

# Análisis Wavelet de Señales

Tesis presentada para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

por

Elizabeth Araujo Paz

Facultad de Ingeniería

Universidad Autónoma de Querétaro

Enero, 2010

# Índice general

# Índice de figuras

### **Agradecimientos**

Quiero expresar mis sinceros agradecimientos a mi familia y a los maestros de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UAQ, particularmente al Dr. Eduardo Castaño.

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo de tesis se revisa la teoría básica y algunas aplicaciones de las denominadas wavelets en inglés u ondeletas en español. Las ondeletas son una familia de funciones cuyas características esenciales son estudiadas como caso particular dentro de la teoría del análisis funcional. Vistas como una herramienta matemática, se utilizan para analizar un conjunto de datos, conjunto que por sus características hace que se le denomine en general como una señal.

El capítulo 2 es un esbozo histórico que se presenta a manera de introducción a la teoría wavelet, permitiéndonos conocer a los principales iniciadores de esta herramienta de las matemáticas, así como sus respectivas contribuciones.

En el capítulo 3 se encuentran conceptos básicos que son necesarios como requisito indispensable para un mejor entendimiento de la teoría wavelet.

En el capítulo 4 se presenta la teoría elemental de wavelets, empezando por la definición matemática, la presentación de algunas wavelets de diferentes familias, una de-

tallada explicación del análisis de señales temporales así como imágenes, y conceptos estadísticos como son la teoría de wavelet shrinkage, así como importantes aspectos teóricos de la estimación de densidad.

El capítulo 5 presenta algunas aplicaciones, primero tenemos un análisis de imágenes digitales correspondientes a muestras extrudidas de concentrado de proteína de suero con almidón de maíz normal realizadas en la facultad de Química de la UAQ, y finalmente un análisis de señales de datos de influenza registrados en nueve provincias de Canadá durante el periodo de 1994-2006.

## Capítulo 2

# Wavelets: ondulaciones pequeñas

Las wavelets han tenido una historia científica inusual, marcada por muchos descubrimientos y redescubrimientos independientes. El progreso más rápido se ha realizado desde principios de la década de 1980, cuando surgió una teoría matemática de éstas; una forma de pensar en las wavelets es comparándolas con la manera en que observamos las cosas, a medida que nos acercamos a un objeto en escalas cada vez más pequeñas podemos encontrar detalles que a primera vista no hubiéramos percibido.

Aunque las wavelets, como objeto de investigación organizada tienen poco tiempo, se derivan de una constelación de conceptos desarrollados durante un período de casi dos siglos, siendo repetidamente redescubiertas por científicos que querían resolver problemas técnicos de diversas disciplinas.

Para entender un poco el origen de esta herramienta pensemos en la diferencia entre dos tipos de sonidos: un diapasón y la voz humana. Al golpear un diapasón se obtiene un tono puro por largo tiempo. En la teoría matemática, se dice que dicho tono tiene

una frecuencia *localizada*, es decir, que está formado por un solo tono sin armónicos de frecuencias superiores. Una palabra hablada, en contraste, sólo dura un segundo y, por lo tanto, está *localizada* en el tiempo. Su frecuencia no está localizada porque la palabra no es un solo tono, sino una combinación de muchas frecuencias distintas.

Los gráficos de las ondas sonoras producidas por el diapasón y por la voz humana resaltan la diferencia, como se ilustra en la Fig. 2.1.

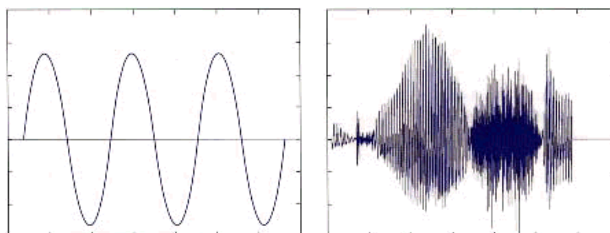


Fig 2.1 Ondas sonoras producidas por un diapasn y por la voz humana respectivamente.

Las vibraciones del diapasón trazan una onda sinusoidal que en teoría, podría repetirse para siempre. En contraste, el gráfico de la palabra inglesa *greasy* contiene una serie de picos agudos, sin oscilaciones.

Jean Baptiste Joseph Fourier afirmó en 1807 que cualquier forma de onda repetitiva (o función periódica), como la onda sonora de un diapasón, se puede expresar como una suma infinita de ondas senoidales y cosenoidales.

Un ejemplo familiar de la teoría de Fourier se da en la música, la onda de frecuencia más baja se denomina frecuencia fundamental de la nota, y las de mayor frecuencia se denominan armónicos. Por ejemplo, la nota La, en un violín o una flauta, tiene una frecuencia



fundamental de 440 ciclos por segundo y armónicos con frecuencias de 880, 1320 y así sucesivamente. Sin embargo, aunque un violín y una flauta toquen la misma nota, el sonido será distinto porque sus armónicos tienen distinta amplitud.

Posteriormente, se ampliaron las ideas de Fourier a funciones no periódicas que cambian en el tiempo ya que la mayoría de las ondas del mundo real son de este tipo.

En las imágenes también es importante la distinción entre patrones repetitivos y no repetitivos. Para representar patrones repetitivos de una imagen se pueden utilizar ondas periódicas formadas por una serie de armónicos. Las características no repetitivas se pueden abordar con la transformada de Fourier que durante el siglo XIX resolvió muchos problemas de física y de ingeniería, lo que llevó a científicos e ingenieros a pensar en ella como la forma preferida de analizar fenómenos de todo tipo. Sin embargo, durante el siglo XX, matemáticos, físicos e ingenieros observaron un inconveniente en ésta: tenía problemas para reproducir señales fugaces o señales con cambios abruptos porque no toma en cuenta el tiempo en la transformación.

Aunque cada científico intentaba resolver los problemas específicos de su respectivo campo, todos comenzaron a llegar a la misma conclusión: quizás al dividir una señal en componentes que no fueran ondas senoidales puras sería posible condensar la información tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Esta es la idea que finalmente se denominaría wavelet.

El primer participante en la carrera de las wavelets fue un matemático húngaro llamado Alfred Haar, que introdujo en 1909 las funciones que actualmente se denominan *wavelets Haar*. Estas funciones consisten simplemente en un breve impulso positivo seguido

de un breve impulso negativo. Aunque los impulsos breves de las wavelets Haar son excelentes para la enseñanza de la teoría de las wavelets, no resultan de tanta utilidad en la mayoría de aplicaciones, ya que producen líneas irregulares con picos en lugar de curvas suaves.

En la década de 1930, los matemáticos ingleses Littlewood y Paley desarrollaron un método de agrupación de *frecuencias por octavas*, creando de esta forma una señal con una frecuencia bien localizada (su espectro se encuentra dentro de una octava) y también relativamente bien localizada en el tiempo.

En 1946, Dennis Gabor, un físico británico-húngaro (inventor de la holografía) presentó la transformada de Gabor, análoga a la transformada de Fourier, que separa una onda en paquetes de tiempo-frecuencia o estados coherentes que tienen la mayor localización simultánea posible tanto en tiempo como en frecuencia.

En 1960, el matemático argentino Alberto Calderón descubrió una fórmula matemática que sirve para recuperar una señal a partir de la expansión de sus wavelets.

Y en las décadas de 1970 y 1980, las comunidades de procesamiento de señales y procesamiento de imágenes presentaron sus propias versiones del análisis de wavelets con nombres tales como *codificación de sub-bandas*, *filtros de duplicación de cuadratura* y *algoritmo piramidal*.

Aunque no eran exactamente idénticas, todas estas técnicas tenían características similares: descomponían o transformaban señales en partes que se podían localizar en cualquier intervalo de tiempo y que también se podían dilatar o contraer para analizar la señal a distintas escalas de resolución. Estos precursores de las wavelets tenían algo más en

común: nadie que se encontrara al margen de comunidades especializadas individuales sabía de ellos.

Otra rama de la ciencia que se vio beneficiada con esta herramienta fue la geología. Los geólogos del petróleo localizan normalmente los depósitos subterráneos de petróleo mediante ruidos intensos. Como las ondas sonoras viajan a través de distintos materiales a velocidades distintas, los geólogos podían deducir el tipo de material que se encontraba bajo la superficie enviando ondas sísmicas a la tierra y midiendo la rapidez con la que rebotaban. Si las ondas se propagaban especialmente rápido a través de una capa, podía tratarse de una bóveda salina que a su vez podía retener una capa de petróleo debajo de ella.

Los ingenieros resolvían este cálculo tradicionalmente a través del análisis de Fourier, desgraciadamente las señales sísmicas contienen una gran cantidad de señales transitorias que se traducen en cambios abruptos en la onda a medida que pasa de una capa de roca a otra. Estas señales transitorias contienen exactamente la información que buscan los geólogos, es decir, la localización de las capas de rocas, pero el análisis de Fourier dispersa esa información espacial.

En 1981, Morlet, un ingeniero petrolífero de Elf-Aquitanie, desarrolló su propia forma de analizar las señales sísmicas para crear componentes que estuvieran localizados en el espacio, a los que denominó *wavelets de forma constante*. Posteriormente, se conocerían como *wavelets de Morlet*. Independientemente de que los componentes se dilaten, compriman o desplacen en el tiempo, mantienen la misma forma.

Morlet consiguió separar una onda en las wavelets que la componían y, a continuación, volver a unirlas para formar la onda original, pero no estaba satisfecho con esta

demostración empírica, por lo que comenzó a preguntar a otros científicos si el método era matemáticamente coherente.

Obtuvo la respuesta que deseaba de Alex Grossmann, un físico del Centre de Physique Théorique de Marsella. Grossmann trabajó con Morlet durante un año para confirmar que las ondas se podían reconstruir a partir de sus descomposiciones en wavelets. De hecho, las transformaciones de wavelets resultaron funcionar mucho mejor que las transformaciones de Fourier, porque eran menos susceptibles a pequeños errores de cómputo. El artículo de Morlet y Grossmann fue el primero en que se utilizó la palabra *wavelet* y se publicó en 1984.

Yves Meyer, investigador de la École Normale Supérieure de Cachan, reconocido ampliamente como uno de los fundadores de la teoría de las wavelets, leyó el trabajo de Morlet y Grossmann en el otoño de ese mismo año y fue el primero en darse cuenta de la conexión entre las wavelets de Morlet y las wavelets matemáticas anteriores, como las del trabajo de Littlewood y Paley.

Meyer continuó su trabajo para descubrir un nuevo tipo de wavelet con la propiedad de ortogonalidad, que hacía más fácil el trabajo y manipulación de la transformada wavelet. Y lo que es quizá aún más importante, se convirtió en el nexo de unión de la naciente comunidad dedicada a las wavelets.

En 1986, Stéphane Mallat, un antiguo alumno de Meyer que estaba haciendo un doctorado en visión informática, vinculó la teoría de wavelets a la literatura existente sobre codificación de sub-bandas y filtros de duplicación de cuadratura, que son las versiones de las wavelets de la comunidad de procesamiento de imágenes. La idea del análisis de

multiresolución ya era familiar para los expertos en procesamiento de imágenes. Mallat, en colaboración con Meyer, demostró que las wavelets estaban implícitas en el proceso del análisis de multiresolución.

Gracias al trabajo de Mallat, las wavelets se convirtieron en algo mucho más sencillo. Ya se podía hacer un análisis de wavelets sin necesidad de conocer la fórmula de una wavelet madre. El proceso se redujo a sencillas operaciones de cálculo de promedio de grupos de píxeles en las que se toman sus diferencias una y otra vez. El lenguaje de las wavelets también resultaba más cómodo para los ingenieros eléctricos, que adoptaron términos familiares como *filtros*, *altas frecuencias* y *bajas frecuencias*.

Otra gran aportación de la revolución de las wavelets se produjo en 1987, cuando Ingrid Daubechies visitaba el Courant Institute de la Universidad de Nueva York y, posteriormente, durante su trabajo en los laboratorios AT&T Bell, ya que descubrió una clase completamente nueva de wavelets, que no sólo eran ortogonales sino que también se podían implementar mediante sencillas ideas de filtrado digital, de hecho, mediante filtros digitales cortos. Las nuevas wavelets eran casi tan sencillas de programar y utilizar como las wavelets de Haar, pero eran suaves, sin los saltos de las wavelets de Haar. Los procesadores de señales disponían ahora de una herramienta de ensueño: una manera de descomponer datos digitales en contribuciones de diversas escalas. Al combinar las ideas de Daubechies y Mallat, se disponía de una transformación ortogonal y sencilla que se podía calcular rápidamente en las modernas computadoras digitales.

Las wavelets de Daubechies tienen características sorprendentes, tales como conexiones estrechas con la teoría de fractales. Si su gráfico se observa aumentado, se pueden

apreciar curvas de líneas irregulares con picos, independientemente del grado de aumento. Esta complejidad de detalle significa que no hay una fórmula simple para estas wavelets, son asimétricas.

Las wavelets de Daubechies convierten la teoría en una herramienta práctica que cualquier científico con una formación matemática mínima puede programar y utilizar fácilmente.

Hasta ahora, la aplicación principal y excepcional de las wavelets ha sido la compresión de imágenes digitales. Son el eje central del nuevo estándar de imágenes digitales JPEG-2000 y del método WSQ (Wavelet Scalar Quantization) que utiliza el FBI para comprimir su base de datos de huellas dactilares.

En este contexto, se puede pensar en las wavelets como los componentes básicos de las imágenes.

Una vez establecidos firmemente los cimientos de la teoría de wavelets, el campo se desarrolló rápidamente en las últimas décadas.

Aunque el campo más conocido de las wavelets es la compresión de imágenes, muchos investigadores están interesados en utilizar las wavelets para reconocimiento de patrones, en las predicciones meteorológicas, para estudiar las ondas expansivas producidas por una explosión, etc.

Y, como ha mostrado la reciente avalancha de largometrajes de animación realizados por computadora, las wavelets también tienen un futuro prometedor en el cine. Como la transformación de wavelets es un proceso reversible, es tan fácil sintetizar una imagen (construirla a base de wavelets), como analizarla (descomponerla en las wavelets que la forman).

