e incluye algunos aspectos importantes de mencionar, como que el análisis en sí es no-lineal (grandes desplazamientos).

Y en la segunda subrutina se aplica el comando **NLGEOM** de no-linealidades geométricas, éste planteamiento es debido a que la estructura de Tensegridad como a priori se desconoce su geometría y el proceso de análisis puede conducirlo a comportamientos con grandes desplazamientos. Y otro aspecto es que las tensiones iniciales ϵ_0 de los cables o tensores son en principio una variable independiente que se modificará constantemente hasta encontrar su valor definitivo.

Las coordenadas iniciales de la estructura de tensegridad se indican en el Macro abajo indicado.

Macro de Análisis (Tabla, 4.3)

```
*CREATE,OPT_TENS
```

```
POS1X=0.05
```

```
POS1Y=0.6
```

```
POS1Z=0.5
```

```
POS2X=0.75
```

```
POS2Y=0.45
```

```
POS2Z=0.5
```

```
POS3X=0.7
```

```
POS3Y=0.6
```

```
POS3Z=0.8
```


IV. ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA

POS4X=0
POS4Y=0.4
POS4Z=0.4

POS5X=0.1
POS5Y=0.9
POS5Z=0.1

POS6X=0.5
POS6Y=1.0
POS6Z=0.2

POS7X=0.1
POS7Y=1.0
POS7Z=0.8

POS8X=0.3
POS8Y=0.5
POS8Z=0

POS9X=0.7
POS9Y=0.5
POS9Z=0.9

POS10X=0.2
POS10Y=0.1
POS10Z=0.6

POS11X=0.3
POS11Y=0
POS11Z=0

POS12X=0.8
POS12Y=0.1
POS12Z=0.8

DEFC= 0.01

```
/PREP7  
/COM,GEOMETRIA DEL MODELO Y MALLADO  
K,1,0,0,0  
K,11,1,0,0  
KFILL,1,11  
KGEN,11,1,11,1,,0.1  
KGEN,11,1,121,1,,,-0.1  
KDELE,554  
KDELE,537
```

KDELE,1308
 KDELE,36
 KDELE,222
 KDELE,358
 KDELE,1080
 KDELE,59
 KDELE,1152
 KDELE,740
 KDELE,4
 KDELE,988
 POSZ1=-1*POS1Z
 POSZ2=-1*POS2Z
 POSZ3=-1*POS3Z
 POSZ4=-1*POS4Z
 POSZ5=-1*POS5Z
 POSZ6=-1*POS6Z
 POSZ7=-1*POS7Z
 POSZ8=-1*POS8Z
 POSZ9=-1*POS9Z
 POSZ10=-1*POS10Z
 POSZ11=-1*POS11Z
 POSZ12=-1*POS12Z
 K,554,POS1X,POS1Y,POSZ1
 K,537,POS2X,POS2Y,POSZ2
 K,1308,POS3X,POS3Y,POSZ3
 K,36,POS4X,POS4Y,POSZ4
 K,222,POS5X,POS5Y,POSZ5
 K,358,POS6X,POS6Y,POSZ6
 K,1080,POS7X,POS7Y,POSZ7
 K,59,POS8X,POS8Y,POSZ8
 K,1152,POS9X,POS9Y,POSZ9
 K,740,POS10X,POS10Y,POSZ10
 K,4,POS11X,POS11Y,POSZ11
 K,988,POS12X,POS12Y,POSZ12
 /VIEW, 1, 0.819242452399 , 0.822723330642E-01, 0.567514816899
 /ANG, 1, 5.81179534153
 LSTR, 4, 358
 LSTR, 59, 554
 LSTR, 222, 1308
 LSTR, 1152, 537
 LSTR, 36, 988
 LSTR, 1080, 740
 KLL,S
 KSEL,INVE
 KDELE,ALL
 KSEL,ALL
 NUMCMP,KP

IV. ANÁLISIS Y OPTIMIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA

```

LSTR, 4, 5
LSTR, 4, 10
LSTR, 4, 7
LSTR, 4, 3
LSTR, 3, 5
LSTR, 3, 2
LSTR, 3, 1
LSTR, 2, 7
LSTR, 2, 1
LSTR, 2, 8
LSTR, 1, 6
LSTR, 1, 9
LSTR, 8, 6
LSTR, 8, 9
LSTR, 8, 11
LSTR, 9, 11
LSTR, 9, 6
LSTR, 11, 12
LSTR, 11, 10
LSTR, 12, 6
LSTR, 12, 10
LSTR, 12, 5
LSTR, 10, 7
LSTR, 5, 6
LSTR, 7, 8
LDELE, 19
LSUM
*GET,LTOT,LINE,0,LENG
/COM, DIAMETROS DE LAS BARRAS Y CABLES
DPENT=0.03
DPENTI=DPENT-0.001
APENT=(3.1416/4)*(DPENT**2-DPENTI**2)
IPENT=(3.1416/64)*(DPENT**4-DPENTI**4)
RPENT=SQRT(IPENT/APENT)
DCABP=0.01
ACABP=(3.1416/4)*DCABP**2
EXCAB=1.68E+07
NUCAB=0.2
DENSCAB=0.473
/COM,ELEMENTO FINITO PARA CABLES Y ARMADURA
ET,1,LINK8
/COM,MATERIAL 1 PARA LOS CABLES
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,EXCAB
MPDATA,PRXY,1,,NUCAB

```

```

MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,DENSCAB
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,ALPX,1,,12e-06
!*
/COM,REAL 1 PARA CABLES
R,1,ACABP,DEFC,
/COM,REAL 2 PARA BARRAS
R,2,APENT, ,
/COM,MATERIAL 2 PARA BARRAS
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,2.1e+07
MPDATA,PRXY,2,,0.25
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,0.78
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,ALPX,2,,12e-06
!*
FLST,5,6,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-6
LSEL,S, , ,P51X
REAL,2
MAT,2
LESIZE,ALL, , ,1, ,1, , ,1,
FLST,2,6,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-6
LMESH,P51X
*GET,BTOT,ELEM,0,COUNT
LSEL,INVE
REAL,1
MAT,1
!*
LESIZE,ALL, , ,1, ,1, , ,1,
FLST,2,24,4,ORDE,4
FITEM,2,7
FITEM,2,-18
FITEM,2,20
FITEM,2,-31
LMESH,P51X

```

```

*GET,CTOT,ELEM,0,COUNT
LSEL,ALL
FINISH
/SOL
ANTYPE,0
NLGEOM,1
D,10,ALL,0
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LAST
/ESHAPE,1.0
/EFACET,4
/RATIO,1,1,1
/CFORMAT,32,0
PLDISP,1
*DIM,EBAR,,BTOT
*DIM,ECAB,,CTOT
ESEL,S,REAL,,1
ETABLE,FAXIALC,SMISC,1
/TITLE,ESFUERZOS AXIALES EN CABLES
PLLS,FAXIALC,FAXIALC,1
*DO,I,1,CTOT,1
*GET,ECAB(I), ETAB, 1,ELEM,I
*IF,ECAB(I),LT,0,THEN
CAB=-1
*EXIT
*ELSE
CAB=1
*ENDIF
*ENDDO
ESEL,ALL
ESEL,S,REAL,,2
ETABLE,FAXIALB,SMISC,1
/TITLE,ESFUERZOS AXIALES EN BARRAS
PLLS,FAXIALB,FAXIALB,1
*DO,J,1,BTOT,1
*GET,EBAR(J), ETAB, 2,ELEM,J
*IF,EBAR(J),GT,0,THEN
BARV=-1
*EXIT
*ELSE
BARV=1
*ENDIF
*ENDDO
ESEL,ALL
*END

```

Este Macro **OPT_TENS** ciclará conforme lo solicite la subrutina de optimización. Las variables de diseño y de estado así como la Función Objetivo (Z) correspondiente se indican en el siguiente Macro de optimización denominado **OPT** además de que las variables deben mantener los límites y tolerancias que ahí se indican.

