



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE TRANSFERENCIA DE  
AGUA Y SOLUTOS EN RIEGO Y DRENAJE**

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

Presenta:

**M.C. Carlos Alberto Chávez García**

Dirigida por:

**Dr. Carlos Fuentes Ruiz**

**SINODALES**

Dr. Carlos Fuentes Ruiz  
**Presidente**

Dr. Enrique González Sosa  
**Secretario**

Dr. Aldo Iván Ramírez Orozco  
**Vocal**

Dr. Manuel Zavala Trejo  
**Suplente**

Dr. Luis Rendón Pimentel  
**Suplente**

Dr. Gilberto Herrera Ruíz  
**Director de la Facultad**

Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval  
**Director de Investigación y Posgrado**

Centro Universitario

Santiago de Querétaro, Qro.

Mayo de 2010

México

## DEDICATORIA

*A mi hijo Carlos Enrique*

*A mi compañera Dannel Lizett*

*A mis padres Franco y Efigenia*

*A mis hermanas Dalia y Jazmín Azucena*

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Carlos Fuentes Ruiz, Profesor Investigador de la Universidad Autónoma de Querétaro, maestro y amigo, siempre dispuesto a transmitir el conocimiento. Agradezco su paciencia y su valioso tiempo para hacer de mí una mejor persona e investigador.

Al Dr. Enrique González Sosa, Profesor Investigador intachable de la Universidad Autónoma de Querétaro, que encuentre aquí la expresión de mis agradecimientos más sinceros.

Al Dr. Aldo Iván Ramírez Orozco, Coordinador de la Maestría en Recursos Hídricos y Ambiental de la Universidad Autónoma de Querétaro, por sus acertadas sugerencias para enriquecer el manuscrito.

Al Dr. Manuel Zavala Trejo, Profesor Investigador de la Universidad Autónoma de Zacatecas, por su pensamiento acertado y crítico para enriquecer la investigación.

Al Dr. Luis Rendón Pimentel, Gerente Nacional de los Distritos de Riego de México, quien amablemente aceptó formar parte del jurado y me dio consejos para enriquecer el manuscrito.

Al M.C. Fernando Fragoza Díaz, Coordinador de Tecnología de Riego y Drenaje del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, por poner a mi disposición los dispositivos experimentales para llevar a cabo mi investigación de los procesos en riego y drenaje.

Al M.C. Felipe Zataráin Mendoza, Subcoordinador de Contaminación y Drenaje Agrícola del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, quien con sus claros conceptos me orientó en la realización de la fase experimental de manera precisa y profesional.

Al Dr. Gilberto Herrera Ruíz, Profesor Investigador y Director de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, por su apoyo sistemático e incondicional y su orientación en mis inquietudes.

A la Dra. Rebeca del Rocío Peniche Vera, Profesora Investigadora y Coordinadora del programa de Doctorado en Ingeniería. Siempre al tanto de mi investigación y poniendo a mi disposición los elementos necesarios para culminarla.

A la Universidad Autónoma de Querétaro, Institución de excelencia académica, que me ha cobijado durante mi estancia en el posgrado. Agradezco grandemente a los investigadores que han contribuido a que lleve a feliz término mi investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), Institución de nuestra nación, que impulsa la actividad científica y académica de nuestra sociedad, por el apoyo recibido durante el desarrollo del doctorado.

Finalmente agradezco al M.C. Gerardo Núñez González, amigo y colega del doctorado, por su incondicional apoyo en la realización del experimento.

## RESUMEN

Se presenta una modelación de la transferencia de agua y transporte de solutos en sistemas de drenaje agrícola subterráneo. Las transferencias de agua se modelan con la ecuación de Richards para el proceso de infiltración y la ecuación de Boussinesq para el proceso de drenaje. El transporte de solutos acoplada a las ecuaciones anteriores se modela con la ecuación advección-dispersión. La solución de las ecuaciones se realiza de manera numérica utilizando el método de diferencias finitas. Los parámetros que intervienen en estas ecuaciones se estiman mediante la aplicación de una metodología basada en la curva granulométrica y problemas inversos. La capacidad descriptiva de las soluciones se verifica mediante un experimento realizado en laboratorio. El suelo que se utiliza es de textura limosa con características salinas. A partir del análisis granulométrico se estiman los parámetros de forma de la curva de retención  $(m,n)$ , ligados mediante modelos fractales de conductividad, y con los datos de la lámina infiltrada se realiza la modelación inversa con la ecuación de Richards a fin de encontrar los parámetros de escala  $K_s$  y  $\psi_d$  que reproduzcan los datos experimentales. Con los parámetros de escala encontrados con la ecuación de Richards, se reproduce la lámina drenada con la ecuación de Boussinesq, imponiendo una condición de radiación en los drenes, optimizando el parámetro de conductancia adimensional  $(\kappa)$ . La lámina drenada teórica no es la misma a la experimental, por lo que se procede a optimizar tres parámetros: es decir, la conductancia adimensional y los parámetros de escala de las características hidrodinámicas. Los valores que se obtienen en el proceso de drenaje son diferentes a los estimados en el proceso de infiltración, lo cual evidencia que existe un fenómeno de histéresis en el suelo. La evolución de la concentración de sales se reproduce con la ecuación advección-dispersión acoplada a la ecuación de Boussinesq, encontrando el parámetro de dispersividad  $(\lambda)$  que reprodujera los datos experimentales. Se presentan simulaciones del abatimiento del nivel freático para diferentes separaciones entre drenes, con la finalidad de mostrar escenarios posibles para eliminar los excesos de agua y mantener a las plantas en óptimas condiciones. Además, se muestra la disminución de la concentración de sales en el perfil del suelo como función del número de lavados del mismo. Finalmente, los resultados que se obtienen permiten recomendar la metodología de caracterización hidrodinámica empleada y las soluciones mostradas, para estudiar la transferencia de agua y transporte de solutos en el diseño de sistemas de drenaje agrícola parcelario.

**(Palabras clave:** ecuación de Richards, ecuación de Boussinesq, ecuación advección dispersión, diferencias finitas, características hidrodinámicas, modelación inversa)

## SUMMARY

A modeling of the water transfer and solutes transport in agricultural drainage systems is presented. The water transfer is modeled with Richards equation for the infiltration process and Boussinesq equation for the drainage process. The solutes transport coupled to the previous equations is modeled with the advection-dispersion equation. The solution of the equations is developed in a numerical way using the finite differences method. The parameters that intervene in these equations are estimated by means of the application of a methodology based on the granulometric curve and inverse problems. The descriptive capacity of the solutions is verified by an experiment conducted in the laboratory. A silty texture with salty features soil was used. From granulometric analysis, parameters of the retention curve ( $m, n$ ) were estimated, which are linked to fractal conductivity models. With the information of water infiltration data the inverse modeling is developed by means of the Richards equation in order to find the scale parameters  $K_s$  and  $\psi_d$  that reproduce the experimental information. With the parameters of scale found by the Richards equation, the drained depth is reproduced with the Boussinesq equation, by imposing a radiation condition in drain and optimizing the dimensionless conductance parameter ( $\kappa$ ). The theoretical drained depth is not the same to the experimental one, so three parameters are proceeded to optimize: the dimensionless conductance and the scale parameters of the hydrodynamic characteristics. The values that are obtained in the drainage process are different from those estimated in the infiltration process, which suggests that a phenomenon of hysteresis exists in the soil. The salt concentration evolution is reproduced with the advection-dispersion equation coupled to the Boussinesq equation, in order to find the dispersivity parameter ( $\lambda$ ) that reproduces the experimental data. There appear simulations of the water table drawdown for different separations between drains, to show possible scenarios to eliminate the water excess and to support plants in ideal conditions. Decrease in salt concentration in the soil profile as a function of the number of soil washes is shown. Finally, the general results allow the recommendation of both the methodology of hydrodynamic characterization used and the proposed solutions, in order to study the water transference and transport of solutes in the design of subsurface agricultural drainage system.

**(Key words:** Richards equation, Boussinesq equation, advection dispersion equation, finite difference, hydrodynamic characteristics, inverse modeling)

## ÍNDICE

DEDICATORIA.....	i
AGRADECIMIENTOS .....	ii
RESUMEN .....	iv
SUMMARY .....	v
ÍNDICE .....	vi
ÍNDICE DE CUADROS .....	x
ÍNDICE DE FIGURAS .....	xi
1. INTRODUCCIÓN.....	1
2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS .....	5
3. ECUACIONES DE BASE.....	7
3.1. Propiedades generales de los medios porosos .....	7
3.1.1. Propiedades de masa y de volumen .....	7
3.1.2. Propiedades de energía .....	12
3.1.3. El potencial de presión del agua en el suelo.....	13
3.2. Principio de conservación de masa .....	15
3.3. Ley de Darcy .....	18
3.4. Ecuación de Transferencia.....	20
3.4.1. La ecuación de Richards.....	21
3.4.2. La ecuación Fokker-Planck .....	22
3.5. Ecuación de Boussinesq .....	23
3.6. Transporte de solutos .....	24
3.6.1. La ecuación de conservación de masa .....	24
3.6.2. Solutos almacenados en el suelo.....	27
3.6.3. Adsorción .....	28

3.6.4. Reacciones .....	31
3.7. Las características hidrodinámicas del suelo .....	32
3.7.1. Curva característica del potencial e histéresis .....	32
3.7.1.1. Curvas de ajuste para obtener la curva de retención.....	35
3.7.2. La conductividad hidráulica de los suelos no saturados.....	38
3.7.2.1. Curva característica de la conductividad e histéresis .....	39
3.7.2.2. Modelos de ajuste para obtener la curva de conductividad .....	41
3.8. Métodos para obtener las características hidrodinámicas .....	45
3.8.1. Métodos directos .....	46
3.8.2. Métodos indirectos .....	47
3.8.3. Métodos inversos .....	48
3.9. Estimación de parámetros de forma de la curva de retención a partir de la curva granulométrica y la porosidad total.....	49
3.10. Estimación de los parámetros de escala a partir del método de estimación de parámetros y una prueba de infiltración .....	50
4. LA INFILTRACIÓN Y EL TRANSPORTE DE SOLUTOS.....	52
4.1. Soluciones analíticas de la ecuación de Richards .....	53
4.1.1. El modelo de Philip.....	54
4.1.2. La solución con presión positiva en la superficie de Parlange y colaboradores .....	55
4.1.3. La solución cuasi-lineal de la infiltración vertical de Fuentes y colaboradores .....	60
4.2. Los métodos numéricos.....	63
4.3. Una solución en diferencias finitas para la transferencia de agua.....	65
4.4. Una solución en diferencias finitas para el transporte de solutos .....	71
4.5. Algoritmo de Thomas.....	76
4.6. Condiciones de frontera.....	78

4.6.1. Condición de Dirichlet .....	78
4.6.2. Condición de Neumann.....	79
4.6.3. Condición de Robbins .....	83
4.7. Aplicaciones .....	88
4.7.1. Preparación del experimento .....	88
4.7.2. Caracterización del suelo .....	90
4.7.2.1. Análisis físicos .....	90
4.7.2.2. Análisis químicos .....	92
4.7.2.3. Caracterización hidráulica del suelo .....	95
4.7.3. Resultados .....	96
4.7.3.1. Características hidráulicas de los sitios .....	96
4.7.3.2. Características químicas de los sitios .....	99
4.7.3.3. La prueba de infiltración unidimensional.....	99
4.7.3.4. El problema inverso y los parámetros de escala.....	104
5. EL DRENAJE AGRÍCOLA Y EL TRANSPORTE DE SOLUTOS .....	111
5.1. Revisión de literatura.....	112
5.2. La capacidad de almacenamiento .....	114
5.3. La porosidad drenable .....	114
5.4. Condiciones inicial y de frontera.....	118
5.5. Soluciones analíticas de la ecuación de Boussinesq .....	121
5.6. Una solución en diferencias finitas para la transferencia de agua.....	126
5.7. Una solución en diferencias finitas para el transporte de solutos .....	132
5.8. Algoritmo de Thomas.....	137
5.9. Condiciones de frontera.....	139
5.9.1. Condición de Dirichlet .....	139

5.9.2. Condición de radiación lineal .....	141
5.9.3. Condición de radiación fractal .....	146
5.10. Comparación con una solución analítica .....	148
5.11. Comparación de los dos esquemas numéricos .....	155
5.12. Experimento en el módulo de drenaje .....	158
5.12.1. Análisis de la lámina drenada.....	158
5.12.2. Análisis de la histéresis .....	165
5.12.3. Análisis del contenido de sales.....	167
5.13. El problema inverso: cálculo de la separación entre drenes.....	176
5.14. Simulación de lavado de suelos salinos .....	180
6. CONCLUSIONES .....	183
7. REFERENCIAS .....	187

## ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro	Página
4.1. Parámetros físicos de los sitios .....	96
4.2. Diámetro y frecuencia acumulada en los sitios de muestreo.....	97
4.3. Valores obtenidos de $D_0$ y $m$ para los modelos de conductividad de la media geométrica, del poro neutral y del poro grande.....	98
4.4. Análisis químicos de la muestras de suelo.....	100
4.5. Valores de los parámetros físicos del suelo .....	102
4.6. Valores de los parámetros de ajuste para el cálculo de la lámina infiltrada. ....	105
4.7. Parámetros de escala obtenidos a partir de la curva granulométrica y con el algoritmo Marquardt.....	109
5.1. Valores de los parámetros de ajuste y parámetros derivados para el cálculo de la lámina drenada .....	160
5.2. Volumen histerésico de la curva de retención de humedad .....	166
5.3. Valores de $\lambda$ y $\kappa_s$ obtenidos con los tres modelos de poro para el transporte de solutos, ajustando la concentración.....	170
5.4. Valores de $\lambda$ y $\kappa_s$ obtenidos con los tres modelos de poro para el transporte de solutos, ajustando la masa acumulada en el tiempo.....	174
5.5. Valores de $\lambda$ obtenidos con los tres modelos de poro para el transporte de solutos, ajustando la masa acumulada de solutos.....	175
5.6. Tiempo de inundación permisible en cultivos .....	177
5.7. Efecto de la salinidad sobre la productividad de los cultivos del Distrito de Riego 038, Río Mayo, Sonora.....	181

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Página</b>
3.1. Composición del suelo .....	7
3.2. Presión superatmosférica y subatmosférica abajo y arriba de una superficie libre de agua (Hillel, 1971).....	15
3.3. Volumen elemental del suelo para obtener el principio de conservación de masa.....	16
3.4. Forma general de las isotermas de adsorción.....	30
3.5. Curva característica de humedad (curva frontera de mojado) para sable de l'isere (Haverkamp, 1983).....	33
3.6. La Histéresis: a) curva frontera de mojado; b) curva frontera de secado; c) curvas primarias de secado; d) curvas primarias de mojado; e) curvas interiores (Childs, 1967).....	35
3.7. Curva característica de conductividad en función del contenido de humedad para sable de l'isere (Haverkamp, 1983). .....	39
3.8. Curvas experimentales describiendo la histéresis en la relación $K(\theta)$ . La curva AC describe la relación durante el secado de un suelo completamente saturado inicialmente. Las curvas BDC y CEB son las curvas fronteras de secado y mojado en la histéresis, respectivamente (Poulovassillis y Tzimas, 1975).....	40
4.1. Discretización del medio.....	66
4.2. Módulo de drenaje.....	89
4.3. Croquis de localización de los sitios de muestreo .....	89
4.4. Coordenadas de los sitios de muestreo .....	90
4.5. Triángulo de texturas.....	91
4.6. Curva granulométrica del sitio uno ajustada con los tres modelos de poro para el sitio 1.....	98
4.7. Curva granulométrica del sitio dos ajustada con los tres modelos de poro para el sitio 2.....	99
4.8. Proceso de secado del suelo .....	101
4.9. Colocación del suelo en el módulo de drenaje.....	101

4.10. Lámina infiltrada acumulada medida en el módulo de drenaje.....	103
4.11. Descripción de la lámina infiltrada experimental con el modelo del poro de la media geométrica.....	106
4.12. Descripción de la lámina infiltrada experimental con el modelo del poro neutral.....	106
4.13. Descripción de la lámina infiltrada experimental con el modelo del poro grande.....	107
4.14. Curva característica de humedad (a) y curva de conductividad hidráulica (b) obtenidas con los tres modelos de poro: poro de la media geométrica, poro neutral y poro grande.....	108
4.15. Evolución del frente aparente de humedad en el módulo de drenaje en el dren izquierdo, centro y dren derecho .....	110
4.16. Evolución del frente aparente de humedad a lo largo del módulo.....	110
5.1. Esquema de un sistema de drenaje agrícola subterráneo .....	119
5.2. El dominio de resolución de la ecuación de Boussinesq: $\omega$ es el factor de interpolación en el tiempo y $\gamma$ es el factor de interpolación en el espacio.....	127
5.3. Suma de los cuadrados de los errores con diferentes valores de M y $\omega$ .....	150
5.4. Evolución de la carga variando el parámetro de interpolación en el espacio ( $\omega$ ): a) Abatimiento de la superficie libre en un día, b) Abatimiento de la superficie sobre el dren en un día.....	152
5.5. Abatimiento de la superficie libre a) $M \cong 0.43$ , b) $M \cong 0.04$ .....	153
5.6. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica: a) Abatimiento de la superficie libre, b) Evolución de la lámina drenada acumulada .....	154
5.7. Comparación de los dos esquemas numéricos: a) abatimiento de la superficie libre, b) evolución de la lámina drenada, usando las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange.....	156
5.8. Comparación de los dos esquemas numéricos: a) abatimiento de la superficie libre, b) evolución de la lámina drenada, usando las características hidrodinámicas de van Genuchten.....	157
5.9. Evolución de la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución en diferencias finitas considerando: capacidad de almacenamiento variable, condición de radiación fractal en los drenes y el modelo del poro de la media geométrica. ....	161

5.10. Evolución teórica de la superficie libre del agua en el suelo calculada con el modelo del poro de la media geométrica. ....	161
5.11. Evolución de la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución en diferencias finitas considerando: capacidad de almacenamiento variable, condición de radiación fractal en los drenes y el modelo del poro neutral. ....	162
5.12. Evolución teórica la superficie libre del agua en el suelo calculada con el modelo del poro neutral. ....	162
5.13. Evolución de la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución en diferencias finitas considerando: capacidad de almacenamiento variable, condición de radiación fractal en los drenes y el modelo del poro grande. ....	163
5.14. Evolución teórica la superficie libre del agua en el suelo calculada con el modelo del poro grande. ....	163
5.15. Evolución teórica de la carga hidráulica sobre el dren calculado con los tres modelos de poro: poro de la media geométrica, poro neutral y poro grande.....	164
5.16. Evolución teórica de la carga hidráulica al centro de los drenes calculado con los tres modelos de poro: poro de la media geométrica, poro neutral y poro grande.....	164
5.17. Histéresis capilar en la característica de humedad para el modelo del poro grande.....	166
5.18. Histéresis capilar en la característica de humedad para el modelo de la media geométrica y el poro neutral.....	167
5.19. Evolución de la temperatura del agua en el agua drenada. ....	168
5.20. Evolución de la conductividad eléctrica del agua en dS/m.....	168
5.21. Evolución de la concentración en g/l medida en el agua drenada.....	169
5.22. Evolución de la concentración de sales medida y estimada con la solución numérica. ....	171
5.23. Gasto de solutos (g/h) del sistema de drenaje con el modelo del poro grande.....	172
5.24. Evolución de la masa acumulada con la solución numérica obtenida con el modelo del poro grande, optimizando $\lambda$ y $\kappa_s$ .....	173
5.25. Optimización de la masa acumulada con el modelo del poro grande, asumiendo el valor de $\kappa_s$ como constante. ....	176

5.26. Abatimiento del nivel freático en el centro de los drenes a distintas separaciones con una profundidad de drenes de 1.50 metros .....	179
5.27. Abatimiento del nivel freático en el centro de los drenes a distintas separaciones con una profundidad de drenes de 2.00 metros .....	179
5.28. Evolución de la concentración de sales en el suelo al aplicar los lavados .....	182

# 1. INTRODUCCIÓN

En México se tienen 6.46 millones de hectáreas bajo riego, de los cuales 3.50 millones se encuentran distribuidos en los 85 Distritos de Riego y el resto en poco más de 39 mil Unidades de Riego, ubicados principalmente en el centro y norte del país (CONAGUA, 2010). Uno de los principales problemas que se ha venido observando en los últimos años es el ensalitramiento de las zonas de riego y por consiguiente el abandono de estos terrenos. Hasta el año 2000, se estimaba que 2 millones de hectáreas bajo riego tenían niveles bajos de producción por la influencia salina en las tierras agrícolas. El proceso de ensalitramiento bajo riego ha adquirido magnitudes considerables, provocando que en la actualidad, el 33.0% de la superficie bajo riego se encuentre afectada por algún grado de salinidad, disminuyendo notablemente la productividad de algunos distritos de riego y causando pérdidas económicas considerables al país.

Ante el grado de afectación de la salinidad en los distritos de riego del país, 10,000 ha anuales (Feuchter, 2000), una alternativa técnica y económica para recuperar el suelo es el drenaje agrícola subterráneo, considerando siempre la interacción de esta tecnología con el medio ambiente. Estos sistemas, abaten los niveles del manto freático y disminuyen la concentración de sales en el perfil del suelo. Sin embargo, dado que una de las causas que originan los mantos freáticos someros en las zonas de riego son los riegos excesivos, el proceso de infiltración debe también ser estudiado.

La infiltración del agua puede ser modelado siguiendo dos enfoques: el primero está basado en las observaciones empíricas y directamente tratados como tales, resultando leyes de infiltración como las de Kostiakov (1932) y Horton (1940); y el segundo que viene de principios primeros y de las propias observaciones, como la

ley de Green y Ampt (1911) soportada en las leyes de Poiseuille (1840) en los tubos capilares y de Darcy (1856) para el conjunto de los capilares en cuestión.

La ley de Darcy es la más ampliamente utilizada para el estudio del movimiento del agua en el suelo y así como en otros medios porosos. Por otra parte el movimiento de los solutos es modelado con la ley de Fick. Estas leyes dinámicas empíricas combinadas con el principio de conservación de la masa forman el cuerpo fundamental de la descripción de los movimientos del agua y solutos en el suelo. Las ecuaciones de transferencia de agua y de solutos resultantes, en particular, tienen un interés fundamental en la agricultura. Éstas intervienen en la descripción de la aportación del agua a las plantas, en la evacuación de la misma y en el posible suministro de los nutrientes.

Dada la importancia de los procesos de aporte y evacuación del agua en los sistemas agrícolas se han llevado a cabo múltiples investigaciones. Por una parte la validación de las ecuaciones diferenciales que resultan de los principios anteriormente mencionados, y por otra parte cuales son las condiciones matemáticas que reflejan la dinámica del agua en tales sistemas. Las ecuaciones diferenciales del movimiento no son fáciles de integrar para condiciones iniciales y de frontera arbitrarias. La relación entre la masa y la energía generalmente es no lineal. Las condiciones de frontera tampoco son usuales.

Hay ecuaciones diferenciales que pueden ser utilizadas dependiendo del grado de descripción de los procesos. Desde la ecuación de Navier-Stokes que demanda la topología precisa de la red de canales implicados en el medio poroso, hasta la ley de Darcy que proporciona una relación fenomenológica entre el movimiento del agua y su cambio de energía con respecto a niveles de referencia. El estudio de la transferencia de masa y energía en los sistemas de drenaje puede ser abordado a

dos escalas de análisis: la escala macroscópica donde las transferencias de agua son descritas por la ecuación de Richards, que resulta de la combinación del principio de conservación de masa y la ley de Darcy, y la escala megascópica donde las transferencias de agua son descritas por la ecuación de Boussinesq, que resulta del principio de conservación de masa y de la ley de Darcy ponderada en el espacio en la vertical; en la primera escala de análisis, la velocidad promedio del agua en el suelo es calculada con la ley de Darcy, mientras que en la segunda la velocidad media es calculada con la ley de Darcy como un promedio en la vertical.

Por su parte las sustancias, siguiendo esencialmente el movimiento del agua, siguen la ley de Fick. Esta ley es fenomenológica como la ley de Darcy. El propio transporte de las sustancias en el agua sería incompleto sino se agregan términos convectivos. Lo anterior resulta en la ecuación de advección dispersión, nombrada por la gravedad y por la ley de Fick. La sustancia también está en la fase gaseosa del suelo y adsorbida en la fase sólida; la primera se desprecia con fines de modelación del transporte en agua, pero es importante en cuanto a la cantidad de fertilizantes que se van a la atmósfera en un momento dado, y para incorporar la segunda se debe conocer la relación entre la sustancia que transporta el agua y la que adsorbe e intercambia la estructura sólida del suelo, esta relación es conocida como la isoterma de adsorción.

Las ecuaciones no serán cerradas en el sentido en que los principios de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento no proporcionan ecuaciones de estado. La relación entre el volumen de agua y su propia energía deberán ser proporcionadas y representadas analíticamente, en la ley de Darcy la capacidad de conducir deberá ser también dada. En cuanto a los solutos, la relación entre la cantidad de sustancia en el líquido y la cantidad adsorbida por los sólidos también debe ser especificada.

Cuenta tenida de lo expuesto anteriormente es claro que se deben resolver las ecuaciones diferenciales involucradas en procesos tan delicados. Ellas han sido resueltas analíticamente bajo condiciones limitadas y sin embargo de interés práctico. No obstante, las soluciones se establecen bajo condiciones de isotropía y homogeneidad de los medios y en tal sentido, son limitados. Existen por otra parte métodos numéricos que permiten incorporar la anisotropía y heterogeneidad del espacio con la finalidad de representar los fenómenos de riego y drenaje que se dan. En consecuencia, nos proponemos resolver las ecuaciones diferenciales de transferencia de agua y solutos en los suelos ya sea a la escala microscópica de la columna o macroscópica de una hectárea con el método de diferencias finitas para incorporar heterogeneidades y anisotropía en los medios donde el agua se mueve. Así, serán planteadas las ideas en las hipótesis y objetivos del documento.

## 2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Los objetivos que se persiguen en el trabajo son los siguientes:

- a) Describir y analizar la transferencia de agua y transporte de solutos en los suelos parcialmente saturados, mediante la resolución numérica de la ecuación de Richards y de la ecuación de advección-dispersión.
- b) Describir y analizar la transferencia de agua y el transporte de solutos en la zona no saturada en sistemas de drenaje parcelario mediante la resolución numérica de la ecuación de Boussinesq y de la ecuación de advección-dispersión.
- c) Mediante las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales mencionadas, se pueden reproducir soluciones analíticas particulares que coincidan con datos medidos en campo o laboratorio (método inverso).

Bajo las siguientes hipótesis:

- a) El transporte de agua y solutos en el suelo se puede describir acoplando las soluciones numéricas de las ecuaciones de Richards y Boussinesq con la solución numérica de la ecuación advección-dispersión y, bajo las siguientes hipótesis: suelo indeformable, agua incompresible, medio isotrópico, no existe histéresis y el flujo es isotérmico.

Para cumplir con los objetivos del presente trabajo, el documento está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo de ecuaciones de base se exponen los conceptos fundamentales del medio poroso, las ecuaciones diferenciales que son objeto de estudio, y sus deducciones. También, se exponen las características hidrodinámicas del suelo, los diferentes métodos para obtenerlas y el procedimiento que se seguirá para estimarlas en este trabajo.

En el capítulo de la infiltración y el transporte de solutos se presentan soluciones analíticas de la ecuación de Richards que han permitido validar esquemas numéricos. Así mismo, se describen las soluciones obtenidas en diferencias finitas para la transferencia de agua y el transporte de solutos. Además, la solución presentada, es utilizada para reproducir los datos experimentales que son obtenidos de una prueba de infiltración en un módulo de drenaje realizado en laboratorio, previa caracterización del medio.

En el capítulo de el drenaje agrícola y el transporte de solutos se muestran algunas soluciones analíticas particulares de la ecuación de Boussinesq y las soluciones en diferencias finitas desarrolladas para la transferencia de agua y el transporte de solutos. También, se muestra la validación de los esquemas numéricos con una solución analítica reportada en la literatura, así como su aplicación a datos obtenidos de un experimento de drenaje realizado en laboratorio. Además, con el uso de las soluciones numéricas se presenta el problema inverso, que consiste en calcular la separación óptima entre drenes y la simulación de lavado de sales en un suelo dado.

En el capítulo de conclusiones se muestra que las soluciones numéricas presentadas de las ecuaciones de Richards, Boussinesq y advección-dispersión, reproducen de buena manera los datos experimentales, dado un criterio de error. Y se dan los elementos suficientes para recomendar la metodología propuesta como una herramienta útil para diseñar los sistemas de drenaje agrícola subterráneo que permitan el desarrollo óptimo de los cultivos.

### 3.ECUACIONES DE BASE

#### 3.1. Propiedades generales de los medios porosos

##### 3.1.1. Propiedades de masa y de volumen

El suelo está compuesto de tres fases: sólida, líquida y gaseosa, cuya proporción y composición depende de la naturaleza del suelo y de las condiciones ambientales (humedad, temperatura, etc.). La fase sólida que generalmente es la dominante, está compuesta de minerales o partículas de roca y materia orgánica, mientras que la fase líquida está constituida por el agua del suelo y la fase gaseosa, incluido el vapor de agua, que ocupa los espacios de los poros que no están ocupados por el agua. En la Figura 3.1 son mostradas las principales variables volumétricas y de masa que caracterizan al suelo a nivel macroscópico. Las relaciones entre ellas se exponen a continuación.

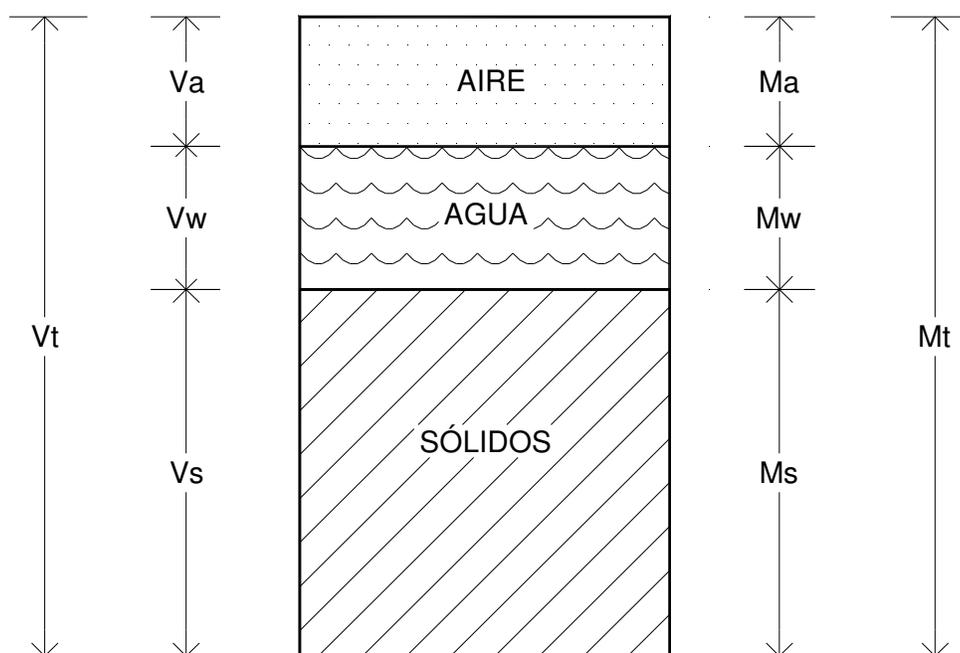


Figura 3.1. Composición del suelo

donde  $V_t$  es el volumen total del suelo,  $V_s$  el volumen de los sólidos,  $V_w$  el volumen del agua,  $V_a$  el volumen del aire,  $M_t$  la masa total del suelo,  $M_s$  la masa de los sólidos,  $M_w$  la masa del agua y  $M_a$  la masa del aire.

Siguiendo la notación de la Figura 3.1, el volúmen total de lo sólido ( $V_t$ ) es igual a la suma del volumen de los solidos ( $V_s$ ) y el volumen del vacío ( $V_v$ ):

$$V_t = V_s + V_v \quad (3.1)$$

Se define la porosidad volumétrica, o simplemente porosidad del medio, como la fracción que ocupa el volumen vacío con respecto al volumen total.

$$\phi = \frac{V_v}{V_t} \quad (3.2)$$

La porosidad es, precisamente, el parámetro fundamental para describir el medio poroso como el suelo; su determinación es de fundamental importancia en todo estudio del mismo. Para determinarla se introducen diferentes densidades.

De acuerdo con la Figura 3.1, la masa total ( $M_t$ ) está compuesta por la masa de los solidos ( $M_s$ ) y las masas de los fluidos que en un momento dado pueden ocupar el espacio vacío. En el fenómeno que nos ocupa, el espacio vacío es igual a la masa del agua ( $M_w$ ) y la del aire ( $M_a$ ).

$$M_{th} = M_s + M_w + M_a \quad (3.3)$$

La masa del suelo seco ( $M_t$ ) es aproximadamente igual a la masa de los sólidos, ya que la masa del aire es despreciable en relación a la masa de los sólidos:  $M_t = M_s + M_a \approx M_s$ . Se define la densidad total del suelo (seco) o densidad total ( $\rho_t$ ) del medio (seco), llamada también densidad aparente, como:

$$\rho_t = \frac{M_t}{V_t} \quad (3.4)$$

La densidad de los sólidos ( $\rho_o$ ) será igual a la masa de los sólidos sobre el volumen que ellos ocupan en el espacio, y dado que la masa del aire se considera despreciable, queda definida por:

$$\rho_o = \frac{M_t}{V_s} \quad (3.5)$$

Esta densidad, para muchos fines, es tomada como la densidad de las partículas de cuarzo:  $\rho_o = 2.65 \text{ g/cm}^3$ .

La combinación de las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.4) y (3.5) proporciona la relación entre la porosidad total del suelo y sus dos densidades, a saber:

$$\phi = 1 - \frac{\rho_t}{\rho_o} \quad (3.6)$$

Esta relación es de fundamental importancia para estimar la porosidad del medio ya que las dos densidades que intervienen son de, relativamente, fácil acceso en la experimentación. En el movimiento de fluidos en un medio poroso, sobre todo cuando se analizan dos fases (agua y aire), es conveniente señalar que la porosidad es igual a la suma del contenido volumétrico de humedad ( $\theta$ ) y el contenido volumétrico de aire ( $\theta_a$ ):

$$\phi = \theta + \theta_a \quad (3.7)$$

Aquí se estará interesado principalmente en el análisis del movimiento del agua, razón por la cual, se define explícitamente el contenido volumétrico del agua:

$$\theta = \frac{V_w}{V_t} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \phi \quad (3.8)$$

Para estimar el contenido volumétrico de agua, la variable de acceso, generalmente, es el contenido gravimétrico de agua ( $\omega$ ) definido por  $\omega = M_w / M_t$ , cuya relación con el contenido volumétrico es la siguiente:

$$\theta = \left( \frac{\rho_t}{\rho} \right) \omega \quad (3.9)$$

donde  $\rho = M_w/V_w$  es la densidad del agua.

En los estudios subsecuentes se hará mención del grado de saturación del agua ( $S_w$ ), es decir, el volumen de agua ocupado en el volumen vacío, a saber:

$$S_w = \frac{\theta}{\phi} \quad ; \quad 0 \leq S_w \leq 1 \quad (3.10)$$

Es importante señalar que en un medio poroso aparentemente totalmente saturado con agua, generalmente queda atrapado en su geometría interna una cierta cantidad del otro fluido (aire), razón por la cual, se introduce el concepto de contenido volumétrico a saturación natural ( $\theta_s$ ). Para los fines de esta investigación,  $\theta_s$  será tomado como la porosidad total ( $\phi$ ):  $\theta_s \approx \phi$ . Esta hipótesis es probablemente fuerte ya que Rogowski (1971) argumenta que aproximadamente  $0.8 < \theta_s/\phi < 1$ , y señala que la relación es dinámica. Sin otra forma de proceder, y para facilitar el análisis se asume la igualdad.

Otro índice importante, sobre todo en la interacción entre los sólidos y el vacío, es la relación de vacíos ( $e$ ) definida como la razón entre el volumen vacío y el volumen de los sólidos, ampliamente utilizado en la mecánica de los suelos. Su relación con la porosidad es la siguiente:

$$e = \frac{\phi}{1-\phi} \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Propiedades de energía

Para describir el movimiento o comportamiento del agua en el suelo, es necesario conocer el estado de energía del agua en el medio poroso, ya que el flujo ocurre de mayor a menor energía (Baver *et al.*, 1972). El agua presente en el suelo, como cualquier cuerpo en la naturaleza, puede ser caracterizada por un estado de energía. Diferentes formas y cantidades de energía determinan este estado. La física clásica reconoce dos formas principales de energía: energía cinética ( $E_C$ ) y energía potencial ( $E_P$ ). Así, la energía total ( $E_T$ ) del agua en el medio poroso es igual a la suma de sus energías cinética y potencial.

En el estudio del movimiento del agua en los medios porosos la energía cinética es generalmente despreciable con respecto a la energía potencial. Por otra parte, la energía potencial es fundamental en la caracterización del estado de energía del agua en el medio. La energía potencial del agua en el medio poroso puede ser separada en dos componentes principales: componente potencial gravitacional y potencial de presión.

La expresión de la energía gravitacional es  $E_G = mgz$ , donde  $z$  es la posición del cuerpo asimilada a la coordenada vertical orientada positivamente hacia arriba. La energía de presión tiene la forma  $E_p = pV$ , donde  $p$  es la presión del agua en un volumen  $V$ , es decir la presión puede ser escrita como  $p = \rho gh$ , ya que  $\rho = m/V$  es la densidad del agua y  $h$  es una columna equivalente de agua o "carga de presión".

El potencial es definido como energía potencial por unidad de masa. Sin embargo en hidráulica es más común definir el potencial como energía potencial por unidad de peso. El potencial gravitacional quedaría definido como  $z = E_G/mg$  llamada carga de

posición, y el potencial de presión como la carga de presión  $h = E_p/mg = p/\gamma$ , donde  $\gamma = \rho g$  es el peso específico del agua. La energía potencial total por unidad de peso o potencial hidráulico, llamada carga hidráulica, será entonces igual a la suma de las cargas gravitacional y de presión, es decir:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} \quad (3.12)$$

### 3.1.3. El potencial de presión del agua en el suelo.

El potencial del agua en el suelo en un punto cualquiera se define como la energía potencial por cantidad unitaria de agua, es decir, es el trabajo requerido para llevar dicha unidad desde un estado de referencia estándar (generalmente el agua libre y pura) hasta el punto bajo consideración (Groenevelt y Kijne, 1979). El potencial puede ser expresado de tres maneras: a) energía por unidad de masa  $\psi_m$  (ergios/g) ; b) energía por unidad de volumen  $\psi_v$  (ergios/cm<sup>3</sup>), cuyas unidades puede también interpretarse como unidades de presión (dinas/cm<sup>2</sup>) y, c) con base en peso  $\psi$ , que es el resultado de dividir el potencial con base en masa entre la aceleración de la gravedad  $g$ , es decir,  $\psi = \psi_m/g$  (cm). La equivalencia entre el potencial con base en masa y el potencial con base en volumen se da con la relación  $\psi_v = \rho\psi_m$  donde  $\rho$  es la densidad del agua.

El agua en suelo está sujeta a diversos campos de fuerzas que resultan de la atracción de la matriz sólida, la presencia de solutos, la acción de la presión externa del gas, la gravedad y otros. Cada uno de estos campos puede ser asociado a un potencial de modo que la suma de todos ellos es el potencial total, es decir:

$$\psi_t = z + \psi_m + \psi_o + \dots \quad (3.13)$$

donde  $\psi_t$  es potencial total,  $z$  el potencial gravitacional,  $\psi_m$  el potencial de presión (mátrico o capilar),  $\psi_o$  el potencial osmótico y otros que se pueda adicionar (Hillel, 1971).

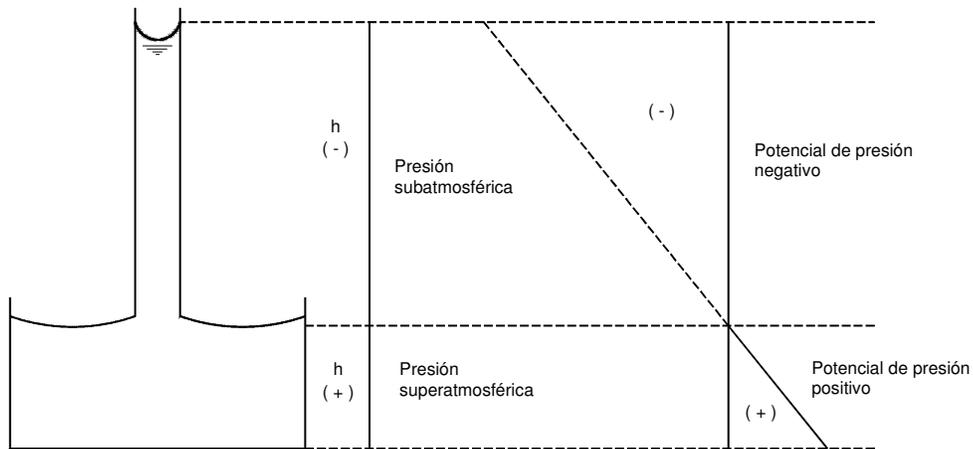
Los potenciales gravitacional y de presión son los de mayor importancia en el flujo de agua en el suelo. A la suma de los dos se le conoce como el potencial hidráulico (H). El potencial gravitacional es medido a partir de la superficie de los suelos ( $-z$ ) y el potencial de presión, en el caso del flujo en suelos no saturados, es una función del contenido de humedad, es decir:

$$H = \psi(\theta) - z \quad (3.14)$$

donde  $\theta$  es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo ( $L^3L^{-3}$ ).

El potencial de presión puede cambiar de signo: si el agua en el suelo está a una presión mayor que la atmosférica, el potencial de presión es considerado positivo y si el agua en el suelo está a una presión menor que la atmosférica, el potencial de presión es considerado negativo (es una subpresión comúnmente conocida como tensión o succión). Como se muestra en la Figura 3.2, el agua bajo la superficie libre del agua está a un potencial de presión positivo, en la superficie libre este potencial es cero, y el agua que ha ascendido en el tubo capilar sobre la superficie libre del agua está a un potencial de presión negativo.

El potencial de presión negativo también es llamado potencial mátrico o potencial capilar Hillel (1971) y cuando es tomado en valor absoluto se le denomina succión mátrica (Richards, 1961). Este potencial resulta de las fuerzas capilares y adsorbidas debido a la matriz del suelo.



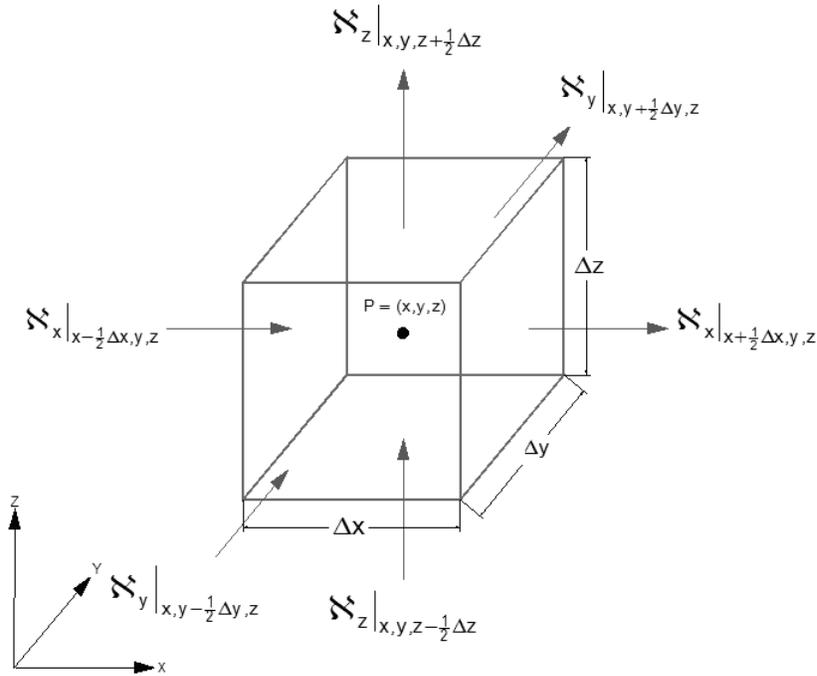
**Figura 3.2. Presión superatmosférica y subatmosférica abajo y arriba de una superficie libre de agua (Hillel, 1971).**

### 3.2. Principio de conservación de masa

La ecuación de conservación de masa describe el fenómeno del flujo de agua en los medios porosos. Considerando un volumen elemental del suelo (Figura 3.3) el principio de conservación de masa señala que el cambio de almacenamiento en volumen de control por unidad de tiempo es igual a la diferencia del volumen que entra al sistema menos el que sale. Definiendo el flujo másico  $\mathfrak{M}$  como el producto de la densidad por el caudal unitario tenemos que:

$$\mathfrak{M} = \rho q \tag{3.15}$$

donde  $\mathbf{v}$  está definida por  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  con dimensiones  $[MT^{-1}L^{-2}]$ ;  $q = (q_x, q_y, q_z)$  con dimensiones  $[L^3T^{-1}L^{-2}]$  y  $\rho$  la densidad del fluido  $[ML^{-3}]$ .