Esta idea está relacionada con un nuevo método de animación por computadora denominado superficies de subdivisión, que consiste básicamente en un análisis de multiresolución que se ejecuta a la inversa. Para dibujar un personaje animado, el animador sólo tiene que especificar la posición de algunos puntos clave, creando una versión de baja resolución del personaje. A continuación, la computadora puede realizar un análisis multiresolución inverso, haciendo que el personaje tenga el aspecto de una persona real y no de una figura trazada con círculos y líneas.

Mientras tanto, en la parte teórica, los matemáticos todavía siguen buscando mejores tipos de wavelets para imágenes bidimensionales y tridimensionales. Aunque los métodos de wavelets estándar seleccionan bien los bordes, lo hacen con un píxel a la vez, lo que no resulta eficaz para representar algo que puede ser una curva o una línea muy simple. David Donoho y Emmanuel Candès, de la Universidad de Stanford, han propuesto una nueva clase de wavelets denominadas *ridgelets*, que se podría traducir como *pequeñas protuberancias*, diseñadas específicamente para detectar discontinuidades a lo largo de una línea. Otros investigadores están estudiando las *multiwavelets*, que se pueden utilizar para codificar varias señales que viajen por una misma línea, tales como imágenes en color en las que los tres valores de color (rojo, verde y azul) se tengan que transmitir a la vez.

## Capítulo 3

# Teoría básica

En este capítulo se introducen algunos conceptos necesarios para la definición y derivación de las propiedades básicas de las wavelets. Trataremos acerca de los espacios de Hilbert, las series de Fourier, el principio de incertidumbre de Heisenberg, así como de la teoría fundamental del procesamiento de señales, todo ello de manera sintetizada, a través de definiciones y teoremas cuyas demostraciones se omiten por estar fuera de los propósitos de esta tesis.

### 3.1. Espacios de Hilbert

**Definición.-** Un espacio de Hilbert es un espacio de producto interior que es completo con respecto a la norma vectorial definida por el producto interior.

Un concepto importante es el de una base ortonormal que definimos como sigue:

**Definición.-** Una base ortonormal  $B$  de un espacio de Hilbert  $H$ , es una familia



$\{e_k\}_{k \in B}$  de  $H$  que satisface:

- 1.- Sus elementos están normalizados.
- 2.- Sus elementos son ortogonales.
- 3.- Su expansión lineal es densa en  $H$ .

Los espacios de Hilbert son generalizaciones naturales de los espacios euclidianos finitos  $R^n$ .

**Definición.-** Un subespacio  $V$  de un espacio de Hilbert  $H$  se dice que es cerrado en  $H$  si  $V$  contiene todos sus puntos límite, es decir si  $x_n \in V$  y  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces  $x \in V$ .

El complemento ortogonal  $V^\perp$  de un subconjunto  $V$  de  $H$  se define como todos los elementos de  $H$  que son ortogonales a cada elemento de  $V$ , es decir,  $x \in V^\perp$  sii  $\langle x, y \rangle = 0 \forall y \in V$ .

**Corolario.-** Si  $V$  es un subconjunto de un espacio de Hilbert  $H$ , entonces  $V^\perp$  es un subconjunto cerrado de  $H$ .

**Teorema.-** (Teorema de Proyección) Si  $V$  es un subconjunto cerrado de un espacio de Hilbert  $H$  y  $x \in H$ , entonces:

- i) Hay un único elemento  $\hat{x} \in V$  tal que  $\|x - \hat{x}\| = \inf \|x - y\|, y \in V$  y
- ii)  $\hat{x} \in V$  y  $\|x - \hat{x}\| = \inf \|x - y\|, y \in V$ , sii  $\hat{x} \in V$  y  $(x - \hat{x}) \in V^\perp$ .

El elemento  $\hat{x}$  es llamado proyección ortogonal de  $x$  en  $V$  y se denota por  $Proy_V x$ .

**Definición.-** Un conjunto  $\{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  de elementos de  $H$  es ortonormal si  $\langle e_s, e_t \rangle = \delta_{s,t}$   $s, t \in \Lambda$

**Teorema.-** Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable con base  $\{e_n, n \in N\}$ . Entonces:

i)  $\forall x \in H$ , dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N a_n e_n \right\| < \epsilon$$

ii)  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ ;

iii) (Identidad de Parseval)  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ ;

iv)  $\forall x, y \in H$ ,  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$ ;

v) Si  $x = 0$ , entonces  $\forall n : \langle x, e_n \rangle = 0$

**Definición.-** Un conjunto numerable  $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$  de elementos  $f_n$  de un espacio de Hilbert separable  $H$  constituye una base de Riesz sii  $\forall x \in H$  existe una única representación  $x = \sum_n a_n f_n$  y

$$A \sum_n |a_n|^2 \leq \left\| \sum_n a_n f_n \right\|^2 \leq B \sum_n |a_n|^2$$

Para algunas constantes  $A$  y  $B$ ,  $0 \leq A \leq B \leq \infty$ . La base Riesz se reduce a una base ortonormal cuando  $A = B = 1$ .

**Definición.-** Una serie  $\sum_{n \in S} a_n$  converge incondicionalmente si para todo mapeo  $\pi$  uno a uno y sobre,  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow S$ , la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)}$  converge.

**Identidad de Plancherel.-**

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle;$$

Si  $g = f$  uno obtiene la identidad de Plancherel:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|^2.$$

La función  $|\widehat{f}(\omega)|^2$  se llama *espectro de energía*. El área debajo de la curva  $|\widehat{f}(\omega)|^2$  es  $2\pi$  veces el contenido de energía de la señal,  $E = \int |f(x)|^2 dx$ .

**Desplazamiento.-**

$$F[f(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} \widehat{f}(\omega)$$

**Cambio de Escala.-**

$$F[f(ax)] = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

**Simetría.-**

$$F[F[f(x)]] = 2\pi f(-x)$$

**Convolución.-** La convolución de  $f$  y  $g$  se define como

$$f \bullet g(x) = \int f(x - t)g(t)dt.$$

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier  $F$  es que

$$F[f \bullet g(x)] = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

**Teorema de modulación.-** De la propiedad de simetría se sigue que

$$f(x)g(x) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \bullet G(\omega)$$

**Teorema de momentos.-**

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx = (i)^n \frac{d^n \widehat{f}(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=0}$$

### 3.2. Series de Fourier

Las series de Fourier juegan un papel muy importante en el desarrollo de la teoría Wavelet.

Una función periódica  $f(x) = f(x + T)$  puede ser expandida en una serie

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\frac{2\pi}{T}x},$$

donde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx.$$

El conjunto  $\{e_n = \frac{1}{T} e^{in\frac{2\pi}{T}x}\}$  es una base ortonormal completa para  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ . En términos de funciones trigonométricas, senos y cosenos, la serie de Fourier tiene la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

### 3.3. TFD y sus propiedades

**Definición.-** Sea  $f$  una función discretizada en  $N$  puntos, entonces denotaremos la TFD de  $f$  por  $Ff$  y sus valores  $(Ff)_n$ , los cuales están definidos por:

$$(Ff)_n = \sum_{m=1}^N f_m e^{-i2\pi(n-1)(m-1)/N}$$

a saber

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

de manera que

$$\cos 2\pi vx = \frac{1}{2} e^{-i2\pi vx} + \frac{1}{2} e^{i2\pi vx}$$

$$\sin 2\pi vx = \frac{i}{2} e^{-i2\pi vx} - \frac{i}{2} e^{i2\pi vx}$$

#### Propiedades de la TFD

##### 1. Linealidad

$$\alpha f + \beta g \implies \alpha Ff + \beta Fg$$

##### 2. Periodicidad

$$(Ff)_{n+N} = (Ff)_n$$

### 3. Inversión

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} (Ff)_n e^{i2\pi(n-1)(m-1)/N}, m = 1, \dots, N$$

### 4. Igualdad de Parseval

$$\sum_{m=1}^N |f_m|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |(Ff)_n|^2$$

## 3.4. Principio de incertidumbre de Heisenberg

El principio de incertidumbre de Heisenberg tiene carácter universal y asegura que en modelación de fenómenos de tiempo-frecuencia, no se puede ser preciso arbitrariamente en ambos, tiempo y frecuencia, simultáneamente.

**Definición.-** Sea  $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$  tal que  $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$ , el centro  $\bar{x}$  y la banda espectral  $\Delta_f$  se definen como:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\|f\|^2} \int x|f(x)|^2 dx \\ (\Delta_f)^2 &= \frac{1}{\|f\|^2} \int (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Similarmente en el dominio de la frecuencia definimos:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2} \int \omega |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ (\Delta_{\widehat{f}})^2 &= \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2} \int \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

Entonces el principio de incertidumbre puede ser enunciado como sigue:

**Teorema.-** Sea  $xf(x) \in L_2(R)$  y  $x\widehat{f}(x) \in L_2(R)$ , entonces  $\Delta_f \cdot \Delta_{\widehat{f}} \geq \frac{1}{2}$

### 3.5. Algunos espacios importantes

- $C^n(R)$ .– Una función pertenece al espacio  $C^n(R)$  si ésta es  $n$  veces continuamente diferenciable.
- $W_2^s(R)$ .– El espacio Sobolev se define como

$$W_2^s(R) = \{f \mid \|(1 + |\omega|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\omega)\|_{L^2} < \infty\}$$

Para  $s = 0$ , es justamente  $L_2(R)$ . Para  $s = 1, 2, 3, \dots$  el espacio  $W_2^s(R)$  consiste de todas las funciones  $L_2(R)$  que son  $s$  veces diferenciables y cuya  $s$ -ésima derivada pertenece a  $L_2(R)$ .

**Definición.-** Para  $f, g \in W_2^s(R)$ , el producto interno se define como

$$\langle f, g \rangle_s = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} (1 + |\omega|^2)^s d\omega$$

El espacio  $W_2^s(R)$  es completo con respecto al producto interno y por lo tanto es un espacio de Hilbert.

- $C^s(R)$ .— El espacio Hölder se define como

$$i) 0 < s < 1, C^s(R) = \{f \in L_\infty(R) : \sup \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^s} < \infty\}$$

$$ii) s = n + s', 0 < s' < 1, C^s(R) = \{f \in L_\infty(R) \cap C^n(R) \mid \frac{d^n}{dx^n} f \in C^{s'}(R)\}$$

- $B_{pq}^\sigma(I)$ .— Espacio de Besov.

**Definición.-** La seminorma Besov de índices  $(\sigma, p, q)$  se define como

$$|f|_{B_{p,\infty}^\sigma} = \left[ \int_0^\infty (h^{-\sigma} w_{r,p}(f; h))^q \frac{dh}{h} \right]^{\frac{1}{q}}, \text{ si } 1 \leq q < \infty \text{ y}$$

$$|f|_{B_{p,\infty}^\sigma} = \sup h^{-\sigma} w_{r,p}(f; h), \text{ si } q = \infty$$

**Definición.-** La norma de Besov  $\|f\|_{B_{p,q}^\sigma}^\sigma$  se define como  $\|f\|_{L_p(I)} + |f|_{B_{p,q}^\sigma}^\sigma$ .

El espacio de Besov es una clase de funciones  $f$  con una norma de Besov finita; una bola de Besov es una clase de funciones  $B_{p,q}(M)$  para la cual la norma está acotada por  $M$ .

### 3.6. Teoría fundamental del procesamiento de señales

Es fundamental una interpretación adecuada del procesamiento de señales para el entendimiento, la construcción e implementación de los métodos wavelet.



Un filtro  $H$  es un operador lineal que mapea  $l_2$  a  $l_2$ . Para  $x \in l_2$  la ecuación  $y = Hx$  tiene una representación

$$y(n) = (h \bullet x)(n) = \sum_k h(x)x(n-k)$$

donde  $h(k) = h_k$ ,  $k \in Z$  son coeficientes de filtro. Los coeficientes del filtro pueden ser obtenidos cuando el filtro  $H$  se aplica a la secuencia  $u = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ .

$$h = Hu = (\dots, h_0, h_1, \dots).$$

Una banda de filtro es un conjunto de dos o más filtros. Este generalmente se usa para separar un señal de entrada en bandas de frecuencia; si no se permiten índices negativos en  $h$  se dice que el filtro es causal. Si el número de *taps* diferentes de cero es finito se dice que el filtro es de respuesta de impulso finito, en otro caso se dice que es un filtro de respuesta de impulso infinito.

La siguiente ecuación

$$H(\omega) = \sum_n h(n)e^{-in\omega}$$

nos muestra la función de respuesta de frecuencia. Cuando la entrada es  $x(n) = e^{in\omega}$  y el vector del filtro es  $(h_0, h_1, \dots)$ , la salida  $y(n)$  es igual al producto  $x(n) \cdot H(\omega)$ . De hecho

$$\begin{aligned}y(n) &= h_0 e^{in\omega} + h_1 e^{i(n-1)\omega} + \dots \\ &= (h_0 + h_1 e^{-i\omega} + \dots) e^{in\omega} \\ &= H(\omega) x(n)\end{aligned}$$

La función  $H(\omega)$  es compleja y puede ser representada de la siguiente forma:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-i\Phi(\omega)}$$

## Capítulo 4

# Introducción a wavelets

En el análisis de wavelets se usan combinaciones lineales de funciones wavelets para representar señales  $f(t)$ . Estas representaciones son útiles en un amplio rango de aplicaciones, tales como: compresión de datos, procesamiento de imágenes y señales, estimación estadística no paramétrica, análisis numérico, química, astronomía y oceanografía.

La primer definición de wavelet se atribuye a Morlet et al. [1], y ésta se define en el dominio de Fourier:

**Definición.-** Una wavelet es una función  $L_2(\mathbb{R})$  para la cual, la transformada de Fourier  $\Psi(\omega)$  satisface:

$$\int_0^{\infty} |\Psi(t\omega)|^2 \frac{dt}{t} = 1$$

Ahora el término wavelet está asociado con una función  $\psi \in L_2(\mathbb{R})$  tal que las traslaciones y dilaciones diádicas de  $\psi_{jk}(x)$  donde

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in Z$$

constituyen una base ortonormal de  $L_2(\mathbb{R})$ .

