UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“Enseñanza – Aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo utilizando applets como herramienta didáctica”

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presentan:

Claudia Feregrino Puebla

Karina Pérez Feregrino

Dirigida por:

M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yañez

Santiago de Querétaro, Qro. Abril de 2010

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Dirección

ACUERDO 153/09

C. U. 6 de mayo de 2009

C. CLAUDIA FEREGRINO PUEBLA
C. KARINA PÉREZ FEREGRINO
Pasantes de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Presente.

Con relación a su oficio enviado al H. Consejo Académico de la Facultad en el que solicita titularse bajo la opción de tesis colectiva, me permito informarle que en la sesión ordinaria del 6 de mayo del año en curso, este cuerpo colegiado acordó aceptar la opción de titulación por lo que deberá trabajar en el tema **"Enseñanza - Aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo utilizando applets como herramienta didáctica"**, bajo la dirección de la M en C. Patricia Isabel Spindola Yañez

El Contenido aceptado por el H. Consejo Académico es el siguiente:

CAPÍTULO I
INTRODUCCIÓN

1.1.- Introducción
1.2.- Descripción del Problema
1.3.- Antecedentes
1.4.- Justificación
1.5.- Objetivos de la Investigación
    1.5.1.- Objetivo General
    1.5.2.- Objetivos Específicos
1.6.- Hipótesis de la Investigación
1.7.- Fundamentos Teóricos
    1.7.1.- Teoría Psicogenética de Jean Piaget
    1.7.2.- Teoría Sociocultural de Lev. S. Vygotsky
    1.7.3.- Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel
    1.7.4.- De la educación centrada en el maestro, a la educación centrada en el estudiante
    1.7.5.- Conceptos de enseñanza y aprendizaje
    1.7.6.- Importancia de la enseñanza de las ciencias

CAPÍTULO II
FUNDAMENTOS CONTEXTUALES

2.1.- Origen y Evolución del Cálculo Diferencial e Integral
    2.1.1.- De la Roma Clásica a la Edad Media
    2.1.2.- Renacimiento
    2.1.3.- Siglos XVII y XVIII
    2.1.4.- Siglos XIX y XX

Centro Universitario
Cerro de las Campanas
Santiago de Querétaro
México C.P. 76010
01 (442) 192 12 00
Ext. Fax. 6005

También hago de su conocimiento las disposiciones de nuestra Facultad, en el sentido que antes del Examen profesional deberá cumplir con los requisitos de nuestra legislación y deberá imprimir el presente oficio en todos los ejemplares de su tesis.

Atentamente
"EL INGENIO PARA CREAR NO PARA DESTRUIR"

DR. GILBERTO HERRERA RUIZ
Director

DIRECCIÓN

c.c.p. Archivo

*GHR/DHM.

Centro Universitario
o de las Campanas
tiago de Querétaro
México C.P. 76010
01 (442) 192 12 00
Ext. Fax. 6005

Centro Universitario, 10 de Octubre de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva: **"Enseñanza - aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo utilizando applets como herramienta didáctica"**, de las C.C. **Claudia Feregrino Puebla y Karina Pérez Feregrino, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas** de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

P. I. Spíndola Y.

M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yañez.
Directora de Tesis

Centro Universitario, 10 de Octubre de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva: **"Enseñanza - aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo utilizando applets como herramienta didáctica"**, de las C.C. **Claudia Feregrino Puebla y Karina Pérez Feregrino, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas** de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

M.D.M. Carmen Sosa Garza
Sinodal

Centro Universitario, 10 de Octubre de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva: **"Enseñanza - aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo utilizando applets como herramienta didáctica"**, de las C.C. **Claudia Feregrino Puebla y Karina Pérez Feregrino, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas** de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

Prof. Georgina Infante Izaguirre
Sinodal

Centro Universitario, 10 de Octubre de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva: "**Enseñanza - aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo utilizando applets como herramienta didáctica**", de las C.C. **Claudia Feregrino Puebla y Karina Pérez Feregrino, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas** de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

M.D.M. Arturo Corona Pegueros
Sinodal

Centro Universitario, 10 de Octubre de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva: **"Enseñanza - aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo utilizando applets como herramienta didáctica"**, de las C.C. **Claudia Feregrino Puebla y Karina Pérez Feregrino, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas** de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

M. en C. Enrique Crespo Baltar
Sinodal

DEDICATORIA

A MIS PAPÁS, A MIS HERMANAS,

A MI ESPOSO Y A MI HIJO

Porque gracias a su cariño, guía y apoyo he llegado a realizar uno de los anhelos más grandes de mi vida, fruto del inmenso apoyo, amor y confianza que en mi se depositó y con los cuales he logrado terminar mis estudios profesionales que constituyen el legado más grande que pudiera recibir y por lo cual les viviré eternamente agradecida.

Con cariño y respeto.

CLAUDIA

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por concederme el don de la vida y la salud, por cada una de las bendiciones que derrama sobre mí y sobre las personas que más amo y por permitirme cumplir uno de mis más grandes sueños.

También doy gracias a la Santísima Virgen por conducir cada uno de mis pasos, por cuidarme y protegerme en todo momento y por interceder ante su hijo por cada una de mis necesidades.

A una persona muy valiosa que sin su apoyo y colaboración no hubiera sido posible la realización de esta tesis, a nuestra asesora la M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yañez, quien nos propuso la elaboración de esta tesis, y quien nos ha conducido paso a paso dedicando gran parte de su tiempo y esfuerzo hasta culminar con dicho trabajo, el cual me permite dar término a esta etapa de mi vida.

A nuestros sinodales: M.D.M. Carmen Sosa Garza, Lic. Georgina Infante Izaguirre, M.D.M. Arturo Corona Pegueros y M. en C. Enrique Crespo Baltar por aceptar fungir como sinodales de nuestra tesis y por el tiempo que dedicaron en la misma para que valiera la pena el resultado. Además porque fueron parte fundamental en el transcurso y culmen de mi Licenciatura.

A nuestro compañero de Licenciatura Jared Piña Bárcenas, por la programación de cada uno de los applets que presentamos en este trabajo.

A todos los Profesores que formaron parte de mi educación en esta Universidad, pues gracias a los conocimientos que me impartieron estoy concluyendo con esta etapa tan importante de mi vida.

Agradezco infinitamente a dos personas que se que comparten conmigo este triunfo y que los llena de felicidad igual que a mi, a mi papás: Maru y Miguel, pues gracias a ellos estoy en este mundo y he conseguido llegar hasta donde estoy; porque indudablemente sin su apoyo, amor, confianza, consejos, enseñanzas y a todo cuanto me han brindado, no hubiera podido lograr terminar mi Licenciatura. Muchísimas gracias. Los amo con todo mi corazón.

Dos personas que también son parte fundamental de mi vida, mis hermanas: Jessica y Maritza, pues siempre me brindaron su apoyo, ayuda, confianza y palabras de aliento. Gracias por considerarme un ejemplo a seguir, y espero que al igual que comparten conmigo esta alegría de culminar mis estudios, yo también pueda compartir con ustedes el culmen de sus carreras profesionales. Las quiero mucho.

A alguien que es parte de mi vida, que me ha brindado su amor, confianza y apoyo incondicional, a mi esposo: Jesús, porque se que también se llena de alegría al verme concluir esta etapa tan importante de mi vida. Te amo.

Al mejor regalo del mundo que Dios me pudo conceder, a mi hijo Jesús "Mi príncipe", que es quien me motiva para ser cada día una mejor persona, quien llena mi vida de amor y felicidad y por quien deseo superarme para darle lo mejor de mí. Te amo muchísimo príncipe.

Y finalmente agradezco a cada una de las personas que fueron parte importante de mi Licenciatura, así como a todas aquellas que comparten conmigo esta felicidad de culminar con mis estudios profesionales, especialmente a mi tía Yolanda, mi prima Brenda y mis compadres Cheli y Efrén.

MIL GRACIAS A TODOS.

CLAUDIA

DEDICATORIA

Quiero dedicar esta tesis a las personas que ocupan un lugar muy especial en mi corazón:

- A mi madre, a quien le agradezco de todo corazón por su amor, cariño y comprensión.
- A mi esposo, por todo su amor y comprensión que siempre me ha brindado.
- A mi hijo, por ser uno de los principales motivos que me impulsaron a seguir adelante.

KARINA

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios, por permitirme llegar hasta este momento tan importante de mi vida y lograr otra meta más en mi camino.

Gracias a mi mamá, por su cariño, comprensión y apoyo sin condiciones ni medida, por darme la estabilidad emocional, económica y sentimental para poder llegar hasta este logro, que definitivamente, no hubiese podido ser realidad sin ti.

Gracias al hombre que decidió brindarme todo su amor, apoyo y comprensión. Amor, mil gracias por compartir tu vida conmigo y apoyarme en todo momento, sobre todo en los más difíciles, ya que siempre tienes las palabras adecuadas que me ayudan a salir adelante.

Gracias a mi pedacito de cielo, que llegó a mi vida para hacerme la mujer más feliz y realizada del mundo. Gracias por que nunca pensé que de tan pequeño ser surgiera ese gran potencial que me impulsa a seguir adelante con mayor ánimo y entusiasmo. Te adoro hijo.

Gracias a mi asesora Patricia Isabel Spíndola Yáñez, por sus consejos, paciencia y opiniones que me permitieron realizar este trabajo satisfactoriamente.

Gracias a Carme Sosa Garza, a Georgina Infante Izaguirre, a Enrique Crespo Baltar y a Arturo Corona Pegueros, por su disposición y ayuda brindadas.

Gracias a todos los profesores que me orientaron y guiaron por el camino del triunfo, rindiéndoles el mérito que su profesión lo dice: el de ser maestros, por que además de ser maestros, en algunos de ellos encontramos un amigo en quien confiar. Gracias por su participación en mi desarrollo profesional durante mi carrera, sin su ayuda y conocimientos no estaría donde me encuentro ahora.

Gracias a Jared Piña, por su apoyo en este trabajo, ya que sin su ayuda no se hubiera logrado el proyecto.

Gracias a mi compañera y amiga Claudia por su apoyo y sobre todo por su comprensión en los momentos difíciles que tuvimos que pasar a lo largo de esta tesis.

Gracias a todos mis amigos que estuvieron apoyándome a lo largo de toda la carrera. Gracias por tantas aventuras que pasamos juntos. Gracias por su cariño y amistad que me brindaron incondicionalmente.

KARINA

ÍNDICE

CAPÍTULO I
INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO II
FUNDAMENTOS CONTEXTUALES

CAPÍTULO III
METODOLOGÍA

CAPÍTULO IV
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CAPÍTULO I
INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

El Cálculo Diferencial e Integral es un tópico que presume pensar en los niveles de reprobación y aprovechamiento de las matemáticas. El aprender Cálculo Diferencial e Integral implica relacionarlo con alguna rama científica o alguna aplicación práctica real para darle su verdadero sentido. El desarrollo de temas de Cálculo Diferencial e Integral no debe quedarse en el desarrollo de habilidades algorítmicas para calcular derivadas e integrales, debe ir hasta su relación con el mundo real y su práctica en problemas comunes.

En la era de la información debemos modernizar la enseñanza si queremos propiciar aprendizajes duraderos en nuestros alumnos, eficientando el proceso enseñanza-aprendizaje. De esta manera, es necesario que los alumnos construyan procedimientos y conceptos por sí mismos y los transformen a nuevos contextos y situaciones, logrando realizar conexiones cognitivas entre lo cotidiano y lo científico, llegando a un aprendizaje significativo.

La labor del docente, radica en ser un facilitador de las herramientas de abstracción reflexiva necesarias para que el alumno obtenga sus propios esquemas interpretativos.

La idea de que las matemáticas se aprenden mejor construyéndolas, es el rubro que se sigue en este trabajo. De tal forma, que se llevó una metodología con mayor énfasis en aprendizaje constructivo de acuerdo al tema en cuestión, y dándole más libertad con control al estudiante, para que él mismo construya sus propios esquemas y procesos mentales.

Por lo anterior, el presente trabajo pretende dar una alternativa didáctica para el curso de Cálculo Diferencial e Integral en la Universidad Autónoma de Querétaro, basado en un método con mayor enfoque constructivista utilizando los applets como herramienta didáctica, suponiendo que esta propuesta genere en el estudiante un aprendizaje significativo.

Concluyéndose que, "Si el alumno construye, razona y crea por si solo, y bajo la guía del docente, los aprendizajes son más sólidos y significativos y, a la vez, la reprobación disminuye".

1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Buscando una mejora en los índices de aprobación de los cursos de matemáticas, en especial de los de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral en los programas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, proponemos utilizar la tecnología como una forma de ayudar y apoyar a los alumnos en la motivación, comprensión, manipulación y aplicación de los conceptos de Cálculo, a través del desarrollo de applets interactivos que le permitan al estudiante explorar, formular y probar la validez de sus hipótesis y aprender a partir del análisis de sus propios errores.

1.3 ANTECEDENTES

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro se ha hecho un esfuerzo constante, por mejorar los índices de aprobación de los cursos de matemáticas, en especial del Cálculo Diferencial e Integral en los programas de la Facultad de Ingeniería. La primera reforma consistió en quitar algunos de los temas menos relevantes, posteriormente se trabajó en un conjunto de ejercicios y problemas, más tarde se iniciaron cursos propedéuticos y posteriormente el semestre cero, que prepara a los aspirantes a la Facultad de Ingeniería no solo en Matemáticas, sino también en Física y Química. Junto con esto se ha elevado el puntaje del examen de admisión. En esta última reestructuración se dividirá el curso de Cálculo Diferencial e Integral en dos cursos, el de Cálculo Diferencial y el de Cálculo Integral, lo cual permitirá una mejora en los índices de aprobación de estas materias.

Una forma de ayudar y apoyar a los alumnos en la motivación, comprensión, manipulación y aplicación de los conceptos de Cálculo es utilizar la tecnología.

La tecnología no es un término creado recientemente. Las primeras concepciones que se tenían sobre tecnología, tomaban en cuenta la organización, la planificación de la acción y las herramientas para esa acción. Posteriormente se añadió la necesidad de que toda esa tecnología debe estar al servicio del hombre, a prolongar alguna de sus facultades.

En la actualidad, podemos definir la tecnología como la unión de diseños y medios, que pretenden potenciar al hombre, ya sea creando nuevas capacidades o ampliando las existentes, de tal forma que su actuación sobre el medio que le rodea, sobre su entorno, sea más eficaz.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Las reflexiones sobre el abordaje de la matemática han dado pauta al reconocimiento de la importancia de la educación matemática integral en la educación y en el impacto que tiene en la construcción de concepciones de la realidad y en la toma consciente de decisiones que la transformen.

Es de suponerse que el mejor material didáctico para enseñar la matemática es la realidad misma, sin embargo, hay múltiples recursos que apoyan las diversas fases del aprendizaje como la construcción de las nociones, la ejercitación y las aplicaciones en distintos contextos. Entre esos recursos, proponemos que desde el papel de reaprovechamiento hasta las nuevas tecnologías son importantes para determinados momentos y niveles, ya que la tecnología libera de hacer cálculos numéricos y simbólicos que pueden ser prolongados y agotadores, y dedicar la energía a resolver el problema o la demostración.

En especial trataremos la problemática de una mejora en los índices de aprobación del curso de Cálculo Diferencial e Integral de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Querétaro, ya que ésta presenta muchas dificultades para los estudiantes, principalmente en lo relativo al Teorema Fundamental del Cálculo.

En la búsqueda de soluciones para resolver limitaciones que, como éstas, enfrentan los estudiantes, la enseñanza de la matemática ha sufrido transformaciones, primordialmente en las metodologías que se utilizan. Algunas se apoyan en programas de computadora que permiten al estudiante tener un papel más participativo en su aprendizaje.

Aunque la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática. Gracias a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. Estas experiencias matemáticas serán fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los diseñadores de currículo y los profesores en el diseño e implantación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre ella, el profesor y el estudiante (creando un cierto contrato didáctico) está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico.

Por lo cual, la tecnología puede y debe ser un catalizador de un proceso en el que diversos agentes didácticos (profesor, diseñadores de currículo, programa de computador) crean espacios en los que el sujeto se enfrenta a un medio que le crea conflictos (perturbaciones del sistema) con base en los cuales el sujeto puede avanzar en la construcción de su conocimiento matemático (búsqueda de equilibrio del sistema).

La llegada de las computadoras primero y las calculadoras graficadoras después, está permitiendo ir de la simple manipulación algebraica y repetitiva de ejercicios, a la comprensión y formación de conceptos del cálculo a través del manejo no solo algebraico, sino numérico y gráfico de estos. Estas herramientas electrónicas permiten una exploración rápida, amplia y además profunda, de los conceptos, es decir permiten llevar a cabo un análisis más rico del concepto; lo cual, entre otras cosas, puede permitir ir de las concepciones ingenuas y a menudo erróneas de los estudiantes a nociones muy cercanas a las nociones rigurosas del concepto.

En la actualidad, los centros de computo de la mayoría de las instituciones de nivel superior se caracterizan porque en su mayoría, los equipos están conectados en red, y que por lo tanto se da preferencia al uso de paquetes de computación caros, complejos y muchas veces tan difíciles de aprender como los conceptos que se quieren enseñar, también es cierto que cada vez el número de estudiantes que cuenta en el hogar con equipos de computo es mayor, razón por la cual creemos que es importante que el usuario de paquetes de matemáticas tenga facilidad de acceso a los mismos. Esto implica que el software se pueda conseguir con relativa facilidad, que además no requiera de una computadora cara en términos de memoria, velocidad de procesamiento y capacidad de graficación, entre otras cosas; varios paquetes de computo podrían considerarse entre esto: Calcula, Graphic Calculus, Derive, Converge y Calculus, entre otros.

Sin embargo, Java es un programa que nos puede ofrecer mayores ventajas respecto a los anteriores, ya que nos proporciona aplicaciones que pueden escribirse con rapidez y corrección, nos permite tener acceso a un universo en expansión de componentes de software reutilizables, encontrándose todo ello inmerso en un paquete verdaderamente portátil donde las aplicaciones escritas se pueden ejecutar sin modificación en cualquier otra computadora que posea un intérprete de Java (como Nestcape, Internet Explorer y Hotjava). Y que además de sus características básicas Web, puede transferir y ejecutar applets.

Dichos applets son de suma importancia, ya que pueden favorecer a la enseñanza del Cálculo pues se trata de un programa y a la vez un medio audio/visual donde el alumno puede interactuar con ellos, utilizarlos para crear animaciones, figuras o tareas, juegos u otros efectos interactivos.

Por lo tanto, la tecnología (y más en específico Java a través de los applets) ofrecen la oportunidad para que se consolide no solamente una nueva visión del contenido matemático, sino también nuevas visiones acerca de las relaciones didácticas y del papel de los diversos agentes didácticos en el proceso de la construcción del conocimiento matemático por parte del sujeto.

1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1 Objetivo General

Apoyar y guiar al alumno de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral a descubrir y construir conceptos y técnicas mediante el ejercicio de la reflexión, utilizando la tecnología. De esta manera el Cálculo deja de ser más que una simple mecanización de procedimientos.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Diseño y desarrollo de applets que le permitan al estudiante investigar, manipular, construir y aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Lograr que el alumno se apropie de los conceptos del Teorema Fundamental del Cálculo y los pueda aplicar posteriormente.
- Mejorar los índices de aprobación en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral que se imparten en la Facultad de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Querétaro.

1.6 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

El aprendizaje de conceptos matemáticos puede realizarse proponiéndole al alumno situaciones problemáticas de su interés que lo lleven a la reflexión. Una forma de presentar estas situaciones es a través de applets interactivos que desarrollen en el alumno el gusto por la investigación.

1.7 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Las teorías del aprendizaje, son conceptos teóricos didácticos, que sirven para lograr los objetivos deseados en la enseñanza-aprendizaje. Existen tres corrientes principales: el conductismo, el cognitivismo y el constructivismo, la distinción básica radica, en la forma en que conciben el conocimiento.

Por una parte, el conductismo considera que la actividad mental humana representa una reacción a estímulos ambientales, el conocimiento consiste en una respuesta pasiva y automática a factores o estímulos externos que se encuentran en el ambiente, es decir, se concibe al alumno como un sujeto cuyo desempeño y aprendizaje escolar pueden ser arreglados desde el exterior, donde la enseñanza es de forma directa y rígida, en la que el papel principal lo tiene el profesor.

A diferencia del conductismo, el cognitivismo trata al individuo como un ser de valores. Hace hincapié en la totalidad del individuo. Los componentes básicos se encuentran sustentados en: la persona, relación de ayuda y principalmente, en la no directividad, es decir, considera el conocimiento básicamente como representaciones simbólicas en la mente de los individuos.

Cabe mencionar que al constructivismo, también se le considera como una teoría cognitiva porque postula la existencia de procesos mentales internos, a diferencia de las corrientes conductistas, sin embargo, el constructivismo como el término lo sugiere, concibe el conocimiento como algo que se construye, algo que cada individuo elabora a través de un proceso de aprendizaje. Para el constructivismo, el conocimiento no es algo fijo y objetivo, si no algo que se construye y, por consiguiente, es una elaboración individual relativa y cambiante.

El supuesto fundamental del constructivismo es que los seres humanos construyan a través de la experiencia su propio conocimiento y no simplemente reciban la información procesada para comprenderla y usarla de inmediato, es necesario crear modelos mentales que puedan ser cambiados, amplificados, reconstruidos y acomodados a nuevas situaciones.

Así, consideramos que el constructivismo es la corriente teórica del aprendizaje que más se adapta a las necesidades educacionales actuales, ya que como su nombre lo indica, se construye conocimiento a partir del proceso enseñanza-aprendizaje y es por ello que es importante que el alumno tenga conocimientos básicos previos a un tema por aprender, ya que esto conlleva a mejorar el proceso, logrando así que el que más sabe más aprende, formando una estructura más cognitiva en el alumno, teniendo mayor significado lo que aprende, y que el profesor por su parte estimule la motivación y la participación de los alumnos que quedan rezagados, activando los conocimientos previos que les permitan asimilar e integrar lo que ya saben y que tengan una estrecha relación con temas posteriores que llevarán a lograr un aprendizaje significativo, unificando el avance de aprendizaje en todo el grupo.

Así mismo, hacemos énfasis en que los alumnos deben tener un medio propio para construir sus conocimientos donde el profesor juega un papel importante pues debe conjugar sus experiencias y conocimientos, dejando a un lado la educación tradicional (conductismo) transformándola en una educación donde haya más interacción, poniendo de manifiesto que el alumno debe participar en la construcción de su conocimiento, logrando así que él se motive y le dé mayor sentido al proceso enseñanza-aprendizaje, haciendo que sea capaz de pensar, opinar, actuar, participar y adoptar una interacción entre alumno y profesor, y alumno y comunidad. Para lograr lo anterior es necesario que el alumno se encuentre predispuesto socioculturalmente, promoviendo el diálogo y la discusión entre estudiantes de los problemas que plantea el profesor y así construir el conocimiento, haciendo al aprendizaje un proceso más proactivo.

Por lo tanto, el constructivismo es una teoría de aprendizaje que se basa en que los seres humanos construyen su propia concepción de la realidad y del mundo en que viven. Cada uno de nosotros genera su propio conocimiento, sus propias reglas y modelos mentales con los que damos sentido y significado a nuestras experiencias y acciones. Así, para que se pueda poner en práctica dicha teoría es necesario comprender lo que es aprendizaje significativo que con ayuda de la teoría socio-cultural y la teoría psicogenética se podrá establecer un mejor conocimiento de los estudiantes, logrando así que el proceso de enseñanza-aprendizaje se adecue a las necesidades actuales.

1.7.1 Teoría Psicogenética de Jean Piaget

La Teoría Psicogenética de Jean Piaget (1896 – 1980) parte de la lógica y de la psicología, en tanto que le interesan las estructuras cognitivas del sujeto y la forma en que éstas operan para establecer conocimiento de significados, clases, relación. Esta postura, implica el cambio del viejo paradigma en el que el conocimiento se entendía como un hecho, por uno nuevo que lo conciba a manera de proceso, siendo además, estudiado el fenómeno cognoscitivo con un enfoque centrado en el proceso que se da a lo largo del desarrollo físico e histórico (genético) del sujeto que aprende, ya no de manera estática, es decir, sólo su producto final. Es por ese enfoque en su interés por explicar la génesis del conocimiento, por lo que la denomina psicogenética.

Conforme a los planteamientos epistemológicos de Piaget, el conocimiento (aprendizaje) tiene su génesis en la acción; sin embargo, ésta es conducida con base a una organización mental previa, conocida en su forma más simple como esquemas. Cuando se organiza un conjunto de esquemas formado por leyes entre ellos, constituyen una estructura, cuya función también es la de orientar la acción e interpretar al objeto, sólo que tiene un nivel más complejo (Hernández, 1998).

Cabe mencionar que una de las principales críticas que se le hacen a la teoría psicogenética es que se considera a las personas como sujetos aislados del contexto sociocultural; sin embargo, cabe recordar que el interés de Piaget no fue de establecer mecanismos escolarizados para que los estudiantes aprendieran, sino de entender y explicar como funcionan los procesos internos del sujeto, por medio de los cuales éste adquiere conocimientos[1].

En el ámbito escolar, el constructivismo Piagetiano promueve la comprensión como forma de adquisición de conocimientos, la cual es el resultado de los procesos de desequilibración – equilibración (aspectos funcionales) que se dan a lo largo de las etapas de desarrollo (aspectos estructurales).

---

[1] Castorina, I. A. (1999) Piaget en la educación. Debate en torno de sus aportaciones. (Ed. Piados-UNAM. México) p. 54.

La psicología genética, trata de explicar el proceso del aprendizaje de manera aislada sin profundizar en otras variables tales como la cultura, relaciones, emociones, contexto, etc. Esto hace que se planten –erróneamente- planes y programas donde a manera de receta se establezca qué y cómo habrá de aprender el estudiante.

A decir de César Coll, para estudiar la construcción del conocimiento, es indispensable considerar los procesos de enseñanza – aprendizaje que se dan en el aula, bajo un planteamiento psicogenético y otro sociocultural, considerando para ello, a los aportes de Piaget y Vygotsky, para hacer una nueva visión "integradora", en la que se de cuenta del aprendizaje a partir de una teoría de "las prácticas educativas escolares", con un planteamiento epistemológico propio[2].

Los elementos más relevantes que se retoman de cada postura son: de la teoría psicogenética, los conceptos de auto-estructuración, actividad mental constructivista y competencia cognitiva, del procesamiento humano de la información, los esquemas del conocimiento y los esquemas representacionales; de Ausubel, naturaleza y condiciones del aprendizaje significativo y; de la teoría sociocultural, andamiaje, ayuda ajustada, zona de desarrollo próximo e internalización.

1.7.2 Teoría Sociocultural de Lev. S. Vygotsky

El origen de la Teoría Sociocultural se debe a Lev. S. Vygotsky (1896 – 1934) quien es considerado el creador del constructivismo social. A partir de él, se han desarrollado diversas concepciones sociales sobre el aprendizaje. Algunas de ellas amplían o modifican algunos de sus postulados, pero la esencia del enfoque constructivista social permanece.

Lo fundamental del enfoque de Vygotsky consiste en considerar al individuo como el resultado del proceso histórico y social donde el lenguaje desempeña un papel esencial. Para este investigador, el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero el medio entendido social y culturalmente; para él existen cinco conceptos fundamentales que son:

[2] Coll Cesar(1993) El constructivismo en el aula. (Ed. Graó. Barcelona) p. 87-116.

las funciones mentales, las habilidades psicológicas, la zona de desarrollo próximo, las herramientas psicológicas y la mediación.

Las funciones mentales para Vygotsky son de dos tipos: las inferiores y las superiores. Las funciones mentales inferiores son aquellas con las que nacemos, son las funciones naturales y están determinadas genéticamente. Las funciones mentales superiores se adquieren y se desarrollan a través de la interacción social. Puesto que el individuo se encuentra en una sociedad específica con una cultura concreta.

Habilidades psicológicas, las funciones mentales superiores se desarrollan y aparecen en dos momentos. En un primer momento, las habilidades psicológicas o funciones mentales superiores se manifiestan en el ámbito social; en un segundo momento, en el ámbito individual. La atención, la memoria, la formulación de conceptos son primero un fenómeno social y después, progresivamente, se transforman en una propiedad del individuo.

Zona de desarrollo próximo, es la posibilidad o potencial que los individuos tienen para ir desarrollando las habilidades psicológicas, en un primer momento dependen de las demás. Este potencial de desarrollo mediante la interacción con los demás es llamado por Vygotsky zona de desarrollo próximo.

Herramientas psicológicas, son el puente entre las funciones mentales inferiores y las superiores y, dentro de éstas, el puente entre las habilidades inter-psicológicas (sociales) y las intra-psicológicas (personales). Las herramientas psicológicas median nuestros pensamientos, sentimientos y conductas. Tal vez la herramienta más importante es el lenguaje, es una herramienta que posibilita cobrar conciencia de uno mismo y el ejercitar el control voluntario de nuestras acciones.

Mediación, la cultura proporciona las orientaciones que estructuran el comportamiento de los individuos. Lo que los seres humanos percibimos como deseable o no deseable depende del ambiente, de la cultura a la que pertenecemos, de la sociedad de la que somos parte.

Para Vygotsky, la cultura es el determinante primario del desarrollo individual. A través de la cultura, los individuos adquieren el contenido de su pensamiento, el conocimiento, más aún, la cultura es la que nos proporciona los medios para adquirir el conocimiento. La cultura nos dice qué pensar y cómo pensar, nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento.

1.7.3 Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel

Ambas teorías, tanto la psicogenética de Piaget como la sociocultural de Vygotsky tienen elementos que son de suma importancia para el desarrollo del aprendizaje significativo, el cual conlleva a un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje.

De esta manera, el aprendizaje significativo es una expresión conocida y frecuentemente usada por la mayoría de docentes, su origen se atribuye a Ausubel. El aprendizaje para este autor, implica una organización activa de los conceptos y esquemas que posee un alumno en su estructura cognitiva; desde esta perspectiva, el aprendizaje se convierte en un fenómeno complejo que sobrepasa las simples asociaciones memoristas[3].

De acuerdo a Bruner, la función del docente consiste en lograr que el alumno capte, transforme y transfiera lo que ha aprendido a través de descubrir la solución de un problema planteado. Por ello, su papel se convierte en ser guías del descubrimiento que permite fomentar el conocimiento y capacidades del alumno[4].

A pesar de las diferencias que guardan estos autores con relación al aprendizaje significativo, ambos coinciden en señalar la importancia que tiene el hecho de que el docente organice los contenidos de su materia de acuerdo al nivel intelectual de sus alumnos para que ellos puedan asimilarlos e incorporarlos a su estructura cognitiva, logrando darle un sentido al aprendizaje.

[3] Ausubel, D. Ausubel y Novak. J. (1990) Psicología educativa (Ed. Trillas, México) p. 22.
[4] Bruner, J. (1987) La importancia de la educación (Ed. Paidos, Buenos Aires) p.48.

La mayoría de los contenidos que aprendimos en la secundaria y bachillerato y aun en la universidad, ya se nos olvidaron. ¿Quiere decir esto que no nos quedó nada? ¿Qué nuestro paso por la escuela fue sólo un tramite necesario pero inútil? De ninguna manera. Es cierto que muchas cosas se olvidan pero hay otras que permanecen. Las cosas que permanecen se pueden catalogar como aprendizajes significativos, es decir, aquellos que se incorporan a nuestra propia personalidad, a nuestra forma de ser, a nuestra manera de trabajar y relacionarnos con los demás.