Macro de Optimización (Tabla, 4.4)

```
*USE,OPT_TENS
*CREATE,OPT
FINISH
/OPT
OPANL,OPT_TENS
!*
OPVAR,POS1X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS1Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS1Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS2X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS2Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS2Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS3X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS3Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS3Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS4X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS4Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS4Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS5X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS5Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS5Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS6X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS6Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS6Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS7X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS7Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS7Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS8X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS8Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS8Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS9X,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS9Y,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS9Z,DV,0,1,0.001,
OPVAR,POS10X,DV,0,1,0.001,
```

```
OPVAR,POS10Y,DV,0,1,0.001,  
OPVAR,POS10Z,DV,0,1,0.001,  
OPVAR,POS11X,DV,0,1,0.001,  
OPVAR,POS11Y,DV,0,1,0.001,  
OPVAR,POS11Z,DV,0,1,0.001,  
OPVAR,POS12X,DV,0,1,0.001,  
OPVAR,POS12Y,DV,0,1,0.001,  
OPVAR,POS12Z,DV,0,1,0.001,  
  
OPVAR,DEFC,DV,.001,.04,.0005  
  
OPVAR,CAB,SV,0.9,1,0.01,  
OPVAR,BARV,SV,0.9,1,0.01,  
  
OPVAR,LTOT,OBJ, , ,0.01,  
*END  
  
*USE,OPT  
  
OPTYPE,GRAD  
OPTYPE,FACT  
OPFACT,FULL  
OPTYPE,RAND
```

El problema planteado corresponde a un problema de optimización no-lineal para lo cual el programa ANSYS considera diversos planteamientos de solución, a saber:

- Single Run
- Random Design
- Factorial
- Gradiente
- DV Sweeps
- Sub-Problem
- First-Order
- User Optimizar

La aplicación de estos métodos en principio debe conducir a la obtención del mínimo de la Función Objetivo (Z) aquí elegida (Longitud total de barras y tensores), obteniendo las variables de diseño correspondientes y que garantizan las ecuaciones de estado. Esto es en principio lo que debe ocurrir, sin embargo, el problema es complejo, ya que cuando el número de variables es alto y que es nuestro caso, puede llegar a una solución no muy óptima; en el mejor de los casos se obtiene un mínimo local de la Función, para lo cual será requerido el involucrar no solo un método de optimización sino varios, o incluso, el sugerir un conjunto de diseño para que lo investigue el ciclo de análisis propuesto.

El procedimiento aquí elegido ha sido el aplicar dos métodos esencialmente: El método Random para observar el comportamiento global del diseño, y segundo el Método Gradiente, para cuando se estime pertinente acercarse levemente a la solución óptima. Esta es una apropiada estrategia, sin embargo, como se observa en los resultados que se indican a continuación, no ha sido posible conducir el problema hacia un mínimo, debido a que no logran cumplirse todas las restricciones impuestas.

Este ejemplo y sus resultados son significativos de cualquier manera, debido a que expresa la dificultad y la no trivialidad del problema "Tensegrety"; ya que una conformación arbitraria de barras y tensores no conducen necesariamente a la generación de compresiones exclusivamente en barras y a tensiones exclusivamente en tensores. Nuestro caso, como se mostrará enseguida tiene un importante número de variables por lo que rebasa incluso el número práctico sugerido por el programa ANSYS que es de 20 (en nuestro caso 37), y la variable de estado correspondiente a garantizar exclusivamente compresiones en barras no se satisface.

La Figura 4.3 muestra los esfuerzos en barras en el primer ciclo de análisis, se observa como hay barras que trabajan a tensión.

1

SYS

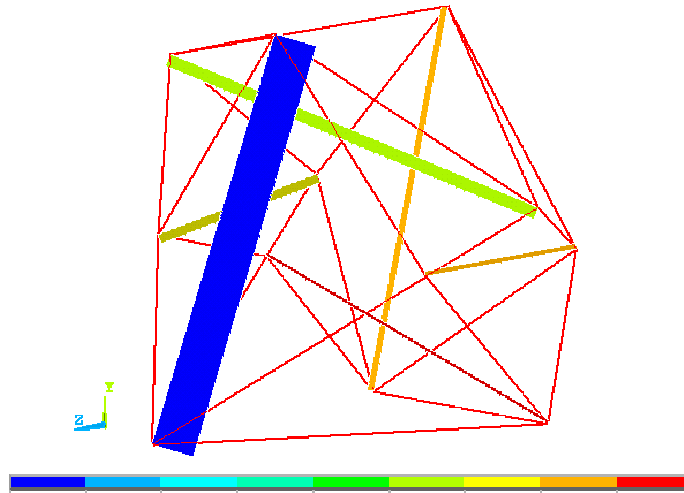


Fig. 4.3 Ejemplo “Tensegrity.” Fuerzas axiales en barras

La siguiente Figura (fig. 4.4) muestra los esfuerzos iniciales en tensores, también en este caso, se observan tensores que trabajan a compresión, violando las condiciones de estado.

1

SYS

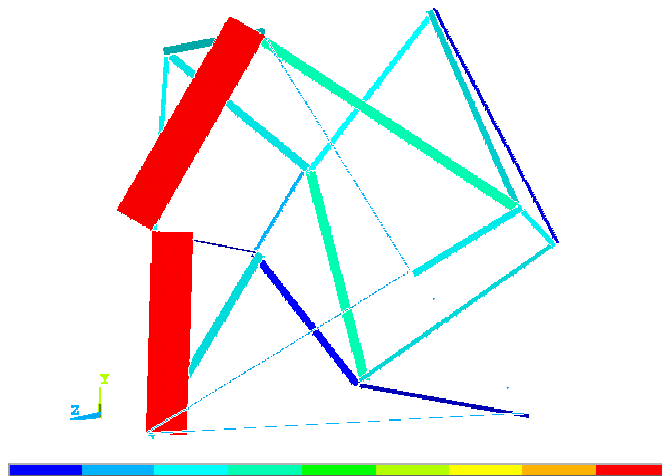


Fig. 4.4 Ejemplo “Tensegrity”. Fuerza axiales en Tensores.

Como condición de frontera en cuanto a desplazamientos, se ha considerado fijo un solo nodo de la estructura, el número 1. El desplazamiento final bajo este primer ciclo se muestra en la Fig. 4.5; se observa como los desplazamientos son importantes, esta no sería una buena solución debido a su problema inminente de estabilidad.

1

SYS

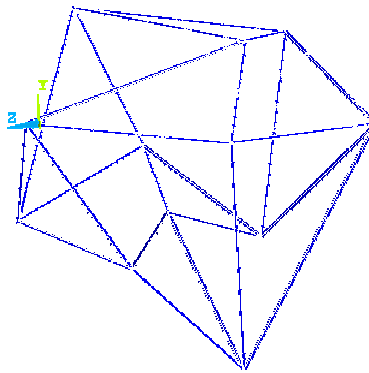


Fig. 4.5 Desplazamientos primer ciclo del “tensegrity”.

Se procedió a aplicar diferentes ciclos de optimización tanto Random como Gradiente, Los resultados obtenidos no conducen a ninguna solución óptima. Por tal motivo se redujo el número de variables de diseño a 12. Incluso bajo esta alternativa se dificulta obtener un mínimo. En la **Tabla 4.5** se muestran los resultados, aquí se indican aquellas variables de estado que no se satisfacen. El análisis mostrado pues, no conduce a un diseño óptimo.

V. RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN**Resultados el Ciclo de Optimización (Tabla 4.5)**

LIST OPTIMIZATION SETS FROM SET 1 TO SET 21 AND SHOW ONLY OPTIMIZATION PARAMETERS. (A "*" SYMBOL IS USED TO INDICATE THE BEST LISTED SET)

	SET 1	SET 2	SET 3	SET 4
	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)
CAB (SV)	> 0.0000	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000
BARV (SV)	> 0.0000	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000
POS3X (DV)	> 0.0000	0.84733	0.70935E-01	0.75917
POS3Y (DV)	> 0.0000	0.45773	0.34793	0.71392
POS3Z (DV)	> 0.0000	0.38861	0.11333	0.59121
POS6X (DV)	> 0.0000	0.69268	0.53021	0.64299E-01
POS6Y (DV)	> 0.0000	0.53802	0.98949	0.36843
POS6Z (DV)	> 0.0000	0.61830	0.63204	0.22954E-01
POS9X (DV)	> 0.0000	0.84800	0.15174	0.45370
POS9Y (DV)	> 0.0000	0.43256E-02	0.77227	0.84309
POS9Z (DV)	> 0.0000	0.46963	0.55507	0.31876
POS12X (DV)	> 0.0000	0.32097	0.47809	0.61454
POS12Y (DV)	> 0.0000	0.79294	0.80443	0.77540
POS12Z (DV)	> 0.0000	0.58255	0.83661	0.70770
DEFC (DV)	> 0.0000	0.28111E-01	0.56116E-02	0.47732E-02
LTOT (OBJ)	0.0000	18.939	19.883	18.137
	SET 5	SET 6	SET 7	SET 8
	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)
CAB (SV)	> 0.99990E+07	> -1.0000	> 0.99990E+07	> -1.0000
BARV (SV)	> 0.99990E+07	> -1.0000	> 0.99990E+07	> -1.0000
POS3X (DV)	0.57976	0.12987E-01	0.69104	0.21585
POS3Y (DV)	0.38413	0.62558	0.68862	0.69395
POS3Z (DV)	0.60542E-01	0.50236	0.47631	0.50669
POS6X (DV)	0.23445E-01	0.13993	0.85497	0.41549
POS6Y (DV)	0.46613	0.26687	0.19919E-01	0.61513
POS6Z (DV)	0.54813	0.90717	0.35020	0.53633
POS9X (DV)	0.36721E-01	0.31299	0.22411	0.56596
POS9Y (DV)	0.49983E-01	0.48603	0.59224	0.71642
POS9Z (DV)	0.63285	0.70521	0.16557	0.81771
POS12X (DV)	0.71756	0.50324	0.97992	0.10009
POS12Y (DV)	0.39940	0.69348	0.73674	0.63323
POS12Z (DV)	0.74881	0.90092	0.88122	0.55005
DEFC (DV)	0.34721E-01	0.47728E-02	0.24302E-01	0.11985E-01
LTOT (OBJ)	0.99990E+07	18.664	0.99990E+07	16.521

	SET 9	SET 10	SET 11	SET 12
	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)
CAB (SV)	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000
BARV (SV)	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000	1.0000
POS3X (DV)	0.46467	0.91066	0.41850	0.30271
POS3Y (DV)	0.29612	0.97186	0.52655E-01	0.90886
POS3Z (DV)	0.42176E-01	0.28015	0.23274	0.93712
POS6X (DV)	0.80097	0.16267	0.70191	0.14869
POS6Y (DV)	0.13828	0.41370	0.98532	0.99366
POS6Z (DV)	0.97942	0.85453	0.91897	0.79482E-01
POS9X (DV)	0.91769	0.42991	0.60620	0.22083
POS9Y (DV)	0.35388E-01	0.69713	0.51050	0.29299
POS9Z (DV)	0.93150	0.98059	0.35672E-01	0.59132
POS12X (DV)	0.88359	0.10763	0.15137	0.10415
POS12Y (DV)	0.84948	0.78435	0.69555	0.98646
POS12Z (DV)	0.66456	0.87158	0.88061	0.68094
DEFC (DV)	0.16484E-01	0.30731E-01	0.29324E-01	0.31042E-01
LTOT (OBJ)	23.167	20.657	22.332	19.171

	SET 13	SET 14	SET 15	SET 16
	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)
CAB (SV)	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000
BARV (SV)	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000
POS3X (DV)	0.43794	0.99317	0.38283	0.50137
POS3Y (DV)	0.88842	0.55905	0.28279	0.23420
POS3Z (DV)	0.96921E-01	0.34383	0.15848	0.75826
POS6X (DV)	0.42228	0.89505	0.82212	0.49284
POS6Y (DV)	0.40664	0.79695	0.26240	0.48430
POS6Z (DV)	0.92386	0.35842E-01	0.24201	0.73442
POS9X (DV)	0.75179	0.72685	0.32554	0.71057
POS9Y (DV)	0.82292E-01	0.55866	0.82797	0.92828
POS9Z (DV)	0.75694	0.32035	0.39453	0.37327
POS12X (DV)	0.59005	0.60486	0.54704	0.12118E-01
POS12Y (DV)	0.42828	0.48288	0.76855	0.31268
POS12Z (DV)	0.77427	0.40709	0.70912	0.69608
DEFC (DV)	0.31865E-01	0.20240E-01	0.19253E-02	0.17376E-02
LTOT (OBJ)	19.664	17.533	18.336	18.966

	SET 17	SET 18	SET 19	SET 20
	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(INFEASIBLE)
CAB (SV)	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000
BARV (SV)	1.0000	> -1.0000	> -1.0000	> -1.0000
POS3X (DV)	0.27658E-01	0.56829	0.88181	0.49640
POS3Y (DV)	0.74165	0.80022	0.73510	0.68078

POS3Z (DV)	0.78721	0.50224	0.71076	0.23018
POS6X (DV)	0.55552	0.86975	0.32767	0.40635
POS6Y (DV)	0.84377E-01	0.17222	0.77253	0.31632
POS6Z (DV)	0.42611	0.54321	0.80996	0.95086
POS9X (DV)	0.65015E-01	0.58419	0.90916	0.67255
POS9Y (DV)	0.57351	0.29862	0.49165	0.93874
POS9Z (DV)	0.63650E-01	0.42503	0.21077	0.56215
POS12X (DV)	0.70018	0.30686	0.61059	0.17344
POS12Y (DV)	0.33636	0.29530E-01	0.31202	0.67332
POS12Z (DV)	0.99185E-01	0.75944	0.13237	0.40792
DEFC (DV)	0.62208E-02	0.46635E-02	0.30688E-02	0.10864E-01
LTOT (OBJ)	18.871	17.600	18.897	18.902

Se realizaron una gran cantidad de ciclos de optimización, y no fue posible encontrar un conjunto de solución.

Ejemplo Resuelto de Tenseguridad 2

A continuación, se muestra el análisis de un Tensegrety tomado de la literatura existente (Cook R. D.; Malkus D.S.; Plesha M. E. (1988). Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley and Sons. Inc. New York). En la Fig. 4.6 se muestran dos tipos de arreglos Tensegrity, el primero denominado "Octaedro expandido", y el segundo "Tetraedro Truncado". El que se analizará será el primero, corresponde a un arreglo de 6 barras y 24 tensores (ver Fig. 4.6 (a)). El material y secciones de barras y tensores es como sigue: Para las barras se eligió madera sección circular de 5 cm. de diámetro, mientras que los tensores son de nylon trenzado de 5 mm de diámetro. A continuación se indican los datos ANSYS del material así como las Fotografías iniciales en ANSYS (Figs. 4.6.1, 4.6.2 y 4.6.3) del arreglo en estudio.