Las wavelets son una herramienta muy útil en problemas del tipo *tiempo-escala*. En análisis de señales, la representación wavelet permite ver una evolución *tiempo-dominio* en términos de los componentes de la escala [2]; en este sentido la transformada wavelet se comporta de manera similar a la transformada de Fourier, la cual extrae los detalles de la señal de frecuencia pero se pierde toda la información acerca de la localización de una frecuencia en particular dentro de la señal.

Las bases clásicas ortonormales (Fourier, Hermite, Legendre, etc) han sido usadas por mucho tiempo en matemáticas aplicadas, sin embargo, todas ellas comparten una limitación seria: ausencia de localidad.

Se dice que una base no es local cuando muchas funciones base son muy influyentes en cualquier valor de una descomposición.

En 1946 Gabor [3] sugirió la localidad de las bases de Fourier modulando y trasladando una función ventana  $g$  apropiada.

$$\{g_{m,n}(x) = e^{2\pi m i x} g(x - m)\}$$

donde  $m, n \in Z$ ,  $g$  cuadrada - integrable. Sin embargo, el teorema Balian - Law encuentra limitaciones en las bases de Gabor.

Las wavelets no son una herramienta que se use para reemplazar la transformada estándar de Fourier, son sólo una alternativa; un ejemplo en el que wavelets debe usarse con

mucho cuidado es en el procesamiento de imágenes, ya que la representación de un objeto cambia cuando la resolución lo hace.

#### 4.1. Wavelet padre y madre

A saber, las wavelets tienen género, es decir, hay wavelets padre  $\phi$  y wavelets madre  $\psi$ . La integral de las wavelets padre es 1 y la integral de las wavelets madre es 0.

$$\int \phi(t)dt = 1 \quad \int \psi(t)dt = 0$$

Las wavelets padre son buenas representando partes de señales de baja frecuencia y suavidad, mientras que las wavelets madre son buenas en representar alta frecuencia y detalles.

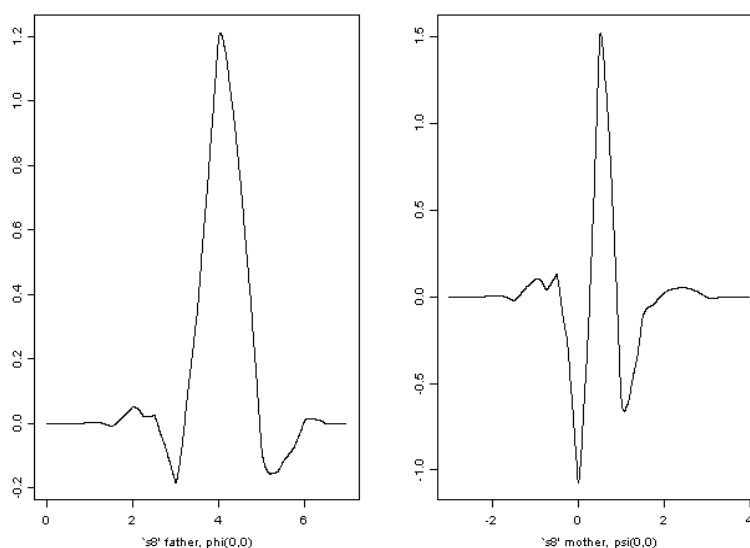


Figura 2.1: Wavelet s8 padre y madre

## Aproximación de Wavelets

La aproximación de la serie de la wavelet ortogonal a una señal  $f(t)$  continua está dada por:

$$f(t) \simeq \sum_k s_{J,K} \phi_{J,K}(t) + \sum_k d_{J,K} \psi_{J,K}(t) + \sum_k d_{J-1,K} \psi_{J-1,K}(t) + \dots + \sum_k d_{1,K} \psi_{1,k}(t)$$

donde  $J$  es el número de componentes de multiresolución,  $k$  es el rango de 1 al número de coeficientes en el componente especificado, los coeficientes  $s_{J,K}, \dots, d_{1,k}$  son los coeficientes de la transformada wavelet, las funciones  $\psi(t)$  y  $\phi(t)$  son las aproximaciones de las funciones wavelets. Las funciones  $\phi_{j,k}(t)$  y  $\psi_{j,k}(t)$  se generan a través de traslaciones y cambios de escala de las funciones  $\phi$  y  $\psi$  [4] como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) = 2^{-j/2} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right) \\ \psi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) = 2^{-j/2} \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right) \end{aligned}$$

Los coeficientes wavelet están dados de manera aproximada por las integrales:

$$\begin{aligned} s_{J,k} &\approx \int \phi_{J,k}(t) f(t) dt \\ d_{j,k} &\approx \int \psi_{j,k}(t) f(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, J \end{aligned}$$

Es decir, las funciones base  $\phi_{j,k}(t)$  y  $\psi_{j,k}(t)$  en la aproximación de wavelet son versiones a escala y trasladadas de  $\psi$  y  $\phi$  con factor de escala  $2^j$  y parámetro de traslación  $2^j k$ , respectivamente. El factor de escala  $2^j$  es llamado factor de *dilación* y el parámetro de traslación  $2^j k$  es llamado factor de *posición*.

## 4.2. Transformada wavelet continua

Sea  $\psi_{a,b}(x)$ ,  $a \in R \setminus \{0\}$  una familia de funciones definidas como traslaciones y re-escalas de una función  $\psi(x) \in L_2(R)$ ,

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Tal normalización asegura que  $\|\psi_{a,b}(x)\|$  sea independiente de  $a$  y  $b$ . La función  $\psi$  satisface la siguiente condición

$$C_\psi = \int_R \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

donde  $\Psi(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\psi(x)$ .

Esta condición implica que

$$0 = \Psi(0) = \int \psi(x) dx$$

También si  $\int \psi(x) dx = 0$  y  $\int (1 + |x|^\alpha) |\psi(x)| dx < \infty$  para algún  $\alpha > 0$ , entonces  $C_\psi < \infty$ .

Esta propiedad de la función  $\psi$  motiva el nombre de wavelet.

Para cualquier  $L_2$  función  $f(x)$  la transformada wavelet continua se define como función de dos variables [5]:

$$TWC_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx$$

Aquí, los factores de dilación y traslación,  $a$  y  $b$  respectivamente, varían continuamente sobre  $R \setminus \{0\} \times R$

### 4.3. Discretización

La transformada wavelet continua de una función de una variable es una función de dos variables [6]. Claramente, la transformación es redundante. Para minimizarla se seleccionan valores discretos de  $a$  y  $b$  que continúen teniendo una transformación invertible, sin embargo, esta nueva muestra no puede ser mayor que una muestra crítica definida como

$$a = 2^{-j}, b = k2^{-j}, j, k \in Z$$

De esta manera se producirá una base mínima ortogonal

$$\{\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), j, k \in Z\}$$

### 4.4. Análisis de multiresolución

A saber, una señal discreta puede ser sintetizada empezando con una resolución muy baja de la señal y después se pueden añadir detalles para crear versiones de mayor resolución, esto es conocido como análisis de multiresolución (AMR), es decir, un análisis de multiresolución es una secuencia de subespacios cerrados  $V_n, n \in Z$  en  $L_2(R)$  tales que se encuentran contenidos jerárquicamente.

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$



Su intersección es trivial y su unión es densa en  $L_2(\mathbb{R})$ ,

$$\bigcap_n V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_j V_j} = L_2(\mathbb{R})$$

Entonces:

$$i) f(2^j x) \in V_j \text{ si } f(x) \in V_0$$

ii) Existe una función  $\phi \in V_0$  cuyas traslaciones enteras incluyen el espacio  $V_0$ ,

$$V_0 = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) \mid f(x) = \sum_k c_k \phi(x - k) \right\}$$

donde el conjunto  $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal. Además, suponemos que

$$\int \phi(x) dx \neq 0.$$

dado que  $V_0 \subset V_1$ , la función  $\phi(x) \in V_0$  se puede representar como una combinación lineal de funciones de  $V_1$  [7], es decir,

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2x - k).$$

El coeficiente  $h_n$  es importante para conectar el AMR con la teoría de procesamiento de señales. El vector  $h = \{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$  es llamado *filtro wavelet*.

Una propiedad importante de las bases wavelet es su diversidad; se pueden construir wavelets con diferente: suavidad, simetría y soporte.

## 4.5. Familias wavelet ortogonales

Las familias de wavelets que resultan en series de aproximación ortogonales son muy especiales, a continuación se mencionan algunas.

**Haar:** La wavelet Haar es de onda cuadrada; tiene un soporte compacto y es cero fuera de un intervalo finito. Es la única wavelet ortogonal compacta que es simétrica.

**Daubelets:** La daubelets fue el primer tipo de wavelet ortogonal continua, con soporte compacto.

**Symmlets:** La symmlets también tiene un soporte compacto y fue construida para ser casi simétrica.

**Coiflets:** Es casi simétrica y tiene propiedades adicionales como momentos de extinción para ambas  $\psi$  y  $\phi$ .

Las wavelets con números grandes como  $d20$  o  $c30$  son relativamente anchas y suaves, mientras que las wavelets con números pequeños como  $d4$  o  $c6$  son estrechas y menos suaves.

## 4.6. Diversas wavelets

En esta sección se tratarán diferentes wavelets comenzando con la más simple de todas que es la wavelet Haar, para de esta manera dar paso a wavelets más sofisticadas como la Daubechies y otras.

### 4.6.1. La transformada Haar

La primer base wavelet fue descubierta en 1910 cuando Alfred Haar mostró que cualquier función continua  $f(x)$  en  $[0, 1]$  puede ser aproximada como sigue

$$f_n(x) = \langle \xi_0, f \rangle \xi_0(x) + \langle \xi_1, f \rangle \xi_1(x) + \dots + \langle \xi_n, f \rangle \xi_n(x)$$

y que cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $f_n$  converge a  $f$  uniformemente [8]. Los coeficientes  $\langle \xi_i, f \rangle$  son dados por  $\int \xi_i(x), f(x) dx$ .

La base Haar es muy simple:

$$\xi_0(x) = \mathbf{1}(0 \leq x \leq 1)$$

$$\xi_1(x) = \mathbf{1}(0 \leq x \leq 1/2) - \mathbf{1}(1/2 \leq x \leq 1)$$

$$\xi_2(x) = \sqrt{2}[\mathbf{1}(0 \leq x \leq 1/4) - \mathbf{1}(1/4 \leq x \leq 1/2)]$$

⋮

$$\xi_n(x) = 2^{j/2}[\mathbf{1}(k \cdot 2^{-j} \leq x \leq (k+1/2) \cdot 2^{-j}) - \mathbf{1}((k+1/2) \cdot 2^{-j} \leq x \leq (k+1) \cdot 2^{-j})]$$

donde  $n = 2^j + k$ ,  $j \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq 2^j - 1$  y  $\mathbf{1}A$  es el indicador del conjunto  $A$ , es decir,

$\mathbf{1}A = 1$  si  $x \in A$  y  $\mathbf{1}A = 0$  si  $x \in A^c$ . Note que para  $n \geq 1$  las funciones base  $\xi_n$  pueden ser

expresadas como una transformación escala-traslación de la función  $\xi_1$ ,

$$\xi_n(x) = 2^{j/2} \xi_1(2^j \cdot x - k), \quad n = 2^j + k$$

Strömberg [9] fue el primero en construir una base ortonormal de  $L_2(R)$  de la forma

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in Z$$

El tipo de señales que pueden analizarse con la transformada de Haar, son las señales discretas; una señal discreta es una función del tiempo con valores que ocurren en instantes discretos. Generalmente expresamos la señal discreta en la forma:

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$$

$$f_1 = g(t_1), f_2 = g(t_2), \dots, f_N = g(t_N).$$

Como todas las transformadas wavelet, la transformada Haar descompone una señal discreta en dos subseñales, una llamada *tendencia* y la otra *fluctuación*.

La primer subseñal *tendencia* es:

$$a^1 = (a_1, a_2, \dots, a_{N/2}) \quad \text{donde } a_m = \frac{f_{2m-1} + f_{2m}}{\sqrt{2}} \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

La primer subseñal *fluctuación* es:

$$d^1 = (d_1, d_2, \dots, d_{N/2}) \quad \text{donde } d_m = \frac{f_{2m-1} - f_{2m}}{\sqrt{2}} \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

### Transformada Haar 1er-nivel

La transformada Haar es hecha en varios niveles, el primero es un mapeo  $H_1$  definido como sigue:

$$f \longrightarrow (a^1 | d^1)$$

El mapeo  $H_1$  tiene una inversa:

$$f = \left( \frac{a_1 + d_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1 - d_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_{N/2} + d_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{a_{N/2} - d_{N/2}}{\sqrt{2}} \right)$$

Una de las ventajas de utilizar la transformada de Haar es que la magnitud de los valores de las fluctuaciones de las subseñales son significativamente menores a las magnitudes de los valores de la señal original, esto es importante por ejemplo en aplicaciones como la compresión de imágenes.

## 4.7. Conservación y compactación de la energía

Una propiedad importante de la transformada Haar es que conserva la energía de las señales [10], por energía de una señal  $f$  entendemos la suma de los cuadrados de sus valores

$$\varepsilon f = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_N^2.$$

De manera que podemos afirmar lo siguiente:

1. Conservación de la energía: El primer nivel de la transformada Haar conserva la energía, es decir,  $\varepsilon(a^1|d^1) = \varepsilon f$  para cada señal  $f$ .
2. Compactación de la energía: La energía de una subseñal tendencia  $a^1$  equivale a un mayor porcentaje de la energía de la señal transformada  $(a^1|d^1)$ .

Es decir, la energía en  $\varepsilon a^1$  es mucho mayor a la energía  $\varepsilon d^1$ .