**Figura 3.3. Volumen elemental del suelo para obtener el principio de conservación de masa**

La cantidad de materia que entra menos la que sale en la unidad de tiempo en la dirección  $x$  es:

$$\begin{aligned}
 v_x|_{x-\frac{1}{2}\Delta x, y, z} \Delta y \Delta z - v_x|_{x+\frac{1}{2}\Delta x, y, z} \Delta y \Delta z &= \left[ v_x|_{x, y, z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{x, y, z} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta x^2) \right] \Delta y \Delta z - \\
 \left[ v_x|_{x, y, z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{x, y, z} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta x^2) \right] \Delta y \Delta z &= - \frac{\partial v_x}{\partial x} \Big|_{x, y, z} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x^2) \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Expresiones similares se obtiene para las direcciones  $y$ ,  $z$ . De esta manera el cambio de almacenamiento en el volumen de control por unidad de tiempo esta determinada por la suma de las tres ecuaciones, resultando:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \mathfrak{K}_x}{\partial x} \Big|_{x,y,z} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x^2) \Delta y \Delta z - \frac{\partial \mathfrak{K}_y}{\partial y} \Big|_{x,y,z} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta y^2) \Delta x \Delta z \\
 & -\frac{\partial \mathfrak{K}_z}{\partial z} \Big|_{x,y,z} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta z^2) \Delta x \Delta y
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Sea  $T$  el volumen extraído por unidad de volumen de suelo (medio poroso) en la unidad de tiempo  $[L^3 L^{-3} T^{-1}]$ , el término resultante es  $-\rho T \Delta x \Delta y \Delta z$ . El cambio de almacenamiento en el volumen de control está dado por  $\partial(\rho\theta)/\partial x \Delta x \Delta y \Delta z$ , misma que es igual a la expresión precedente. Se observa que el término  $\Delta x \Delta y \Delta z$  se cancela y dado que  $\Delta x \Delta y \Delta z$  es arbitrariamente pequeño, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \mathfrak{K}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{K}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{K}_z}{\partial z} - \rho T = \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} \tag{3.18}$$

Partiendo de la definición de la divergencia de un vector que se escribe como  $\text{div}(\mathfrak{K}) = \nabla \cdot \mathfrak{K}$  y considerando la ecuación (3.15), la ecuación (3.18) puede escribirse de la siguiente manera:

$$-\nabla \cdot (\rho \mathfrak{q}) - \rho T = \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} \tag{3.19}$$

Asumiendo que la densidad del agua  $\rho$  es una constante, la ecuación (3.19) en su forma unidimensional se escribe como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} + T = 0 \quad (3.20)$$

La ecuación dinámica, es decir la que liga la velocidad con el espacio y el tiempo, se expone a continuación.

### 3.3. Ley de Darcy

La ley de Darcy (1856) establece que el caudal es proporcional al producto del área transversal al flujo y el gradiente hidráulico. El coeficiente de proporcionalidad es denominado conductividad hidráulica y es denotado por  $K_s$  en un suelo saturado. En términos matemáticos la ley de Darcy es escrita como:

$$q = -K(\psi) \nabla(\psi - z) \quad (3.21)$$

donde el potencial hidráulico se ha sustituido por la suma del potencial de presión ( $\psi$ ) expresada como una altura equivalente de columna de agua [L], y el potencial gravitacional ( $z$ ) orientada positivamente hacia abajo [L];  $K(\psi)$  es la conductividad hidráulica [ $LT^{-1}$ ] expresada como una función de la presión del agua y  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ .

La ecuación (3.21) parte de dos hipótesis fundamentales:

- a. La conductividad hidráulica de un suelo no saturado es función del contenido de agua o del potencial de presión.
- b. La fuerza que provoca el flujo de agua en un suelo rígido y no saturado, es la suma del potencial de presión y el potencial gravitacional.

En forma unidimensional la ley de Darcy para una columna vertical de suelo, se expresa como:

$$q(z,t) = K(\psi) - K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.22)$$

La ley de Darcy fue establecida inicialmente en medios saturados y ha sido generalizada a medios no saturados. En medios no saturados, la conductividad hidráulica, además de que puede ser una función de las coordenadas espaciales como en medios saturados, es una función del contenido de humedad o de la presión del agua.

En un tubo capilar de radio  $R$  el caudal de agua por unidad de área o velocidad media ( $\langle v \rangle$ ) es proporcionado por la ley de Poiseuille, la cual establece que:

$$\langle v \rangle = -\frac{\rho g}{8\mu} R^2 \nabla H \quad (3.23)$$

donde  $\mu = \rho\nu$  es la viscosidad dinámica del agua y  $\nu$  su viscosidad cinemática.

La ley de Poiseuille es equivalente a la ley de Darcy si la conductividad hidráulica del tubo capilar es tomada como  $K = (\rho g / \mu)(R^2/8)$ . Esta expresión ha sido generalizada a los medios porosos reemplazando el término  $(R^2/8)$  por un coeficiente más general con unidades de área, denotado por  $k$ , y denominado permeabilidad (o permeabilidad intrínseca). Se tiene por lo tanto que la conductividad es el producto de un factor que refleja las propiedades del fluido, denominado fluidez, definida por  $f = \rho g / \mu$ , y de un factor que depende de la geometría del medio poroso ( $k$ ). De otra manera:

$$K = -\frac{\rho g}{\mu} k \quad (3.24)$$

La permeabilidad, y en consecuencia la conductividad, depende de la forma, acomodo y distribución granulométrica de las partículas constituyentes, y del grado de compactación o cementación de las mismas, factores que controlan, a su vez, el tamaño e interconexión de los intersticios. Una alta porosidad no implica necesariamente una alta conductividad hidráulica, por el contrario en algunos medios porosos mientras mayor es la porosidad, menor es su conductividad.

### 3.4. Ecuación de Transferencia

La ecuación de Transferencia es la más utilizada para modelar el flujo de agua en el suelo, sin embargo, se rige bajo las siguientes hipótesis:

- a. Se asume que el suelo es isotrópico, homogéneo y rígido.

- b. El agua es incompresible
- c. El flujo es isotérmico, es decir, se ignora la conservación de la energía.
- d. El efecto de la fase de aire en el flujo de agua es insignificante.
- e. Es aplicada sólo a suelos no expansivos, es decir, suelo indeformable.
- f. No existe histéresis.

Introduciendo la ecuación de Darcy (3.21) en la ecuación de conservación de masa (3.19) se obtiene la ecuación de Transferencia:

$$\nabla \cdot [\rho K(\psi) \nabla (\psi - z)] - \rho T = \frac{\partial (\rho \theta)}{\partial t} \quad (3.25)$$

Esta ecuación es conocida como la forma mixta con dos variables dependientes:  $\theta$  y  $\psi$ . Al ser una ecuación diferencial con dos variables presenta error de cerradura, por ello se han obtenido otras dos formas para eliminar una de ellas:

### 3.4.1. La ecuación de Richards

Introduciendo el concepto de capacidad específica, definida como la pendiente de la curva de retención de humedad  $\theta(\psi)$ , se tiene:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (3.26)$$

Considerando la densidad del agua  $\rho$  constante y aplicando la regla de la cadena al lado derecho de la ecuación (3.25) tomando como base la ecuación (3.26) se obtiene la ecuación de Richards basada en el potencial de presión:

$$\nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - T = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.27)$$

El primer término del lado izquierdo de la ecuación (3.27) está representando los efectos de la presión y el segundo los de gravedad.

### 3.4.2. La ecuación Fokker-Planck

Bajo el supuesto que las funciones  $\psi(\theta)$  y  $K(\theta)$  existen, se obtiene la siguiente ecuación, cuya variable dependiente es el contenido de humedad y tiene la estructura de una ecuación Fokker-Planck no lineal:

$$\nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - T = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.28)$$

donde  $D(\theta)$  es la difusividad hidráulica y está definida como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (3.29)$$

En el primer término del lado izquierdo de la ecuación (3.28) está representando los efectos de la difusividad y el segundo los de gravedad.

### 3.5. Ecuación de Boussinesq

La ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres resulta de la aplicación del principio de conservación de masa, ecuación (3.19), y de la Ley de Darcy, ecuación (3.21), expresándose de la siguiente manera:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot [T(H) \nabla H] + R \quad (3.30)$$

donde H es la elevación de la superficie libre o carga hidráulica medida a partir del estrato impermeable, también representa el espesor del acuífero;  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ; T(H) es la transmisibilidad del acuífero definida como  $T(H) = K_s H$ , donde  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación; R es el volumen de recarga por unidad de tiempo por unidad de área de acuífero y  $\mu(H)$  es la capacidad de almacenamiento y puede ser una función de la posición de la superficie libre (H).

El caudal volumétrico por unidad de ancho del acuífero  $Q_u$  es proporcionado por  $Q_u = Hq$ . De acuerdo con la ley de Darcy unidimensional se tiene:

$$Q_u = -T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \quad ; \quad T(H) = K_s H \quad (3.31)$$

### 3.6. Transporte de solutos

#### 3.6.1. La ecuación de conservación de masa

La ecuación de conservación de la masa para una sustancia en un volumen elemental  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  de un suelo y para un período de tiempo pequeño de  $t$  a  $\Delta t$ , se puede escribir como la masa del soluto que entra durante  $\Delta t$  menos la suma de la masa de soluto que sale durante  $\Delta t$ ; el incremento en la masa de soluto almacenado durante  $\Delta t$  y la desaparición del soluto durante  $\Delta t$  por reacciones químicas o biológicas o por extracción forman parte en la ecuación de conservación. Para deducir la ecuación se toma como referencia el volumen elemental mostrado en la Figura 3.3.

Definiendo el flujo másico de solutos  $\mathfrak{X}_s$  como el producto de la densidad por el caudal unitario de solutos se tiene que:

$$\mathfrak{X}_s = \rho q_s \quad (3.32)$$

donde  $\mathfrak{X}_s$  está definida por  $\mathfrak{X}_s = (\mathfrak{X}_{sx}, \mathfrak{X}_{sy}, \mathfrak{X}_{sz})$  con dimensiones  $[MT^{-1}L^{-2}]$  y  $q_s = (q_{sx}, q_{sy}, q_{sz})$  con dimensiones  $[L^3T^{-1}L^{-2}]$ .

La cantidad de solutos que entra menos la que sale en la unidad de tiempo en la dirección  $x$  es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{sx} \Big|_{x-\frac{1}{2}\Delta x, y, z} \Delta y \Delta z - \mathfrak{R}_{sx} \Big|_{x+\frac{1}{2}\Delta x, y, z} \Delta y \Delta z &= \left[ \mathfrak{R}_{sx} \Big|_{x, y, z} - \frac{\partial \mathfrak{R}_{sx}}{\partial x} \Big|_{x, y, z} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta x^2) \right] \Delta y \Delta z - \\ \left[ \mathfrak{R}_{sx} \Big|_{x, y, z} + \frac{\partial \mathfrak{R}_{sx}}{\partial x} \Big|_{x, y, z} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta x^2) \right] \Delta y \Delta z &= - \frac{\partial \mathfrak{R}_{sx}}{\partial x} \Big|_{x, y, z} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x^2) \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.33)$$

Expresiones similares se obtiene para las direcciones y, z. De esta manera, el cambio de almacenamiento del soluto en el volumen de control por unidad de tiempo esta determinada por la suma de las tres ecuaciones, es decir:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \mathfrak{R}_{sx}}{\partial x} \Big|_{x, y, z} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x) \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\partial \mathfrak{R}_{sy}}{\partial y} \Big|_{x, y, z} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta y) \Delta x \Delta y \Delta z \\ - \frac{\partial \mathfrak{R}_{sz}}{\partial z} \Big|_{x, y, z} \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta z) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sea R la tasa de reacción por volumen (pérdida o ganancia de solutos por volumen de suelo en la unidad de tiempo)  $[L^3L^{-3}T^{-1}]$ , el término resultante es  $-\rho R \Delta x \Delta y \Delta z$ . El cambio de la concentración en el volumen de control está dado por  $\partial(\rho\theta C)/\partial x \Delta x \Delta y \Delta z$ , misma que es igual a la expresión precedente. Se observa que el término  $\Delta x \Delta y \Delta z$  se cancela y dado que  $\Delta x \Delta y \Delta z$  es arbitrariamente pequeño, se obtiene la siguiente ecuación:

$$- \frac{\partial \mathfrak{R}_{sx}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}_{sy}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}_{sz}}{\partial z} - \rho R = \frac{\partial(\rho\theta C)}{\partial t} \quad (3.35)$$

Partiendo de la definición de la divergencia de un vector que se escribe como  $\text{div}(\mathfrak{K}) = \nabla \cdot \mathfrak{K}_s$  y considerando la ecuación (3.32), la ecuación (3.35) puede escribirse de la siguiente manera:

$$-\nabla \cdot (\rho q_s) - \rho R = \frac{\partial(\rho\theta C)}{\partial t} \quad (3.36)$$

Asumiendo que la densidad del agua  $\rho$  es constante, de la ecuación (3.36) se obtiene la ecuación unidimensional de una especie, llamada ecuación advección dispersión:

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial z} = R \quad (3.37)$$

donde  $q_s$  está regida por la ley dinámica, la cual puede ser escrita como:

$$q_s = qC - \theta Da \frac{\partial C}{\partial z} \quad (3.38)$$

donde  $Da$  es el coeficiente de difusión del soluto en el agua.

Nótese, que en la deducción de la conservación de masa de los solutos transportados en un campo vectorial, no se ha distinguido la naturaleza del mismo ni qué fase ocupa en el espacio. Es claro que una sustancia está potencialmente en los

fluidos, incluido el agua. Así, denotemos por  $C_T$  la concentración de la sustancia con respecto al volumen del medio poroso. Ella será el resultado de una parte que esta en el agua, en el aire y su equilibrio dinámico con la fase que la genera. Generalmente, la parte de la misma en estudios en escalas de tiempo pequeños, como el riego y el drenaje de un medio poroso, la fase gaseosa no es considerada. Puede ser importante el fenómeno de adsorción químico, particularmente en lo que se refiere a elementos destructivos de la vida como plomo, cadmio, etc., sin embargo, las sales juegan también un papel importante, el sodio en particular. Sales sencillas y que dan o impiden la vida en el suelo, que afortunadamente pueden ser estudiadas en el transporte accesible en nuestras experiencias.

Son las sustancias que tratamos de ver en este estudio. Ellas casi no reaccionan, por ejemplo, desde el punto de vista de la física de los suelos reemplazan magnesio por sodio, sin embargo, las consecuencias en la vida son terribles. Las interacciones en los constituyentes del agua y su interacción con los sólidos pueden ser considerados en los esquemas numéricos aquí planteados y defendidos.

### **3.6.2. Solutos almacenados en el suelo**

Los compuestos solubles en agua y que tienen una presión de vapor despreciable en general, pueden existir en tres fases del suelo. Pueden estar disueltos en el agua, como vapor en la atmósfera del suelo y como fase estacionaria adsorbida a la materia orgánica del suelo o en las superficies minerales de arcilla. La concentración de volumen total ( $C_T$ ) del compuesto, expresada en unidades de masa por volumen de suelo puede ser escrita como:

$$C_T = aC_g + \theta C_d + \rho_b C_a \quad (3.39)$$

donde  $C_g$  es la concentración gaseosa del compuesto (masa del compuesto en vapor por volumen de aire),  $C_d$  es la concentración del compuesto disuelto (masa del soluto por volumen de solución),  $C_a$  es la concentración del compuesto absorbido (masa del sorbante por masa de suelo seco),  $a$  es el contenido volumétrico de aire (volumen/volumen de suelo),  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua (volumen/volumen de suelo), y  $\rho_t$  es la densidad aparente.

### 3.6.3. Adsorción

La adsorción es un proceso mediante el cual se extrae materia de una fase y se concentra sobre la superficie de otra fase, que generalmente es sólida. La sustancia que se concentra en la superficie o se absorbe se llama “adsorbato” y la fase adsorbente se llama “adsorbente”. La adsorción de una sustancia en solución en la superficie de las partículas de suelo generalmente se considera que ocurre en una capa molecular sobre la superficie, mas allá de esta distancia se asume que la sustancia está en la solución del suelo. La relación entre la cantidad de sustancia adsorbida y la concentración de la sustancia en solución a una temperatura dada es conocida como isoterma de adsorción.

Las isotermas de adsorción pueden tener formas muy variables dependiendo de las características del adsorbente y la superficie de adsorción y algunas veces de otros constituyentes en solución. Las isotermas más utilizadas son 3: Lineal, Langmuir y Freundlich. La isoterma de Langmuir (Langmuir, 1918) puede ser derivada asumiendo un conjunto de hipótesis razonables (Jury *et al.*, 1991): en equilibrio la tasa de adsorción  $r_a$  debe ser igual a la tasa de desadsorción  $r_d$ . Si las moléculas no interactúan entre sí, entonces la tasa de desadsorción deberá ser proporcional al número de moléculas adsorbidas por unidad de masa de superficie  $C_a$  :

$$r_d = k_1 C_a \quad (3.40)$$

donde  $k_1$  es la constante de proporcionalidad. Similarmente, la tasa de adsorción  $r_a$  deberá ser proporcional a la concentración  $C_d$  en la solución pero también al número  $Q - C_a$  de sitios vacíos sobre la superficie.

$$r_a = k_2 (Q - C_a) C_d \quad (3.41)$$

donde  $Q$  es el número de sitios idénticos de adsorción por unidad de masa.

En equilibrio,  $r_a = r_d$ , por lo que se pueden igualar las ecuaciones (3.40) y (3.41):

$$k_1 C_a = k_2 (Q - C_a) C_d \quad (3.42)$$

y despejando  $C_a$  resulta:

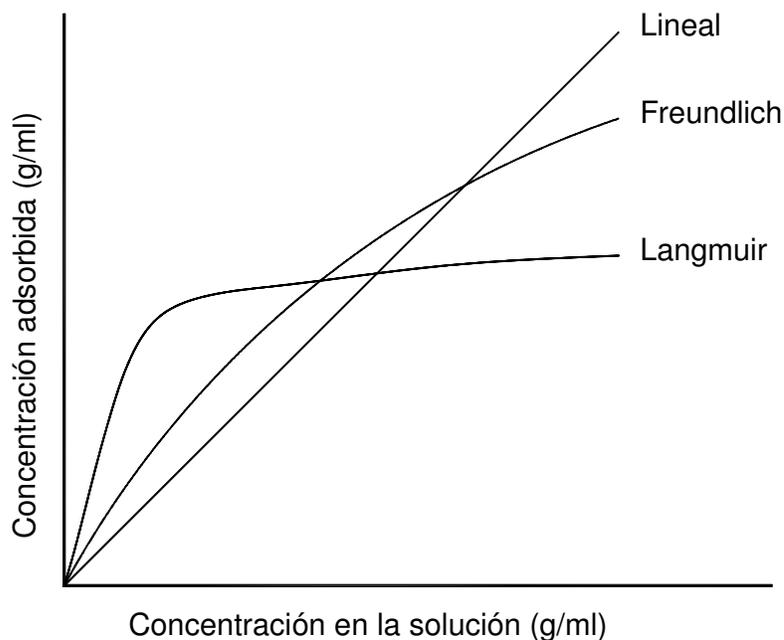
$$C_a = \frac{aQC_d}{1 + aC_d} \quad (3.43)$$

donde  $a = k_2/k_1$ .

La ecuación(3.43) es la isoterma de Langmuir. Este tipo de isoterma, en la cual  $C_a$  se incrementa linealmente con  $C_d$  a bajas concentraciones y se aproxima a una constante ( $Q$ ) a altas concentraciones como se puede ver en la Figura 3.4, es más apropiada en suelos para procesos tales como el intercambio catiónico que tienen una capacidad finita de adsorción. Algunas sustancias no se ajustan a la isoterma de Langmuir sino que actúan como si la superficie tuviera diferentes tipos de sitios de adsorción. La adsorción de estas sustancias puede ser descrita por la isoterma de Freundlich:

$$C_a = k_f C_d^{1/N} \quad (3.44)$$

donde  $k_f$  y  $N$  son constantes con  $1/N \leq 1$ .



**Figura 3.4. Forma general de las isotermas de adsorción**

De acuerdo con Sposito (1981) la ecuación (3.44) puede ser derivada asumiendo la hipótesis que la superficie está compuesta de una distribución de sitios de adsorción, cada uno de los cuales obedece la isoterma de Langmuir. Un caso especial es la isoterma de Freundlich, para  $N = 1$ , es la isoterma lineal:

$$C_a = k_d C_d \quad (3.45)$$

donde  $k_d$  es el coeficiente de distribución.

#### 3.6.4. Reacciones

Las sustancias orgánicas en el suelo pueden ser transformadas por reacciones químicas o biológicas. Aunque las reacciones pueden depender de una manera compleja de factores como la temperatura, pH, densidad de población microbiana, contenido de carbono y otros factores, bajo condiciones óptimas una reacción puede ser descrita como un proceso de decaimiento de primer orden (Hamaker, 1972). La masa de una sustancia  $M(t)$  bajo decaimiento de primer orden pierde masa a una tasa proporcional a su propia masa. La tasa de pérdida puede ser expresada matemáticamente como:

$$\frac{dM}{dt} = -\mu M \quad (3.46)$$

donde  $\mu$  es la constante de decaimiento de primer orden.

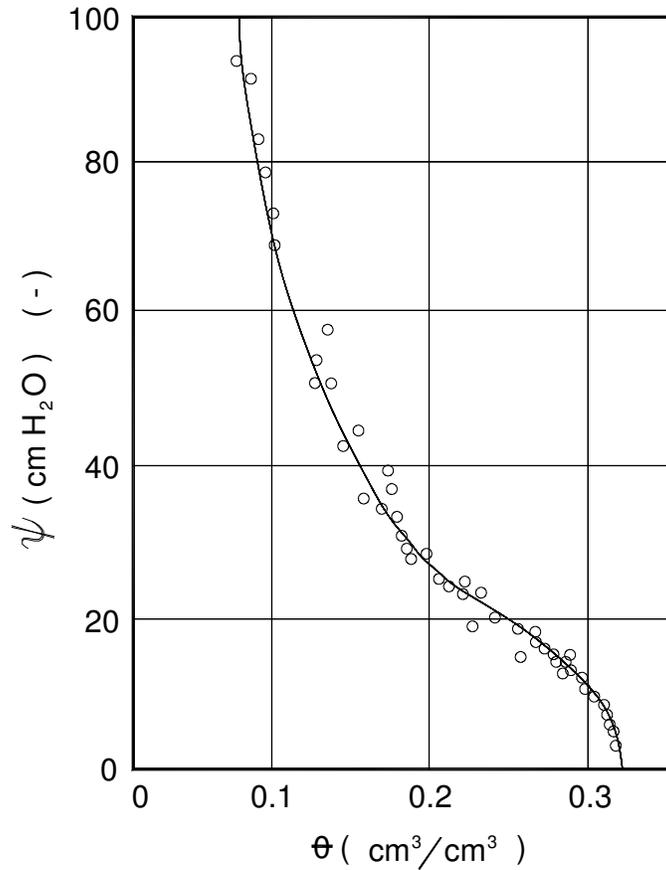
### 3.7. Las características hidrodinámicas del suelo

Para encontrar la solución de la ecuación (3.25) de forma analítica o numérica, es necesario disponer de ecuaciones que representen las propiedades hidrodinámicas del suelo, que puedan relacionar la conductividad hidráulica ( $K$ ) y el potencial de presión ( $\psi$ ) como funciones del contenido volumétrico del agua ( $\theta$ ). Una gran cantidad de modelos funcionales de las características hidrodinámicas del suelo han sido desarrolladas a través de los años por diversos investigadores. De acuerdo con las características que representan, pueden clasificarse en cuatro grandes grupos:

- a) Modelos del tipo  $\theta(\psi)$ : Brooks y Corey (1964); King (1965); Brutsaert (1966); Laliberti (1969); Farrel y Larson (1972); Clapp y Hoberger (1978); van Genuchten (1980); Haverkamp y Vauclin (1981); Haverkamp y Parlange (1986); Sander *et al.* (1988).
- b) Modelos del tipo  $K(\theta)$ : Averyanov (1950); Brooks y Corey (1964); van Genuchten (1980); Broadbridge y White (1988); Sander *et al.* (1988).
- c) Modelos del tipo  $K(\psi)$ : Wind (1955); Rijtema (1965); Gardner (1958).
- d) Modelos del tipo  $D(\theta)$ : Fujita (1952); Gardner y Mayhugh (1958).

#### 3.7.1. Curva característica del potencial e histéresis

En un medio no saturado el potencial ( $\psi$ ) es negativo y es una función del contenido de humedad ( $\theta$ ). Un comportamiento típico de  $\psi(\theta)$  se muestra en la Figura 3.5, en la cual se puede observar que  $\psi$  se incrementa a medida que  $\theta$  también, a esta curva se le ha llamado curva de retención de humedad del suelo o la característica de humedad del suelo (Childs, 1967).



**Figura 3.5. Curva característica de humedad (curva frontera de mojado) para sable de l'isere (Haverkamp, 1983)**

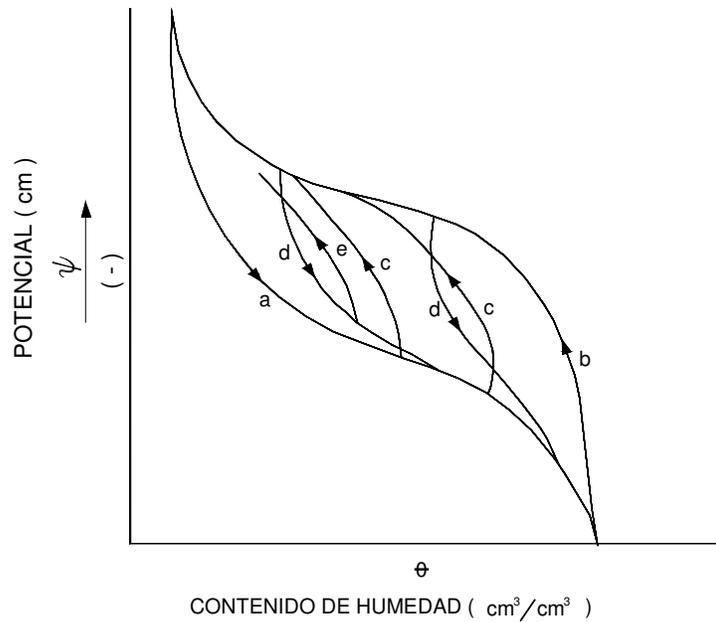
La curva característica de humedad es fuertemente afectada por la textura y la estructura del suelo. En la primera, mientras mayor es el contenido de arcilla mayor es la retención de agua para un valor dado de  $\psi$  y más gradual es la pendiente de la curva, y en la segunda, los valores altos de  $\psi$  se ven afectados, donde los efectos capilares son los predominantes. La parte de los valores bajos de  $\psi$  (fenómenos de adsorción predominantes) se ve menos afectada por la estructura que por la textura.

Una característica importante que presenta la curva característica de humedad, es su dependencia del tipo de proceso que se haya seguido para su determinación:

humedecimiento o mojado (sorci3n) o por secado (desorci3n). La curva de humedecimiento se obtiene partiendo de un suelo seco, un valor de  $\psi$  lo suficientemente bajo, y conforme este se moja  $\psi$  aumenta. En el caso del secado el proceso es inverso, es decir, se parte de un suelo h3medo y se empieza a secar de modo que  $\psi$  disminuye. Las curvas obtenidas con estos procedimientos no coinciden, a este fen3meno se le llama hist3resis.

Poulovassilis (1962) dio una descripci3n de la hist3resis en t3rminos f3sicos: si una propiedad f3sica  $Y$  depende de una variable independiente  $X$ , entonces puede ocurrir que la relaci3n entre  $Y$  y  $X$  es 3nica y en particular, independiente de que  $X$  aumente o disminuya; tal relaci3n es irreversible. Muchas propiedades f3sicas son, sin embargo, irreversibles, y a3n cuando los cambios de  $X$  sean peque1os, la curva obtenida cuando  $X$  incrementa no coincide con la curva obtenida cuando  $X$  disminuye. As3, la relaci3n  $h$  vs  $\theta$  es una relaci3n irreversible.

La hist3resis en la caracter3stica de humedad del suelo puede verse en la Figura 3.6, donde se muestra una sucesi3n de curvas obtenidas seg3n el proceso que se haya seguido. Las curvas completas entre los l3mites de potencial (suelo lo suficientemente seco y suelo saturado) son conocidos como las curvas de frontera, una rama es la curva frontera de humedecimiento o mojado y la otra la curva de frontera de secado.



**Figura 3.6. La Histéresis: a) curva frontera de mojado; b) curva frontera de secado; c) curvas primarias de secado; d) curvas primarias de mojado; e) curvas interiores (Childs, 1967)**

### 3.7.1.1. Curvas de ajuste para obtener la curva de retención

En la literatura existen varios modelos para obtener la curva de retención, los más frecuentemente empleados son los propuestos por Brooks y Corey (1964), van Genuchten (1980) y Braddock *et al.* (2001). La popularidad de estos modelos se debe a la capacidad que tienen de ajustar los datos experimentales de retención de agua en la región húmeda, donde habitualmente se espera que ocurra la mayor parte del flujo, y debido al hecho de que pueden combinarse fácilmente con los modelos de conductividad (p.e. Burdine, 1953; Mualem, 1976). Algunos de ellos se explican a continuación.

Brooks y Corey (1964) proponen una curva en función de la potencia de dos parámetros de forma, a saber:

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left( \frac{\psi_b}{\psi} \right)^\lambda & ; \quad -\infty < \psi < \psi_b \quad ; \quad \lambda \geq 0 \\ \theta_s & ; \quad \psi_b \leq \psi \end{cases} \quad (3.47)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro de forma adimensional y positivo, definido como índice de la distribución del tamaño de los poros;  $\psi_b$  es definido como la presión de burbuja.

Van Genuchten (1980) observando la discontinuidad presente en la curva de Brooks y Corey propone la siguiente expresión:

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[ 1 + \left( \frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^m} \quad ; \quad m \geq 0 \quad ; \quad n \geq 0 \quad (3.48)$$

donde  $\psi_d$  es una valor característico de la presión,  $m$  y  $n$  son parámetros de forma de la curva, adimensionales y positivos.

Braddock *et al.* (2001) presentan un modelo en función potencia de la siguiente forma:

$$\frac{\psi_d}{\psi} = \Theta^{1/\lambda} (1 - \Theta^{1/m})^{-1/n} \quad (3.49)$$

donde el grado de saturación efectivo  $\Theta$  está definido como:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (3.50)$$

Es de importancia notar que cuando  $\Theta \rightarrow 0$  se obtiene el modelos de Brooks y Corey (1964) y cuando  $\lambda = mn$  se obtiene el modelo de van Genuchten (1980).

La difusividad de Fujita (1952) tiene la forma:

$$D(\Theta) = \left( \frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \right) \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha \Theta)^2} \quad (3.51)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro que varía entre cero y la unidad:  $0 < \alpha < 1$ .

La escala integral  $\lambda_c$ , introducida y llamada “presión crítica” por Bouwer (1964) está definida por:

$$\lambda_c = \frac{1}{K_s} \int_{\theta_r}^{\theta_s} D(\theta) d\theta = \frac{1}{K_s} \int_{-\infty}^0 K(\psi) d\psi \quad (3.52)$$

Es importante señalar que la difusividad hidráulica es independiente de  $\theta$  con  $\alpha = 0$  y se asimila a una masa de Dirac con  $\alpha = 1$ .

La ecuación que describe la presión en función del contenido de agua se deduce a partir de la definición de  $D(\theta) = K(\theta)d\psi/d\theta$  considerando la condición  $\theta = \theta_s$  cuando  $\psi = 0$ :

$$\psi(\Theta) = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[ \frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] \right\} \quad (3.53)$$

donde  $\psi_c = -\lambda_c$ .

### 3.7.2. La conductividad hidráulica de los suelos no saturados

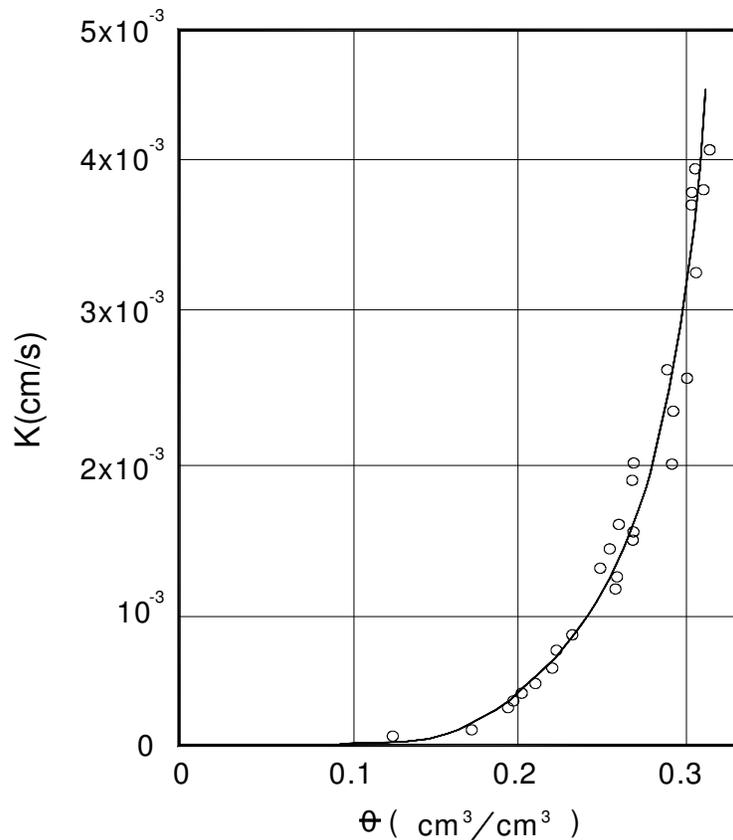
La Ley de Darcy generalizada, la cual ha sido verificada experimentalmente por Childs y Collis-George (1950) y Vachaud (1969),  $K(\theta)$  decrece rápidamente cuando  $(\theta)$  disminuye a partir de su valor a saturación ( $K_s$ ), y de acuerdo con Philip (1969) se debe a las siguientes razones:

- a) La sección transversal total, útil para el flujo, disminuye con  $\theta$ .
- b) Los poros son los primeros en vaciarse cuando  $\theta$  disminuye, y como la contribución  $K(\theta)$  por unidad de área varía bruscamente con el cuadro del radio del poro, es de esperarse que  $K(\theta)$  disminuya más rápidamente que  $\theta$ . Esto se puede ver más fácilmente haciendo uso de la Ley de Poiseuille, como se discutió en la ley de Darcy.
- c) A medida que  $\theta$  disminuye, aumenta la probabilidad de que exista agua en los poros y cuñas aisladas de la red general tridimensional del agua de los canales y las películas. De modo que una vez que deja de haber continuidad,

no puede haber flujo en la fase líquida, excepto el flujo a través de las islas líquidas en series paralelas con el sistema de vapor.

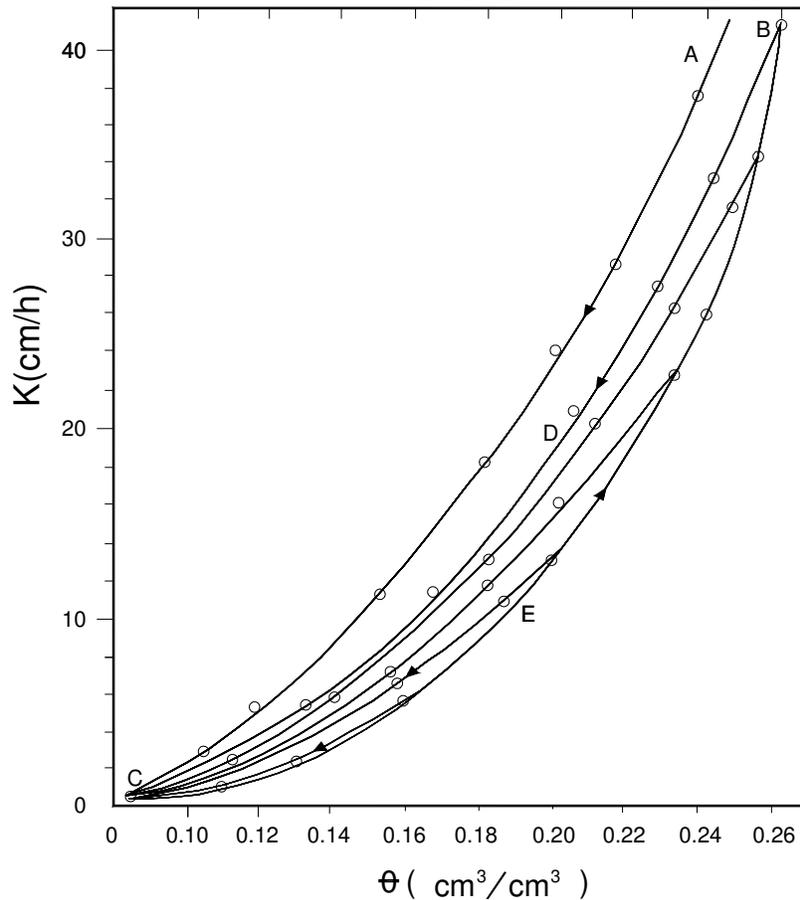
### 3.7.2.1. Curva característica de la conductividad e histéresis

Un comportamiento típico de la función  $K(\theta)$  se muestra en la Figura 3.7. Como se vio en la parte correspondiente al potencial de presión, la histéresis se presenta en la relación  $\psi(\theta)$ , tal que a un potencial dado el contenido de humedad puede tener diferentes valores de acuerdo a la historia de secado o mojado a que esté sujeto el suelo.



**Figura 3.7. Curva característica de conductividad en función del contenido de humedad para sable de l'isere (Haverkamp, 1983).**

Como la conductividad hidráulica es una función del contenido de humedad y por tanto del potencial, es de esperarse que pueda tener distintos valores a un potencial dado y sea caracterizada por la histéresis. En general, el efecto de la histéresis en la relación  $K(\theta)$  es menos significativa que en la relación  $K(\psi)$  (Childs, 1969). En la Figura 3.8 se muestra la histéresis en la conductividad hidráulica para un suelo reportado por Poulouvassillis y Tzimas (1975).



**Figura 3.8. Curvas experimentales describiendo la histéresis en la relación  $K(\theta)$ . La curva AC describe la relación durante el secado de un suelo completamente saturado inicialmente. Las curvas BDC y CEB son las curvas fronteras de secado y mojado en la histéresis, respectivamente (Poulouvassillis y Tzimas, 1975).**

### 3.7.2.2. Modelos de ajuste para obtener la curva de conductividad

La conductividad hidráulica presenta dificultades en su medición directa por el alto grado de incertidumbre tanto en sus valores reales como en el fundamento de las teorías aplicadas para obtenerla. Su determinación es de una gran importancia básica en los trabajos y estudios relacionados con el movimiento del agua por el perfil de un suelo determinado, por lo que se han creado numerosas funciones para describirla.

Al igual que para la relación  $\psi(\theta)$ , numerosas ecuaciones se han propuesto para ajustar los datos experimentales de la conductividad hidráulica en función del contenido de humedad  $K(\theta)$  o en función del potencial de presión  $K(\psi)$ .

De acuerdo con Moral *et al.* (2002) en general las relaciones que existen en la literatura se pueden dividir en tres grupos: a) Funciones de la forma  $K(\theta)$  (p.e. Burdine, 1953; Brooks y Corey, 1964; van Genuchten, 1980); b) Funciones de tipo  $K(\psi)$  (p.e. Rijtema, 1965; Fuentes *et al.* 2001a), y c) Funciones  $D(\theta)$  (p.e. Gardner y Mayhugh, 1958). Algunos de ellos se explican a continuación.

El modelo de Burdine (1953) asume que el medio poroso está compuesto de capilares a través de los cuales el movimiento del agua es regida por gradientes de presión, y donde el radio hidráulico depende de la presión capilar y el grado de saturación, de esta manera:

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^2 \left[ \int_0^\Theta \frac{d\bar{\Theta}}{[\psi(\bar{\Theta})]^2} \Big/ \int_0^1 \frac{d\bar{\Theta}}{[\psi(\bar{\Theta})]^2} \right] \quad (3.54)$$

Mualem (1976) propone una expresión como un cociente entre la conductividad hidráulica parcialmente saturada y la saturada, es decir:

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^{1/2} \left[ \int_0^\Theta \frac{d\bar{\Theta}}{\psi(\bar{\Theta})} \Big/ \int_0^1 \frac{d\bar{\Theta}}{\psi(\bar{\Theta})} \right]^2 \quad (3.55)$$

La introducción de la ecuación de retención propuesta por van Genuchten (1980), ecuación (3.48), en el modelo de Burdine (ecuación (3.54)) aceptando la relación  $m = 1 - 2/n$  conduce a la expresión analítica cerrada de la conductividad siguiente:

$$K(\Theta) = K_s \Theta^2 \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^m \right]^2 \quad (3.56)$$

De la misma manera que en la ecuación anterior, la introducción de la curva de retención en el modelo de Mualem aceptando la relación  $m = 1 - 1/n$  proporciona la siguiente forma cerrada de la conductividad:

$$K(\Theta) = K_s \Theta^{1/2} \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^m \right]^2 \quad (3.57)$$

Fuentes *et al.* (2001a) obtienen un modelo general basado en los conceptos de la geometría fractal para representar la curva de conductividad hidráulica. La interpretación del tamaño de poro que interviene en este modelo conduce a modelos particulares. Utilizando hipótesis clásicas mencionadas en la literatura los autores deducen en particular los siguientes modelos fractales particulares:

El modelo de la 'media geométrica':

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \left[ \frac{\int_0^\Theta \bar{\Theta}^{s-1} d\bar{\Theta}}{\int_0^\Theta [\psi(\bar{\Theta})]^{2s}} \bigg/ \frac{\int_0^\phi \bar{\Theta}^{s-1} d\bar{\Theta}}{\int_0^\phi [\psi(\bar{\Theta})]^{2s}} \right]^2 \quad (3.58)$$

El modelo del 'poro neutral':

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \left[ \frac{\Theta}{\phi} \right]^s \left[ \frac{\int_0^\Theta \bar{\Theta}^{s-1} d\bar{\Theta}}{\int_0^\Theta [\psi(\bar{\Theta})]^{4s}} \bigg/ \frac{\int_0^\phi \bar{\Theta}^{s-1} d\bar{\Theta}}{\int_0^\phi [\psi(\bar{\Theta})]^{4s}} \right] \quad (3.59)$$

El modelo del 'poro grande':

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \int_0^\Theta \frac{\bar{\Theta}^{2s-1}}{|\psi(\bar{\Theta})|^{4s}} d\bar{\Theta} \bigg/ \int_0^1 \frac{\bar{\Theta}^{2s-1}}{|\psi(\bar{\Theta})|^{4s}} d\bar{\Theta} \quad (3.60)$$

donde  $s$  es una dimensión fractal relativa definida por  $s = D/E$ ;  $D$  es la dimensión fractal del suelo y  $E$  es la dimensión de Euclides del espacio físico. La dimensión fractal relativa está relacionada con la porosidad volumétrica total del suelo ( $\phi$ ) definida de manera implícita por:

$$(1-\phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (3.61)$$

Fuentes *et al.* (2003) obtuvieron formas analíticas cerradas de la conductividad hidráulica introduciendo la curva de retención de van Genuchten en las ecuaciones (3.58), (3.59) y (3.60) al imponer relaciones entre  $m$  y  $n$  indicadas enseguida, así, los modelos correspondientes son los siguientes:

$$K(\Theta) = K_s \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^{sm} \right]^2 \quad ; \quad 0 < sm = 1 - 2s/n < 1 \quad (3.62)$$

$$K(\Theta) = K_s \Theta^s \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^{sm} \right] \quad ; \quad 0 < sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (3.63)$$

$$K(\Theta) = K_s \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^{2sm} \right] \quad ; \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (3.64)$$

La introducción de la difusividad de Fujita en la relación entre la difusividad y la conductividad propuesta por Parlange *et al.* (1982) permite deducir:

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\Theta [1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta]}{1 - \alpha\Theta} \quad (3.65)$$

donde  $\beta$  es un parámetro que varía entre cero y la unidad:  $0 < \beta < 1$ .

Fuentes *et al.* (1992) recomiendan usar dos pares de características hidrodinámicas: (1) la combinación de la difusividad de Fujita (1952) y la relación entre la conductividad y la difusividad de Parlange *et al.* (1982), y (2) la combinación de la conductividad de Brooks y Corey (1964) y de la presión de van Genuchten (1980). La combinación (1) es más conveniente en estudios teóricos mientras que la combinación (2) es utilizada principalmente por la facilidad que presentan para identificar sus parámetros (Zataráin, 1996).

### **3.8. Métodos para obtener las características hidrodinámicas**

El estudio de los procesos hidrológicos del suelo requiere de la determinación de las características hidrodinámicas del suelo. Las técnicas y métodos existentes para determinar la curva característica de humedad del suelo, y especialmente la función de conductividad hidráulica no saturada, son aún tediosas, tardadas e inexactas (Lassabatère, *et al.*, 2006) para muchas aplicaciones potenciales dado el alto costo y tiempo que precisan (Leij y van Genuchten, 1999). Varios métodos han sido desarrollados para determinar las características hidrodinámicas, desde los más sencillos que requieren información de fácil obtención, como la distribución de partículas y las características físico-químicas o mediciones simples de campo (Jarvis *et al.*, 2002), hasta los más sofisticados que requieren la determinación experimental de la curva de retención de humedad  $h(\theta)$  y la conductividad hidráulica  $K(\theta)$  en dispositivos de laboratorio (Augeard *et al.*, 2007). Los diferentes métodos que existen para la caracterización hidrodinámica de los suelos no saturados se pueden agrupar en tres: métodos directos, métodos indirectos y métodos inversos.

### 3.8.1. Métodos directos

Los métodos directos de caracterización se pueden agrupar en dos: (1) métodos de laboratorio y (2) métodos de campo. La determinación en campo de las propiedades hidrodinámicas de los suelos es más conveniente, dado que los procedimientos de laboratorio conducen con frecuencia a propiedades del suelo que no son representativas de las condiciones de campo. Sin embargo, para lugares apartados podría ser más conveniente determinar las propiedades hidrodinámicas sobre capas de suelo inalterado traídas desde el campo hacia el laboratorio (Ahuja *et al.*, 1976).

Un método usado y recomendado con relativa frecuencia consiste en medir la velocidad de infiltración y los cambios en el contenido de humedad del suelo mediante el uso de tensiómetros instalados a diferentes profundidades en el perfil de suelo mientras el agua se acumula en la superficie (Klute, 1972; Nielsen *et al.* 1973). Después de que se ha alcanzado una velocidad de infiltración aparentemente constante, la aplicación de agua se suspende, y la superficie del suelo se cubre con una cubierta plástica con la finalidad de evitar la evaporación, y los cambios en el contenido de humedad del suelo son registrados a través del tiempo durante el proceso de drenado, de esta manera se determina la relación entre el contenido de humedad y la conductividad hidráulica. No obstante, dicho procedimiento en muchos casos no es práctico debido a ciertas condiciones topográficas desfavorables del terreno o bien, dado la gran cantidad de agua que se requiere, aunado al tiempo y personal necesarios para llevarlo a cabo.

Otros métodos han sido desarrollados basados en experimentos de campo como pruebas de infiltración (Simunek, *et al.*, 1998b; Jacques *et al.*, 2002). Estos usualmente se realizan mediante la imposición de una carga de presión dada en la superficie del suelo a través de cualquiera de los anillos simples de infiltración o infiltrómetros de disco.