Existe una gran diferencia del aprendizaje significativo de aquel otro aprendizaje que, como llega se va. Es decir, el aprendizaje de tipo memorístico, con carácter de irrelevante, se retiene temporalmente en función de un examen que hay que presentar y que luego se olvida por que no tiene importancia para nosotros. Pero también es cierto que existe un gran numero de contenidos informativos que no se olvidan, por que se aprenden de manera significativa, es decir, se asimila de tal forma que pasan a ser parte de nuestra personalidad, desafortunadamente no son muchos. Hay quienes afirman que "se olvida la información pero se queda la formación". Esto es cierto en parte, pero no del todo.

El paso por la escuela imprime en todos un sello especial, algo que permanece, éste es el aspecto formativo de la educación, cada institución educativa propicia cierta información en los alumnos, en algunos casos, a través de la forma de ser de un estudiante, se puede deducir la escuela de la que es egresado. Si se analiza la causa por la que se requiere significativamente estos pocos contenidos, tal vez se puedan extraer aprendizajes que sirvan para mejorar la práctica docente… ¿A qué se debe que algunos contenidos informativos permanezcan de manera significativa, a lo largo de muchos años o toda la vida?

El aprendizaje significativo en términos que establece Ausubel, se da en la medida en que se presentan las siguientes condiciones:

- Es algo que me interesa, tengo ganas de aprenderlo (**motivación**)
- Lo voy entendiendo, las dudas que se presentan las aclaro (**comprensión**)

- Trabajo activamente sobre esa información, la estudio, la analizo, la elaboro (**participación**), y consecuentemente
- La información me sirve, me es útil, la puedo poner en práctica (**aplicación**)

Así, creemos que estas son condiciones básicas para que se logre el aprendizaje significativo: **motivación, comprensión, participación y aplicación.** En la medida en que el profesor logre que estén presentes en el proceso educativo, estará propiciando el aprendizaje significativo en sus alumnos.

De esta manera, se puede decir que la función principal del profesor, es lograr que sus alumnos aprendan de forma significativa, lo cual se traduce como: lograr que se den las condiciones del aprendizaje, en todo momento, a lo largo de su curso. La preocupación del profesor debe ser la de mantener estas condiciones encendidas y operantes a lo largo de su curso. Las actividades de aprendizaje que utilice deberán estar diseñadas en función de estas condiciones.

Una metodología de trabajo que propicia aprendizajes significativos en los alumnos es la didáctica grupal. Piaget menciona en una de sus frases que se ha hecho célebre *"cada vez que se le enseña prematuramente a un niño algo que hubiera podido descubrir sólo, se le impide a ese niño inventarlo y en consecuencia entenderlo completamente"*[5]. Seymour Papert dice: *"el escándalo de la educación es que cada vez que uno enseña algo, priva al niño del placer y del beneficio del descubrimiento"*. Las escuelas pueden convertirse en un lugar para aprender, en vez de ser un lugar para enseñar. Según John Seely Brown, *"La pedagogía tiene que ver con optimizar la transmisión de la información. Lo que veremos ahora es que los niños no quieren información optimizada y predigerida. Quieren aprender haciendo –donde sinteticen su propio conocimiento, por lo general ensayando las cosas"*[6]. El aprendizaje se vuelve experimental.

Esto no quiere decir que no se deben diseñar entornos de aprendizaje o incluso currículos. Sin embargo, pueden diseñarse con la participación de quienes están aprendiendo. Este método es

---

[5] Pozo. Juan Ignacio, Gómez Crespo M. A. (1998) Enfoques para la enseñanza de la ciencia en: aprender y enseñar ciencia (Ed. Morata, Madrid, España) p. 265-308.
[6] Tapscot. Don. (1998) Creciendo en un entorno digital (Ed. Mc Graw Hill, México) p.117-146.

descrito por los educadores como enfoque constructivista. En lugar de asimilar el conocimiento transmitido por un instructor, el estudiante construye de nuevo el conocimiento, es decir, la gente aprende mejor haciendo, en lugar de limitarse a que le digan las cosas.

El entusiasmo que experimentan los estudiantes ante un dato o concepto que "descubrieron" por sí mismos tiene mucho más probabilidades de adquirir una importancia significativa y de ser recordado, que ese mismo dato escrito en el pizarrón por el maestro.

Para modificar la forma de enseñanza tradicional a la constructivista es necesario que la educación en el maestro y en el alumno se invierta:

1.7.4 De la educación centrada en el maestro, a la educación centrada en el estudiante

Los nuevos medios permiten centrar la experiencia de aprendizaje en el individuo, en lugar de centrarla en el transmisor. Además, es evidente que la educación centrada en el estudiante mejora su motivación para aprender.

En el pasado, la educación tendía a concentrarse en el maestro, no en el estudiante. Gran parte de la actividad en el aula involucra al maestro hablando y al alumno escuchando.

La educación centrada en el estudiante comienza por una evaluación de las habilidades, el estilo de enseñanza, el contexto social y otros factores importantes del alumno que afectan el aprendizaje.

Según dice, el cliché (idea o expresión demasiado repetida) es que, cuando un estudiante de ingeniería se gradúa, la mitad de sus conocimientos es ya obsoleta: *"Para utilizar su metáfora de la transmisión, el profesor dice 'éste es su currículo, yo se los voy a transmitir y usted de alguna manera lo va a absorber y luego estará preparado para la vida'. Esto es literalmente un chiste".*

Dice que ya no podemos preparar estudiantes para vivir en un mundo de cambio rápido "metiéndoles" conocimientos[7].

Sobra decir que toda una generación de docentes tendrá que aprender nuevas herramientas, nuevos métodos y nuevas habilidades. Esto constituirá un desafío, no sólo debido a la resistencia al cambio que manifiestan algunos profesores, sino también debido a la actual atmósfera de recortes presupuestales, estado de ánimo bajo del cuerpo docente, falta de tiempo como resultado de las presiones de cargas laborales más fuertes, presupuestos limitados para reentrenamiento, programas muy extensos y a la complejidad de los conceptos, la cual es cada vez mayor.

Phil Courneyeur, tiene una idea útil a este respecto: *"En muchos escenarios, necesitamos maestros que trabajen con la juventud, no que sean simples transmisores de información. Los principales impedimentos del aprendizaje son sociales, no de información. Los maestros deben tener la pericia, la motivación y el tiempo necesarios para abordar los obstáculos sociales y psicosociales del aprendizaje. Las escuelas deben estar allí, con la familia, como una institución que mantiene unida a la sociedad y nos ayuda a avanzar"*[8].

En opinión de Richard: "Algo sucede cuando uno decide por sí mismo que va a aprender algo y a hacer algo. Esto es mucho más poderoso que cuando otra persona le dice a uno que tiene que hacer esto"[9].

Richard tiene una opinión radical sobre el papel del maestro. *"No enseño. Si enseño, quien sabe que van a aprender. La enseñanza es obsoleta. Les digo a los niños que no hay límites. Uno puede crear cualquier cosa que desee. Si es posible, simplemente se demorará un poco más. Mi función principal es entusiasmar a los niños para que piensen en cosas que nunca antes han hecho. Estoy trabajando para crear ciudadanos en una sociedad global"*.

---

[7] Ibid. p.136.
[8] Ibid. p.144.
[9] Ibid. p.145.

1.7.5 Conceptos de enseñanza y aprendizaje

La didáctica, en general, se ha centrado principalmente en dos actividades humanas: la enseñanza y el aprendizaje.

Las palabras aprendizaje y enseñanza, en su origen, tienen el significado siguiente:

Aprendizaje proviene de aprender; de la misma familia de palabras emprender, comprender, prensión, aprehensión, comprensión, empresa, sorpresa. Derivan del verbo latino prehendere, aprehenderé, que significa “ir a la caza de”, “atrapar”.

El aprendizaje dicho en forma simple, es el proceso de ajustar nuestras estructuras mentales para interpretar y relacionarlas con el ambiente. Desde esta perspectiva, el aprender se convierte en la búsqueda de sentidos y la construcción de significados. Es, por consiguiente, un proceso de generación y construcción, no de memorizar y repetir información.

Enseñanza proviene: del latín in signare (en latino se dice insegnare; en francés, enseigner) y significa poner señales, marcar, sellar.

Actualmente, estas actividades se consideran como integrantes del proceso enseñanza-aprendizaje en donde “la enseñanza no es más que el proceso que ayuda, orienta y facilita a que las personas aprendan” (Gagné y Briggs, 1973), conocimientos significativos mediante métodos y técnicas apropiadas (Alves de Mattos, 1963), proceso que se basa en conocimientos previos (Novak, 1988) y en teorías modernas cognitivas y del constructivismo del conocimiento (Piaget, Ausubel, Vygotsky, Rogers).

La enseñanza de las ciencias es una difícil y ardua labor que requiere de los docente tiempo, esfuerzo y mucha dedicación intelectual. En general, estos procesos de enseñanza y aprendizaje son tareas complicadas y difíciles, tales como la enseñanza y aprendizaje de las ciencias (física, matemáticas, biología, química…). Esta enseñanza implica relacionarse con conocimientos u objetos específicos propios de la ciencia o disciplina a estudiar y esto, a su vez, requiere que los alumnos posean destrezas, habilidades, procedimientos, actitudes y valores comunes a estas disciplinas y lograr que aprendan ciencia de un modo significativo y relevante. (Pozo y Gómez, 1998)[10].

Actualmente, la problemática existente en la enseñanza de las ciencias se aborda desde distintos enfoques que oscilan desde un enfoque o enseñanza tradicional y un enfoque constructivista del conocimiento: el enfoque tradicional se enfoca a que la enseñanza de las ciencias debe de ser una determinación explícita de lo que se quiere el alumno aprenda, una exposición clara de la información a transmitir acompañada de una ejercitación y práctica de esta información. El otro enfoque (constructivista) defiende que el alumno, antes de enfrentarse con nuevos conocimientos, debe de proveerse de la experiencia adecuada para que cualquier término o concepto nuevo se corresponda con algo que ya forma parte de su experiencia concreta generadora de una representación mental razonablemente fuerte (Gutiérrez Rodríguez, 1991). El primer enfoque se inscribe dentro de la corriente del conductivismo del conocimiento significativo[11].

1.7.6 Importancia de la enseñanza de las ciencias

La importancia de la enseñanza de las ciencias se observa si se considera el mundo actual, un mundo impregnado por los desarrollos científicos, tecnológicos y de información, lo cual hace imperativo la enseñanza de las ciencias, en sus objetivos y contenidos, con el fin de que los individuos sean capaces de adoptar unas actitudes responsables al tomar decisiones fundamentales frente a esos desarrollos y sus consecuencias. (Vilches, 1999)[12].

Existen diversos enfoques de la enseñanza de las ciencias. Hoy se observa la necesidad en el aula de una integración jerárquica de los diferentes modelos existentes a través de una reflexión y su contrastación. El fin es que los profesores asuman el papel o papeles más acordes con su

[10] Pozo Juan Ignacio, Gómez Crespo M.A. Op. Cit. p.146.
[11] Gutiérrez Rodríguez, A. (1991) Didáctica de las matemáticas: serie área del conocimiento (Síntesis, España) p.123.
[12] Gudiño Martínez, Agustín (1999) Problemática en la enseñanza de las ciencias (Documento inédito, Instituto Tecnológico de San Luis Potosí. LP, México).

concepción de la educación y ciencia, y que sea el propio profesor quien decida sus criterios para seleccionar y organizar los contenidos de su materia o asignatura, quien seleccione las actividades de su enseñanza y de evaluación, y donde cada profesor fije sus propias metas en el marco amplio del constructivismo.

La lucha del profesor por mejorar cada día su enseñanza debe ser una búsqueda sencilla, pero constante, en lograr su aplicación. (Redish, 1999); ya que la educación tiene como finalidad llevar al alumno a actuar en la realidad para enfrentar situaciones nuevas, actuando de manera consciente, eficiente y responsable, donde el alumno tiene que aprender a actuar. La enseñanza activa debe tener como objetivo el de orientar la experiencia del educando a fin de llevarlo a aprender por sí, lo que le permitirá desenvolver todas las posibilidades, promover la realización plena de su personalidad y descubrir todas sus virtudes[13].

El alumno, a través de la enseñanza activa, gana confianza en sí mismo y aprovecha de manera más eficiente su capacidad de aprendizaje.

El punto de vista más importante de la enseñanza activa quizá sea habituar al alumno al esfuerzo de la búsqueda, investigación, elaboración y reflexión. La manera activa de aprender predispone, también, al educando para el trabajo. En la enseñanza activa, aprender es trabajar.

La enseñanza activa debe acentuar, las posibilidades de acción física y mental que posee todo alumno, a fin de fortalecerlos y desenvolverlos.

Por lo tanto, una forma de ayudar y apoyar a los alumnos en la motivación, comprensión, manipulación y aplicación de los conceptos de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, en específico del Teorema Fundamental del Cálculo es utilizar la tecnología.

[13] Redish, E.F. (1999) The implications of cognitive studies for teaching physics (American Journal of physics) p.796-803. Disponible en línea.
http://www.physics.umd.edu/rgroups/ripe/papers/cogsci.html

Tecnología no es un término creado recientemente. Ya en los autores clásicos, griegos y romanos, se hace uso de él. Platón, Aristóteles, Plutarco, Polibio, Cicerón, Sexto, etc., lo utilizaron con diferentes enfoques, pero ha sido en los últimos años cuando la tecnología se ha generalizado en su uso y en su estudio.

Si queremos aproximarnos más en el tiempo podemos referirnos a la definición que en 1777 daba Beekman[14]: "La tecnología explica de manera completa, clara y ordenada, todos los trabajos, así como sus consecuencias y fundamentos".

Con el paso del tiempo la concepción de la tecnología fue cambiando, pues ya no se tomaba en cuenta sólo la organización, la planificación de la acción e incluso las herramientas para esa acción, sino que también se añadió la necesidad de que toda esa tecnología debe estar al servicio del hombre, a prolongar alguna de sus facultades.

Así, Schon (1967) define a la tecnología como alguna herramienta o técnica, algún producto o proceso, algún equipo físico o método de acción, agregando como intencionalidad de estos, el poder prolongar la capacidad humana.

Lo anterior conllevó a entender la tecnología como ciencia aplicada, ya que toda la planificación, organización, diseño, herramientas, etc., son la verdadera esencia de ésta, debiendo estar basada dicha planificación en el conocimiento científico (Quintanilla, 1980).

Es importante enfatizar que el conocimiento, al ser empleado por la tecnología, es un medio necesario, un medio que hay que aplicar para hacerla posible, logrando el fin previsto, pero ese conocimiento dentro de la tecnología no tiene un valor en sí mismo, su valor existe en tanto es útil para la consecución de ese fin (Bunge, 1981).

[14] Beekman George (1777) Computación & informática hoy : una mirada a la tecnología del mañana (Ed. Addison Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware) p.48.

Para el año 1985, Bunge[15] define la tecnología como "el vastísimo campo de investigación, diseño y planeación que utiliza conocimientos científicos con el fin de controlar cosas y procesos naturales, de diseñar artefactos o procesos, o de concebir operaciones de manera racional".

Ya más reciente, Ortega y Martínez[16] en el año de 1995 escribió: "Desde la aparición del hombre sobre la tierra, la tecnología tomada en cuenta como una organización de procesos, es la que ha permitido un desarrollo humano de la sociedad. En la medida en que se han incorporado tecnologías, el hombre ha podido avanzar como tal, tanto desde la perspectiva de su desarrollo intelectual como el más puramente humano. Hombre y tecnología han ido permanentemente unidos, llegándose al extremo de que la historia comienza cuando aparece el primer documento que utiliza una determinada tecnología, la escritura".

Actualmente, podemos definir la tecnología como la unión de diseños y medios, que pretenden potenciar al hombre, ya sea creando nuevas capacidades o ampliando las existentes, de tal forma que su actuación sobre el medio que le rodea, sobre su entorno, sea más eficaz.

Un ejemplo claro de ello es el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicaciones (TIC), las cuales se refieren a todo aquello que se relaciona con la disciplina de cómputo; en un sentido académico, hablamos de todas aquellas tecnologías que satisfacen las necesidades de automatización de información que requieren los negocios, el gobierno y las diversas organizaciones de los sectores salud, educación, entretenimiento, entre otros.

En el caso concreto de la Tecnología Educativa, la disparidad de criterios en torno al campo que le corresponde es antiguo y tal como decía Squires (1972) sus raíces están en la teoría, en lo conceptual. Ello obliga a realizar un esfuerzo que permita, a la vista de las distintas posturas, definir al menos nuestra propia situación dentro de este campo.

[15] Bunge,M. (1985) Seudociencia e ideología (Ed. Alianza, Madrid) p.33.
[16] Ortega y Martínez (1995) Educación y nuevas tecnologías (Ed. Cajamurcia, Murcia) p.139.

Mottet (1983) diferenciaba tres significados distintos de la Tecnología Educativa donde engloba algunas funciones de la misma, que nos muestran un amplio marco de posibilidades que van desde los medios audiovisuales en sí mismos, a los diseños de instrucción, pasando por la organización y considerando a la educación en sí misma como una tecnología.

En el mismo año, Rodríguez Diéguez[17] considera que la Tecnología Educativa debe ser la responsable de «optimizar los procesos comunicativos que implica el acto didáctico».

La contemplación de la realidad de nuestro entorno educativo pone de manifiesto que es en el campo del Currículum donde la Tecnología Educativa tiene su mayor desarrollo e incidencia y, más concretamente, dentro de los procesos comunicativos que se establecen en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La tecnología aporta una manera de abordar el diseño, desarrollo, evaluación, y producción, pretendiendo con ello facilitar el aprendizaje, si bien, no va a aportar un modelo tecnológico concreto, su acción se va a proyectar sobre las distintas fases de la acción didáctica. Siendo el diseño, el campo de acción de la Tecnología Educativa, pero el diseño entendido como dice Chadwick[18] (1982), más «como proceso que como producto», y en el mismo sentido en que lo define Bunge[19] (1985) como «una representación anticipada de un objeto (cosa, estado o proceso)».

Por su parte la Comision Instructional Technology (Araujo y Oliveria, 1982), considera que la tecnología puede hacer la educación más fructífera, dar a la enseñanza una base más científica, individualizar la educación, hacer la enseñanza más eficaz, hacer el aprendizaje más inmediato, y aumentar las posibilidades de acceso a la educación.

[17] Rodríguez Diéguez (1983). Perspectivas de las nuevas tecnologías en la educación (Ed. Narcea, Madrid) p.12.
[18] Clifton B. Chadwick (1982). Tecnología educacional para el docente (Ed. Paidós, Barcelona) p.32.
[19] Bunge,M. (1985) Seudociencia e ideología (Ed. Alianza, Madrid) p.37.

Dos años más tarde, Kearsley (1984) reafirmaba en cierto sentido este planteamiento diciendo que la tecnología es «la aplicación práctica de la investigación científica», tanto de los «inventos» entendidos estos como nuevos equipos, como de la «innovación» entendida como nuevas metodologías tendente a aumentar la «productividad de estudiantes y profesores», reduciendo el tiempo de estudio así como las inversiones necesarias.

La realidad actual nos pone de manifiesto que todas estas potencialidades que se atribuían a la Tecnología Educativa no se han cumplido, si bien, si hay que admitir que han propiciado un cierto tipo de mejoras en la presentación de la información y en el control y desarrollo de procesos.

Por lo tanto, la Tecnología Educativa, dentro del diseño curricular, puede y debe estar presente en todos aquellos momentos del mismo en los que se tomen decisiones sobre el proceso de comunicación a establecer.

Podemos concluir, que la tecnología es fundamental en la enseñanza-aprendizaje de los cursos de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, ya que es una forma de ayudar y apoyar a los alumnos en la motivación, comprensión, manipulación y aplicación de los conceptos de Cálculo. Así, la tecnología, a través del desarrollo de applets interactivos le permiten al estudiante explorar, formular y probar la validez de sus hipótesis y aprender a partir del análisis de sus propios errores, logrando con ello, un aprendizaje significativo.|

CAPÍTULO II
FUNDAMENTOS CONTEXTUALES

2.1 ORIGEN Y EVOLUCIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

2.1.1 De la Roma Clásica a la Edad Media

La palabra "Cálculo" proviene del latín calculus, diminutivo del término calx, que significa piedra. La obsesión del hombre siempre ha sido contar y medir, para ello utilizaba todo lo que su imaginación le indicaba, todo aquello que le ayudara a recordar sus posesiones era utilizado para esa tarea, por ejemplo, utilizaba pequeños guijarros para recordar la cantidad de animales que poseía, luego, para medir distancias, empezó utilizando sus manos y su pies para realizar la medición, en fin todo aquello que fuera fácil de recordar, hasta que se llegó a la invención de los números y se plantearon problemas más complicados como medir áreas irregulares, entre muchos otros. En consecuencia, la palabra Cálculo podrá designar cualquier método sistemático para contar o computar.

La escritura antigua de números en Babilonia, en Egipto, en Grecia o en Roma, hacía muy difícil un procedimiento mecánico de cálculo. Es por ello que se introdujo el 0, y se construye definitivamente el sistema decimal de diez cifras con valor posicional de las mismas.

El concepto de función por tablas ya era practicado en la antigüedad pero adquirió especial importancia en la Universidad de Oxford en el siglo XIV. A fin de lograr una operatividad mecánica se confeccionaban unas tablas a partir de las cuales se podía generar un algoritmo prácticamente mecánico. Este sistema de tablas ha perdurado en algunas operaciones durante siglos, como las tablas de logaritmos, o las funciones trigonométricas; las tablas venían a ser como la calculadora de hoy día; un instrumento imprescindible de cálculo.

2.1.2 Renacimiento

El sistema que usamos actualmente fue introducido por Luca Pacioli en 1494, y fue creado y desarrollado para responder a la necesidad de la contabilidad en los negocios de la burguesía renacentista.

El desarrollo del álgebra fue esencial para el planteamiento y solución de los más diversos problemas que surgieron en la época como consecuencia de los grandes descubrimientos que hicieron posible el progreso científico que surgiría en el siglo XVII.

2.1.3 Siglos XVII y XVIII

En el siglo XVII el cálculo conoció un enorme desarrollo, siendo los autores más destacados Descartes, Pascal y, finalmente, Leibniz y Newton, con el cálculo infinitesimal que se divide en dos tipos: diferencial e integral.

La primera persona en formular explícitamente las ideas de los límites y derivadas fue Isaac Newton, quien afirmaba: “Si he visto mas lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes”. Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow. Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para hallar rectas tangentes, y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del Cálculo a la que llegó Newton.

Relacionado con los problemas de tangentes, surgió a mediados del siglo XVII el llamado problema inverso de tangentes, es decir, deducir una curva a partir de las propiedades de sus tangentes. El primero en plantear un problema de este tipo fue Florimond de Beaune, discípulo de Descartes. El propio Descartes lo intentó sin éxito siendo Leibniz el primero en resolverlo en la primera publicación de la historia sobre el cálculo infinitesimal. De hecho un elemento esencial para el descubrimiento del cálculo era el reconocimiento de que el problema de las tangentes y las cuadraturas eran problemas inversos, es por eso que la relación inversa entre la derivación y la integración es lo que hoy, con toda justa razón, llamamos Teorema Fundamental del Cálculo.

En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron de todos los métodos infinitesimales usados por sus predecesores dos conceptos, los que hoy llamamos la derivada y la integral, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada -reglas de derivación-y mostraron que ambos conceptos eran inversos- Teorema Fundamental del Cálculo-: acababa de nacer el cálculo infinitesimal.

Para el siglo XVIII aumentó considerablemente el número de aplicaciones del cálculo, pero el uso impreciso de las cantidades infinitas e infinitesimales, así como la intuición geométrica, causaban todavía confusión y controversia sobre sus fundamentos.

2.1.4 Siglos XIX y XX

En el siglo XIX, los analistas matemáticos sustituyeron esas incertidumbres por fundamentos sólidos basados en cantidades finitas: Bernhard Bolzano y Augustin Louis Cauchy definieron con precisión los límites y las derivadas; Cauchy y Bernhard Riemann hicieron lo propio con las integrales, y Julius Dedekind y Karl Weierstrass con los números reales. Por ejemplo, se supo que las funciones diferenciables son continuas y que las funciones continuas son integrables, aunque los recíprocos son falsos.

Durante el siglo XIX y XX el desarrollo científico y la creación de modelos teóricos fundados en sistemas de cálculo aplicables tanto en mecánica, en electromagnetismo y radioactividad, así como en astronomía fue impresionante. Los sistemas de cálculo matemático amplían horizontes nuevos, geometrías no euclidianas que encuentran aplicación en modelos teóricos de astronomía y física.

En la segunda mitad del siglo XIX y primer tercio del XX, a partir del intento de formalización de todo el sistema matemático, fue posible la generalización del concepto como cálculo lógico. Se lograron métodos muy potentes de cálculo, sobre todo a partir de la posibilidad de tratar como "objeto" conjuntos de infinitos elementos, dando lugar a los números transfinitos de Cantor.

2.1.5 Actualidad

En la actualidad, el cálculo en su sentido más general, tomado en cuenta como cálculo lógico, es interpretado matemáticamente como sistema binario, y físicamente hecho material mediante la lógica de circuitos electrónicos, ha adquirido una dimensión y desarrollo impresionante por la potencia de cálculo conseguida por los ordenadores, propiamente máquinas computadoras. La capacidad y velocidad de cálculo de estas máquinas hace lo que humanamente sería imposible: millones de operaciones.

El cálculo, así utilizado se convierte en un instrumento fundamental de la investigación científica por las posibilidades que ofrece para la modelización de las teorías científicas, adquiriendo especial relevancia en ello el cálculo numérico.

2.2 UTILIDAD DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

A través de la Historia nos damos cuenta que la evolución de las Matemáticas ha sido el resultado de satisfacer ciertas necesidades del hombre.

Los avances de la ciencia se han logrado relacionando sus diversas ramas y en todas estas relaciones están presentes las Matemáticas. La vida como la conocemos en la actualidad no sería posible sin estas relaciones.

Las Matemáticas están presentes en todas nuestras actividades, se relacionan con la música, los deportes, el comercio, la agricultura, la construcción de carreteras, casas, actividades industriales, es decir, no hay nada que hagamos en lo que no estén presentes.

Es por eso que debemos aceptar que las Matemáticas son indispensables para realizar cualquier actividad de la vida diaria y que es tarea del docente, que el alumno logre tener esta visión.

Las Matemáticas se fundamentan en el razonamiento lógico y no en el memorístico, el alumno debe ser capaz de aplicar sus conocimientos matemáticos como la solución óptima para resolver los problemas que se le presenten en su vida diaria o profesional.

Cuando Isaac Newton desarrolló el Cálculo como una forma para medir el movimiento estaba en cierta forma introduciendo en las Matemáticas los principios de las películas de dibujos animados. De la misma forma que una película de cine consiste en la repetición de fotografías de un objeto, el cálculo transforma el movimiento en "naturaleza muerta" que puede ser observada "figura por figura". Al inventarse el cálculo, los matemáticos podían tratar a un objeto en movimiento como punto que describe una trayectoria a través del espacio y "deteniendo la acción" calcular la velocidad del objeto y la aceleración en un punto determinado.

Por medio del cálculo el movimiento puede definirse a pesar de que no pueda verse.

El objeto de estudio del Cálculo es el cambio, todo ser viviente durante su desarrollo sufre cambios, los metales se dilatan, desde las partículas subatómicas hasta el universo están en continuo cambio, pero no solo los fenómenos experimentan el cambio, éste también se experimenta en la economía, la política, la historia.

Muchos de estos cambios siguen patrones a veces ocultos y para entenderlos y controlarlos es necesario conocer: la representación de los cambios, los tipos fundamentales de cambio, identificar los tipos particulares de cambio cuando ocurran y aplicar estas técnicas al mundo exterior.

El medio más eficaz para llevar a cabo estas tareas son las matemáticas. Con las matemáticas construimos modelos universales y los descomponemos para investigar la forma en que operan, resaltamos sus rasgos estructurales importantes y percibimos y desarrollamos principios generales.

La rama de las matemáticas que se encarga del estudio del cambio es el Cálculo Diferencial e Integral. Aunque el Cálculo se inventó para ayudar a resolver algunos problemas de física, posteriormente se ha aplicado en muchos campos diferentes de la ciencia. Una de las razones por las que es tan versátil, es que la derivada es útil en el estudio de las razones de cambio de muchas cantidades, además de la distancia y la velocidad. Por ejemplo, un químico puede usar las derivadas para predecir el resultado de algunas reacciones químicas. Un biólogo puede usarlas en sus investigaciones sobre la razón de crecimiento del número de bacterias en un cultivo. Un ingeniero electricista puede usar la derivada para describir el cambio de la corriente en un circuito eléctrico. Los economistas la han aplicado en problemas relacionados con las pérdidas y ganancias de una empresa.

La derivada se usa también para encontrar las rectas tangentes a las curvas. Además de que ésta es de cierto interés en la geometría, el significado de las rectas tangentes es de gran importancia en algunos problemas físicos. Por ejemplo, si una partícula se mueve a lo largo de una curva, entonces la recta tangente indica la dirección del movimiento. Si restringimos nuestra atención a una parte suficientemente pequeña de una curva, entonces en cierto sentido, podemos usar la recta tangente para calcular aproximadamente la posición de la partícula.

Muchos de los problemas sobre máximos y mínimos pueden atacarse con la ayuda de la derivada. Estos son algunos ejemplos del tipo de preguntas que pueden responderse usando la derivada: ¿ A qué ángulo de elevación debe dispararse un proyectil para que llegue lo más lejos posible?. ¿ Qué dimensiones debe tener una lata de metal con un volumen de un litro para que la cantidad de material necesaria en su construcción sea mínima?. ¿ Cuál de los puntos entre dos fuentes de luz tiene la máxima iluminación?. ¿Cómo puede lograr cierta compañía que su ingreso sea máximo?. ¿ Cómo puede un productor minimizar el costo de producción de un artículo?.

Otro de los conceptos fundamentales del Cálculo es la integral definida. También tiene muchas aplicaciones en las ciencias. Un físico puede usarla para calcular el trabajo necesario para estirar o para comprimir un resorte. Un ingeniero puede usarla para encontrar el centro de masa o el momento de inercia de un cuerpo. Un biólogo puede usar la integral definida para calcular el flujo de sangre a través de una arteria. Un economista puede usarla para estimar la depreciación del equipo de una fábrica. Los matemáticos usan integrales definidas para investigar los conceptos de área de una superficie, volumen de un sólido geométrico y longitud de una curva.

La derivada y la integral definida se definen en términos de ciertos límites. La noción de límite es la idea inicial que separa al Cálculo de las ramas más elementales de las matemáticas.

Sin el Cálculo, la mayoría de los avances de la ciencia e ingeniería que ocurrieron en el siglo XX y que forman parte de la vida diaria, tal como los viajes aéreos y espaciales, la televisión, computadoras, la predicción del clima, los adelantos en imágenes médicas, teléfonos celulares, Internet, hornos de microondas, etc., no hubieran sucedido.

Es por ello, que en la actualidad es necesario hacer más atractivos y comprensibles los elementos del Cálculo para los estudiantes de ciencias, matemáticas e ingeniería. Pues lo que atrae a muchos estudiantes al Cálculo son las diversas aplicaciones reales, las cuales proporcionan una valiosa motivación y refuerzo para todos los estudiantes.

2.3 ENFOQUE METODOLÓGICO PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

La enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral no ha sido fácil, esto se debe en gran medida a que no ha sido posible diseñar una estrategia de Enseñanza – Aprendizaje la cual garantice que los estudiantes adquieran el adecuado nivel de dominio conceptual y metodológico para tener éxito en la solución de problemas típicos de esta disciplina.

Por ello, es importante la búsqueda de la integración entre alumnos y docentes, es decir, que los alumnos encuentren el conocimiento a través de la experimentación y desarrollo propio, interactuando entre ellos y su profesor, quien se convierte en un promotor y facilitador.