#### 4.7.1. Transformada Haar en múltiples niveles

El 2do-nivel de la transformada Haar para la señal  $f$  es:  $(a^2|d^2|d^1)$

El 3er-nivel de la transformada Haar para la señal  $f$  es:  $(a^3|d^3|d^2|d^1)$

Resumiendo, podemos decir que las wavelets para el 1er-nivel Haar se definen como

sigue:

$$\begin{aligned}
 W_1^1 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\
 W_2^1 &= \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\
 &\vdots \\
 W_{N/2}^1 &= \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

Usando las wavelets para el 1er-nivel, podemos expresar los valores para  $d^1$  como el producto escalar:

$$d_1 = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{2}} = f \cdot W_1^1$$

de manera que

$$d_m = f \cdot W_m^1$$

También podemos expresar los valores del 1er-nivel *tendencia* como el producto escalar de  $f$  y ciertas señales elementales llamadas señales *escalación* que se definen como sigue:

$$\begin{aligned} V_1^1 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\ V_2^1 &= \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\ &\vdots \\ V_{N/2}^1 &= \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

de manera que

$$a_m = f \cdot V_m^1$$

#### 4.7.2. Análisis de multiresolución para Haar

Para definir el 1er-nivel AMR expresamos la señal  $f$  como sigue:

$$f = \left( \frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_2}{\sqrt{2}}, \frac{a_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{a_{N/2}}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{d_1}{\sqrt{2}}, -\frac{d_1}{\sqrt{2}}, \frac{d_2}{\sqrt{2}}, -\frac{d_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{d_{N/2}}{\sqrt{2}}, -\frac{d_{N/2}}{\sqrt{2}} \right)$$

de manera que:

$$f = A^1 + D^1$$

### 4.7.3. Análisis de multiresolución para múltiples niveles

$$f = A^2 + D^2 + D^1$$

donde:

$$A^2 = (f \cdot V_1^2)V_1^2 + (f \cdot V_2^2)V_2^2 + \dots + (f \cdot V_{N/4}^2)V_{N/4}^2$$

$$D^2 = (f \cdot W_1^2)W_1^2 + (f \cdot W_2^2)W_2^2 + \dots + (f \cdot W_{N/4}^2)W_{N/4}^2$$

en general:

$$f = A^k + D^k + \dots + D^2 + D^1$$

## 4.8. Wavelets Daubechies

La transformada wavelet Daubechies está definida esencialmente de la misma manera que la transformada wavelet Haar, la única diferencia entre ellas es la manera en la que las funciones escalación y wavelet están definidas.

Para la transformada wavelet Daubechies el soporte de estas funciones es mayor, este pequeño cambio provee una impresionante mejora en la capacidad de esta transformada.

### 4.8.1. Wavelet Daub4

La transformada wavelet Daub4 se define esencialmente de la misma manera que la Haar.



$$f \longrightarrow (a^1|d^1)$$

bajo el mapeo  $D_1$

$$a_m = f \cdot V_m^1$$

$$dm = f \cdot W_m^1$$

$$f \longrightarrow (a^2|d^2|d^1)$$

bajo el mapeo  $D_2$

Los números *escalación* se definen como sigue [11]:

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_4 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$V_1^1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, 0, \dots, 0)$$

$$V_2^1 = (0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, 0, \dots, 0)$$

$$V_3^1 = (0, 0, 0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, 0, \dots, 0)$$

$\vdots$

$$V_{N/2-1}^1 = (0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$$V_{N/2}^1 = (\alpha_3, \alpha_4, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, )$$

$$\beta_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{3} - 3}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_3 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_4 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
W_1^1 &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, 0, 0, \dots, 0) \\
W_2^1 &= (0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, 0, 0, \dots, 0) \\
W_3^1 &= (0, 0, 0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, 0, 0, \dots, 0) \\
&\vdots \\
W_{N/2-1}^1 &= (0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \\
W_{N/2}^1 &= (\beta_3, \beta_4, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2, )
\end{aligned}$$

Cada nivel de la transformada Daub4 tiene una inversa [12]. La inversa del 1er-nivel que mapea la transformada  $(a^1|d^1)$  de regreso a la señal  $f$ , es calculada explícitamente como sigue:

$$f = A^1 + D^1$$

La inversa de la transformada Daub4 para el 2do-nivel es descrita por la fórmula:

$$f = A^2 + D^2 + D^1,$$

en general

$$f = A^k + D^k + \dots + D^2 + D$$

Se puede mostrar que la transformada Daub4 generalmente produce valores de fluctuación mucho menores que los que produce la transformada Haar.

Así como la transformada Haar, la Daub4 conserva la energía de las señales y la redistribuye de una manera más compacta.

#### 4.8.2. Otra wavelet Daub

La diferencia más obvia entre las DaubJ para  $J = 6, 8, \dots, 20$  es la longitud del soporte de sus señales escalación y wavelet. Por ejemplo en la Daub6, definimos los números escalación  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  como sigue:

$$\alpha_1 = 0,332670552950083$$

$$\alpha_2 = 0,806891509311092$$

$$\alpha_3 = 0,459877502118491$$

$$\alpha_4 = -0,135011020010255$$

$$\alpha_5 = -0,008544127388202$$

$$\alpha_6 = 0,003522629188570$$

y los números wavelet  $\beta_1, \dots, \beta_6$  como sigue:

$$\beta_1 = \alpha_6, \beta_2 = -\alpha_5, \beta_3 = \alpha_4, \beta_4 = -\alpha_3, \beta_5 = \alpha_2, \beta_6 = -\alpha_1$$

$$\begin{aligned}
V_1^1 &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0) \\
V_2^1 &= (0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0) \\
V_3^1 &= (0, 0, 0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0) \\
&\vdots \\
V_{N/2}^1 &= (\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2)
\end{aligned}$$

Las wavelet están definidas de manera similar.

La transformada Daub6 frecuentemente produce valores de fluctuación de tamaño más pequeño que los producidos por la Daub4. Cuando el objetivo es la compresión de señales tales como tonos musicales, entonces la transformada Daub6 puede realizar una mejor compresión de la señal que la Daub4, sin embargo, cuando el objetivo es identificar características de la señal que estén relacionadas con los puntos vibrantes (es decir, donde se encuentran ondulaciones en la gráfica) entonces la Daub4 puede identificar la localización de estos puntos de manera mucho más clara [13].

## 4.9. Coiflets

La wavelet Coif1 está diseñada para mantener un parecido cercano entre los valores *tendencia* y los valores originales de la señal. Todas las wavelets Coif1 están definidas simi- larmente, de manera que nos concentraremos en el caso más simple la Coif6. Sus números de escala son los siguientes:

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \alpha_2 = \frac{5 + \sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \alpha_3 = \frac{14 + 2\sqrt{7}}{16\sqrt{2}},$$

$$\alpha_4 = \frac{14 - 2\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \alpha_5 = \frac{1 - \sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \alpha_6 = \frac{-3 + \sqrt{7}}{16\sqrt{2}}$$

$$V_1^1 = (\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$V_2^1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0)$$

$$V_3^1 = (0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$V_{N/2}^1 = (\alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$$\beta_1 = \alpha_6, \beta_2 = -\alpha_5, \beta_3 = \alpha_4, \beta_4 = -\alpha_3, \beta_5 = \alpha_2, \beta_6 = -\alpha_1$$

$$W_1^1 = (\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2)$$

$$W_2^1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0)$$

$$W_3^1 = (0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$W_{N/2}^1 = (\beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

Otra característica importante de las Coifl es que sus gráficas son casi simétricas.

#### 4.10. La transformada wavelet discreta (TWD)

La *TWD* calcula los coeficientes de las series de aproximación de wavelet para señales discretas de extensión finita. La *TWD* mapea el vector  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  al vector de  $n$  coeficientes wavelet  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ .

El vector  $w$  contiene los coeficientes  $s_{j,k}$  y  $d_{j,k}$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  de la serie de aproximación de wavelet. El  $s_{j,k}$  es llamado coeficiente *suave* y el  $d_{j,k}$  es llamado coeficiente *detalle*.

La *TWD* es matemáticamente equivalente a la multiplicación por una matriz ortogonal  $W$  [14].

$$w = Wf$$

En el caso donde  $n$  es divisible por  $2^J$ ,

$$W = \begin{pmatrix} s_J \\ d_J \\ d_{J-1} \\ \vdots \\ d_1 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
s_J &= (s_{J,1}, s_{J,2}, \dots, s_{J,n/2})' \\
d_J &= (d_{J,1}, d_{J,2}, \dots, d_{J,n/2^J})' \\
d_{J-1} &= (d_{J-1,1}, d_{J-1,2}, \dots, d_{J-1,n/2^{J-1}})' \\
&\vdots \\
d_1 &= (d_{1,1}, d_{1,2}, \dots, d_{1,n/2})'
\end{aligned}$$

y cada conjunto de coeficientes  $s_J, d_J, d_{J-1}, \dots, d_1$  es llamado *Cristal*.

#### 4.10.1. La inversa de la TWD

Se puede recuperar la señal original del vector  $f$  aplicando la inversa a la transformada wavelet discreta (*ITWD*), con un error relativo:

$$\text{error relativo} = \frac{(\sum_{i=1}^n (f_i - \hat{f}_i)^2)^{1/2}}{(\sum_{i=1}^n f_i^2)^{1/2}}$$

En el contexto de procesamiento de imágenes, Burt y Adelson [15] desarrollaron algoritmos de pirámide ortogonales y biortogonales.

El algoritmo de pirámide o de cascada procesa una imagen a diferentes escalas, acomodándolas de la más fina a la más gruesa en un algoritmo tipo árbol.

Mallat fue el primero en relacionar formalmente las wavelets, el análisis de multiresolución y el algoritmo de cascada. El algoritmo de cascada de Mallat nos da una eficiente receta para realizar la transformada wavelet discreta, éste relaciona los coeficientes wavelet de los diferentes niveles en la transformación a través de los filtros  $h$  y  $g$ .

## 4.11. Tipos de análisis

### 4.11.1. Análisis de frecuencia por Fourier

El contenido de frecuencia de una señal discreta es revelado por la transformada de Fourier discreta (*TFD*). Las señales análogas  $\cos(2\pi vx)$  y  $\sin(2\pi vx)$ , donde  $x$  denota el tiempo, tienen un periodo de tiempo fundamental  $\frac{1}{v}$  [16]. Consecuentemente, estas señales repiten sus forma básica  $v$  veces, es decir, tiene una frecuencia de  $v$  ciclos/unidad de tiempo.

### 4.11.2. Descomposición de multiresolución

Las funciones

$$\begin{aligned} S_J(t) &= \sum_k s_{J,K} \phi_{J,K}(t) \\ D_j(t) &= \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

son llamadas señal *suave* y *detalle* respectivamente. La serie de aproximación de la wavelet ortogonal a una señal continua  $f(t)$  es expresada en términos de éstas señales:

$$f(t) \cong S_J(t) + D_J(t) + D_{J-1}(t) + \dots + D_1(t)$$

Los términos en esta suma de aproximación constituyen una descomposición de la señal en componentes de señales ortogonales y en diferentes escalas, de manera que representan los componentes de la señal en diferente resolución, por eso es llamada: *Descomposición de Multiresolución (DMR)*.



### 4.11.3. Análisis wavelet exploratorio

El análisis wavelet exploratorio es una importante herramienta visual a través de la cual es posible analizar objetos wavelets.

#### Análisis wavelet exploratorio 1D

La función **EDA** nos permite observar cuatro sub-gráficas:

**1.- Plano tiempo-escala.**

**2.- Gráfica de puntos:** Grafica el porcentaje de energía por cristal.

$$E_j^d = \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{n/2^j} d_{j,k}^2, \quad j = 1, \dots, J$$

$$E_j^s = \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{n/2^j} s_{j,k}^2$$

donde  $E = \sum_{k=1}^n f_k^2$  es el total de energía de la señal. Para wavelets ortogonales, la *TWD* preserva la energía, por lo tanto

$$E = E_J^s + \sum_{j=1}^J E_j^d.$$

**3.- Gráfica de cajas:** Nos da un resumen de la distribución de los coeficientes *TWD*. Las cajas indican el rango de intercuantiles y la franja blanca corresponde a la mediana. El ancho de las cajas es proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones en el cristal.

**4.- Gráfica de energía:** Muestra la concentración de energía, la cual, para un vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$

está definido por:

$$E_x(K) = \frac{\sum_{i=1}^K x_{(i)}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

donde  $x_{(i)}$  es el  $i$ -ésimo valor absoluto más grande en  $x$ .

### **Selección de opciones para análisis de wavelets**

Al realizar un análisis wavelet uno puede escoger el nivel de multiresolución y la familia wavelet según convenga.

#### **Selección de nivel de multiresolución**

El máximo número de niveles depende de: el tamaño de la muestra, la condición de límite y el tipo de wavelet (el número de coeficientes en el nivel más grueso debe ser al menos un medio de la longitud del filtro wavelet).

#### **Selección de la wavelet**

Una razón fundamental para usar una wavelet en particular es que ésta debe ajustarse a las características de la señal que se esté analizando. Hay diferentes factores para considerar en la elección de la wavelet, dos de ellos son: la suavidad y la localización espacial de la wavelet. En general, las wavelets con soporte ancho son suaves pero no están muy bien localizadas en el espacio [18].

Los análisis con filtros revertidos son equivalentes a los análisis con wavelets revertidas en el dominio del tiempo. El siguiente ejemplo muestra una wavelet padre  $d4$  y su wavelet padre  $d4$  revertida, y la  $TWD$  de la señal doppler usando el filtro estándar  $d4$  y el filtro revertido  $d4$ .