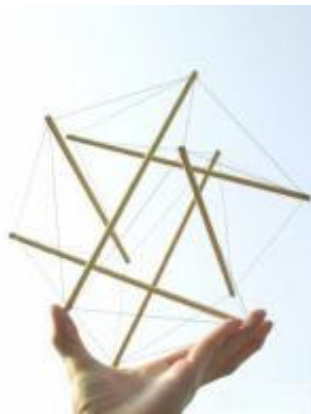
Propiedades del Material. Tensegridad, Ejemplo 2

MATERIAL NUMBER = 1 EVALUATED AT TEMPERATURE OF 0.0000

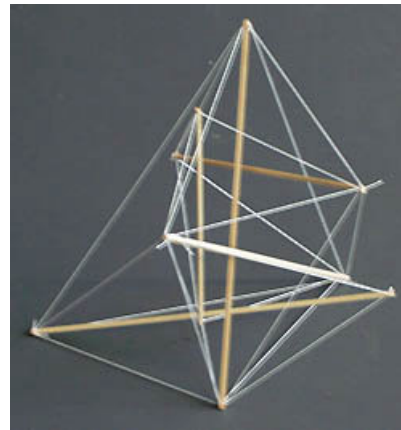
- $EX = 0.20000E+06$
- $NUXY = 0.35000$
- $PRXY = 0.35000$

MATERIAL NUMBER = 2 EVALUATED AT TEMPERATURE OF 0.0000

- $EX = 0.10000E+07$
- $NUXY = 0.10000$
- $PRXY = 0.10000$



(a)



(b)

Fig. 4.6 Arreglos Tensegridad. (a) Octaedro expandido. (b) Tetraedro truncado

SYS

1

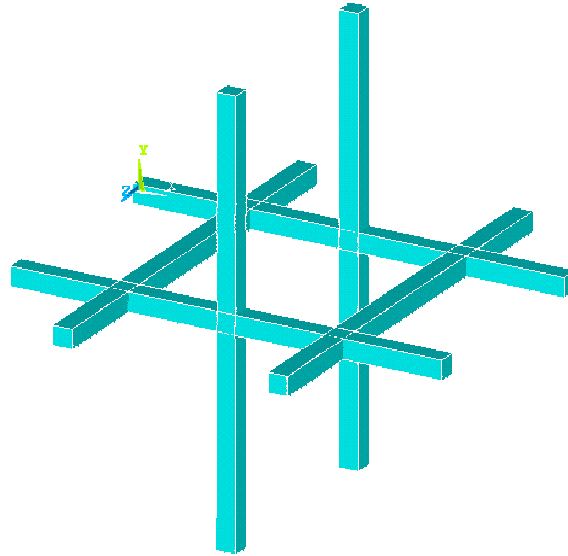


Fig. 4.6.1 Barras del ejemplo Tensegridad 2. Los elementos finitos son independientes.

1

SYS

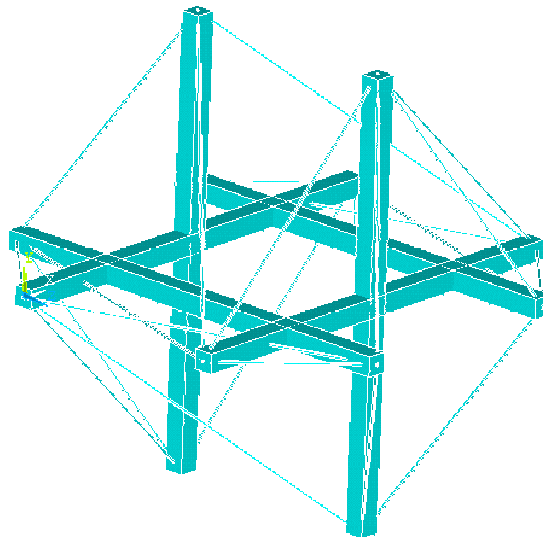


Fig. 4.6.2 Modelo discreto. Tensegridad 2

1

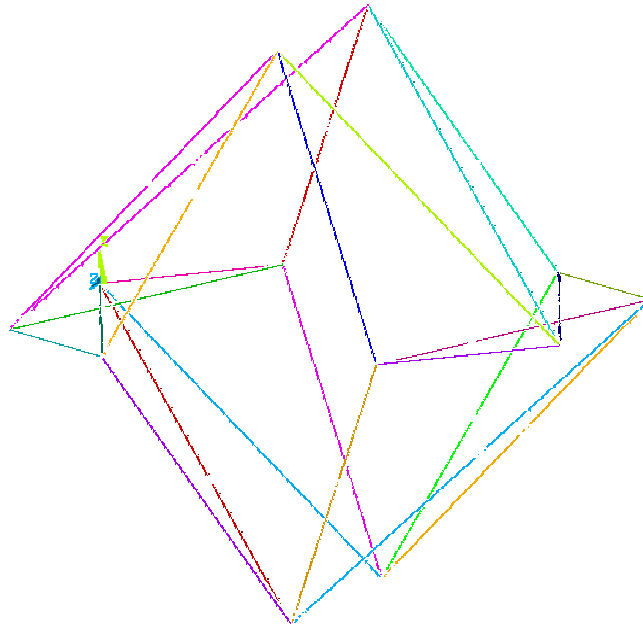


Fig. 4.6.3 Conformación geométrica global: Barras y tensores. Tensegrety 2

Macro de análisis. Tensegridad 2 (Tabla 4.6)

```

!*
/NOPR
/PMETH,OFF,0
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
/prep7
K,1,,,,
k,2,1
K,3,,,0.5,
K,4,1,,0.5,

```



```

LSTR, 1, 2
LSTR, 3, 4
K,5,0.5,0.5,,
K,6,0.5,-0.5,,
K,7,0.5,0.5,0.5,
K,8,0.5,-0.5,0.5,
LSTR, 5, 6
LSTR, 7, 8
K,9,0.25,,,-0.25,
k,10,.25,,,.75
K,11,0.75,,,-0.25,
K,12,0.75,,0.75,
LSTR, 9, 10
LSTR, 11, 12
LSTR, 7, 10
LSTR, 7, 3
LSTR, 7, 4
LSTR, 7, 12
LSTR, 10, 1
LSTR, 10, 3
LSTR, 10, 8
LSTR, 1, 8
LSTR, 1, 6
LSTR, 1, 9
LSTR, 6, 11
LSTR, 6, 2
LSTR, 6, 9
LSTR, 11, 2
LSTR, 11, 4
LSTR, 11, 5
LSTR, 4, 5
LSTR, 4, 12
LSTR, 9, 5
LSTR, 9, 2
LSTR, 2, 12
LSTR, 3, 9
LDELE, 26
LSTR, 8, 2
LSTR, 8, 12
LSTR, 5, 3

```

```

LSUM
*GET,LTOT,LINE,0,LENG
/COM,SECCIONES BARRAS Y CABLES
/COM,BARRAS:MADERA 5 CM DIAMETRO
/COM,CABLES:NYLON 5 MM DIAMETRO
ABAR= (1/4)*3.1416*(0.05)**2

```

```

ACAB= (1/4)*3.1416*(0.005)**2
/COM,ELEMENTO FINITO PARA CABLES Y ARMADURA
ET,1,LINK8
/COM,MATERIAL 1 PARA LOS CABLES
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,2E+05
MPDATA,PRXY,1,,0.35
DEFC= 0.05
/COM,REAL 1 PARA CABLES
R,1,ACAB,DEFC,
/COM,REAL 2 PARA BARRAS
R,2,ABAR, ,
/COM,MATERIAL 2 PARA BARRAS
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,1E+06
MPDATA,PRXY,2,,0.1
MAT,2
REAL,2
LSEL,S,LINE,,1,6,1
/REPLOT
!*
LESIZE,ALL, , ,1, ,1, , ,1,
FLST,2,6,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-6
LMESH,P51X
LSEL,INVE
MAT,1
REAL,1
!*
LESIZE,ALL, , ,1, ,1, , ,1,
FLST,2,24,4,ORDE,2
FITEM,2,7
FITEM,2,-30
LMESH,P51X
lsel,all
FINISH
/SOL
ANTYPE,0
NLGEOM,1
D,1,ALL,0
SOLVE
FINISH

```

```
/POST1  
SET, LAST  
/ESHAPE, 1.0  
/EFACET, 4  
/RATIO, 1, 1, 1  
/CFORMAT, 32, 0  
PLDISP, 1  
ESEL, ALL  
ESEL, S, real, , 1  
ETABLE, FAXIALC, SMISC, 1  
/TITLE, ESFUERZOS AXIALES EN CABLES  
PLLS, FAXIALC, FAXIALC, 1  
ESEL, ALL  
ESEL, S, real, , 2  
ETABLE, FAXIALB, SMISC, 1  
/TITLE, ESFUERZOS AXIALES EN BARRAS  
PLLS, FAXIALB, FAXIALB, 1
```