Es requerible que los alumnos formen un cuerpo de conocimientos estructurado de manera axiomática y deductiva, a fin de que el Cálculo Diferencial e Integral adquiera un sentido de ciencia viva, dinámica y susceptible de continuar evolucionando. Pretendiendo así, lograr una nueva concepción de la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, en donde la solución de problemas, además de una finalidad, se constituya en un medio para la presentación del conocimiento y a la vez para lograr el desarrollo de habilidades, capacidades y actitudes necesarias. Por lo cual, es propicio la reflexión sobre la necesidad y conveniencia de integrar los recursos tecnológicos, en especial la computadora; en el diseño de los contenidos temáticos de la enseñanza.

A través de la intuición de la Enseñanza Constructiva del Cálculo Diferencial e Integral, será eliminada la práctica docente tradicional en la cual el profesor expone a los alumnos el contenido de los temas a tratar, incluyendo fórmulas, teoremas, identidades trigonométricas y resolución de problemas modelo. Ahora, el alumno deja de ser un sujeto pasivo en el aula, integrándose de manera activa para adquirir el conocimiento de forma constructiva (Adquirir conocimientos a través de la investigación y su propio desempeño, así como el desarrollo de sus habilidades y destrezas), siendo apoyado por su profesor, quien a su vez se convierte en un facilitador que lo orienta y asesora. Es conveniente conocer las condiciones iniciales en que se encuentran los alumnos al inicio de la etapa en la cual se pretende propiciar su participación en una serie de experiencias de aprendizaje de las que se espera adquieran significaciones que les ayude a construir concepciones apropiadas de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral en general; y en particular, de los conceptos del Teorema Fundamental del Cálculo. Estas y otras cuestiones requieren ser investigadas para especificar el nivel de desarrollo cognitivo en el que se encuentran los alumnos en cualquier momento en que se disponen a iniciar una nueva experiencia de aprendizaje.

La enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral a nivel Superior, en algunas situaciones, carece de un significado que permita al alumno aplicar los conocimientos construidos en la solución de problemas. Los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, en algunos casos, promueven más la idea del uso de tablas matemáticas que la conceptualización y aplicación de dichos conocimientos en el campo de trabajo real. Por ello es primordial que el alumno identifique los conceptos del Teorema Fundamental del Cálculo, utilizando e interactuando gráficamente con la computadora para darle significado y aplicación a dichos conceptos.

La era de la información ostenta como rasgo fundamental un constante progreso en logros tecnológicos; cada día se ve cómo las viejas tecnologías son reemplazadas por nuevas y más eficientes. Un efecto importante que ha provocado el uso de las herramientas tecnológicas, sin ser este un propósito explicito, es que ha estado forzando, en cierta medida, la evolución de las prácticas pedagógicas de los profesores hacia prácticas comprometidas con un enfoque más constructivista del aprendizaje. Aprovechar los conocimientos científicos disponibles y las diversas aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral, mismos que se han obtenido durante varios siglos.

La adquisición del conocimiento científico requiere un cambio profundo de las estructuras conceptuales y las estrategias habitualmente utilizadas en la vida cotidiana, y que ese cambio, lejos de ser lineal y automático, debe ser el producto laborioso de un largo proceso de instrucción. En otras palabras, parece que la adquisición del conocimiento científico, lejos de ser un producto espontáneo y natural de nuestra interacción con el mundo de los objetos, es una laboriosa construcción social, o mejor aún reconstrucción, que sólo podrá alcanzarse mediante una enseñanza eficaz que sepa afrontar las dificultades que el aprendizaje plantea. Se trata de analizar qué estrategias y enfoques de enseñanza hacen más efectivo el aprendizaje de la ciencia.

Partiendo del concepto Vygotskiano, la labor de la educación científica es lograr que los alumnos construyan en las aulas actitudes, procedimientos y conceptos que por sí mismos no lograrían elaborar en contextos cotidianos y que, siempre que esos conocimientos sean funcionales, los transfieran a nuevos contextos y situaciones. De esta forma, el currículo de ciencias, desarrollado a través de las actividades de aprendizaje y enseñanza, debe servir como una auténtica ayuda pedagógica, una vía para que el alumno acceda a formas de conocimiento que por si mismas le serían ajenas o al menos muy distantes. El objetivo es reflexionar sobre los diversos enfoques que se han propuesto y desarrollado en los últimos años en la enseñanza de la ciencia para el logro de este objetivo.

Los nuevos conocimientos deben anclarse en los ya existentes y el proceso de instrucción debe guiarse por una diferenciación progresiva, sólo cuando existan conceptos inclusores o puentes cognitivos entre el conocimiento cotidiano y el científico podrá lograrse el aprendizaje significativo (Ausubel), es decir, cuando ambos tipos de conocimientos difieran pero sean compatibles. En cambio, cuando exista alguna incompatibilidad, no podrá lograrse la conexión y por lo tanto el aprendizaje. Se trata, en suma de una teoría de la comprensión más que de una teoría del aprendizaje constructivo.

Piaget, entiende la inteligencia como una habilidad para adaptarse, desde esta perspectiva la inteligencia esta presente en el ser humano desde que nace, y el comportamiento preverbal también es inteligente. Es decir, el desarrollo de la inteligencia es identificable con el desarrollo del conocimiento.

Lo que Piaget estudia es como un sujeto al nacer tiene un conocimiento que evoluciona de forma normativa hasta alcanzar un alto nivel de conocimiento de sí mismo, del mundo que lo rodea, etc. Este conocimiento que el sujeto adquiere es el que va a fundamentar todas sus conductas, por eso

Piaget considera que estudiar el desarrollo cognitivo es en definitiva estudiar todo el desarrollo humano.

El aprendizaje tiene su génesis en la acción; sin embargo, esta es conducida con base a una organización mental previa, conocida en su forma más simple como esquemas. Cuando se organiza un conjunto de esquemas formado por leyes entre ellos, constituye un estructura, cuya función también es la de orientar la acción e interpretar al objeto, sólo que tiene un nivel más complejo.

El alumno puede dar significado a los nuevos conocimientos que le presentamos en un curso. Es decir, el sujeto es activo al procesar la información que le envían sus sentidos, en función de sus marcos conceptuales denominados esquemas. Los esquemas se van construyendo a medida que el sujeto (individuo) interactúa con el objeto (de conocimiento).

El alumno construye sus esquemas interpretativos, a medida que va recibiendo los conocimientos expuestos en la clase; ya sea por parte de sus compañeros o del profesor.

La forma de lograr que los alumnos aprendan ciencias se refiere al pensamiento lógico-matemático. En el cual se plantean hipótesis, siendo además, en algunos casos, capaz de comprobarlas o refutarlas a través de la experimentación.

Precisamente aunque el alumno no pueda aprender con ejercitación y esfuerzo externo, los docentes proporcionarán a los alumnos las herramientas de abstracción reflexiva, logrando con ello un conjunto de estructuras y esquemas principales del alumno, que construye sus esquemas interpretativos entre él y el conocimiento.

Se puede producir un cambio en los sistemas de conocimiento, conforme se avanza el conocimiento del objeto, este se vuelve más complejo y se precisan niveles más avanzados del desarrollo del conocimiento, es decir, que se obtiene un conocimiento mas profundo del objeto, pero nunca total. Los cambios de nivel cognitivo del sujeto, requieren un momento de ajuste entre las estructuras mentales y previas a las nuevas.

La diferencia entre enseñar y aprender básicamente se apoya en que el aprendizaje es el objeto del alumno; y la enseñanza es el objetivo del profesor. La labor del docente consiste en crear un ambiente favorable del aprendizaje en el que el alumno construye su conocimiento. Debe buscarse así, que de los contenidos del programa, el estudiante problematice, haga hipótesis e implementaciones; al mismo tiempo, debe valerse de los medios y actividades necesarias para asegurar que asimilen el aprendizaje.

La didáctica del profesor debe estar encaminada hacia el manejo de actividades que promuevan los procesos de desequilibración-equilibración en el estudiante para que el alumno obtenga un aprendizaje constructivo sobre los contenidos temáticos del curso. Para ello, debe plantearse a partir de los contenidos, situaciones problemáticas que impulsen la reconstrucción del conocimiento, para lo cual el profesor deberá proveer de la información necesaria a los estudiantes, a fin de que el proceso reconstructivo pueda llevarse a cabo.

Se promueve entre los estudiantes, el dialogo o discusión en torno de problemas planteados por el profesor, que promueven la capacidad de escuchar y la reflexión en torno a posturas diferentes y hasta opuestas de una misma situación, para lo cual se requiere un clima de respeto, proponer actividades concretas de trabajo cooperativo de discusión y reflexión y no convalidar de entrada la respuesta correcta.

Entender de qué manera la gente aprende ha sido y es una cuestión de interés para un número cada vez mayor de investigadores, lo que ocasiona que exista una diversidad de enfoques tanto teóricos como metodológicos para realizar una investigación exhaustiva de este problema.

El principal problema que se presenta en la educación matemática a nivel Superior es el siguiente: El alumno no tiene el hábito de estudiar matemáticas en forma autodidacta, espera a que el profesor le entregue las fórmulas, los teoremas e identidades matemáticas y le resuelva varios problemas en forma detallada en las horas de clase. En ciertas ocasiones el alumno solicita al profesor algunos problemas de tarea, mismo que en pocas ocasiones resuelve.

Entre las premisas fundamentales de la propuesta de aprender Cálculo Diferencial e Integral dando énfasis a la utilización de applets como herramienta didáctica, está que en el aula se ofrezcan oportunidades a los alumnos para reconstruir o desarrollar sus propias concepciones e ideas matemáticas. A fin de traer estas ideas a la realidad, es necesario encontrar algunas situaciones problema que llenen las condiciones mencionadas, las cuales permiten a los estudiantes construir una buena relación con el conocimiento relevante.

La interacción de las nuevas tecnologías y su relación entre el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático en contexto, sus sistemas de representación y procesos didácticos requeridos para su enseñanza a nivel universitario. Para fortalecer el aprendizaje del Cálculo en estudiantes de Ingeniería, se propone utilizar la tecnología como instrumento mediador en un ambiente de aprendizajes, donde el sujeto interviene su propio aprendizaje a partir de la interacción que proporciona el trabajo propuesto por el docente. En tal sentido, la calidad de este proceso, se ve altamente influenciada por una formación pertinente que conlleva el diseñar, gestionar y evaluar nuevas situaciones de enseñanza-aprendizaje en estudiantes y docentes. Esta calidad tiene que estar realmente intervenida por las transformaciones didácticas mas significativas, en donde la reproducción de los contenidos para desarrollar los ejercicios no sea el eje principal del aprendizaje, sino el asumir aquellos contenidos en contexto que permitan la representación de los objetos del mundo en su entorno y donde las nuevas tecnologías terminan por erosionar los currículos tradicionales para exigir un currículo más íntimamente articulado a dichas tecnologías.

En años recientes, la característica más importante en el proceso de Enseñanza- Aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral es la inclusión del planteamiento y solución de problemas utilizando la computadora.

Se pretende así, motivar el uso de los recursos de la computadora para su aplicación en el aula, con el objetivo de desarrollar en los estudiantes habilidades de exploración, descubrimiento y conjetura para el estudio del Teorema Fundamental del Cálculo, mediante la visualización dinámica, que ayudarán al estudiante en la articulación de las representaciones gráficas, numérica y simbólica.

Todo ello con la finalidad de implementar un nuevo modelo educativo con el objetivo de centrar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el estudiante, fomentando el descubrimiento y construcción del conocimiento. En este contexto, uno de los objetivos principales, es el diseño de actividades didácticas, creando para ello ambientes computacionales de aprendizaje en los que la interactividad con la computadora permita al alumno verificar sus resultados, explorar de manera gráfica, numérica y simbólica, detectar patrones de comportamiento y conjeturar sobre lo visualizado, todo ello como una preparación para acceder a un enfoque más abstracto, todo ello con la ayuda de los applets.

CAPÍTULO III
METODOLOGÍA

3.1 IMPORTANCIA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El Teorema Fundamental del Cálculo es el teorema más importante y alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía vencer el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz moldearon como el Teorema Fundamental, es posible resolver muchos problemas.

Este teorema recibe este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del Cálculo: el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. El primero, sabemos que surgió del problema de la tangente, mientras que, el Cálculo Integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado como lo es el problema del área. Fue el profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630–1677) quien descubrió que estos problemas están íntimamente relacionados. Se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El Teorema Fundamental del Cálculo da la relación inversa precisa entre la derivada y la integral, Newton y Leibniz explotaron esta relación y la usaron para desarrollar el Cálculo en un método matemático sistemático. El descubrimiento de esta asombrosa relación constituye uno de los logros matemáticos más importantes de la historia mundial.

Se puede decir que es importante porque nos provee de una herramienta poderosa para evaluar integrales definidas. Su más profundo significado es que sirve de eslabón entre la derivación y la integración, entre derivadas e integrales. Este eslabón aparece claramente cuando escribimos $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ siendo F(x) una primitiva de f(x).

3.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (PARTE I)

3.2.1 Finalidad de los Applets

La finalidad de utilizar applets como herramienta didáctica en la Enseñanza-Aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo, es lograr en los alumnos un aprendizaje significativo.

El aprendizaje significativo surge cuando el alumno, como constructor de su propio conocimiento, relaciona los conceptos a aprender y les da un sentido a partir de la estructura conceptual que ya posee. Dicho de otro modo, construye nuevos conocimientos a partir de los conocimientos que ha adquirido anteriormente. Este puede ser por descubrimiento o receptivo. Pero además construye su propio conocimiento porque quiere y está interesado en ello. El aprendizaje significativo a veces se construye al relacionar los conceptos nuevos con los conceptos que ya posee y otras al relacionar los conceptos nuevos con la experiencia que ya se tiene. El aprendizaje significativo se da cuando las tareas están relacionadas de manera congruente y el sujeto decide aprenderlas.

De esta manera, el alumno inicialmente posee una serie de conceptos, concepciones, representaciones y conocimientos, adquiridos en el transcurso de sus experiencias previas, que utiliza como instrumento de lectura e interpretación y que determinan qué informaciones seleccionará, cómo las organizará y qué tipos de relaciones establecerá entre ellas. Si el alumno consigue establecer relaciones sustantivas y no arbitrarias entre el nuevo material de aprendizaje y sus conocimientos previos, es decir, si lo integra en su estructura cognoscitiva, será capaz de atribuirle significados, de construirse una representación o modelo mental del mismo y, en consecuencia, habrá llevado a cabo un aprendizaje significativo.

Recordemos que el aprendizaje significativo en términos que establece Ausubel, se da en la medida en que se presentan las siguientes condiciones:

- Es algo que me interesa, tengo ganas de aprenderlo (**motivación**)

- Lo voy entendiendo, las dudas que se presentan las aclaro (**comprensión**)
- Trabajo activamente sobre esa información, la estudio, la analizo, la elaboro (**participación**), y consecuentemente
- La información me sirve, me es útil, la puedo poner en práctica (**aplicación**)

Motivación:

La motivación es la etapa inicial del aprendizaje, consiste en crear una expectativa que mueve el aprendizaje y que puede tener origen interno o externo. La motivación se logra planteando el problema.

Mediante la categoría motivación del contenido se identifica aquella etapa del proceso en la cual se presenta el objeto a los estudiantes, promoviendo con ello su acercamiento e interés por el contenido a partir del objeto. En esta etapa la acción del profesor es fundamental, es quien le presenta al estudiante el objeto y el contenido preferentemente como un problema que crea una necesidad de búsqueda de información, donde partiendo del objeto, se promueve la motivación en los estudiantes. En esta parte del proceso se da la dialéctica entre objetivo - objeto - método, que el método adquiere la dimensión de promover la motivación, como síntesis de la relación dialéctica entre en el objetivo y el objeto.

Para que un nuevo contenido cree necesidades, motivaciones, tiene que estar identificado con la cultura, vivencia e interés del estudiante y sólo así creará las motivaciones y valores que le permitan constituir un instrumento de educación. Motivar al estudiante es significar la importancia que tiene para él la apropiación del objeto para la solución de los problemas y establecer nexos afectivos entre el estudiante y el objeto, para lo cual, el profesor ha de referirse y recurrir a la cultura que el estudiante ya tiene.

Lo anterior requiere de que previamente se logren nexos afectivos entre el profesor y los estudiantes y transferir estos al contenido, pues en definitiva el estudiante con lo que trabaja es con el contenido.

La motivación como eslabón se caracteriza por lo fenoménico, lo descriptivo, lo externo con que se muestran los objetos, buscando sus relaciones internas con los intereses de los estudiantes.

Comprensión:

La comprensión es la atención del estudiante sobre lo que es importante, consiste en el proceso de percepción de aquellos aspectos que ha seleccionado y que le interesa aprender.

Conjuntamente con la motivación se tiene que desarrollar la comprensión del contenido, pues para que un contenido sea sistematizado se requiere de comprenderlo y comprender las vías para ello. Mediante la etapa de la comprensión del contenido se le muestra al estudiante el modo de pensar y actuar propios de la ciencia, arte o tecnología que conforman el objeto siguiendo el camino del conocimiento, esto es, del problema a las formulaciones más generales y esenciales y de estas a otras particulares y así finalmente a la aplicación de dichas formulaciones, o sea, siguiendo una vía, una lógica, que en dependencia de la ciencia, puede ser inductivo - deductiva, de análisis - síntesis, hipotético - deductiva.

Si bien en la motivación se plantea el peso del profesor en el proceso, en la comprensión hay un mayor equilibrio entre ambos, profesor y estudiantes. En la comprensión del contenido se desarrolla la dialéctica entre objeto - contenido - método, desarrollando el análisis del objeto se estructura el contenido, procurando cumplir con fortalecer el carácter razonable del contenido que se debe asimilar, lo que exige que los procedimientos que el profesor tenga que emplear sean de carácter esencial.

El método adquiere una dimensión más, la que lo vincula al sujeto, a su comprensión. Pero al mismo tiempo esta dimensión le confiere al contenido, su vínculo con el sujeto, del cual es inseparable, por ello el contenido como configuración no se agota en el diseño sino que requiere ser llevado a la dinámica del proceso.

La necesidad (del problema) encuentra su realización en el ejercicio, en la explicación, en el diálogo, en la conversación, como tarea específica a desarrollar conjuntamente por el docente y los estudiantes.

El estudiante mediante su participación que es aún limitada, hace suya la necesidad y comprende, primeramente en un plano muy general, pero que continúa en un proceso de sistematización, que como una espiral ascendente se va produciendo.

La comprensión como proceso se dirige al detalle, a la esencia de los objetos y fenómenos, buscando su explicación. En este sentido la comprensión sigue un camino opuesto al de la motivación aunque ambos se complementan.

Participación:

La sistematización es la etapa crucial del aprendizaje, aquí es donde el estudiante se apropia de los conocimientos, habilidades y valores. La sistematización se produce cuando el objeto transformado pasa al interior del estudiante y se perfecciona el aprendizaje (apropiación del contenido).

En esta etapa consideramos un complejo proceso en el que el estudiante desarrolla el dominio del contenido que le fue inicialmente mostrado y que comprendió en un carácter primario, pero que además el proceso ha de ocurrir de forma tal que ese contenido se va enriqueciendo, dicho en otras palabras, en el proceso de aprendizaje el contenido, a la vez que se asimila, se enriquece, lo cual significa que su caracterización no puede ser dada solamente por la asimilación como indicador de la marcha del proceso.

Como en el proceso de enseñanza - aprendizaje el contenido a la vez que se asimila se enriquece, esto significa que la caracterización del proceso no es solo por la asimilación ni por la profundidad por separado sino que ambos indicadores se integran, en un proceso que debe ser capaz de desarrollar capacidades lo cual es posible si logra que el enriquecimiento en el objeto se produzca a medida que el estudiante se enfrente a nuevos problemas que permitan no sólo asimilar un esquema generalizado o guía para la acción sino que los construya en la medida que se enfrentan a nuevos problemas, cada vez con más riqueza, con más complejidad a la vez que los va asimilando.

Ahora, el proceso se tiene que producir siguiendo unas etapas tales como: planteamiento del problema, ejercitación y aplicación en objetos cada vez más complejos y que ese incremento en la profundidad se lleve junto con la asimilación del contenido.

En los inicios de esta etapa el estudiante ha de contar con el apoyo externo dado por el profesor, que le aporta información a la vez que le crean interrogantes, se promueve la búsqueda gradual, como continuación de la etapa anterior, dado que ninguna etapa tiene frontera rígida, sino que se superponen.

En una primera etapa, material o materializada, el estudiante dispone del apoyo externo real o modelado del objeto para aplicar el contenido en la solución del problema. En este caso entendemos que han de ser en objetos muy simples y que a medida que se asimilan se van enriqueciendo, a la vez que se pasa a la etapa del lenguaje donde el estudiante sin el apoyo externo pueda enfrentar situaciones conocidas o ligeramente diferentes, hasta llegar a la etapa en que pueda enfrentar situaciones nuevas con sus conocimientos y habilidades.

Esto hay que comprenderlo como un proceso en el cual, se da una relación dialéctica entre la asimilación del contenido por el sujeto y el enriquecimiento en el objeto, con lo que se va desarrollando la capacidad de aplicar sus conocimientos y habilidades.

El dominio se da en el estudiante cuando asimila un determinado contenido que es expresión del objeto, pero que si no tenemos en cuenta cuál es ese objeto, en cuánto el contenido como modelo se acerca al objeto con toda su riqueza, hablar en términos solo de dominio puede ser de nada o de algo tan elemental y simple que no nos permite actuar en la realidad.

Si bien la asimilación es un proceso continuo, que se puede dirigir, el hombre de manera espontánea en su aprendizaje asimila, no ocurre igual en el proceso de profundización y enriquecimiento en el objeto, este proceso requiere de alcanzar gradualmente determinado dominio en un determinado nivel de profundidad. Para caracterizar la apropiación del contenido, el logro del objetivo, en el proceso de aprendizaje se requiere de una caracterización más integral que la que da la asimilación o la profundidad por sí solos.

El parámetro que caracteriza de manera más completa no es la asimilación, se requiere de la profundidad gradual del objeto, lo que podemos representar en dos ejes, quedando como resultado la sistematización. De un lado la mayor independencia, en el dominio que se va alcanzando y de otra la profundidad, solo la conjunción de ambos conduce a una sistematización, como proceso continuo, determinado fundamentalmente por la asimilación.

Debemos ver la sistematización en dos niveles aunque en esencia es una, por una parte de manera ascendente y continua integrando la asimilación y la profundidad, y la que se produce gradualmente cuando se integran a los nuevos contenidos otros anteriores, formándose sistemas más generales y esenciales.

En esencia en ambos casos se produce un acercamiento a la realidad, el objeto real, que se debe producir a lo largo del proceso. El primero es en el tema, con los contenidos propios del tema, en el segundo es de tema a tema, de área a área, es la integración en el año en la disciplina, en lo académico, lo laboral, lo investigativo, aquí se tiene una influencia decisiva del profesor cuando de manera directa o inducida logra que el estudiante retome contenidos anteriores, integrándolos, revelando nexos y relaciones esenciales, estableciendo comparaciones y abstracciones, buscando otros nuevos que permitan generalizar.

La sistematización se determina por el grado de generalidad de los problemas, que puede enfrentar el estudiante en la aplicación de los conocimientos y habilidades de una determinada rama del saber, los métodos científicos de investigación y los métodos lógicos del pensamiento.

En la sistematización del contenido se desarrolla la dialéctica entre objetivo - contenido - método, como se analizó anteriormente constituye la esencia de la dinámica del proceso, por lo tanto, el proceso se tiene que producir siguiendo unas etapas tales como: planteamiento del problema, ejercitación y aplicación en objetos cada vez más complejos y que ese incremento en la profundidad se lleve junto con la asimilación del contenido.

Aplicación:

La aplicación permite generalizar lo aprendido, que se traslade la información aprendida a varios contextos e intereses. Es la ejercitación y aplicación del contenido asimilado a nuevas y más variadas situaciones problemáticas.

Ahora bien, específicamente en el applet que se mostrará a continuación, la finalidad es sin duda lograr en los estudiantes un aprendizaje significativo, el cual se logrará en la medida en que se presenten las cuatro condiciones antes mencionadas (motivación, comprensión, participación y aplicación).

En primera instancia, la motivación consiste en crear una nueva expectativa que mueve el aprendizaje, ésta se logra planteando el problema. En este caso, el profesor presenta el applet a los estudiantes, para así promover el acercamiento e interés por el contenido, ya que desde el momento en el que se le muestra al alumno un método diferente al papel y lápiz se logra llamar su atención y con ello su motivación por aprender.

Una vez que se logró motivar al alumno, éste comienza a jugar con el applet, que esta diseñado para llevarlo poco a poco a lo que se desea aprender, ya que se ha seleccionado sólo la esencia del conocimiento, buscando su aplicación, así el alumno conforme va jugando con el applet lo va entendiendo y va aclarando las dudas que se le presentan, es decir, se va logrando la comprensión.

Durante este proceso, el alumno trabaja activamente sobre la información, así la estudia, la analiza y la va elaborando, lográndose la participación y permitiéndole generalizar lo que ha aprendido, para finalmente poder llevar la información aprendida a la aplicación en varios contextos de su interés.

Dicho applet comienza pidiendo al alumno el área de la región bajo la recta $y = 2x + 1$, la cual podrá encontrar utilizando sus conocimientos de geometría, ya que previo a la asignatura de Cálculo se imparte dicha materia de Geometría. De esta manera, el alumno construye nuevos conocimientos a partir de los conocimientos que ha adquirido anteriormente. Si el alumno consigue establecer alguna relación entre el nuevo material de aprendizaje y sus conocimientos previos, será capaz de atribuirle significados, de construirse una representación o modelo mental del mismo, y en consecuencia, habrá obtenido un aprendizaje significativo.

3.2.2 Desarrollo de los Applets

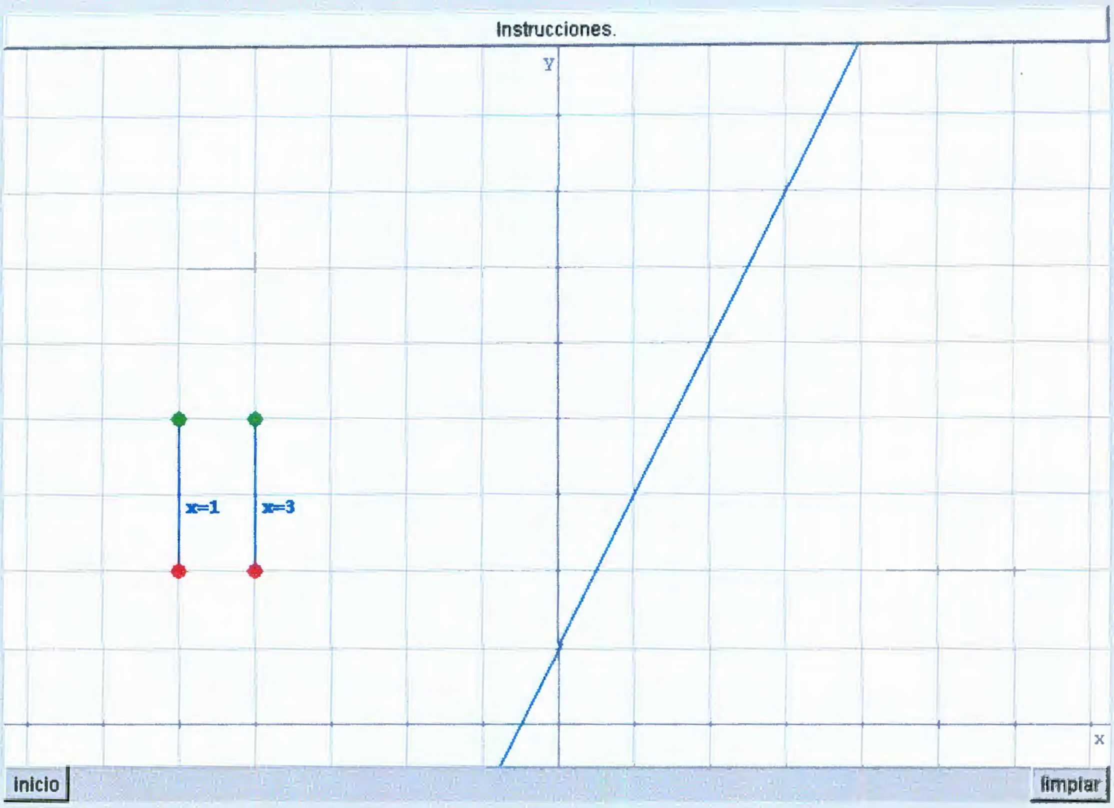
La Enseñanza-Aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo utilizando applets como herramienta didáctica es nuestro objetivo principal, ya que nos permitirá lograr en los alumnos aprendizajes significativos.

Para ello, proporcionamos a continuación los siguientes applets que podrán apreciar los alumnos en primera instancia, para después comenzar con su desarrollo con la ayuda de las instrucciones que se les irán proporcionando, los cuales los llevarán a comprender el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

1° Teorema Fundamental del Cálculo.

Parte A

a) En el applet siguiente se muestra la gráfica de la función y=2x+1. Utiliza el applet para encontrar el área de la región bajo la recta, sobre el eje x y limitada por las rectas x=1 y x=3.



Calcula el área de la región sombreada, utilizando tus conocimientos de geometría.

Elige el inciso correcto:

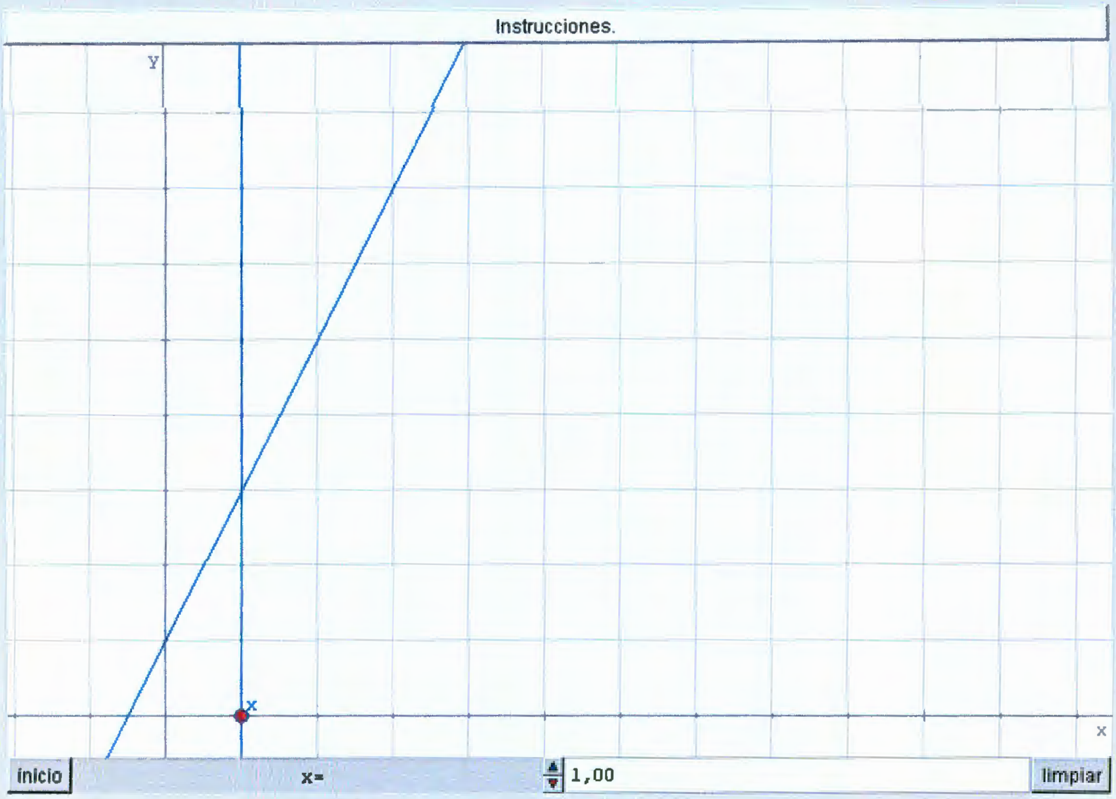
Área=

a) 16 u^2

b) 4 u^2

c) 10 u^2

b) Si x>1 calcula usando el applet siguiente, el área de la región debajo de la recta y=2x+1, sobre el eje x y entre las rectas x=1 y una recta vertical que intersecta al eje x.