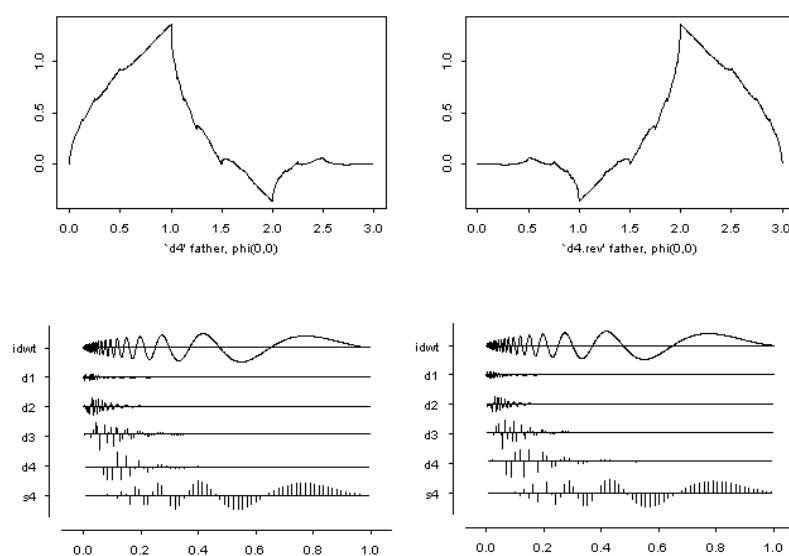


Figura 4.2: Arriba izq. wavelet padre  $s8$ , arriba der. wavelet padre  $s8$  revertida, abajo izq.  $TWD$  de la seal doppler usando  $s8$ , abajo der.  $TWD$  de la seal doppler usando  $s8$  revertida.

#### 4.11.4. Análisis wavelet para imágenes (2D)

En particular, el uso de wavelets es de gran utilidad en la compresión de imágenes ya que, a diferencia de otras técnicas, con wavelets se puede lograr una efectiva compresión de ésta utilizando pocos coeficientes.

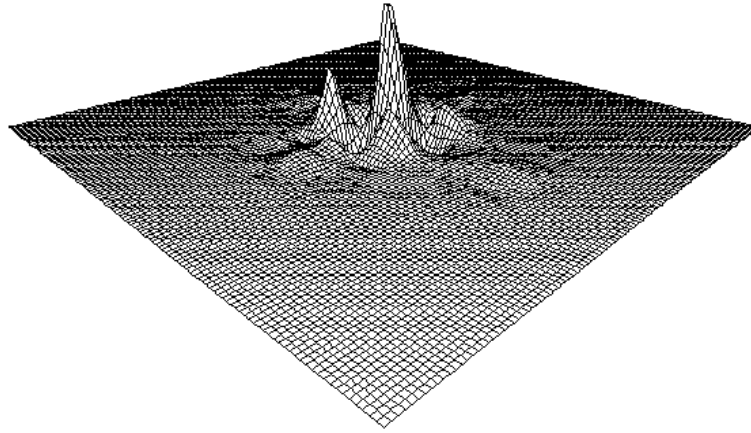


Figura 4.3: Grafica de una funcin wavelet s8 en 2D.

### Familias de wavelets

Se puede construir una wavelet en 2D utilizando el producto tensor de una wavelet horizontal 1D y una vertical en 1D [19]. Esto produce cuatro tipos de wavelets.

$$\Phi(x, y) = \phi_h * \phi_v$$

$$\Psi^v(x, y) = \psi_h * \phi_v$$

$$\Psi^h(x, y) = \phi_h * \psi_v$$

$$\Psi^d(x, y) = \psi_h * \psi_v$$

## Aproximación de la wavelet 2D

$$F(x, y) \approx \sum_{m,n} s_{J,m,n} \Phi_{J,m,n}(x, y) + \sum_{j=1}^J \sum_{m,n} d_{j,m,n}^v \Psi_{j,m,n}^v(x, y) + \\ \sum_{j=1}^J \sum_{m,n} d_{j,m,n}^h \Psi_{j,m,n}^h(x, y) + \sum_{j=1}^J \sum_{m,n} d_{j,m,n}^d \Psi_{j,m,n}^d(x, y)$$

Los coeficientes para la transformada Wavelet en 2D están dados aproximadamente por las integrales:

$$s_{J,m,m} \approx \int \int \Phi_{J,m,n}(x, y) F(x, y) dx dy \\ d_{j,m,m}^v \approx \int \int \Psi_{j,m,n}^v(x, y) F(x, y) dx dy \\ d_{j,m,m}^h \approx \int \int \Psi_{j,m,n}^h(x, y) F(x, y) dx dy \\ d_{j,m,m}^d \approx \int \int \Psi_{j,m,n}^d(x, y) F(x, y) dx dy$$

## Análisis de multiresolución para imágenes

Las siguientes funciones

$$S_J(x, y) = \sum_{m,n} s_{J,m,n} \Phi_{J,m,n}(x, y) \\ D_j^v(x, y) = \sum_{m,n} d_{j,m,n}^v \Psi_{j,m,n}^v(x, y) \\ D_j^h(x, y) = \sum_{m,n} d_{j,m,n}^h \Psi_{j,m,n}^h(x, y) \\ D_j^d(x, y) = \sum_{m,n} d_{j,m,n}^d \Psi_{j,m,n}^d(x, y)$$

son llamadas: imagen suave, imagen detalle vertical, imagen detalle horizontal e imagen detalle diagonal respectivamente.

La aproximación de la wavelet 2D expresada con estas ecuaciones es la siguiente:

$$F(x, y) \approx S_J(x, y) + \sum_{j=1}^J D_j^v(x, y) + \sum_{j=1}^J D_j^h(x, y) + \sum_{j=1}^J D_j^d(x, y)$$

esta ecuación es una descomposición de  $F(x, y)$  en  $3J + 1$  componentes de la imagen ortogonal.

## 4.12. Encogimiento y estimación de una función de densidad

Aunque en la vida diaria la palabra encogimiento puede tener una connotación negativa, no es así en el dominio de la estimación estadística; encoger y truncar los datos directamente o los coeficientes en series de expansión de Fourier es una vieja técnica en procesamiento de imágenes y señales.

En el contexto de estimación de funciones por wavelets, el método de encogimiento tiene características adicionales ya que está conectado con la suavidad (removimiento de ruido) porque la medida de la suavidad de una función depende de la magnitud de sus coeficientes wavelet [20].

### 4.12.1. Método de encogimiento

Considere el siguiente modelo de regresión

$$y_i = f(x_i) + \sigma\epsilon_i = f_i + \sigma\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde las  $x_i$  están igualmente espaciadas y  $\epsilon_i$  es una variable aleatoria de media cero.

El objetivo de la regresión no paramétrica es estimar la función desconocida  $f$  de las observaciones  $y_i, i = 1, \dots, n$ . En notación vectorial la ecuación anterior se puede escribir como

$$\bar{y} = \bar{f} + \sigma \bar{\epsilon}$$

El estimador discreto  $\hat{f}$  será juzgado con  $(MSE)$

$$\begin{aligned} MSE(\hat{f}, f) &= \frac{1}{n} E \|\hat{f} - f\|_{l_2}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[\hat{f}(x_i) - f(x_i)]^2 \end{aligned}$$

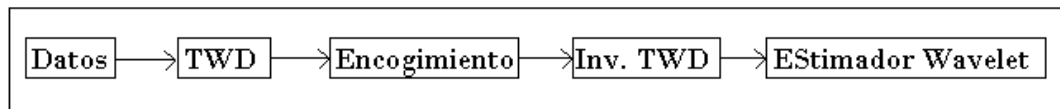


Figura 4.4: Proceso de Encogimiento

El procedimiento consta de tres pasos:

1. Transforme las observaciones  $y_i, i = 1, \dots, n$  al dominio wavelet aplicando una transformación wavelet discreta. El resultado es una secuencia de coeficientes wavelet  $d_i, i = 1, \dots, n$ .
2. Estime  $\sigma$ . Use este estimador como umbral.

3. Invierta los coeficientes umbralizados, para obtener de esta manera la función  $\hat{f}_i$ .

Si la función es  $f(x) = \sum_j \sum_k \theta_{jk} \psi_{jk}(x)$ , y los coeficientes wavelets de ruido que corresponden a  $\theta_{jk}$  son  $d_{jk}$ , la regla de encogimiento

$$\hat{\theta}_{jk} = d_{jk} 1(j < j_0)$$

define el estimador

$$\hat{f}(x) = \sum_{j < j_0} \sum_k d_{jk} \psi_{jk}(x) = \sum_k c_{j_0 k} \phi_{j_0 k}(x)$$

El estimador de encogimiento es, de hecho, la proyección de  $f$  en el subespacio de multiresolución  $V_{j_0}$ .

### Umbralización

El método más simple de encogimiento no-lineal es la umbralización. Es común para todas las reglas de umbralización fijar como 0 las coordenadas de un vector  $d$ , que es umbralizado y es menor al valor absoluto de un número fijo -el umbral  $\lambda$ .

Las umbralizaciones más comunes son: el umbral suave y el duro.

$$\delta^h(d, \lambda) = d 1(|d| > \lambda), \lambda \geq 0, d \in R$$

$$\delta^s(d, \lambda) = (d - \text{sgn}(d) \cdot \lambda) 1(|d| > \lambda)$$



### Riesgo del oráculo para las reglas de umbralización

Las reglas de umbralización óptimas se obtienen al escoger un umbral  $\lambda = \sigma$ . Por supuesto  $\sigma$  es desconocida, por lo tanto, esta regla es inalcanzable [21]. Supongamos que tenemos el modelo

$$d_i = \theta_i + \sigma \epsilon_i', i = 1, 2, \dots, n$$

y tenemos además un oráculo que nos dice que  $\theta_i$  está cercana a 0 y nos sugiere dos acciones: mantener o quitar una determinada observación de índice  $i$ , es decir, nos sugiere  $\hat{\theta}_i = d_i \partial_i$ , donde  $\partial_i = 0$  o 1. El  $\partial$  ideal en este caso está dado por

$$\partial = \mathbf{1}(|d_i| > \sigma)$$

y el estimador de proyección diagonal

$$\hat{\underline{\theta}} = \{d_i \mathbf{1}(d_i > \sigma), i = 1, 2, \dots, n\}$$

y el riesgo está expresado por

$$R(DP, \underline{\theta}) = E \|\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}\|^2 = \sum_i \min(|\theta_i|^2, \sigma^2),$$

el riesgo de la umbralización suave con un umbral  $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log n}$  es cercana al riesgo del oráculo  $R(DP, \theta)$ .

### Otras reglas de encogimiento

Además de las reglas de umbralización suave y dura, hay muchas otras reglas. Gao y Bruce [22] generalizaron las reglas de umbral suave y duro para obtener un encogimiento semisuave. La regla de umbralización semisuave depende de dos parámetros no negativos,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

La regla está definida como

$$\delta^{ss}(x, \lambda_1, \lambda_2) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\lambda_2(|x| - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{1}(\lambda_1 < |x| \leq \lambda_2) + x \mathbf{1}(|x| > \lambda_2)$$

Entonces, para cualquier  $\lambda$  dada, existe  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , tal que para todo  $\theta$

$$R_{\lambda_1 \lambda_2}^{ss}(\theta) < R_{\lambda}^h(\theta)$$

### Umbral universal

A saber, el umbral semisuave  $\lambda = \sigma\sqrt{2\log n}$  se aproxima asintóticamente al riesgo del oráculo, Donoho y Johnstone [23] llaman a  $\lambda$  el umbral universal. Además de sus propiedades asintóticas, este umbral remueve el ruido con alta probabilidad contribuyendo a la reconstrucción de señales.

### Umbral de la curva de Lorentz

Basados en la curva de Lorentz para la distribución de la energía de los coeficientes wavelet, es posible proponer un criterio de umbralización. El método de umbralización es de

distribución libre, es decir, no hay suposiciones de la distribución del ruido. Primero damos una definición de la curva de Lorentz para variables aleatorias continuas.

Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa tal que  $EX = \mu < \infty$ . Suponemos que:

(A1) La *cdf*  $F$  es una función estrictamente monótona en el soporte de  $X$  y

(A2)  $F$  es continua en  $\mu$ .

La curva de Lorentz correspondiente a  $Z$  esta definida como

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\xi_p} x dF(x),$$

donde  $\xi_p$  es la única población en el  $p$ -ésimo cuantil.

**Regla de la Curva de Lorentz:** Primero realice una umbralización en el  $\hat{p}_0 \cdot 100\%$  coeficiente con menor energía. El punto  $\hat{p}_0$  es la proporción en la cual la ganancia (en parsimonia) al umbralizar un elemento adicional es menor que la pérdida de energía. Ambas pérdidas son medidas en una escala 0 – 1 y son igualmente pesadas.

#### 4.12.2. Estimación de una densidad de probabilidad

La naturaleza local de las funciones wavelet promete superioridad sobre la proyección de estimadores que usan bases ortonormales clásicas (Fourier, Hermite, etc.). Los estimadores wavelet son simples, están bien localizados en espacio/frecuencia y comparten una variedad de propiedades de optimización. Es interesante que una de la primeras contribuciones de las wavelets en estadística fue sobre estimación de densidades.

El estimador de densidad de probabilidad en algunos aspectos se relaciona con problemas de regresión, aunque estadísticamente sean cosas diferentes.

## Capítulo 5

# Algunas aplicaciones de wavelets

### 5.1. Análisis de imágenes digitales

#### 5.1.1. Diseño experimental

La ingeniería de alimentos busca innovar productos alimenticios. Para ello, en muchos casos se requiere de experimentación. Un ejemplo de lo anterior es el siguiente; el objetivo del experimento es comparar diferentes formulaciones de una mezcla de suero de leche con almidón y evaluar efectos de condiciones del proceso por extrusión de tales mezclas, los factores entonces son: el porcentaje de proteína a través del suero de leche, el porcentaje de humedad de la mezcla, el pH de la mezcla y la temperatura de cocción en el extrusor utilizado. Este es un diseño factorial fraccionario  $2^{4-1}$  y se presenta a continuación

(Tabla 5.4) .

| %prot | %hum | pH | temp |
|-------|------|----|------|
| 25    | 30   | 7  | 80   |
| 5     | 30   | 4  | 80   |
| 5     | 18   | 7  | 80   |
| 25    | 18   | 4  | 80   |
| 5     | 18   | 4  | 180  |
| 25    | 18   | 7  | 180  |
| 5     | 30   | 7  | 180  |
| 25    | 30   | 4  | 180  |

Tabla 5.4: Descripción de los  
tratamientos.