1

SYS

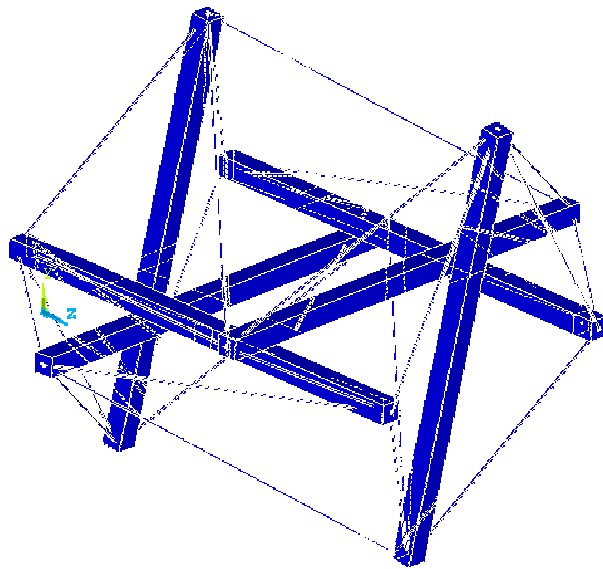


Fig. 4.6.4 Desplazamientos en Tensegrity 2 (unidades: metros)

SYS

1
v

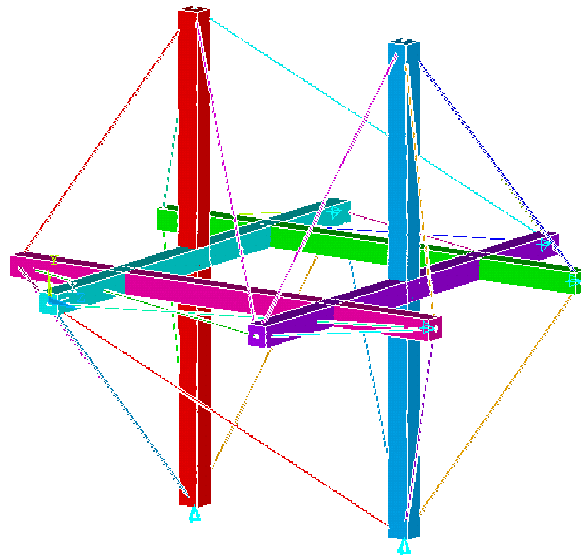


Fig. 4.6.5 Restricciones en Apoyos

1

SYS

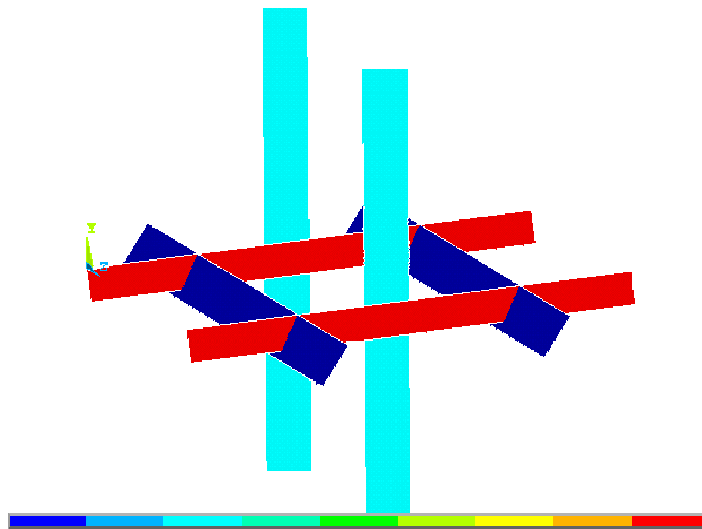


Fig. 4.6.6 Fuerzas axiales en barras (Ton)

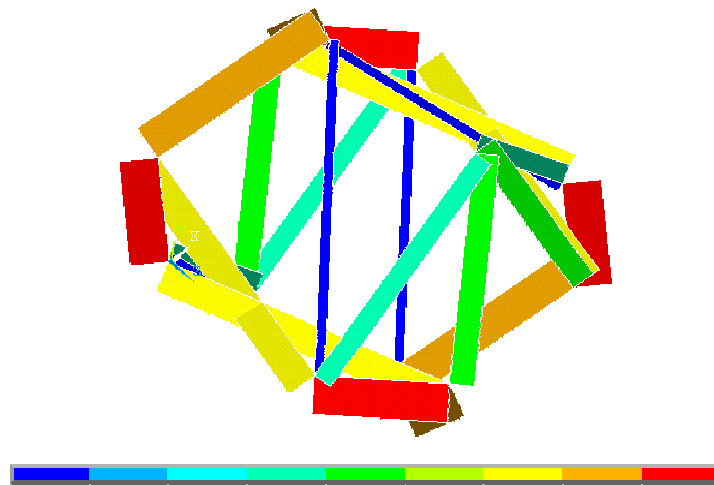


Fig. 4.6.7 Fuerzas axiales en cables (Ton)

En el problema hasta aquí analizado no se han aplicado técnicas de optimización. El análisis mostrado plantea el comportamiento general del sistema Tensegrity bajo el cual se comporta apropiadamente en el sentido de que las barras trabajan exclusivamente a compresión mientras que los tensores a tensión. Si se planteara un modelo de optimización, este deberá ser en otro contexto, por ejemplo, implicaría que las ecuaciones de estado cambiasen o bien se ampliaran; se podría solicitar la minimización del peso del sistema tal que las tensiones en cables o compresiones en barras no rebasen ciertos límites especificados y por supuesto se mantenga el trabajo correcto de los elementos en el sistema. Puede ser también que dentro de las ecuaciones de estado se involucren los desplazamientos de los nodos del Tensegrity.

Se mostrará enseguida la formulación óptima para este caso.

Formulación de diseño optimo. Tenseguridad 2

$$\text{Min } Z = \text{Vol} (L_b ; \gamma_b ; L_c ; \gamma_c ; \epsilon_0) \quad (4.g)$$

Tal que: $\sigma_c (L_b ; \gamma_b ; L_c ; \gamma_c ; \epsilon_0) > 0$; $\sigma_b (L_b ; \gamma_b ; L_c ; \gamma_c ; \epsilon_0) < 0$
(4.h)

Además: $\sigma_c \leq \sigma_{p,c}$; $\sigma_b \leq \sigma_{p,b}$; $D_{\max} \leq D_{\lim}$ (4.i)

Aquí:

Z: Función Objetivo. Volumen del sistema Tensegrety

σ_c : Esfuerzo en los cables; σ_b : Esfuerzo en las barras

$\sigma_{p,c}$; $\sigma_{p,b}$: Esfuerzos máximos permisibles en cables y barras

ϵ_0 : deformaciones iniciales en cables

D: desplazamiento de los nodos del Tensegrety

Macro Tenseguridad. Ejemplo 2 . Optimizacion (Tabla 4.7)

```
!*
/NOPR
/PMETH,OFF,0
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,PR_CFD,0
/GO
!*
```

*CREATE,OPT_TENS

```

DEFC= 0.1
/prep7
K,1,,,,
k,2,1
K,3,,,0.5,
K,4,1,,0.5,
LSTR, 1, 2
LSTR, 3, 4
K,5,0.5,0.5,,
K,6,0.5,-0.5,,
K,7,0.5,0.5,0.5,
K,8,0.5,-0.5,0.5,
LSTR, 5, 6
LSTR, 7, 8
K,9,0.25,,,-0.25,
k,10,.25,,,.75
K,11,0.75,,,-0.25,
K,12,0.75,,0.75,
LSTR, 9, 10
LSTR, 11, 12
LSTR, 7, 10
LSTR, 7, 3
LSTR, 7, 4
LSTR, 7, 12
LSTR, 10, 1
LSTR, 10, 3
LSTR, 10, 8
LSTR, 1, 8
LSTR, 1, 6
LSTR, 1, 9
LSTR, 6, 11
LSTR, 6, 2
LSTR, 6, 9
LSTR, 11, 2
LSTR, 11, 4
LSTR, 11, 5
LSTR, 4, 5
LSTR, 4, 12
LSTR, 9, 5
LSTR, 9, 2
LSTR, 2, 12
LSTR, 3, 9
LDELETE, 26