Elige el inciso correcto.

Respuesta:

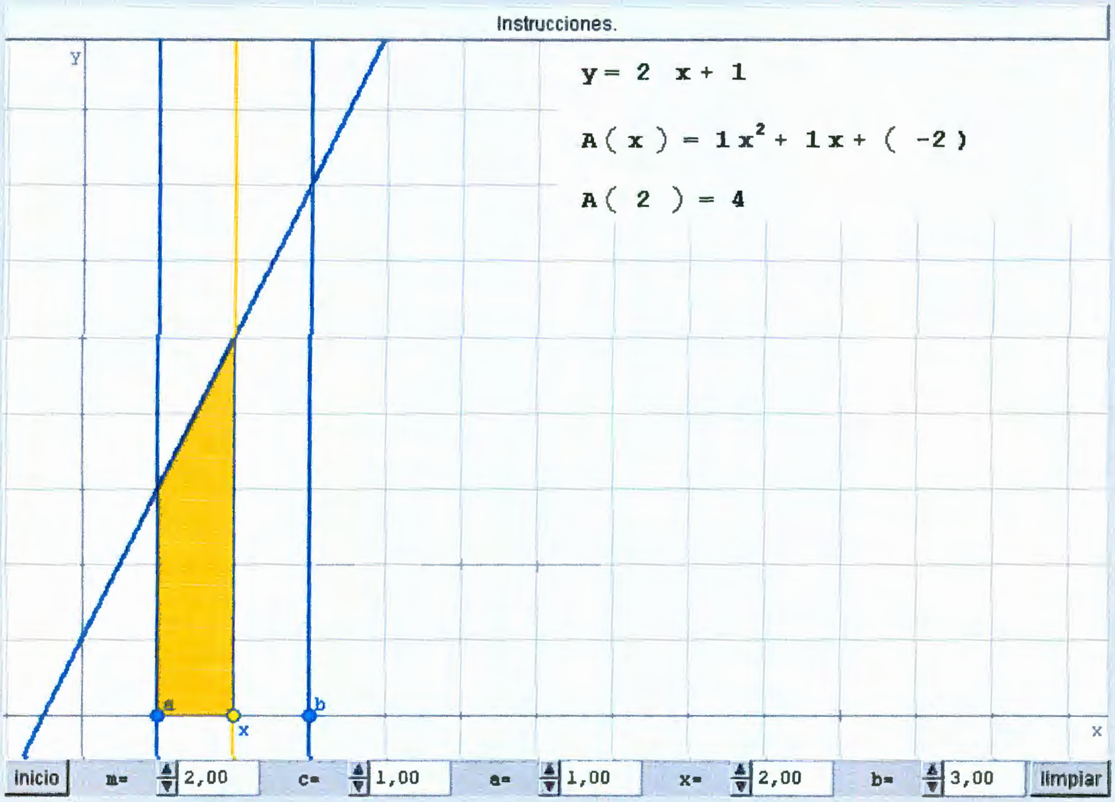
a) $A(x)=x^2+x-2$

b) $A(x)=x^2+2$

c) $A(x)=2x^2+x-2$

c) Utiliza tus conocimientos de cálculo diferencial para derivar la función área *A(x)*. ¿Qué observas?

d) Si cambiaras la recta y los puntos inicial y final, ¿cambiaría tu observación? Para responder, realiza los incisos *a)*, *b)* y *c)*, pero ahora para la recta con ecuación $y=mx+c$ y entre las rectas verticales $x=a$ y $x=b$. Para mayor facilidad supón que y mayor o igual que cero, para toda x en el intervalo [a , b].



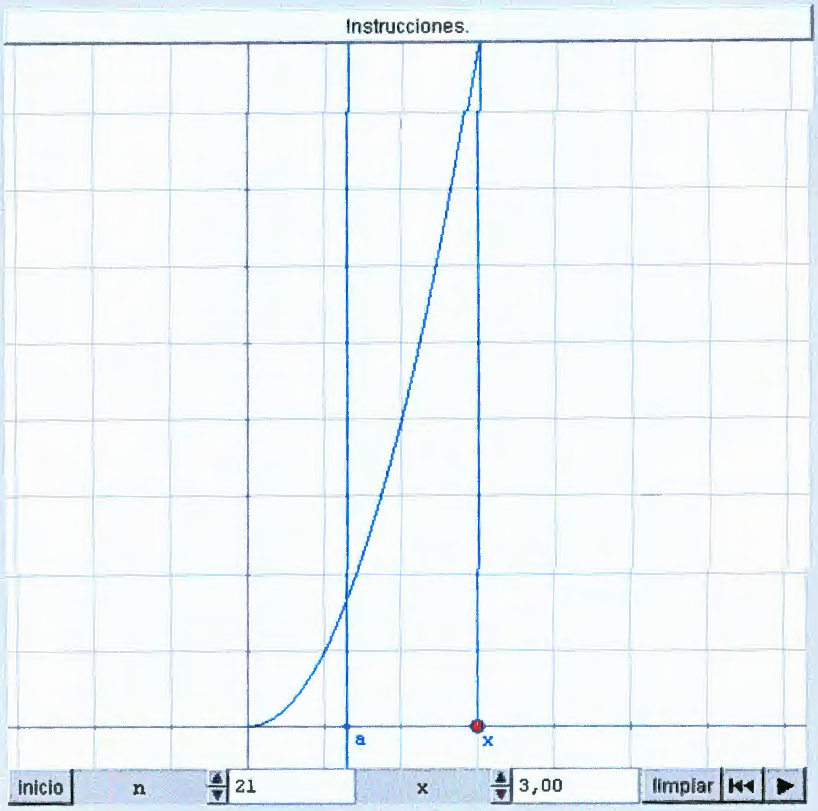
e) Si cambiamos la funcion lineal (la recta) por otra ¿Se mantendrá la observación?

Parte B.

1° Teorema Fundamental del Cálculo.

Parte B.

a) En el applet siguiente se muestra la gráfica de la función $f(x)=x^2$. Utiliza el applet para aproximar el área de la región bajo la curva encima del eje x y entre la recta x=a y una recta vertical que intersecta al eje x, utilizando sumas de Riemann variando n en $\Delta x = (x-a)/n$.



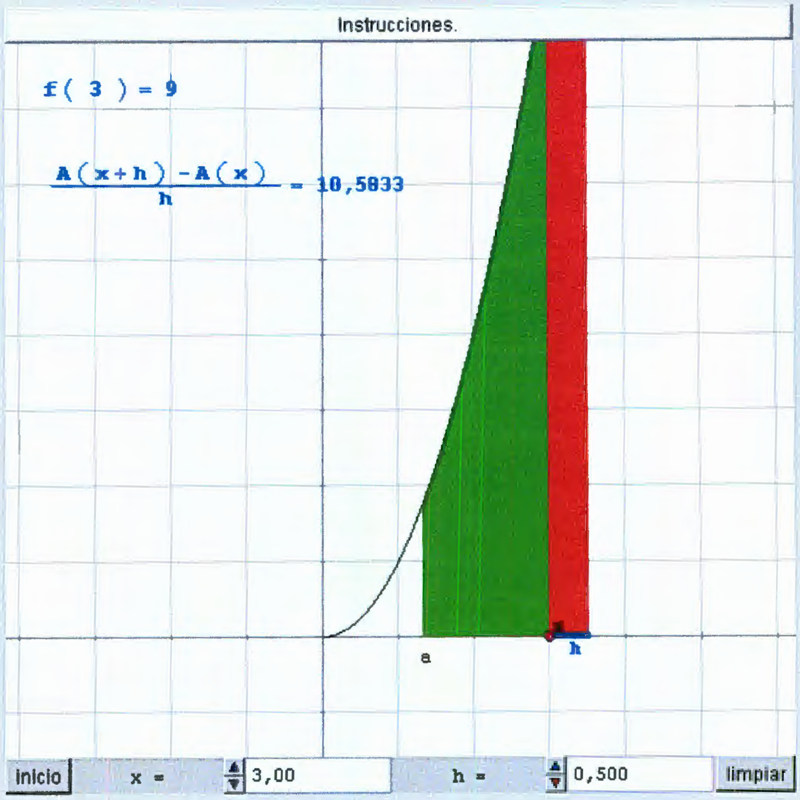
b) Calcula la integral definida utilizando el límite de las sumas de Riemann, para encontrar el área de la región.

c) ¿Cuál es el valor de la integral definida para x>a? A este valor se le llama A(x). $A(x)=\int_a^x f(t)dt$

d) Deriva la función área, A(x). ¿Qué observas?

e) Intenta dar una explicación intuitiva del resultado.

f) Utiliza el siguiente applet para responder: Si x>a y h>0, ¿qué representa A(x+h)-A(x)?



g)

Comparando las áreas obtenidas, ¿Qué representa $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$?

Elige el inciso correcto.

Respuesta:

a) La altura del rectángulo.

b) La base del rectángulo.

c) Área total sombreada.

h) Utiliza el applet para "intuir" qué sucede cuando h es muy pequeña ¿Qué relación existe entre la respuesta del inciso (g) y el valor de la función en el punto x?

i)

La proposición que se deduce de todas estas reflexiones es:

Respuesta:

a) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f'(x)$

b) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

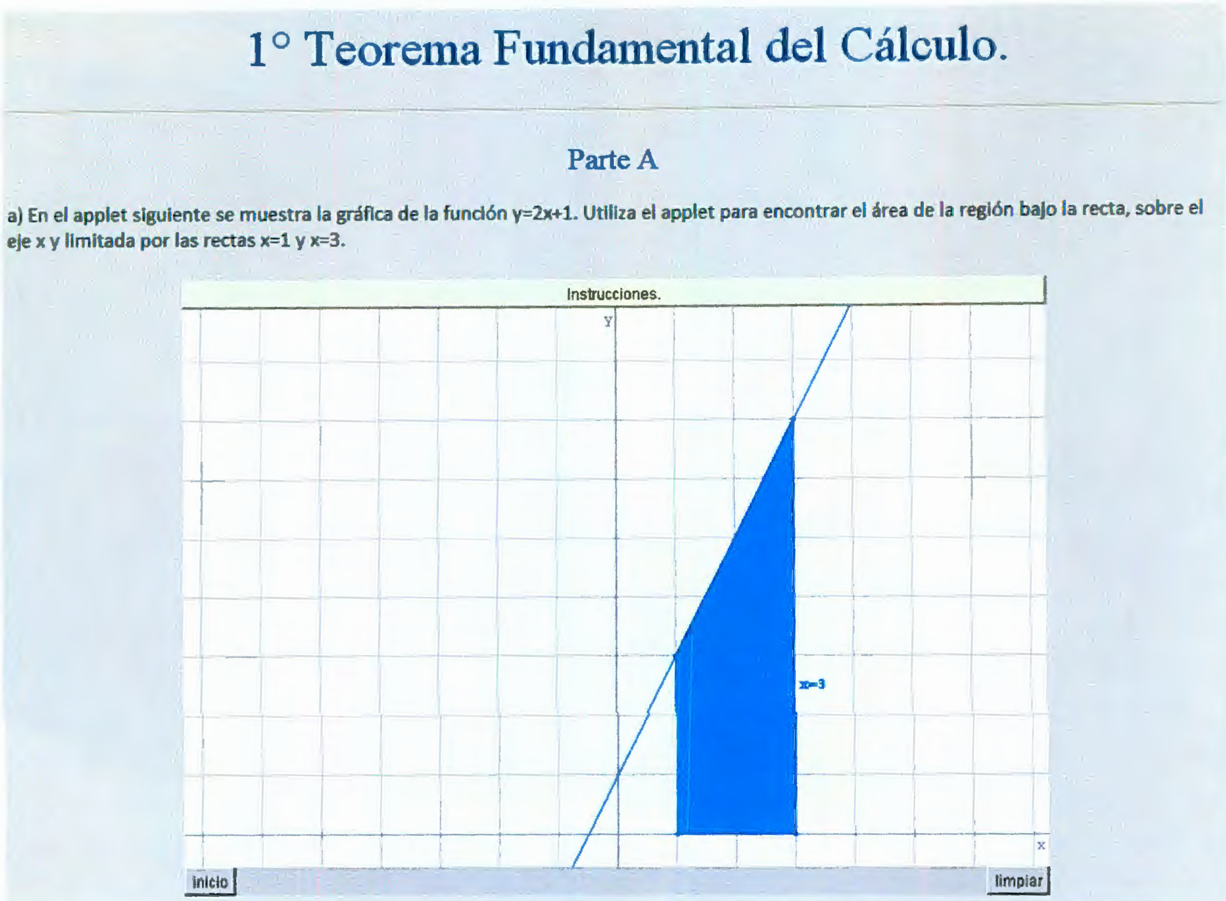
c) $\int_a^x f(x)\,dt = f(x)$

Parte A.

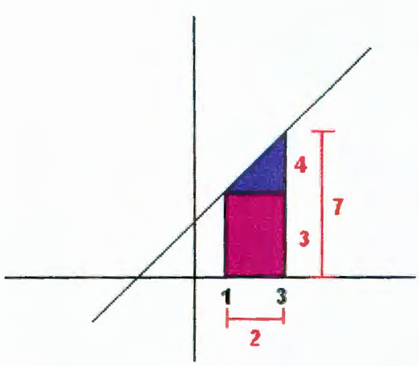
A continuación presentaremos una forma de resolver los applets que acabamos de observar, no obstante, el alumno podrá utilizar esta u otra forma que crea conveniente para resolver la práctica, buscando siempre llegar a la solución correcta. Pues como recordaremos, el alumno es constructor de su propio conocimiento, de esta manera, podrá elegir el camino a seguir para llegar a la solución, lo cual lo llevará a la obtención de un aprendizaje significativo.

Ahora bien, presentamos a continuación el desarrollo que podrán seguir los alumnos paso a paso hasta concluir con la Enseñanza-Aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo. Dicha práctica está dividida en dos partes: Parte A y Parte B. Comencemos por la Parte A.

En primer lugar, el alumno podrá observar el applet donde se le muestra la gráfica de la función y=2x+1, el cual podrá utilizar para encontrar el área de la región bajo la recta, sobre el eje x y limitada por las rectas x=1 y x=3. Para poder lograrlo, deberá leer las instrucciones, donde se le pedirá colocar las líneas rectas sobre el eje x, de tal manera que coincidan con las rectas respectivas; apareciendo así el área sombreada bajo dicha región.



En consecuencia, se le pedirá al alumno calcular el área de la región sombreada utilizando sus conocimientos de geometría, donde podrá realizar lo siguiente: contando ya con el área de la región sombreada el alumno podrá dividir dicha región en un rectángulo y un triángulo, calculando así el área de cada figura geométrica para después sumarlas y obtener el área buscada.



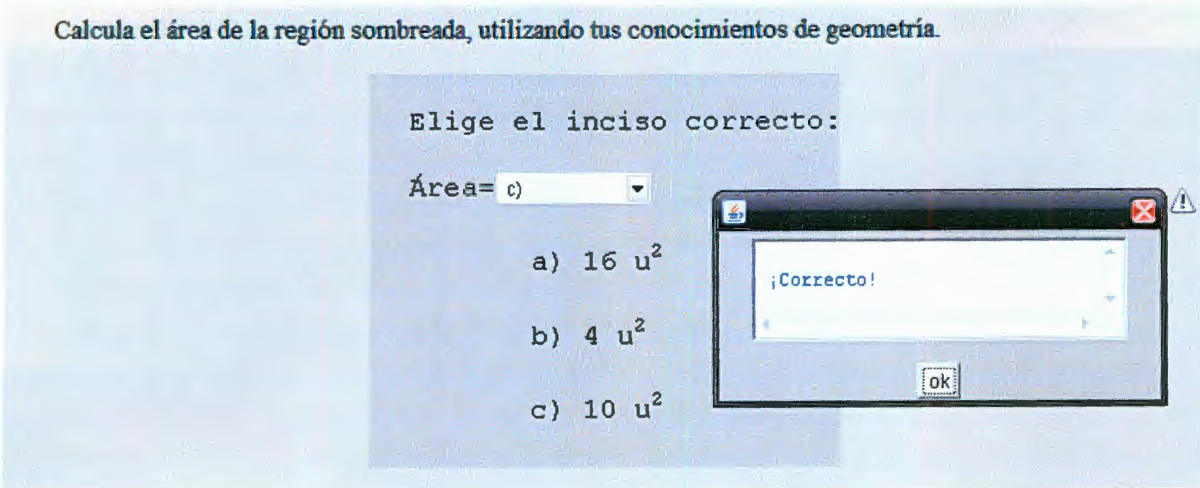
Área = Área del rectángulo + Área del triángulo

$$A = (2)(3) + [(2)(4)]/2$$

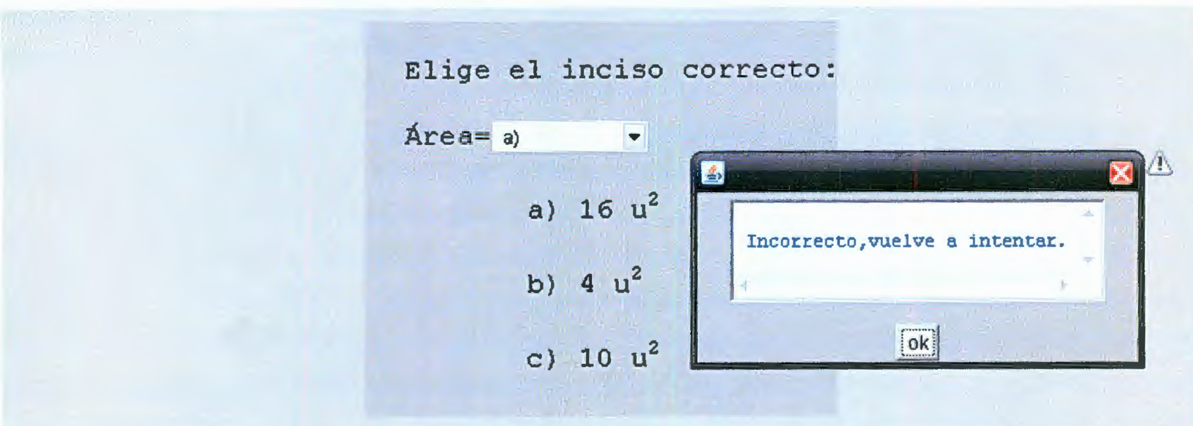
$$A = 6 + 4$$

$$A = 10$$

Eligiendo así el inciso correcto…



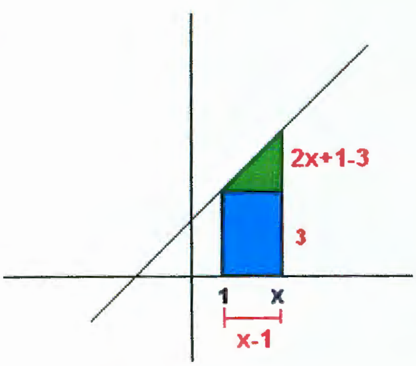
De lo contrario, se mostrará: "Incorrecto, vuelve a intentar" hasta elegir la opción correcta.



Después se le mostrará al alumno un nuevo applet en el que se le pide calcular el área de la región debajo de la recta $y=2x+1$ si $x>1$, sobre el eje x y entre las rectas $x=1$ y una recta vertical que intersecta al eje x.

b) Si x>1 calcula usando el applet siguiente, el área de la región debajo de la recta y=2x+1, sobre el eje x y entre las rectas x=1 y una recta vertical que intersecta al eje x.

Para obtener el área el alumno podrá seguir el mismo procedimiento que en el applet anterior.



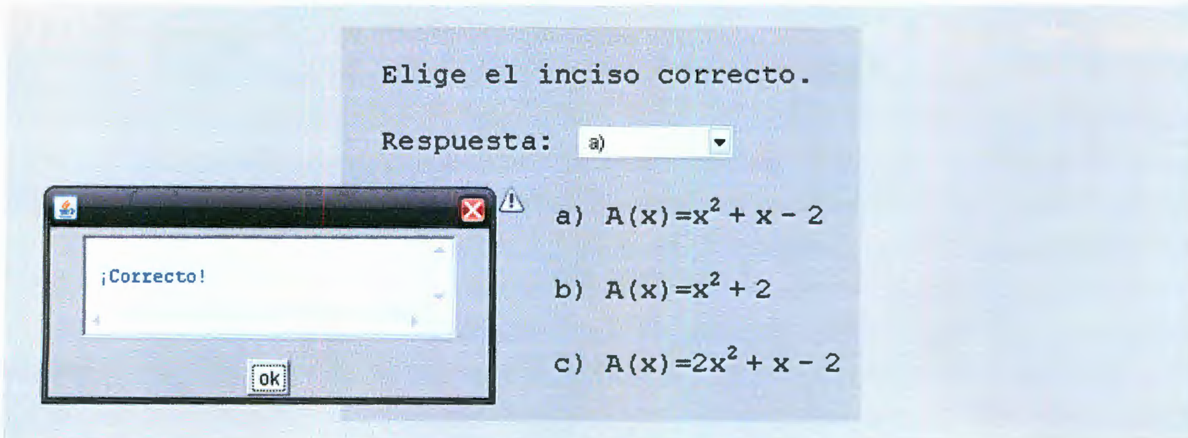
Área = Área del rectángulo + Área del triángulo

$$A = (x-1)(3) + [(x-1)(2x+1-3)]/2$$

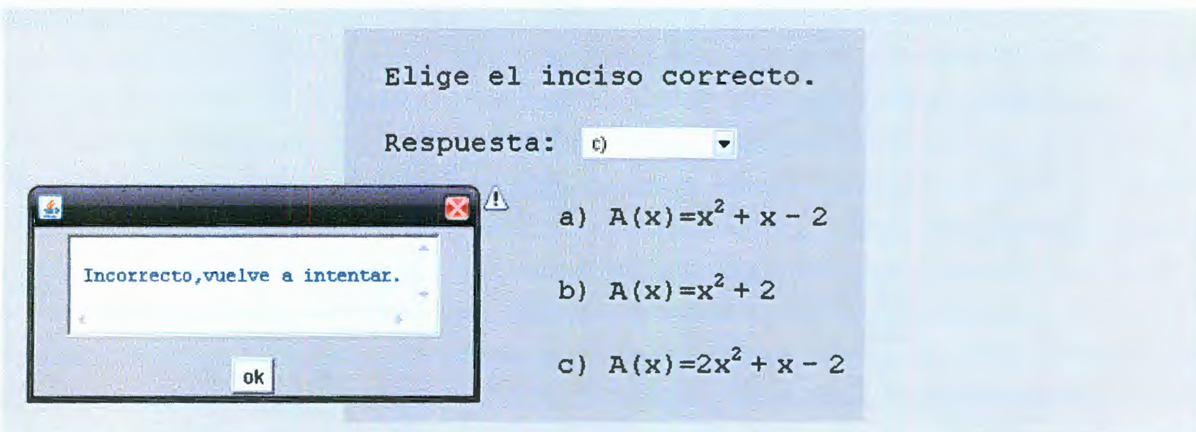
$$A = (3x-3) + (x^2-2x+1)$$

$$A = x^2+x-2$$

Eligiendo así el inciso correcto…



De lo contrario, se mostrará: “Incorrecto, vuelve a intentar” hasta elegir la opción correcta.



En el inciso c) el alumno utilizará sus conocimientos de Cálculo Diferencial para derivar la función área A(x).

c) Utiliza tus conocimientos de cálculo diferencial para derivar la función área *A(x)*. ¿Qué observas?

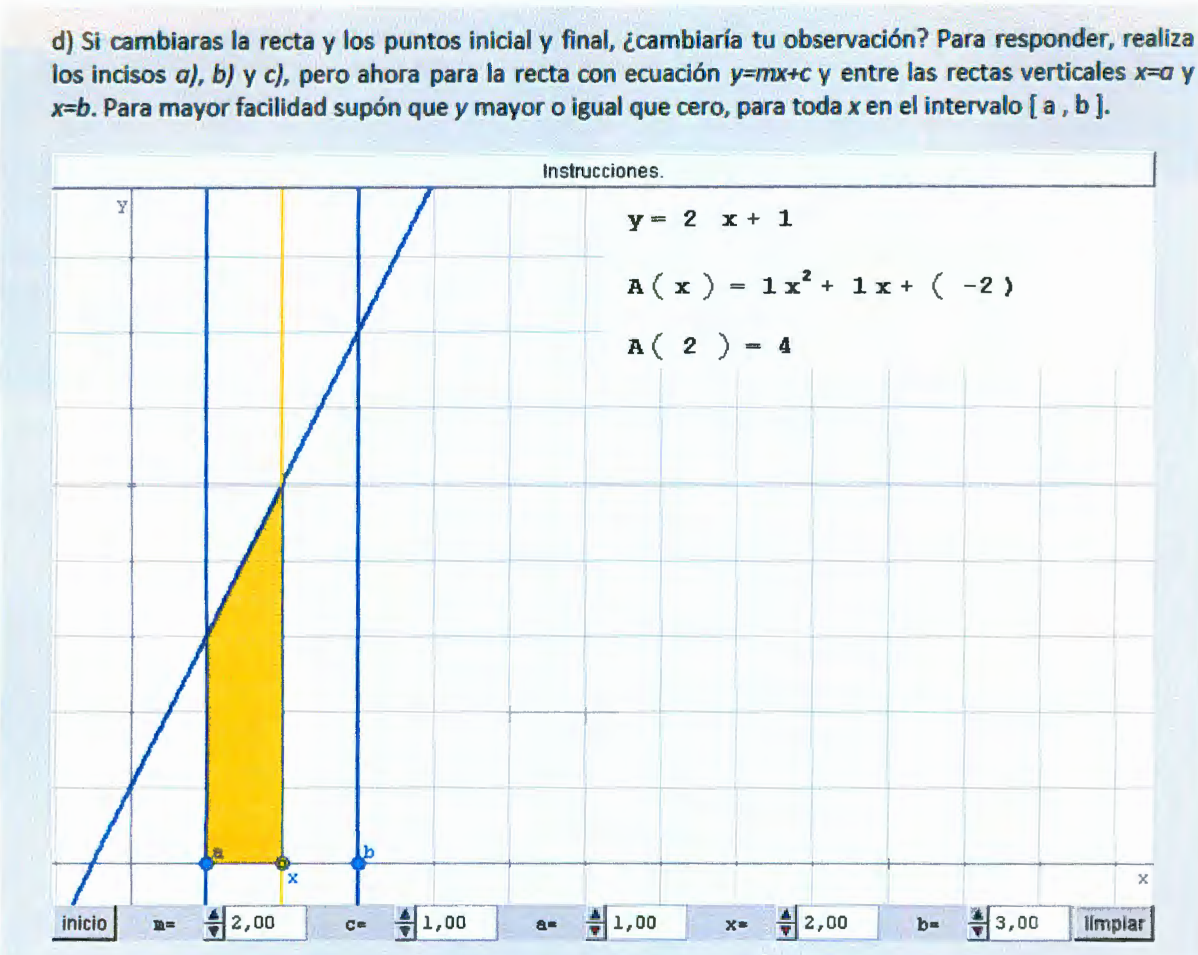
Obteniendo una deducción de lo que observó:

$$A(x) = x^2+x-2$$

$$A'(x) = 2x+1$$

Concluyendo que A'(x) es precisamente la recta y=2x+1.

En el siguiente inciso se le mostrará al alumno otro applet, en el cual podrá cambiar la recta y los puntos inicial y final para ver si cambia o no la observación del inciso anterior. Para poder responder se pide que realice los incisos previos a), b) y c) pero ahora para la recta con ecuación y=mx+c y entre las rectas verticales x=a y x=b, suponiendo que $y \geq 0$ para toda x en el intervalo [a,b].



En dicho applet, el alumno pudo dar diferentes valores de m, c, a, x y b y observar lo que sucede, además pudo percibir la ecuación y=mx+c y el valor de su área A(x) sin tener que realizar cálculos, llegando a la conclusión de que la ecuación de la recta es ciertamente A'(x).

En el último inciso, se le pregunta al alumno si la observación de que A'(x)=f(x) es la misma al cambiar la función lineal por otra, esperando así que su respuesta sea afirmativa.

e) *Sí* **cambiamos la funcion lineal (la recta) por otra ¿Se mantendrá la observación?**

Parte B.

Para que el alumno de por finalizada dicha práctica, tendrá que resolver la Parte B que veremos a continuación.

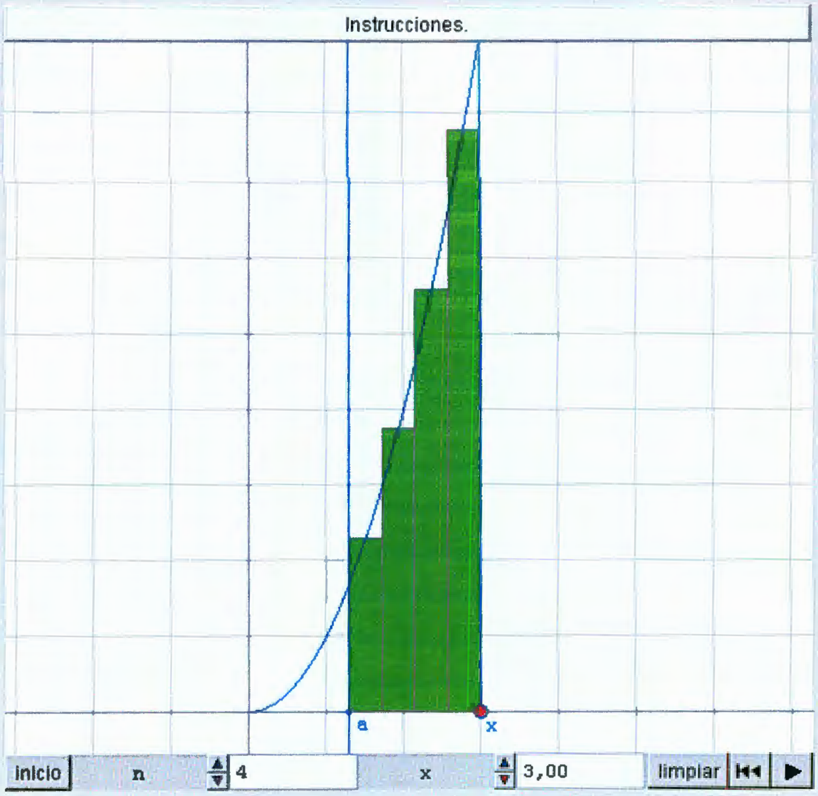
Para la parte B del Primer Teorema Fundamental del Cálculo, se le presenta al alumno el applet donde se le muestra la gráfica de una función cuadrática, el cual podrá utilizar para aproximar el área de la región bajo la curva encima del eje x y entre la recta x=a y una recta vertical que intersecta al eje x, utilizando sumas de Riemann variando n en $\Delta x = \dfrac{x-a}{n}$.

Primero podrá elegir el valor de la variable x, para así tener los limites de integración, ya que a es fijo, también podrá elegir el valor de la variable n que determina el número de intervalos que tendrá la partición de [a,x], después podrá reproducir el applet para que así aparezcan los rectángulos bajo la curva.

1° Teorema Fundamental del Cálculo.

Parte B.

a) En el applet siguiente se muestra la gráfica de la función $f(x)=x^2$. Utiliza el applet para aproximar el área de la región bajo la curva encima del eje x y entre la recta x=a y una recta vertical que intersecta al eje x, utilizando sumas de Riemann variando n en $\Delta x=(x-a)/n$.