Consta de ocho tratamientos; cada tratamiento fue replicado en una ocasión. Del proceso de extrusión se obtuvieron productos como los mostrados en la Figura 5.14.

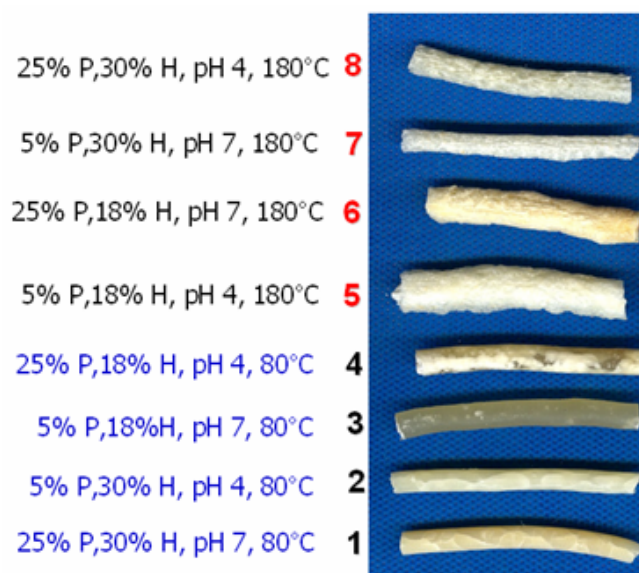


Figura 5.13: Muestras Extrudidas.

### 5.1.2. Imágenes de muestras extrudidas

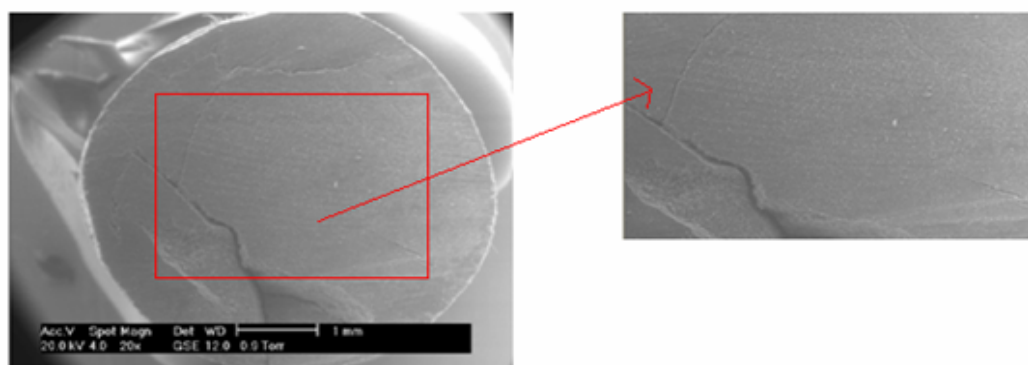


Figura 5.14: 25 % P, 30 % H, pH 4, 180°C

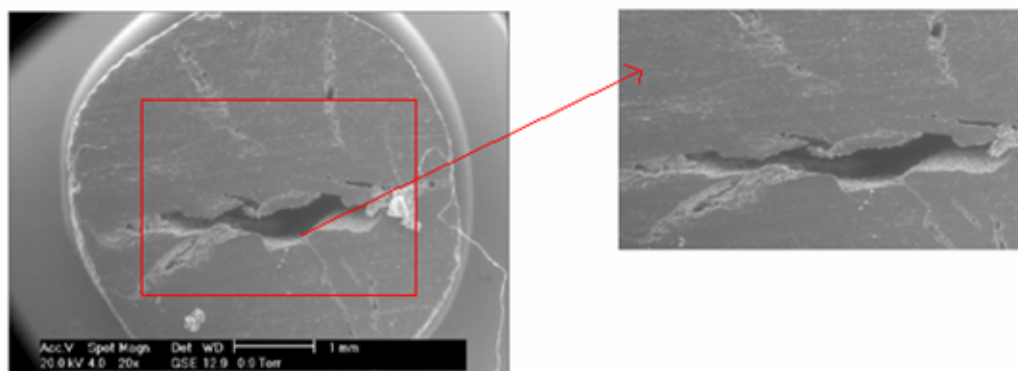


Figura 5.15: 5 % P, 30 % H, pH 7, 180°C

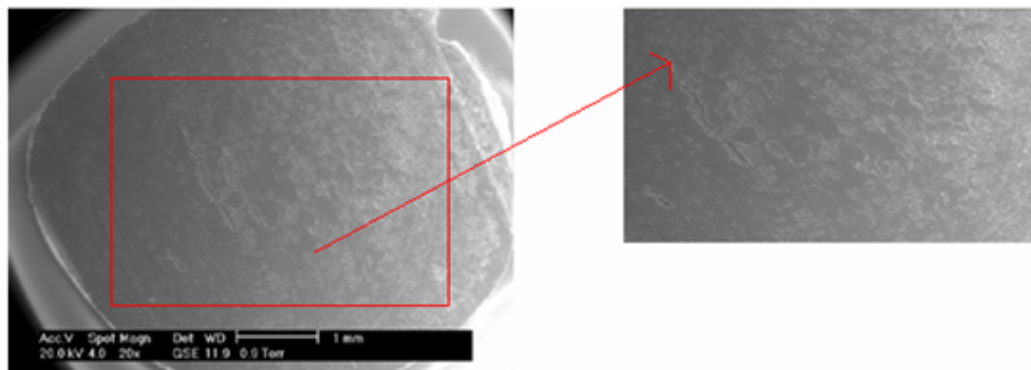


Figura 5.16: 25 % P, 18 % H, pH 7, 180°C

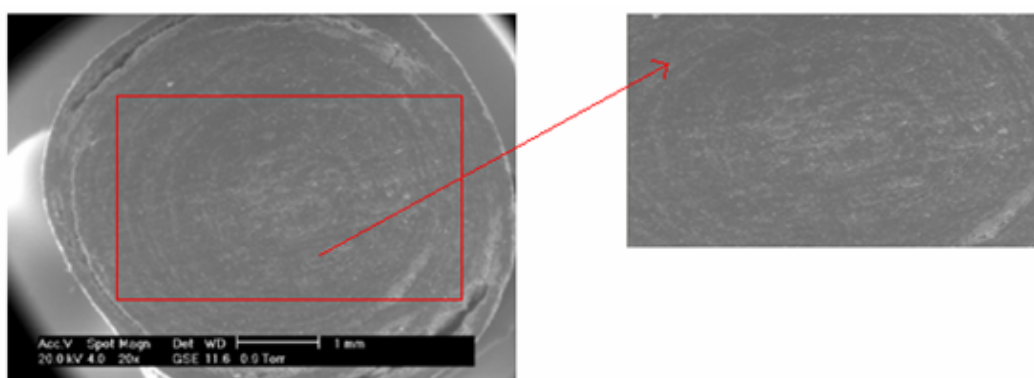


Figura 5.17: 5 % P, 18 % H, pH 4, 180°C

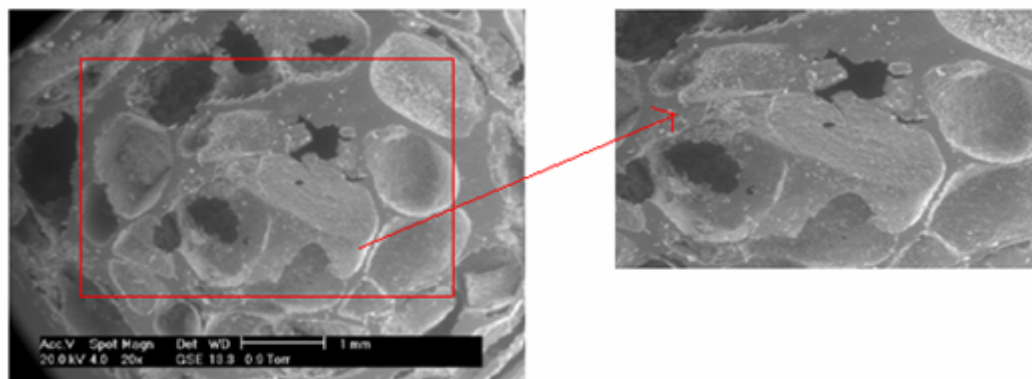


Figura 5.18: 25 %P, 18 % H, pH 4, 80°C

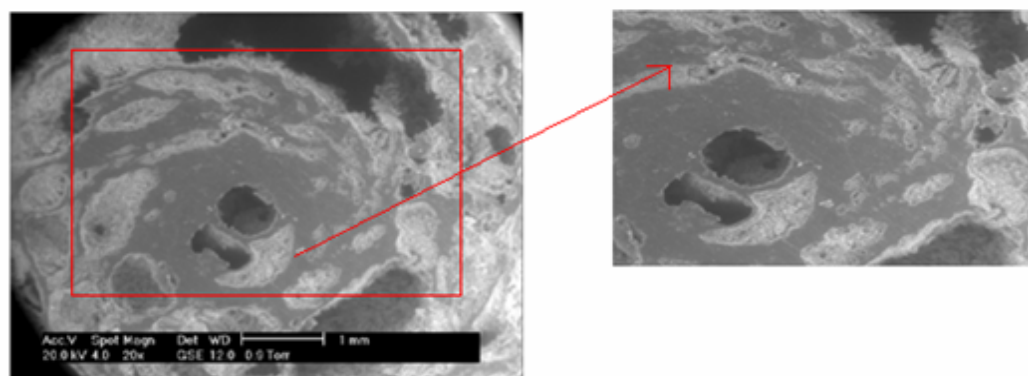


Figura 5.19: 5 % P, 18 % H, pH 7, 80°C



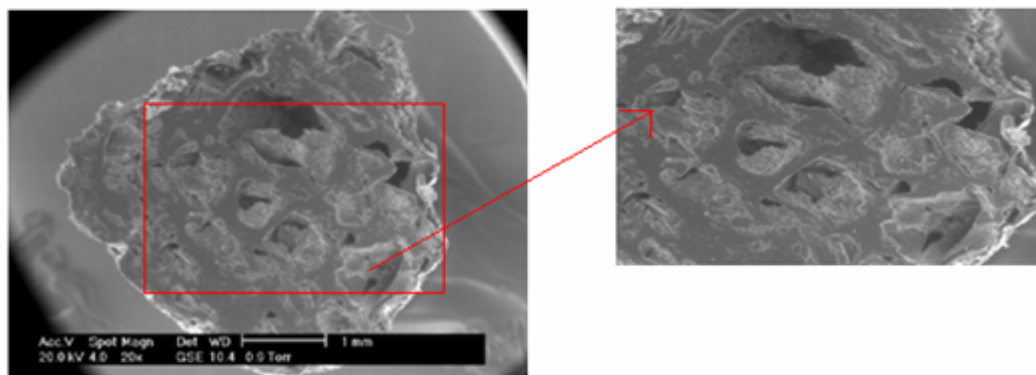


Figura 5.20: 5 % P, 30 % H, pH 4, 80°C

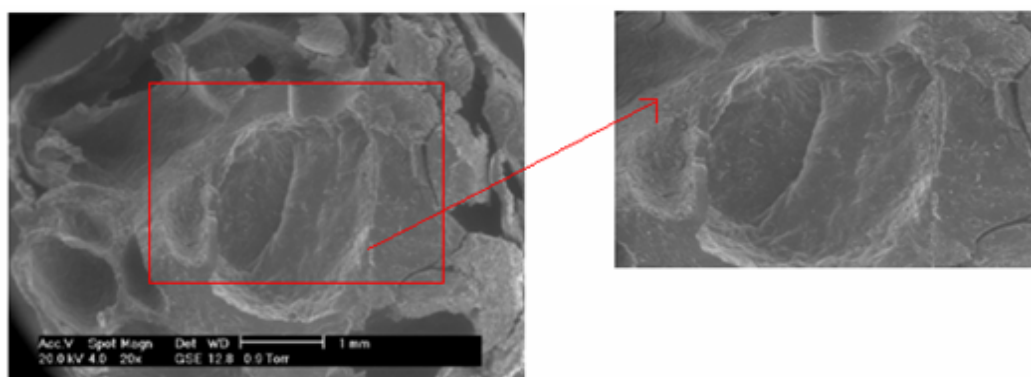


Figura 5.21: 25 % P, 30 % H, pH 7, 80°C

### 5.1.3. Análisis exploratorio wavelet

Cristal s3-s3

| Tratamiento                 | min    | 1Q     | mediana | 3Q      | max     |
|-----------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 25 % P, 30 % H, pH 4, 180°C | 486.76 | 988.34 | 1080.40 | 1178.14 | 1454.90 |
| 5 % P, 30 % H, pH 7, 180°C  | 464.87 | 971.31 | 1028.15 | 1078.45 | 1581.62 |
| 25 % P, 18 % H, pH 7, 180°C | 345.97 | 871.68 | 1004.62 | 1177.81 | 1514.58 |
| 5 % P, 18 % H, pH 4, 180°C  | 419.79 | 923.12 | 953.60  | 983.99  | 1281.61 |
| 25 % P, 18 % H, pH 4, 80°C  | 228.06 | 909.98 | 1026.69 | 1150.76 | 1727.98 |
| 5 % P, 18 % H, pH 7, 80°C   | 235.64 | 872.97 | 1012.03 | 1185.38 | 1712.90 |
| 5 % P, 30 % H, pH 4, 80°C   | 308.26 | 798.34 | 890.91  | 992.88  | 1798.97 |
| 25 % P, 30 % H, pH 7, 80°C  | 236.05 | 766.26 | 835.23  | 910.53  | 1373.46 |

| Tratamiento                 | mad    | media   | DS      | % energía |
|-----------------------------|--------|---------|---------|-----------|
| 25 % P, 30 % H, pH 4, 180°C | 139.44 | 1077.81 | 152.14  | 0.99      |
| 5 % P, 30 % H, pH 7, 180°C  | 79.10  | 1013.34 | 140.65  | 0.99      |
| 25 % P, 18 % H, pH 7, 180°C | 224.54 | 1025.30 | 207.91  | 0.99      |
| 5 % P, 18 % H, pH 4, 180°C  | 45.09  | 944.19  | 93.84   | 0.99      |
| 25 % P, 18 % H, pH 4, 80°C  | 178.51 | 1012.47 | 226.87  | 0.99      |
| 5 % P, 18 % H, pH 7, 80°C   | 223.66 | 1025.36 | 243.85  | 0.99      |
| 5 % P, 30 % H, pH 4, 80°C   | 144.38 | 896.32  | 182.131 | 0.98      |
| 25 % P, 30 % H, pH 7, 80°C  | 106.55 | 838.03  | 131.39  | 0.99      |

#### 5.1.4. Resultados

Se realizó un análisis utilizando la wavelet s8, donde se encontraron los siguientes resultados:

- El cristal que aporta la mayor cantidad de energía (99%) en todos los tratamientos es el s3-s3.
- Son suficientes alrededor de 1000 coeficientes para tener una buena representación sin pérdida de energía considerable.