En los últimos diez años se han dado grandes avances en el desarrollo de técnicas eléctricas para medir. Además de los avances y uso extensivo sobre el TDR, se han desarrollado métodos no invasores tales como inducción electromagnética y el radar de penetración subterránea, los cuales tiene la capacidad de proporcionar mediciones de a grandes profundidades y a gran escala; además existen técnicas electromagnéticas tales como sensores de fibra óptica y electroquímicos que se basan principalmente en mediciones de conductividad eléctrica o en mediciones de la constante dieléctrica para determinar el contenido de humedad. Por otro lado, también se han dado avances notables en el desarrollo de sensores para determinar el potencial de presión y la conductividad hidráulica in-situ tales como: tensiómetros osmóticos, unidades de disipación de calor, métodos electro-ópticos, métodos de ultracentrifugado, etc., (Gee y Ward, 1999).

### **3.8.2. Métodos indirectos**

Como una alternativa a los métodos directos, los métodos indirectos abarcan una gran cantidad de procedimientos para estimar las propiedades hidrodinámicas de los suelos a partir de datos que son más susceptibles de medir o más disponibles. La premisa básica de los métodos indirectos es deducir las propiedades hidrodinámicas a partir de datos de una muestra de suelo usando alguna relación funcional empírica o cuasi-empírica, o algún algoritmo entre las variables de salida y entrada seleccionadas. Las posibles variables de entrada incluyen la clase textural del suelo, distribución del tamaño de partículas, contenido de materia orgánica y/o porosidad; mientras que las variables de salida involucran datos hidrodinámicos del suelo y/o parámetros en funciones cerradas de las propiedades hidrodinámicas no saturadas. Los algoritmos, comúnmente determinados usando análisis de regresión, son conocidos como funciones de pedotransferencia (Wösten *et al.*, 1990).

### 3.8.3. Métodos inversos

Por definición, la solución a un problema inverso implica la determinación de causas desconocidas basándose en las observaciones de sus efectos. Esto es contrastante en relación con el problema directo, cuya solución exige encontrar los efectos basándose en una descripción de sus causas (Hopmans y Simunek, 1999).

Una forma flexible de resolver un problema inverso es el empleo de técnicas de estimación de parámetros. En este método, el problema directo se plantea mediante condiciones iniciales y de frontera fijas, mientras que el problema físico puede resolverse con cualquier método numérico o analítico que sea apropiado. Las funciones constitutivas del sistema son parametrizadas a priori, y los coeficientes se determinan empleando un algoritmo de optimización aplicado a alguna función objetivo (por ejemplo que minimice las diferencias entre los datos simulados y observados) (Kool *et al.* 1987).

Cada vez más, las propiedades hidrodinámicas de los suelos son estimadas mediante el ajuste de resultados observados y simulados para un evento particular de flujo no saturado utilizando un algoritmo de optimización de parámetros. Los métodos inversos en los últimos años han sido utilizados debido al rápido aumento en el cálculo de la velocidad de los procesadores y el desarrollo de algoritmos de optimización eficiente (Jhorar *et al.*, 2004). El procedimiento generalmente conduce a estimaciones de las propiedades hidrodinámicas en expresiones específicas de las relaciones constitutivas (Leij y van Genuchten, 1999).

Los experimentos de infiltración o drenaje proveen suficiente información para identificar los parámetros de la función de retención y de conductividad hidráulica no saturada (Zhang, *et al.*, 2003). Sin embargo, el uso de esta técnica requiere de una

adecuada descripción física para que el sistema sea bien simulado, ya que cualquier error conceptual en el modelo físico-matemático, incluyendo los procesos relacionados entre sí, pueden afectar el cálculo de los parámetros.

### 3.9. Estimación de parámetros de forma de la curva de retención a partir de la curva granulométrica y la porosidad total

Fuentes (1992), basado en los conceptos de la geometría fractal de Mandelbrot (1982), propone una relación entre los tamaños de poro y de partículas, para estimar los parámetros de forma  $m$  y  $n$  de la curva característica de humedad de van Genuchten (ecuación (3.48)) a partir de la curva granulométrica y la porosidad del suelo:

$$F(D) = \left[ 1 + \left( \frac{D_g}{D} \right)^N \right]^{-M} \quad (3.66)$$

donde  $F(D)$  es la frecuencia acumulada, basada en el peso de las partículas cuyos diámetros son inferiores o iguales a  $D$ ;  $D_g$  es un parámetro característico del tamaño de las partículas,  $M$  y  $N$  son dos parámetros de forma empíricos. Estos parámetros son reescritos de la siguiente manera;  $M = m$  y  $N = (1 + \kappa)n$ .

De esta manera, el parámetro de forma  $m$  puede ser estimado a partir de la curva granulométrica y la porosidad total del suelo si dicha curva experimental se ajusta a la función de distribución presentada en la ecuación (3.66), para lo cual es necesario calcular el parámetro  $S$  de la ecuación (3.61) y contar con alguna relación empírica entre los parámetros de forma  $m$  y  $n$  de la característica de humedad.

### 3.10. Estimación de los parámetros de escala a partir del método de estimación de parámetros y una prueba de infiltración

La estimación de parámetros de un problema inverso puede ser planteada como un problema de mínimos cuadrados, en donde las diferencias entre las observaciones experimentales y los valores calculados con el modelo son minimizadas de acuerdo con la siguiente función:

$$F(X) = \sum_{i=1}^k w_i [p_i^* - p_i(X)]^2 \quad (3.67)$$

donde  $F(X)$  es la función objetivo,  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}^j$  es el vector que contiene los  $j$  parámetros a optimizar,  $k$  es el número de observaciones,  $w_i$  es el vector que contiene los factores de peso de las observaciones (el cual puede asumirse igual a uno), y  $p_i^*$  y  $p_i(X)$  son los vectores que contienen las observaciones experimentales (tales como: presiones, contenidos de humedad, gasto, lámina infiltrada, etc.) y las calculadas respectivamente.

La solución del problema inverso es una función de siete parámetros: cinco de la curva de retención de agua: contenido de humedad a saturación ( $\theta_s$ ), el contenido de humedad residual ( $\theta_r$ ), dos parámetros de forma de la curva ( $m, n$ ) y una presión característica ( $\psi_d$ ); la conductividad hidráulica saturada del suelo ( $K_s$ ) y la porosidad total ( $\phi$ ). De esta manera el vector de parámetros a optimizar es:  $X = \{\theta_s, \theta_r, m, n, \psi_d, K_s, \phi\}$ .

Para reducir los parámetros el contenido de humedad residual de acuerdo con Haverkamp *et al.* (2005) puede ser asumido igual a cero ( $\theta_r = 0$ ), el contenido de humedad a saturación puede ser asimilado como la porosidad total ( $\theta_s = \phi$ ),  $m$  y  $n$  pueden ser ligados con las relaciones de la conductividad mostrados por Fuentes *et al.* (2003). Finalmente el número de parámetros desconocidos se reduce a tres:  $X = \{\psi_d, K_s, m\}$ : dos parámetros de escala  $\{\psi_d, K_s\}$  y uno de forma  $\{m\}$ .

De acuerdo con Fuentes (1992) el valor del parámetro ( $m$ ) puede ser estimado a partir de la curva granulométrica ajustándola con la ecuación (3.66). Los parámetros de escala de las características hidrodinámicas  $\{\psi_d, K_s\}$  se pueden estimar a partir de los datos de la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada en una prueba de infiltración realizada en una columna de suelo, si a los vectores  $p_i^*$  y  $p(X)$  de la ecuación (3.67) se les asigna respectivamente los datos anteriores y los valores calculados a partir de la modelación del proceso de infiltración de una columna de suelo sujetando la ecuación de Richards unidimensional, con las condiciones inicial y de frontera de interés. La función objetivo resultante se minimiza utilizando el método no lineal de minimización de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963).

## 4.LA INFILTRACIÓN Y EL TRANSPORTE DE SOLUTOS

La descripción del movimiento del agua en la superficie del suelo y la infiltración se realiza a través de ecuaciones diferenciales. El movimiento en la superficie del suelo generalmente es modelado con las ecuaciones de Saint-Venant y sus simplificaciones como los modelos de onda difusiva, inercia nula e hidrológico. La infiltración es modelada con soluciones numéricas o analíticas de la ecuación de Richards. Sin embargo, los supuestos bajo los cuales son obtenidas estas soluciones en la mayoría de las ocasiones su aplicabilidad es limitada. En este capítulo se presentan las soluciones analíticas clásicas Philip (1957), Parlange *et al.* (1982) y Fuentes *et al.* (2001b), soluciones que han validado los esquemas numéricos que se utilizarán. En seguida se muestra el desarrollo de una solución en diferencias finitas de la ecuación de Richards siguiendo el esquema de Zataráin *et al.* (1998) para la transferencia de agua y para el transporte de solutos a nivel de una columna de suelo. Finalmente, la solución presentada, es utilizada para reproducir los datos experimentales que son obtenidos de una prueba de infiltración en un módulo de drenaje realizado en laboratorio. Previamente se realiza la caracterización hidrodinámica del suelo usado en el experimento, con características salinas del valle agrícola de Guanajuato, aplicando la metodología vista en el capítulo anterior: curva granulométrica y porosidad total. Se utiliza un algoritmo de optimización no lineal para encontrar los valores de conductividad hidráulica saturada ( $K_{sw}$ ) y la presión característica de humedad del suelo ( $\psi_{dw}$ ) que minimizan la suma de cuadrados de los errores entre los datos teóricos y los datos reales, usando la ecuación de van Genuchten (1980) para la curva de retención y tres modelos de conductividad de Fuentes *et al.* (2001a). El buen acuerdo obtenido entre la lámina infiltrada medida y la calculada con la solución en diferencias finitas muestra la alta capacidad descriptiva que tiene la solución.

#### 4.1. Soluciones analíticas de la ecuación de Richards

La ecuación de Richards es la ecuación más utilizada para representar de manera física los flujos en la zona vadoza, no solo en la escala local sino también en mayor escala (Haverkamp *et al.*, 1998). Esta ecuación es altamente no lineal porque depende de la conductividad hidráulica y la presión del agua en el suelo en el contenido de humedad del agua (p.e. Feddes *et al.*, 1988).

Con descripciones específicas de estas características del suelo, se pueden obtener soluciones analíticas de la infiltración. Las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales que describen problemas físicos, aportan importantes conocimientos sobre la física del fenómeno y la identificación concisa de las relaciones entre las variables de los mecanismos estudiados. Por esta razón, muchos autores (p.e. Philip, 1960; Sander *et al.*, 1988; Hogarth *et al.*, 1989, 1992; Fuentes, 1992; Parlange *et al.*, 1992, 1997; Ross, y Parlange, 1994; Hogarth y Parlange, 2000; Chen y Tan, 2005; Menziani *et al.*, 2007, entre otros) han desarrollado soluciones analíticas aproximadas de la ecuación diferencial no lineal que gobierna el flujo de agua en los suelos no saturados: ecuación de Richards. No obstante, estas soluciones tienen condiciones restringidas de aplicación: perfil inicialmente seco, flujo constante en la superficie del suelo, entre otras.

La linealización de la ecuación de Richards simplifica el modelo analítico y ha sido utilizado en numerosos estudios. Warrick (1975) y Basha (1999) presentan una solución analítica con flujo constante como condición de frontera; Chen *et al.* (2001) presentan una solución que depende del flujo antes de la saturación en la superficie, mientras que Chen *et al.* (2003) presenta una solución para una variedad de flujos superficiales después del encharcamiento. Para comparar los casos límites que unen a las características del suelo real, Wang, y Dooge (1994) proponen algunas

soluciones analíticas de la ecuación de Richards con una condición inicial uniforme y una condición de frontera de flujo cuantificado (quantized flux boundary condition). Menziani *et al.* (2007) presentan soluciones analíticas para cualquier condición de frontera con flujo discreto en la superficie y para cualquier discretización del contenido de agua en el suelo como condición inicial. Las condiciones inicial y de frontera son aproximadas con una función por pasos (step-wise) y la solución es la suma de las soluciones cuyo número depende del número de pasos utilizados para la aproximación de las funciones complementarias. Como condición inicial es usado el perfil vertical de humedad en el suelo y como condición de frontera el flujo en la superficie, pero si se requiere, ambas condiciones pueden depender de la humedad del suelo o del flujo de agua en el suelo.

#### 4.1.1. El modelo de Philip

Philip (1957) desarrolló una técnica numérica para resolver de manera exacta la ecuación de transporte a fin de obtener la infiltración acumulada en un medio poroso homogéneo de profundidad infinita, sujeta a una condición de contenido volumétrico de agua constante en la superficie.

La solución obtenida es una serie de Taylor en la raíz cuadrada del tiempo válida para los tiempos “cortos” que en término de la lámina infiltrada se expresa como:

$$I(t) = S_1\sqrt{t} + At + O(t^{3/2}) \quad (4.1)$$

donde el primer coeficiente de la ecuación (4.1) es la sorbilidad  $S = S_1$ , el coeficiente del tiempo es denotado generalmente por  $A = S_2 + K_0$ . La sorbilidad ( $S$ ), es definida

como una característica del medio que describe la absorción de agua por el suelo como resultado del gradiente de potencial mátrico. La sorbilidad está definida como:

$$S = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{I(t)}{\sqrt{t}} \right] ; \quad [cm/\sqrt{s}] \quad (4.2)$$

El primer término de la serie es el resultado de las fuerzas de absorción y de gravitación. El radio de convergencia de la serie (4.1) es desconocido, sin embargo Philip muestra que es del orden de magnitud del llamado tiempo gravitacional ( $t_{grav}$ ) definido por:

$$t_{grav} = \left( \frac{S}{K_1 - K_0} \right)^2 \quad (4.3)$$

donde  $K_0 = K(\theta_0)$  y  $K_1 = K(\theta_1)$  son la conductividad hidráulica inicial y la conductividad hidráulica en la superficie del suelo, respectivamente.

#### **4.1.2. La solución con presión positiva en la superficie de Parlange y colaboradores**

La introducción de una presión positiva en la superficie del suelo depende a grosso modo de una hipótesis concerniente a la distribución hidrostática de la presión. La presencia de una carga  $h$ (positiva) en la superficie fue analizada por Parlange *et al.* (1985), aceptando que la presión positiva genera una zona saturada en el perfil de

humedecimiento. La solución cuasi-exacta de la ecuación de transporte presentada por Parlange se obtiene introduciendo las siguientes variables adimensionales:

$$l_* = \frac{2(K_s - K_0)}{S_t^2} (l - K_0 t) \quad (4.4)$$

$$t_* = \frac{2(K_s - K_0)^2}{S_t^2} t \quad (4.5)$$

$$Q_* = \frac{Q - K_0}{K_s - K_0} \quad (4.6)$$

donde  $S_t$  es la sorbilidad total definida por:

$$S_t^2 = S^2 + 2K_s h(\theta_s - \theta_0) \quad (4.7)$$

donde  $\theta_s$  es el contenido volumétrico de agua a saturación y  $\theta_0$  es el contenido de humedad inicial.

Finalmente se obtiene la ecuación de Parlange:

$$l_* = \frac{\gamma}{Q_* - 1} + \frac{1 - \gamma}{\beta} \ln \left[ 1 + \frac{\beta}{Q_* - 1} \right] \quad (4.8)$$

donde el parámetro adimensional  $\gamma$  se define como:

$$\gamma = \frac{2K_s h (\theta_s - \theta_0)}{S_t^2} \quad ; \quad 0 < \gamma < 1 \quad (4.9)$$

Si la presión en la superficie es constante (en el tiempo), la relación  $dl/dQ = Q dt/dQ$  permite explicitar el tiempo en función de la velocidad de infiltración:

$$t_* = \frac{\gamma}{Q_* - 1} + \frac{1 - \gamma}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[ 1 + \frac{\beta}{Q_* - 1} \right] - \frac{1 - \beta\gamma}{1 - \beta} \ln \left[ 1 + \frac{1}{Q_* - 1} \right] \quad (4.10)$$

Haverkamp *et al.* (1990) sugieren redefinir el parámetro  $\gamma$  con la finalidad de que la solución tome en cuenta una zona saturada en tensión en el sentido de la hipótesis originalmente presentada por Green y Ampt (1911), es decir  $\psi_s$ , a saber:

$$\gamma = \frac{2K_s (h + |\psi_d|) (\theta_s - \theta_0)}{S_t^2} \quad ; \quad 0 < \gamma < 1 \quad (4.11)$$

La sorbilidad  $S$  puede ser estimada con la fórmula optimal propuesta por Parlange (1975):

$$S^2 = \int_{\psi_0}^0 [\theta(\psi) + \theta_s - 2\theta_0] K(\psi) d\psi \quad (4.12)$$

Los comportamientos extremos de la solución son:

a) En los tiempos cortos:

$$l - K_0 t = S\sqrt{t} + \frac{1}{3}[2 - \beta(1 - \alpha)][(K_s - K_0)t] + O(t^{3/2}) \quad (4.13)$$

b) En los tiempos largos:

$$l = \frac{1 - \alpha}{2(1 - \beta)} \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \frac{S_t^2}{K_s - K_0} + K_s t + \gamma \frac{S_t^2}{2(K_s - K_0)} \ln\left[\frac{2(K_s - K_0)^2}{\gamma S_t^2} t\right] \quad (4.14)$$

La presencia del logaritmo del tiempo es la herencia de la conjetura de Green y Ampt (Fuentes, 1992).

La solución de Parlange puede ser utilizada de forma optimal para una gran familia de funciones que describen las características hidrodinámicas de los suelos a través de ciertas condiciones integrales. La escala de Bouwer, que es independiente de las características escogidas permite definir la primera condición si se reescribe de la siguiente manera:

$$\lambda_c = \frac{1}{K_1 - K_0} \int_{\psi_0}^{\psi_1} K(\psi) d\psi \quad (4.15)$$

donde  $\psi_0$  es la presión inicial  $\psi_0 = \psi(\theta_0)$  y  $\psi_1$  es la presión en la superficie  $\psi_1 = \psi(\theta_1)$ .

La segunda condición se establece con la introducción de la escala  $\lambda_e$  definida por Fuentes *et al.* (1992):

$$\lambda_e = \frac{1}{K_1 - K_0} \int_{\psi_0}^{\psi_1} [2K_*(\psi)\theta_*^{-1} - 1] K(\psi) d\psi \quad (4.16)$$

donde  $\theta_*$  es la variable definida por la ecuación (4.32) y  $K_*$  se define de la siguiente forma:

$$K_* = \frac{K - K_0}{K_1 - K_0} \quad (4.17)$$

Si se toma en cuenta una zona saturada en tensión entonces es necesario una tercera condición integral  $\lambda_\infty$  definida por Kunze *et al.* (1985):

$$\lambda_\infty = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\theta_*(\psi)}{K(\psi) - K_0} K(\psi) d\psi \quad (4.18)$$

Así, el parámetro  $\beta$  se define mediante la siguiente ecuación implícita:

$$\beta = 1 - \exp \left[ -\beta \left( 1 + \beta \frac{\lambda_\infty - \lambda_d}{\lambda_d - \lambda_e} \right) \right] \quad (4.19)$$

y la ecuación que define  $\psi_s$  se expresa como:

$$|\psi_s| = \frac{1-K_0^*}{\beta} [\lambda_e - (1-\beta)\lambda_d] \quad (4.20)$$

#### 4.1.3. La solución cuasi-lineal de la infiltración vertical de Fuentes y colaboradores

La solución cuasi-lineal de la infiltración vertical es una columna semi-infinita de suelo homogéneo bajo condiciones de concentración constante sujeta a las siguientes condiciones:

$$\theta = \theta_1 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad (4.21)$$

$$\theta = \theta_0 \quad ; \quad z \rightarrow \infty \quad ; \quad t > 0 \quad (4.22)$$

$$\theta = \theta_0 \quad ; \quad z \geq 0 \quad ; \quad t = 0 \quad (4.23)$$

donde  $\theta_1$  es el contenido volumétrico de agua impuesto sobre la superficie del suelo, tomado generalmente como igual al contenido volumétrico de agua a saturación ( $\theta_s$ ).

Escribiendo las ecuaciones de forma adimensional se tiene:

$$l_* = t_* + \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \frac{1+\beta}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1+\beta}{2} \sqrt{t_*} \right) \right] + \frac{1-\beta}{2} \exp(-\beta t_*) \operatorname{erfc} \left( \frac{1+\beta}{2} \sqrt{t_*} \right) \right\} \quad (4.24)$$

donde  $\operatorname{erf}(x)$  es la función error y  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$  es la función error complemento, y  $t_*$  e  $l_*$  son variables adimensionales, las cuales tienen la siguiente estructura:

$$t_* = \frac{4(K_1 - K_0)^2}{\pi S^2} t \quad (4.25)$$

$$l_* = \frac{4(K_1 - K_0)}{\pi S^2} (l - K_0 t) \quad (4.26)$$

El comportamiento de la solución en los tiempos cortos es el siguiente:

$$l - K_0 t = S_1 \sqrt{t} + S_2 t + O(t^{3/2}) \quad (4.27)$$

donde  $S_1 = S$  (la sorbilidad) y

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) \beta \right] (K_1 - K_0) \quad (4.28)$$

El comportamiento en el infinito se deduce del límite:

$$I_{0^*} = \lim_{t \rightarrow \infty} [I_0 - t] = \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta) \quad (4.29)$$

donde  $I_{0^*}$  representa la ordenada en el origen.

La función  $I(t)$  (lámina infiltrada), la cual se obtiene a partir de las ecuaciones (4.25) y (4.26), se expresa como:

$$I(t) = K_0 t + \frac{\pi S^2}{4(K_1 - K_0)} I_0 \left[ \frac{4(K_1 - K_0)^2}{\pi S^2} t \right] \quad (4.30)$$

$I(t)$  es descrito por tres parámetros: 1) la sorbilidad ( $S$ ); 2) el flujo de infiltración permanente ( $K_1$ ), que representa la fuerza gravitacional que controla la infiltración en los tiempos muy largos, y 3) el parámetro  $\beta$ , el cual comienza a aparecer en los tiempos muy cortos, tal como se aprecia en el desarrollo en serie de la solución (ecuaciones (4.27) y (4.28)).

La sorbilidad se puede obtener con alguna de las fórmulas clásicas propuestas en la literatura (Crank, 1956; Parlange 1975; Brutsaert, 1976), las cuales guardan la siguiente estructura:

$$S^2 = 2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta - \theta_0}{f(\theta)} D(\theta) d\theta = 2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{\theta(\psi) - \theta_0}{f[\theta(\psi)]} K(\psi) d\psi \quad (4.31)$$

donde  $\psi_0$  y  $\psi_1$  son las presiones correspondientes a  $\theta_0$  y  $\theta_1$ , respectivamente; además, de acuerdo con Parlange, la función  $f(\theta)$  se puede aproximar por  $f(\theta) = 20/(1+\theta_*)$ , en la cual  $\theta_*$  se define como:

$$\theta_* = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (4.32)$$

El parámetro  $\beta$  puede obtenerse a partir de la expresión optimal propuesta por Fuentes (1985):

$$\beta = 2 - 2 \int_{\psi_0}^0 \left[ \frac{K(\psi) - K_0}{K_s - K_0} \right] \left[ \frac{\theta_s - \theta_0}{\theta(\psi) - \theta_0} \right] K(\psi) d\psi \bigg/ \int_{\psi_0}^0 K(\psi) d\psi \quad ; \quad 0 < \beta < 1 \quad (4.33)$$

Las ecuaciones (4.31) y (4.33) permiten introducir diferentes “formas” de las características hidrodinámicas del suelo.

## 4.2. Los métodos numéricos

Los flujos en la zona no saturada tienen que estar bien representados por los modelos hidrológicos. Cuando se consideran grandes escalas, se requiere de una alta eficiencia de los métodos numéricos para poder aplicarlos a un gran número de localidades. De hecho, los modelos de las cuencas hidrográficas, parcial o totalmente distribuidos, requieren de bajo poder de cálculo y robustez si se va a correr el modelo por un periodo de varios años con una superficie de suelo heterogéneo (Varado *et al.*, 2006).

A partir de 1990, se han desarrollado varios esquemas numéricos para resolver la ecuación de Richards: el método de diferencias finitas (Hornung y Messing, 1981; Redinger *et al.*, 1984; Celia *et al.*, 1990; Ross, 1990; Pan *et al.*, 1996; Zataráin *et al.*, 1998; Ross, 2003), el método de los elementos finitos (Zienkiewicz y Pareck, 1970; Neuman, 1973; Simunek *et al.*, 1998a; Saucedo *et al.*, 2002; Zavala *et al.*, 2003), y el método de los elementos de frontera (Brebbia y Walker, 1980).

La necesidad de una fina resolución vertical en la solución de la ecuación de Richards para simular el humedecimiento en suelos inicialmente secos, ha sido discutida por varios investigadores (Ross, 1990; Paniconi *et al.*, 1991; El-Kadi y Ling, 1993, Downer y Ogden, 2004), sin embargo, el número de celdas verticales usados en la ecuación de Richards para calcular la humedad del suelo afecta al cálculo de la misma (Smirnova *et al.* 1997, Downer y Ogden, 2004).

Van Dam y Feddes (2000) mostraron que son necesarios pequeños tamaños de las celdas o el mallado para estimar los flujos hidrológicos con la ecuación de Richards para aplicarse a nivel de los campos. En la escala de las cuencas hidrográficas, la aplicación de la ecuación de Richards se ve complicada por los efectos de la escorrentía, escurrimiento, heterogeneidad espacial, las fluctuaciones del nivel de agua y la inestabilidad de las condiciones de frontera.

Por lo general, los valores de los parámetros reales no se conocen y son estimados por la calibración, el proceso de ajuste de los valores de los parámetros observados y previstos hasta que los resultados sean similares (Ross, 2003). En el caso de una ecuación diferencial parcial como la ecuación de Richards, la sola calibración, sin un estudio de convergencia espacial, puede dar lugar a la compensación de los errores numéricos en la formulación del modelo mediante el uso de estimaciones de parámetros poco realistas (Downer y Ogden, 2004). Sin embargo, si los valores de

los parámetros tienen significado físico, entonces el error en la formulación numérica es comprendido y minimizado.

Finalmente, si la ecuación diferencial parcial utilizada describe con precisión el sistema físico, los resultados del modelo convergerán en una solución con los incrementos del tiempo y el espacio utilizados en una aproximación discreta (Liu *et al.*, 2005). Por el contrario, si se utilizan los valores de los parámetros físicos apropiados con una resolución mayor, el error en la predicción del modelo aumenta (Downer y Ogden, 2004).

### 4.3. Una solución en diferencias finitas para la transferencia de agua

La ecuación a resolver es la de transferencia, ecuación (3.27), que en su forma unidimensional, se expresa como:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] - T \quad (4.34)$$

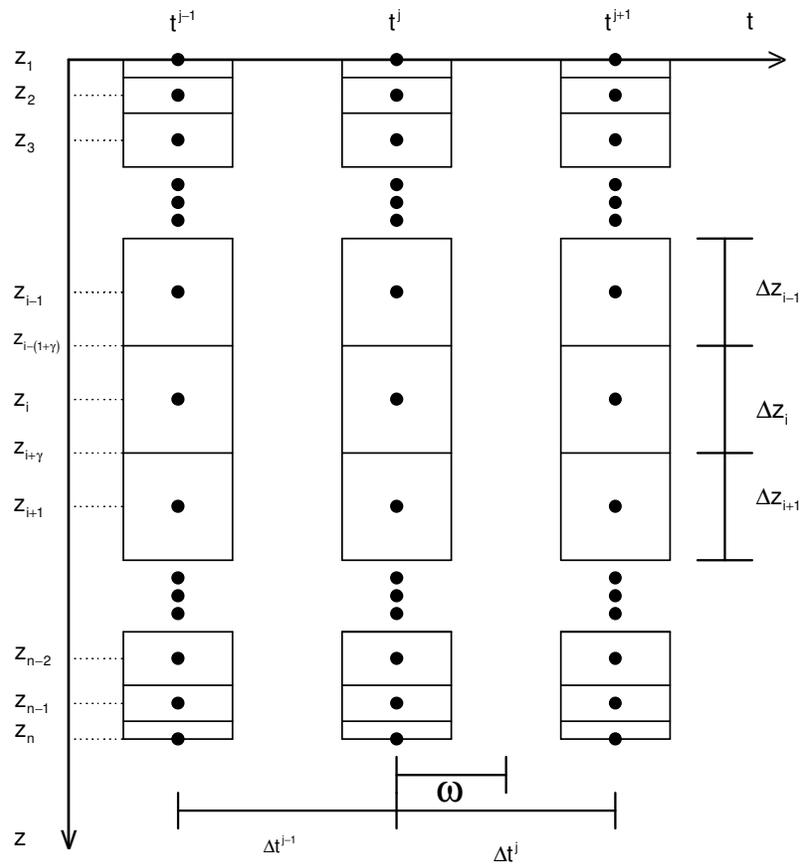
Para construir la solución numérica, se utiliza el esquema propuesto por Zataráin *et al.* (1998). De acuerdo con el algoritmo, el perfil del suelo es dividido en pequeñas capas  $\Delta z$  que pueden ser no constantes, mismo que se muestra en la Figura 4.1.

Se introducen los parámetros de interpolación definidos por:

$$\gamma = \frac{z_{i+\gamma} - z_i}{z_{i+1} - z_i} \quad (4.35)$$

$$\omega = \frac{t_{j+\omega} - t_j}{t_{j+1} - t_j} \quad (4.36)$$

donde  $0 \leq \gamma \leq 1$  y  $0 \leq \omega \leq 1$  para  $i = 1, 2, \dots$  y  $j = 1, 2, \dots$  son los índices para el espacio y el tiempo respectivamente. La discretización de las ecuaciones hace suponer que existen los factores de ponderación y que además, son independientes del espacio y del tiempo.



**Figura 4.1. Discretización del medio**

La presión  $\psi$  en un nodo intermedio  $i + \gamma$  para todo  $j$  se estima con:

$$\psi_{i+\gamma}^j = (1 - \gamma)\psi_i^j + \gamma\psi_{i+1}^j \quad (4.37)$$

La presión en el nodo intermedio  $i - (1 - \gamma)$ , para todo tiempo  $j$  se evalúa con:

$$\psi_{i-(1-\gamma)}^j = (1 - \gamma)\psi_{i-1}^j + \gamma\psi_i^j \quad (4.38)$$

mientras que la presión en el tiempo intermedio  $j + \omega$  para todo  $i$  se estima como:

$$\psi_i^{j+\omega} = (1 - \omega)\psi_i^j + \omega\psi_i^{j+1} \quad (4.39)$$

La derivada temporal de la ecuación (4.34) correspondiente al nodo  $i$ -ésimo se calcula sucesivamente como sigue:

$$C(\psi) \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = a_1 (\psi_i^{j+1} - \psi_i^j) ; \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (4.40)$$

en donde:

$$a_1 = \frac{C(\psi_i^{j+\omega})}{\Delta t_j} \quad ; \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (4.41)$$

La discretización de la derivada espacial en la ecuación (3.20):

$$\left. \frac{\partial q}{\partial z} \right|_i^{j+\omega} = \frac{q_{i+\gamma}^{j+\omega} - q_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta z_i} \quad ; \quad \Delta z_i = (1-\gamma)(z_i - z_{i-1}) + \gamma(z_{i+1} - z_i) \quad (4.42)$$

De acuerdo con la ecuación (3.22):

$$q_{i+\gamma}^{j+\omega} = -K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega}) \frac{\psi_{i+1}^{j+\omega} - \psi_i^{j+\omega}}{z_{i+1} - z_i} + K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega}) \quad (4.43)$$

$$q_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = -K(\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) \frac{\psi_i^{j+\omega} - \psi_{i-1}^{j+\omega}}{z_i - z_{i-1}} + K(\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) \quad (4.44)$$

Las variables dependientes que intervienen en la conductividad hidráulica de las ecuaciones (4.43) y (4.44) quedan definidos por:

$$\psi_{i+\gamma}^{j+\omega} = (1-\omega)\psi_{i+\gamma}^j + \omega\psi_{i+\gamma}^{j+1} = (1-\omega)[(1-\gamma)\psi_i^j + \gamma\psi_{i+1}^j] + \omega[(1-\gamma)\psi_i^{j+1} + \gamma\psi_{i+1}^{j+1}] \quad (4.45)$$

$$\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = (1-\omega)\psi_{i-(1-\gamma)}^j + \omega\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+1} = (1-\omega)[(1-\gamma)\psi_{i-1}^j + \gamma\psi_i^j] + \omega[(1-\gamma)\psi_{i-1}^{j+1} + \gamma\psi_i^{j+1}] \quad (4.46)$$

mientras que las derivadas dependientes que intervienen en la derivada de las mismas ecuaciones quedan definidas por:

$$\psi_{i+1}^{j+\omega} = (1-\omega)\psi_{i+1}^j + \omega\psi_{i+1}^{j+1} \quad (4.47)$$

$$\psi_i^{j+\omega} = (1-\omega)\psi_i^j + \omega\psi_i^{j+1} \quad (4.48)$$

$$\psi_{i-1}^{j+\omega} = (1-\omega)\psi_{i-1}^j + \omega\psi_{i-1}^{j+1} \quad (4.49)$$

La ecuación (4.42) puede ser escrita como:

$$\frac{\partial q}{\partial z_i} \Big|^{j+\omega} = \frac{1}{\Delta z_i} \left\{ \left[ K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega}) - K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega}) \frac{\psi_{i+1}^{j+\omega} - \psi_i^{j+\omega}}{z_{i+1} - z_i} \right] - \left[ K(\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) - K(\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) \frac{\psi_i^{j+\omega} - \psi_{i-1}^{j+\omega}}{z_i - z_{i-1}} \right] \right\} \quad (4.50)$$

Simplificando la ecuación (4.50) se tiene:

$$\frac{\partial q}{\partial z_i} \Big|^{j+\omega} = b_1 - b_2 (\psi_{i+1}^{j+\omega} - \psi_i^{j+\omega}) - b_3 + b_4 (\psi_i^{j+\omega} - \psi_{i-1}^{j+\omega}) \quad (4.51)$$

donde los coeficientes están dados por:

$$b_1 = \frac{K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega})}{\Delta z_i} \quad (4.52)$$

$$b_2 = \frac{K(\Psi_{i+\gamma}^{j+\omega})}{\Delta z_i (z_{i+1} - z_i)} \quad (4.53)$$

$$b_3 = \frac{K(\Psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega})}{\Delta z_i} \quad (4.54)$$

$$b_4 = \frac{K(\Psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega})}{\Delta z_i (z_i - z_{i-1})} \quad (4.55)$$

Considerando las ecuaciones (4.47), (4.48) y (4.49) en la ecuación (4.51) se tiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q}{\partial z_i} \right|^{j+\omega} &= b_1 - b_2 \left\{ [(1-\omega)\psi_{i+1}^j + \omega\psi_{i+1}^{j+1}] - [(1-\omega)\psi_i^j + \omega\psi_i^{j+1}] \right\} \\ &\quad - b_3 + b_4 \left\{ [(1-\omega)\psi_i^j + \omega\psi_i^{j+1}] - [(1-\omega)\psi_{i-1}^j + \omega\psi_{i-1}^{j+1}] \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Desarrollando los productos y agrupando términos semejantes se tiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q}{\partial z_i} \right|^{j+\omega} &= b_1 - b_2 \omega \psi_{i+1}^{j+1} - b_3 - b_4 \omega \psi_{i-1}^{j+1} - b_4 (1-\omega) \psi_{i-1}^j \\ &\quad + \omega (b_2 + b_4) \psi_i^{j+1} + (1-\omega) (b_2 + b_4) \psi_i^j - b_2 (1-\omega) \psi_{i+1}^j \end{aligned} \quad (4.57)$$

La sustitución de las ecuaciones (4.40) y (4.57) en la ecuación (4.34) conduce al sistema de ecuaciones algebraicas siguientes:

$$A_i \psi_{i-1}^{j+1} + B_i \psi_i^{j+1} + D_i \psi_{i+1}^{j+1} = E_i \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.58)$$

donde

$$A_i = -\omega b_4 \quad (4.59)$$

$$D_i = -\omega b_2 \quad (4.60)$$

$$B_i = a_1 - A_i - D_i \quad (4.61)$$

$$E_i = b_3 - b_1 + (1-\omega)b_4 \psi_{i-1}^j - [(1-\omega)(b_2 + b_4) - a_1] \psi_i^j + (1-\omega)b_2 \psi_{i+1}^j + T_i^{j+\omega} \quad (4.62)$$

Una vez especificadas las condiciones inicial y de frontera, el sistema (4.58) puede ser bien resuelto con el algoritmo de Thomas. Es de importancia notar que el sistema es no lineal puesto que los coeficientes (4.59), (4.61), (4.60) y (4.62) dependen de la propia solución. Por lo tanto, la resolución para cada paso de tiempo es iterativa.

#### 4.4. Una solución en diferencias finitas para el transporte de solutos

El esquema numérico que se presenta a continuación parte de la suposición de que el soluto está concentrado en la fase líquida principalmente. Al final del esquema, se dan las indicaciones para incorporar las isotermas que relacionan la concentración en el agua y la cantidad absorbida en el suelo. La ecuación de transporte unidimensional de una especie que se resuelve es:

$$\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} + \frac{\partial(qC)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \theta Da \frac{\partial C}{\partial z} \right) + R_s \quad (4.63)$$

Utilizando el mismo esquema de discretización que para la transferencia de agua (Figura 4.1), se hace uso de los parámetros de interpolación definidos por las ecuaciones (4.35) y (4.36).

Una variable dependiente ( $\Phi$ ) en un nodo intermedio  $i+\gamma$  para todo  $j$  se estima como:

$$\Phi_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)\Phi_i^j + \gamma\Phi_{i+1}^j \quad (4.64)$$

mientras que en el tiempo intermedio  $j+\omega$  para todo  $i$  se estima como:

$$\Phi_i^{j+\omega} = (1-\omega)\Phi_i^j + \omega\Phi_i^{j+1} \quad (4.65)$$

La discretización de la derivada temporal en la ecuación (3.37):

$$\left. \frac{\partial(\theta C)}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = \frac{\theta_i^{j+1}C_i^{j+1} - \theta_i^jC_i^j}{\Delta t_j} = b_2C_i^{j+1} - b_1C_i^j ; \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (4.66)$$

en donde:

$$b_1 = \frac{\theta_i^j}{\Delta t_j} ; \quad b_2 = \frac{\theta_i^{j+1}}{\Delta t_j} \quad (4.67)$$

La discretización de la derivada espacial en la ecuación (3.37):

$$\left. \frac{\partial qs}{\partial z} \right|_i^{j+\omega} = \frac{qs_{i+\gamma}^{j+\omega} - qs_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta z_i} \quad ; \quad \Delta z_i = (1-\gamma)(z_i - z_{i-1}) + \gamma(z_{i+1} - z_i) \quad (4.68)$$

De acuerdo con la ecuación (3.38):

$$qs_{i+\gamma}^{j+\omega} = a_{i+\gamma}^{j+\omega} C_{i+\gamma}^{j+\omega} - \theta_{i+\gamma}^{j+\omega} Da_{i+\gamma}^{j+\omega} \frac{C_{i+1}^{j+\omega} - C_i^{j+\omega}}{z_{i+1} - z_i} \quad (4.69)$$

$$qs_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = a_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} C_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} - \theta_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} Da_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} \frac{C_i^{j+\omega} - C_{i-1}^{j+\omega}}{z_i - z_{i-1}} \quad (4.70)$$

De acuerdo con la ecuación (4.64) se tiene la siguiente interpolación espacial:

$$C_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)C_i^j + \gamma C_{i+1}^j \quad (4.71)$$

$$C_{i-(1-\gamma)}^j = (1-\gamma)C_{i-1}^j + \gamma C_i^j \quad (4.72)$$

y de acuerdo con la ecuación (4.65) la siguiente interpolación temporal:

$$C_i^{j+\omega} = (1-\omega)C_i^j + \omega C_i^{j+1} \quad (4.73)$$

Las variables dependientes que intervienen en el término advectivo de las ecuaciones (4.69) y (4.70) quedan definidas por:

$$C_{i+\gamma}^{j+\omega} = (1-\omega)C_{i+\gamma}^j + \omega C_{i+\gamma}^{j+1} = (1-\omega)\left[(1-\gamma)C_i^j + \gamma C_{i+1}^j\right] + \omega\left[(1-\gamma)C_i^{j+1} + \gamma C_{i+1}^{j+1}\right] \quad (4.74)$$

$$C_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = (1-\omega)C_{i-(1-\gamma)}^j + \omega C_{i-(1-\gamma)}^{j+1} = (1-\omega)\left[(1-\gamma)C_{i-1}^j + \gamma C_i^j\right] + \omega\left[(1-\gamma)C_{i-1}^{j+1} + \gamma C_i^{j+1}\right] \quad (4.75)$$

mientras que las variables dependientes que intervienen en el término dispersivo de las mismas ecuaciones quedan definidas por:

$$C_{i+1}^{j+\omega} = (1-\omega)C_{i+1}^j + \omega C_{i+1}^{j+1} \quad (4.76)$$

$$C_i^{j+\omega} = (1-\omega)C_i^j + \omega C_i^{j+1} \quad (4.77)$$

$$C_{i-1}^{j+\omega} = (1-\omega)C_{i-1}^j + \omega C_{i-1}^{j+1} \quad (4.78)$$

La ecuación (4.68) considerando las ecuaciones (4.69) y (4.70) puede ser escrita como:

$$\left. \frac{\partial qs}{\partial z} \right|_i^{j+\omega} = a_1 C_{i+\gamma}^{j+\omega} - a_2 (C_{i+1}^{j+\omega} - C_i^{j+\omega}) - a_3 C_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} + a_4 (C_i^{j+\omega} - C_{i-1}^{j+\omega}) \quad (4.79)$$

donde

$$a_1 = \frac{q_{i+\gamma}^{j+\omega}}{\Delta z_i} \quad (4.80)$$

$$a_2 = \frac{\theta_{i+\gamma}^{j+\omega} Da_{i+\gamma}^{j+\omega}}{\Delta z_i (z_{i+1} - z_i)} \quad (4.81)$$

$$a_3 = \frac{q_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta z_i} \quad (4.82)$$

$$a_4 = \frac{\theta_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} Da_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta z_i (z_i - z_{i-1})} \quad (4.83)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.74)-(4.78) en la ecuación (4.79) y sumando términos semejantes se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial qs}{\partial z} \right|_i^{j+\omega} &= -\omega [a_4 + (1-\gamma)a_3] C_{i-1}^{j+1} + \omega [(1-\gamma)a_1 + a_2 - \gamma a_3 + a_4] C_i^{j+1} + \omega [\gamma a_1 - a_2] C_{i+1}^{j+1} \\ &\quad - (1-\omega) [a_4 + (1-\gamma)a_3] C_{i-1}^j + (1-\omega) [a_4 - \gamma a_3 + a_2 + (1-\gamma)a_1] C_i^j \\ &\quad + (1-\omega) [\gamma a_1 - a_2] C_{i+1}^j \end{aligned} \quad (4.84)$$

La sustitución de las ecuaciones (4.66) y (4.84) en la ecuación (3.37) conduce al sistema de ecuaciones algebraicas siguientes:

$$As_i C_{i-1}^{j+1} + Bs_i C_i^{j+1} + Ds_i C_{i+1}^{j+1} = Es_i \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.85)$$

donde

$$As_i = -\omega[a_4 + (1-\gamma)a_3] \quad (4.86)$$

$$Bs_i = \omega[(1-\gamma)a_1 + a_2 - \gamma a_3 + a_4] + b_2 \quad (4.87)$$

$$Ds_i = \omega[\gamma a_1 - a_2] \quad (4.88)$$

$$Es_i = Rs_i^{j+\omega} + (1-\omega)[a_4 + (1-\gamma)a_3]C_{i-1}^j - \{(1-\omega)[a_4 - \gamma a_3 + a_2 + (1-\gamma)a_1] - b_1\}C_i^j - (1-\omega)[\gamma a_1 - a_2]C_{i+1}^j \quad (4.89)$$

El flujo del agua y la humedad se obtienen de la solución de la ecuación de transferencia de agua por lo que se debe de incluir en el sistema (4.85). Al igual que en la ecuación de transferencia de agua, para establecer la solución es necesario la especificación de las condiciones iniciales y de frontera.

#### 4.5. Algoritmo de Thomas

El algoritmo de Thomas es empleado para resolver sistemas como el (4.58) y el (4.85), cuyos coeficientes forman matrices tridiagonales. Este algoritmo requiere que se establezcan las reglas recursivas siguientes:

Para la transferencia de agua:

$$\psi_i^{j+1} = F_i - G_i \psi_{i+1}^{j+1} \quad ; \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.90)$$

y para el transporte de solutos:

$$C_i^{j+1} = Fs_i - Gs_i C_{i+1}^{j+1} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.91)$$

donde:

$$F_i = \frac{E_i - A_i F_{i-1}}{B_i - A_i G_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (4.92)$$

$$G_i = \frac{D_i}{B_i - A_i G_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (4.93)$$

$$Fs_i = \frac{Es_i - As_i Fs_{i-1}}{Bs_i - As_i Gs_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.94)$$

$$Gs_i = \frac{Ds_i}{Bs_i - As_i Gs_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.95)$$

El procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones es el siguiente:

- Se define la condición inicial de humedad en el perfil del suelo
- Se define  $F_1$ ,  $G_1$  y  $Fs_1$ ,  $Gs_1$  para la frontera superior, es decir, en la superficie del suelo.
- Se calculan  $F_i$ ,  $G_i$  y  $Fs_i$ ,  $Gs_i$  con  $i = 2, \dots, n-1$  con las ecuaciones (4.92) - (4.95), esto constituye el barrido hacia delante.
- Se define  $\psi_n^{j+1}$  y  $C_n^{j+1}$  de la condición de frontera en  $z = L$  (frontera inferior).
- Se determinan  $\psi_i^{j+1}$  y  $C_i^{j+1}$  con  $i = n-1, \dots, 2$  con las ecuaciones (4.90) y (4.91), lo que constituye el barrido hacia atrás.

## 4.6. Condiciones de frontera

Para resolver cualquier ecuación diferencial es necesario conocer el valor de la incógnita en algunos puntos sobre la frontera del dominio de la solución, a esto se le conoce con el nombre de condiciones de frontera. Existen tres tipos de condiciones de frontera: la de Dirichlet (primer tipo), de Neumann (segundo tipo) y de Robbins (tercer tipo), los cuales son descritos a continuación.