Ahora bien, como el alumno debe aproximar el área de la región bajo la curva utilizando sumas de Riemann, podrá realizar el siguiente procedimiento:

Primero podrá elegir el intervalo en el que desea trabajar; en este ejemplo utilizaremos el intervalo (1.29,3), donde a=1.29, ahora lo podrá subdividir en n subintervalos de igual longitud para n=1,2,3,4:

Primero realizaremos la suma para n=1:

$$\Delta x = \frac{x-a}{n} = \frac{3-1.29}{1} = 1.71$$

Ahora se debe encontrar x_i, donde $x_i = a + \frac{(2i+1)(x-a)}{2n} = 1.29 + \frac{(2i+1)(1.71)}{2}$, entonces se sustituye en la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{1} f(1.29 + \frac{(2i+1)(1.71)}{2})\frac{1.71}{1}$$

$$= \sum_{i=1}^{1}\left[1.29^2 + 2(1.29)\frac{(2i+1)(1.71)}{2} + \left(\frac{(2i+1)(1.71)}{2}\right)^2\right]1.71$$

$$= \sum_{i=1}^{1}\left[1.6641 + \frac{8.8236i + 4.4118}{2} + \frac{11.6964i^2 + 11.6964i + 2.9241}{4}\right]1.71$$

$$= \sum_{i=1}^{1}\left[4.601 + 7.3359i + 2.9241i^2\right]1.71$$

$$= 7.8677 + 12.5443(1) + 5.0002(1)$$

$$= 25.4122$$

Para n=2:

$$\Delta x = \frac{x-a}{n} = \frac{3-1.29}{2} = 0.855$$

$x_i = a + \frac{(2i+1)(x-a)}{2n} = 1.29 + \frac{(2i+1)(1.71)}{4}$, entonces se sustituye en la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{2} f(1.29 + \frac{(2i+1)(1.71)}{4})\frac{1.71}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left[1.29^2 + 2(1.29)\frac{(2i+1)(1.71)}{4} + \left(\frac{(2i+1)(1.71)}{4}\right)^2\right]0.855$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left[1.6641 + \frac{8.8236i + 4.4118}{4} + \frac{11.6964i^2 + 11.6964i + 2.9241}{16}\right]0.855$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left[2.9497 + 2.9369i + 0.7310i^2\right]0.855$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left[2.5219+2.5110i+0.6250i^{2}\right]$$

$$=(2)2.5219+2.5110(\frac{n(n+1)}{2})+0.6250\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=(2)2.5219+2.5110(3)+0.6250(5)$$

$$=5.0438+7.533+3.125$$

$$=15.7018$$

Para n=3:

$$\Delta x=\frac{x-a}{n}=\frac{3-1.29}{3}=0.57$$

$x_i=a+\frac{(2i+1)(x-a)}{2n}=1.29+\frac{(2i+1)(1.71)}{6}$, entonces se sustituye en la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{3}f(1.29+\frac{(2i+1)(1.71)}{6})\frac{1.71}{3}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left[1.29^{2}+2(1.29)\frac{(2i+1)(1.71)}{6}+\left(\frac{(2i+1)(1.71)}{6}\right)^{2}\right]0.57$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left[1.6641+\frac{8.8236i+4.4118}{6}+\frac{11.6964i^{2}+11.6964i+2.9241}{36}\right]0.57$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left[2.4806+1.7955i+0.3249i^{2}\right]0.57$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left[1.4139+1.0234i+0.1851i^{2}\right]$$

$$=(3)1.4139+1.0234(\frac{n(n+1)}{2})+0.1851\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=(3)1.4139+1.0234(6)+0.1851(14)$$

$$=4.2417+6.1404+2.5914$$

$$=12.9735$$

Para n=4:

$$\Delta x = \frac{x-a}{n} = \frac{3-1.29}{4} = 0.4275$$

$x_i = a + \dfrac{(2i+1)(x-a)}{2n} = 1.29 + \dfrac{(2i+1)(1.71)}{8}$, entonces se sustituye en la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{4} f(1.29 + \frac{(2i+1)(1.71)}{8})\frac{1.71}{4}$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\left[1.29^2 + 2(1.29)\frac{(2i+1)(1.71)}{8} + \left(\frac{(2i+1)(1.71)}{8}\right)^2\right]0.4275$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\left[1.6641 + \frac{8.8236i + 4.4118}{8} + \frac{11.6964i^2 + 11.6964i + 2.9241}{64}\right]0.4275$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\left[2.2611 + 1.2856i + 0.1827i^2\right]0.4275$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\left[0.9666 + 0.5495i + 0.0781i^2\right]$$

$$= (4)0.9666 + 0.5495(\frac{n(n+1)}{2}) + 0.0781\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= (4)0.9666 + 0.5495(10) + 0.0781(30)$$

$$= 3.8664 + 5.495 + 2.343$$

$$= 11.7044$$

Entonces tenemos que:

N	$\sum$
1	25.4122
2	15.7018
3	12.9735
4	11.7044

Como podemos observar, conforme n va creciendo, se va encontrando una mejor aproximación del área bajo la curva, por lo tanto, realizaremos el mismo procedimiento pero ahora de manera general.

$$\Delta x = \frac{x-a}{n} = \frac{3-1.29}{n} = \frac{1.71}{n}$$

Ahora debe encontrar x_i, donde $x_i = a + \dfrac{(2i+1)(x-a)}{2n} = 1.29 + \dfrac{(2i+1)(1.71)}{2n}$, entonces se sustituye en la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(1.29 + \frac{(2i+1)(1.71)}{2n})\frac{1.71}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[1.29^2 + 2(1.29)\frac{(2i+1)(1.71)}{2n} + \left(\frac{(2i+1)(1.71)}{2n}\right)^2\right]\frac{1.71}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[1.6641 + \frac{8.8236i + 4.4118}{2n} + \frac{11.6964i^2 + 11.6964i + 2.9241}{4n^2}\right]\frac{1.71}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(1.6641 + \frac{4.4118}{n}i + \frac{2.2059}{n} + \frac{2.9241}{n^2}i^2 + \frac{2.9241}{n^2}i + \frac{0.7310}{n^2}\right)\frac{1.71}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2.8456}{n} + \frac{7.5441}{n^2}i + \frac{3.7720}{n^2} + \frac{5.0002}{n^3}i^2 + \frac{5.0002}{n^3}i + \frac{1.2500}{n^3}\right)$$

$$= n\frac{2.8456}{n} + \frac{7.5441}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n\frac{3.7720}{n^2} + \frac{5.002}{n^3}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) + \frac{5.002}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n\frac{1.2500}{n^3}$$

$$= 2.8456 + \frac{3.77205}{n}(n+1) + \frac{3.7720}{n} + \frac{0.8336}{n^2}(2n^2+3n+1) + \frac{2.501}{n^2}(n+1) + \frac{1.2500}{n^2}$$

$$= 2.8456 + 3.77205 + \frac{3.77205}{n} + \frac{3.77205}{n} + 1.6672 + \frac{2.5008}{n} + \frac{0.8336}{n^2}$$

Por lo tanto, una aproximación del área de la región bajo la curva es $2.8456 + 3.77205 + \dfrac{3.77205}{n} + \dfrac{3.77205}{n} + 1.6672 + \dfrac{2.5008}{n} + \dfrac{0.8336}{n^2}$

Ahora, en el inciso b) se le pide al alumno calcular la integral definida utilizando el límite de las sumas de Riemann, para encontrar el área de la región.

b) Calcula la integral definida utilizando el límite de las sumas de Riemann, para encontrar el área de la región.

Para ello, podrá realizar lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} 2.8456 + 3.77205 + \frac{3.77205}{n} + \frac{3.77205}{n} + 1.6672 + \frac{2.5008}{n} + \frac{0.8336}{n^2}$$

$$= 2.8456 + 3.77205 + 0 + 0 + 1.6672 + 0 + 0$$

$$= 2.8456 + 3.77205 + 1.6672$$

$$= 8.2848$$

Por lo tanto el área de la región es 8.2848 u^2.

En el inciso c), se le pide al alumno que dé el valor de la integral definida para x>a.

c) ¿Cuál es el valor de la integral definida para x>a? A este valor se le llama A(x). $A(x) = \int_a^x f(t)dt$

Aquí, el alumno podrá integrar la función cuadrática $A(x) = \int_a^x x^2 dx$, obteniendo como resultado

$\frac{x^3}{3}$.

Consecuentemente, en el siguiente inciso se le pide al alumno que derive la función área, A(x) y que dé su observación.

d) Deriva la función área, A(x). ¿Qué observas?

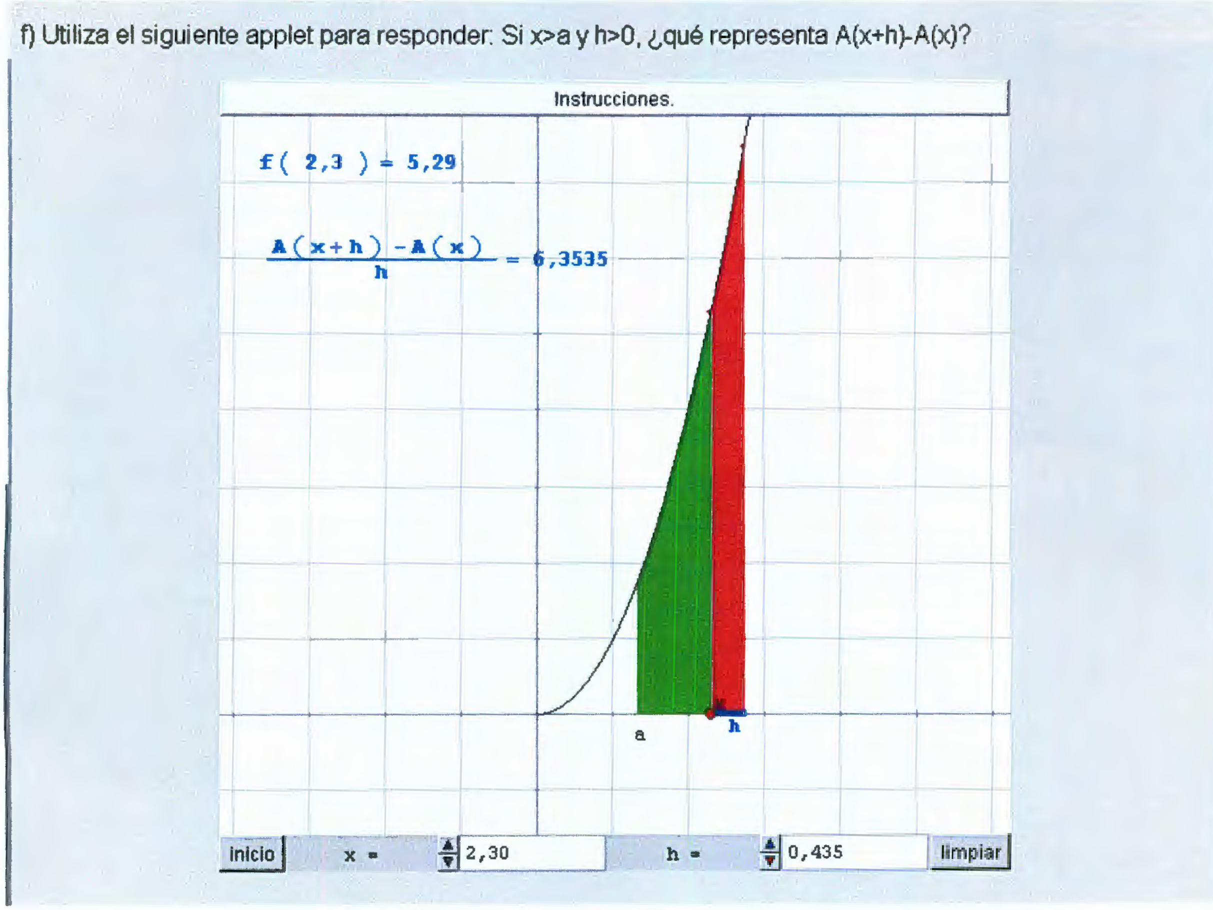
El alumno podrá saber por el inciso anterior que A(x)= $\frac{x^3}{3}$, entonces, al realizar la derivada de la función área A(x) podrá obtener $A'(x) = x^2$. De esta manera, podrá observar que el resultado es precisamente la función.

En el inciso e) se le pedirá al alumno que intente dar una explicación intuitiva del resultado.

e) Intenta dar una explicación intuitiva del resultado.

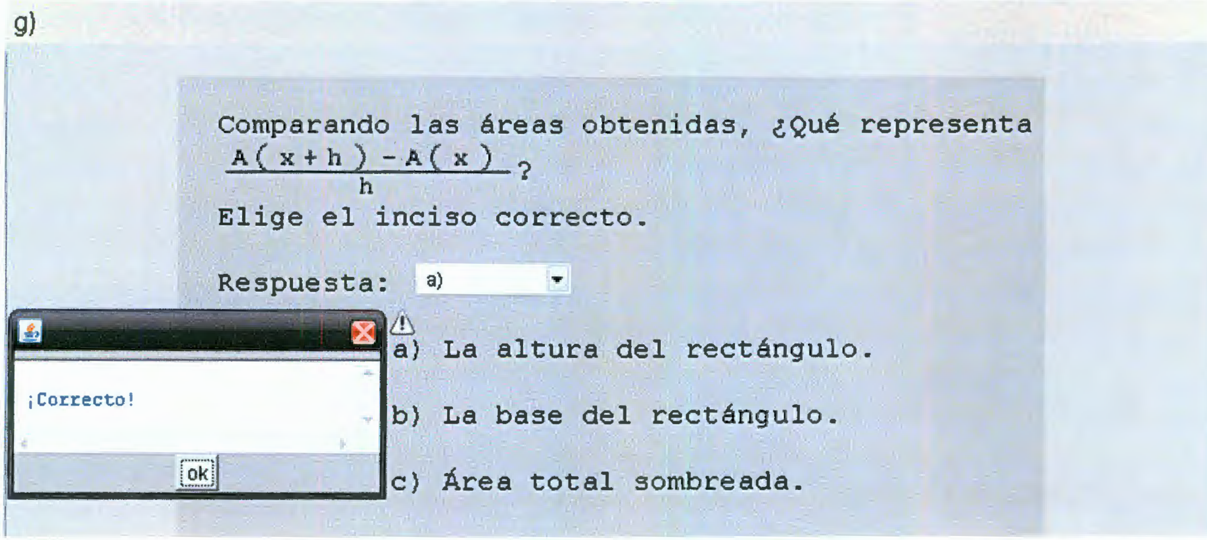
Podrá entonces el alumno observar que $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, y al derivarla, como la integral y la derivada son operaciones inversas resulta $A'(x) = f(x)$, es decir, A es una antiderivada de f.

Después, en el inciso siguiente, se le pide al alumno que utilice el applet que se le presenta para responder: Si x>a y h>0, ¿qué representa A(x+h)-A(x)?

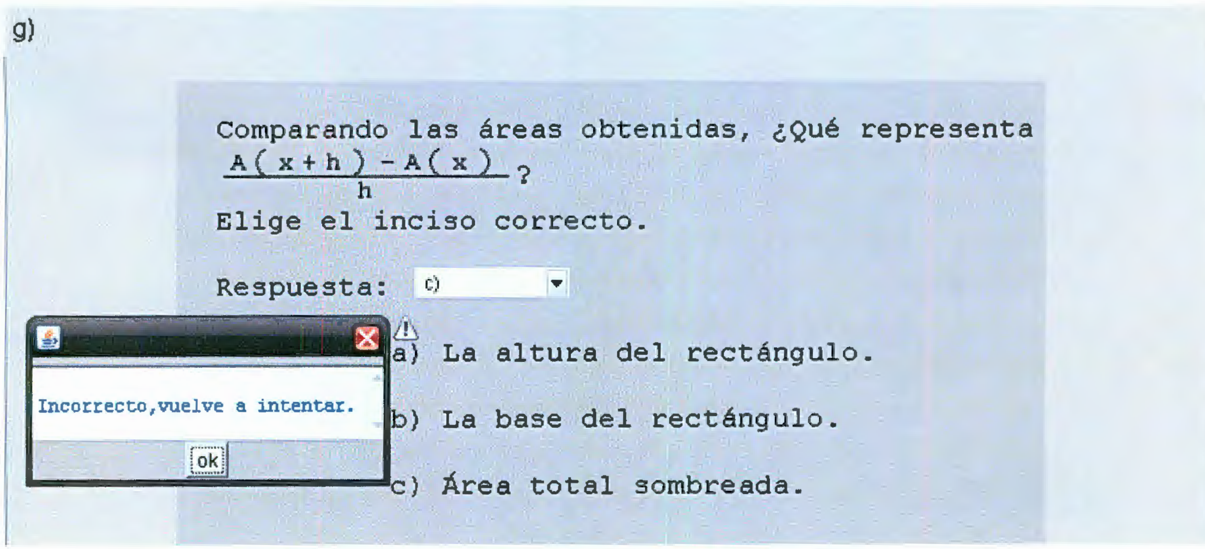


Aquí el alumno puede elegir los valores que mejor le parezcan de x y de h y podrá observará que al restar las áreas A(x+h) y A(x), es decir A(x+h)-A(x), se obtiene la región sombreada con rojo.

En el inciso (g) se le pregunta al alumno ¿Qué representa [A(x+h)-A(x)]/h? Para contestar dicha pregunta el alumno podrá recordar que en el applet anterior observó que A(x+h)-A(x) es el área de la región sombreada con rojo. Entonces, aproximadamente el área del rectángulo de base h y altura $f(x_i)$ se obtiene al dividir el área entre h, que es precisamente la altura del rectángulo $f(x_i)$.



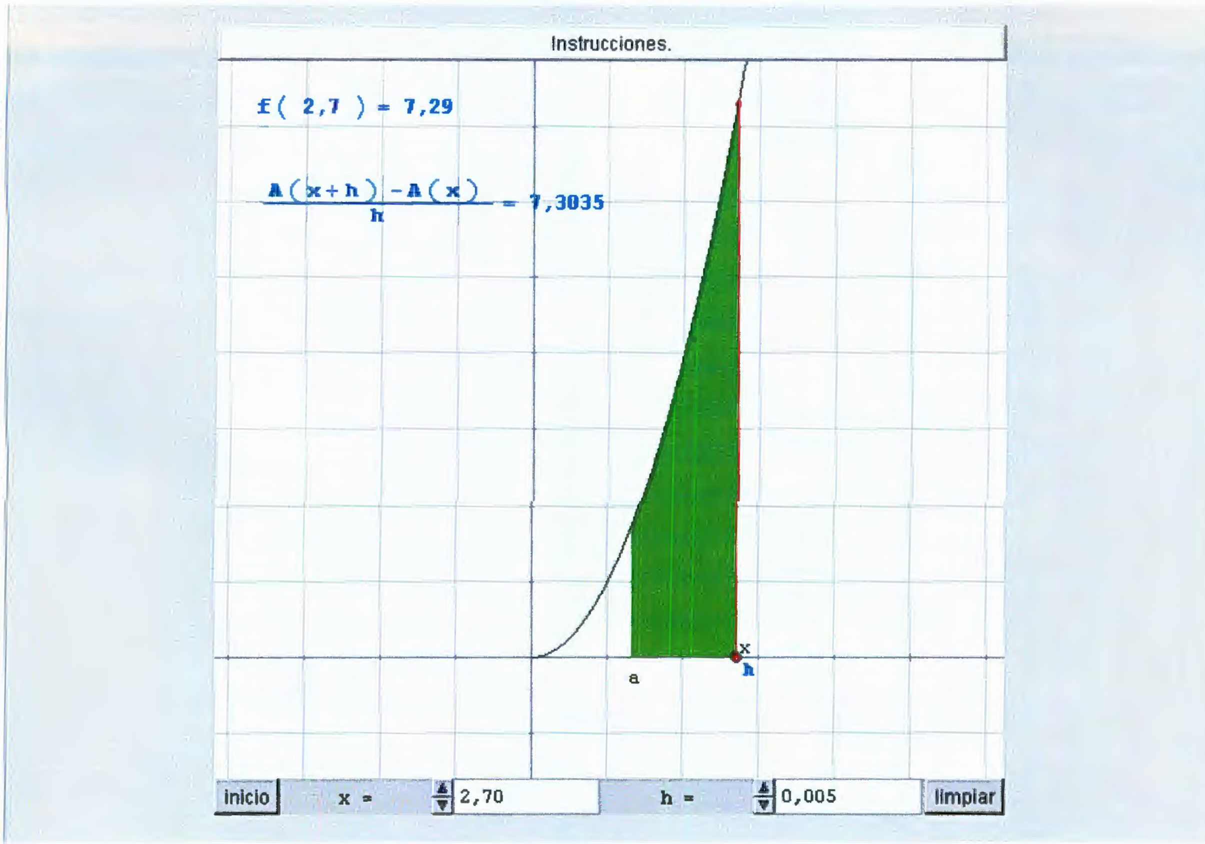
De no elegir la opción correcta, aparecerá "Incorrecto, vuelve a intentar" hasta elegir la opción correcta.



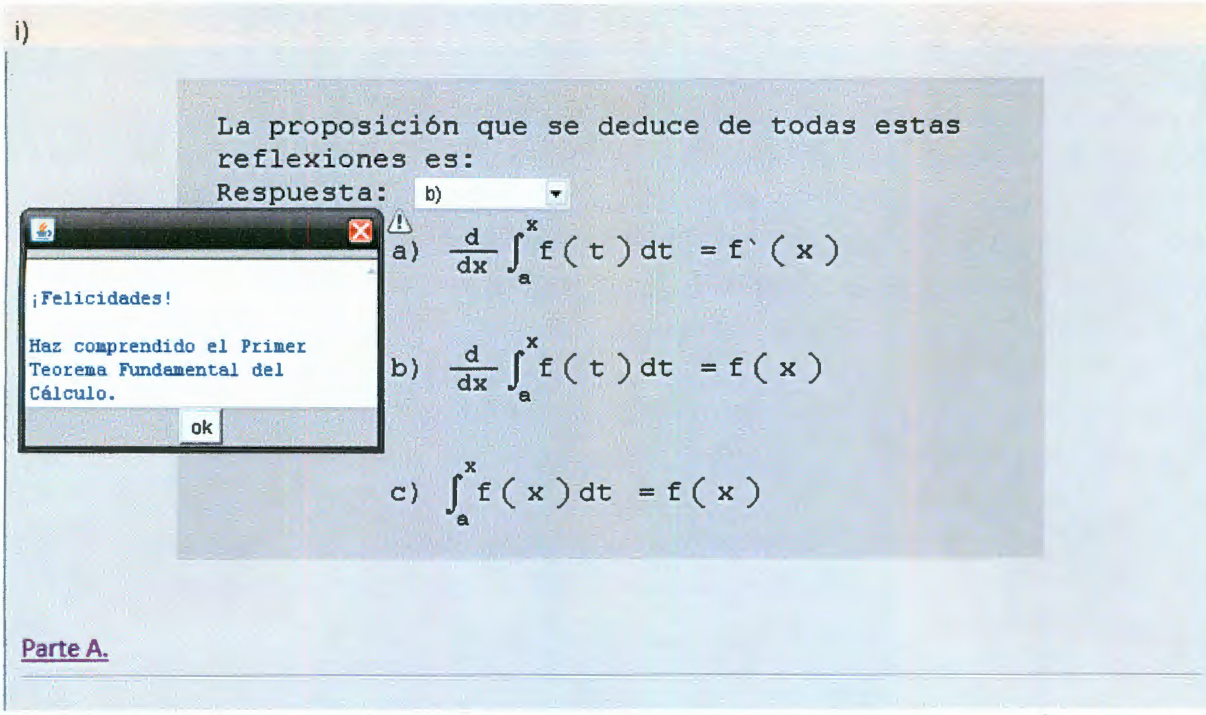
En el penúltimo inciso aparecerá lo siguiente:

h) Utiliza el applet para "intuir" qué sucede cuando h es muy pequeña ¿Qué relación existe entre la respuesta del inciso (g) y el valor de la función en el punto x?

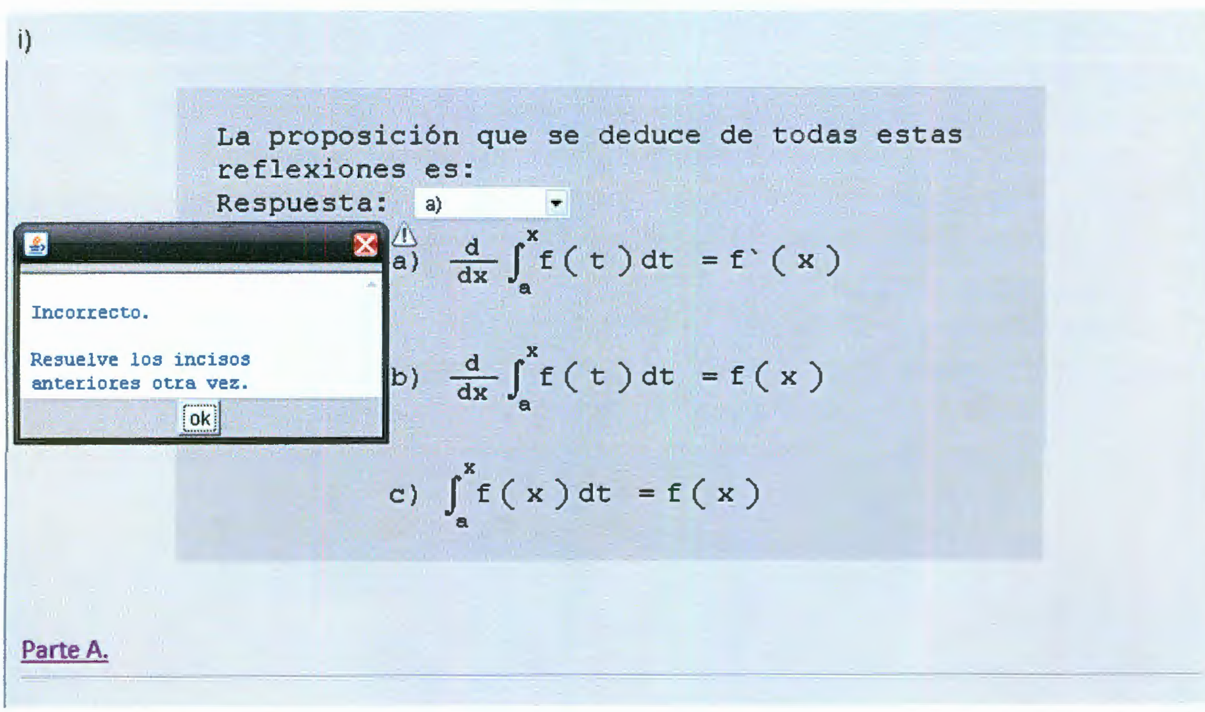
Utilizando el mismo applet, se le pide al alumno que conjeture que sucede cuando h es muy pequeña, aquí podrá observar que cuando h tiende a cero, el rectángulo rojo se va reduciendo hasta quedar una línea vertical. Después se le pregunta ¿Qué relación existe entre la respuesta del inciso (g) y el valor de la función en el punto x? Aquí el alumno podrá darse cuenta que el valor de la función en el punto x es la misma que la altura del rectángulo.



Ya para concluir, en el último inciso se pide que se elija la proposición que se deduce de todas estas reflexiones, aquí si el alumno elije la opción b) podrá haber comprendido el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.



De no elegir la opción correcta (que esperemos que no sea así, sino todo nuestro esfuerzo será en balde) aparecerá lo siguiente:



Nota: Como se pudo observar, al final de la Parte A, aparece subrayado Parte B, que nos permite pasar directamente a esa parte, y viceversa, al término de la Parte B, también aparece subrayado Parte A, que nos permite regresar al inicio de la práctica.

Por lo tanto, al término de esta práctica el alumno podrá haber comprendido el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, logrando así un aprendizaje significativo del mismo.

Cabe mencionar, que a pesar de que la práctica está diseñada para que los alumnos puedan resolverla solos, el docente estará presente a lo largo de toda la práctica, para guiar a los alumnos en la realización de la misma, además de ayudarles en las dudas que pudieran presentárseles.

Al término de la práctica, el docente podrá reforzar lo aprendido de la forma que el crea conveniente, ya sea haciendo una pequeña síntesis de lo aprendido o poner a los alumnos una serie de ejercicios del tema visto, u otra forma que crea pertinente; pues como recordaremos, los applets los proponemos como una herramienta didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje, no como un reemplazo de la labor del docente, sino al contrario, que el docente, con el uso de los applets, logre en sus alumnos aprendizajes significativos.

3.2.3Concepto y Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo (ParteI)

Teorema Fundamental del Cálculo (Parte I):

Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces la función g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$

Es una antiderivada de f; es decir, $g'(x) = f(x)$ para $a < x < b$.

En palabras, expresa que la derivada de una integral definida con respecto a su limite superior es el integrando evaluado en ese limite superior.

Demostración:

La demostración se hará sin suponer la existencia de una antiderivada de f.

Sea $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si x y $x + h$ están en el intervalo abierto (a,b), entonces

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= (\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt) - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

Y, por tanto, para $h \neq 0$, $$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Por ahora, supongamos que $h > 0$. Como f es continua sobre $[x, x+h]$ en el teorema del valor extremo se afirma que existen los números u y v en $[x, x+h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre $[x, x+h]$.

Entonces, por el teorema del valor medio tenemos $mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$, es decir,

$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)h$

Puesto que $h > 0$, podemos dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)$$

Ahora reemplazaremos la parte de en medio de esta desigualdad:

$$f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v)$$

De manera semejante se puede probar el caso donde $h < 0$. Ahora, hagamos que $h \to 0$. Entonces $u \to x$ y $v \to x$, puesto que u y v se encuentran entre x y $x + h$. Y debido a que f es continua en x, se tiene que, $\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$ $\lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$

Por el teorema de la compresión, (este teorema enuncia que si dos funciones tienden al mismo límite en un punto, cualquier otra función que pueda ser acotada entre las dos anteriores tendrá el mismo límite en el punto), concluimos que

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

3.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (PARTE II)

3.3.1 Finalidad de los Applets

La finalidad de los Applets que se presentarán en el siguiente subtema será lograr en los alumnos un aprendizaje significativo del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el cual es una consecuencia del primero.

Dicho aprendizaje surgirá cuando el alumno, como constructor de su propio conocimiento, relacione los conceptos a aprender y les de un sentido a partir de la estructura conceptual que ya posee. En este sentido, el alumno ya posee los conocimientos necesarios para poder aplicarlos y construir nuevos conocimientos, ya que lo que aprendió en el Primer Teorema será fundamental para poder comprender el Segundo.

De esta manera, dichos applets al igual que los que se presentaron previamente, están diseñados para llevar al alumno paso a paso hasta comprender el objetivo perseguido, en este caso, el aprendizaje significativo del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Lo interesante de las prácticas, es que en primer instancia no se les darán los teoremas a los alumnos, sino que se les van presentando una serie de incisos y applets con las instrucciones necesarias para que sean capaces de resolverlos y hacer conjeturas, y así, al término de la práctica, el alumno se dará cuenta que lo que aprendió es precisamente el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Además, como se busca lograr en los alumnos aprendizajes significativos, a lo largo de la práctica estarán presentes las condiciones para que se de dicho aprendizaje: motivación, comprensión, participación y consecuentemente aplicación.

En primer lugar los applets están diseñados para motivar al alumno, pues como se les mostrará algo diferente a lo que usualmente están acostumbrados, será algo que les interese y por ende tendrán ganas de aprenderlo.

En consecuencia, también los applets serán punto clave para la comprensión, pues como los alumnos podrán jugar con ellos y cuentan con instrucciones que los llevan de la mano, irán entendiendo lo que se les pide y podrán aclarar las dudas que se le presenten, además recordemos que en ningún momento se está desplazando la función del docente, sino por el contrario, estará presente a lo largo de la práctica para cualquier duda que se presentará.