- La media más grande la tiene el tratamiento 1 (25 % P, 30 % H, pH 4, 180°C) que es 10077.81 y la mínima la tiene el tratamiento 8 (25 % P, 30 % H, pH 7, 80°C.) que es 838.03.
- Los tratamientos 7 (5 % P, 30 % H, pH 4, 80°C) y 8 (25 % P, 30 % H, pH 7, 80°C) tienen los coeficientes de magnitud más chica aunque el tratamiento 7 (5 % P, 30 % H, pH 4, 80°C) contiene al coeficiente más grande en el cristal s3-s3 (1798.97) con respecto al resto de los tratamientos éste solo representa un valor atípico ya que la magnitud de los coeficientes en este tratamiento varía en un rango de (700-1100).
- Los tratamientos 2 (5 % P, 30 % H, pH 7, 180°C) y 1 (25 % P, 30 % H, pH 4, 180°C) con medias 1013.34 y 1077.40 respectivamente, tienen coeficientes de magnitud cercana a su media, es decir, no contienen coeficientes extremadamente chicos o extremadamente grandes.
- En las gráficas de cajas se aprecia una evidente separación entre los primeros cuatro tratamientos y los últimos cuatro, ya que los primeros tienen valores atípicos en un rango menor a los otros cuyos valores atípicos alcanzan valores extremos; las cajas en los tratamientos 3 (25 % P, 18 % H, pH 7, 180°C) y 6 (5 % P, 18 % H, pH 7, 80°C) son las más grandes; no así en el tratamiento 4 (5 % P, 18 % H, pH 4, 180°C) que presenta una caja muy compacta.
- Los tratamientos 1 (25 % P, 30 % H, pH 4, 180°C) y 3 (25 % P, 18 % H, pH 7, 180°C) sólo presentan valores atípicos del lado inferior a la media y los tratamientos 2 (5 % P, 30 % H, pH 7, 180°C) y 7 (5 % P, 30 % H, pH 4, 80°C) presentan muchos en ambos

lados de su media, el tratamiento 4 (5 % P, 18 % H, pH 4, 180°C) presenta pocos en ambos lados de su media.

- Los tratamientos 3 (25 % P, 18 % H, pH 7, 180°C), 6 (5 % P, 18 % H, pH 7, 80°C), 5 (25 % P, 18 % H, pH 4, 80°C), 2 (5 % P, 30 % H, pH 7, 180°C) y 1 (25 % P, 30 % H, pH 4, 180°C) tienen su media un poco arriba de la media general (1000), mientras que los tratamientos 4 (5 % P, 18 % H, pH 4, 180°C), 7 (5 % P, 30 % H, pH 4, 80°C) y 8 (25 % P, 30 % H, pH 7, 80°C) la tienen abajo.

### 5.1.5. Conclusiones

Al observar detenidamente las gráficas de cajas es evidente una separación de los tratamientos en dos grupos (1-4 y 5-8) en los que la variable en común es la temperatura. Obsérvese como las cotas de los tratamientos 1-4 están contenidas en las cotas de los tratamientos 5-8.

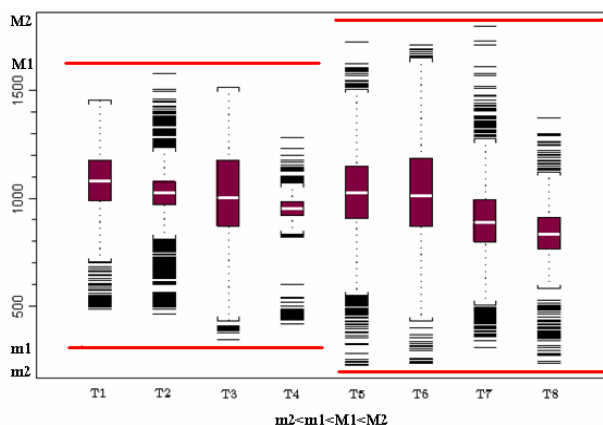


Figura 5.22: Cotas en las gráficas de cajas de los

ocho tratamientos.

Por otro lado, se puede ver que los tratamientos del grupo azul (3, 6, 1 y 4) son los que tienen menor cantidad de valores atípicos mientras que los rojos (7, 5, 8 y 2) tienen más atípicos. En particular el tratamiento de 25 % P, 18 % H, pH 7, 180°C es el que presenta menos atípicos. El factor común entre los dos tratamientos con menos atípicos es el porcentaje de humedad y el pH.

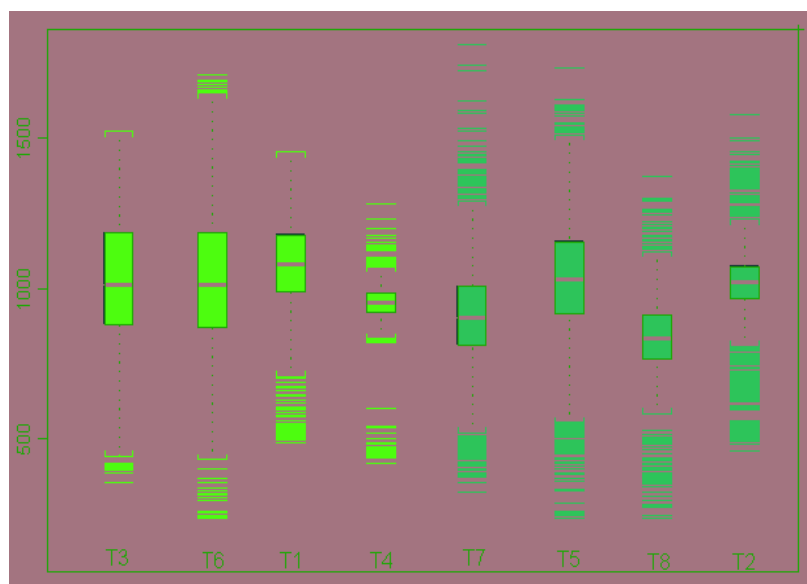


Figura 5.23: División de los tratamientos en dos grupos con respecto a la cantidad de atpicos que presentan.

Por otro lado el tratamiento más compacto es el de 5 % P, 18 % H, pH 4, 180°C, mientras que el más expandido es el de 5 % P, 18 % H, pH 7, 80°C.

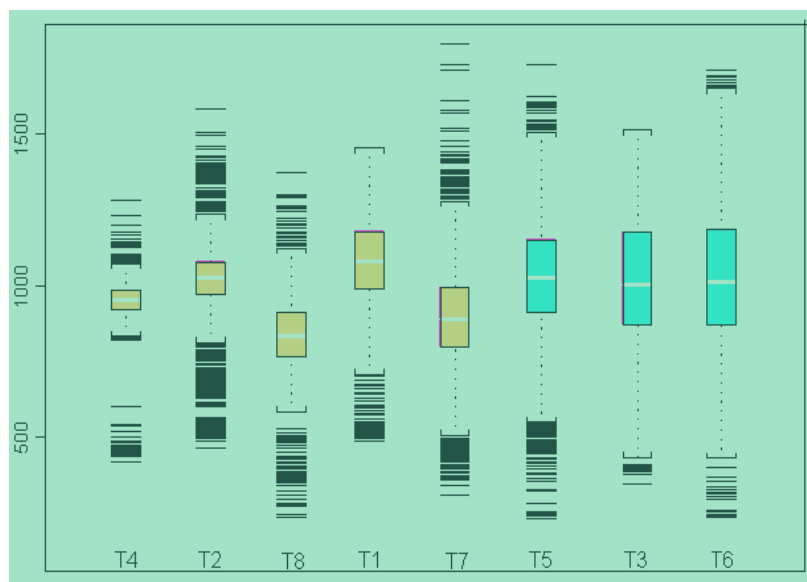


Figura 5.24: División de los tratamientos en dos grupos con respecto a su compactad.

## 5.2. Análisis de casos de Influenza

La influenza es una enfermedad clínica causada por un grupo de virus y es importante por la rapidez con que se propaga en fases epidémicas. Tiene antecedentes de ser la responsable de pandemias como la ocurrida en 1918-1919 llamada influenza española que se cree afectó a decenas de millones de habitantes y ocasionó casi 20 millones de muertes, otra es la de 1957 con la cepa H2N2 que se originó en China y se diseminó a todo el mundo; en 1968 se diseminó otra cepa, la H3N2, responsable de otra importante pandemia.

De acuerdo a la Organización Mundial de la Salud (OMS) en epidemias anuales se ve afectada entre el 5 y 15 % de la población y de tres a cinco millones de casos son severos. Entre sus características principales están: el contener en su genoma ARN monocatenario negativo, simetría helicoidal con envoltura, su forma es pleomórfica, esférica o filamentosa, siendo su tamaño entre 80 y 120nm, son sensibles al calor ( $56^{\circ}C$  30 min.) a pH 3 y a los solventes de lípidos y detergentes.

Por su material nuclear y la reactividad inmunológica se divide en tres tipos antigénicos, A, B, C. La tipo C no siempre está asociada con epidemias porque al parecer es endémica, además ésta es morfológica y genéticamente diferente de las otras y generalmente no es sintomática.

El tipo A es el más importante y tiene el mayor rango de posibles infectados, es decir, puede atacar a más individuos considerando que ataca tanto a animales como a humanos.

Todos los organismos con núcleo así como la mayoría de las bacterias y virus basan su reproducción en el genoma ADN mientras que el virus de la influenza lo basa en el

ARN; todas las mutaciones en la estructura del virus de influenza han provocado una gran cantidad de sub-tipos.

El virus de la influenza pasa de una persona a otra a través de las pequeñas partículas líquidas que una persona enferma exhala y que posteriormente son inhaladas por un individuo susceptible (dichas partículas pueden permanecer alrededor de una hora suspendidas en el aire antes de caer al suelo, y las condiciones externas pueden aumentar su tiempo de supervivencia).

La evolución estándar de la enfermedad sin considerar su tipo o variaciones es como sigue:

1. El periodo de incubación es estimado entre 18 y 72 horas.
2. El periodo sintomático es de 2 a 7 días.
3. El periodo latente termina aproximadamente 24 horas antes del periodo de incubación y el periodo de infección es de 3 a 6 días.

El virus influenza tipo A es el más común de los cuadros clínicos en el hombre y presenta la mayor variabilidad de las cepas. A partir de la pandemia de 1918-1919 ha tenido una sucesión de desplazamientos en los antígenos virales con intervalos aproximadamente de 10 años. Otro resultado de la variabilidad de cepas es la disminución de su virulencia, como sucedió en 1976 con el aislamiento de una nueva cepa (H1N1) en reclutas militares. La cepa era similar a los virus circulantes en la población porcina y se asemejaba a la cepa responsable de la pandemia de 1918-1919.



## Influenza en Canadá

Los datos corresponden a diferentes muestras tomadas en el periodo de 1994-2006 en las provincias de Canadá que a continuación se mencionan: Terranova y Labrador, Príncipe Eduardo, Nueva Escocia, Nueva Brunswick, Ontario, Manitoba, Saskatchewan, Alberta y Columbia Británica.



## Análisis Exploratorio Wavelet

Se realizaron tres análisis básicos que se pueden enumerar como sigue:

### 1a. Estaciones del año

Se consideraron los datos registrados de todas las provincias durante el periodo de 1994-2006, agrupados por estación.

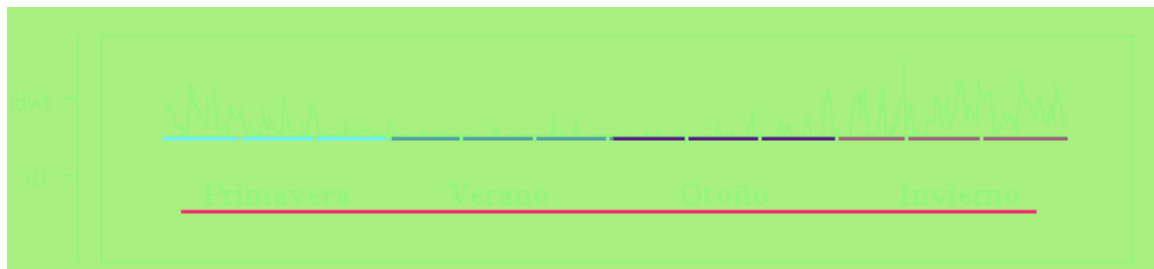


Figura 5.25: Influenza por estacin en las provincias de Canad, periodo 1994-2006.

Se puede ver que todo el año hay casos de influenza, aunque en primavera y en invierno éstos son más numerosos.

Particularmente en el invierno la epidemia es mayor en amplitud.

### 1b.-Periodos anuales

Se consideraron los datos registrados de todas las provincias durante todo el periodo de 1994-2006, agrupados por sub-periodos de un año cada uno.