### 4.6.1. Condición de Dirichlet

Esta condición se aplica cuando se conoce el valor de la variable dependiente de la ecuación diferencial para todo tiempo en la superficie del suelo, por ejemplo, cuando el valor del potencial ( $\psi$ ) y la presión ( $C$ ) son datos conocidos. Se introduce en la solución numérica mediante la definición de  $F_1$ ,  $G_1$  y  $Fs_1$ ,  $Gs_1$  de la ecuación (4.90). Esta condición es aplicada de la siguiente manera a las dos fronteras:

#### *a. Frontera superior*

Se hace  $i = 1$  en las ecuaciones (4.90) y (4.91), resultando la siguiente expresión:

$$\psi_1^{j+1} = F_1 - G_1 \psi_2^{j+1} \quad (4.96)$$

$$C_1^{j+1} = Fs_1 - Gs_1 C_2^{j+1} \quad (4.97)$$

debido a que  $\psi_1$  es la lámina sobre la superficie del suelo y  $C_1$  es la concentración del agua en la superficie del suelo, independientes de  $\psi_2$  y  $C_2$  respectivamente, se tiene:

$$F_1 = \psi_1^{j+1} \quad y \quad G_1 = 0 \quad (4.98)$$

$$Fs_1 = C_1^{j+1} \quad y \quad Gs_1 = 0 \quad (4.99)$$

### ***b. Frontera inferior***

Esta condición se utiliza en dos situaciones diferentes:

- i. Cuando se considera una columna semi-infinita el potencial de presión y la concentración en la frontera inferior corresponde a la condición inicial.
- ii. Cuando se considera un manto freático estático con una concentración de soluto dada.

La condición en la frontera inferior se introduce de manera análoga a la frontera superior, haciendo  $i = n - 1$  en las ecuaciones (4.90) y (4.91) se tiene:

$$\psi_{n-1}^{j+1} = F_{n-1} - G_{n-1} \psi_n^{j+1} \quad (4.100)$$

$$C_{n-1}^{j+1} = Fs_{n-1} - Gs_{n-1} C_n^{j+1} \quad (4.101)$$

### **4.6.2. Condición de Neumann**

Esta condición se aplica cuando se conoce la derivada de la función, es decir, el flujo de agua y su concentración en la superficie del suelo son conocidos para todo tiempo y el valor de  $\psi_1$  y  $C_1$  son calculados utilizando las leyes de flujo, y se aplica de la siguiente manera en las fronteras establecidas:

**a. Frontera superior**

Para la transferencia de agua se tiene la siguiente ecuación:

$$q_1 = -K_{1+\gamma}^{j+\omega} \left( \frac{\psi_2^{j+1} - \psi_1^{j+1}}{z_2 - z_1} - 1 \right) \quad (4.102)$$

despejando a  $\psi_1^{j+1}$  de la ecuación (4.102) resulta:

$$\psi_1^{j+\omega} = (z_2 - z_1) \left( \frac{q_1}{K_{1+\gamma}^{j+\omega}} - 1 \right) + \psi_2^{j+\omega} \quad (4.103)$$

de acuerdo con la ecuación (4.90) se tiene:

$$F_1 = (z_2 - z_1) \left( \frac{q_1}{K_{1+\gamma}^{j+\omega}} - 1 \right) \quad \text{y} \quad G_1 = 1 \quad (4.104)$$

Para el transporte de solutos se tiene:

$$qs_1 = -D_{1+\gamma}^{j+\omega} \left( \frac{C_2^{j+1} - C_1^{j+1}}{z_2 - z_1} - 1 \right) + (qC)_{1+\gamma}^{j+\omega} \quad (4.105)$$

Expandiendo el término convectivo se tiene:

$$\begin{aligned}
qs_1 = & -D_{1+\gamma}^{j+\omega} \left( \frac{C_2^{j+1} - C_1^{j+1}}{z_2 - z_1} - 1 \right) + (qC)_{1+\gamma}^{j+\omega} + (1-\omega) \left[ (1-\gamma)(qC)_1^j + \gamma(qC)_2^j \right] \\
& + \omega \left[ (1-\gamma)(qC)_1^{j+1} + \gamma(qC)_2^{j+1} \right]
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Despejando el término  $C_1^{j+1}$  se obtiene una expresión análoga a la (4.103):

$$Fs_1 = \frac{(z_2 - z_1) \left\{ qs_1 - (1-\omega) \left[ (1-\gamma)(qC)_1^j + \gamma(qC)_2^j \right] \right\}}{D_{1+\gamma}^{j+\omega} + (z_2 - z_1) \omega (1-\gamma) q_1^{j+1}} \tag{4.107}$$

$$Gs_1 = - \frac{D_{1+\gamma}^{j+\omega} - (z_2 - z_1) \omega \gamma q_2^{j+1}}{D_{1+\gamma}^{j+\omega} + (z_2 - z_1) \omega (1-\gamma) q_1^{j+1}} \tag{4.108}$$

### ***b. Frontera inferior***

Esta condición se aplica cuando se conoce el flujo de drenaje ( $q_n$ ) y la concentración del agua que sale ( $C_n$ ). Los valores de  $\psi_n$  y  $C_n$  se obtienen a partir de las leyes de flujo, resultando la siguiente expresión para la transferencia de agua:

$$q_n = -K_{n-(1-\gamma)}^{j+\omega} \left( \frac{\psi_n^{j+1} - \psi_{n-1}^{j+1}}{z_n - z_{n-1}} - 1 \right) \tag{4.109}$$

despejando a  $\psi_n^{j+1}$  de la ecuación se tiene:

$$\Psi_{n-1}^{j+1} = (z_n - z_{n-1}) \left( \frac{q_n^{j+1}}{K_{n-(1-\gamma)}^{j+\omega}} - 1 \right) + \Psi_n^{j+1} \quad (4.110)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (4.96) y (4.110) se determinan  $\Psi_n$  y  $\Psi_{n-1}$ .

Para el transporte de solutos se tiene:

$$qs_n = -D_{n-(1-\gamma)}^{j+\omega} \left( \frac{C_n^{j+1} - C_{n-1}^{j+1}}{z_n - z_{n-1}} - 1 \right) + (1-\omega) \left[ (1-\gamma)(qC)_{n-1}^j + \gamma(qC)_n^j \right] + \omega \left[ (1-\gamma)(qC)_{n-1}^{j+1} + \gamma(qC)_n^{j+1} \right] \quad (4.111)$$

de donde despejando a  $C_{n-1}^{j+1}$  se tiene:

$$C_{n-1}^{j+1} = \frac{(z_n - z_{n-1}) \left\{ qs_n - (1-\omega) \left[ (1-\gamma)(qC)_{n-1}^j + \gamma(qC)_n^j \right] \right\}}{D_{n-(1-\gamma)}^{j+\omega} + (z_n - z_{n-1}) \omega (1-\gamma) q_{n-1}^{j+1}} + \frac{D_{n-(1-\gamma)}^{j+\omega} - (z_n - z_{n-1}) \omega \gamma q_n^{j+1}}{D_{n-(1-\gamma)}^{j+\omega} + (z_n - z_{n-1}) \omega (1-\gamma) q_{n-1}^{j+1}} C_n^{j+1} \quad (4.112)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (4.91) y (4.112) se determinan  $C_n$  y  $C_{n-1}$ .

### 4.6.3. Condición de Robbins

Esta condición se aplica cuando la derivada normal de la variable dependiente en la frontera, es una función lineal de la misma variable, es decir, se acepta una variación lineal entre el flujo de Darcy y la diferencia de presión entre el medio externo ( $\psi_{\text{ext}}$ ) con la frontera, así como una variación lineal entre el flujo dispersivo y la diferencia de concentración con el medio externo ( $C_{\text{ext}}$ ) y la frontera, para todo tiempo. Es común en problemas de conducción de calor, donde el flujo de calor (radiación) a través de la frontera de un cuerpo sólido está relacionado con la temperatura del cuerpo en la frontera. En las posiciones  $z = 0$  y  $z = L$ , la condición de radiación lineal se traduce respectivamente como:

#### a. Frontera superior

En la posición  $z = 0$  la condición de radiación lineal para la transferencia de agua se traduce como:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} + \kappa \frac{\psi - \psi_{\text{ext}}}{L} = 0 \quad (4.113)$$

donde  $\kappa$  es un coeficiente adimensional de conductancia y  $L$  es la longitud del dominio de solución. Este coeficiente puede ser representado por  $\kappa = L/\ell$ , donde  $\ell$  es una escala de longitud característica de la interfaz. En forma discreta la ecuación (4.113) se traduce como:

$$-\frac{\psi_2^{j+1} - \psi_1^{j+1}}{z_2 - z_1} + \kappa \frac{\psi_1^{j+1} - \psi_{\text{ext}}^{j+1}}{L} = 0 \quad (4.114)$$

La cual puede ser escrita en la forma (4.90):

$$\Psi_1^{j+1} = -\frac{\kappa(z_2 - z_1)}{L + \kappa(z_2 - z_1)} \Psi_{\text{ext}}^{j+1} + \frac{L}{L + \kappa(z_2 - z_1)} \Psi_2^{j+1} \quad (4.115)$$

De la cual resultan los valores de  $F_1$  y  $G_1$ :

$$F_1 = \frac{\kappa(z_2 - z_1)}{L + \kappa(z_2 - z_1)} \Psi_{\text{ext}}^{j+1} \quad ; \quad G_1 = -\frac{L}{L + \kappa(z_2 - z_1)} \quad (4.116)$$

Para el transporte de solutos la condición de radiación lineal se traduce como:

$$-\frac{\partial C}{\partial z} + \kappa_s \frac{C - C_{\text{ext}}}{L} = 0 \quad (4.117)$$

En forma discreta la ecuación (4.117) puede ser escrita como:

$$-\frac{C_2^{j+1} - C_1^{j+1}}{z_2 - z_1} + \kappa_s \frac{C_1^{j+1} - C_{\text{ext}}^{j+1}}{L} = 0 \quad (4.118)$$

La cual puede ser escrita en la forma (4.91):

$$C_1^{j+1} = \frac{\kappa_s (z_2 - z_1)}{L + \kappa_s (z_2 - z_1)} C_{\text{ext}}^{j+1} + \frac{L}{L + \kappa_s (z_2 - z_1)} C_2^{j+1} \quad (4.119)$$

De la cual resultan los valores de  $Fs_1$  y  $Gs_1$ , a saber:

$$Fs_1 = \frac{\kappa_s (z_2 - z_1)}{L + \kappa_s (z_2 - z_1)} C_{\text{ext}}^{j+1} \quad ; \quad Gs_1 = -\frac{L}{L + \kappa_s (z_2 - z_1)} \quad (4.120)$$

### ***b. Frontera inferior***

En la posición  $z = L$  la condición de radiación lineal para la transferencia de agua se traduce como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \kappa \frac{\psi - \psi_{\text{ext}}}{L} = 0 \quad (4.121)$$

En forma discreta la ecuación (4.121) se traduce como:

$$\frac{\psi_n^{j+1} - \psi_{n-1}^{j+1}}{z_n - z_{n-1}} + \kappa \frac{\psi_n^{j+1} - \psi_{\text{ext}}^{j+1}}{L} = 0 \quad (4.122)$$

La cual puede ser escrita en la forma (4.90):

$$\psi_{n-1}^{j+1} = -\frac{\kappa(z_n - z_{n-1})}{L} \psi_{\text{ext}}^{j+1} + \frac{L + \kappa(z_n - z_{n-1})}{L} \psi_n^{j+1} \quad (4.123)$$

Para conocer el valor de las presiones, se requiere el valor de  $\psi_n$ , el cual se calcula igualando la expresión resultante del barrido hacia adelante proporcionada por la ecuación (4.90),  $\psi_{n-1}^{j+1} = F_{n-1} - G_{n-1} \psi_n^{j+1}$ , con la ecuación (4.123), es decir:

$$\psi_n^{j+1} = \frac{F_{n-1}L + \kappa(z_n - z_{n-1})\psi_{\text{ext}}^{j+1}}{(G_{n-1} + 1)L + \kappa(z_n - z_{n-1})} \quad (4.124)$$

Para el transporte de solutos la condición de radiación lineal se traduce como:

$$\frac{\partial C}{\partial z} + \kappa_s \frac{C - C_{\text{ext}}}{L} = 0 \quad (4.125)$$

En forma discreta la ecuación (4.125) se escribe como:

$$\frac{C_n^{j+1} - C_{n-1}^{j+1}}{z_n - z_{n-1}} + \kappa_s \frac{C_n^{j+1} - C_{\text{ext}}^{j+1}}{L} = 0 \quad (4.126)$$

La cual puede ser escrita en la forma (4.91):

$$C_{n-1}^{j+1} = -\frac{\kappa_s (z_n - z_{n-1})}{L} C_{\text{ext}}^{j+1} + \frac{L + \kappa_s (z_n - z_{n-1})}{L} C_n^{j+1} \quad (4.127)$$

En el barrido hacia adelante la ecuación (4.91) proporciona  $C_{n-1}^{j+1} = Fs_{n-1} - Gs_{n-1} C_n^{j+1}$ , el barrido hacia atrás requiere del valor de  $C_n^{j+1}$ , el cual se calcula igualando la expresión precedente con la ecuación (4.127), es decir:

$$C_n^{j+1} = \frac{Fs_{n-1}L + \kappa_s (z_n - z_{n-1}) C_{\text{ext}}^{j+1}}{(Gs_{n-1} + 1)L + \kappa_s (z_n - z_{n-1})} \quad (4.128)$$

Como puede verse, en el cambio de almacenamiento, la deducción de la ecuación de continuidad permite introducir los diferentes componentes, es decir, se debe reemplazar la C que interviene en la derivada temporal por una concentración total, cuyos elementos en la fase gaseosa ya se han indicado, y la adsorción entre las sales solubles con respecto a la fase sólida suscita un tema de interés. Nuestro esquema numérico está diseñado en general, pueden incorporarse las reacciones finas entre las sales solubles en los distritos de riego. Así mismo, las transferencias de las mismas, según la percepción generalizada, en el medio y su ambiente “puro” es convectivo o advectivo; en la transferencia del soluto que transita y reacciona con el medio poroso es advectivo, es decir, el flujo de sustancia hacia otro medio sustancialmente diferente se dará por transporte. En términos matemáticos, es adecuado ver que la sustancia deja de ser de Fick. Sin embargo, por procedimientos numéricos de generalidad, hemos considerado que su transferencia hacia el exterior sigue la misma ley de los fluidos; el parámetro introducido, análogo a la transferencia de los fluidos, ( $\kappa_s$ ), juega el papel de indicador de bondad del sistema general que hemos propuesto. Debe de ser cero por definición, y los resultados así lo muestran.

## **4.7. Aplicaciones**

### **4.7.1. Preparación del experimento**

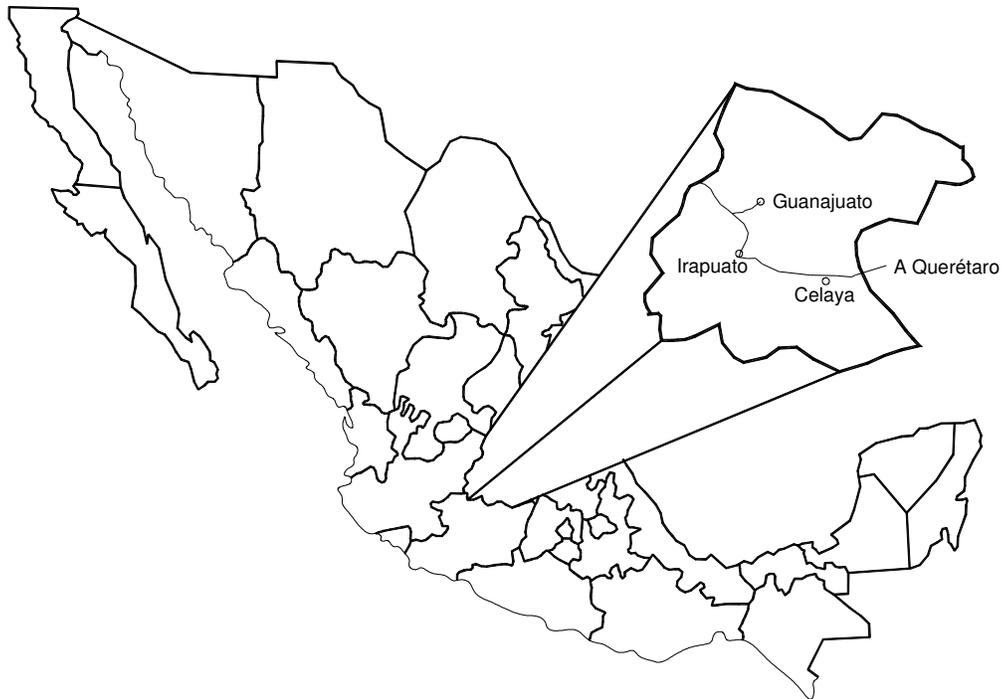
El proceso de infiltración se realizó en un módulo de drenaje facilitado por el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA), el cual tiene las siguientes características: dimensiones de 2.0 x 1.8 x 0.3 m, con paredes de acrílico transparente (lucita) de 0.015 m de espesor. Cuenta con dos tubos ranurados de PVC (drenes) de 5.08 cm de diámetro y están cubiertos por un filtro. La separación entre los drenes es de  $L = 1$  m y están colocados a 0.5 m de las paredes laterales y a 0.275 m del fondo del mismo (Figura 4.2). El módulo tiene una estructura metálica con perfil tubular rectangular en el exterior con la finalidad de dar el soporte adecuado.

En el módulo de drenaje se colocó un suelo de características salinas hasta una altura de 1.50 m a partir de fondo. El suelo previamente fue secado al aire y pasado por el tamiz número 10 (2 mm). Para seleccionar el suelo, se realizó un recorrido por las zonas agrícolas de Celaya Guanajuato a fin de encontrar uno con características salinas y permeable.

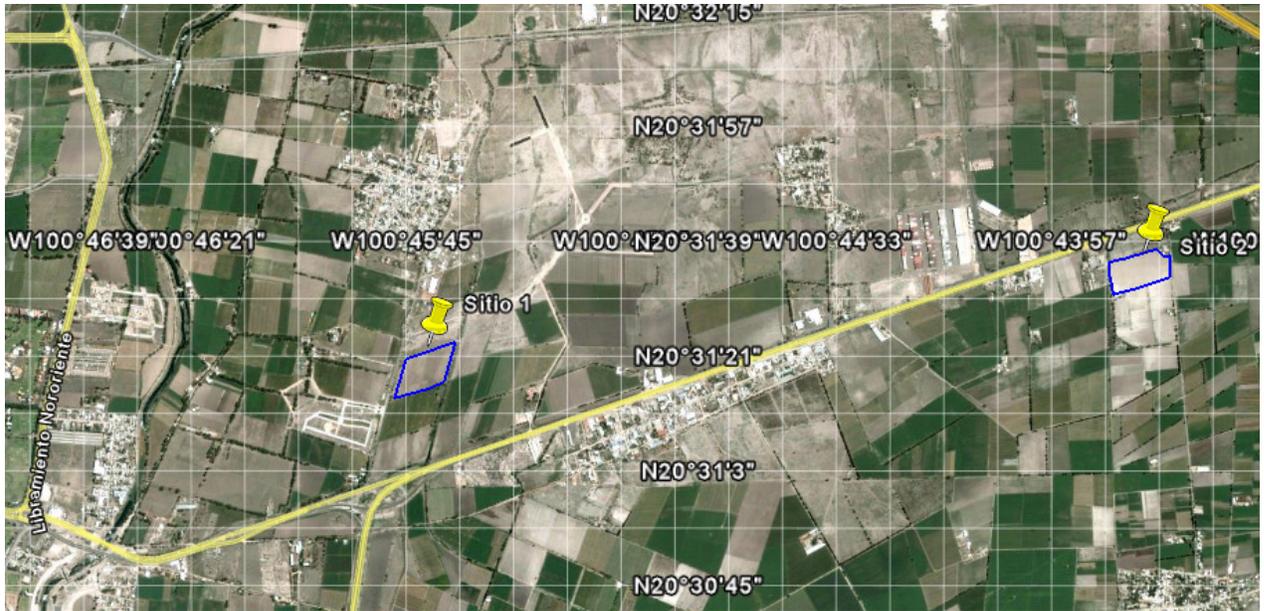
Se colectaron muestras de dos sitios localizados en la entrada de Celaya (Figura 4.3 y Figura 4.4) y se llevaron al laboratorio para determinar sus características físico químicas: cationes (Ca, Mg, Na, K), aniones ( $\text{CO}_3$ ,  $\text{HCO}_3$ ,  $\text{SO}_4$  y Cl), textura, potencial hidrógeno, densidad aparente, conductividad hidráulica saturada y la curva granulométrica, los cuales son descritas a continuación.



**Figura 4.2. Módulo de drenaje**



**Figura 4.3. Croquis de localización de los sitios de muestreo**



**Figura 4.4. Coordenadas de los sitios de muestreo**

#### **4.7.2. Caracterización del suelo**

Las características físico-químicas del suelo se relacionan directamente con el desarrollo de los cultivos, así como la cantidad y calidad de la cosecha. La determinación en laboratorio de las propiedades físico-químicas del agua y suelo es fundamental para la elaboración de un diagnóstico del estado de los terrenos agrícolas y para la formulación de acciones preventivas o correctivas que optimicen su condición presente.

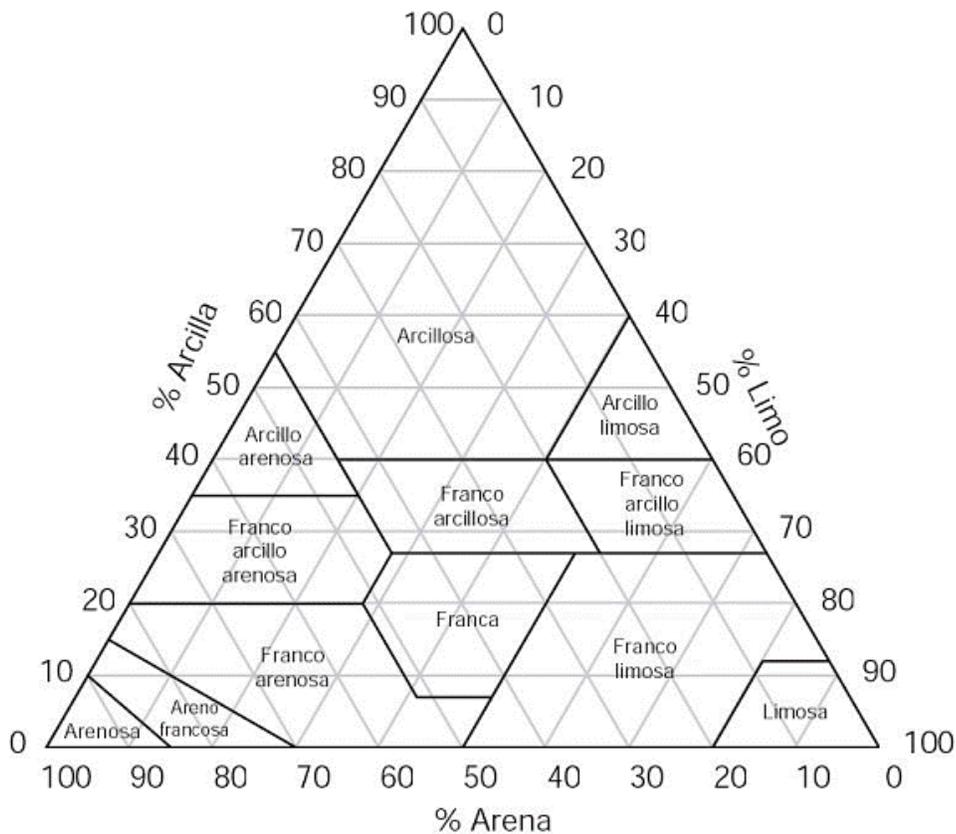
##### **4.7.2.1. Análisis físicos**

###### **a) *Textura del suelo***

La textura del suelo es la proporción relativa de arena, limo y arcilla. A partir de ella se pueden estimar las propiedades generales del suelo como conductividad hidráulica saturada, porosidad total, capacidad de campo, punto de marchitamiento permanente, entre otras. La determinación de la textura se realizó con el

procedimiento de Bouyucos a través del método AS – 09 siguiendo la norma NOM-021-RECNAT-2000.

El método de Bouyucos de manera general consiste en separar los agregados del suelo y analizar sólo las partículas, eliminando la materia orgánica y la floculación debida a los cationes calcio y magnesio. El tiempo de lectura es de 40 segundos para la separación de partículas mayores de 0.05 mm (arena) y de 2 horas para las partículas de diámetro mayores de 0.002 mm (limo y arcilla). Después de hacer las correcciones por temperatura y obtener los porcentajes finales, se determina la textura correspondiente haciendo uso del triángulo de texturas (Figura 4.5).



**Figura 4.5. Triángulo de texturas.**

### ***b) Granulometría del suelo***

La curva granulométrica de un suelo es la representación gráfica de la distribución del tamaño de las partículas que lo forman. Para determinar esta curva generalmente se utilizan dos procedimientos en forma combinada, las partículas gruesas o granulares (tamaños mayores de 74 micras) se separan por medio de tamices con aberturas de malla estandarizadas, y luego se pesan las cantidades que han sido retenidas en cada tamiz. La distribución de tamaños de la fracción fina del suelo (limos y arcillas) se determina a partir de la velocidad de sedimentación de las partículas en un fluido o método del hidrómetro de bouyucos. La curva granulométrica total se representa en un gráfico "log-normal" el cual tiene en la horizontal una escala logarítmica y en la vertical una escala natural.

#### **4.7.2.2. Análisis químicos**

##### ***a) Conductividad eléctrica***

El contenido de sales de un suelo se puede estimar con la medida de la conductividad eléctrica, que representa la capacidad que tiene un material para conducir la corriente eléctrica. Cuando se estudia la relación entre la salinidad del suelo y el desarrollo de las plantas es recomendable medir la conductividad eléctrica del extracto de saturación, que es un extracto acuoso que se obtiene por filtración al vacío de una pasta de suelo saturado hecha con agua destilada.

El principio por el cual los instrumentos miden conductividad eléctrica es simple: dos placas de conductividad o electrodos se sumergen en el extracto de saturación, se aplica un potencial o voltaje a través de las placas y se mide la corriente que fluye entre las placas. La conductancia eléctrica (C) se determina a partir de los valores del voltaje (V) y la corriente (I).

$$C = \frac{I}{V} \quad (4.129)$$

La conductividad eléctrica se calcula con:

$$CE = C \frac{L}{A} \quad (4.130)$$

donde L es la longitud de la columna de líquido entre los electrodos (cm); y A el área de los electrodos (cm<sup>2</sup>). La conductividad eléctrica del extracto de saturación (CE) se reporta en decisiemens por metro (dSm<sup>-1</sup>).

### ***b) Potencial Hidrógeno (pH)***

El pH tiene un efecto directo en el comportamiento químico del suelo y sobre algunos procesos biológicos que se efectúan en él y es capaz de afectar indirectamente algunas propiedades físicas. Es uno de los criterios más utilizados para saber si un suelo es ácido o alcalino.

### ***c) Aniones y cationes***

La determinación de los aniones (Ca, Mg, Na, K) y los cationes (CO<sub>3</sub>, HCO<sub>3</sub>, SO<sub>4</sub>, Cl) en el suelo son importantes para poder obtener los indicadores del grado de salinidad que afecta al suelo, así como ver cual es el elemento que se encuentra en mayor cantidad en la parcela de estudio. Se tiene por ejemplo, que los suelos que contienen pequeñas cantidades de magnesio intercambiable poseen baja permeabilidad. Así, las diferentes aguas superficiales y subterráneas y de los suelos en los cuales el ión magnesio tiene una concentración relativamente elevada (Ca/Mg < 1) el efecto potencial de peligrosidad del ión sodio aumenta considerablemente.

**d) Relación de adsorción de sodio (RAS) y porcentaje de sodio intercambiable (PSI)**

La relación de adsorción de sodio es un parámetro que refleja la posible influencia del ion sodio sobre las propiedades del suelo, debido a que tiene efectos dispersantes sobre los coloides del suelo y afecta su permeabilidad. Sus efectos no sólo dependen de la concentración del sodio, sino que además, del resto de los cationes. Este índice da la proporción relativa en que se encuentra el sodio respecto al calcio y magnesio, cationes divalentes que compiten con el sodio por los lugares de intercambio del suelo. La determinación de la relación de adsorción de sodio se basa en una fórmula empírica que relaciona los contenidos de sodio, calcio y magnesio:

$$RAS = \frac{Na}{\sqrt{\frac{Ca + Mg}{2}}} \quad (4.131)$$

donde todos los valores son expresados en meq/l.

El porcentaje de sodio intercambiable, definido como el porcentaje de sodio adsorbido sobre la superficie de las arcillas, se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$PSI = \frac{100(-0.0126 + 0.01475 RAS)}{1 + (-0.0126 + 0.01475 RAS)} \quad (4.132)$$

### 4.7.2.3. Caracterización hidráulica del suelo

#### a) Estimación de los parámetros de forma de la curva de retención de humedad

De acuerdo con Fuentes (1992), los parámetros de forma (m) y (n) pueden ser estimados a partir de la curva granulométrica, ajustándola con la ecuación (3.66), en la cual  $1 + \kappa = 1/2(1 - s)$ . Los parámetros de forma m y n se ligan mediante las relaciones mostradas por las ecuaciones (3.62), (3.63), y (3.64). El ajuste de la ecuación (3.66) puede ser realizado con un algoritmo de optimización no lineal.

#### b) Estimación de la conductividad hidráulica saturada

Fuentes *et al.* (2003) presentaron una metodología para obtener la conductividad hidráulica a saturación a partir de la curva granulométrica, bajo la siguiente relación:

$$K_s = \frac{g}{8\nu} \frac{R_d^2}{T_d^2} (\theta_s - \theta_r)^{2s} \quad (4.133)$$

donde g es la constante gravitacional asumido como  $981 \text{ cm/s}^2$ ;  $\nu$  es la viscosidad cinemática del agua, la cual tiene un valor de  $0.010 \text{ cm}^2/\text{s}$  a una temperatura de  $20^\circ\text{C}$ ;  $R_d$  es un radio de poro característico asociado a la presión  $\psi_d$  de la ecuación (3.48) a través de la relación de Laplace; este radio es la mitad del diámetro de poro ( $R_D$ ) calculado con la relación  $R_D = (D_d e^{1/3} / T_v H_v^{2s-1})^{1/2(1-s)}$ ; la relación de vacíos es estimada con  $e = \phi / (1 - \phi)$ ;  $T_v$  es asumido como 1;  $H_v$  se determina con la ecuación  $H_v = \phi^{1/3} H_t$ ;  $H_t$  se estima con la relación  $H_t = (6 / \pi r_t)^{1/3}$ ;  $T_d$  es la tortuosidad asociada

al poro característico estimado con la siguiente relación  $T_d = T_v (H_v/R_D)^{2s-1}$ . La presión de referencia es estimada a través de la relación de Laplace  $|\Psi_d| = 0.149/R_d$ .

### 4.7.3. Resultados

#### 4.7.3.1. Características hidráulicas de los sitios

Los resultados de la densidad aparente ( $\rho_t$ ), porosidad volumétrica total del suelo ( $\phi$ ) y la dimensión fractal relativa ( $s$ ) se muestran en el Cuadro 4.1. La densidad aparente se obtuvo por el método del cilindro de volumen conocido, la porosidad con la ecuación (3.6) y el parámetro ( $s$ ) con la ecuación (3.61) mediante iteraciones, introduciendo el valor de la porosidad total. Las curvas de granulometría obtenidas de los sitios seleccionados se obtuvieron mediante un análisis mecánico y por el hidrómetro de Bouyucos. Los valores del diámetro (en micras) y la frecuencia acumulada son mostrados en el Cuadro 4.2.

**Cuadro 4.1. Parámetros físicos de los sitios**

Parámetro	Sitio 1	Sitio 2
$\rho_t$	1.1408	1.0319
$\phi$	0.5695	0.6106
$s$	0.7083	0.7185

El parámetro de forma  $m$  es estimado a partir de la curva granulométrica experimental y de la porosidad total del suelo con la ecuación (3.66). Los resultados del ajuste de los modelos de conductividad (ecuaciones (3.62), (3.63) y (3.64)) son mostrados en el Cuadro 4.3.

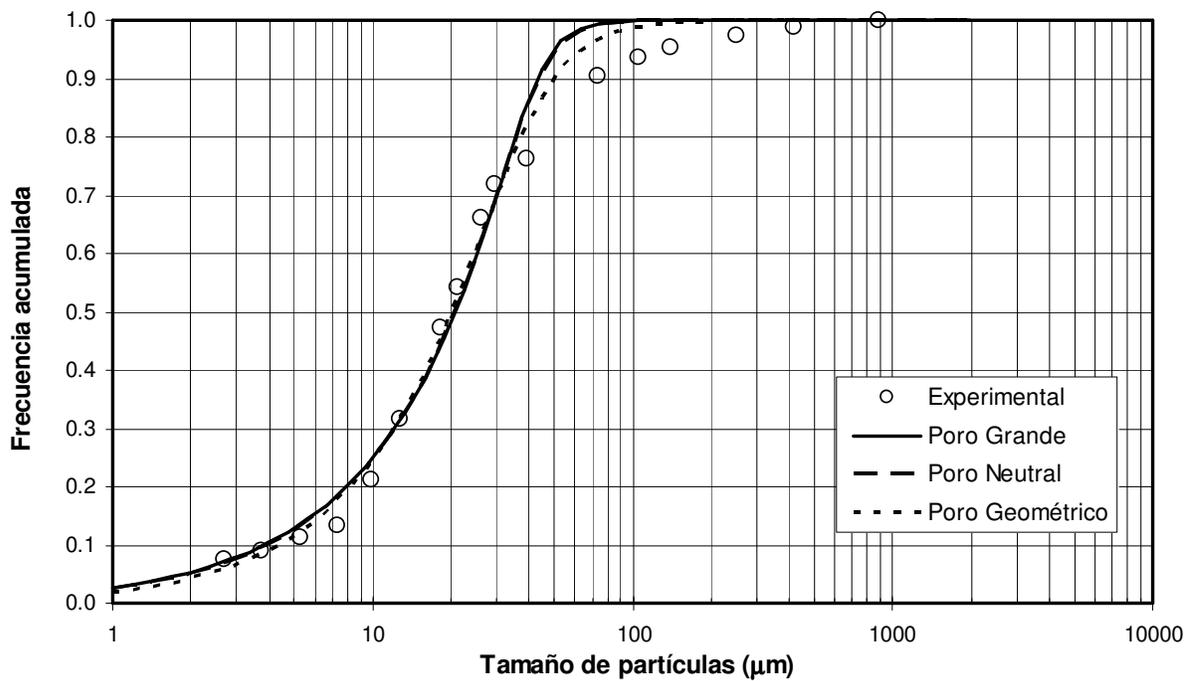
**Cuadro 4.2. Diámetro y frecuencia acumulada en los sitios de muestreo**

Sitio 1		Sitio 2	
Diámetro	Frecuencia acumulada	Diámetro	Frecuencia acumulada
2.6726	0.0745	2.6802	0.0620
3.7503	0.0896	3.7098	0.0992
5.2376	0.1134	5.1298	0.1364
7.3250	0.1341	6.8761	0.2187
9.9183	0.2106	9.0698	0.3133
12.7038	0.3157	11.3080	0.4214
18.3843	0.4737	16.6668	0.5186
21.1669	0.5409	19.3161	0.5633
26.1907	0.6607	24.3409	0.6421
29.5835	0.7191	28.2218	0.6737
38.9840	0.7629	37.7335	0.7026
74.0000	0.9045	74.0000	0.8303
105.0000	0.9359	105.0000	0.8830
140.0000	0.9548	140.0000	0.9283
250.0000	0.9725	250.0000	0.9576
420.0000	0.9876	420.0000	0.9837
880.0000	1.0000	880.0000	1.0000

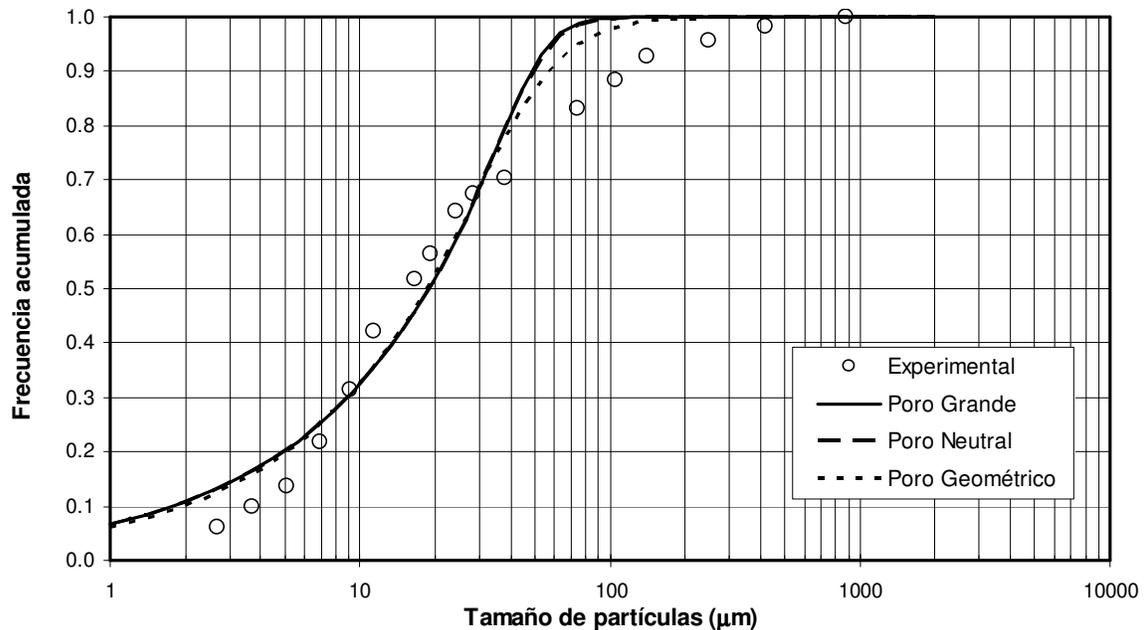
En la Figura 4.6 y en la Figura 4.7 se muestra la curva granulométrica ajustada con los tres modelos de poro, en un gráfico semilogarítmico para los sitios de estudio. De acuerdo con los resultados obtenidos del hidrómetro de Bouyucos, y utilizando el triángulo de texturas, Figura 4.5, se tiene que las texturas son Limosa y Franco limosa para los sitios 1 y 2, respectivamente

**Cuadro 4.3. Valores obtenidos de  $D_d$  y  $m$  para los modelos de conductividad de la media geométrica, del poro neutral y del poro grande.**

Sitio	Poro de la media geométrica		Poro neutral		Poro grande	
	$D_d$	$m$	$D_d$	$m$	$D_d$	$m$
	( $\mu\text{m}$ )	( )	( $\mu\text{m}$ )	( )	( $\mu\text{m}$ )	( )
<b>1</b>	36.2993	0.341	41.9366	0.1760	42.7974	0.1540
<b>2</b>	47.3905	0.2355	51.9685	0.1222	52.2701	0.1119



**Figura 4.6. Curva granulométrica del sitio uno ajustada con los tres modelos de poro para el sitio 1**



**Figura 4.7. Curva granulométrica del sitio dos ajustada con los tres modelos de poro para el sitio 2**

#### 4.7.3.2. Características químicas de los sitios

El análisis químico de los aniones, cationes y pH de los sitios seleccionados son mostrados en el Cuadro 4.4. También se muestran la relación de adsorción de sodio (RAS) y el porcentaje de sodios intercambiables (PSI), calculados con las ecuaciones (4.131) y (4.132) respectivamente. Los análisis se realizaron en el Laboratorio de Análisis de la Facultad de Química de la UAQ.

#### 4.7.3.3. La prueba de infiltración unidimensional

El suelo utilizado para el experimento fue el correspondiente al sitio 1. El sitio 2 fue descartado por problemas con el dueño del mismo para proveer el material. Del sitio 1 se tomó una muestra de 2 m<sup>3</sup>, el suelo se tamizó con la malla número 10 (2 mm) y secado al aire por un tiempo de 1 semana (ver Figura 4.8). El contenido de humedad

inicial constante en el suelo colocado en el módulo de drenaje fue  $\theta_0 = 0.1662 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ , el cual se obtuvo llevando varias muestras al horno hasta obtener peso constante y por diferencias de peso obtener el volumen de agua. El suelo fue colocado en el módulo por capas de 5.5 cm y compactado con un mazo para obtener una densidad promedio de  $\rho_t = 1.1408 \text{ g/cm}^3$  hasta una altura de 1.50 m (ver Figura 4.9). El volumen de suelo seco puesto en el módulo fue de  $V_t = 899,392 \text{ cm}^3$ .

**Cuadro 4.4. Análisis químicos de la muestras de suelo**

Concepto	Sitios		Unidades
	Sitio 1	Sitio 2	
Sodio	5.2284	13.2096	meq/l
Potasio	5.1451	1.9408	meq/l
Calcio	0.8473	2.3782	meq/l
Magnesio	1.4252	0.7494	meq/l
<b>Suma Cationes</b>	<b>12.6460</b>	<b>18.2780</b>	<b>meq/l</b>
Carbonatos	2.0448	2.0448	meq/l
Bicarbonatos	10.2240	9.2016	meq/l
Cloruros	7.8131	9.6516	meq/l
Sulfatos	1.4997	2.1752	mg/g
<b>Suma de Aniones</b>	<b>21.5816</b>	<b>23.0732</b>	<b>meq/l</b>
Potencial hidrógeno (pH)	8.55	8.08	Unidades
Conductividad eléctrica	3.7	4.1	dS/m
RAS	4.9049	10.5633	
PSI	5.6379	12.5269	



**Figura 4.8. Proceso de secado del suelo**



**Figura 4.9. Colocación del suelo en el módulo de drenaje**

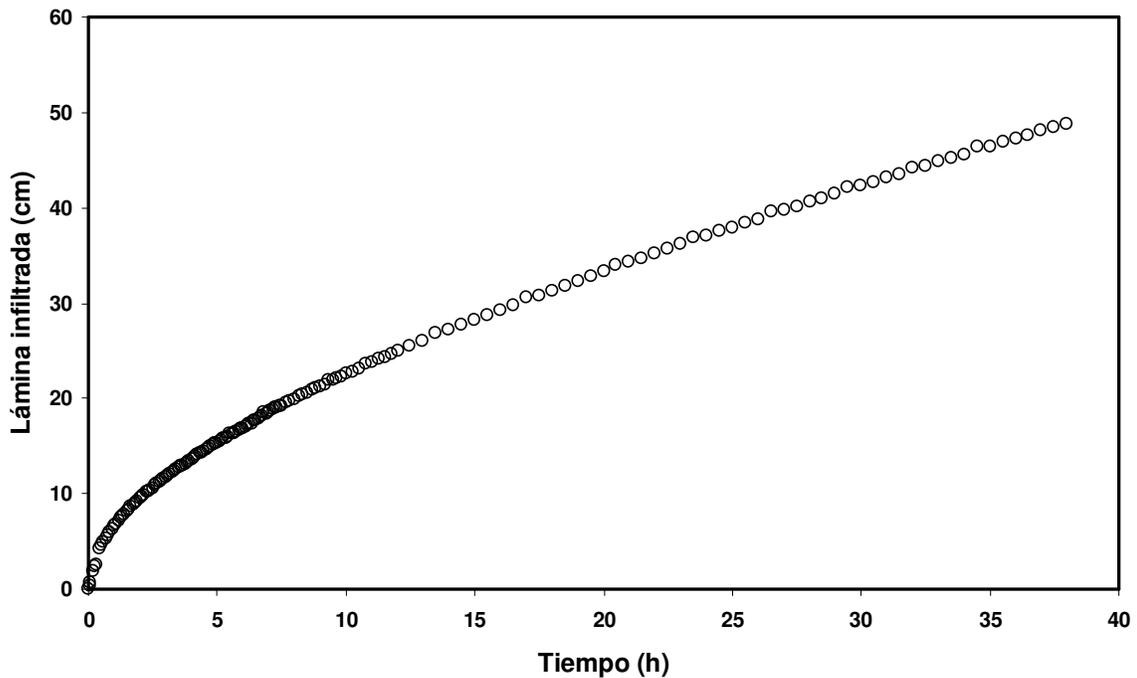
En el Cuadro 4.5 se muestran los valores de los parámetros físicos del suelo: porosidad total del suelo ( $\phi$ ), el contenido de humedad a saturación ( $\theta_s$ ), el contenido de humedad residual ( $\theta_r$ ), la dimensión fractal relativa del suelo ( $s$ ), los parámetros de forma de la curva ( $m,n$ ) obtenidos a partir de la curva granulométrica, así como la relación funcional  $mn$  y la pendiente media de la curva de retención definida como  $\xi = mn/(1+m)$ .

Se muestran también, el cálculo de dos errores con respecto al modelo del poro grande: el error de la relación  $mn$  definida como  $\varepsilon_{mn} = |(mn_{PX} - mn_{PG})/mn_{PG}| \times 100$ , donde  $mn_{PX}$  es el valor de la relación  $mn$  del modelo del poro con el cual se va realizar la comparación y  $mn_{PG}$  es la relación obtenida del modelo del poro grande; y el error de la pendiente media definida como  $\varepsilon_{\xi} = |(\xi_{PX} - \xi_{PG})/\xi_{PG}| \times 100$ , donde  $\xi_{PX}$  y  $\xi_{PG}$  son la pendiente media obtenida del modelo de poro a comparar y el modelo del poro grande. Los dos errores son mostrados como porcentajes.