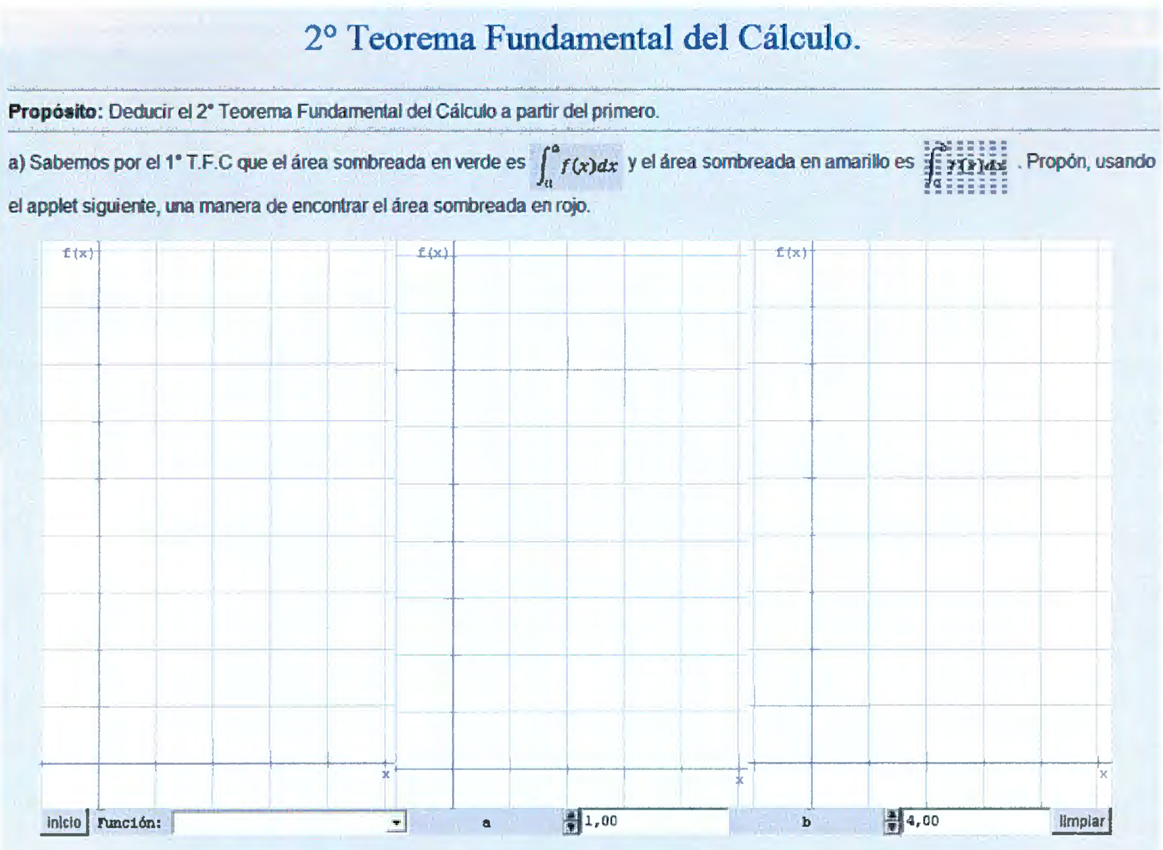
A su vez, el alumno mediante los applets estará trabajando activamente sobre la información que se le da, la estudiará, la analizará y la elaborará, logrando así la participación.

Y por último, al concluir la práctica, el alumno podrá ver que la información que adquirió le sirve, le es útil y por consecuencia la podrá poner en práctica, en otras palabras, encontrará una aplicación de lo que aprendió, logrando finalmente un aprendizaje significativo del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

3.3.2 Desarrollo de los Applets

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo también es de suma importancia, pues como sabemos, es una consecuencia del Primer Teorema, por ello creemos conveniente también la realización de applets, con el objetivo de lograr en los alumnos aprendizajes significativos.

Iniciemos por observar los applets tal como se les presentan por primera ocasión:



b) Por el 1° T.F.C. el área sombreada en rojo es $\int_a^b f(x)dx$, entonces

La expresión que se deduce es:

Respuesta:

a) $\int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$

b) $\int_a^x f(t)dt - f(x)$

c) $\int_0^a f(x) - f(b)dx$

c) Si se define la función F tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, el 1° T.F.C. asegura que F'(x)=f(x). Entonces, utiliza esta notación para encontrar

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx =$$

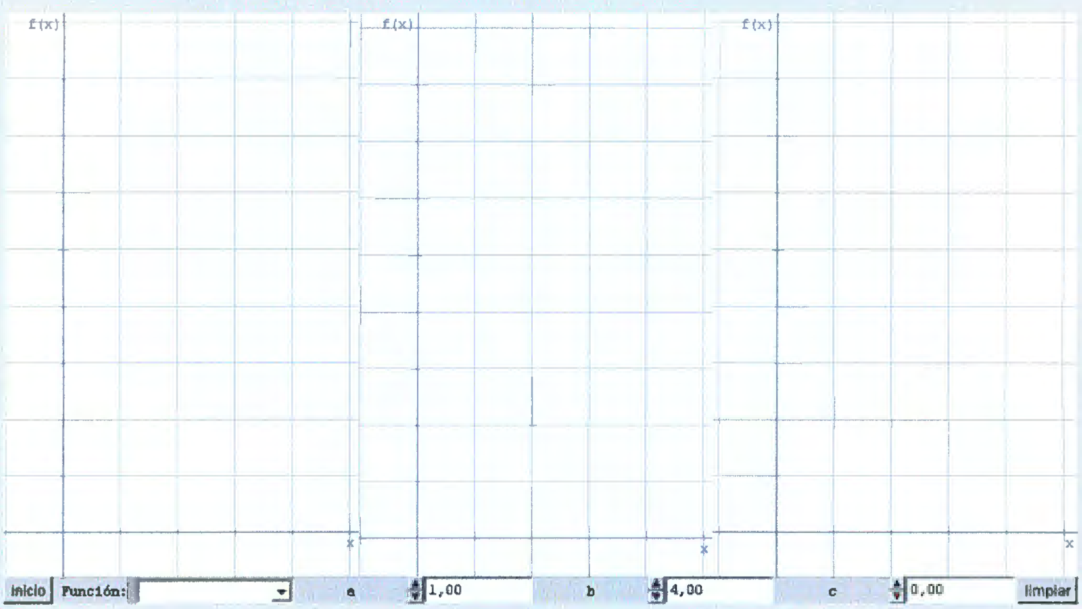
Respuesta:

a) $\sqrt{F(b) - F(a)}$

b) $F(b) - F(a)$

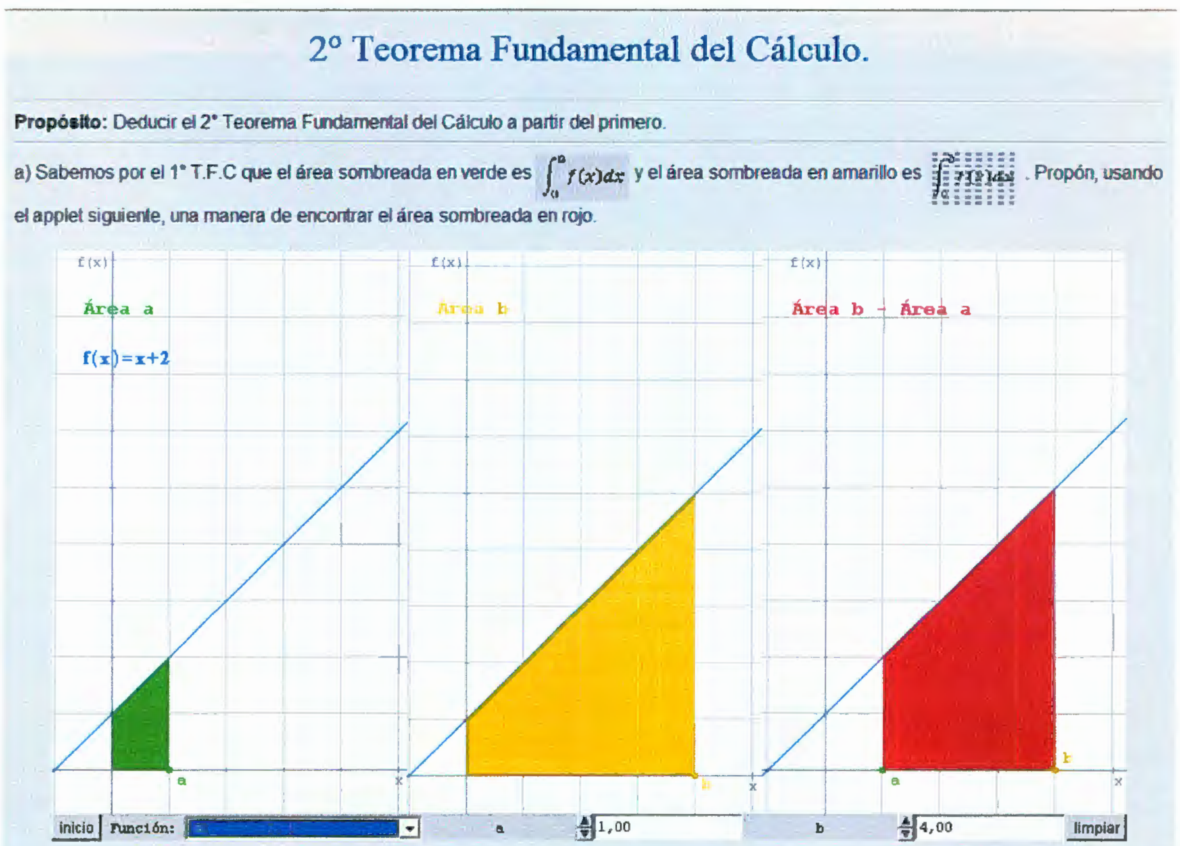
c) $F(b)^2 + F(a)^2$

d) Utiliza el applet para encontrar $\int_a^b f(x)dx$, cambiando de función y moviendo a, b y c.

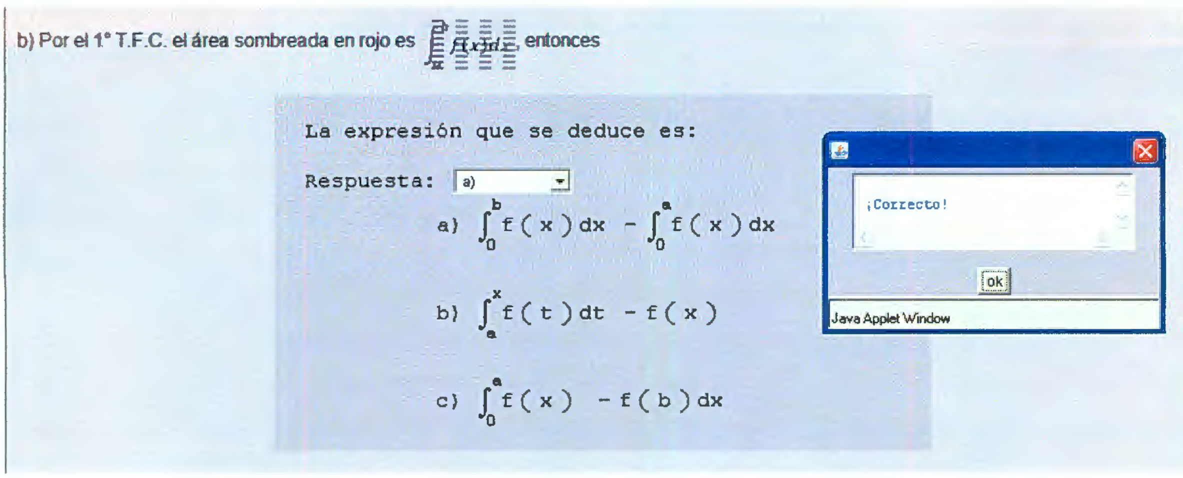


Ahora veamos el desarrollo que podrán seguir los alumnos para llevar a cabo la práctica del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Recordemos que ésta es sólo una alternativa para resolver la práctica, pues el alumno podrá resolverlo de igual manera o elegir la opción que crea pertinente para solucionarlo.

El siguiente applet titulado 2° Teorema Fundamental del Cálculo está diseñado para que el alumno deduzca dicho teorema a partir del primero. Para empezar a utilizarlo podrá recordar del 1° T.F.C que el área sombreada en verde es $\int_0^a f(x)dx$ y el área sombreada en amarillo es $\int_0^b f(x)dx$. Se le pide proponer, usando el applet, una manera de encontrar el área sombreada en rojo; primero podrá elegir una función de las dos opciones que tiene y empezar a jugar con el applet moviendo los valores de “a” y “b”, aquí se espera que el alumno se de cuenta que al área sombreada en amarillo se le resta el área sombreada en verde y el resultado de esa sustracción es precisamente el área sombreada en rojo.

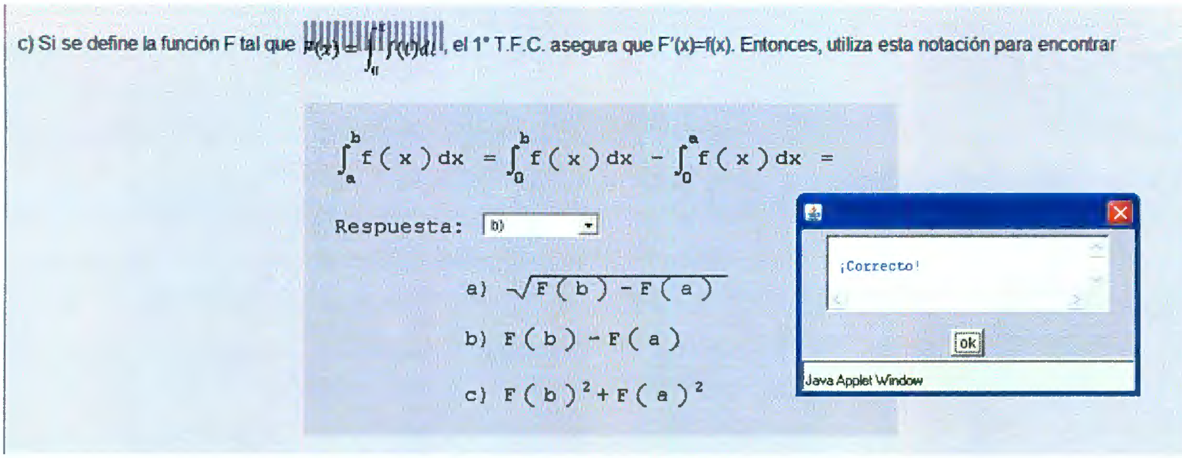


Ahora en el inciso b) se le pide al alumno formalizar lo aprendido; se sabe por el 1° T.F.C. que el área sombreada en rojo es $\int_a^b f(x)dx$, entonces se le pide que elija la opción correcta $\int_a^b f(x)dx =$__________. Pero como ya sabe que el área es la integral de la función y que al restar el área sombreada en amarillo con el área sombreada en verde da el área sombreada en rojo, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$, por lo tanto deberá elegir la opción “a”.



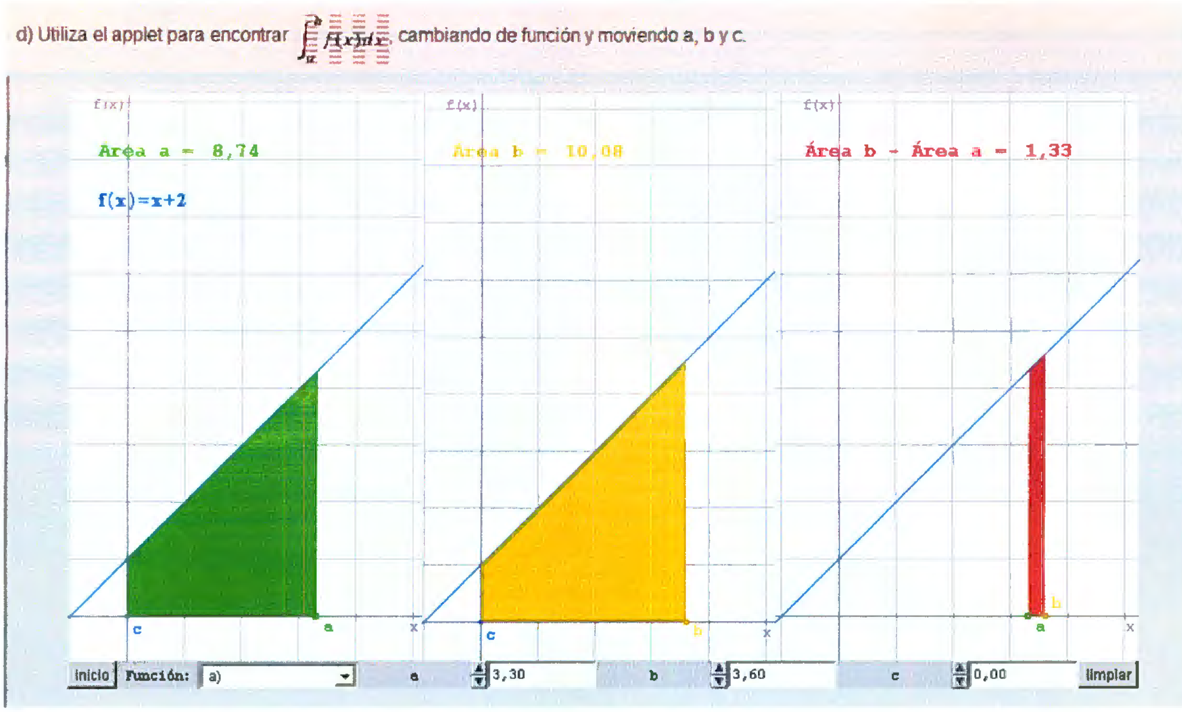
De lo contrario, aparecerá “Incorrecto”, hasta elegir la opción correcta.

En el inciso c) se define la función F tal que $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, el 1° T.F.C. asegura que F’(x)=f(x). Entonces, se le pide al alumno utilizar esta notación para encontrar $\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$, pero del 1° T.F.C. se sabe que $F(b) = \int_0^b f(x)dx$ y que $F(a) = \int_0^a f(x)dx$, por lo tanto $\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = F(b) - F(a)$, así deberá elegir la opción “b”.



De lo contrario, aparecerá "Incorrecto", hasta elegir la opción correcta.

En el inciso d) se le pide al alumno utilizar el applet para encontrar $\int_a^b f(x)dx$, cambiando de función y moviendo a, b y c. En este applet el alumno podrá elegir primero la función en la que desea trabajar, mostrándose la gráfica y el área sombreada, además muestra el valor del área de cada función, así como la sustracción de las áreas.



Al terminar de jugar con éste applet, se espera que el alumno haya comprendido el 2º Teorema Fundamental del Cálculo y un aprendizaje significativo del mismo.

3.3.3 Concepto y Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II)

Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II):

Dada una función *f* continua en el intervalo [*a*,*b*] y sea *F* cualquier función primitiva de *f*, es decir *F'(x)=f(x)* para todo $x \in [a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración:

Sea $F^*(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Tenemos por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo que:

$$F^{*\prime}(x) = f(x) = F' \qquad \forall x \in [a,b].$$

Por lo tanto,

$$\exists c \in R \quad \text{tal que} \quad \forall x \in [a,b], \quad F^*(x) = F(x) + c.$$

Observamos que

$$0 = F^*(a) = F(a) + c$$

y de eso se sigue que $c = -F(a)$; por lo tanto,

$$F^*(x) = F(x) - F(a).$$

Y en particular si $x = b$ tenemos que:

$$\int_a^b f(t)dt = F^*(b) = F(b) - F(a)$$

3.4 APLICACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El Teorema Fundamental del Cálculo consiste en la afirmación de que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que en toda función continua, la derivada de su integral es igual a ella misma. Este teorema es central en la rama de las matemáticas denominada Cálculo. Una consecuencia directa de este teorema, denominada en ocasiones Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, permite calcular la integral de una función utilizando la antiderivada de la función a ser integrada.

Es por ello, que dicho teorema no sólo es de suma importancia para el cálculo, sino también en la aplicación de todas las razones de cambio en las ciencias sociales y naturales. A modo de ejemplo podemos citar:

- Si v(t) es el volumen de agua de un depósito, en el instante t, entonces su derivada v'(t) es la razón a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante t. Así $\int_{t_1}^{t_2} v'(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.
- Si c(t) es la concentración del producto de una reacción química en el instante t entonces la velocidad de reacción es la derivada c'(t). De esta manera $\int_{t_1}^{t_2} c'(t)dt = c(t_2) - c(t_1)$ es el cambio en la concentración c desde el instante t_1 hasta el t_2.
- Si la masa de una varilla, medida desde la izquierda hasta un punto x, es m(x) entonces la densidad lineal es r (x) = m'(x). De esta manera $\int_a^b p(x)dx = m(b) - m(a)$ es la masa del segmento de la varilla entre x = a y x = b.
- Si la tasa de crecimiento de una población es $\frac{dp}{dt}$ entonces $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dp}{dt}dt = p(t_2) - p(t_1)$ es el aumento de población durante el período desde t_1 hasta t_2.

- Si c(x) es el costo para producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada c'(t). Por consiguiente $\int_{x_1}^{x_2} c'(t)dt = c(x_2) - c(x_1)$ es el incremento en el costo cuando la producción aumenta desde x_1 hasta x_2 unidades.
- Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición s(t) , entonces su velocidad es v(t) = s'(t) de modo que $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$ es el cambio de la posición, o desplazamiento, de la partícula durante el período desde t_1 hasta t_2.
- Dado que la aceleración de un objeto es a(t) = v'(t), podemos asegurar que la expresión $\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la velocidad en el instante t_1 hasta el t_2.
- La potencia P(t) indica la razón de cambio de la energía E(t). Esto permite decir que P(t) = E'(t) y por lo tanto resulta $\int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = E(t_2) - E(t_1)$ indica la energía utilizada en el tiempo entre t_1 y t_2.

Las utilidades del Teorema Fundamental del Cálculo se van ampliando cada vez que tengamos necesidad de medir áreas y volúmenes, como es el caso de sólidos de revolución y longitud de arco, así como también al calcular la fuerza ejercida por el agua sobre la cortina de una presa, hallar el punto donde un objeto plano se equilibra horizontalmente, el valor promedio de una función, el trabajo realizado por una fuerza variable, el centro de gravedad de una placa, e incluso decidir dónde sentarse en una sala de cine, así como cantidades de interés en biología, economía y estadística.

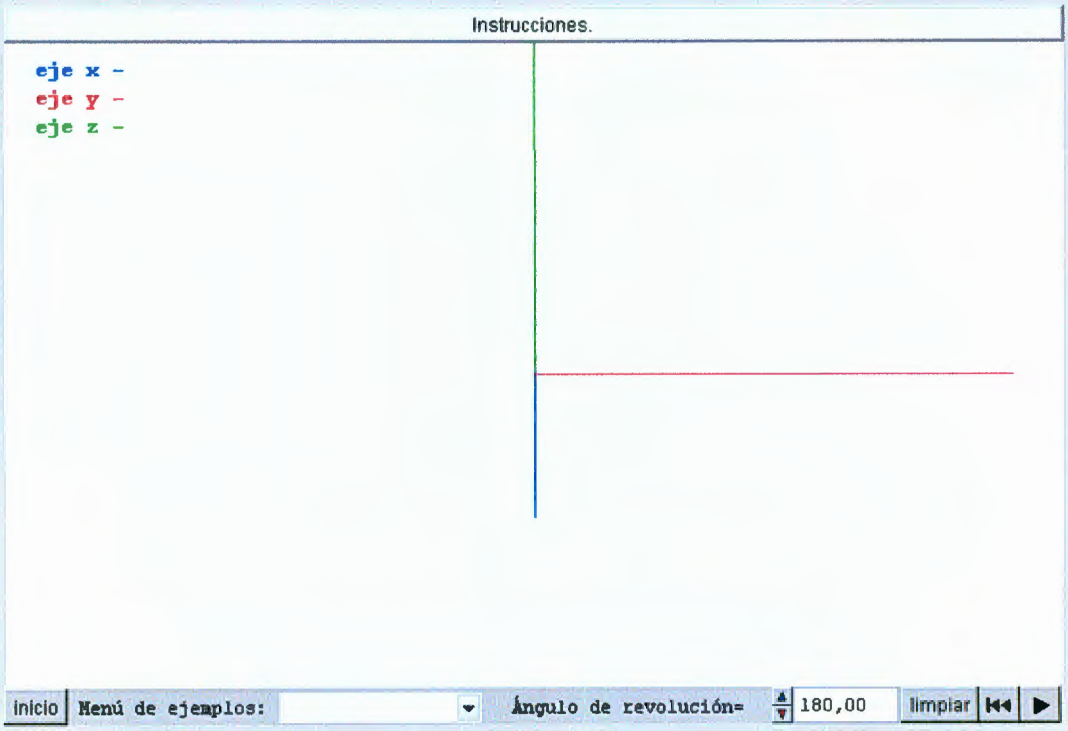
Para ello, proporcionamos los siguientes applets, en los cuales apreciaremos dicha aplicación en los temas de Sólidos de Revolución y Longitud de Arco.

Comencemos por el tema de Sólidos de Revolución, observemos en primer lugar como aparecerán los applets.

Volumen de sólidos de revolución.

Parte A.

Propósitos: Visualizar la construcción geométrica de sólidos de revolución.



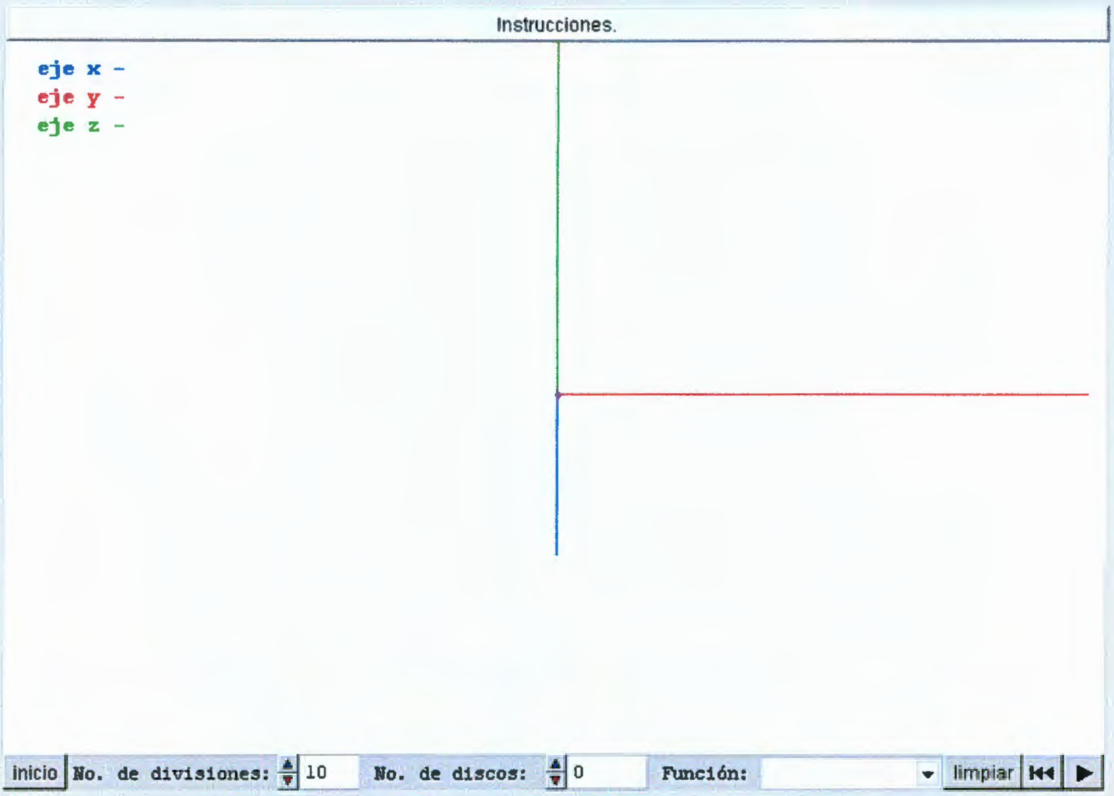
Parte B.
Parte C.

Volumen de sólidos de revolución.

Parte B.

Propósitos: Desarrollar la habilidad de aplicar el conocimiento de integral a una aplicación.

a) Opera el siguiente applet para proponer una aproximación al volumen de un sólido de revolución.



b) Aproxima el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x la región acotada por la parte positiva del eje x, la grafica de la función, la recta x=b y el eje y.

La expresión correcta es:
Respuesta:

a) $\sum_{i=1}^{10} \pi \ f^2(x_i)\Delta x$

b) $\sum_{i=1}^{10} 2\pi \ x_i f(x_i)\Delta x$

c) $10\pi f(x_i)\Delta x$

c)

El volumen del sólido será:
Respuesta:

a) $\int_a^b \pi \ f^2(x)dx$

b) $\int_a^b 2\pi \ xf(x)dx$

c) $2\pi(b-a)nx_i f(x_i)\Delta x$

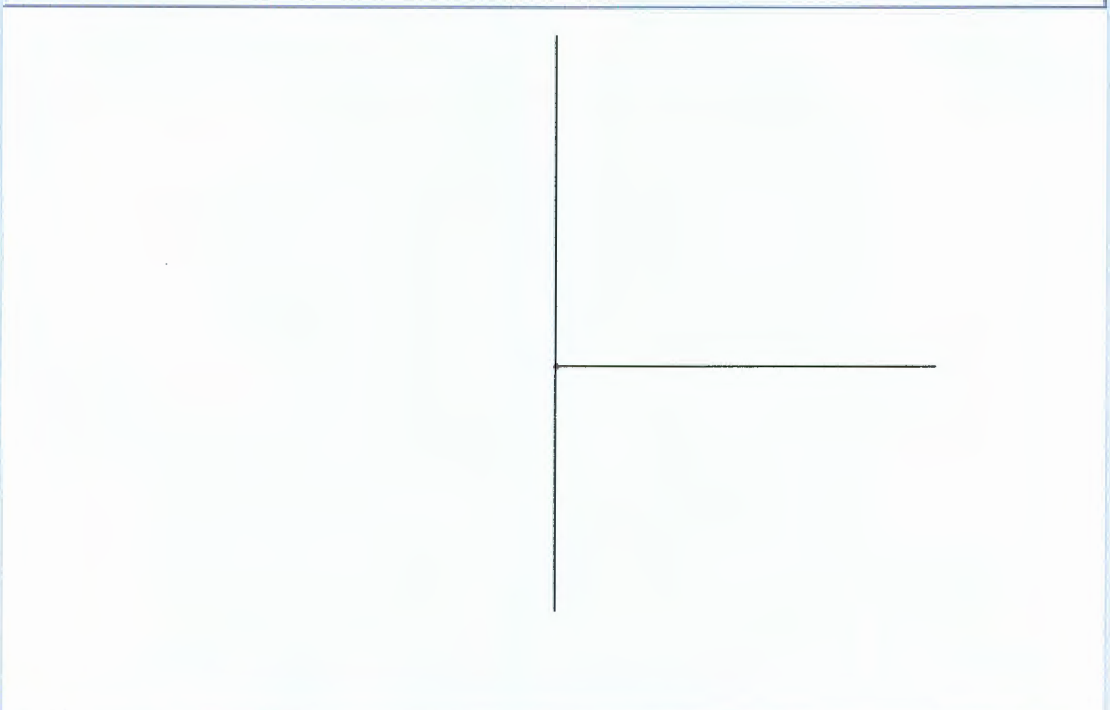
Parte A.
Parte C.

Volumen de sólidos de revolución.

Parte C.

a) Opera el siguiente applet para proponer una aproximación al volumen de un sólido de revolución utilizando casquetes cilíndricos.

Instrucciones.



inicio | Gráfica: | limpiar

b)

¿Cuáles son las medidas de la caja azul? Relaciona la columna de la izquierda con la opción que le corresponde.