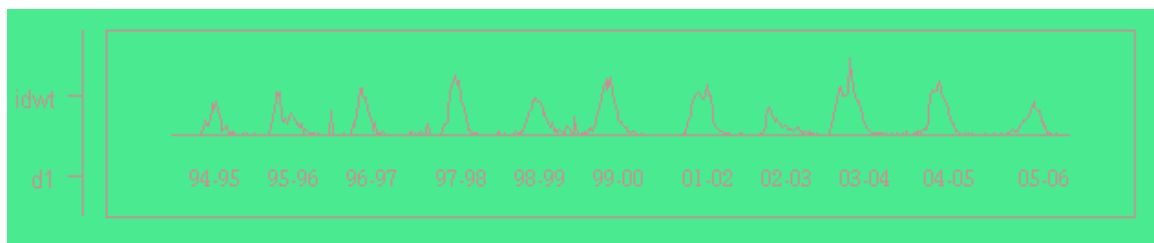


Figura 5.26: Influenza por periodos anuales en algunas provincias de Canad.

De esta gráfica observamos que no existe una relación entre el comportamiento de

la epidemia y el paso del tiempo, lo que nos impide predecir el comportamiento de ésta en años futuros.

## 2.-Una provincia, todos los años

Se consideraron los datos registrados de cada una de las provincias por separado a través de todo el periodo de estudio (1994-2006).

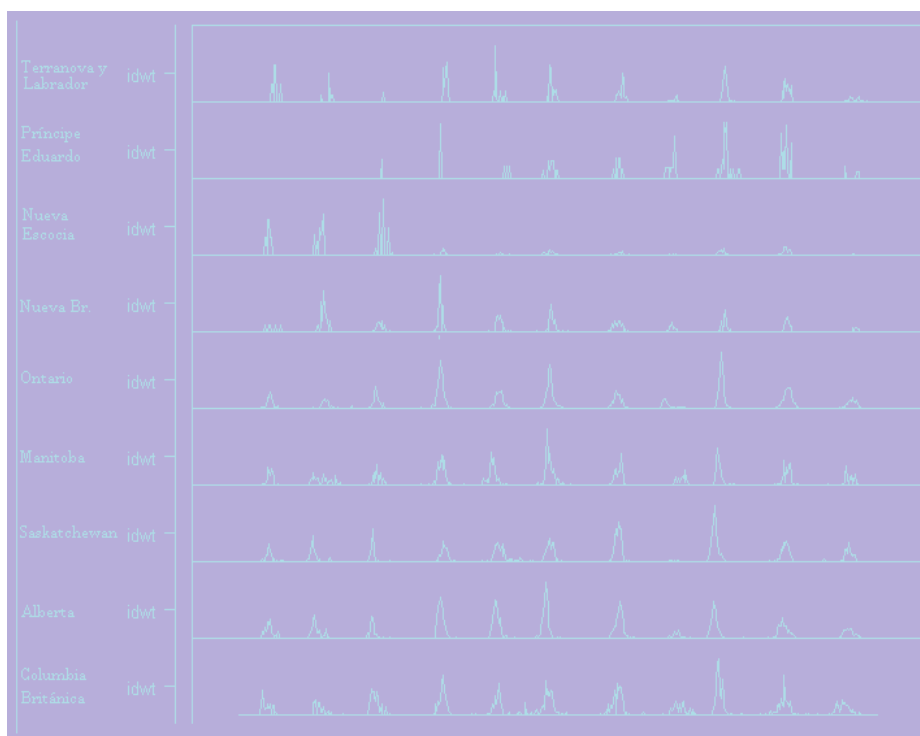


Figura 5.27: Gráfica de las provincias por separado en el periodo de tiempo estudiado.

De esta gráfica observamos que el comportamiento de la epidemia a través del periodo de estudio es muy similar en las provincias que partiendo de oeste van desde Columbia Británica hasta Nueva Brunswick.

Mientras que en Nueva Escocia, Príncipe Eduardo y Terranova y Labrador el comportamiento es totalmente diverso; lo cual posiblemente es debido a la posición geográfica de dichas provincias.

### 3.-Todas las provincias, un año

Se consideraron los datos registrados todas las provincias a través periodos anuales.

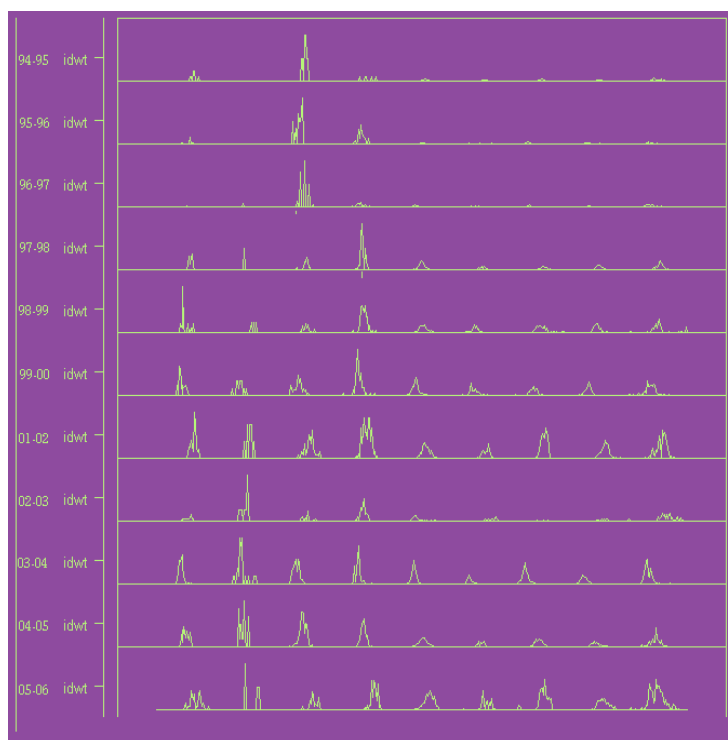


Figura 5.28: Gráfica anual de la epidemia en todas las regiones.

De esta gráfica se observa que el comportamiento de la epidemia es irregular a través de los años y se observa más concentrada en provincias del oeste.

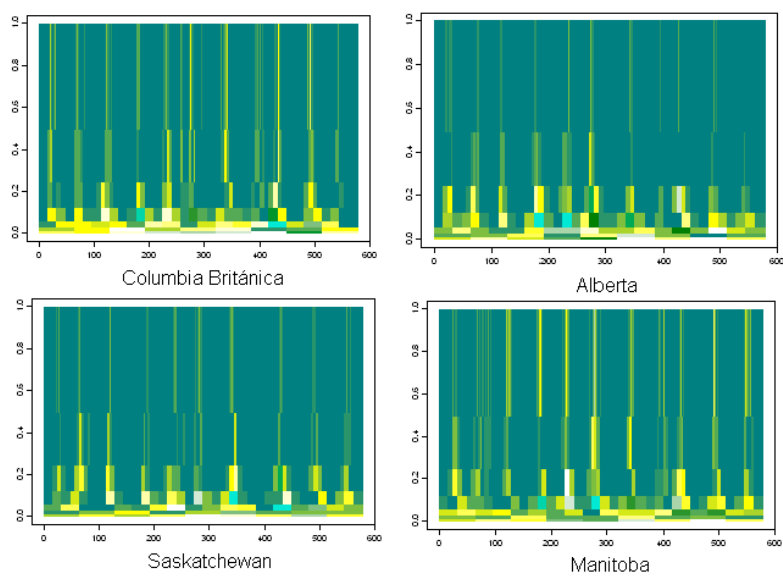


Figura 5.29: Gráficas frecuencia-escala similares

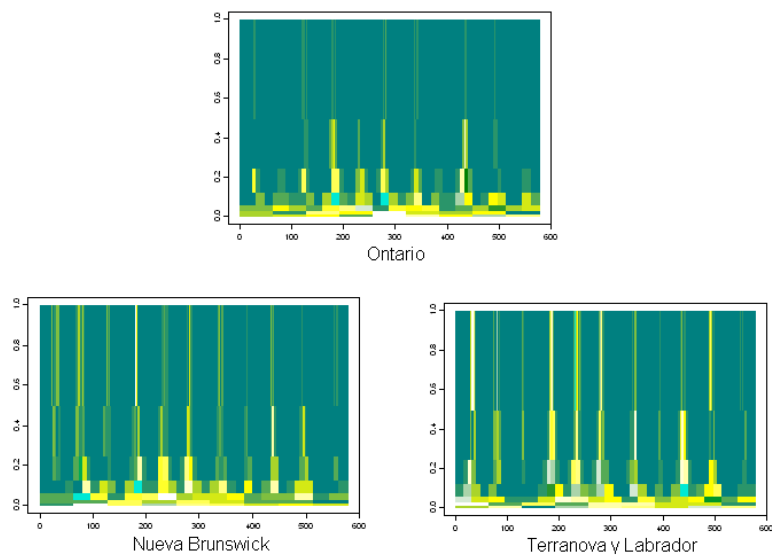


Figura 5.30: Gráficas frecuencia-escala similares

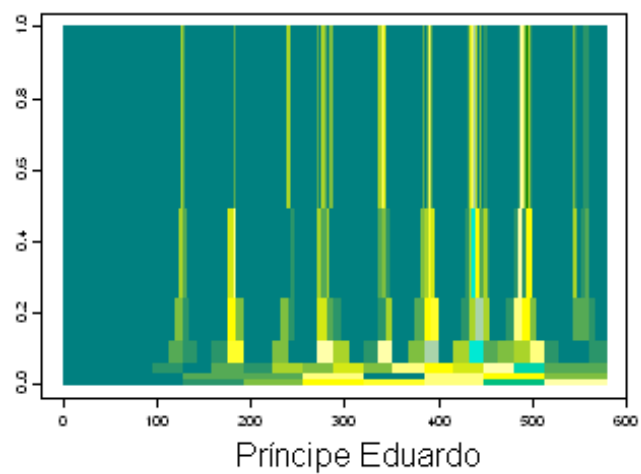


Figura 5.31: Gráfica frecuencia-escala con comportamiento diferente

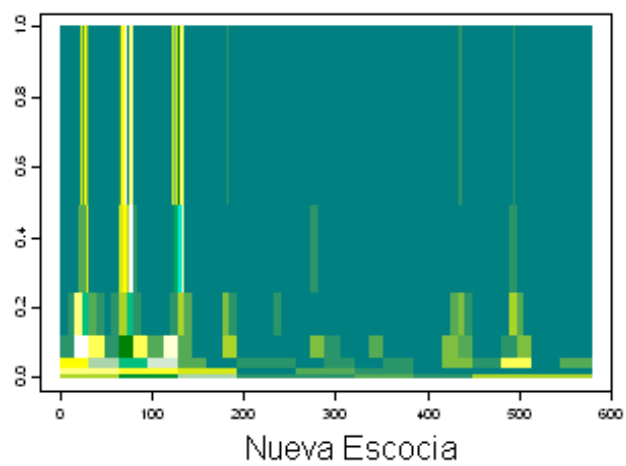


Figura 5.32: Gráfica frecuencia-escala con comportamiento diferente.

## Conclusiones

En general el comportamiento de la influenza tipo A es impredecible en el sentido de que no es posible saber si en un año en particular habrá más o menos casos que en los años anteriores, lo que se sabe es que en la primavera y en el invierno el número de casos es más elevado que en otras épocas de año y que posiblemente haya una epidemia para el oeste y una o varias diferentes para las partes más al este de Canadá.

En la figura 5.32 se observa que la provincia de Nueva Escocia presenta menos casos de influenza tipo A con respecto a las otras provincias, mientras que las provincias de Columbia Británica, Manitoba, Nueva Brunswick y Terranova y Labrador presentan más casos.

# Bibliografía

- [1] James S. Walker, A primer on Wavelets and their scientific applications, Chapman & Hall/CRC.
- [2] Andrew Bruce Hong-Ye Gao, Applied wavelet analysis with S-PLUS, Springer.
- [3] Andreas Krause, Melvin Olson, The Basics of S and S-plus, Springer.
- [4] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication
- [5] Guy P. Nason and Rainer Von Sachs, Wavelets in time-series analysis.
- [6] Christopher Torrence and Gilbert P. Compo, A practical wavelet analysis.
- [7] Brani Vidakovic, Wavelet, Wavelet-Based functional data analysis: Theory Applications and Ramifications.
- [8] Lilia Leticia Ramírez Ramírez, On the dynamics of infectiuos diseases in non homogeneous populations.
- [9] Samir Kouro R. y Rodrigo Musalem M. Tutorial a la teoría wavelet.
- [10] Olivier Rioul & Martin Vetterli, Wavelets and Signal Processing.



## REFERENCIAS

- [1] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 6.
- [2] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 6.
- [3] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 9.
- [4] Andrew Bruce Hong-Ye Gao, Applied wavelet analysis with S-PLUS, Springer, página 14.
- [5] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 44.
- [6] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 50
- [7] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 52.
- [8] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 2.
- [9] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 5.
- [10] James S. Walker, Wavelets and Their Scientific Applications, Chapman &hall/CRC, página 6.
- [11] James S. Walker, Wavelets and Their Scientific Applications, Chapman &hall/CRC, página 30.
- [12] James S. Walker, Wavelets and Their Scientific Applications, Chapman &hall/CRC, página 34.
- [13] James S. Walker, Wavelets and Their Scientific Applications, Chapman &hall/CRC, página 44.
- [14] Andrew Bruce Hong-Ye Gao, Applied wavelet analysis with S-PLUS, Springer, página 19.
- [15] Andrew Bruce Hong-Ye Gao, Applied wavelet analysis with S-PLUS, Springer, página 37.
- [16] James S. Walker, Wavelets and Their Scientific Applications, Chapman &hall/CRC, página 96.
- [17] James S. Walker, Wavelets and Their Scientific Applications, Chapman &hall/CRC, página 103.
- [18] James S. Walker, Wavelets and Their Scientific Applications, Chapman &hall/CRC, página 70.
- [19] James S. Walker, Wavelets and Their Scientific Applications, Chapman &hall/CRC, página 42.
- [20] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 168.
- [21] Brani Vidakovic, Statistical Modeling by Wavelets, A Wiley-Interscience Publication, página 177.

[22] Brani Vidakovic, *Statistical Modeling by Wavelets*, A Wiley-Interscience Publication, página 191.

[23] Brani Vidakovic, *Statistical Modeling by Wavelets*, A Wiley-Interscience Publication, página 195.