```

```

LSTR, 8, 2
LSTR, 8, 12
LSTR, 5, 3
/COM,SECCIONES BARRAS Y CABLES
/COM,BARRAS:MADERA 5 CM DIAMETRO
/COM,CABLES:NYLON 5 MM DIAMETRO
ABAR= (1/4)*3.1416*(0.05)**2
ACAB= (1/4)*3.1416*(0.005)**2
/com,elemento finito para cables y armadura
ET,1,LINK8

```

```

/com,Material 1 para los cables
!*
```

```

MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,4E+05
MPDATA,PRXY,1,,0.3
GAMCAB=4.73
/com,Real 1 para cables
R,1,ACAB,DEFC,
/com,real 2 para barras
R,2,ABAR, ,
/com,material 2 para barras
!*
```

```

MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,1E+06
MPDATA,PRXY,2,,0.1
GAMB=7.8
!*
```

```

mat,2
real,2
lsel,s,line,,1,6,1
/REPLOT
!*
```

```

LESIZE,ALL, , ,1, ,1, , ,1,
FLST,2,6,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-6
LMESH,P51X
*GET,BTOT,ELEM,0,COUNT
LSUM
*GET,LTOTB,LINE,0,LENG
VOLB=LTOTB*ABAR*GAMB
lsel,inve
mat,1

```



```

real,1
!*
LESIZE,ALL,,1,,1,,1,
FLST,2,24,4,ORDE,2
FITEM,2,7
FITEM,2,-30
LMESH,P51X

*GET,CTOT1,ELEM,0,COUNT
CTOT=CTOT1-BTOT
LSUM
*GET,LTOTC,LINE,0,LENG
VOLCAB=LTOTC*ACAB*GAMCAB
lsel,all
VOLT=VOLB+VOLCAB
FINISH
/SOL
ANTYPE,0
NLGEOM,1

FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,6
FITEM,2,8
!*
/GO
D,P51X,,,,,UY,,,,,
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,2
FITEM,2,4
!*
/GO
D,P51X,,,,,UX,,,,,
FLST,2,2,1,ORDE,2
FITEM,2,10
FITEM,2,12
!*
/GO
D,P51X,,,,,UZ,,,,,
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LAST
/ESHAPE,1.0
/EFACET,4
/RATIO,1,1,1
/CFORMAT,32,0
PLDISP,1

```

```

*DIM,EBAR,,BTOT
*DIM,ECAB,,CTOT
ESEL,ALL
ESEL,S,real,,1
ETABLE,FAXIALC,SMISC,1
/TITLE,ESFUERZOS AXIALES EN CABLES
PLLS,FAXIALC,FAXIALC,1
*DO,I,1,CTOT,1
*GET,ECAB(I), ETAB, 1,ELEM,I
*IF,ECAB(I),LT,0,THEN
CAB=-1
*EXIT
*ELSE
CAB=1
*ENDIF
*ENDDO
*DIM,ECABA,,CTOT
*DO,K,1,CTOT,1
ECABA(K)=ABS(ECAB(K))
*ENDDO
*VSCFUN,CMAX,MAX,ECABA
ESEL,ALL
ESEL,S,real,,2
ETABLE,FAXIALB,SMISC,1
/TITLE,ESFUERZOS AXIALES EN BARRAS
PLLS,FAXIALB,FAXIALB,1
*DO,J,1,BTOT,1
*GET,EBAR(J), ETAB, 2,ELEM,J
*IF,EBAR(J),GT,0,THEN
BARV=-1
*EXIT
*ELSE
BARV=1
*ENDIF
*ENDDO
ESEL,ALL
*DIM,EBARA,,BTOT
*DO,K,1,BTOT,1
EBARA(K)=ABS(EBAR(K))
*ENDDO
*VSCFUN,BMAX,MAX,EBARA
*DIM,DNODO,,12
*DO,J,1,12,1
*GET,DNODO(J),NODE,J,U,SUM
*ENDDO
*VSCFUN,DMAX,MAX,DNODO
*END

```

```

*USE,OPT_TENS
*CREATE,OPT
FINISH
/OPT
OPANL,OPT_TENS
!*
OPVAR,DEFC,DV,.001,0.15,.0005
OPVAR,CMAX,SV,0.005,1.0,0.001,
OPVAR,BMAX,SV,0.1,2.0,0.001,
OPVAR,DMAX,SV,0.001,0.25,0.001,
OPVAR,VOLT,OBJ, , ,0.01,
*END
*USE,OPT

```

Resultados del ciclo de Optimización (Tabla 4.8)

LIST OPTIMIZATION SETS FROM SET 1 TO SET 5 AND SHOW ONLY OPTIMIZATION PARAMETERS. (A "*" SYMBOL IS USED TO INDICATE THE BEST LISTED SET)

	SET 1	SET 2	SET 3	SET 4
	(FEASIBLE)	(INFEASIBLE)	(FEASIBLE)	(FEASIBLE)
CMAX (SV)	0.73205	> 0.99990E+07	0.42116	0.31530
BMAX (SV)	1.3940	> 0.99990E+07	0.79152	0.59016
DMAX (SV)	0.24169	> 0.99990E+07	0.23641	0.23515
DEFC (DV)	0.10000	0.12723	0.69121E-01	0.58811E-01
VOLT (OBJ)	0.93356E-01	0.99990E+07	0.93356E-01	0.93356E-01
	SET 5			
	(FEASIBLE)			
CMAX (SV)	0.77322			
BMAX (SV)	1.4751			
DMAX (SV)	0.24256			
DEFC (DV)	0.10416			
VOLT (OBJ)	0.93356E-01			

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El análisis de los resultados obtenidos dentro de este trabajo de investigación se divide en dos etapas:

- Estructura
- Análisis y Optimización

Para analizar a la estructura como tal, es conveniente hacer algunas referencias respecto a la estructura sujeta a Tensión, basándome en el conocimiento de la literatura estudiada.

Cuando el diseñador de espacios establezca el alcance tan poderoso que una estructura a tensión representa, ya que dichas estructuras pueden llegar a soportar un peso considerable dependiendo de su diseño y construcción. Si llegamos a comparar la fortaleza que representan nuestros tendones y huesos, entendiendo a la naturaleza como una manera que podemos utilizar como base para diseñar, encontraremos formas nuevas y novedosas con propiedades adecuadas a nuestro entorno.

Probablemente las estructuras a tensión no son tan comunes en su uso e implementación debido a tres factores primordialmente. La primera premisa sería que de acuerdo a nuestro análisis llegar a la tensión no es tan fácil como un diseñador de estructuras puede imaginar. Segundo, porque los problemas de ensamble tampoco ayudan a integrar de una manera fácil los elementos implicados para la creación de dichas estructuras. Y por último reservando esta premisa desde el punto de vista de la investigadora se considera que tomar decisiones para innovar es un factor que limita a las nuevas formas y propuestas.

De acuerdo al análisis de elemento finito podemos decir que:

Los resultados del análisis mediante el método de elemento finito nos muestran la complejidad de este tipo de estructuras tiene para llegar a un estado satisfactorio de tensión-compresión donde ambos elementos deben de tener condiciones óptimas para erguirse en una estructura firme. Si se toma en cuenta que las primeras corridas de análisis son para mostrar el comportamiento de la estructura como tal, observamos que sin parámetros de restricción no es factible obtener resultados tangibles, sólo en caso de poner límites y condiciones de frontera, se obtendrán un comportamiento estructural permisible.

Las corridas de optimización nos permitieron encontrar soluciones optimas, de acuerdo a lo requerido para cada optimización en el sistema, en el momento de que existe una posibilidad de convergencia y la herramienta encuentra soluciones con esto se demuestra que la optimización garantiza mejores opciones de diseño, soluciones optimas.