**Cuadro 4.5. Valores de los parámetros físicos del suelo**

Modelos	$\phi$	$\theta_s$	$\theta_r$	$s$	$m$	$n$	$mn$	$\xi$	$\varepsilon_{mn}$	$\varepsilon_{\xi}$
	(adim)	(cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	(cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )		(adim)	(adim)	(adim)	(adim)	(%)	(%)
<b>Poro de la Media Geométrica</b>	0.5695	0.5695	0.0000	0.7083	0.3410	1.8677	0.6369	0.4749	14.1262	1.7885
<b>Poro Neutral</b>	0.5695	0.5695	0.0000	0.7083	0.1760	3.2367	0.5697	0.4844	2.0788	0.1691
<b>Poro Grande</b>	0.5695	0.5695	0.0000	0.7083	0.1540	3.6237	0.5581	0.4836	0.0000	0.0000

El proceso de infiltración se realizó con una carga de agua constante sobre la superficie del suelo ( $h_{sup} = 10 \text{ cm}$ ). La lámina constante se logró instalando un flotador sobre la superficie del agua que estaba conectado a un tanque de alimentación. Los drenes del módulo fueron abiertos para expulsar el aire atrapado durante el proceso de infiltración. La porosidad total del suelo ( $\phi = 0.5695$ ) corresponde a un volumen poroso de  $512,222 \text{ cm}^3$ . Al volumen poroso se le restó el correspondiente al contenido inicial del agua en el suelo ( $V_w = 149,479 \text{ cm}^3$ ) para finalmente agregar un volumen de agua de  $V_w = 363,351 \text{ cm}^3$  que corresponden a una lámina de agua de  $60.56 \text{ cm}$ . Para eliminar variables en la ecuación diferencial, el contenido de humedad a saturación es tomado igual a la porosidad total ( $\theta_s = \phi$ ), la superficie del suelo se cubrió con un plástico para eliminar la evaporación ( $R = 0$ ). La lámina infiltrada acumulada medida en el transcurso del tiempo  $I(t)$  se muestra en la Figura 4.10.



**Figura 4.10. Lámina infiltrada acumulada medida en el módulo de drenaje**

#### 4.7.3.4. El problema inverso y los parámetros de escala

Los incrementos espacio temporales usados durante todo el proceso de simulación fueron  $\Delta z = 0.01 \text{ cm}$  y  $\Delta t = 5 \times 10^{-6} \text{ h}$  para los modelos del poro neutral y de la media geométrica y  $\Delta z = 0.01 \text{ cm}$  y  $\Delta t = 5 \times 10^{-7} \text{ h}$  para el modelo del poro grande. Aplicando la solución en diferencias finitas expuesto con anterioridad, imponiendo condiciones de tipo Dirichlet en la frontera superior e inferior, y utilizando los valores de  $m$  y  $\theta_s$  estimados en con cada uno de los modelos, se resuelve la ecuación de Richards para estimar lámina infiltrada acumulada medida en el transcurso del tiempo  $I(t)$ . Son utilizados la curva de retención de humedad de van Genuchten y los modelos de Fuentes *et al.* (2001a) para la curva de conductividad como las características hidrodinámicas.

Los parámetros de escala  $\psi_{dw}$  y  $K_{sw}$  asociados al proceso de humedecimiento del suelo, son obtenidos a través de un proceso de mínimos cuadrados con el método de optimización no lineal de minimización Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963) con cada uno de los modelos de conductividad hidráulica utilizados (ecuaciones (3.58), (3.59) y (3.60)) a partir de los datos de infiltración medidos. Estos parámetros son mostrados en el Cuadro 4.6, donde además se muestra la raíz del error cuadrático medio (RECM) que es resultado de la lámina infiltrada medida y la lámina infiltrada obtenida con los modelos. El error de  $K_{sw}$  con respecto al poro grande es estimado con la relación  $\varepsilon K_{sw} = \left| (K_{swPX} - K_{swPG}) / K_{swPG} \right| \times 100$ , donde  $K_{swPX}$  es la valor de la conductividad hidráulica saturada asociada al modelo de poro a comparar con respecto al valor obtenido con en modelo del poro grande ( $K_{swPG}$ ). En el mismo cuadro, se muestran los parámetros derivados obtenidos: la escala de Bouwer ( $\lambda_c$ ) estimada con la ecuación (4.15) y la sorbilidad del suelo (S) estimada con la ecuación (4.12), así como los errores estimados de manera similar que los errores

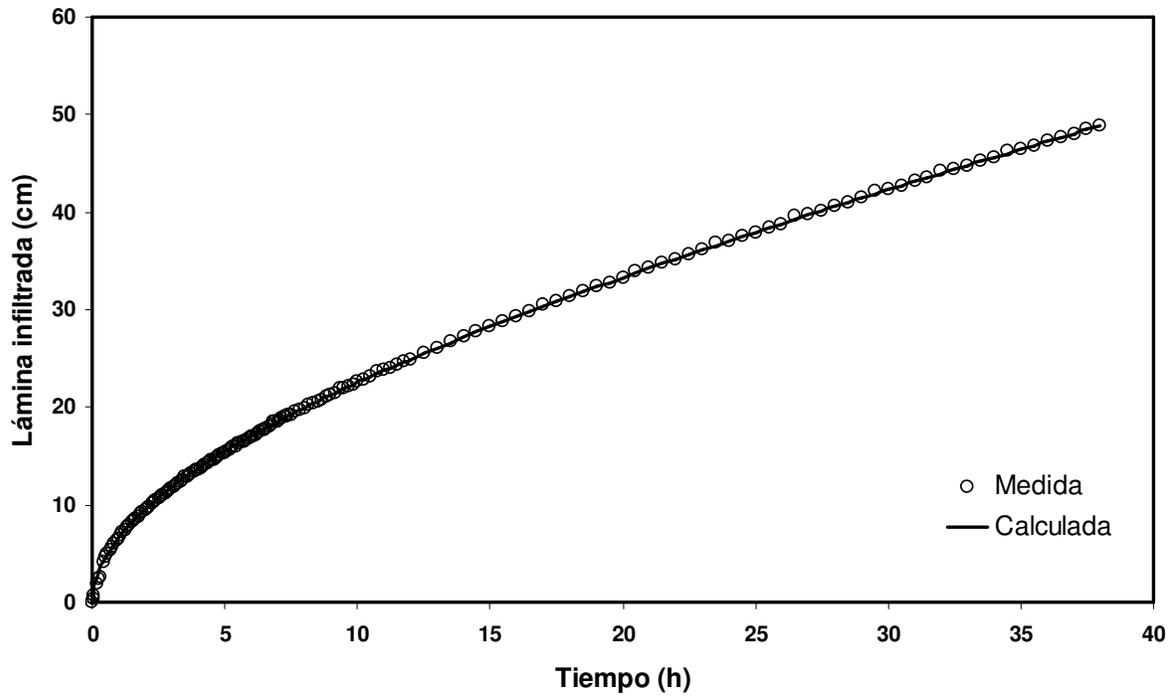
para la conductividad hidráulica saturada. Se aprecia también, que la sorbilidad del suelo es estable, ya que el error entre los modelos de poro con respecto al modelo del poro grande es menor del 10%.

Puede verse que los valores obtenidos de la conductividad hidráulica a saturación ( $K_{sw}$ ) en el proceso de la optimización son estables independientemente del modelo empleado, aunque se utilizaron tres modelos diferentes, debido a que se trata de una propiedad intrínseca del suelo. Por otra parte, el parámetro de escala ( $\psi_{dw}$ ) de la curva característica de humedad de van Genuchten el cual es un parámetro empírico, presentó mayor variación.

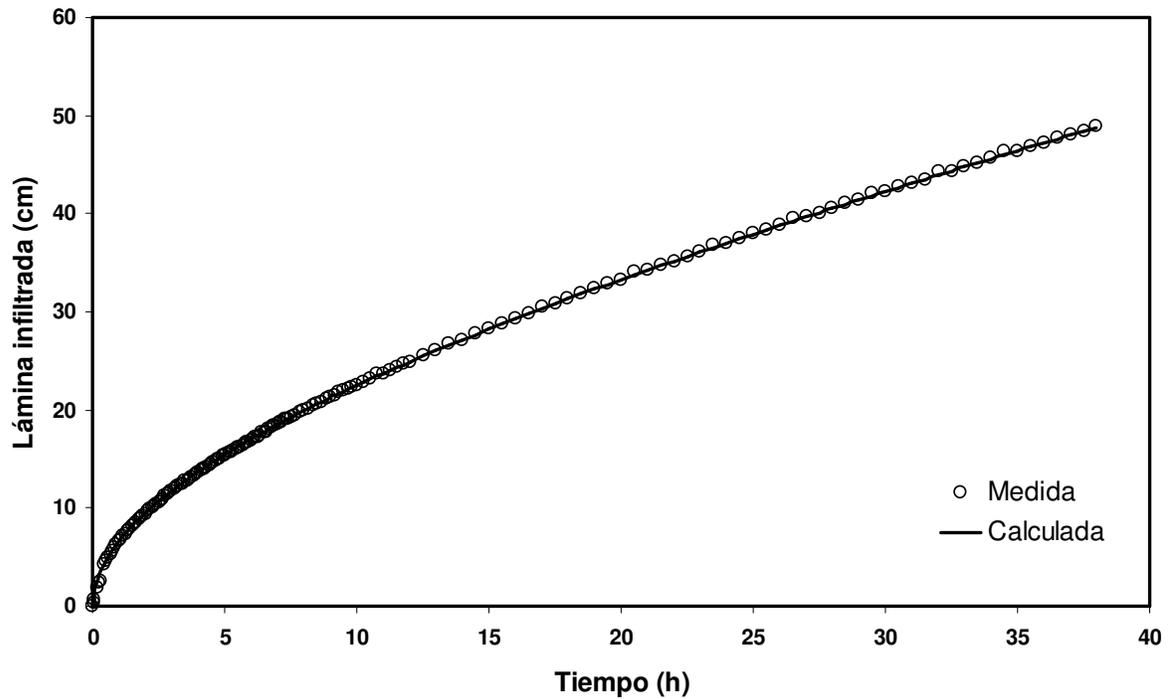
**Cuadro 4.6. Valores de los parámetros de ajuste para el cálculo de la lámina infiltrada.**

Modelos	Parámetros de Ajuste				Parámetros derivados			
	$K_{sw}$	$\psi_{dw}$	RECM	$\epsilon_{Ksw}$	$\lambda_{cw}$	$S_w$	$\epsilon_{\lambda_{cw}}$	$\epsilon_{sw}$
	(cm/h)	(cm)	(cm)	(%)			(%)	(%)
<b>Poro de la Media Geométrica</b>	1.1498	110.68	0.2322	48.36	19.7932	4.2016	51.56	9.61
<b>Poro Neutral</b>	0.8463	96.84	0.2383	9.20	33.1338	4.6892	18.91	0.88
<b>Poro Grande</b>	0.7750	75.66	0.2470	0.00	40.8583	4.6483	0.00	0.00

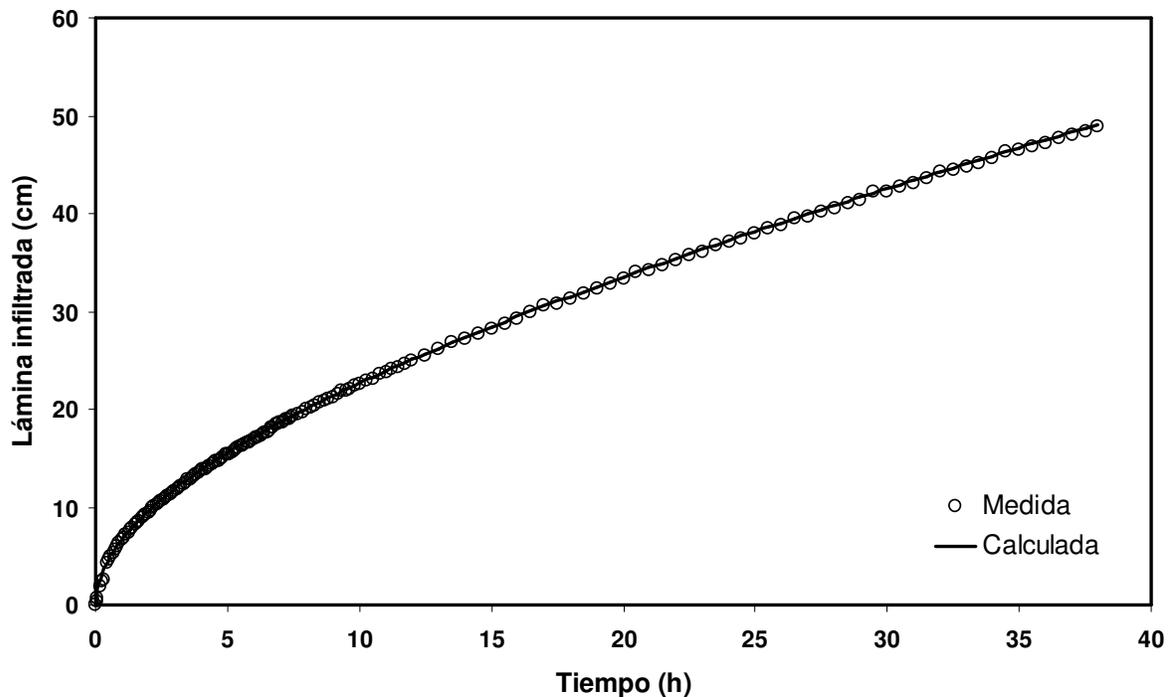
La estimación de la lámina infiltrada con cualquiera de los modelos utilizados, reproduce de buena manera la lámina infiltrada experimental, siendo la raíz del error cuadrático medio es menor a 0.25 cm. El buen acuerdo entre la lámina infiltrada medida y la lámina infiltrada estimada puede apreciarse en la Figura 4.11, Figura 4.12 y Figura 4.13 para los modelos de la media geométrica, poro neutral y poro grande, respectivamente.



**Figura 4.11. Descripción de la lámina infiltrada experimental con el modelo del poro de la media geométrica**



**Figura 4.12. Descripción de la lámina infiltrada experimental con el modelo del poro neutral**

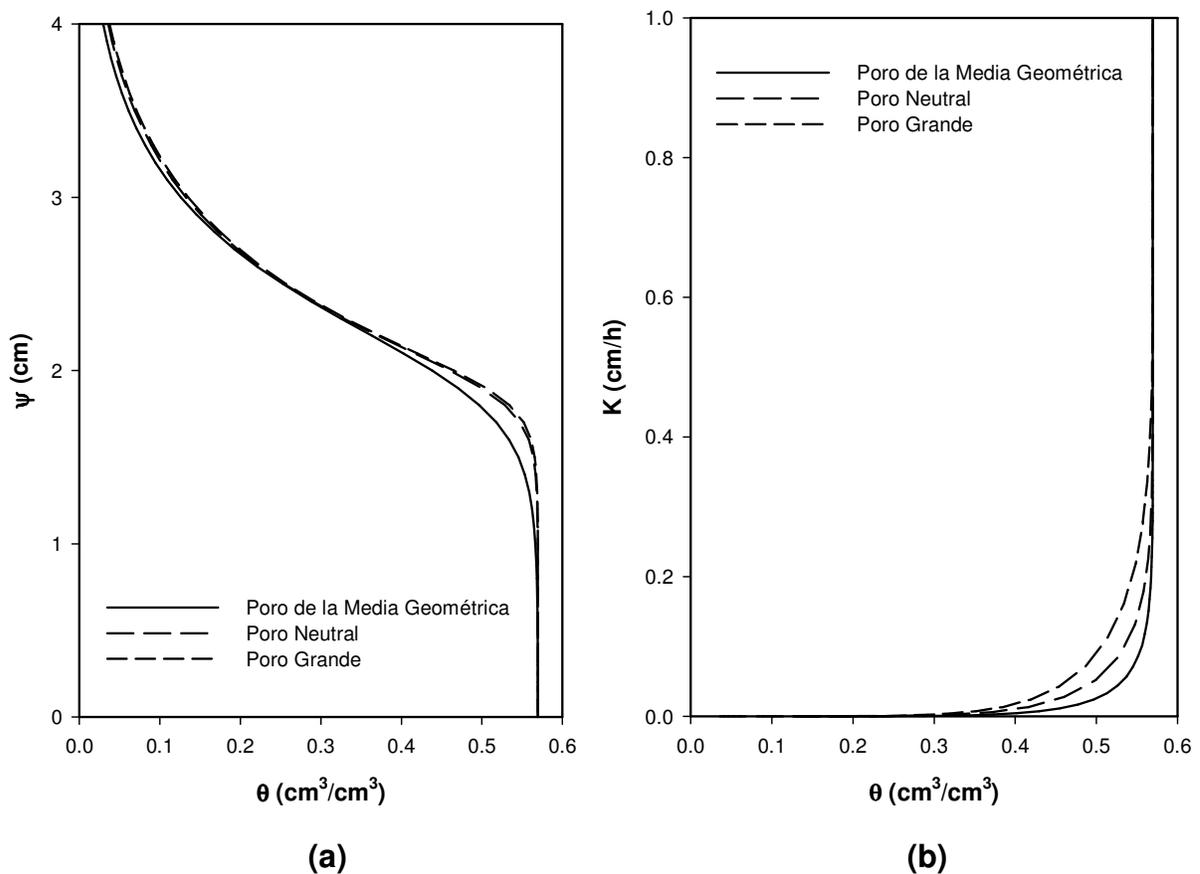


**Figura 4.13. Descripción de la lámina infiltrada experimental con el modelo del poro grande**

Una primera aproximación de los parámetros de escala  $\psi_{dw}$  y  $K_{sw}$  se puede obtener de la curva granulométrica siguiendo el procedimiento de Fuentes (1992). Los resultados obtenidos de los parámetros de escala se muestran en Cuadro 4.7, donde además, se muestran los obtenidos con el algoritmo Marquardt. Puede verse que no hay una relación directa entre los valores de  $\psi_{dw}$  y  $K_{sw}$ , puesto que las diferencias entre ellas son incluso del 130% para el modelo del poro grande, sin embargo, para el modelo del poro neutral esta diferencia es del orden del 30%.

El uso de expresiones incorrectas de  $K(\theta)$  y  $\theta(\psi)$  puede obtenerse como resultado una solución aceptable del problema inverso, pero las propiedades hidrodinámicas correspondientes a la solución podrían estar incorrectas (Zachmann *et al.*, 1982). La combinación de la forma de la característica de humedad de van Genuchten y las formas de la conductividad hidráulica de Fuentes *et al.* (2001a) resuelven

correctamente el problema inverso y proporcionan valores correctos de las propiedades hidrodinámicas del suelo cuando se optimizan sólo dos parámetros. La combinación de los parámetros de forma ( $m, n$ ) y de escala ( $\psi_{dw}, K_{sw}$ ) calculados a partir de la granulometría del suelo y de una prueba de infiltración respectivamente aseguran la forma correcta de las características hidrodinámicas de acuerdo a la textura del suelo estudiado, como se puede ver en la Figura 4.14.

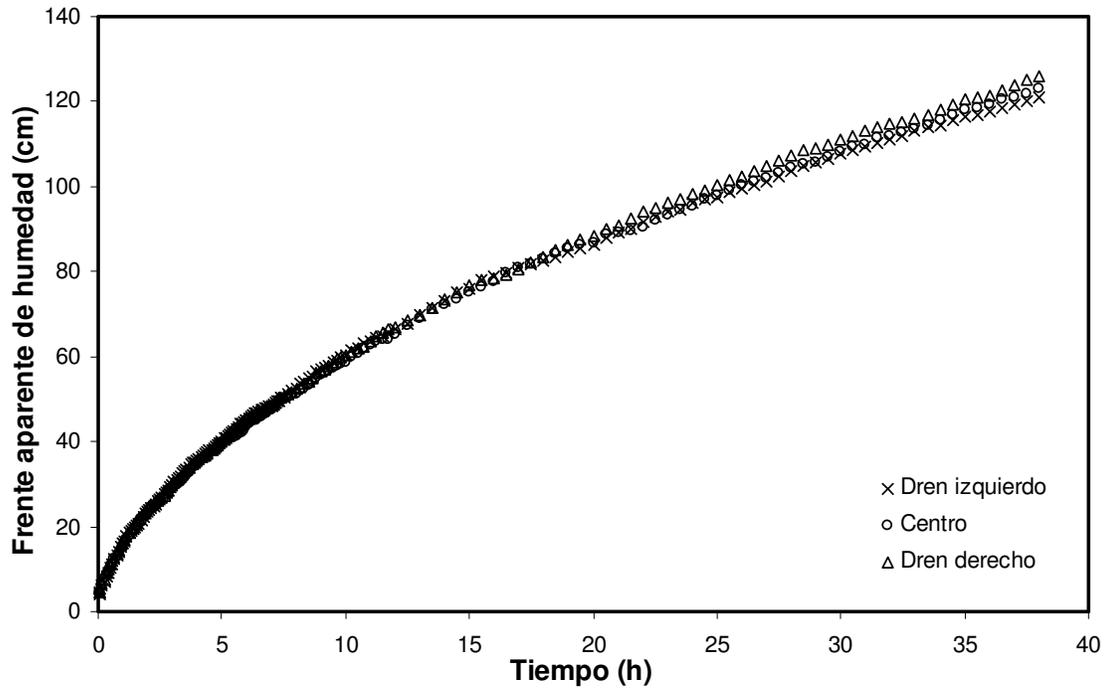


**Figura 4.14. Curva característica de humedad (a) y curva de conductividad hidráulica (b) obtenidas con los tres modelos de poro: poro de la media geométrica, poro neutral y poro grande**

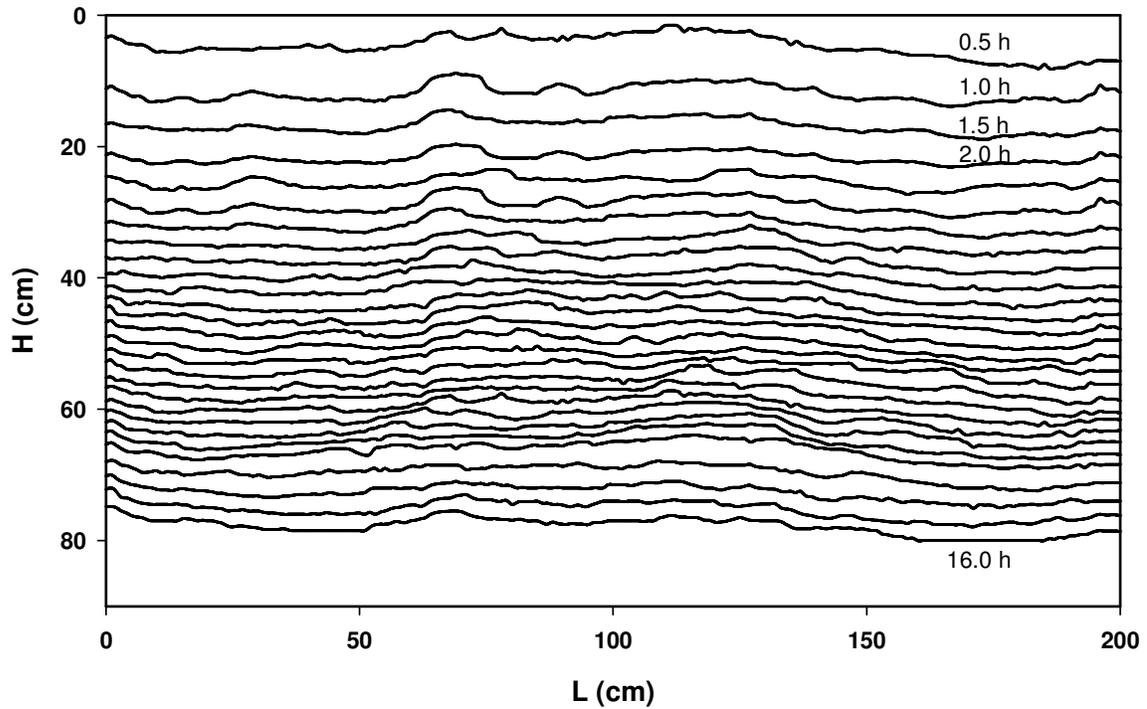
**Cuadro 4.7. Parámetros de escala obtenidos a partir de la curva granulométrica y con el algoritmo Marquardt.**

Modelo	Parámetros de escala					
	Granulometría		Marquardt		Error porcentual	
	$ \psi_{dw} $	$K_{sw}$	$ \psi_{dw} $	$K_{sw}$	$\varepsilon_{\psi_d}$	$\varepsilon_{K_s}$
(cm)	(cm/h)	(cm)	(cm/h)	(%)	(%)	
<b>Poro de la Media Geométrica</b>	73.84	0.8304	110.68	1.1498	33.28	27.78
<b>Poro Neutral</b>	57.66	1.6739	96.84	0.8463	40.46	97.80
<b>Poro Grande</b>	55.68	1.8475	75.66	0.7750	26.40	138.39

La evolución del frente aparente de humedad ( $z_f$ ) sobre el dren izquierdo, centro y dren derecho puede verse en la Figura 4.15 y la evolución del frente de humedad a lo largo del módulo se puede ver en la Figura 4.16. Las líneas del frente de humedad se empezaron a marcar a intervalos de 10 minutos en los tiempos cortos hasta un intervalo de cuatro horas en los tiempos largos. En la Figura 4.16 se muestran las líneas del frente aparente de humedad a intervalos de treinta minutos hasta un tiempo de 12 horas, posteriormente, los intervalos mostrados corresponden a intervalos de una hora has un tiempo máximo de 16 horas .La variación que existe en el frente aparente de humedad en el módulo puede atribuirse a la forma de compactación que se le dio al suelo durante el proceso de llenado del módulo. La mayor variación está en el intervalo menor a 10 horas y posteriormente la evolución de la humedad es más homogénea. El frente aparente de humedad a lo largo del módulo fue medido hasta que éste llegó a los drenes.



**Figura 4.15. Evolución del frente aparente de humedad en el módulo de drenaje en el dren izquierdo, centro y dren derecho**



**Figura 4.16. Evolución del frente aparente de humedad a lo largo del módulo**

## 5. EL DRENAJE AGRÍCOLA Y EL TRANSPORTE DE SOLUTOS

Los excesos de agua en la agricultura, ocasionados por exceso de lluvia o por riegos deficientes, provocan daños en los cultivos que en el peor de los casos ocasionan la pérdida total del cultivo. Para remover el exceso de agua de la zona radicular se han venido utilizando sistemas de drenaje parcelario. El estudio del abatimiento del nivel freático puede ser abordado con la ecuación de Richards, sin embargo, se utiliza la ecuación de Boussinesq por parecer un falso 2D, al utilizar el promedio en la vertical de la conductividad. En este capítulo se exponen algunas de las soluciones analíticas clásicas en la literatura: Houghoudt (1940), Fuentes *et al.* (1997) y Upadhyaya y Chauhan (2001). En seguida se muestra el desarrollo de un esquema en diferencias finitas de la ecuación de Boussinesq, así como de la ecuación advección-dispersión para el transporte de solutos en el suelo. La solución desarrollada es comparada con la solución analítica de Fuentes *et al.* (1997) con la finalidad de definir valores primeros de los parámetros de interpolación en el espacio y en el tiempo ( $\gamma$  y  $\omega$ ). A partir de una prueba de drenaje en laboratorio utilizando el suelo descrito en el capítulo anterior, se estima el coeficiente de conductancia a fin de que minimice la suma de los cuadrados de los errores entre los valores teóricos y los reales utilizando un algoritmo de optimización no lineal. El ajuste obtenido no fue el adecuado, por lo que se procedió a realizar una segunda simulación optimizando tres parámetros: el coeficiente de conductancia, la conductividad hidráulica saturada y la presión característica de la curva de retención de humedad. Los valores obtenidos difieren a los encontrados a través del proceso de infiltración debido a la presencia del fenómeno de histéresis capilar, sin embargo, el buen acuerdo entre las láminas drenadas medidas y calculadas con la solución son evidentes. Con los parámetros correctos, se procedió a optimizar la evolución del contenido de sales en el transcurso del tiempo con la solución desarrollada para encontrar el valor de la dispersividad que reprodujera los datos medidos, previa medición del contenido de sales totales a intervalos de tiempo en la lámina drenada del módulo por medio de la conductividad eléctrica. Finalmente, se muestran algunas simulaciones del cálculo

del espaciamiento entre drenes utilizando las características hidrodinámicas calculadas con anterioridad, así como cálculos teóricos del número de riegos que se deben de aplicar a un suelo con condiciones salinas para llevarlo a una concentración de sales determinada.

### **5.1. Revisión de literatura**

Los sistemas de drenaje subterráneos son ampliamente utilizados en la agricultura para eliminar excedentes de agua en la zona radical de las plantas y para lixiviar las sales del perfil de los suelos. La dinámica del agua en estos sistemas ha sido estudiada aceptando la validez de la ley de Darcy (1956) y en función de la escala de estudio se pueden utilizar dos ecuaciones diferenciales. La ecuación de Richards (1931), que resulta de la aplicación del principio de conservación de la masa en el flujo del agua en un volumen elemental de medio poroso y de la ley de Darcy, permite considerar la geometría de los drenes en las condiciones de frontera, sin embargo la simulación de la dinámica del agua con las soluciones numéricas bi o tridimensionales puede ser ardua (Zavala *et al.*, 2003).

La ecuación de Boussinesq (1904) de los acuíferos libres, que resulta de la aplicación del principio de conservación de la masa en una columna elemental de medio poroso y de la propia ley de Darcy, pondera las propiedades del suelo y el sistema en la vertical y es a lo más una ecuación bidimensional; el acuífero se modela en planta y la geometría de los drenes es introducida como líneas matemáticas o como puntos en un análisis bidimensional o unidimensional, respectivamente.

La ecuación de Boussinesq unidimensional ha sido una de las bases para construir soluciones analíticas aproximadas de la dinámica del agua en un sistema de drenaje

tanto en régimen permanente como transitorio (p.e. Hooghoudt, 1940; Dumm, 1954; Shukla *et al.*, 1999; Upadhyaya y Chauhan, 2001), y que son utilizadas en el diseño de los sistemas. En la deducción de la ecuación de Glover-Dumm para el régimen transitorio se asume que la transmisibilidad del acuífero y la porosidad drenable son constantes y que la superficie libre se abate de manera instantánea sobre los drenes. Puesto que los tres supuestos no representan adecuadamente las condiciones reales, la solución en cuestión puede ser de aplicabilidad limitada. Sin embargo, considerando condiciones más representativas conduce a dificultades analíticas, razón por la cual la utilización de métodos numéricos es necesaria para construir soluciones de la ecuación de Boussinesq.

En una línea de investigación Zavala *et al.* (2004, 2007) analizan detalladamente el tipo de condición de frontera representativa de las condiciones reales; los autores, basados en los conceptos de la geometría fractal y en experiencias de drenaje, recomiendan una condición de radiación fractal, la cual incluye la radiación lineal utilizada por Fuentes *et al.* (1997). En cuanto a la porosidad drenable, Fuentes *et al.* (2009), basados en los conceptos de lámina drenable y lámina drenada y también en experiencias de drenaje, proponen una expresión analítica en la cual interviene la curva de retención de humedad de los suelos. Los autores citados utilizan el método del elemento finito para resolver la ecuación unidimensional de Boussinesq con buenos resultados en cuanto a la estabilidad, convergencia y precisión de la solución. En un esquema unidimensional el método del elemento finito puede hacerse equivalente al método de diferencias finitas (Russell y Wheeler, 1983).

Existe un esquema en diferencias finitas, basado en el esquema de Laasonen, propuesto por Zataráin *et al.* (1998) para resolver numéricamente la ecuación de Richards aplicada al fenómeno de la infiltración del agua en los suelos, con excelentes resultados. Aparte de su alta precisión, estabilidad y convergencia, el esquema tiene la ventaja adicional de su naturaleza intuitiva ya que está basado en

un balance local de masa. Este esquema puede ser utilizado para resolver la ecuación unidimensional de Boussinesq del drenaje agrícola.

## 5.2. La capacidad de almacenamiento

La capacidad de almacenamiento está definida por:

$$\mu(H) = \frac{dW}{dH} = v(H) + H \frac{dv}{dH} \quad (5.1)$$

donde  $W = vH$  es la lámina de agua drenable. La igualdad  $\mu = v$  se da cuando la porosidad drenable es independiente de la carga.

## 5.3. La porosidad drenable

Siguiendo el procedimiento de Fuentes *et al.* (2009) se establece una expresión de la capacidad de almacenamiento. Si la superficie libre estuvo inicialmente en la posición  $z = H_s$ , la lámina drenada cuando esta superficie se encuentra en la posición  $z = H < H_s$  está definida por:

$$\ell(H) = \int_H^{H_s} [\theta_s - \theta_{PH}(z)] dz \quad (5.2)$$

donde  $\theta_s$  es el contenido de humedad a saturación;  $\theta_{pH}(z)$  es el contenido de humedad en función de la posición o perfil de humedad.

Si se denota por  $W_s$  la lámina drenable correspondiente a  $H_s$ , la lámina drenada es también proporcionada por  $\ell(H) = W_s - W(H)$ , y de acuerdo con la ecuación (5.1) se tiene  $\mu(H) = dW/dH = -d\ell/dH$ . La hipótesis de una distribución hidrostática de las presiones, aceptada para establecer la ecuación de Boussinesq, en la ecuación (5.2) permite reemplazar el perfil de humedad por la curva de retención de humedad  $\theta(\psi)$ , donde la presión del agua es dada por  $\psi = H - z$ . Haciendo  $\theta_{pH}(z) = \theta(H - z)$  y aplicando la regla de Leibniz se deduce la expresión de la capacidad de almacenamiento:

$$\mu(H) = \theta_s - \theta(H - H_s) \quad (5.3)$$

en la cual  $\theta(H - H_s)$  representa la evolución del contenido de humedad en la posición  $z = H_s$  mientras la superficie libre desciende.

La porosidad drenable se deduce a partir de la igualdad de las ecuaciones (5.1) y (5.3), a saber:

$$v(H) = \frac{1}{H} \int_0^H \mu(\bar{H}) d\bar{H} = \frac{1}{H} \int_0^H [\theta_s - \theta(\bar{H} - H_s)] d\bar{H} \quad (5.4)$$

donde  $\bar{H}$  es la variable de integración.

Para calcular la capacidad de almacenamiento y la porosidad drenable es necesario proporcionar la curva de retención de humedad del suelo. En la literatura es bastante común representarla con la ecuación de van Genuchten (ecuación (3.48)). La introducción de la ecuación (3.48) en las ecuaciones (5.3) y (5.4) proporciona la capacidad de almacenamiento y la porosidad drenable siguientes:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{H_s - H}{|\Psi_d|} \right)^n \right]^{-m} \right\} \quad (5.5)$$

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left[ 1 - \frac{|\Psi_d|}{H} \int_{(H_s - H)/|\Psi_d|}^{H_s/|\Psi_d|} (1 + \psi^n)^{-m} d\psi_* \right] \quad (5.6)$$

La porosidad drenable no tiene una forma analítica cerrada, pudiendo ser calculada mediante integración numérica. Una forma cerrada puede ser construida a partir de la difusividad de Fujita (1952) y de la relación conductividad hidráulica-difusividad hidráulica de Parlange *et al.* (1982) (Fuentes *et al.*, 1992), definidas por las ecuaciones (3.51) y (3.65).

De la definición de la difusividad hidráulica  $D(\theta) = K(\theta)d\psi/d\theta$ , considerando la condición  $\theta = \theta_s$  cuando  $\psi = 0$ , se deduce:

$$\psi(\Theta) = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[ \frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] \right\} \quad (5.7)$$

donde  $\psi_c = -\lambda_c$ .

La porosidad drenable se obtiene de las ecuaciones (5.4) y (5.7):

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{\lambda_c}{\beta H} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha) \Theta}{1 - \alpha \Theta} \right] \right\}_{\Theta(-H_s)}^{\Theta(H-H_s)} \quad (5.8)$$

Se debe notar que la función  $\theta(\psi)$  es implícita en la ecuación (5.7), y en consecuencia la función  $v(H)$ . Estas funciones pueden ser explicitadas en función de la presión si se acepta  $\alpha = \beta$ ; en este caso la conductividad en función de la presión corresponde a la ecuación de Gardner (1958)  $K(\psi) = K_s \exp(\psi/\lambda_c)$ , ampliamente utilizada en estudios teóricos. La curva  $\theta(\psi)$  correspondiente es la siguiente:

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\alpha + (1 - \alpha) \exp(\psi/\psi_c)} \quad (5.9)$$

De la ecuación (5.3) se obtiene la capacidad de almacenamiento:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \left[ \alpha + (1 - \alpha) \exp\left(\frac{H_s - H}{\lambda_c}\right) \right]^{-1} \right\} \quad (5.10)$$

y de la ecuación (5.8) la porosidad drenable:

$$v(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{\lambda_c}{\alpha H} \ln \left[ \frac{1 - \alpha + \alpha \exp[(H - H_s)/\lambda_c]}{1 - \alpha + \alpha \exp[-H_s/\lambda_c]} \right] \right\} \quad (5.11)$$

La lámina drenada se obtiene de la ecuación (5.2):

$$\ell(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ (H_s - H) - \left( \frac{\lambda_c}{\alpha} \right) \ln \left[ \frac{1}{1 - \alpha + \alpha \exp(-(H_s - H)/\lambda_c)} \right] \right\} \quad (5.12)$$

El contenido de humedad a saturación puede ser asimilado a la porosidad total ( $\phi$ ), la cual es estimada a partir de la densidad total del suelo seco ( $\rho_t$ ) y de la densidad de las partículas ( $\rho_s$ ) con la ecuación (3.6); el contenido de humedad residual puede ser asumido igual a cero.

#### 5.4. Condiciones inicial y de frontera

La carga hidráulica contada a partir del estrato impermeable  $H(x,t)$  está relacionada con la carga  $h(x,t)$  contada a partir de los drenes, de acuerdo con la Figura 5.1, por:

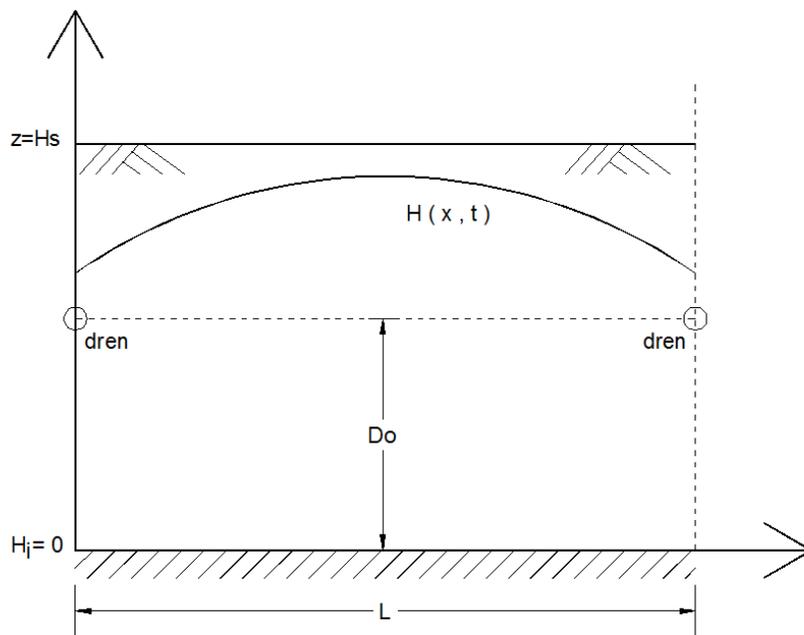
$$H(x,t) = D_o + h(x,t) \quad (5.13)$$

donde  $D_o$  es la altura de los drenes a partir del estrato impermeable.

La variación transversal de  $h$  al inicio del proceso de drenaje es considerada como la condición inicial:

$$h(x,0) = h_s(x) \quad (5.14)$$

En cuanto a las condiciones de frontera o condiciones en los drenes ubicados en  $x=0$  y  $x=L$ , se han asumido formas diversas. La solución de Glover-Dumm es establecida asumiendo que la carga sobre el dren se abate totalmente de manera instantánea (Dumm, 1954); esta condición es de tipo Dirichlet o de primer orden. La solución de Fuentes *et al.* (1997) (ver también Fragoza *et al.*, 2003) es obtenida bajo el argumento soportado experimentalmente de que el flujo de Darcy en los drenes es proporcional a la carga ( $q \propto h$ ); esta condición es de tipo radiación lineal o de tercer orden.



**Figura 5.1. Esquema de un sistema de drenaje agrícola subterráneo**

El flujo de radiación lineal se puede expresar como  $q = -\kappa K_s h/L$ , donde  $\kappa$  es un coeficiente adimensional de conductancia de la interfaz suelo-dren; de la solución de Fuentes *et al.* (1997) se deduce la solución de Glover-Dumm cuando este coeficiente es infinito. En esta misma línea de investigación, Zavala *et al.* (2004, 2007) proponen una ley en potencia entre el flujo y la carga, es decir,  $q = q_s (h/h_s)^{2s}$ , donde  $h_s$  es escogido como el valor de la carga sobre el dren en el tiempo inicial,  $q_s$  es el flujo correspondiente y depende de las características de la interfaz suelo-dren. En cuanto al exponente  $s$ , los autores argumentan que está definido por  $s = D/E$ , donde  $D$  es la dimensión fractal efectiva de la interfaz suelo-dren y  $E = 3$  es la dimensión de Euclides del espacio físico. La relación entre  $s$  y la porosidad efectiva de la interfaz es proporcionada por la ecuación presentada por Fuentes *et al.* (2001a): ecuación (3.61).

Así, las condiciones de radiación fractal para la ecuación de Boussinesq se obtiene de la siguiente manera:

$$-K_s \frac{\partial h}{\partial x} \pm q_s \left( \frac{h}{h_s} \right)^{2s} = 0 \quad ; \quad x = 0, L \quad (5.15)$$

donde el signo positivo corresponde al dren posicionado en  $x = 0$ , mientras que el negativo al posicionado en  $x = L$ . La ecuación (5.15) contiene como casos particulares la condición de radiación lineal cuando  $s = 1/2$  y una condición de radiación cuadrática cuando  $s = 1$ .

En un sistema de drenes paralelos a igual separación, el gasto de agua que fluye a través de la frontera por unidad de longitud del dren se obtiene de las ecuaciones (3.31), (5.13) y (5.15):

$$Q_d(t) = 2[D_o + h(0,t)]q_s [h(0,t)/h_s]^{2s} \quad (5.16)$$

La evolución temporal de la lámina drenada se calcula con la siguiente expresión:

$$\ell(t) = \frac{1}{L_0} \int_0^t Q_d(\bar{t}) d\bar{t} \quad (5.17)$$

donde  $\bar{t}$  es una variable de integración.

### 5.5. Soluciones analíticas de la ecuación de Boussinesq

La solución más simple de la ecuación de Boussinesq, ecuación (3.30), en su forma adimensional está construida en régimen permanente ( $\partial H/\partial t = 0$ ) o solución de Houghoudt (1940), en la cual se supone que la recarga es constante ( $R = R_0$ ). Para obtener la solución, son necesarias las siguientes condiciones iniciales y de frontera: 1)  $H = H_0$  en  $x = 0$  y  $x = L$ , y 2)  $dH/dx = 0$  en el centro  $x = L/2$ ; es decir:

$$H^2(x) = H_0^2 + \frac{R_0}{K_s} x(L-x) \quad (5.18)$$

Al aplicar la ecuación (5.18) al centro de la separación entre los drenes ( $x = L/2$ ) y tomando en consideración la condición límite de expresar la superficie libre contada a partir del estrato impermeable,  $H(x,t) = D_0 + h(x,t)$ , con  $h_0$  y  $h_c$ , las cargas hidráulicas sobre el dren y en el centro de la separación entre los drenes, respectivamente, se puede deducir la siguiente expresión:

$$R_0 = 4K_s [h_c (h_c + 2D_0) - h_0 (h_0 + 2D_0)] / L^2 \quad (5.19)$$

La ecuación (5.19) se reduce a la fórmula clásica de Hooghoudt cuando  $h_0 = 0$ .

En régimen transitorio se encuentra en la literatura la solución de Fuentes *et al.* (1997), que es obtenida bajo los siguientes supuestos:

- a) Porosidad drenable constante:  $\nu = \bar{\nu} \Rightarrow \mu = \bar{\mu} = \bar{\nu}$
- b) Transmisibilidad constante:  $T = \bar{T} = K_s (D_0 + \bar{h})$
- c) Recarga nula:  $R = 0$
- d) Condición inicial constante:  $H = H_s = D_0 + h_s$
- e) Condiciones de frontera de radiación proporcionada por las ecuaciones  $-K_s (\partial H / \partial x) + \gamma (K_s / L) h = 0$  en  $x = 0$  y  $K_s (\partial H / \partial x) + \gamma (K_s / L) h = 0$  en  $x = L$ .

La solución para  $h(x,t)$  corresponde a la serie de Fourier siguiente:

$$h(x,t) = h_s \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \left[ \cos\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) + \frac{\gamma}{\alpha_n} \sin\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) \right] \right\} \quad (5.20)$$

donde  $\tau = \bar{\mu}L^2 / \bar{T}$ .

Los valores propios ( $\alpha_n$ ) son las raíces positivas de:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} - 2 \cot(\alpha) = 0 \quad (5.21)$$

y las amplitudes correspondientes ( $A_n$ ) se calculan con la siguiente expresión:

$$A_n = 2 \frac{\alpha_n \sin(\alpha_n) + \gamma [1 - \cos(\alpha_n)]}{\alpha_n^2 + \gamma^2 + 2\gamma} \quad (5.22)$$

El gasto drenado por unidad de longitud, de acuerdo con la ecuación propuesta por los autores para un sistema de drenes paralelos a igual separación  $Q_t(t) = 2\gamma K_s / L [D_0 + h(0,t)] h(0,t)$ , y la lámina drenada se calculan, respectivamente como:

$$Q_t(t) = \frac{2\gamma \bar{T}}{L} h(0,t) = \frac{2\gamma \bar{T}}{L} h_s \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \quad (5.23)$$

$$\ell(t) = \frac{1}{L} \int_0^t Q_t(t) dt = \ell_\infty \sum_{n=0}^{\infty} 2\gamma \frac{A_n}{\alpha_n^2} \left[ 1 - \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (5.24)$$

donde  $\ell_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \ell(t) = \bar{\mu} h_s$ .

Fuentes *et al.* (1997) recomiendan tomar como porosidad drenada constante el valor medio siguiente:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{h_s} \int_0^{h_s} \mu(h) dh \quad (5.25)$$

así como el valor constante de la transmisibilidad del valor medio ponderado siguiente:

$$\bar{T} = K_s (D_0 + \bar{h}) = \frac{2}{h_s^2} \int_0^{h_s} hT(h) dh \quad (5.26)$$

es decir,  $\bar{h} = (2/3)h_s$ .