Altura:	a) Δx
Largo:	b) $2\Pi x_i$
Ancho:	c) $f(x_i)$

c) Encuentra una aproximación del volumen del sólido, usando casquetes cilíndricos.

La expresión correcta es:

Respuesta:

a) $\sum_{i=1}^{n} 2 \quad x_i f(x_i)\Delta x$

b) $\sum_{i=1}^{n} 2\pi \ x_i f(x_i)\Delta x$

c) $2\pi n x_i f(x_i)\Delta x$

d)Halla la fórmula para el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la región acotada por la parte positiva del eje x, la gráfica de la función y las rectas x=a y x=b.

La expresión correcta es:

Respuesta:

a) $\int_{b}^{a} \pi \quad xf(x)dx$

b) $\int_{a}^{b} 2\pi \ xf(x)dx$

c) $2\pi(b-a)nx_i f(x_i)\Delta x$

Parte A.
Parte B.

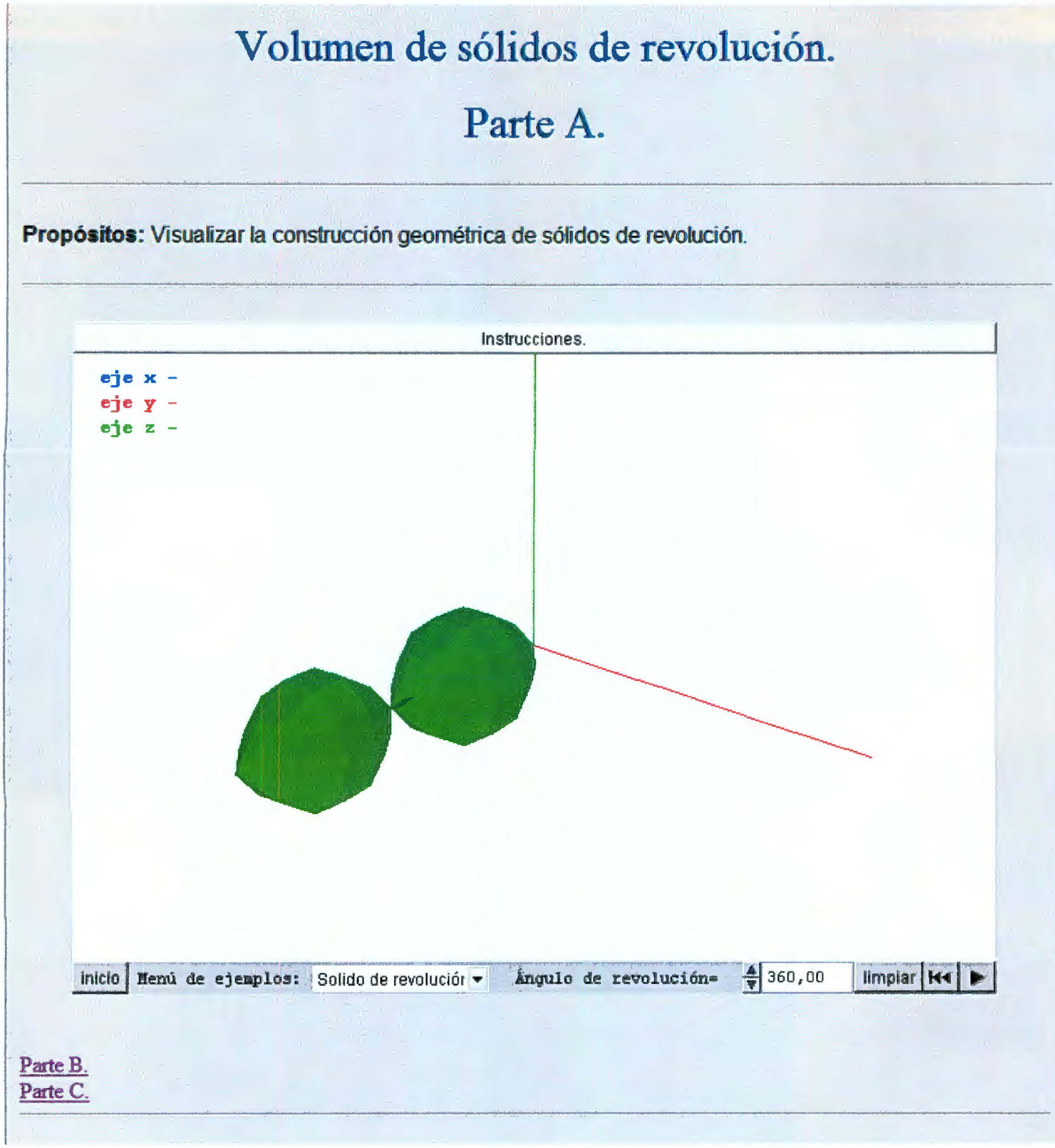
Como podemos observar, dichos applets de Sólidos de Revolución constan de tres partes: Parte A, B y C. Cada parte en las que se divide la práctica tiene subrayado en la parte inferior de los applets las otras dos partes faltantes, así, el alumno podrá ir a cualquiera de ellas.

Cabe recordar, que ésta es sólo una opción de resolución de la práctica, pero el alumno podrá seguir el procedimiento que desee a fin de completarla.

Ahora bien, veamos el desarrollo de dichos applets. Comencemos por el desarrollo de la Parte A.

En el siguiente applet se muestra el volumen de sólidos de revolución, en un principio el alumno podrá visualizar la construcción geométrica de un sólido de revolución.

En la opción de Menú de ejemplos podrá elegir entre tres gráficas para trabajar. En la opción de ángulo de revolución podrá especificar el ángulo de rotación total. Ya elegidos la función y el ángulo podrá reproducir el applet para que se empiece a formar el sólido de revolución. El alumno también podrá rotar la pantalla al colocar el puntero en la gráfica, manteniendo presionado el botón izquierdo del ratón y desplazándolo en la dirección deseada, para así apreciar mejor la figura.



Prosigamos con el desarrollo de la Parte B.

En esta parte, el alumno podrá desarrollar la habilidad de aplicar el conocimiento de integral a una aplicación. En este caso, el alumno podrá operar el siguiente applet para proponer una aproximación al volumen de un sólido de revolución, primero podrá elegir la función que desee, que se encuentra en la parte inferior del applet, después de "Función" se puede elegir entre 3 gráficas distintas para trabajar. En la opción "No. de divisiones" podrá especificar cuantos subintervalos de la partición quiere que se realicen en el dominio en el cual están definidas las funciones anteriores, después en la opción “No. de discos” podrá especificar cuantos discos se formaran en base a las divisiones antes determinadas al formar el sólido de revolución.

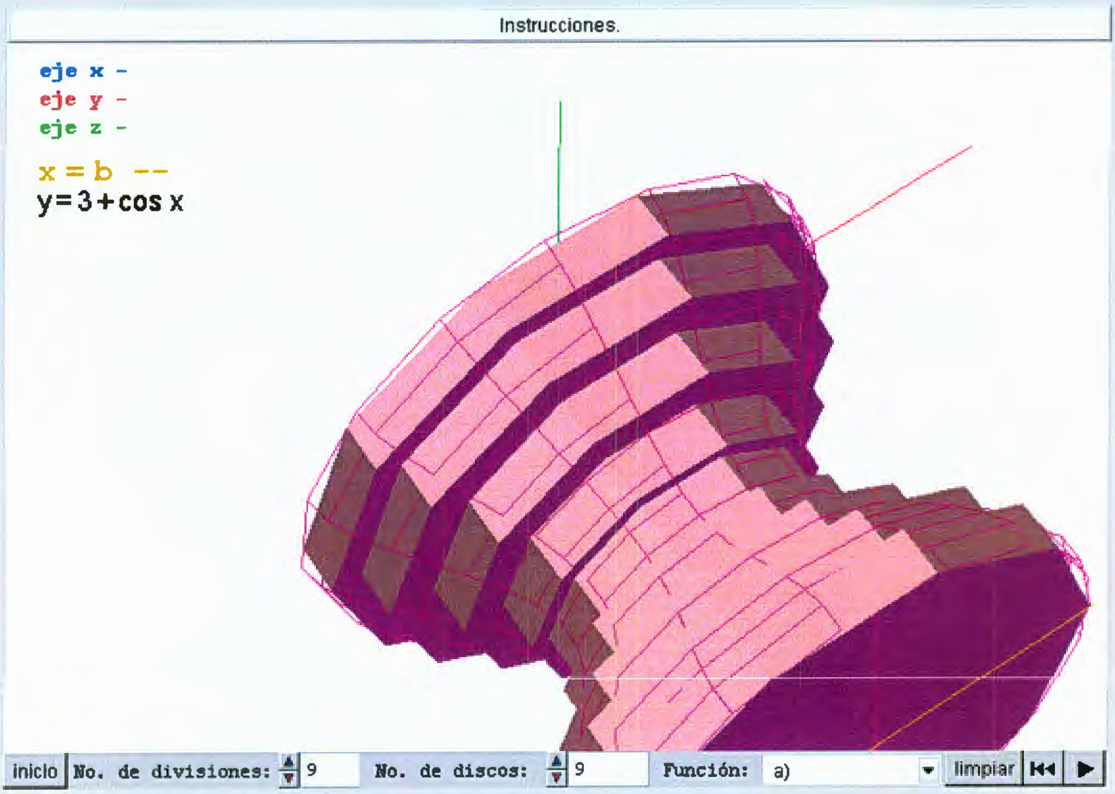
Realizado todo lo anterior, el alumno podrá iniciar el applet presionando este botón , para que se forme el sólido, además cuenta con la posibilidad de poder rotar la imagen para obtener una mejor apreciación de la misma.

Volumen de sólidos de revolución.

Parte B.

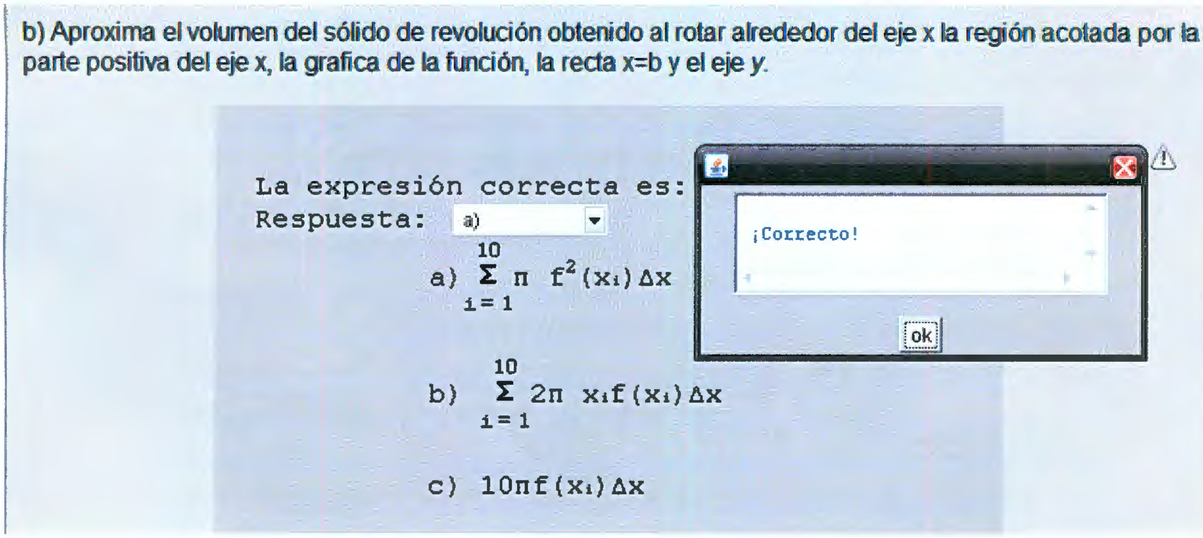
Propósitos: Desarrollar la habilidad de aplicar el conocimiento de integral a una aplicación.

a) Opera el siguiente applet para proponer una aproximación al volumen de un sólido de revolución.

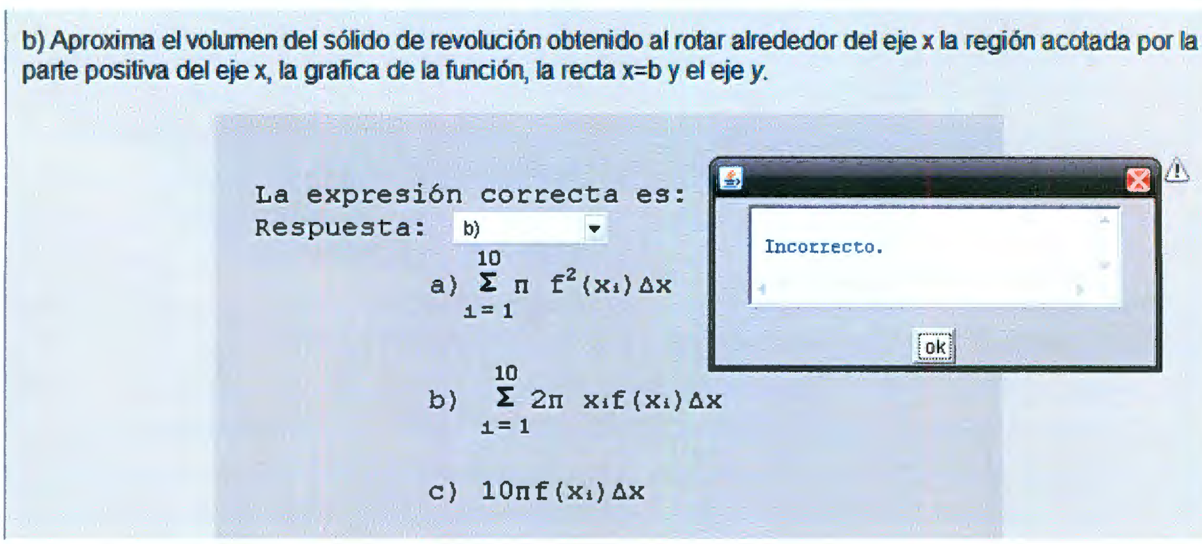


Ahora, en el inciso b), se le pide al alumno que aproxime el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x la región acotada por la parte positiva del eje x, la gráfica de la función, la recta x=b y eje y. Aquí el alumno puede seleccionar una partición del intervalo (0,b); para un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de longitud Δx, se toma $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces la sección transversal perpendicular al eje de rotación es un disco circular de radio $f(x_i^*)$, como el área de un círculo es $A = \pi r^2$, se tiene que $A = \pi\left[f(x_i^*)\right]^2$, por lo tanto el volumen del disco circular de radio $f(x_i^*)$ y ancho igual a Δx, es $V = \pi\left[f(x_i^*)\right]^2 \Delta x$.

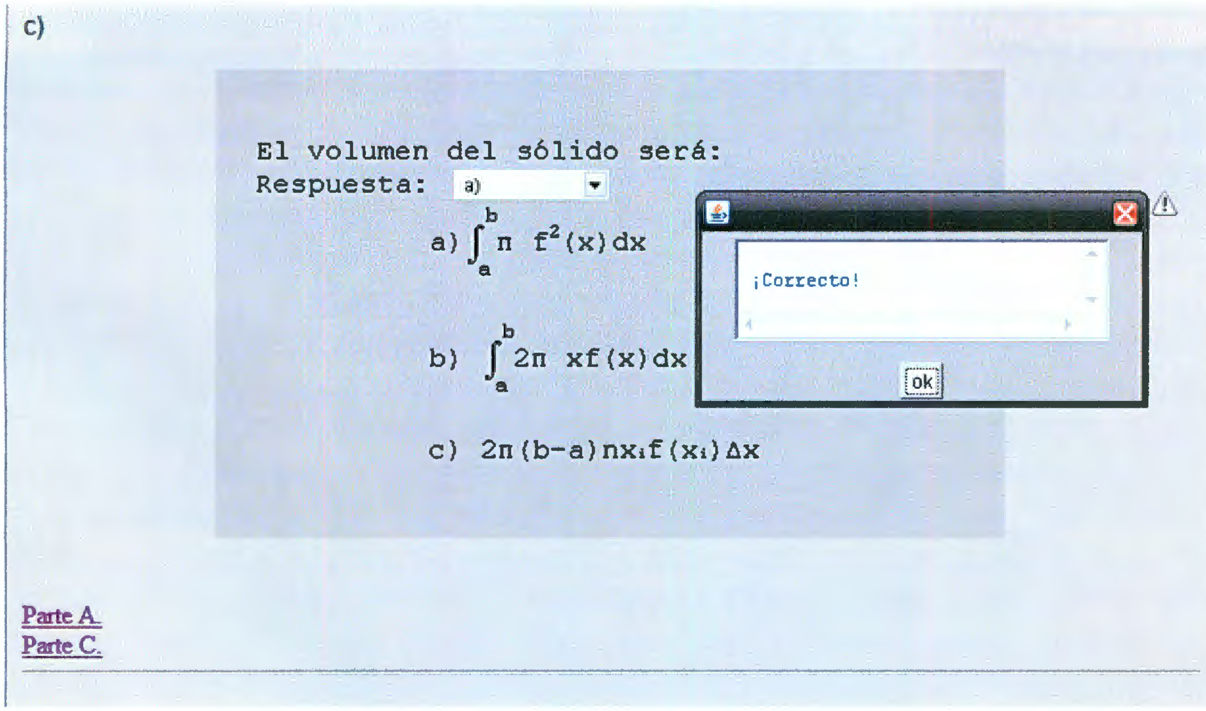
Ahora, sumando los volúmenes de estos discos, se obtiene una aproximación para el volumen total, es decir, $V \approx \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*)\right]^2 \Delta x$, por lo tanto el alumno podrá elegir la opción "a" en el applet.



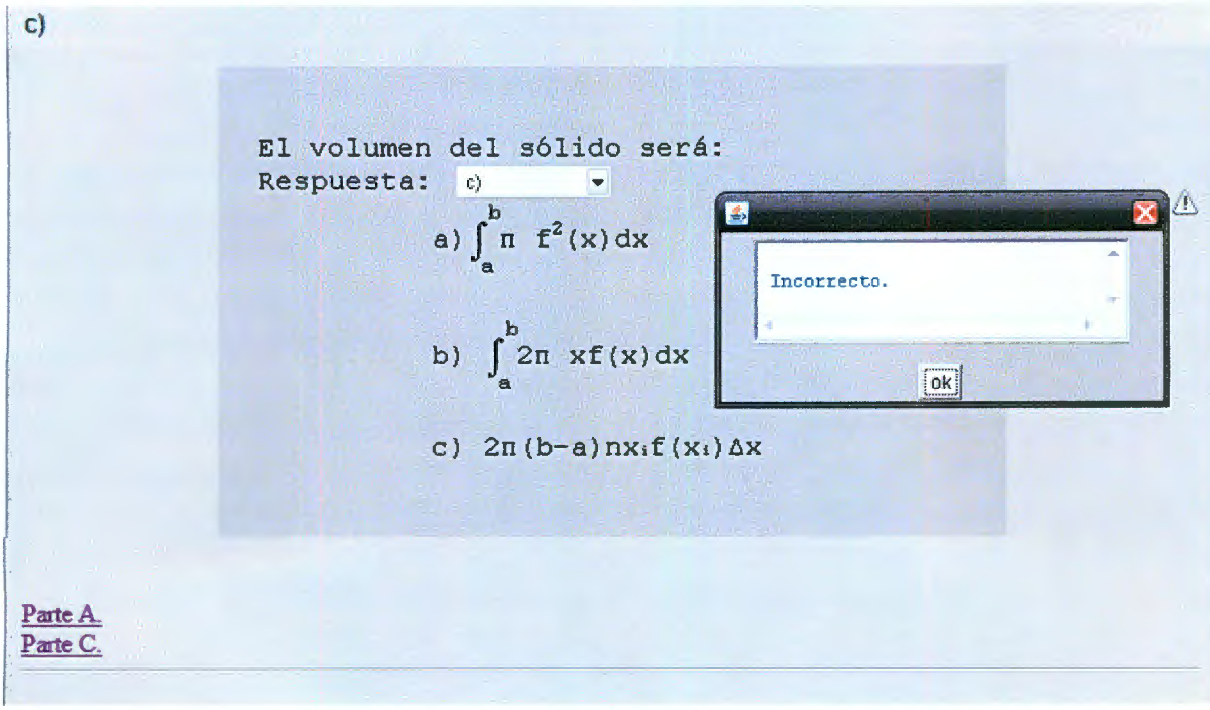
De lo contrario, aparecerá "Incorrecto", hasta elegir la opción correcta.



En el inciso (c) se pide que el alumno seleccione el volumen del sólido. Utilizando el applet el alumno podría intuir que esta aproximación parece mejorar conforme $n \to \infty$. Por lo tanto debe definir el volumen como el limite de estas sumas, cuando $n \to \infty$. Pero él ya sabe que el límite de las sumas de Riemann es igual a la integral definida, por lo que $V = \pi \int_a^b \left[f(x_i^*)\right]^2 dx$, entonces debe elegir nuevamente la opción "a" en el applet.



De lo contrario, aparecerá "Incorrecto", hasta elegir la opción correcta.



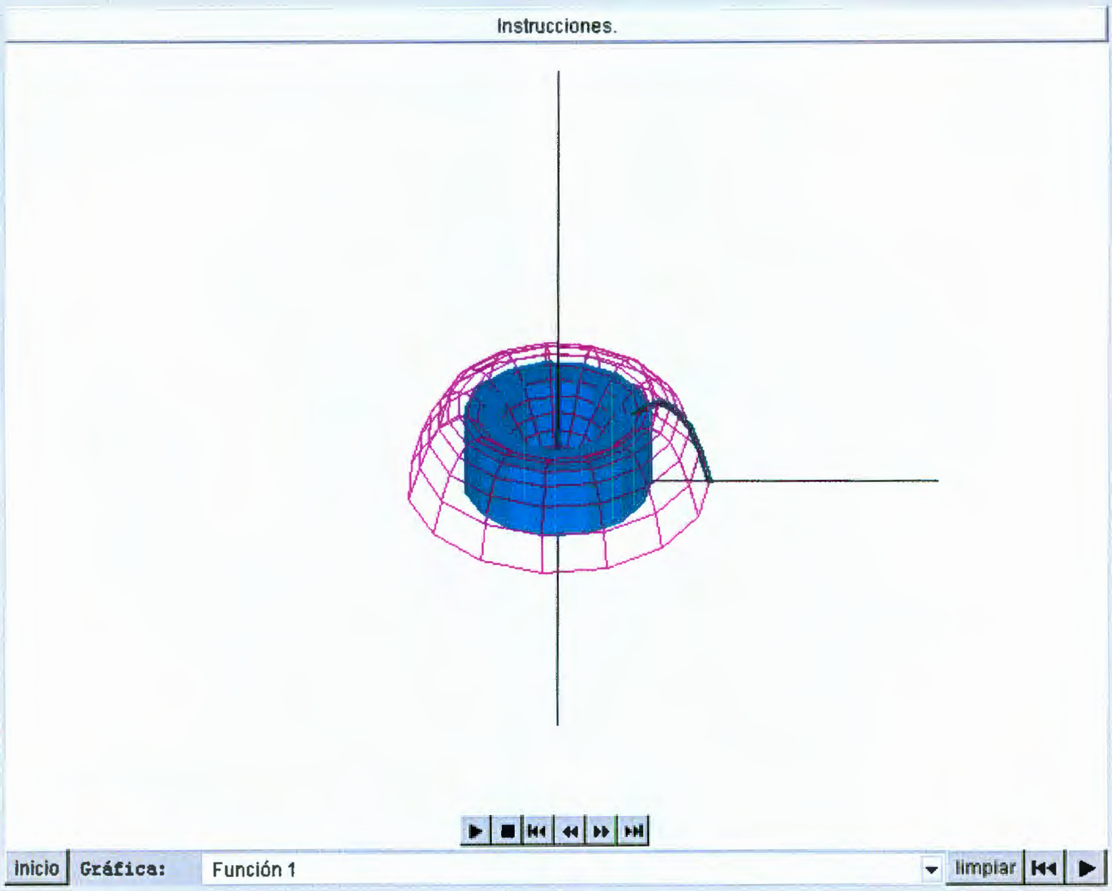
Con este trabajo hecho por el alumno se espera que el alumno aplique lo que ya sabe acerca de límites de sumas de Riemann para calcular el volumen de un sólido de revolución por el método de discos.

Ahora para aprender el método de casquetes cilíndricos podrá jugar con el siguiente applet que es la Parte C. Se le pide al alumno que opere el applet para proponer una aproximación al volumen de un sólido de revolución utilizando casquetes cilíndricos. Primero podrá elegir la función con la cual desea trabajar, tiene un menú de 3 opciones, después podrá reproducir el applet, para que se forme el sólido.

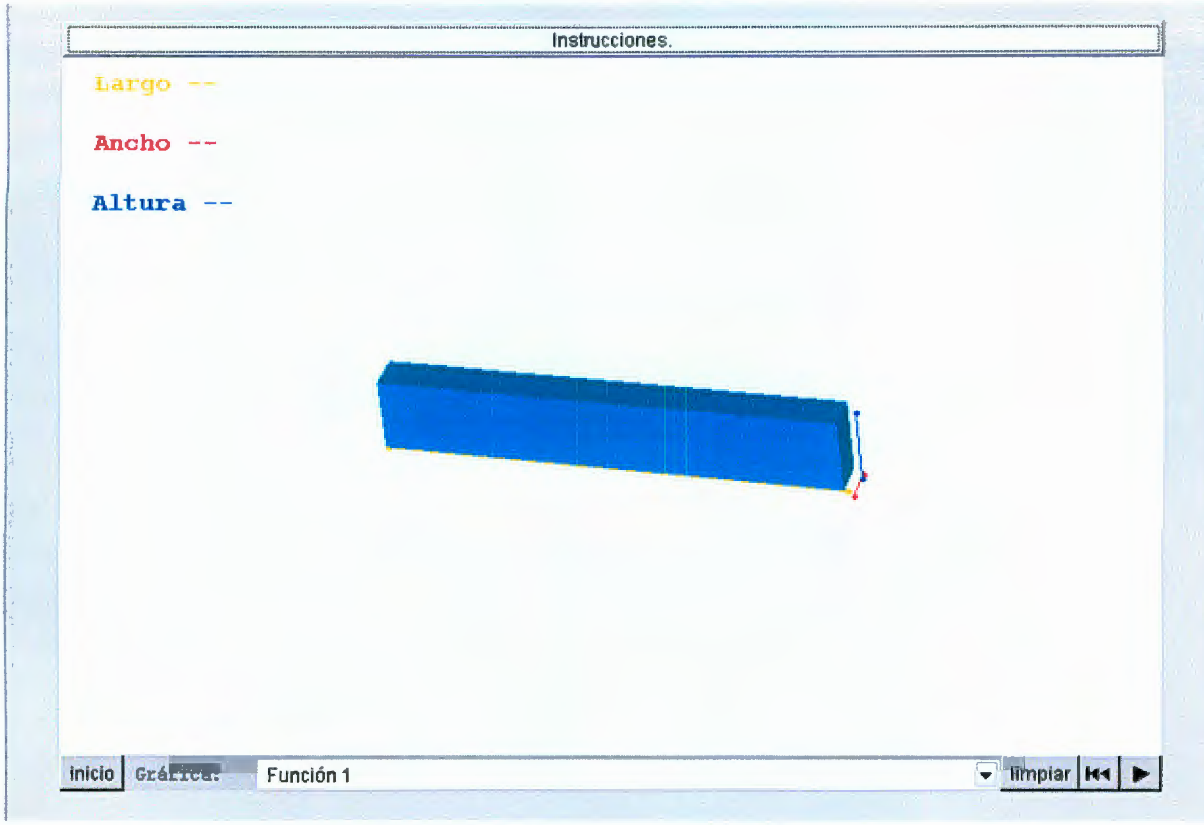
Volumen de sólidos de revolución.

Parte C.

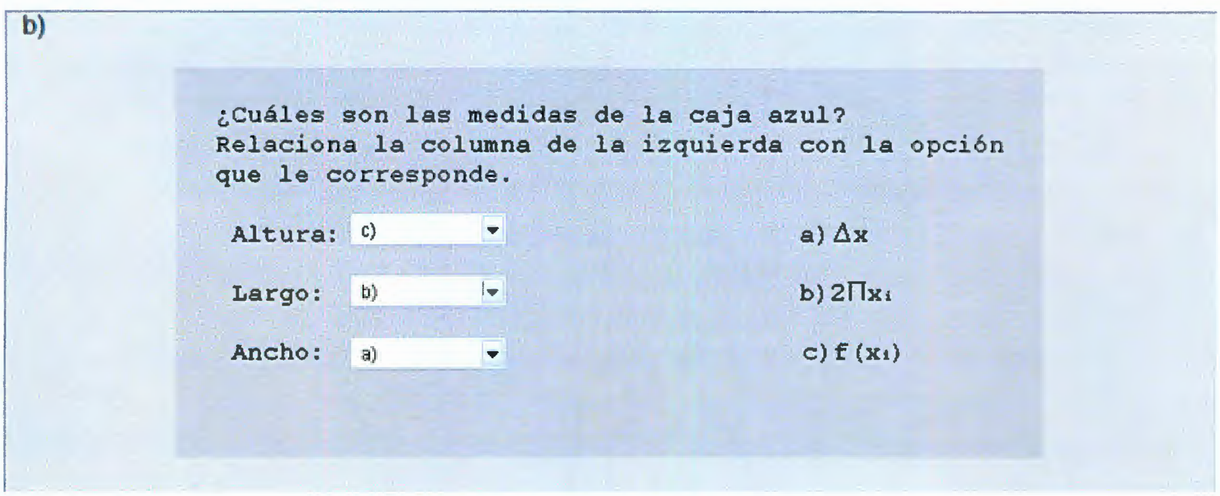
a) Opera el siguiente applet para proponer una aproximación al volumen de un sólido de revolución utilizando casquetes cilíndricos.