Es indiscutible que existen otras maneras de obtener mejores resultados de optimización, si se continuara “n” corridas para un sólo o varios sistemas, sin embargo este no fue el objetivo primordial de la investigación, lo cual el resultado actual satisface el estudio y alcance de este trabajo.

Asimismo, conforme el número de variables de diseño se incrementa, la solución optima es cada vez mas difícil de obtener, de hecho en el mejor de los casos se obtiene un mínimo local de la Función Objetivo. El programa Ansys a pesar de disponer de una gran capacidad para analizar problemas complejos con un número significativo de variables, sugiere que el numero de variables independientes no rebase el limite de veinte. En nuestro caso hemos analizado un problema con 37 variables, que luego hemos disminuido a 12, en cualquier caso el resultado no ha sido posible obtenerlo.

Un elemento de comentario es el relativo al método de optimización a aplicar, el programa como se ha ya mencionado con anterioridad, presenta diversos métodos cada uno de ellos con grandes posibilidades dependiendo de las condiciones del problema en estudio. En nuestro caso, hemos elegido la aplicación primero del Método Random, el cual elige al azar los conjuntos de diseño e investiga si estos cumplen con las restricciones impuestas al modelo y por supuesto que conduzcan a la minimización de la Función Objetivo. Hemos también considerado el Método Gradiente para planteamientos de solución cercanos a los ya estudiados por ejemplo con el método Random.

VII. CONCLUSION

La solución óptima final obtenida en este trabajo, obedece a una estructura "Tensegrity" propuesta en la literatura sobre el tema. En este caso ha sido necesario construir el modelo de optimización un poco distinto al primer caso analizado. Aquí por ejemplo la Función Objetivo ha sido el volumen del sistema, mientras que la variable independiente o variable de diseño ha sido la deformación inicial de los tensores (Tensión de preesfuerzo), las variables de estado han sido tanto los esfuerzos en barras y tensores para que no rebasen ciertos límites establecidos, como el desplazamiento máximo ocurrente en el sistema solicitando en este caso que no se rebase un límite prefijado.

Todos los análisis mencionados se han ilustrado con gráficas mostrando el estado de esfuerzos en los elementos estructurales así como las deformaciones finales del modelo de tensegridad.

El trabajo que se ha realizado permite visualizar las implicaciones que desde un punto de vista estructural tienen estos sistemas denominados Tensegrity, sin duda pueden existir diversas perspectivas de estudio de las mismas además de las características de estos sistemas que aquí se ha intentado esbozar. En todo caso, estos resultados marcan la pauta para muchos otros estudios que se hagan a este respecto.

De las conclusiones basadas en las hipótesis podemos mencionar que:

1.- Se experimenta un sistema estructural teniendo un comportamiento elástico lineal. Debido a que el modelo utilizado está directamente asociado a un sistema de comportamiento plástico lineal.

2.- Si se utiliza un modelo convencional se afirma que las unidades estructurales del sistema se estabilizan basándose en tensores presforzados.

Se encuentra por lo tanto un sistema estable, si esto no hubiera ocurrido el modelo se hubiera colapsado, lo cual no sucedió así.

Y se reafirma la utilización de elementos para la aplicación de las hipótesis.

- Los tipos de optimización utilizados en el primer análisis de optimización no-lineal fueron random, gradiente y factorial. Y se aplicaron en función de la convergencia con los mínimos locales requeridos. Obteniendo resultados no favorables. En el segundo análisis con una estructura convencional, se aplicaron los mismos análisis de optimización, obteniendo resultados favorables.
- Se utilizó como función objetivo la longitud total de los elementos estructurales, para la primera corrida de análisis.
- Se consideró como variables de diseño las coordenadas (X,Y,Z) de los nodos del sistema a tensión, asimismo se incluyó el preesfuerzo inicial en los cables. En ambos análisis
- Se consideró como variable de estado los esfuerzos en barras y en tensores, para ambos análisis.
- Como base de inicio para el desarrollo de los análisis de elementos finitos se utilizó tanto para barras como para los cables elementos unidimensionales tipo viga de dos nodos con 3 grados de libertad lineal por nodo.
- Con los puntos anteriores se afirma las hipótesis establecidas en un principio de este trabajo de investigación.

VII. CONCLUSIÓN

La solución óptima final obtenida en este trabajo, obedece a una estructura "Tensegrity" propuesta en la literatura sobre el tema. En este caso ha sido necesario construir el modelo de optimización un poco distinto al primer caso analizado. Aquí por ejemplo la Función Objetivo ha sido el volumen del sistema, mientras que la variable independiente o variable de diseño ha sido la deformación inicial de los tensores (Tensión de preesfuerzo), las variables de estado han sido tanto los esfuerzos en barras y tensores para que no rebasen ciertos límites establecidos, como el desplazamiento máximo ocurrente en el sistema solicitando en este caso que no se rebase un límite prefijado.

Todos los análisis mencionados se han ilustrado con graficas mostrando el estado de esfuerzos en los elementos estructurales así como las deformaciones finales del modelo de tensegridad.

El trabajo que se ha realizado permite visualizar las implicaciones que desde un punto de vista estructural tienen estos sistemas denominados Tensegrity, sin duda pueden existir diversas perspectivas de estudio de las mismas además de las características de estos sistemas que aquí se ha intentado esbozar. En todo caso, estos resultados marcan la pauta para muchos otros estudios que se hagan a este respecto.

De las conclusiones basadas en las hipótesis podemos mencionar que:

1.- Se experimenta un sistema estructural teniendo un comportamiento elástico lineal. Debido a que el modelo utilizado está directamente asociado a un sistema de comportamiento plástico lineal.

2.- Si se utiliza un modelo convencional se afirma que las unidades estructurales del sistema se estabilizan basándose en tensores presforzados.

Se encuentra por lo tanto un sistema estable, si esto no hubiera ocurrido el modelo se hubiera colapsado, lo cual no sucedió así.

Y se reafirma la utilización de elementos para la aplicación de las hipótesis.

- Los tipos de optimización utilizados en el primer análisis de optimización no-lineal fueron random, gradiente y factorial. Y se aplicaron en función de la convergencia con los mínimos locales requeridos. Obteniendo resultados no favorables. En el segundo análisis con una estructura convencional, se aplicaron los mismos análisis de optimización, obteniendo resultados favorables.
- Se utilizó como función objetivo la longitud total de los elementos estructurales, para la primera corrida de análisis.
- Se consideró como variables de diseño las coordenadas (X,Y,Z) de los nodos del sistema a tensión, asimismo se incluyó el preesfuerzo inicial en los cables. En ambos análisis
- Se consideró como variable de estado los esfuerzos en barras y en tensores, para ambos análisis.
- Como base de inicio para el desarrollo de los análisis de elementos finitos se utilizó tanto para barras como para los cables elementos unidimensionales tipo viga de dos nodos con 3 grados de libertad lineal por nodo.
- Con los puntos anteriores se afirma las hipótesis establecidas en un principio de este trabajo de investigación.

APÉNDICE

Aplicaciones de las Estructuras de Tensegridad.

Debido a que no entra dentro del objetivo de este estudio las aplicaciones de las estructuras a tensión, se decidió no incluir este apartado en el documento principal. Sin embargo se consideró prudente incluir cuales han sido las aplicaciones hasta el momento de las estructuras de tensegridad.

A continuación se presentan brevemente el material que se encontró del uso de las estructuras de estudio donde se encuentran en 3 principales áreas:

- Estructuras espaciales
- Artística
- Utilitaria

Estructuras espaciales

De las estructuras que se pueden mencionar dentro de la rama de la construcción, son las estructuras como estadios y áreas de recreación. De los primeros que se pueden mencionar es el Estadio de Seúl, y recientemente la cafetería en el parque recreativo Alfafares, ciudad de Santiago de Querétaro, realizada por despacho Uehara.



Cafetería, Alfafares centro recreativo, Querétaro Uehara, 2007



Primer domo tipo tensegridad Gimnasio de Seúl. Korea, 1988.