Como caso particular, puede demostrarse que la solución de Fuentes *et al.* (1997) contiene a la solución Glover-Dumm (Dumm, 1954). Cuando la conductancia de la interfaz suelo-dren tiende al infinito ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), ocurre un abatimiento instantáneo de la carga sobre el dren, es decir, de la ecuación (5.21) se deduce  $\alpha_n = (2n+1)\pi$ , y de la

ecuación (5.22),  $\gamma A_n \rightarrow 4$ . Con estos resultados, la solución Glover-Dumm se deduce de la ecuación (5.20):

$$h(x,t) = h_s \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n+1} \exp \left[ -(2n+1)^2 \pi^2 \frac{t}{\tau} \right] \sin \left[ (2n+1) \pi \frac{x}{L} \right] \right\} \quad (5.27)$$

En la literatura existen soluciones analíticas que incorporan una pendiente diferente de cero en el estrato impermeable, como la presentada por Upadhyaya y Chauhan (2001):

$$h(x,t) = \frac{2h_s}{L} \exp(sx - s^2 \xi t) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \exp(-\alpha \beta_n^2 t) \sin \beta_n x \left\{ \frac{[1 - (-1)^n \exp(-sL)] \beta_n}{(s^2 + \beta_n^2)} \right\} \quad (5.28)$$

donde  $\beta_n = n\pi/L$ ;  $s$  es la pendiente del estrato impermeable; y  $\xi$  es una constante definida por  $\xi = Kh_s/2v$ .

Esta solución, ha sido construida bajo las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$h(x,0) = h_s \quad ; \quad t = 0 \quad ; \quad 0 < x < L \quad (5.29)$$

$$h(0,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad ; \quad x = 0 \quad (5.30)$$

$$h(L,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad ; \quad x = L \quad (5.31)$$

Si el estrato impermeable es considerado horizontal,  $s = 0$ , la solución analítica que se obtiene es similar a la presentada por Dumm (1954), de esta manera, la ecuación (5.28) se transforma en:

$$h(x,t) = h_s \frac{4}{L} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \exp(-\alpha \beta_n^2 t) \frac{\sin \beta_n x}{\beta_n} \quad (5.32)$$

Por otra parte, Singh *et al.* (2007) presentan una solución analítica en régimen permanente, en la cual, la variación del nivel freático en el perfil es una función de la pendiente en el estrato impermeable (si la hay) y la evapotranspiración en el transcurso del tiempo. Las condiciones inicial y de frontera utilizadas son las mismas que utilizan Upadhyaya y Chauhan (2001).

## 5.6. Una solución en diferencias finitas para la transferencia de agua

Para describir el flujo de agua en un sistema de drenaje agrícola, se pueden obtener soluciones simplificadas, considerando que las variaciones de  $H$  en la dirección longitudinal de los drenes son despreciables. En tal situación, el problema consiste en resolver la ecuación de Boussinesq, ecuación (3.30), en su forma unidimensional:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (5.33)$$

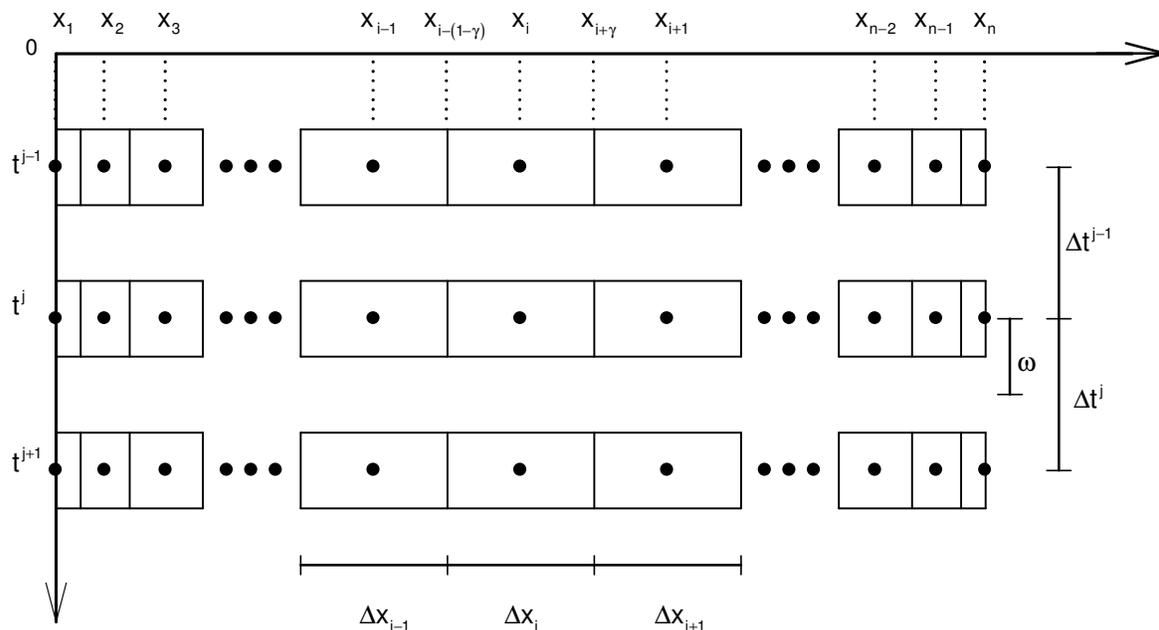
La ecuación unidimensional de Boussinesq se resuelve con el método de diferencias finitas, adaptando el esquema numérico propuesto por Zataráin *et al.* (1998) para un problema similar en la escala de la ecuación de Richards. La adaptación a la escala

de la ecuación de Boussinesq requiere de la discretización del dominio como se muestra en la Figura 5.2. Para plantear la resolución numérica de la ecuación (5.33), se introducen los parámetros de interpolación definidos por:

$$\gamma = \frac{x_{i+\gamma} - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (5.34)$$

$$\omega = \frac{t_{j+\omega} - t_j}{t_{j+1} - t_j} \quad (5.35)$$

tales que  $0 \leq \gamma \leq 1$  y  $0 \leq \omega \leq 1$ ;  $i = 1, 2, \dots$  y  $j = 1, 2, \dots$  son los índices para el espacio y el tiempo respectivamente. La discretización de las ecuaciones, al igual que la Richards, hace suponer que existen los factores de ponderación y que además, son independientes del espacio y del tiempo.



**Figura 5.2. El dominio de resolución de la ecuación de Boussinesq:  $\omega$  es el factor de interpolación en el tiempo y  $\gamma$  es el factor de interpolación en el espacio.**

Una variable dependiente ( $\Phi$ ) en un nodo intermedio  $i+\gamma$  para todo  $j$  se estima como:

$$\Phi_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)\Phi_i^j + \gamma\Phi_{i+1}^j \quad (5.36)$$

mientras que en el tiempo intermedio  $j+\omega$  para todo  $i$  se estima como:

$$\Phi_i^{j+\omega} = (1-\omega)\Phi_i^j + \omega\Phi_i^{j+1} \quad (5.37)$$

La discretización de la derivada temporal de la ecuación (5.33), puede hacerse con las siguientes dos formulaciones:

$$\left. \frac{\partial(\nu H)}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = \frac{\nu_i^{j+1} H_i^{j+1} - \nu_i^j H_i^j}{\Delta t_j} \quad ; \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (5.38)$$

$$\left. \frac{\partial(\nu H)}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = \mu_i^{j+\omega} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{\Delta t_j} \quad (5.39)$$

Para identificar a los dos esquemas numéricos resultantes, en lo sucesivo, el primero es denominado esquema mixto y el segundo esquema en la carga, ya que en el primero aparecen de manera explícita la carga y el volumen de agua que se drena, mientras que en el segundo aparece explícitamente sólo la carga; las dos formulaciones coinciden cuando la porosidad drenable es independiente de la carga y la formulación en la carga no requiere de la integración numérica en la ecuación (5.6), para calcular la porosidad drenable.

La discretización de la derivada espacial en la ecuación (5.33):

$$\left. \frac{\partial(Hq)}{\partial x} \right|_i^{j+\omega} = \frac{(Hq)_{i+\gamma}^{j+\omega} - (Hq)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i} \quad ; \quad \Delta x_i = (1-\gamma)(x_i - x_{i-1}) + \gamma(x_{i+1} - x_i) \quad (5.40)$$

De acuerdo con la ley de Darcy, ecuación (3.22), se tiene:

$$(Hq)_{i+\gamma}^{j+\omega} = -T_{i+\gamma}^{j+\omega} \frac{H_{i+1}^{j+\omega} - H_i^{j+\omega}}{x_{i+1} - x_i} \quad ; \quad T_{i+\gamma}^{j+\omega} = T(H_{i+\gamma}^{j+\omega}) \quad (5.41)$$

$$(Hq)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = -T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} \frac{H_i^{j+\omega} - H_{i-1}^{j+\omega}}{x_i - x_{i-1}} \quad ; \quad T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = T(H_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) \quad (5.42)$$

De acuerdo con la ecuación (5.36) se tiene la siguiente interpolación espacial:

$$H_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)H_i^j + \gamma H_{i+1}^j \quad (5.43)$$

$$H_{i-(1-\gamma)}^j = (1-\gamma)H_{i-1}^j + \gamma H_i^j \quad (5.44)$$

y de acuerdo con la ecuación (5.37) la siguiente interpolación temporal:

$$H_i^{j+\omega} = (1-\omega)H_i^j + \omega H_i^{j+1} \quad (5.45)$$

Las variables dependientes que intervienen en la conductividad hidráulica de las ecuaciones (5.41) y (5.42) quedan definidas por:

$$H_{i+\gamma}^{j+\omega} = (1-\omega)H_{i+\gamma}^j + \omega H_{i+\gamma}^{j+1} = (1-\omega)[(1-\gamma)H_i^j + \gamma H_{i+1}^j] + \omega[(1-\gamma)H_i^{j+1} + \gamma H_{i+1}^{j+1}] \quad (5.46)$$

$$H_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = (1-\omega)H_{i-(1-\gamma)}^j + \omega H_{i-(1-\gamma)}^{j+1} = (1-\omega)[(1-\gamma)H_{i-1}^j + \gamma H_i^j] + \omega[(1-\gamma)H_{i-1}^{j+1} + \gamma H_i^{j+1}] \quad (5.47)$$

mientras que las variables dependientes que intervienen en el derivada de las mismas ecuaciones quedan definidas por:

$$H_{i+1}^{j+\omega} = (1-\omega)H_{i+1}^j + \omega H_{i+1}^{j+1} \quad (5.48)$$

$$H_i^{j+\omega} = (1-\omega)H_i^j + \omega H_i^{j+1} \quad (5.49)$$

$$H_{i-1}^{j+\omega} = (1-\omega)H_{i-1}^j + \omega H_{i-1}^{j+1} \quad (5.50)$$

La ecuación (5.40) considerando las ecuaciones (5.48), (5.49) y (5.50) puede ser escrita como:

$$\left. \frac{\partial (Hq)}{\partial x} \right|_i^{j+\omega} = -a_2 (H_{i+1}^{j+\omega} - H_i^{j+\omega}) + a_4 (H_i^{j+\omega} - H_{i-1}^{j+\omega}) \quad (5.51)$$

donde

$$a_1 = \frac{T_{i+\gamma}^{j+\omega}}{\Delta x_i} \quad (5.52)$$

$$a_2 = \frac{a_1}{x_{i+1} - x_i} \quad (5.53)$$

$$a_3 = \frac{T_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i} \quad (5.54)$$

$$a_4 = \frac{a_3}{x_i - x_{i-1}} \quad (5.55)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.48), (5.49) y (5.50) en la ecuación (5.51) y sumando términos semejantes se obtiene:

$$\frac{\partial(Hq)}{\partial x} \Big|_i^{j+\omega} = -\omega a_4 H_{i-1}^{j+1} + \omega(a_2 + a_4) H_i^{j+1} - \omega a_2 H_{i+1}^{j+1} - (1-\omega) a_4 H_{i-1}^j + (1-\omega)(a_2 + a_4) H_i^j - (1-\omega) a_2 H_{i+1}^j \quad (5.56)$$

La sustitución de las ecuaciones (5.38) y (5.56) o (5.39) y (5.56) en la ecuación (5.33) conduce al sistema de ecuaciones algebraicas siguientes:

$$A_i H_{i-1}^{j+1} + B_i H_i^{j+1} + D_i H_{i+1}^{j+1} = E_i \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.57)$$

donde

$$A_i = -\omega a_4 \quad (5.58)$$

$$B_i = \omega(a_2 + a_4) + b_2 \quad (5.59)$$

$$D_i = -\omega a_2 \quad (5.60)$$

$$E_i = R w_i^{j+\omega} + (1-\omega) a_4 H_{i-1}^j - \left[ (1-\omega)(a_2 + a_4) - b_1 \right] H_i^j + (1-\omega) a_2 H_{i+1}^j \quad (5.61)$$

El sistema (5.57) forma una matriz tridiagonal y puede ser resuelto de manera eficiente mediante el algoritmo de Thomas.

### 5.7. Una solución en diferencias finitas para el transporte de solutos

Al igual que en la deducción de la solución de diferencias finitas del transporte de solutos a nivel de la columna de Richards, el esquema numérico que se presenta a continuación parte de la suposición de que el soluto está concentrado en la fase líquida principalmente. Al final del mismo, se dan las indicaciones para incorporar las isothermas que relacionan la concentración en el agua y la cantidad absorbida en el suelo. La ecuación de advección-dispersión de transporte de una especie que se resuelve es:

$$\frac{\partial(\nu HC)}{\partial t} + \frac{\partial(HqC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu H D a \frac{\partial C}{\partial x} \right] + R_s \quad (5.62)$$

Utilizando el mismo esquema de discretización que para la transferencia de agua (Figura 5.2), se hace uso de los parámetros de interpolación definidos por las ecuaciones (5.34) y (5.35).

Una variable dependiente ( $\Phi$ ) en un nodo intermedio  $i+\gamma$  para todo  $j$  se estima como:

$$\Phi_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)\Phi_i^j + \gamma\Phi_{i+1}^j \quad (5.63)$$

mientras que en el tiempo intermedio  $j+\omega$  para todo  $i$  se estima como:

$$\Phi_i^{j+\omega} = (1-\omega)\Phi_i^j + \omega\Phi_i^{j+1} \quad (5.64)$$

La discretización de la derivada temporal en la ecuación (3.37):

$$\left. \frac{\partial(\nu HC)}{\partial t} \right|_i^{j+\omega} = \frac{(\nu H)_i^{j+1} C_i^{j+1} - (\nu H)_i^j C_i^j}{\Delta t_j} = b_2 C_i^{j+1} - b_1 C_i^j \quad ; \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (5.65)$$

en donde:

$$b_1 = \frac{(\nu H)_i^j}{\Delta t_j} \quad ; \quad b_2 = \frac{(\nu H)_i^{j+1}}{\Delta t_j} \quad (5.66)$$

La discretización de la derivada espacial en la ecuación (3.37):

$$\frac{\partial Qs}{\partial x} \Big|_i^{j+\omega} = \frac{Qs_{i+\gamma}^{j+\omega} - Qs_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i} ; \quad \Delta x_i = (1-\gamma)(x_i - x_{i-1}) + \gamma(x_{i+1} - x_i) \quad (5.67)$$

De acuerdo con la ecuación (3.38):

$$Qs_{i+\gamma}^{j+\omega} = (Hq)_{i+\gamma}^{j+\omega} C_{i+\gamma}^{j+\omega} - (vH)_{i+\gamma}^{j+\omega} (Da)_{i+\gamma}^{j+\omega} \frac{C_{i+1}^{j+\omega} - C_i^{j+\omega}}{x_{i+1} - x_i} \quad (5.68)$$

$$Qs_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = (Hq)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} C_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} - (vH)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} (Da)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} \frac{C_i^{j+\omega} - C_{i-1}^{j+\omega}}{x_i - x_{i-1}} \quad (5.69)$$

De acuerdo con la ecuación (5.63) se tiene la siguiente interpolación espacial:

$$C_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)C_i^j + \gamma C_{i+1}^j \quad (5.70)$$

$$C_{i-(1-\gamma)}^j = (1-\gamma)C_{i-1}^j + \gamma C_i^j \quad (5.71)$$

y de acuerdo con la ecuación (5.64) la siguiente interpolación temporal:

$$C_i^{j+\omega} = (1-\omega)C_i^j + \omega C_i^{j+1} \quad (5.72)$$

Las variables dependientes que intervienen en el término advectivo de las ecuaciones (5.68) y (5.69) quedan definidas por:

$$C_{i+\gamma}^{j+\omega} = (1-\omega)C_{i+\gamma}^j + \omega C_{i+\gamma}^{j+1} = (1-\omega)\left[(1-\gamma)C_i^j + \gamma C_{i+1}^j\right] + \omega\left[(1-\gamma)C_i^{j+1} + \gamma C_{i+1}^{j+1}\right] \quad (5.73)$$

$$C_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} = (1-\omega)C_{i-(1-\gamma)}^j + \omega C_{i-(1-\gamma)}^{j+1} = (1-\omega)\left[(1-\gamma)C_{i-1}^j + \gamma C_i^j\right] + \omega\left[(1-\gamma)C_{i-1}^{j+1} + \gamma C_i^{j+1}\right] \quad (5.74)$$

mientras que las variables dependientes que intervienen en el término dispersivo de las mismas ecuaciones quedan definidas por:

$$C_{i+1}^{j+\omega} = (1-\omega)C_{i+1}^j + \omega C_{i+1}^{j+1} \quad (5.75)$$

$$C_i^{j+\omega} = (1-\omega)C_i^j + \omega C_i^{j+1} \quad (5.76)$$

$$C_{i-1}^{j+\omega} = (1-\omega)C_{i-1}^j + \omega C_{i-1}^{j+1} \quad (5.77)$$

La ecuación (5.77) considerando las ecuaciones (5.68) y (5.69) puede ser escrita como:

$$\left. \frac{\partial Qs}{\partial x} \right|_i^{j+\omega} = a_1 C_{i+\gamma}^{j+\omega} - a_2 (C_{i+1}^{j+\omega} - C_i^{j+\omega}) - a_3 C_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} + a_4 (C_i^{j+\omega} - C_{i-1}^{j+\omega}) \quad (5.78)$$

donde

$$a_1 = \frac{(Hq)_{i+\gamma}^{j+\omega}}{\Delta x_i} \quad (5.79)$$

$$a_2 = \frac{(\nu H)_{i+\gamma}^{j+\omega} (Da)_{i+\gamma}^{j+\omega}}{\Delta x_i (x_{i+1} - x_i)} \quad (5.80)$$

$$a_3 = \frac{(Hq)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i} \quad (5.81)$$

$$a_4 = \frac{(\nu H)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega} (Da)_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}}{\Delta x_i (x_i - x_{i-1})} \quad (5.82)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.73)-(5.77) en la ecuación (5.78) y sumando términos semejantes se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Qs}{\partial x} \right|_i^{j+\omega} &= -\omega [a_4 + (1-\gamma)a_3] C_{i-1}^{j+1} + \omega [(1-\gamma)a_1 + a_2 - \gamma a_3 + a_4] C_i^{j+1} + \omega [\gamma a_1 - a_2] C_{i+1}^{j+1} \\ &\quad - (1-\omega) [a_4 + (1-\gamma)a_3] C_{i-1}^j + (1-\omega) [a_4 - \gamma a_3 + a_2 + (1-\gamma)a_1] C_i^j \\ &\quad + (1-\omega) [\gamma a_1 - a_2] C_{i+1}^j \end{aligned} \quad (5.83)$$

La sustitución de las ecuaciones (5.65) y (5.83) en la ecuación (3.37) conduce al sistema de ecuaciones algebraicas siguientes:

$$A_s C_{i-1}^{j+1} + B_s C_i^{j+1} + D_s C_{i+1}^{j+1} = E_s \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.84)$$

donde

$$As_i = -\omega[a_4 + (1-\gamma)a_3] \quad (5.85)$$

$$Bs_i = \omega[(1-\gamma)a_1 + a_2 - \gamma a_3 + a_4] + b_2 \quad (5.86)$$

$$Ds_i = \omega[\gamma a_1 - a_2] \quad (5.87)$$

$$Es_i = Rs_i^{j+\omega} + (1-\omega)[a_4 + (1-\gamma)a_3]C_{i-1}^j - \{(1-\omega)[a_4 - \gamma a_3 + a_2 + (1-\gamma)a_1] - b_1\}C_i^j - (1-\omega)[\gamma a_1 - a_2]C_{i+1}^j \quad (5.88)$$

El flujo del agua y la carga se obtienen de la solución de la ecuación de transferencia de agua por lo que se debe de incluir en el sistema (5.84). Al igual que en la ecuación de transferencia de agua, para establecer la solución es necesario la especificación de las condiciones iniciales y de frontera.

### 5.8. Algoritmo de Thomas

El algoritmo de Thomas es empleado para resolver sistemas como el (5.57) y el (5.84), cuyos coeficientes forman matrices tridiagonales. Este algoritmo requiere que se establezcan las reglas recursivas siguientes:

Para la transferencia de agua:

$$H_i^{j+1} = F_i - G_i H_{i+1}^{j+1} \quad ; \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.89)$$

y para el transporte de solutos:

$$C_i^{j+1} = Fs_i - Gs_i C_{i+1}^{j+1} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.90)$$

donde:

$$F_i = \frac{E_i - A_i F_{i-1}}{B_i - A_i G_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (5.91)$$

$$G_i = \frac{D_i}{B_i - A_i G_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (5.92)$$

$$Fs_i = \frac{Es_i - As_i Fs_{i-1}}{Bs_i - As_i Gs_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.93)$$

$$Gs_i = \frac{Ds_i}{Bs_i - As_i Gs_{i-1}} \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (5.94)$$

El procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones es el siguiente:

- a. Se define la condición inicial de humedad en el perfil del suelo.
- b. Se define  $F_1$ ,  $G_1$  y  $Fs_1$ ,  $Gs_1$  para la frontera superior, es decir, en la superficie del suelo.
- c. Se calculan  $F_i$ ,  $G_i$  y  $Fs_i$ ,  $Gs_i$  con  $i = 2, \dots, n-1$  con las ecuaciones (5.91) - (5.94), esto constituye el barrido hacia delante.
- d. Se define  $H_n^{j+1}$  y  $C_n^{j+1}$  de la condición de frontera en  $x = L$  (frontera inferior).
- e. Se determinan  $H_i^{j+1}$  y  $C_i^{j+1}$  con  $i = n-1, \dots, 2$  con las ecuaciones (5.89) y (5.90), lo que constituye el barrido hacia atrás.

Si los coeficientes del sistema (5.57) dependen de la propia presión  $H_i^{j+1}$ , éstos se actualizan y se vuelve a aplicar el algoritmo hasta que el siguiente estimador se la solución en  $t_{j+1}$  sea igual, dado un criterio de error, al estimador precedente.

## 5.9. Condiciones de frontera

### 5.9.1. Condición de Dirichlet

La condición de Dirichlet aplicada a la ecuación de Boussinesq consiste en aceptar que hay un abatimiento instantáneo del nivel freático sobre ambos drenes al iniciar el proceso de drenaje, es decir, que la conductancia del dren es infinito.

#### a) Frontera izquierda

La condición de Dirichlet para la frontera izquierda se escribe como:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (5.95)$$

La cual, en su forma discreta se escribe como:

$$-\frac{H_2^{j+1} - H_1^{j+1}}{x_2 - x_1} = 0 \quad (5.96)$$

La cual puede ser escrita en la forma (5.89):

$$H_1^{j+1} = H_2^{j+1} \quad (5.97)$$

donde resultan los valores de  $F_1$  y  $G_1$ , a saber:

$$F_1 = 0 ; \quad G_1 = 0 \quad (5.98)$$

***b) Frontera derecha***

La condición de Dirichlet para la frontera derecha se escribe como:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (5.99)$$

La cual, en su forma discreta se escribe como:

$$-\frac{H_n^{j+1} - H_{n-1}^{j+1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \quad (5.100)$$

La cual puede ser escrita en la forma (5.89):

$$H_{n-1}^{j+1} = H_n^{j+1} \quad (5.101)$$

En el barrido hacia adelante la ecuación (5.89) proporciona  $H_{n-1}^{j+1} = F_{n-1} - G_{n-1}H_n^{j+1}$ , el barrido hacia atrás requiere del valor de  $H_n^{j+1}$ , el cual se calcula igualando la expresión precedente con la ecuación (5.101), es decir:

$$H_n^{j+1} = 0 \quad (5.102)$$

### 5.9.2. Condición de radiación lineal

La condición de frontera tipo radiación, o condición mixta, consiste en aceptar una variación lineal entre el flujo de Darcy y la diferencia de presión entre el medio externo ( $H_{ext}$ ) y la frontera, así como una variación lineal entre el flujo dispersivo y la diferencia de concentración con el medio externo ( $C_{ext}$ ) y la frontera, para todo tiempo. La condición de radiación lineal es debida originalmente a Newton quien postula que el flujo de calor en la frontera de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea; el resultado es equivalente a una ley de tipo Ohm en electricidad. De particular interés es la condición de frontera tipo radiación, o condición mixta. Ésta consiste en aceptar una variación lineal entre el flujo dispersivo y la diferencia de concentración en el medio externo ( $C_{ext}$ ) y la frontera, para todo tiempo.

La adaptación del postulado de Newton al flujo del agua del suelo hacia a otro medio, como la atmósfera, se hace de la manera siguiente. Consideremos la condición de radiación en  $x = L$ . Por una parte el flujo de agua, de acuerdo con la ley de Darcy, es proporcionado por  $q = -K_s \partial H / \partial x$ . Por otra parte de acuerdo con el postulado de Newton en la forma de la ley de Ohm, este flujo es proporcionado por  $q = -(H_{ext} - H) / R_w$ , donde  $H$  es el potencial hidráulico en la frontera,  $H_{ext}$  es su valor

en el exterior de la misma, y  $R_w$  es la resistencia hidráulica en la interfaz y tiene como unidades el tiempo [T]; la posición del exterior es  $x_{\text{ext}} = L + \varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es una distancia ‘pequeña’ positiva ( $\varepsilon > 0$ ). Igualando las dos leyes se tiene:  $\partial H / \partial x = (H_{\text{ext}} - H) / K_s R_w$ , en la cual se debe observar que el producto  $K_s R_w$  tiene unidades de longitud. Definiendo la escala de longitud  $\ell_w = K_s R_w$ , se tiene  $\partial H / \partial x + (H - H_{\text{ext}}) / \ell_w = 0$ , y finalmente haciendo  $\kappa = L / \ell_w$  se obtiene la condición  $\partial H / \partial x + \kappa (H - H_{\text{ext}}) / L = 0$ . En las posiciones  $x = 0$  y  $x = L$ , la condición de radiación lineal se traduce respectivamente como:

**c) Frontera izquierda**

En la posición  $x = 0$  la condición de radiación lineal para la transferencia de agua se traduce como:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} + \kappa \frac{H - H_{\text{ext}}}{L} = 0 \tag{5.103}$$

donde  $\kappa$  es coeficiente adimensional de conductancia y  $L$  es la longitud del dominio de solución. Este coeficiente puede ser representado por  $\kappa = L / \ell$ , donde  $\ell$  es una escala de longitud característica de la interfaz.

En forma discreta la ecuación (5.103) puede escribirse como:

$$-\frac{H_2^{j+1} - H_1^{j+1}}{x_2 - x_1} + \kappa \frac{H_1^{j+1} - H_{\text{ext}}^{j+1}}{L} = 0 \tag{5.104}$$

La cual puede ser escrita en la forma (5.89):

$$H_1^{j+1} = \frac{\kappa(x_2 - x_1)}{L + \kappa(x_2 - x_1)} H_{\text{ext}}^{j+1} + \frac{L}{L + \kappa(x_2 - x_1)} H_2^{j+1} \quad (5.105)$$

donde resultan los valores de  $F_1$  y  $G_1$ , a saber:

$$F_1 = \frac{\kappa(x_2 - x_1)}{L + \kappa(x_2 - x_1)} H_{\text{ext}}^{j+1} \quad ; \quad G_1 = -\frac{L}{L + \kappa(x_2 - x_1)} \quad (5.106)$$

Para el transporte de solutos la condición de radiación lineal se traduce como:

$$-\frac{\partial C}{\partial x} + \kappa_s \frac{C - C_{\text{ext}}}{L} = 0 \quad (5.107)$$

En forma discreta la ecuación (5.107) puede ser escrita como:

$$-\frac{C_2^{j+1} - C_1^{j+1}}{x_2 - x_1} + \kappa_s \frac{C_1^{j+1} - C_{\text{ext}}^{j+1}}{L} = 0 \quad (5.108)$$

La cual puede ser escrita en la forma (5.90):

$$C_1^{j+1} = \frac{\kappa_s (x_2 - x_1)}{L + \kappa_s (x_2 - x_1)} C_{\text{ext}}^{j+1} + \frac{L}{L + \kappa_s (x_2 - x_1)} C_2^{j+1} \quad (5.109)$$

De la cual resultan los valores de  $Fs_1$  y  $Gs_1$ , a saber:

$$Fs_1 = \frac{\kappa_s (x_2 - x_1)}{L + \kappa_s (x_2 - x_1)} C_{\text{ext}}^{j+1} \quad ; \quad Gs_1 = -\frac{L}{L + \kappa_s (x_2 - x_1)} \quad (5.110)$$

**d) Frontera derecha**

En la posición  $x = L$  la condición de radiación lineal para la transferencia de agua se traduce como:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \kappa \frac{H - H_{\text{ext}}}{L} = 0 \quad (5.111)$$

En forma discreta la ecuación (5.111) se escribe como:

$$\frac{H_n^{j+1} - H_{n-1}^{j+1}}{x_n - x_{n-1}} + \kappa \frac{H_n^{j+1} - H_{\text{ext}}^{j+1}}{L} = 0 \quad (5.112)$$

La cual puede ser escrita en la forma (5.89):

$$H_{n-1}^{j+1} = -\frac{\kappa(x_n - x_{n-1})}{L} H_{\text{ext}}^{j+1} + \frac{L + \kappa(x_n - x_{n-1})}{L} H_n^{j+1} \quad (5.113)$$

En el barrido hacia adelante la ecuación (5.89) proporciona  $H_{n-1}^{j+1} = F_{n-1} - G_{n-1} H_n^{j+1}$ , el barrido hacia atrás requiere del valor de  $H_n^{j+1}$ , el cual se calcula igualando la expresión precedente con la ecuación (5.113), es decir:

$$H_n^{j+1} = \frac{F_{n-1} L + \kappa(x_n - x_{n-1}) H_{\text{ext}}^{j+1}}{(G_{n-1} + 1)L + \kappa(x_n - x_{n-1})} \quad (5.114)$$

Para el transporte de solutos la condición de radiación lineal se traduce como:

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \kappa_s \frac{C - C_{\text{ext}}}{L} = 0 \quad (5.115)$$

En forma discreta la ecuación (5.115) se escribe como:

$$\frac{C_n^{j+1} - C_{n-1}^{j+1}}{x_n - x_{n-1}} + \kappa_s \frac{C_n^{j+1} - C_{\text{ext}}^{j+1}}{L} = 0 \quad (5.116)$$

La cual puede ser escrita en la forma (5.90):

$$C_{n-1}^{j+1} = -\frac{\kappa_s (X_n - X_{n-1})}{L} C_{\text{ext}}^{j+1} + \frac{L + \kappa_s (X_n - X_{n-1})}{L} C_n^{j+1} \quad (5.117)$$

En el barrido hacia adelante la ecuación (5.90) proporciona  $C_{n-1}^{j+1} = Fs_{n-1} - Gs_{n-1} C_n^{j+1}$ , el barrido hacia atrás requiere del valor de  $C_n^{j+1}$ , el cual se calcula igualando la expresión precedente con la ecuación (5.117), es decir:

$$C_n^{j+1} = \frac{Fs_{n-1}L + \kappa_s (X_n - X_{n-1})C_{\text{ext}}^{j+1}}{(Gs_{n-1} + 1)L + \kappa_s (X_n - X_{n-1})} \quad (5.118)$$

Si se observa la ecuación de transporte unidimensional de los solutos, el coeficiente de conductancia adimensional ( $\kappa_s$ ) debe de ser cero por el componente advectivo, sin embargo, se dejó en la solución solo con fines de ilustración para deducir las condiciones de frontera derecha y frontera izquierda.

### 5.9.3. Condición de radiación fractal

Para linealizar las condiciones de frontera, se introduce una generalización del coeficiente de conductancia presentado en la discusión de la ecuación (5.103), es decir:

$$\kappa = \frac{q_s}{K_s} \frac{L}{h_s} \left( \frac{h}{h_s} \right)^{2s-1} \quad (5.119)$$

Con el objeto de linealizar las condiciones de frontera y resolver el sistema (5.57), la ecuación (5.103), considerando  $h = H - D_o$ , es escrita de la manera siguiente:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} \pm \kappa(H) \frac{H - D_o}{L} = 0 \quad ; \quad x = 0, L \quad (5.120)$$

La discretización de las condiciones de frontera en ambos drenes es la siguiente:

$$-\frac{H_2^{j+1} - H_1^{j+1}}{x_2 - x_1} + \kappa_1^{j+1} \frac{H_1^{j+1} - D_o}{L} = 0 \quad (5.121)$$

$$\frac{H_n^{j+1} - H_{n-1}^{j+1}}{x_n - x_{n-1}} + \kappa_n^{j+1} \frac{H_n^{j+1} - D_o}{L} = 0 \quad (5.122)$$

las cuales pueden ser escritas en la forma (5.89):

$$H_1^{j+1} = \frac{\kappa_1^{j+1} (x_2 - x_1)}{L + \kappa_1^{j+1} (x_2 - x_1)} D_o + \frac{L}{L + \kappa_1^{j+1} (x_2 - x_1)} H_2^{j+1} \quad (5.123)$$

$$H_{n-1}^{j+1} = -\frac{\kappa_n^{j+1} (x_n - x_{n-1})}{L} D_o + \frac{L + \kappa_n^{j+1} (x_n - x_{n-1})}{L} H_n^{j+1} \quad (5.124)$$

De la primera resultan los valores de  $F_1$  y  $G_1$ , a saber:

$$F_1 = \frac{\kappa_1^{j+1}(x_2 - x_1)}{L + \kappa_1^{j+1}(x_2 - x_1)} D_o \quad ; \quad G_1 = -\frac{L}{L + \kappa_1^{j+1}(x_2 - x_1)} \quad (5.125)$$

En el barrido hacia adelante la ecuación (5.89) proporciona  $H_{n-1}^{j+1} = F_{n-1} - G_{n-1}H_n^{j+1}$ . Así, el barrido hacia atrás requiere del valor de  $H_n^{j+1}$ , el cual se obtiene de esta expresión igualada a la ecuación (5.124), es decir:

$$H_n^{j+1} = \frac{F_{n-1}L + \kappa_n^{j+1}(x_n - x_{n-1})D_o}{(G_{n-1} + 1)L + \kappa_n^{j+1}(x_n - x_{n-1})} \quad (5.126)$$

Es necesario señalar que  $\kappa$  depende de la propia solución, sin embargo como el proceso de solución del sistema (5.57) es iterativo, este parámetro se calcula en función del estimador precedente.

## 5.10. Comparación con una solución analítica

Con la finalidad de definir valores primeros de los parámetros de interpolación en el espacio y en el tiempo ( $\gamma$  y  $\omega$ ), la solución numérica se compara con una solución analítica obtenida de la ecuación de Boussinesq en un caso particular. Esta solución ha sido construida para una linealización de la ecuación diferencial representada por una transmisibilidad constante pero con una condición de radiación lineal en los drenes, y que incluye la ecuación clásica de Glover-Dumm (Dumm, 1954). Los valores utilizados para la simulación son los reportados por Fragoza *et al.* (2003):  $L = 50$  m,  $K_s = 0.557$  m/d,  $\bar{\mu} = 0.1087$  m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>,  $\bar{T} = 2.5065$  m<sup>2</sup>/d,  $D_o = 3.5$  m,  $H_s = 5.0$  m y  $\kappa = 1.5$ .

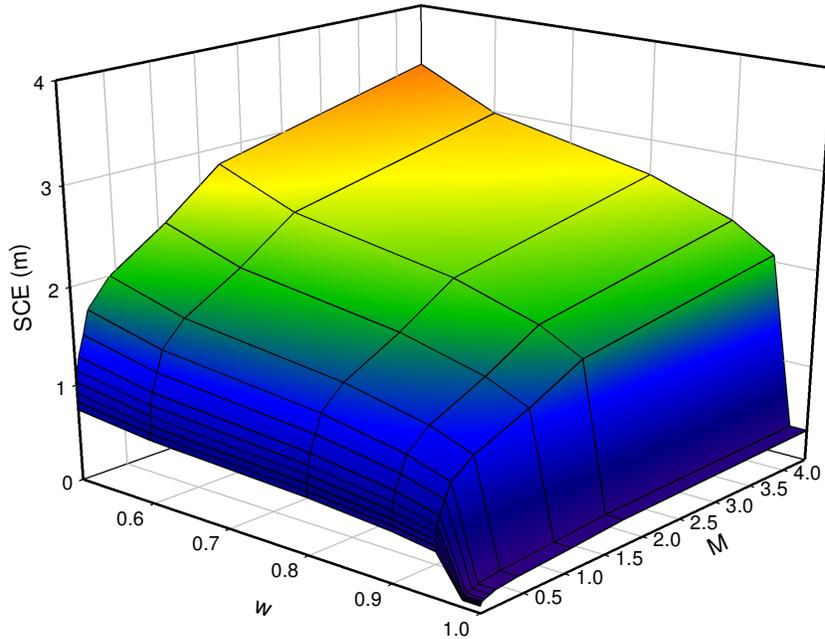
De acuerdo con Zataráin *et al.* (1998) la discretización del dominio se realiza de modo que el incremento  $x_i - x_{i-1} = \delta x$  sea constante para  $i = 4, 5 \dots N-2$  excepto en la vecindad de los drenes, es decir para  $x_1 = 0$ : i)  $x_2 - x_1 = 0.4 \delta x$ ,  $x_3 - x_2 = 0.6 \delta x$ ,  $\Delta x_1 = 0.1 \delta x$ ,  $\Delta x_2 = 0.6 \delta x$ ; y ii)  $x_N = L$ ,  $x_N - x_{N-1} = 0.4 \delta x$ ,  $\Delta x_{N-1} = 0.6 \delta x$ ,  $\Delta x_N = 0.1 \delta x$ . El valor de interpolación en el espacio se toma como  $\gamma = \frac{1}{2}$  en el dominio excepto, como se puede inferir, en la primera y última celdas.

En cuanto a la discretización del tiempo, dada la del espacio, se sigue el enfoque clásico de escribir las ecuaciones del movimiento en forma adimensional, válido en medios homogéneos, para obtener relaciones entre la escalas espaciales y temporales características. Introduciendo variables adimensionales en la ecuación de Boussinesq, ecuación (5.33), definidas como  $x_* = x/L$ ,  $t_* = t/\tau$ ,  $H_* = H/H_s$ ,  $\mu_* = \mu/\nu_s$ ,  $R_{w*} = R_w L^2 / T_s H_s$ , donde  $\nu_s = \nu(H_s)$  y  $T_s = K_s H_s$ , se obtiene la misma ecuación de Boussinesq con variables con asteriscos si  $\tau = \nu_s L^2 / T_s$ .

Debido a la naturaleza parabólica de la ecuación diferencial se define el parámetro  $M = (\Delta x_*)^2 / \Delta t_*$ , que puede ser encontrado comparando la solución en diferencias finitas con soluciones analíticas. El valor del parámetro para los tiempos cortos recomendado por Zataráin *et al.* (1998) es del orden de  $M \cong 0.1$ .

Con la finalidad de observar el efecto que tiene el parámetro  $M$  en la solución numérica, se realizaron varias simulaciones y se calculó la suma de los cuadrados de los errores (SCE) asumiendo  $\Delta x$  constante y variando los valores de  $\omega$  y  $M$ . Los resultados se muestran en la Figura 5.3. Para evitar que los errores quedaran ocultos en los tiempos cortos y se hicieran poco notables al finalizar el tiempo de simulación, el cálculo de la SCE se realizó a intervalos de un día hasta un total de 60 días. Se

puede ver que la SCE es menor con valores de  $\omega$  cercanos a 1, y con valores de M menores a 0.5. Por otra parte al disminuir el valor de  $\omega$  los errores en la solución aumentan aún con valores menores de 0.5 en el parámetro M.



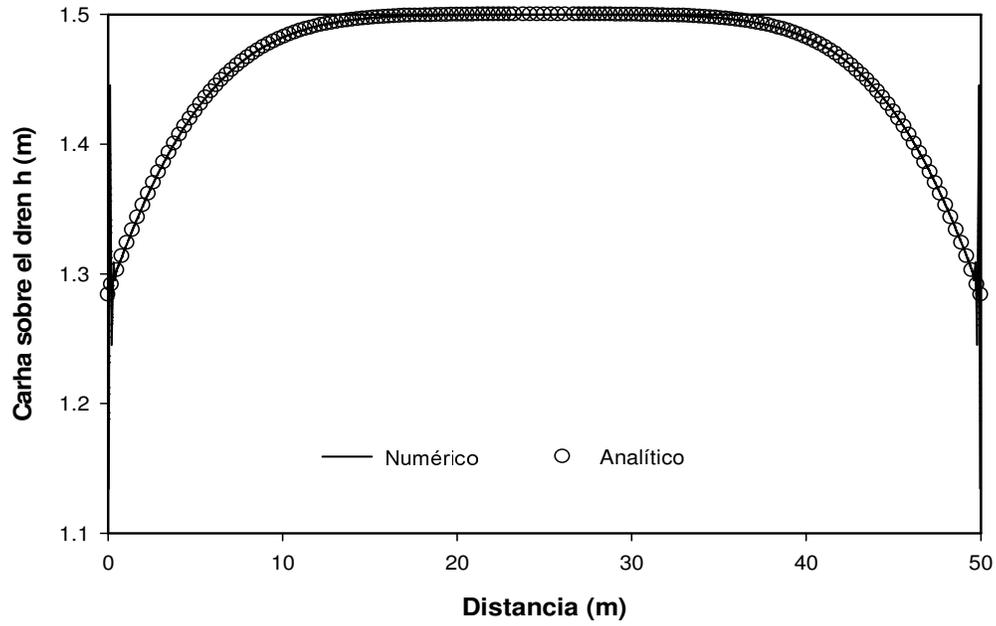
**Figura 5.3. Suma de los cuadrados de los errores con diferentes valores de M y  $\omega$ .**

De forma general puede apreciarse que conforme el valor de M aumenta y el valor de  $\omega$  disminuye, la SCE crece de manera significativa y viceversa. De esta manera, se pudo apreciar que mientras el valor ( $M > 0.4$ ), en la solución se presentaban inestabilidades en las fronteras, como las que se observan en la Figura 5.4. En ésta, se muestra la variación del abatimiento de la superficie libre, en todo el dominio de solución y un acercamiento sobre el dren, con diferentes pasos de interpolación ( $\omega$ ).

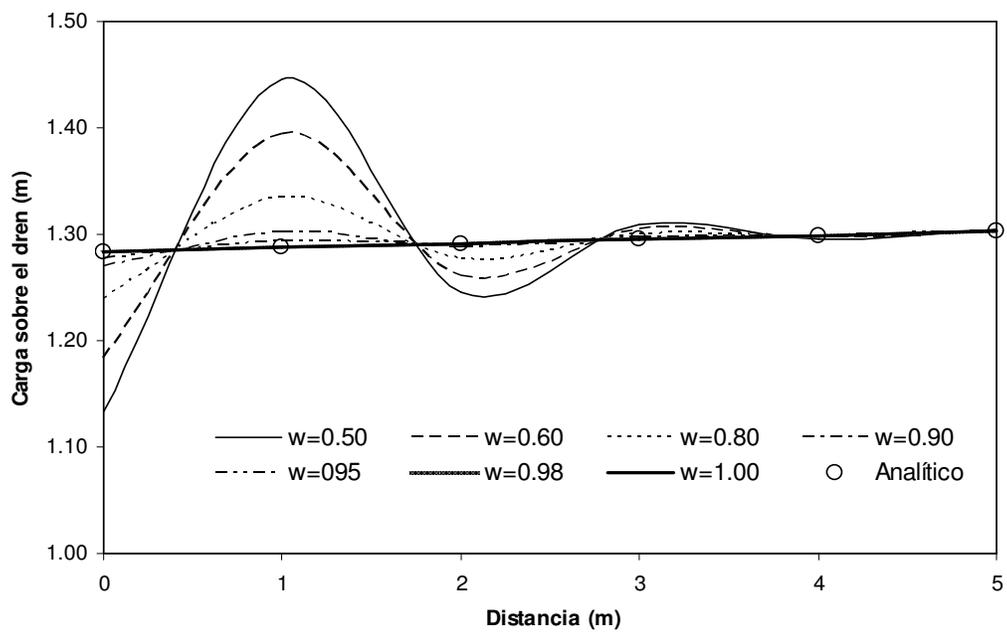
La discretización en el espacio se realizó con  $\Delta x = 1.00 \text{ m}$  y en el tiempo con  $\Delta t = 0.01 \text{ d}$ , que corresponden a un valor de  $M \cong 4.33$ , valor que es superior al recomendado por Zataráin *et al.* (1998) para los tiempos cortos. Para las simulaciones realizadas y la mostrada en la Figura 5.4, se pudo apreciar que el paso de interpolación óptimo que hace que la solución numérica coincida con la solución analítica, dado un criterio de error, es  $\omega = 0.98$ , mismo resultado que se obtiene cuando  $\omega = 1.00$ .

Por otra parte, cuando el valor de  $M < 0.4$  las diferencias entre las solución numérica y la solución analítica con diferentes valores de  $\omega$  son mínimas. Un ejemplo de lo anterior es el que se muestra en la Figura 5.5, donde se puede observar el abatimiento del perfil para dos valores diferentes de  $M$ :  $M \cong 0.43$  ( $\Delta x = 1.00 \text{ m}$  y  $\Delta t = 0.10 \text{ d}$ ) y  $M \cong 0.04$  ( $\Delta x = 0.01 \text{ m}$  y  $\Delta t = 0.0001 \text{ d}$ ). Con el primer valor de  $M$  puede verse que aún existen diferencias con los diferentes valores de  $\omega$  pero son mínimas, y utilizando la última opción se ve el buen acuerdo entre la solución analítica y la solución propuesta, dado un criterio de error.

Con los valores de  $\Delta x = 0.01 \text{ m}$  y  $\Delta t = 0.0001 \text{ d}$  obtenidos con anterioridad, se procedió a realizar una simulación por un periodo de tiempo mayor, el cual es mostrada en la Figura 5.6. En ella, se aprecia el abatimiento de la superficie libre y la evolución del volumen drenado por unidad de área de suelo. Los resultados muestran que no existen diferencias significativas entre la solución analítica y la solución en diferencias finitas.