Al abrir el cilindro se produce un rectángulo, como lo podemos apreciar a continuación:



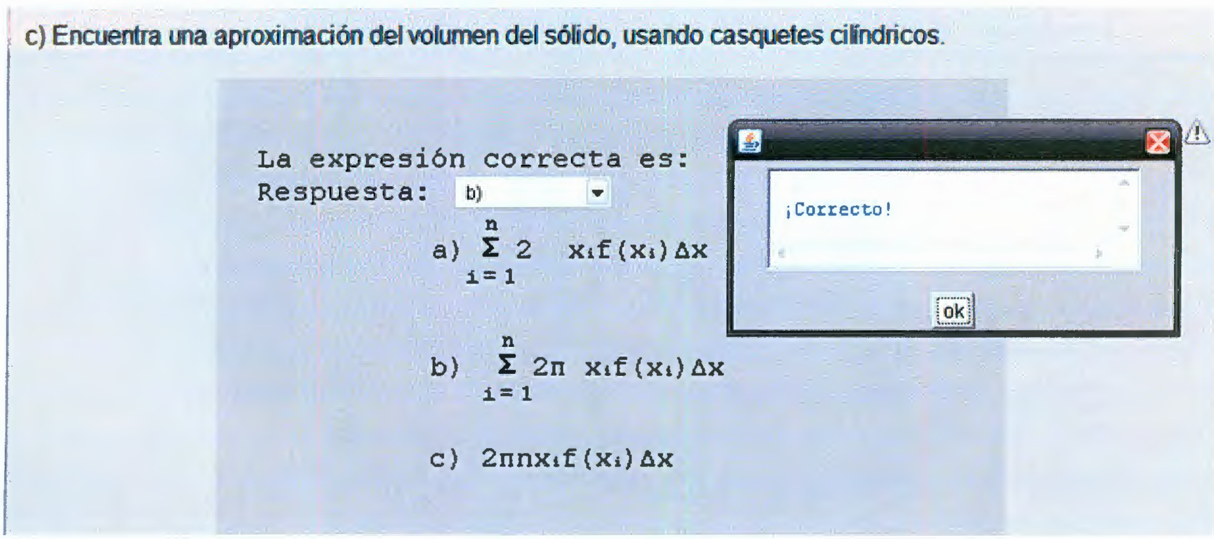
En el inciso b) se le pide al alumno que diga las medidas de la caja azul, relacionando la columna de la derecha con la opción que le corresponde, aquí el alumno tuvo que haber prestado mucha atención al inicio del applet que es cuando se va formando el rectángulo y se van apreciando sus



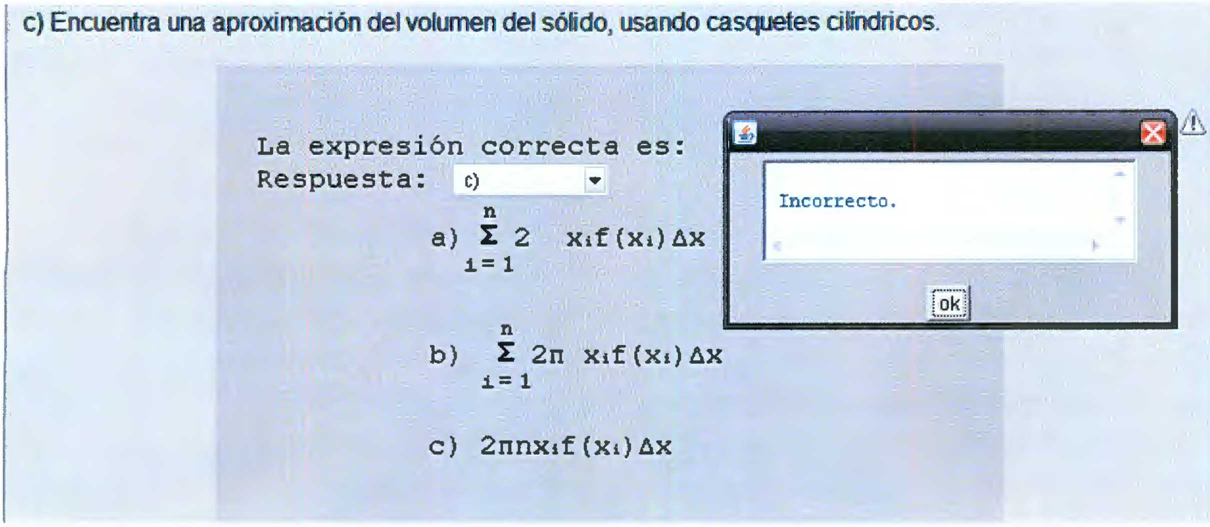
medidas, así, podrá elegir para la altura $f(x_i)$, para el largo $2\pi x_i$ y para el ancho Δx.

Si elige las tres opciones correctas aparecerá "Correcto", de lo contrario, aparecerá "Incorrecto", hasta elegir las opciones adecuadas.

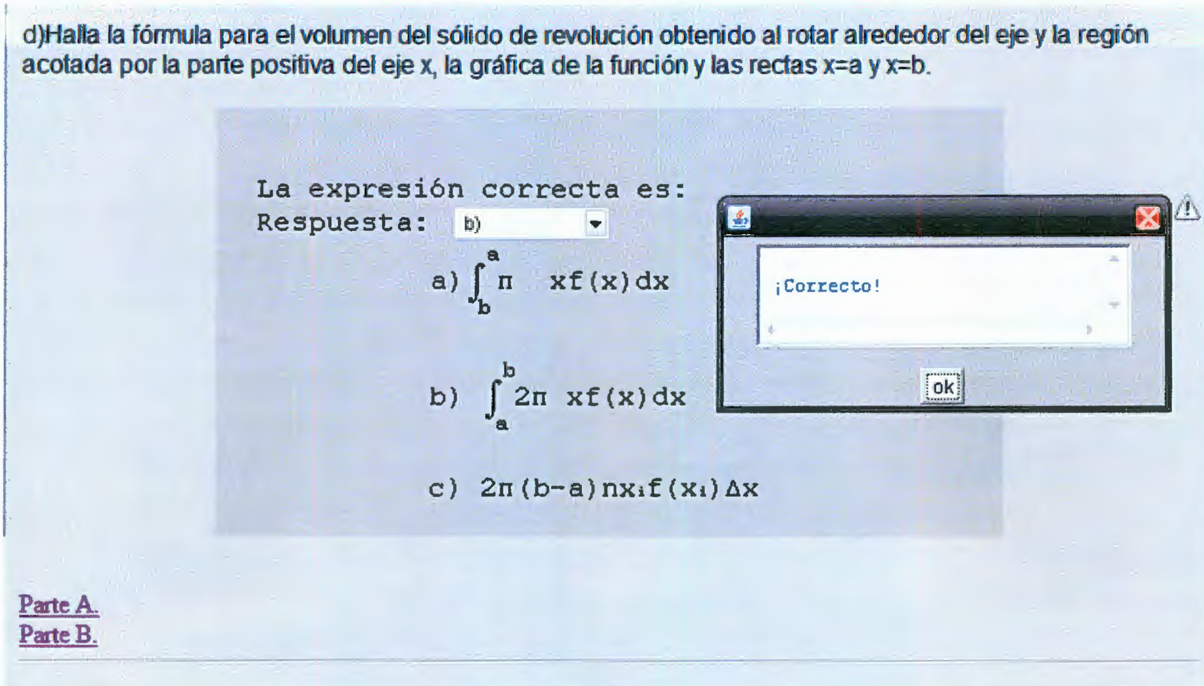
Ahora se le pide al alumno que encuentre una aproximación del volumen del sólido, usando casquetes cilíndricos. Del inciso anterior se sabe que el rectángulo resultante tiene una altura $f(x_i)$, largo $2\pi x_i$ y ancho Δx, de modo que el volumen del casquete es $2\pi x_i f(x_i)\Delta x$, al hacer esto para todos los subintervalos y sumando los resultados, el alumno obtendrá una aproximación para el volumen del sólido $V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x$, por lo tanto podrá elegir la opción "b".



De lo contrario, aparecerá "Incorrecto", hasta elegir la opción correcta.



Para concluir esta parte se le pide al alumno hallar la fórmula para el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la región acotada por la parte positiva del eje x, la gráfica de la función y las recta x=a y x=b. Del inciso anterior se sabe que $V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x$. Pero podrá darse cuenta que esta aproximación mejora a medida que n crece, por lo tanto $V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x = \int_a^b 2\pi x_i f(x_i)dx$, así, podrá elegir la opción "b", de ser así ha podido comprendido el método de casquetes cilíndricos.



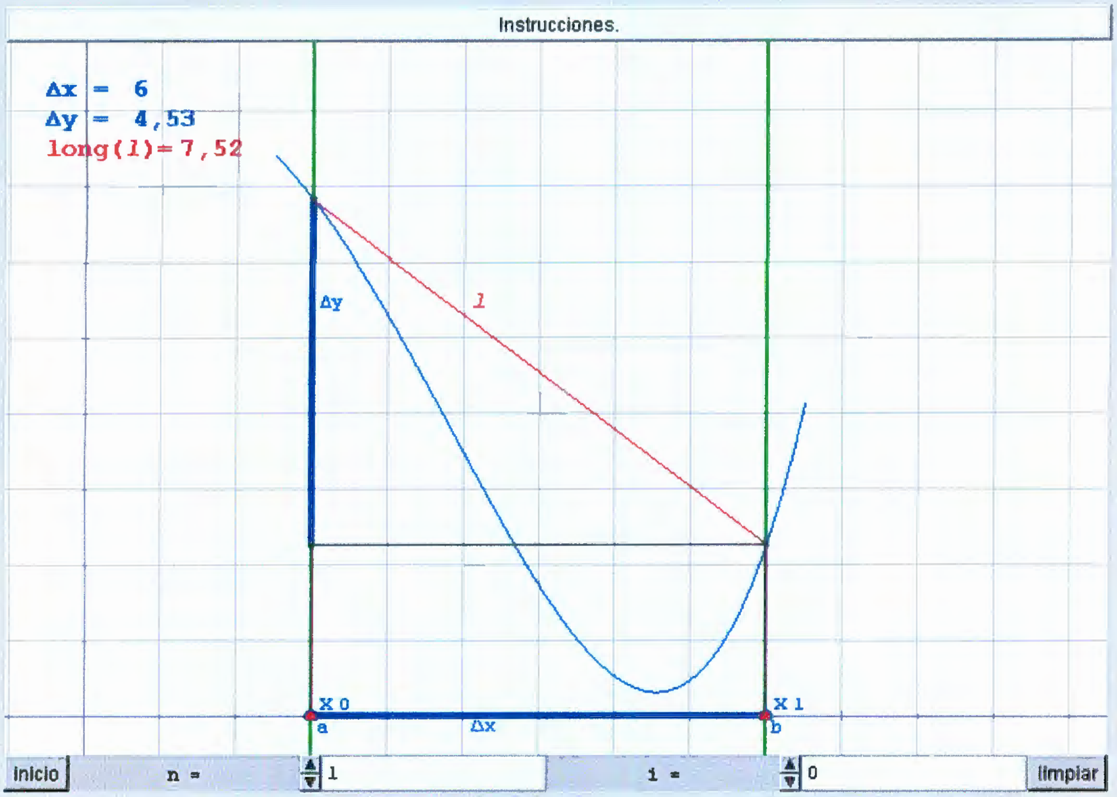
Así, el alumno da por finalizada la práctica, pudiendo apreciar una de las aplicaciones del Teorema Fundamental del Cálculo y logrando con ello un aprendizaje significativo del tema de Sólidos de Revolución, donde pudo aprender a encontrar el volumen de dichos sólidos por sus dos métodos: el método de discos y el de casquetes cilíndricos.

Por último, veamos otra aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo, que es Longitud de Arco. En primer lugar, veamos como aparecerán los applets y después vemos su desarrollo. Como ya hicimos mención en los applets anteriores, el alumno puede elegir la forma que desee para resolver las prácticas, nosotros proponemos la siguiente manera:

Longitud de arco.

Propósito: Mostrar que la longitud de arco se calcula a través de una integral definida.

a)Utiliza el applet siguiente para aproximar la longitud de arco de la curva entre (a , f(a)) y (b , f(b)) usando sumas de Riemann para n = 2, 3, ... , 9, 10.



Para n=1, una aproximación a la curva es la longitud del segmento que inicia en (a , f(a)) y termina en (b , f (b)). Dados los incrementos en x y en y, entonces la longitud del segmento es L y por el teorema de Pitágoras se tiene $L = \sqrt[2]{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

b) ¿Cuál es la notación que aproxima la longitud de arco usando sumas de Riemann?

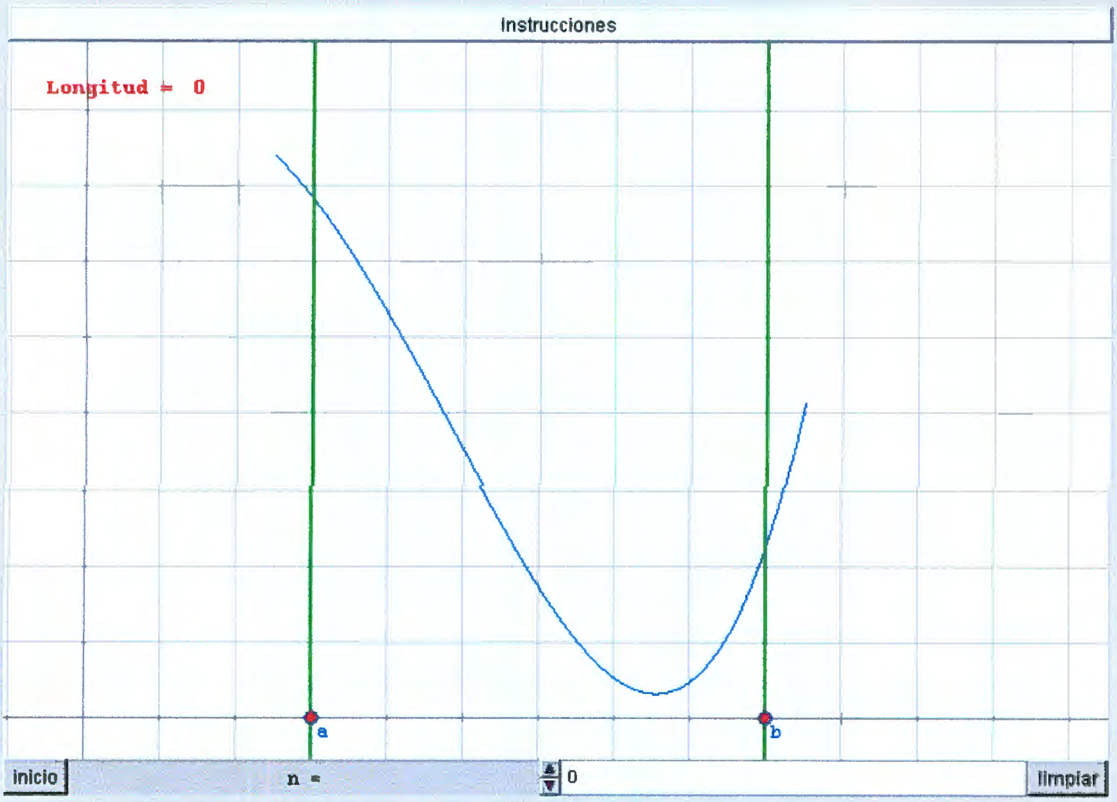
Elige el inciso correcto:
Aproximación de arco es

a) $\Sigma \Delta x^2 + \Delta y^2$

b) $n\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y}$

c) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

c) Con el applet siguiente aproxima para n>10 la longitud de arco.



d) ¿Cuál es la notación que indica la longitud de arco?

Sabemos que $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ por lo que la longitud de cada segmento de la partición es

$L = \sqrt{\Delta x^2 + (f'(x)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\Delta x$ y una aproximación a la longitud de arco es $\sum \sqrt{1 + f'(x)^2}\Delta x$ y el límite de esta suma será la longitud de arco.

Veamos pues, el desarrollo de dichos applets.

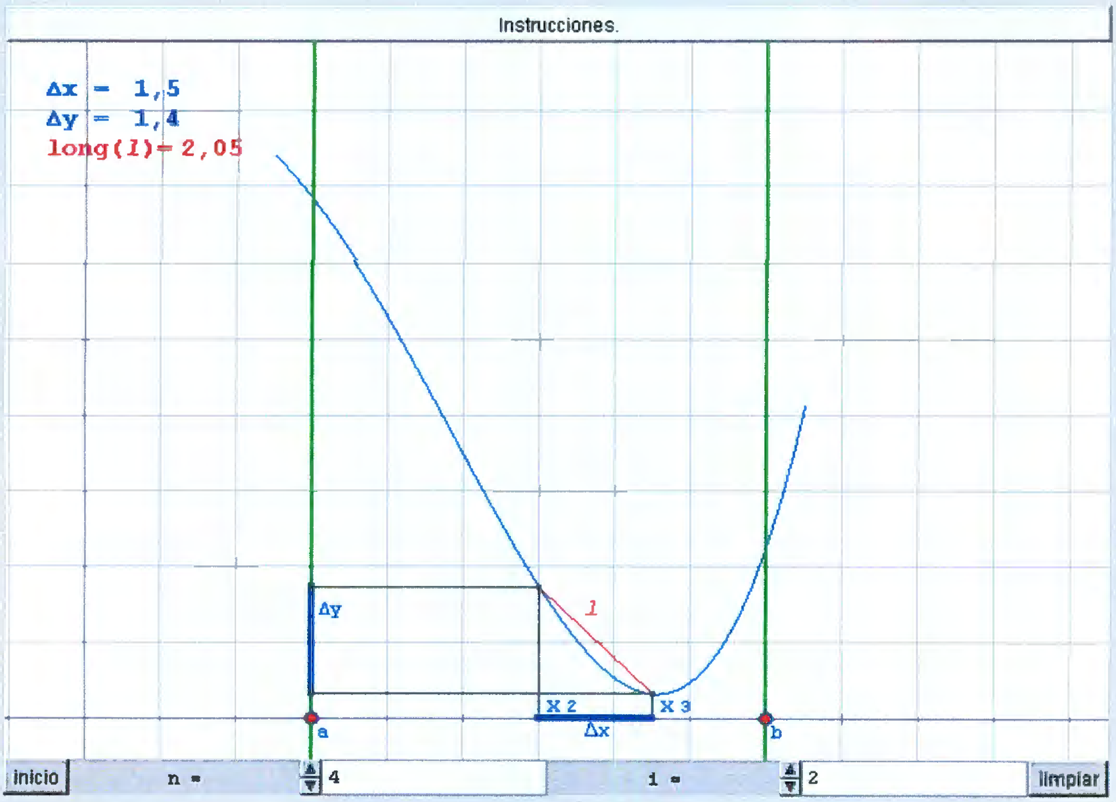
En el applet de Longitud de Arco el propósito es mostrar que la longitud de arco se calcula a través de una integral definida. Primero se le pide al alumno utilizar el applet siguiente para aproximar la longitud de arco de la curva entre (a , f(a)) y (b , f(b)) usando sumas de Riemann para n = 2, 3, … , 9, 10. Primero el alumno lo podrá hacer para n=1, pero una aproximación a la curva es la longitud del segmento que inicia en (a , f(a)) y termina en (b , f(b)); dados los incrementos en x y en y, entonces la longitud del segmento es L y por el teorema de Pitágoras se tiene $L=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. En este caso $\Delta x=6$ y $\Delta y=4.53$ por lo tanto $L=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{6^2+4.53^2}=\sqrt{56.5209}=7.518$, para n=2 se tiene lo siguiente: cuando i=0 $\Delta x=3$ y $\Delta y=5.08$ por lo tanto $L=\sqrt{3^2+5.08^2}=\sqrt{34.8064}=5.89$, cuando i=1 $\Delta x=3$ y $\Delta y=0.54$ por lo tanto $L=\sqrt{3^2+0.54^2}=\sqrt{9.2916}=3.04$, ahora se tienen que sumar las longitudes que encontramos, es decir, 5.89+3.04=8.93, prosiguiendo de la misma manera el alumno podrá hacerlo para n=3 encontrando que la longitud resultante es 10.07, para n=4 podrá encontrar que es 10.39, análogamente para n=5,6,7,8,9,10. Pudiendo encontrar que para n=10 se tiene 10.56, por lo tanto la longitud del arco de la curva para n=10 es 10.56.

N	L
1	7.518
2	5.89
3	10.07
4	10.39
10	10.56

Longitud de arco.

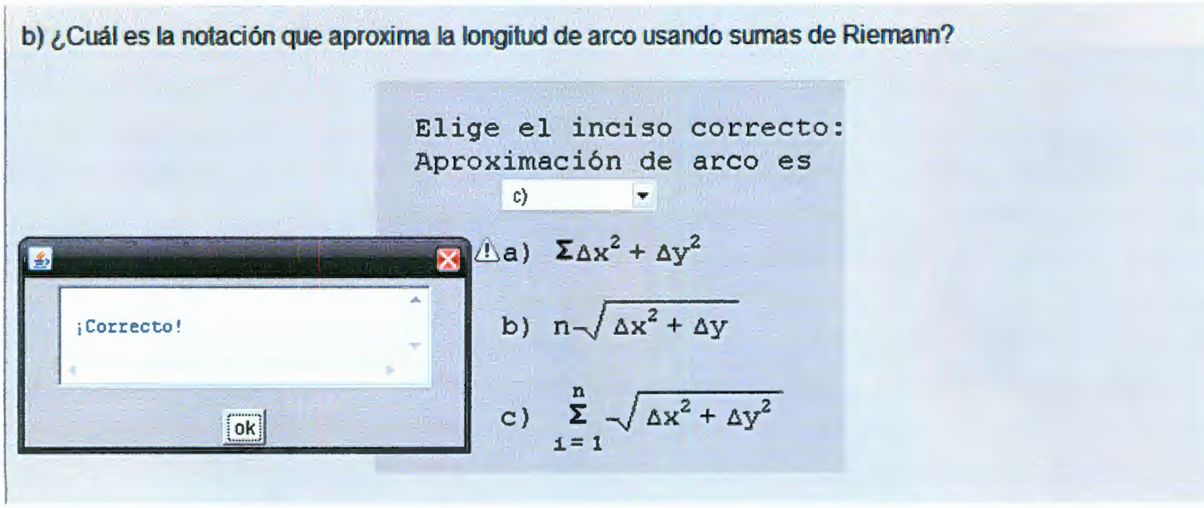
Propósito: Mostrar que la longitud de arco se calcula a través de una integral definida.

a)Utiliza el applet siguiente para aproximar la longitud de arco de la curva entre (a , f(a)) y (b , f(b)) usando sumas de Riemann para n = 2, 3, ... , 9, 10.

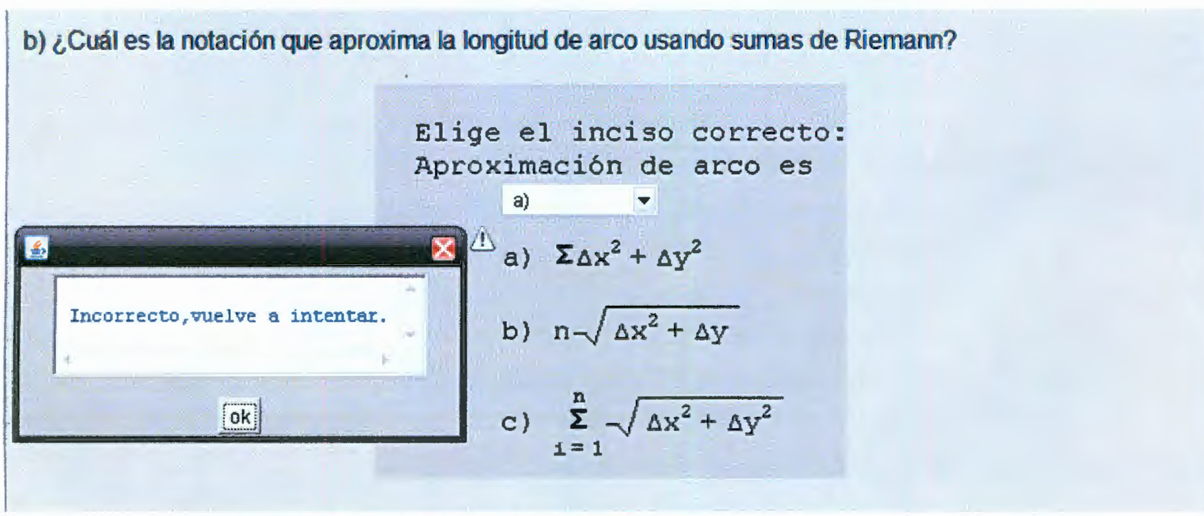


Para n=1, una aproximación a la curva es la longitud del segmento que inicia en (a , f(a)) y termina en (b , f (b)). Dados los incrementos en x y en y, entonces la longitud del segmento es L y por el teorema de Pitágoras se tiene $L = \sqrt[2]{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

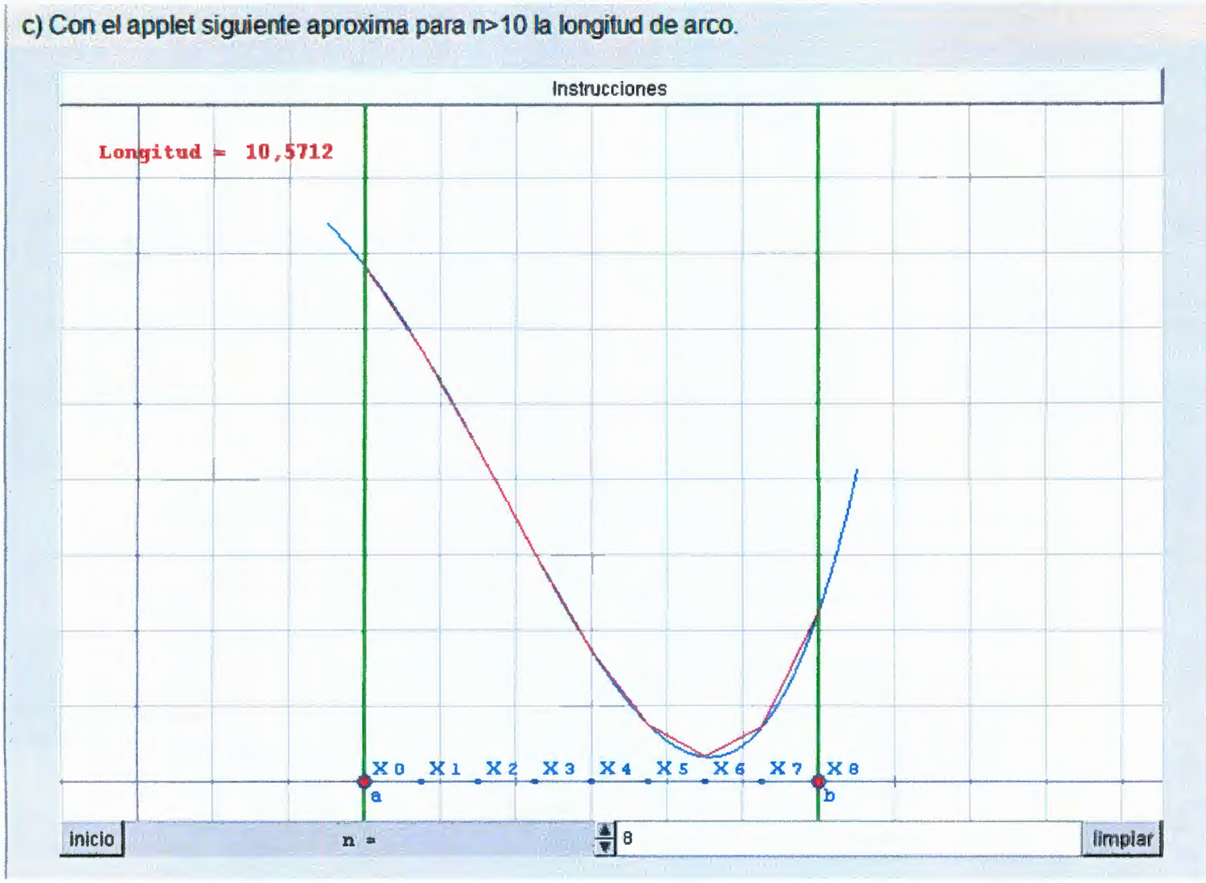
En el inciso b) se le pregunta al alumno ¿Cuál es la notación que aproxima la longitud de arco usando sumas de Riemann?, pero el alumno podrá recordar que la longitud de cada segmento de curva es $L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, por lo tanto al sumar todos los segmentos de la curva se tendría $L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, entonces podrá elegir la opción c).



De lo contrario, aparecerá “Incorrecto, vuelve a intentar”, hasta elegir la opción correcta.



En el siguiente inciso se le pide al alumno que juegue con el applet que se le presenta para aproximar la longitud de arco cuando n>10. Las variables a y b determinan el intervalo en el cual se estimará la longitud del arco correspondiente, su valor puede variar al mover los puntos con el ratón. La variable n determina el número de divisiones que tendrá el intervalo [a,b]. Aquí podrá darse cuenta que cuando n es más grande, se da una mejor aproximación a la longitud.



En el último inciso se le pregunta al alumno ¿Cuál es la notación que indica la longitud de arco? Pero podrá recordar que $f'(x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, por lo que la longitud de cada segmento de la partición es $L=\sqrt{\Delta x^2+(f'(x)\Delta x)^2}=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\Delta x$ y una aproximación a la longitud de arco es $\sum\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\Delta x$ y el límite de esta suma será la longitud de arco. Esto es una suma de Riemann para la función $\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\Delta x$, por lo tanto $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\Delta x$. En consecuencia, el alumno ha sido guiado para comprender como se obtiene la Longitud de Arco.

d) ¿Cuál es la notación que indica la longitud de arco?

Sabemos que $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ por lo que la longitud de cada segmento de la partición es $L = \sqrt{\Delta x^2 + (f'(x)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\Delta x$ y una aproximación a la longitud de arco es $\sum \sqrt{1 + f'(x)^2}\Delta x$ y el límite de esta suma será la longitud de arco.

Por lo tanto, al término de esta práctica, el alumno cumplió con el propósito que se le planteó, pues pudo aprender como calcular la longitud de un arco y además vio que dicho tema es una más de las aplicaciones de la integral definida, en otras palabras, del Teorema Fundamental del Cálculo, logrando una vez más, un aprendizaje significativo de esta aplicación.

Cabe recordar que al igual que en los applets del Primer y Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el docente estará presente a lo largo de toda la práctica tanto de Sólidos de Revolución como de Longitud de Arco como apoyo para los alumnos en la realización de estas prácticas, pues así, el docente logrará que los alumnos se motiven, comprendan, participen y apliquen lo que están aprendiendo, consiguiendo que sus alumnos sean constructores de sus propios conocimientos.

CAPÍTULO IV
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1 CONCLUSIONES

La enseñanza- aprendizaje de las matemáticas es un tópico de suma importancia en la educación, de aquí el interés que se tiene por el aprovechamiento de la misma.

Al realizar esta investigación nos dimos cuenta de la problemática que existe en la enseñanza de las ciencias y la gran variedad de enfoques que la abordan como la enseñanza tradicional o el enfoque constructivista, entre otros.

En el caso específico del Cálculo Diferencial e Integral, creemos que una de las pautas para hacer una mejora en la educación, es propiciar aprendizajes significativos, donde el alumno construya nuevos conocimientos a partir de los conocimientos que ha adquirido anteriormente, logrando así, aprendizajes más duraderos.

Dichos aprendizajes se podrán lograr si están en el alumno presentes las cuatro condiciones para que se dé el aprendizaje significativo: motivación, comprensión, participación y aplicación.

De los múltiples recursos que existen, proponemos utilizar la tecnología como una forma de ayudar y apoyar a los alumnos para que se den dichas condiciones, a través del desarrollo de ***applets interactivos*** que servirán como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde el estudiante podrá explorar, formular y probar la validez de sus hipótesis y aprender a partir del análisis de sus propios errores.

Por tanto, consideramos que el uso de applets como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo, no sólo propiciará la obtención de mejores resultados en la enseñanza de las matemáticas, sino también una mejora en los índices de aprobación de esta asignatura y por consecuencia una disminución en el índice de deserción, permitiendo así, que los alumnos eviten la mecanización de procedimientos en la resolución de problemas y se conviertan en alumnos más analíticos, críticos y reflexivos, capaces de construir y aplicar sus propios conocimientos.

4.2 RECOMENDACIONES

- Utilizar los applets como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje no sólo en Cálculo, sino también en otras asignaturas.
- Que los docentes amplíen su panorama para utilizar nuevas herramientas didácticas, con el fin de buscar una mejora en la educación.
- Que los docentes tengan pleno conocimiento de la teoría del aprendizaje significativo, para así, lograr dicho aprendizaje en sus alumnos, con el fin de obtener un mayor índice de aprobación en la asignatura que imparta.
- Que los docentes, a su vez, propongan a los alumnos situaciones problemáticas de su interés, buscando desarrollar en el alumno el gusto por la investigación.
- Que los docentes hagan uso de sistemas de cómputo, ya que existen paquetes muy amplios y concisos en diversos temas.
- Que los docentes desarrollen nuevos applets o hagan uso de los ya existentes, con el fin de lograr en sus alumnos aprendizajes más duraderos.
- Utilizar applets para que el alumno pueda interactuar y construir sus propios conocimientos.
- Que los alumnos aprovechen las herramientas didácticas que el docente les proporciona, para construir sus propios conocimientos y aprendizajes significativos.

ANEXOS

Anexamos en esta parte un CD con todos los applets expuestos a lo largo de la tesis, para que el lector pueda hacer uso de ellos.

A continuación presentamos el procedimiento que tendrá que realizar el usuario para poder utilizar los applets.