Artística:

Como se mencionó con anterioridad uno de los iniciadores y creadores de este tipo de estructuras es Kenneth Snelson. El cual tiene una variedad considerable de esculturas al rededor de los EEUU. También durante este estudio se encontró una gran cantidad de personas aficionadas a estas estructuras que se dedican a construir dichas estructuras por "hobbie". Lo cual las ha hecho mucho más populares.



Silla Tensegrity, por Werta
Finlandia

City Boots, 1968
acero inoxidable
2.7 x 2.7 x 3.6m
Colección: Fundación J. Patrick Lannon

Utilitaria:

Es indudable que las estructuras a tensión por su delicadeza y sus formas geométricas que se consiguen al construir las son llamativas y hasta cierto punto curiosas. Esto denota que algunos diseñadores las incluyan en sus diseños para mesas, sillas y en muchos casos para los muebles de exhibición.

BIBLIOGRAFÍA

Libros

Anthony Pugh. 1976. An Introduction to Tensigrity. University of California Press. California, Berkeley.

V. Admans and A. Askenazi, 1999, Finite Element Analysis, On Word Press. USA.

Bruno Munari, 1990. ¿Cómo nacen los objetos?. (4ª Ed.). Ed. Gustavo Gill. España. p18-21.

Cook R. D.; Malkus D.S. and Plesha M. E. 1988. Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley and Sons. Inc. New York.

Francisco Aguayo Gonzáles y Victor M. Soltero Sánchez. 2003. Metodología del Diseño Industrial. Ed. Alfaomega. México. p 1-232.

Frederick S. H. 2006. Introducción a la Investigación de Operaciones, (8ª Ed.). McGraw-Hill. Mexico.

Gere and Timoshenko. 1997. Mecánica de Materiales. (4ª Ed.). Ed International Thomson. México. 1-187, 267-283

Gómez Valentin, 2004. Tensegridad. Ed, Universidad de Cantabria, España.

Hugh Kenner. 2003. Geodesic Math and How to Use it. (2nd Ed.). University of California, USA. p 3-20.

Harold C. Martin and Graham F. Carey. 1973. Introduction to Finite Element Analysis. Theory and Application, Ed. Mc Graw Hill. USA

James Ambrose. 2003. Análisis y Diseño de Estructuras. (2ª Ed.). Ed. Limusa-Noriega Editores. México.

John Borrego. 1968. Space Grid Structures. USA. (2nd Ed.). Massachusetts Inst. of Technology Cambridge, London.

Louis A. Hill Jr. 1978. Fundamentos de Diseño Estructural. Representaciones y Servicios de Ingeniería, México. p 1-86, 201-240 279-299, 305-359

Magnus J. Wenninger. 1999. Spherical Models. (3rd Ed.). Dover Publications, Inc. New York.

Mc Cormac Nelson. 2002. Análisis de Estructuras, Metodos Clásicos y Matricial. (2a Ed.). Ed. Alfaomega. México. p. 77-107

Z. S. Makowski. 1972. Estructuras Espaciales de Acero. (2^a Ed.). Ed. Gustavo Gili. Barcelona, España.

Roberto Hernandez Samperi, Carlos Fernandez Collado y Pilar Baptista Luicio. 2001. Metodología de la Investigación. (2^a Ed.). Ed. Mc Graw Hill. México

Structural Analysis Guide, Release 5.5, 1998. ANSYS inc. (4th Ed.). ANSYS.

Robert Ardrey, 2002. La Evolución del Hombre, Ed. Alianza, España.

Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. 1994. El Método de los Elementos Finitos. Ed. McGraw Hill / CIMNE. Barcelona.

Articulos

Bin-Bing Wang. Oct, 1997. Cable- Strut Systems: Part I – Tensegrity. TowerCenter of Space Structures Technology Development, Xu Zhou Tower Group Corporation, Xu Zhou 2211007, China.

Bin-Bing Wang. Oct, 1997. Cable- Strut Systems: Part II – Tensegrity. TowerCenter of Space Structures Technology Development, Xu Zhou Tower Group Corporation, Xu Zhou 2211007, China.

Cornel Sultan and Robert Skelton. April 2003. Deployment of tensegrity structures. Medical School, Harvard University, Boston, MA 02115, USA b University of California, La Jolla, CA 92093-0411, USA 30.

Cornel Sultan and Robert Skelton. January 2004. A force and torque tensegrity sensor. Harvard University, Boston, MA 02115, USA b Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, La Jolla, CA 92093-0411, USA; 31.

G. Gomez Estrada, H.-J. Bungartz, and C. Mohrdieck. February 2006. Numerical form-finding of tensegrity structures. Max-Planck-Institut für Metallforschung, Heisenbergstr. 3, D-70569, Stuttgart, Germany.

J. Quirant, M.N. Kazi-Aoual, and R. Motro. January 2003. Designing tensegrity systems: the case of a double layer grid. Université Montpellier II, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR CNRS 5508, CC048, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 05, France.

J.Y. Zhang, M. Ohsaki and Y. Kanno. 18 July 2005. A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems a Department of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto University, Kyoto-Daigaku Katsura, Nishikyo, Kyoto 615-8540, Japan.

Massimiliano Lazzari, Renato V. Vitaliani, Massimo Majowiecki and Anna V. Saetta. 19 June 2003. Dynamic behavior of a tensegrity system subjected to follower wind loading. Department of Construction and Transportation, University of Padova, via Marzolo 9, Padova 35131, Italy.

Milenko Masic, Robert E. Skelton and Philip E. Gill. 5 March 2005. Algebraic tensegrity form-finding. International Journal of Solids and Structures. CA 92093-0411, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, San Diego.

Milenko Masic, Robert E. Skelton and Philip E. Gill. March 2005. Optimization of tensegrity structures. Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093-0411, United State,

MOTRO, R. 1987. "Tensegrity Systems for Double-Layer Space Structures", in H.V. Topping, ed., *Proceedings of International Conference on the Design and Construction of Non-conventional Structures* (Vol.2), Edinburgh, Scotland: Civil-Comp Press.

Ligas de Internet

Board Of Regents Of The University Of Wisconsin System. 2002. Engineering Centers Building Sculpture: Tensegrity, <http://www.engr.wisc.edu/news/headlines/2002/Aug12.html>

Burkhardt, R.W. 1994-2004. A practical guide to tensegrity design, Cambridge, USA. <http://www.channel1.com/users/bobwb/tenseg/book/cover.html>

Burkhardt, R.W. 1999-2004. A Technology for Designing Tensegrity Domes and Spheres, Cambridge USA. <http://www.channel1.com/users/bobwb/prospect/prospect.htm#sec:app>

Burkhardt, R.W. 2000-2004. Synergetics Gallery: A Pictorial Record of Investigations. Cambridge, USA. <http://www.channel1.com/users/bobwb/synergetics/photos/index.html>

Cisc-Canadian Institute of Steel Construction. 2003. Project gallery: Biosphere-U.S.Pavilion Expo '67 Buckminster Fuller, Ontario, Canada. <http://www.cisc-icca.ca/expo67.html>

Fuller, R.B. 1975. Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking, New York: MacMillan Publishing Co., Inc. <http://www.rwgrayprojects.com/synergetics/synergetics.html>

Hart, George W. 1997. Virtual Polyhedra, Northport, USA. <http://www.georgehart.com>

Heller, M. 2002. "Tensegrity Models", Dynamic Chiropractic. <http://www.chiroweb.com/archives/20/26/07.html>

Sanchez, R., Maurin, B., Kazi-Aoual, M.N., Motro, R. 2003. Modélisation des systèmes de tensegrité: Grilles à double nappe, Montpellier: Laboratoire de Mécanique et Génie Civil. Université Montpellier II. <http://www.lirimm.fr/doctiss04/art/M03.pdf>

Snelson, K. 1990. "Letter from Kenneth Snelson" to R.Motro, International Journal of Space Structures, and in Motro <http://www.grunch.net/snelson/rmoto.html>.

Snelson, K. (2004) Kenneth Snelson, New York, USA. <http://www.kennethsnelson.net/>