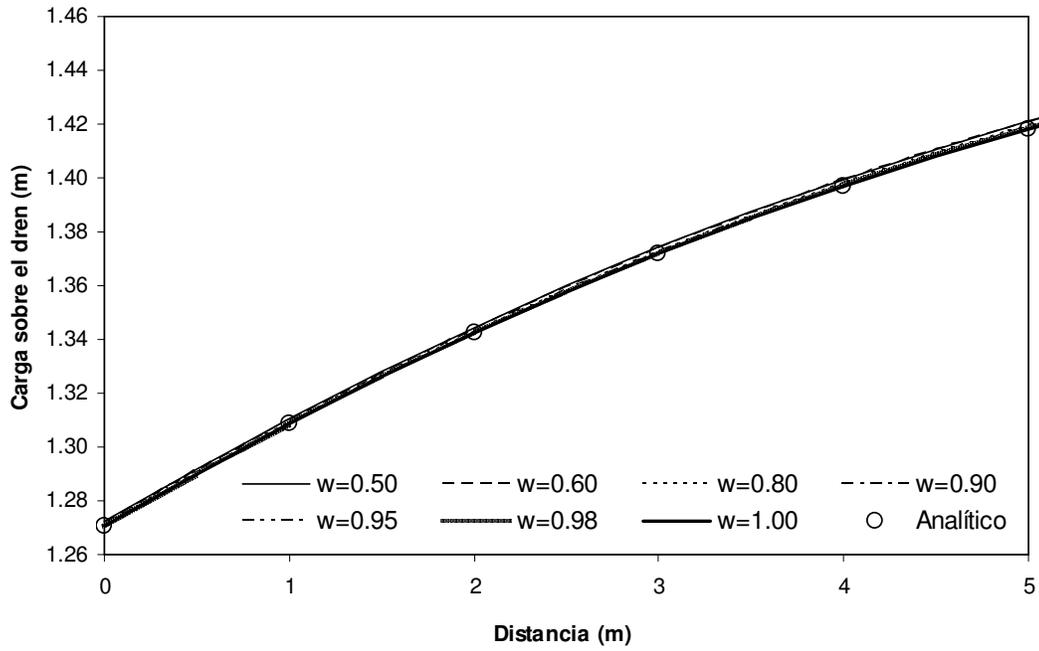


(a)

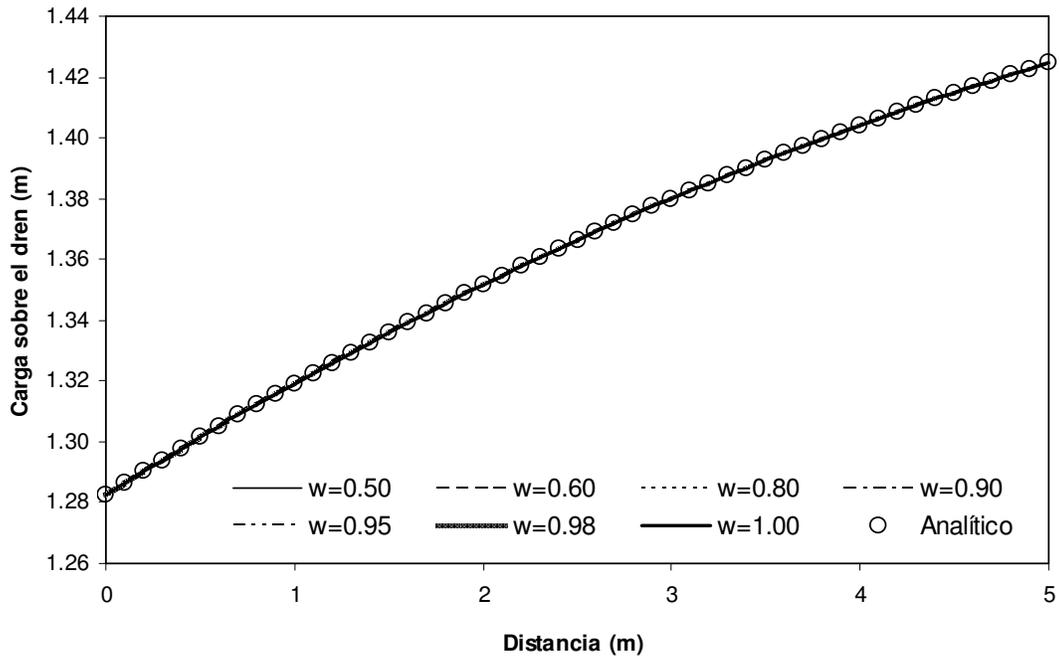


(b)

**Figura 5.4. Evolución de la carga variando el parámetro de interpolación en el espacio ( $\omega$ ) : a) Abatimiento de la superficie libre en un día, b) Abatimiento de la superficie sobre el dren en un día.**

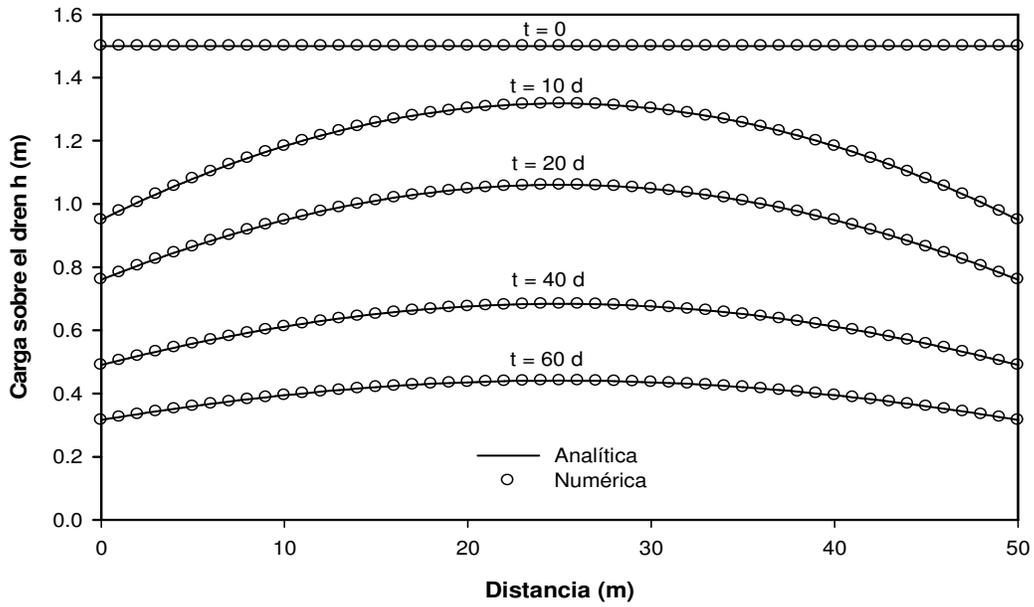


(a)

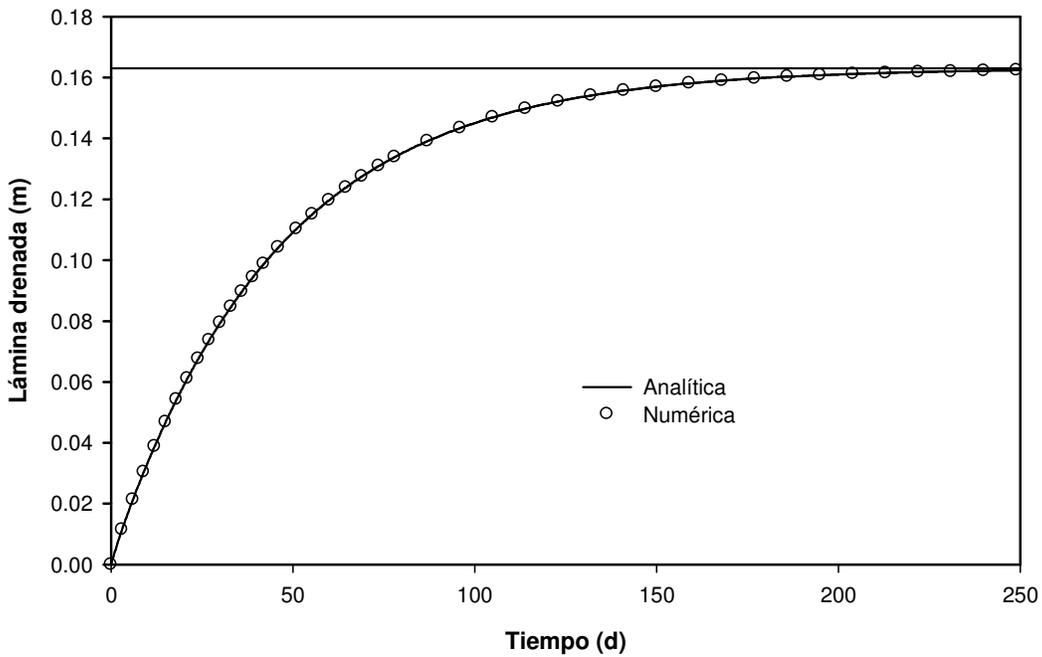


(b)

Figura 5.5. Abatimiento de la superficie libre a)  $M \cong 0.43$ , b)  $M \cong 0.04$



(a)



(b)

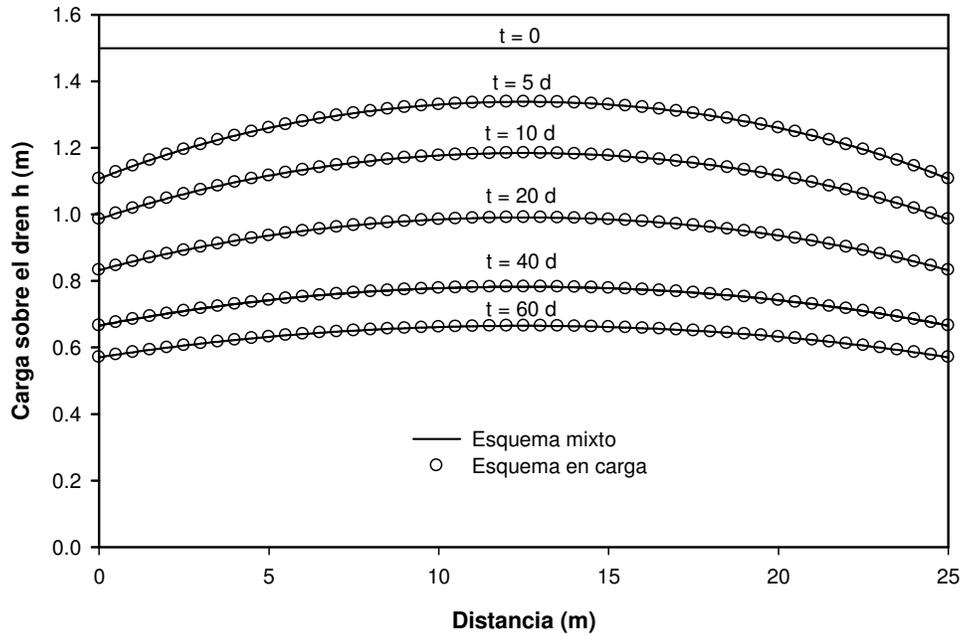
**Figura 5.6. Comparación entre la solución numérica y la solución analítica: a) Abatimiento de la superficie libre, b) Evolución de la lámina drenada acumulada**

### 5.11. Comparación de los dos esquemas numéricos

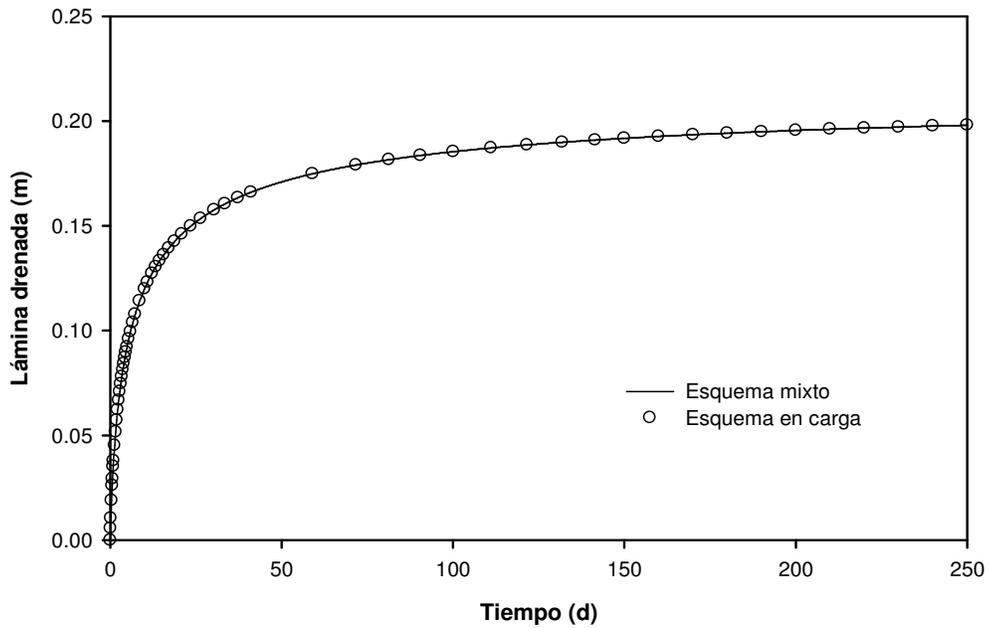
Los esquemas mixto y en carga se comparan entre sí aceptando los valores  $\gamma = 0.5$  y  $\omega = 0.98$ . El suelo utilizado es el caracterizado por Saucedo *et al.* (2003), con los valores  $\theta_s = 0.5245 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $K_s = 0.446 \text{ m/d}$ ; los valores de los parámetros de las características hidrodinámicas son: i) para Fujita y Parlange  $\lambda_c = 0.521 \text{ m}$  y  $\alpha = 0.98$ ; ii) para van Genuchten con la restricción  $m = 1 - 2/n$ ,  $m = 0.066$  y  $\psi_d = -0.15 \text{ m}$ . Para comparar los esquemas, se propone un distanciamiento entre drenes  $L = 25 \text{ m}$  y una profundidad de drenes  $H_s = 1.5 \text{ m}$ .

Los resultados de la simulación numérica obtenidas con las dos características hidrodinámicas son mostradas en la Figura 5.7 y Figura 5.8. En la Figura 5.7 se muestra la evolución del abatimiento de la carga y la lámina drenada para tiempos de 60 y 250 d, respectivamente, utilizando las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange, y en la Figura 5.8 se aprecian los resultados obtenidos con las características hidrodinámicas de van Genuchten para los tiempos mencionados con anterioridad.

De manera general, puede verse que no existen diferencias aparentes entre los esquemas mixto y de la presión con cada una de las características hidrodinámicas utilizadas, los resultados muestran que utilizar cualquiera de los dos esquemas conduce al mismo resultado.

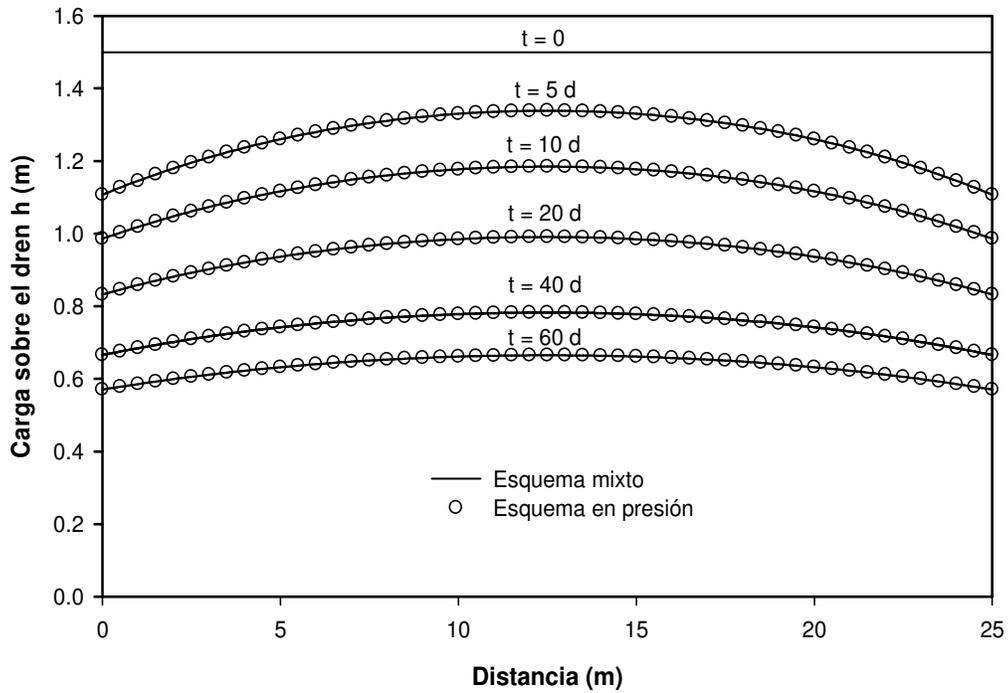


(a)

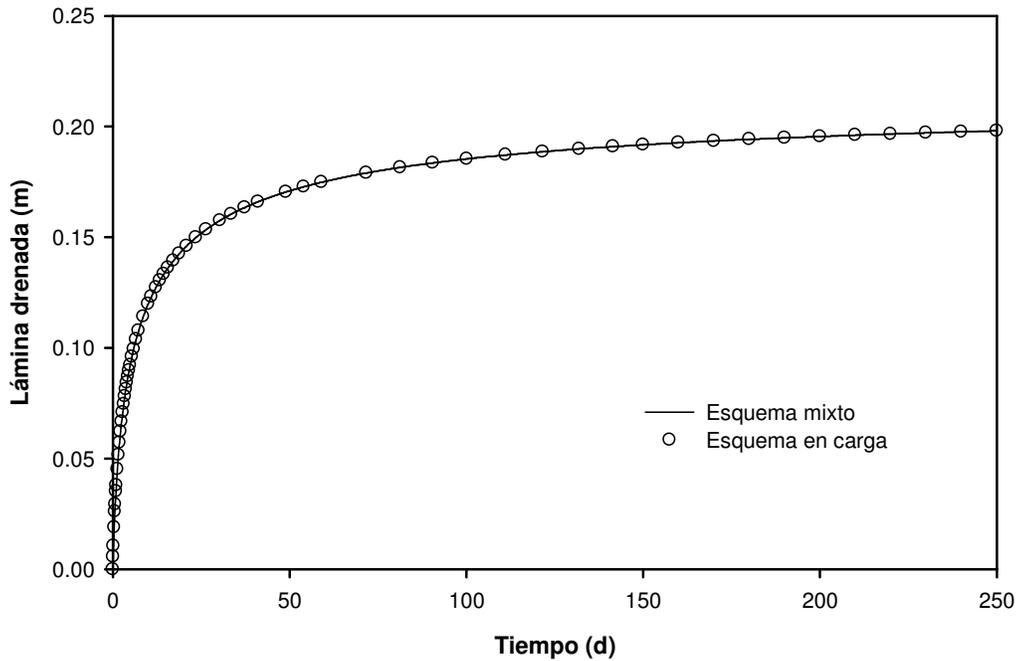


(b)

**Figura 5.7. Comparación de los dos esquemas numéricos: a) abatimiento de la superficie libre, b) evolución de la lámina drenada, usando las características hidrodinámicas de Fujita-Parlange.**



(a)



(b)

**Figura 5.8. Comparación de los dos esquemas numéricos: a) abatimiento de la superficie libre, b) evolución de la lámina drenada, usando las características hidrodinámicas de van Genuchten.**

## 5.12. Experimento en el módulo de drenaje

Una vez terminada la prueba de infiltración en el módulo, se dejó la lámina de agua correspondiente para que terminara de saturarse la columna de suelo por un tiempo de 15 días, con un plástico en la parte superior a manera de evitar pérdidas por evaporación. Finalmente, se procedió al drenado de la columna, abriendo al mismo tiempo los drenes ubicados en la parte inferior para registrar durante un tiempo de 154 horas el volumen drenado en el transcurso del tiempo.

La evolución de la lámina es estimada con la ecuación de Boussinesq, utilizando las hidrodinámicas del suelo que se obtuvieron en la sección de modelación de la infiltración con la ecuación de Richards. Se utilizan los parámetros reportados en el Cuadro 4.3 y el Cuadro 4.6, utilizando la curva característica de humedad de van Genuchten y los modelos de conductividad de Fuentes *et al.* (2001a): poro de la media geométrica, poro neutral y poro grande.

Con los parámetros del sistema conocidos  $\theta_s$ ,  $\theta_r$ ,  $\phi$ ,  $m$ ,  $\psi_d$ ,  $K_s$ , el parámetro faltante es el coeficiente de conductancia adimensional ( $\kappa$ ), que es estimado mediante el criterio de mínimos cuadrados entre la lámina drenada medida y la lámina drenada estimada con la solución en diferencias finitas.

### 5.12.1. Análisis de la lámina drenada

El aforo de los drenes se realizó a intervalos variables iniciando con un intervalo de 1 minuto durante el periodo crítico y posteriormente se usaron intervalos de 2, 3, 5, 10, 15, 20, 30 minutos hasta tiempos de 24 horas. El método usado para medir la lámina drenada fue el aforo volumétrico.

Cuando  $t \rightarrow \infty$  el flujo de Darcy tiende a cero en una columna de suelo, así, la distribución de presiones tiende a condiciones de equilibrio hidrostático, es decir:

$$\psi(z, \infty) = z - h \quad (5.127)$$

La lámina máxima drenada es proporcionada por:

$$\ell_{\max} = \int_0^h [\theta_s - \theta(z, \infty)] dz \quad (5.128)$$

La introducción de la ecuación del modelo de la característica de humedad de van Genuchten, ecuación (3.48), considerando la ecuación (5.127) permite obtener la ecuación que da la lámina máxima drenada:

$$\ell_{\max} = (\theta_s - \theta_r) \left[ h - |\psi_d| \int_0^{h/|\psi_d|} (1 + \psi_*^n)^{-m} d\psi \right] \quad (5.129)$$

Utilizando los valores ya calculados, de la ecuación (5.129) se obtiene  $\ell_{\max} = 20.43$  cm, sin embargo, la lámina drenada observada en los tiempos largos es  $\ell_{\max} = 7.49$  cm. La diferencia se debe al fenómeno de histéresis capilar cuya manifestación es más acentuada en la característica de humedad que en la curva de conductividad hidráulica (Mualem, 1976), así como el tiempo de medición de la lámina drenada. El fenómeno de histéresis capilar ocurre debido a las diferencias presentes en los procesos de vaciado o llenado de los poros de un suelo. Para evitar la influencia de la histéresis en el fenómeno de drenaje, es necesario determinar la curva de retención de humedad correspondiente al drenaje.

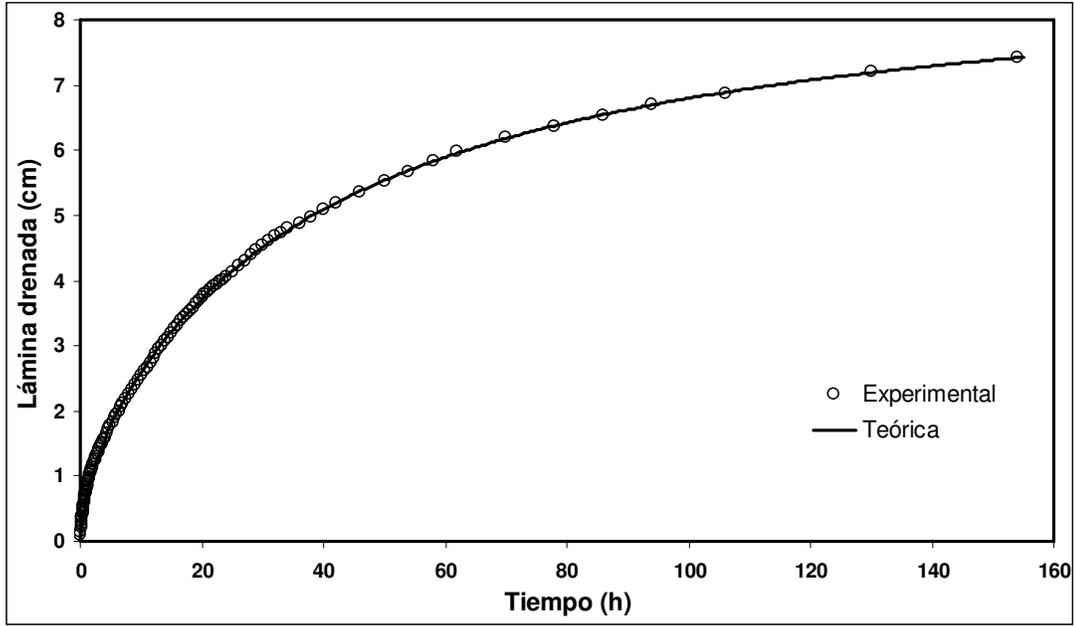
Al realizar la optimización del coeficiente de conductancia ( $\kappa$ ) se pudo apreciar que la reproducción de la lámina drenada no era satisfactoria, ya que en los tiempos cortos no reproducía de buena manera los datos, por lo que se procedió a realizar la optimización con los tres parámetros  $K_{sd}$ ,  $\psi_{dd}$  y  $\kappa$ . La notación “d” hace referencia al proceso de secado del suelo. Los incrementos espacio temporales usados durante todo el proceso de simulación fueron  $\Delta z = 0.001 \text{ cm}$  y  $\Delta t = 5 \times 10^{-5} \text{ h}$  para los tres modelos de poro. Los resultados de la optimización de los tres parámetros se muestran en el Cuadro 5.1. Es de importancia hacer notar que aunque los valores de  $K_{sd}$  y  $\psi_{dd}$  son diferentes, el valor del coeficiente de conductancia adimensional  $\kappa$  se mantiene casi constante.

**Cuadro 5.1. Valores de los parámetros de ajuste y parámetros derivados para el cálculo de la lámina drenada**

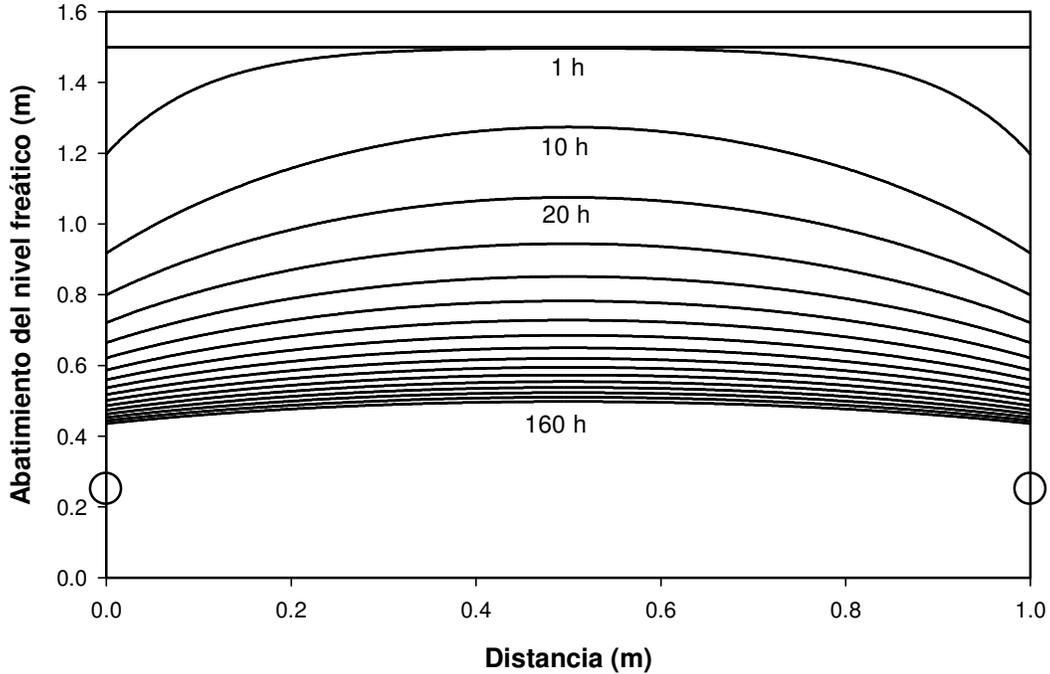
Modelo	Parámetros de Ajuste						Parámetros derivados			
	$K_{sd}$	$\psi_{dd}$	$\kappa$	RECM	$\epsilon_{Ksd}$	$\epsilon_{\kappa}$	$\lambda_{cd}$	$S_d$	$\epsilon_{\lambda_{cd}}$	$\epsilon_{Sd}$
	(cm/h)	(cm)	(adim)	(cm)	(%)	(%)			(%)	(%)
<b>Poros de la Media Geométrica</b>	1.5458	143.87	0.0616	0.2195	64.38	6.39	25.7277	5.5543	59.87	19.19
<b>Poros Neutral</b>	0.9056	120.32	0.0615	0.2126	3.70	6.22	41.1691	5.4069	35.79	21.33
<b>Poros Grande</b>	0.9404	118.73	0.0579	0.1944	0.00	0.00	64.1149	6.8729	0.00	0.00

De manera gráfica, la reproducción de la lámina drenada con los tres modelos se muestra en la Figura 5.9, Figura 5.11 y Figura 5.13.

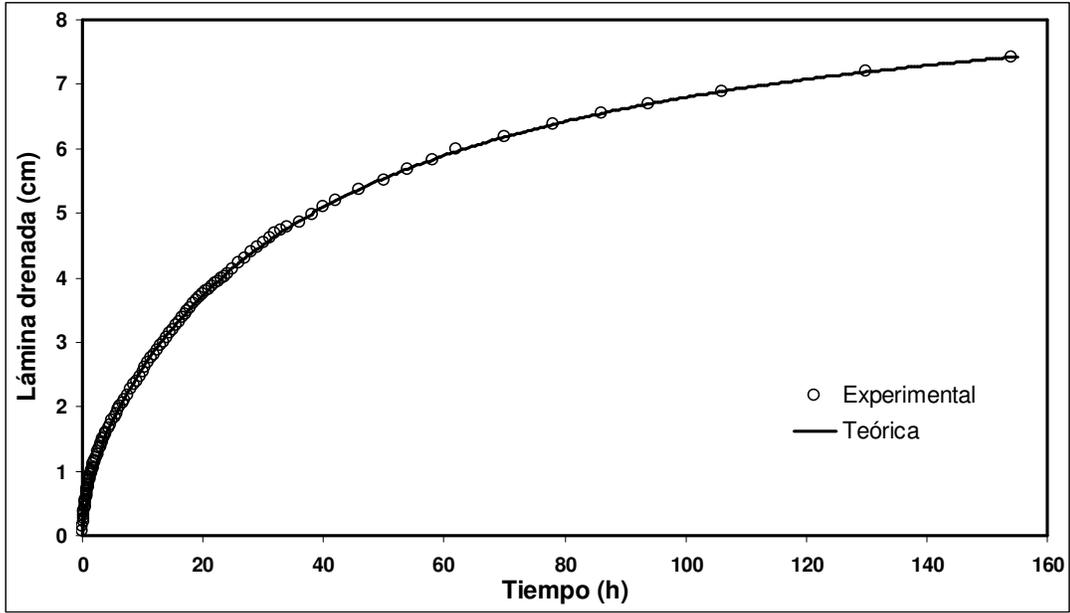
El abatimiento teórico de la lámina de agua es mostrada en la Figura 5.10, Figura 5.12 y Figura 5.14.



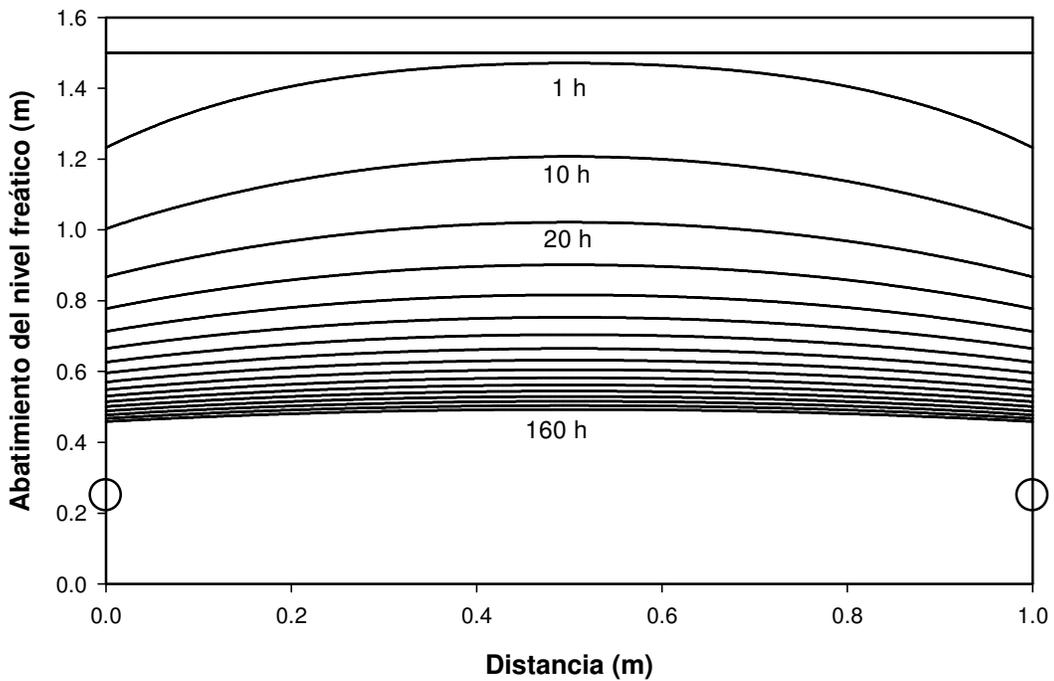
**Figura 5.9. Evolución de la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución en diferencias finitas considerando: capacidad de almacenamiento variable, condición de radiación fractal en los drenes y el modelo del poro de la media geométrica.**



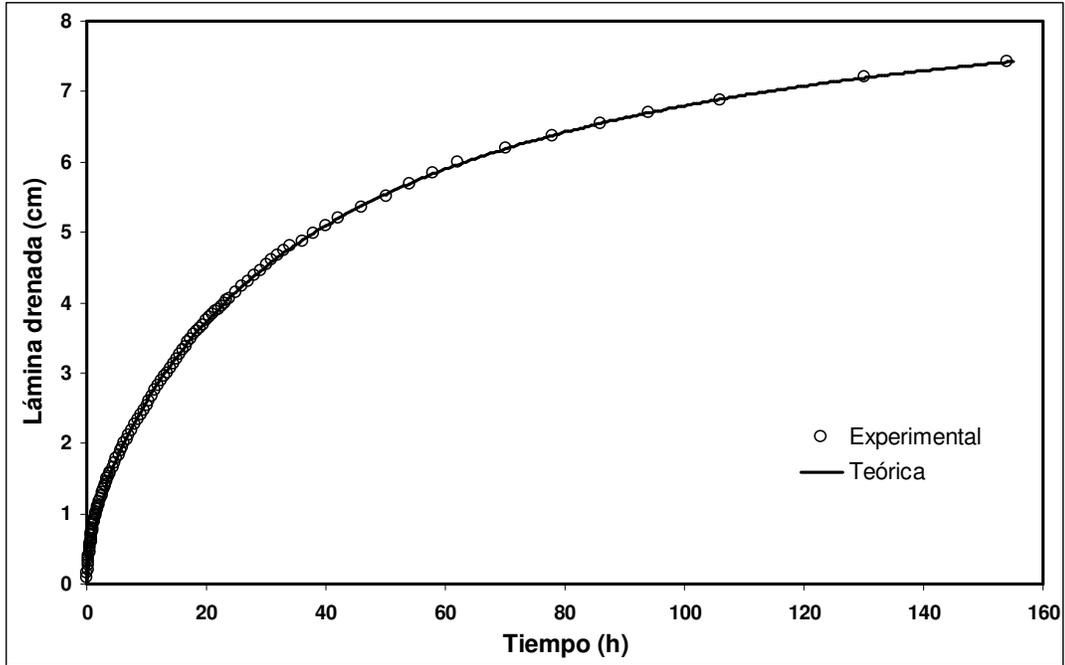
**Figura 5.10. Evolución teórica de la superficie libre del agua en el suelo calculada con el modelo del poro de la media geométrica.**



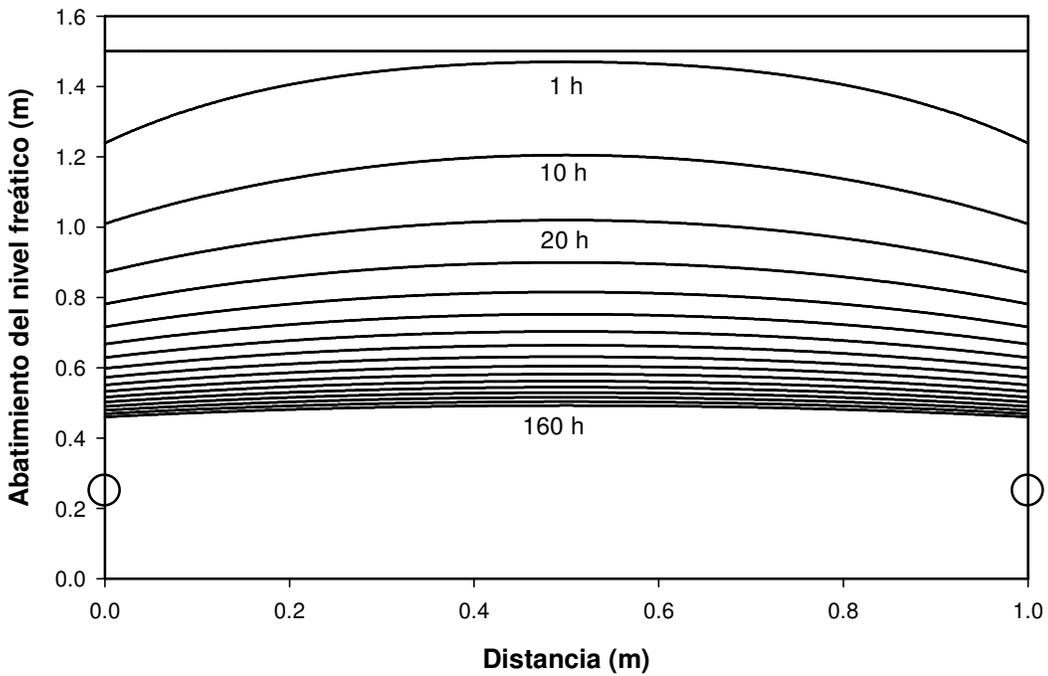
**Figura 5.11. Evolución de la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución en diferencias finitas considerando: capacidad de almacenamiento variable, condición de radiación fractal en los drenes y el modelo del poro neutral.**



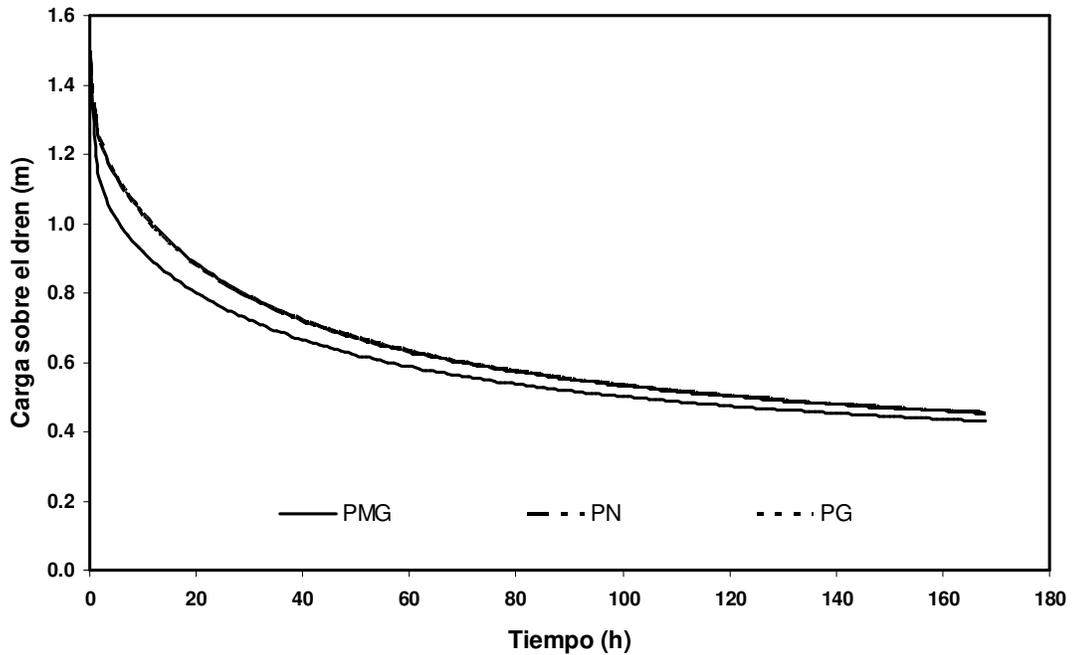
**Figura 5.12. Evolución teórica la superficie libre del agua en el suelo calculada con el modelo del poro neutral.**



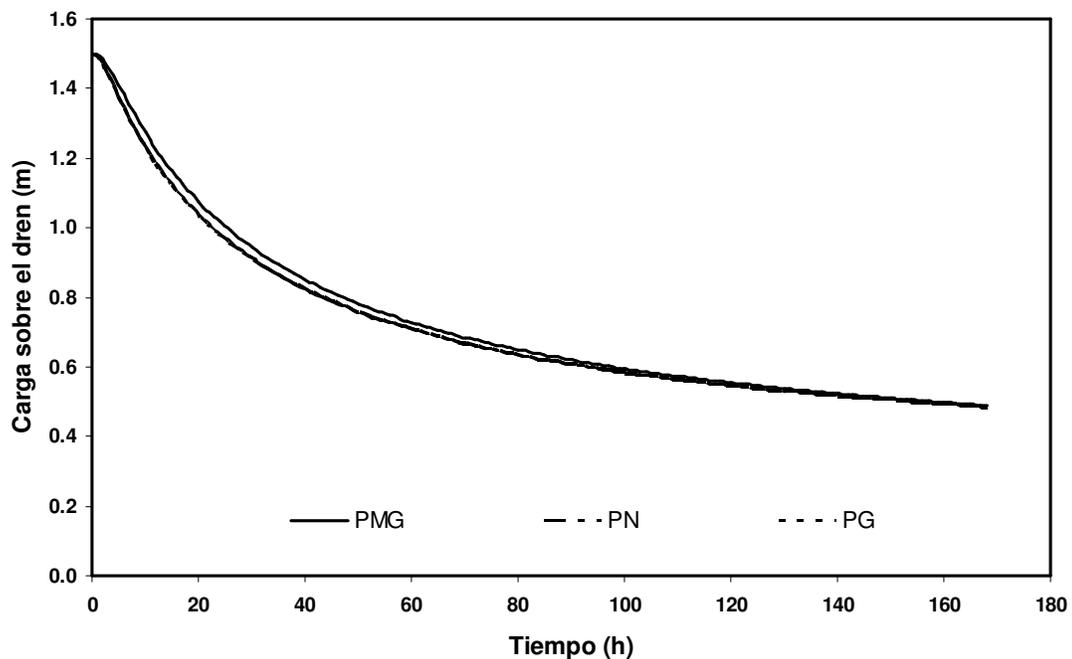
**Figura 5.13. Evolución de la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución en diferencias finitas considerando: capacidad de almacenamiento variable, condición de radiación fractal en los drenes y el modelo del poro grande.**



**Figura 5.14. Evolución teórica la superficie libre del agua en el suelo calculada con el modelo del poro grande.**



**Figura 5.15. Evolución teórica de la carga hidráulica sobre el dren calculado con los tres modelos de poro: poro de la media geométrica, poro neutral y poro grande.**



**Figura 5.16. Evolución teórica de la carga hidráulica al centro de los drenes calculado con los tres modelos de poro: poro de la media geométrica, poro neutral y poro grande.**

### 5.12.2. Análisis de la histéresis

Como pudo verse en el Cuadro 4.6 y en el Cuadro 5.1 los valores de la conductividad hidráulica saturada y la presión característica de humedad son diferentes, resultados producto del fenómeno de histéresis. En la Figura 5.17 se muestra el fenómeno de histéresis, calculado con el modelo del poro del poro grande. Las curvas son presentadas por la ecuación de retención de van Genuchten con  $\theta_s = 0.5695$ ,  $\theta_r = 0.0000$ ,  $m = 0.1540$  y  $n = 3.6237$ . Para la infiltración se utilizaron  $\psi_{dw} = 75.66$  cm y  $K_{sw} = 0.7750$  cm/h, y para el drenaje  $\psi_{dd} = 118.37$  cm y  $K_{sd} = 0.9404$  cm/h.

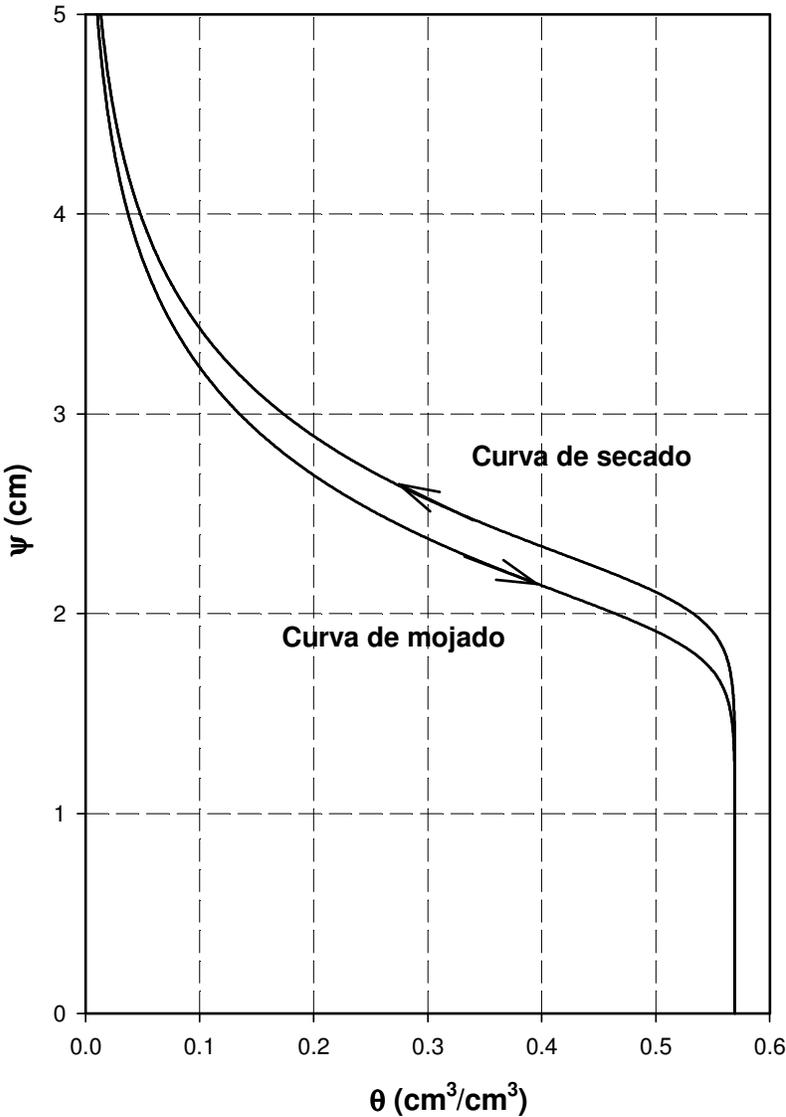
En la Figura 5.18 se muestran las curvas de histéresis correspondientes a los modelos del poro neutral y del poro de la media geométrica con sus respectivos  $\psi_{dw}$ ,  $\psi_{dd}$ ,  $K_{sw}$  y  $K_{sd}$ . En el Cuadro 5.2 se muestra el cálculo del volumen histerésico para cada uno de los modelos de poro, así como error con respecto al volumen del poro grande.

El volumen histerésico es calculado con la siguiente ecuación:

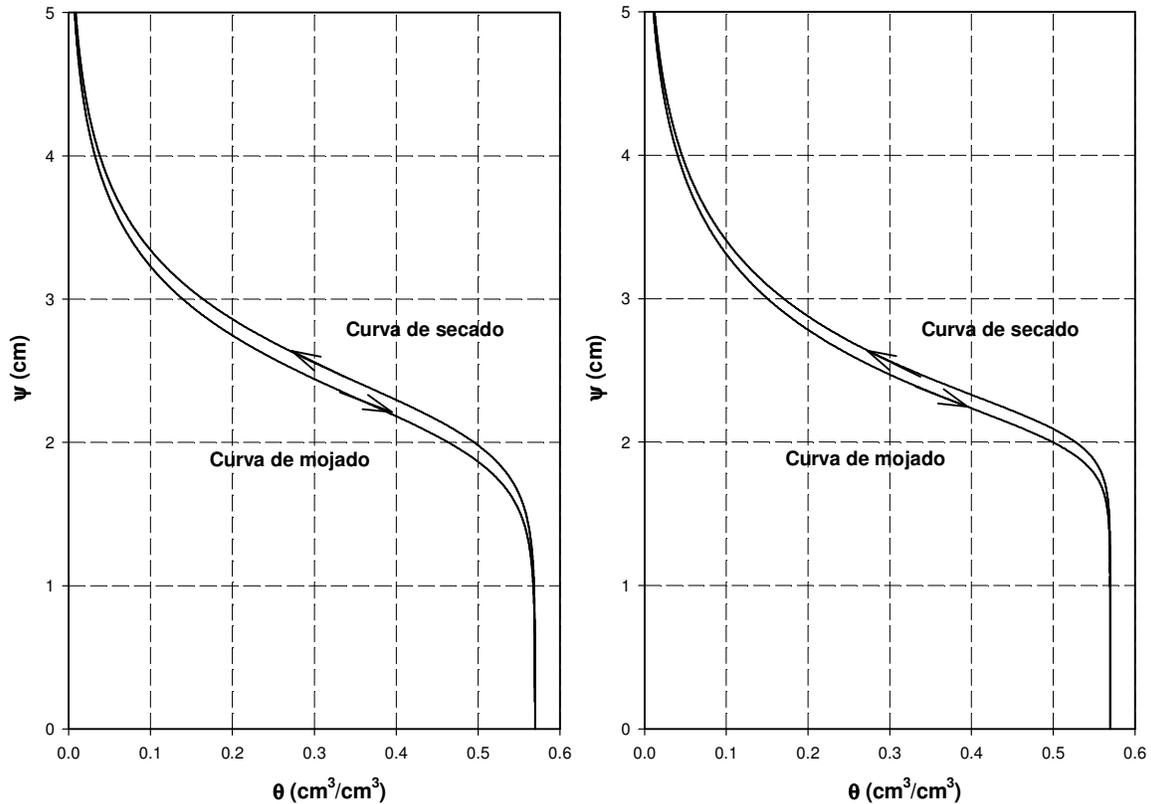
$$\Delta\theta h = \frac{1}{\theta_s - \theta_r} \int_{\theta_r}^{\theta_s} [\theta_d - \theta_w] d\theta_w \quad (5.130)$$

**Cuadro 5.2. Volumen histerésico de la curva de retención de humedad**

Modelo	$\Delta\theta h$	$\epsilon_{\Delta\theta h}$
	(cm)	(%)
Poros de la Media Geométrica	0.0282	47.39
Poros Neutrales	0.0259	51.68
Poros Grandes	0.0536	0.00



**Figura 5.17. Histéresis capilar en la característica de humedad para el modelo del poro grande.**

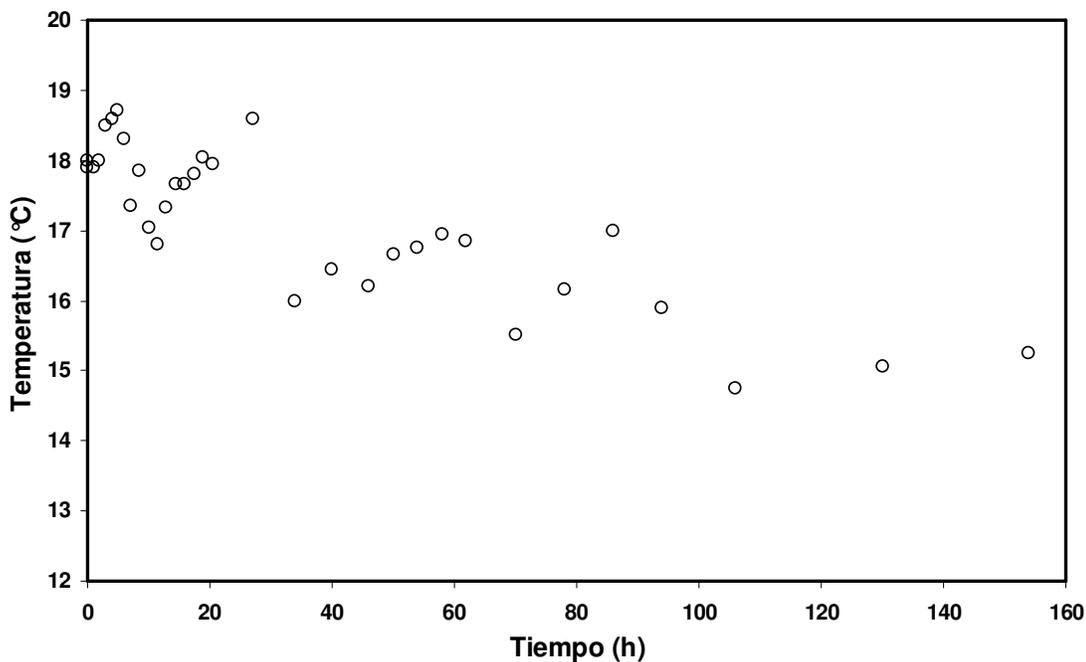


**Figura 5.18. Histéresis capilar en la característica de humedad para el modelo de la media geométrica y el poro neutral.**

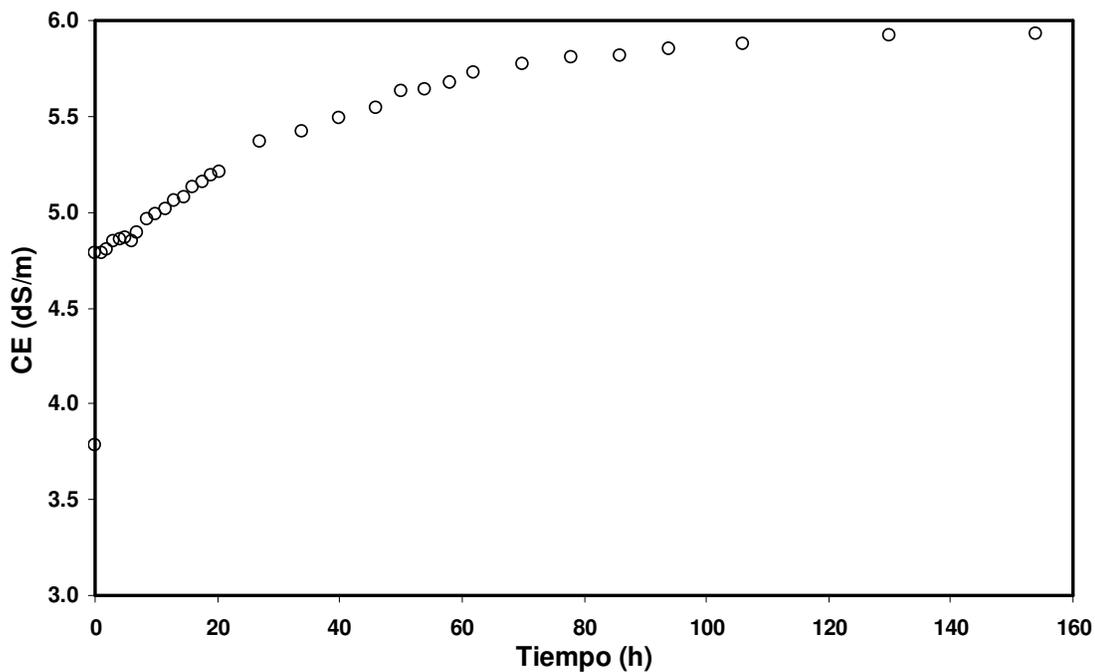
### 5.12.3. Análisis del contenido de sales

Durante el proceso de drenaje del módulo, se realizaron mediciones del pH, temperatura y la conductividad eléctrica de las muestras de agua, a intervalos de tiempo definidos. El sensor utilizado para realizar las mediciones es un sensor CONDUCTRONIC PC 18. En la Figura 5.19 se muestra la evolución de la temperatura del agua drenada en la solución. Los valores de conductividad eléctrica se realizaron a la temperatura registrada con el sensor. No obstante para cuantificar de buena manera la conductividad es importante llevarlo a un valor estándar de 25°C, por lo que los valores se tuvieron que corregir. El factor de corrección utilizado de acuerdo con Villareal y Bello (1964) es de 2-3% por cada grado centígrado en que

se mida por debajo de la temperatura estándar. Tomando el promedio (2.5%), los resultados son mostrados en Figura 5.20.



**Figura 5.19. Evolución de la temperatura del agua en el agua drenada.**



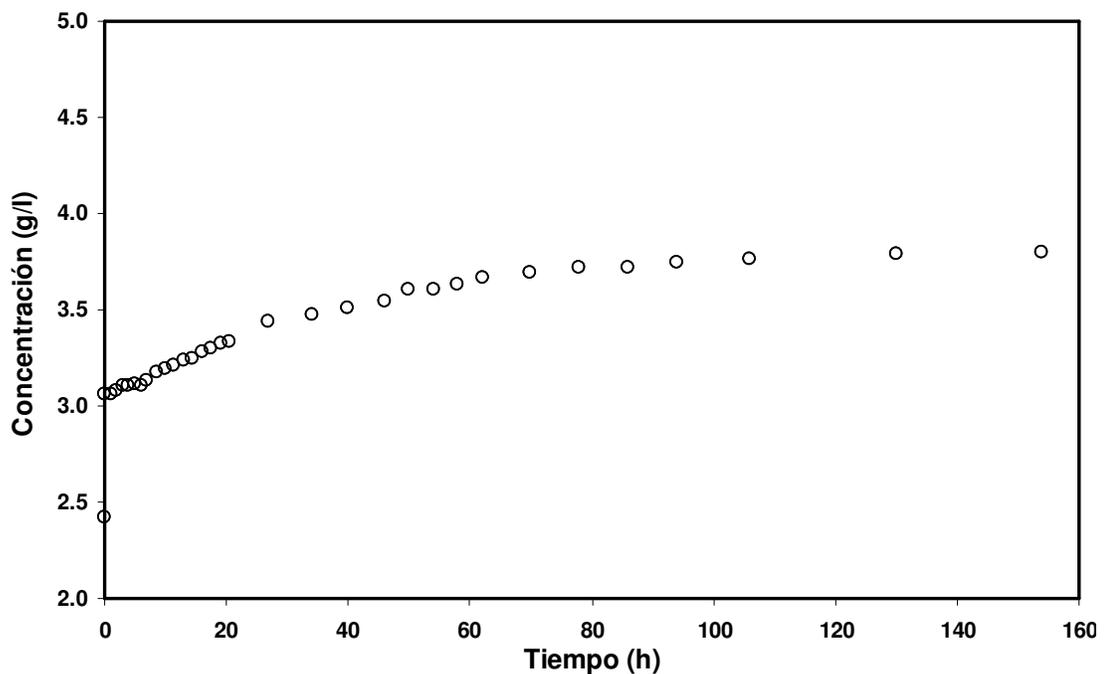
**Figura 5.20. Evolución de la conductividad eléctrica del agua en dS/m.**

De acuerdo con Villareal y Bello (1964), la relación entre la conductividad eléctrica y la concentración es:

$$C = 640 \times CE \quad (5.131)$$

donde C es la concentración expresada en (mg/l) y CE es la conductividad eléctrica expresada en (dS/m) o (mmhos/cm).

Aplicando la ecuación (5.131) a los datos mostrados en la Figura 5.20, se obtiene la variación de la concentración a través del tiempo expresada en gramos por litro:



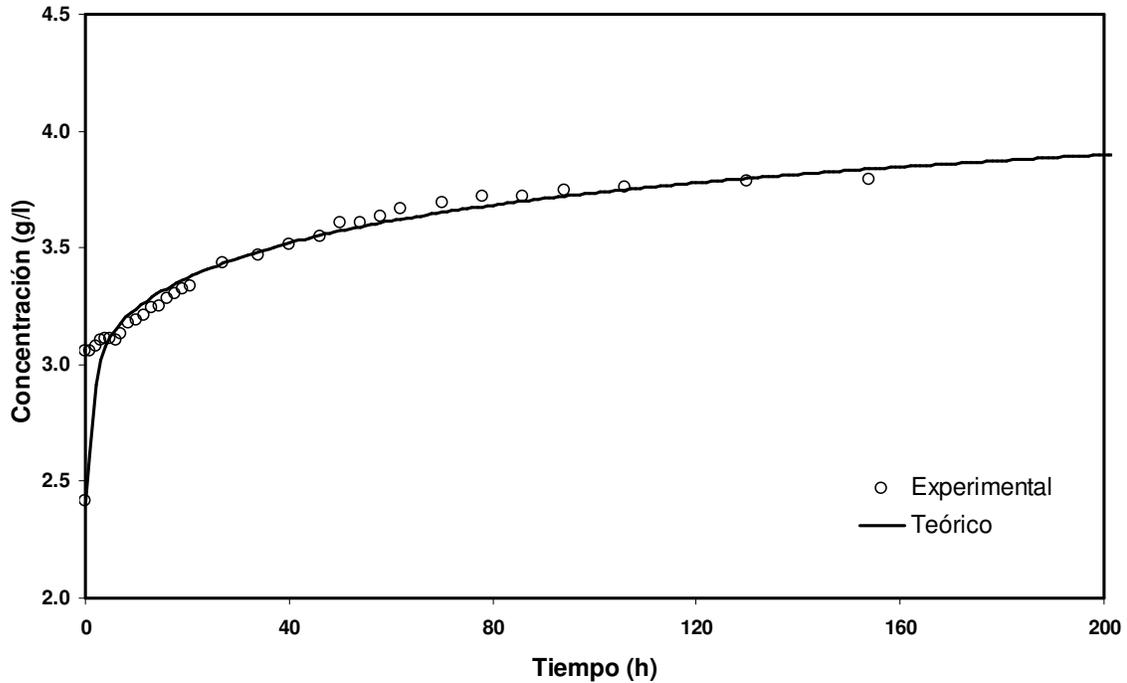
**Figura 5.21. Evolución de la concentración en g/l medida en el agua drenada.**

Utilizando la solución numérica para el transporte de solutos, acoplado a la ecuación de Boussinesq para simular el comportamiento de la concentración en el perfil del suelo, se utilizan los parámetros hidráulicos, obtenidos del análisis anterior. El valor desconocido de la solución, coeficiente de dispersividad ( $\lambda$ ), es estimado con el procedimiento de mínimos cuadrados. La condición inicial dada al sistema es la medida en la muestra inicial ( $C_{ini} = 2.4 \text{ g/l}$ ), tomada como constante en todo el sistema, y se estableció una condición de radiación en la frontera de los drenes.

Los parámetros que minimizan la suma de cuadrados de los errores ( $\lambda$  y  $\kappa_s$ ) con cada uno de los modelos de poro utilizados se muestran en el Cuadro 5.3, así como sus respectivos errores con respecto al modelo del poro grande y el error cuadrático medio de los valores observados y los medidos en el módulo de drenaje. La evolución de la concentración estimada con la solución en diferencias finitas y la concentración medida se muestran en la Figura 5.22. Es de importancia hacer notar que en la discusión de la solución en diferencias finitas para el transporte de solutos se comentó que el valor de  $\kappa_s$  debe de ser cero, sin embargo, debido a problemas en el esquema numérico se dejó como otro parámetro a optimizar, ya que su valor no debe de afectar el valor de la dispersividad.

**Cuadro 5.3. Valores de  $\lambda$  y  $\kappa_s$  obtenidos con los tres modelos de poro para el transporte de solutos, ajustando la concentración.**

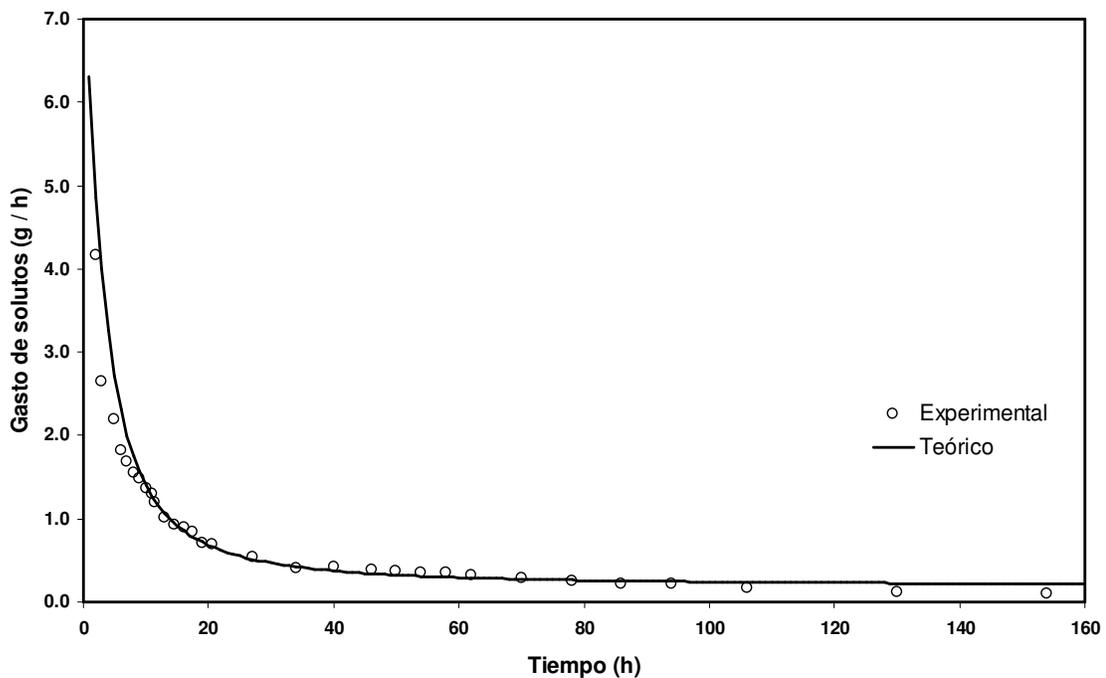
Modelo	$\lambda$	$\varepsilon_\lambda$	$\kappa_s$	$\varepsilon_{\kappa_s}$	ECM
	(cm)	(%)		(%)	(g/l)
<b>Poro de la Media Geométrica</b>	91.80	1.48	0.0632	1.23	0.1063
<b>Poro Neutral</b>	90.76	0.33	0.0637	0.46	0.0991
<b>Poro Grande</b>	90.46	0.00	0.0640	0.00	0.1227



**Figura 5.22. Evolución de la concentración de sales medida y estimada con la solución numérica.**

Los resultados mostrados en la Figura 5.22 indican que la estimación de la concentración de sales en los drenes en el tiempo es aceptable. Las diferencias entre la concentración estimada con la solución es mínima, esto se ve reflejado en el ECM. La evolución teórica de la concentración muestra que en los tiempos cortos, cuando el flujo de agua es mayor, la concentración del contenido de sales se incrementa fuertemente, y en los tiempos largos tiende a una asintota, lo cual indica que el sistema no puede continuar extrayendo sales del sistema. Sin embargo, como se ve en la Figura 5.22, en los tiempos largos el parámetro obtenido sobre estima los datos medidos. Cuenta tenida de lo anterior, se procedió a realizar una segunda optimización, pero ahora con la masa acumulada.

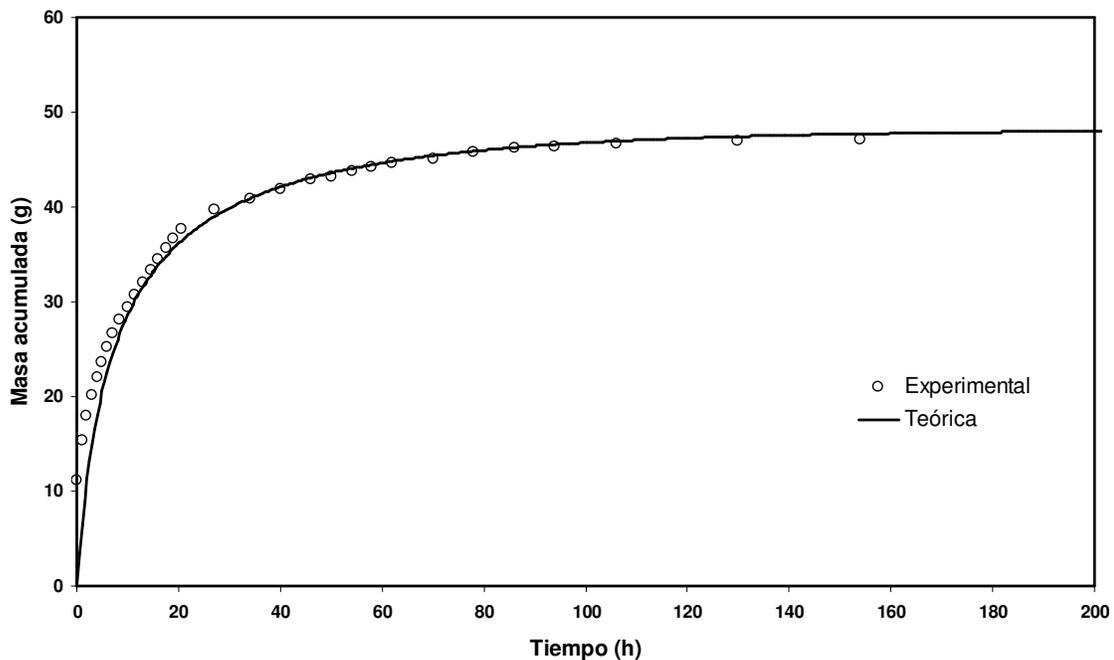
Para obtener la masa acumulada es necesario obtener el gasto de solutos. El gasto de solutos, Figura 5.23, es estimado multiplicando el gasto hidráulico por la concentración de sales medida en el intervalo de tiempo. Con el gasto de solutos, se estima la masa de solutos acumulada, multiplicando el gasto de solutos por el intervalo de tiempo (Figura 5.24). Con fines de ilustración, en la Figura 5.23 y Figura 5.24 se muestra solamente el ajuste realizado con el modelo del poro grande, ya que la evolución de la masa acumulada con el modelo del poro neutral y el poro de la media geométrica es similar.



**Figura 5.23. Gasto de solutos (g/h) del sistema de drenaje con el modelo del poro grande.**

Puede verse que las curvas teóricas reproducen de buena manera los datos experimentales. La discrepancia en algunas partes de la gráfica puede deberse al intervalo de tiempo en el que se realizó la medida del gasto y la concentración, pero en general, la reproducción de los datos experimentales con la solución es aceptable.

El error cuadrático medio para el gasto de solutos corresponde a  $ECM = 0.1842 \text{ g/l}$ , mientras que para la masa acumulada el error corresponde a  $ECM = 0.1104 \text{ g}$ . El gasto de solutos decrece rápidamente, de la tal manera que 20 horas después de haber iniciado el drenaje ha disminuido 5 órdenes de magnitud. En los tiempos largos, el comportamiento del gasto tanto teórico como experimental tiende a ser constante.



**Figura 5.24. Evolución de la masa acumulada con la solución numérica obtenida con el modelo del poro grande, optimizando  $\lambda$  y  $\kappa_s$ .**

Los resultados que minimizan la suma de cuadrados de los errores se muestran en el Cuadro 5.4, donde además se muestra el error cuadrático medio con respecto al modelo del poro grande. Puede verse que los valores de  $\lambda$  para esta optimización respecto a la anterior (concentración) tuvo un incremento del orden de 6 cm, mientras que el decremento de  $\kappa_s$  es del orden de 0.004, como se aprecia, el valor de  $\kappa_s$  tiende a cero.

El ajuste de los modelos con la masa acumulada nota un ligera mejoría con relación a la concentración, esto puede verse en la disminución de los valores del error cuadrático, esta disminución es debida a que a se toma en cuenta el gasto de los solutos por unidad de tiempo y la masa de solutos se va acumulando en el tiempo, mientras que en la concentración se tiene solamente una medida puntual en gramos por litro a intervalos de tiempo, y no la acumulada.

El error cuadrático medio obtenido con esta optimización es menor en los tres modelos de poro. El máximo error de  $\kappa_s$  con respecto al modelo del poro grande es el modelo del poro geométrico con un valor de 1.37 %, por lo que se puede concluir que no afecta de manera significativa. También, se aprecia que el error cuadrático medio obtenido entre la masa de sales acumulada teórica y experimental es menor en comparación con la estimación de los parámetros  $\lambda$  y  $\kappa_s$  utilizando la medida de la concentración. No obstante, utilizar la concentración de sales en el agua como primer estimador de los parámetros  $\lambda$  y  $\kappa_s$  por el método inverso es aceptable, ya que da una idea de los parámetros del sistema.

**Cuadro 5.4. Valores de  $\lambda$  y  $\kappa_s$  obtenidos con los tres modelos de poro para el transporte de solutos, ajustando la masa acumulada en el tiempo.**

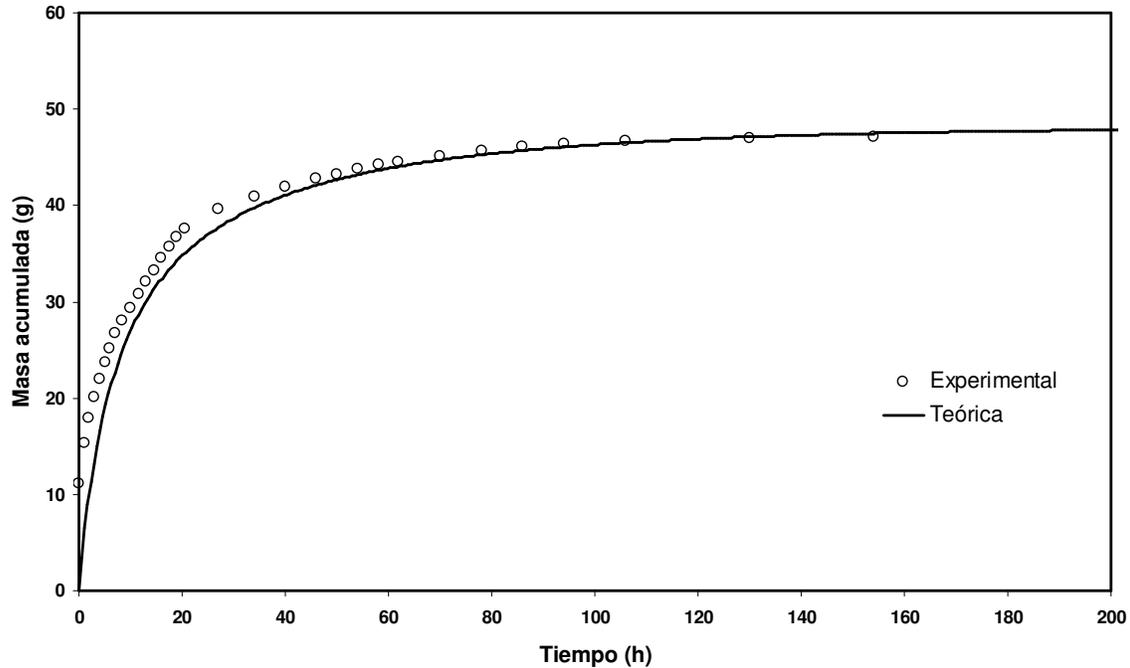
Modelo	$\lambda$	$\varepsilon_\lambda$	ECM
	(cm)	(%)	(g)
<b>Poro de la Media Geométrica</b>	98.03	1.59	0.1010
<b>Poro Neutral</b>	96.71	0.22	0.0932
<b>Poro Grande</b>	96.50	0.00	0.1104

Una tercera simulación se realiza fijando el valor de  $\kappa_s$  en 0.01, debido a que matemáticamente no afecta de manera sustancial el cálculo numérico. Los datos que se ajustaron corresponden a la masa de solutos acumulados, al igual que en la simulación anterior. Los resultados que minimizan la suma de cuadrados de los errores se muestran en el Cuadro 5.5, donde además se muestra el error de la dispersividad con respecto al modelo del poro grande.

Es de importancia hacer notar que el error cuadrático medio aumentó en un promedio de 0.4 cm, debido a que se fijó el valor de  $\kappa_s$  y se procedió a encontrar el valor de  $\lambda$ , sin embargo el valor de la dispersividad encontrada con la simulación no es la real, debido a los problemas en el cálculo de la derivada del transporte de solutos. De manera gráfica los resultados de la simulación pueden verse en la Figura 5.25, en la cual se ve que la concentración teórica subestima a la real en los tiempos cortos, y en los tiempos largos, tiende a estabilizarse.

**Cuadro 5.5. Valores de  $\lambda$  obtenidos con los tres modelos de poro para el transporte de solutos, ajustando la masa acumulada de solutos.**

Modelo	$\lambda$	$\varepsilon_\lambda$	$\kappa_s$	ECM
	(cm)	(%)		(cm)
<b>Poro de la Media Geométrica</b>	132.59	2.12	0.01	0.5077
<b>Poro Neutral</b>	130.23	0.29	0.01	0.5015
<b>Poro Grande</b>	129.85	0.00	0.01	0.4173



**Figura 5.25. Optimización de la masa acumulada con el modelo del poro grande, asumiendo el valor de  $\kappa_s$  como constante.**

### 5.13. El problema inverso: cálculo de la separación entre drenes

En las zonas agrícolas, el problema del manto freático somero afecta de manera directa o indirecta la cantidad y calidad de la producción de los cultivos. Los problemas de drenaje se presentan en dos situaciones: 1) La remoción del exceso de agua, que es más importante en las zonas húmedas, producto de que la precipitación es superior a la evapotranspiración de los cultivos; y 2) Los problemas de exceso de agua ya sea porque se tiene importantes pérdidas de agua al momento del riego o por la presencia de mantos freáticos someros.

Uno de los principales objetivos en el diseño de la red de drenaje consiste en calcular el espaciamiento entre drenes. La conductividad hidráulica saturada y la porosidad drenable son dos de los parámetros más importantes en el diseño. Justificaciones

técnicas y económicas de varios proyectos de diseño son basados en estos dos parámetros (Moustafa, 2000). Al momento de diseñar la red de drenaje con valores puntuales de los parámetros en campo ocasiona ciertos errores de cálculo (Schwab *et al.*, 1996), dada la alta variabilidad espacial de los parámetros de un punto a otro, por lo que el promedio de varias mediciones disminuye el error haciendo el diseños más cercano a la realidad, pero incrementa los costos para realizar el muestro (Ritter *et al.*, 2003). Sin embargo, en el diseño otro de los factores que se debe de tomar en cuenta es el tiempo máximo que un cultivo puede permanecer sin oxigenación en la zona radicular.

El número de horas que un cultivo puede permanecer bajo el agua, sin presentar daños colaterales, está en función de factores como el tipo y la edad del cultivo y condiciones meteorológicas. El abatimiento del nivel freático es la variable más importante a controlar en los sistemas de drenaje, el cuál se hace mediante el cálculo óptimo de la separación entre drenes, que se realiza mediante el problema inverso. De manera general, en el Cuadro 5.6, se muestran algunas recomendaciones generales del tiempo máximo de inundación permisible para los cultivos:

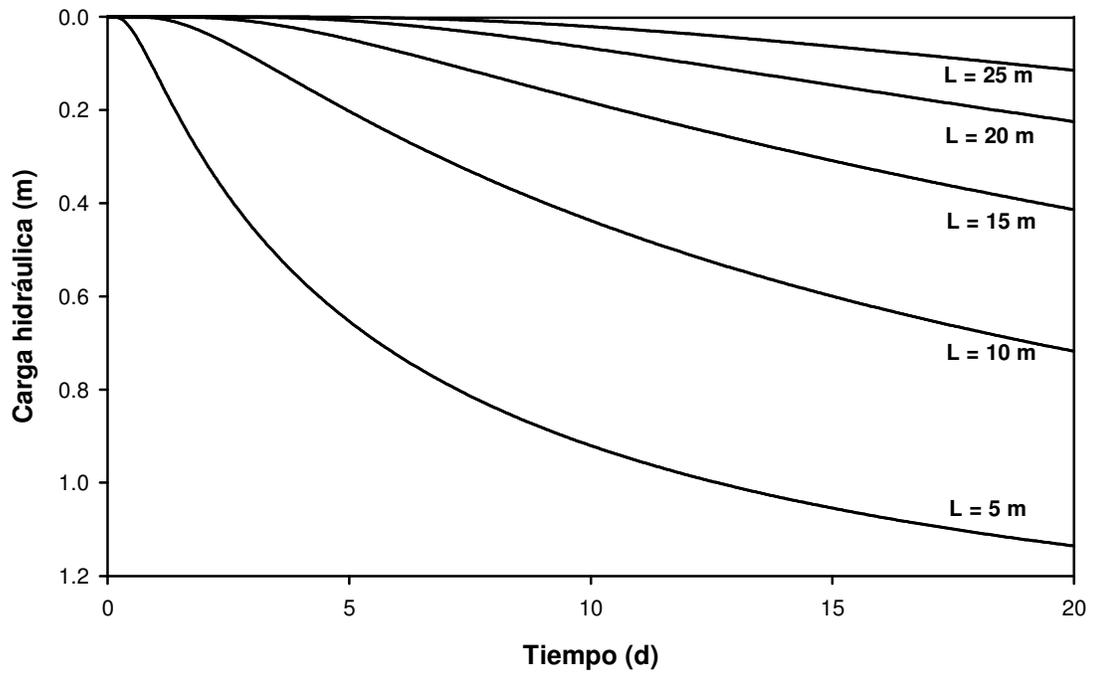
**Cuadro 5.6. Tiempo de inundación permisible en cultivos**

<b>Cultivos</b>	<b>Tiempo de inundación permisible (horas)</b>
Fresas, hortalizas delicadas	0
Hortalizas, leguminosas	6
Granos	12-24
Forrajes y pastos	72

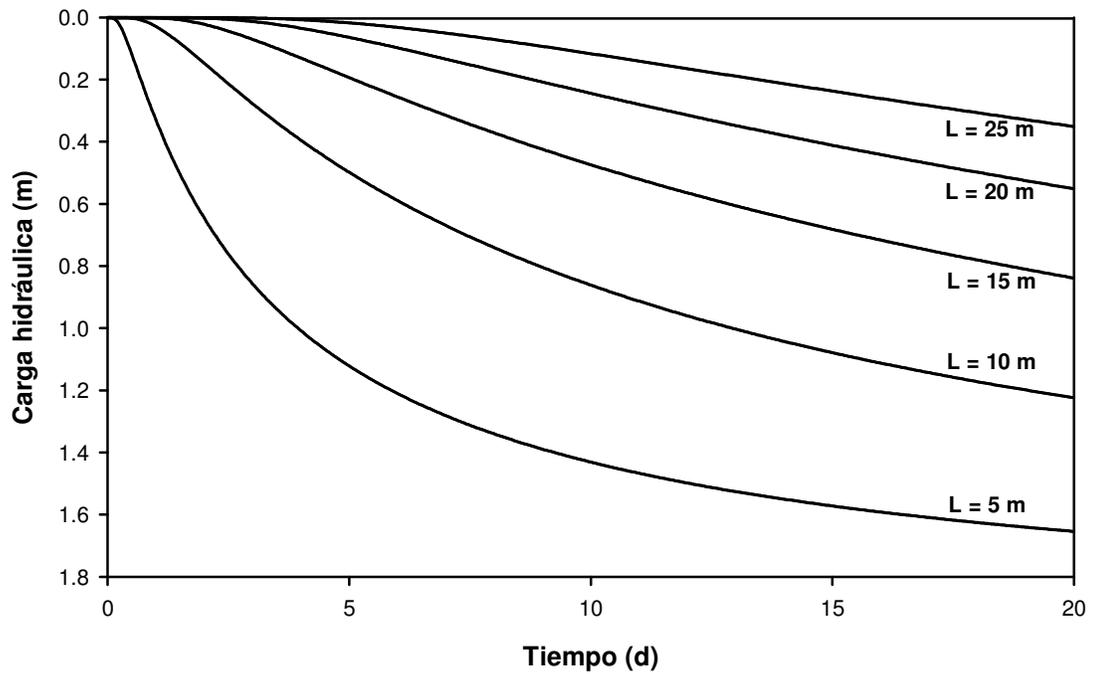
El problema inverso consiste en calcular la separación entre drenes que se necesita para abatir el manto freático a la mitad de la separación entre ellos hasta una profundidad establecida en un periodo de tiempo fijo. En el diseño de los sistemas de drenaje agrícola subterráneo, se considera el abatimiento a la mitad de separación entre los drenes, porque a esta distancia se presenta la profundidad mínima del manto freático.

El suelo que se pretenda estudiar, debe de ser caracterizado hidráulicamente mediante la metodología propuesta en la presente investigación, para así proceder a la simulación del comportamiento del abatimiento del manto freático. Las variables con las que se realiza la simulación serán la separación entre drenes y la profundidad de instalación de los mismos. Para ilustrar este problema inverso, se considerará el suelo utilizado en la presente investigación, ya que se han estimado sus características hidrodinámicas y parámetros hidráulicos:  $\theta_s = 0.5695 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $K_{sd} = 1.5458 \text{ cm/h}$ ,  $\psi_{dd} = 143.87 \text{ cm}$ ,  $m = 0.3410$ ,  $s = 0.7083$  y  $\kappa = 0.0616$ . Como condición de frontera se utiliza la radiación fractal con capacidad de almacenamiento variable con las relaciones funcionales de la ecuación de van Genuchten (1980) y el modelo de la media geométrica de Fuentes *et al.* (2001a).

En la Figura 5.26 se muestra el perfil de abatimiento del nivel freático en el centro de a una profundidad de colocación de drenes de 1.50 metros y en la Figura 5.27 a una profundidad de 2.00 metros, ambas orientadas positivamente hacia abajo. Se realizaron varias simulaciones incrementando la distancia entre drenes en 5.00 metros, iniciando con una separación de 5.00 metros y hasta una máxima de 25.00 metros, para un tiempo de simulación de 500 horas. Los incrementos espacio temporales usados durante todo el proceso de simulación fueron  $\Delta z = 0.01 \text{ cm}$  y  $\Delta t = 2 \times 10^{-3} \text{ h}$ .



**Figura 5.26. Abatimiento del nivel freático en el centro de los drenes a distintas separaciones con una profundidad de drenes de 1.50 metros**



**Figura 5.27. Abatimiento del nivel freático en el centro de los drenes a distintas separaciones con una profundidad de drenes de 2.00 metros**

En la Figura 5.26 y en la Figura 5.27 puede verse que el perfil de abatimiento al centro de los drenes es proporcional a la separación entre ellos, es decir, a menor separación entre drenes, el tiempo de abatimiento del nivel freático es más rápido y viceversa, por lo que la separación entre drenes estará en función del tipo de cultivo que se quiera proteger, ya que a menor separación aumenta el costo de instalación.

#### **5.14. Simulación de lavado de suelos salinos**

Para recuperar los suelos salinos es necesaria la aplicación de riegos con la finalidad de que las sales se transporten a horizontes más profundos que ya no dañen a las raíces y que sean evacuados a otras zonas por medio de la red de drenaje. Sin embargo, antes de proceder al lavado del suelo, es necesario conocer el tipo de sales presentes y la concentración con la que se encuentran. El análisis que permite conocer el nivel de salinidad en la conductividad eléctrica, que nos dará una idea del grado de salinidad que está presente en el suelo, y la lámina de agua a aplicar para llevarlo a una concentración dada. El aumento de la salinidad en el suelo disminuye la productividad en los cultivos sembrados, y un aumento ligero puede limitar la siembra de ciertos cultivos en la zona. En el Cuadro 5.7 se muestra la salinidad crítica en la cual los cultivos no tienen pérdidas en el rendimiento y el porcentaje de disminución del mismo al aumentar la conductividad en el perfil del suelo (Feuchter, 2000).

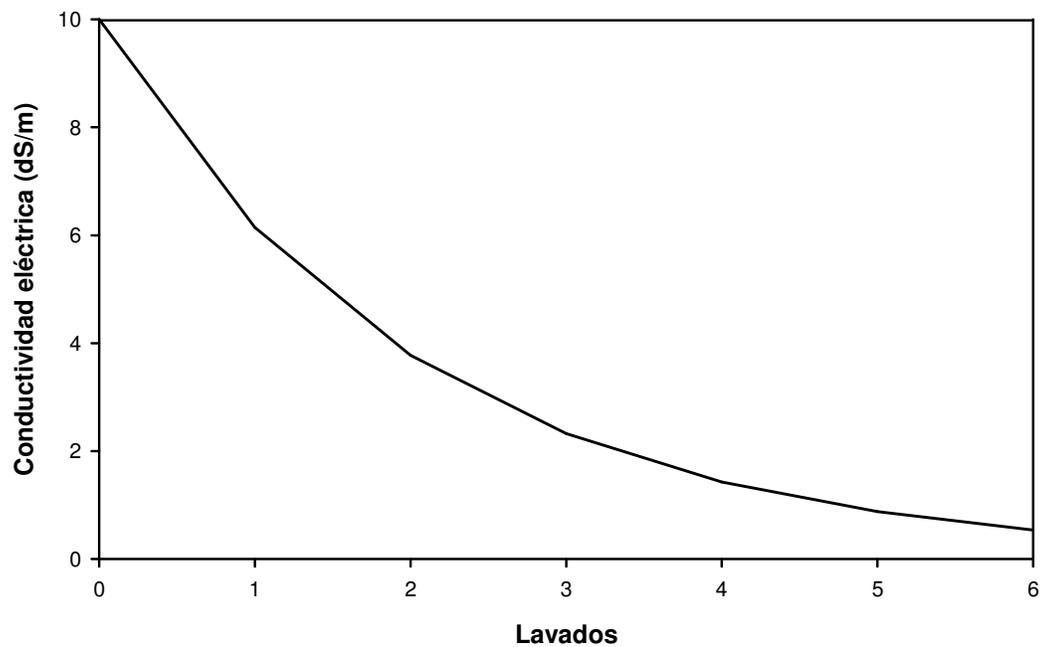
Con fines de ilustrar el lavado de sales en el suelo aplicando la solución en diferencias finitas para el transporte de sales, se supone un suelo hipotético a una concentración inicial y se encuentra el número de riegos que se deben de aplicar para llevarlo a una concentración dada. Con la concentración inicial del suelo propuesta se inicia la simulación, la concentración promedio final que se obtiene en el perfil al término de la primera simulación, es la concentración inicial en el sistema para la siguiente simulación, y así sucesivamente.

**Cuadro 5.7. Efecto de la salinidad sobre la productividad de los cultivos del Distrito de Riego 038, Río Mayo, Sonora.**

Cultivo	Salinidad Crítica	CE	Decremento en la producción	CE	Decremento en la producción
	dS/m	dS/m	%	dS/m	%
Frijol	1.0	2.0	3.5	3.0	18.9
Chile	1.5	2.5	5.0	3.5	14.1
Papa	1.7	2.7	6.0	3.7	12.0
Maíz	1.8	2.8	8.5	3.8	7.4
Alfalfa	2.0	3.0	9.0	4.0	7.3
Calabaza	2.5	3.5	5.0	4.5	16.0
Pepino	2.5	3.5	6.5	4.5	13.0
Chicharo	2.5	3.5	7.0	4.5	10.0
Tomate	2.5	3.5	8.0	4.5	9.9
Sorgo	4.8	5.8	12.0	6.8	8.0
Trigo	6.0	7.0	13.0	8.0	7.1
Cártamo	6.5	7.5	12.0	8.5	5.5
Algodón	7.7	8.7	17.0	9.7	5.0
Cebada	8.0	9.0	18.0	10.0	5.0
Pastos	8.5	9.5	20.0	10.5	4.5

En el Figura 5.28 se muestra la disminución de la concentración de sales en el perfil de suelo, partiendo de una concentración inicial  $C_{ini} = 10$  dS/m. Los valores mostrados son un promedio de la concentración en el perfil del suelo en el primer metro. Las características hidráulicas del suelo dado son las utilizadas en la sección anterior con una profundidad de los drenes de 2.00 metros. Las simulaciones se realizan con distancias entre drenes de 5.00, 10.00, 15.00, 20.00 y 25.00 metros. Puede verse que la disminución de la concentración de sales en el perfil del suelo es similar en todas las separaciones entre drenes al aplicar 6 lavados. Sin embargo, el tiempo de drenado en cada uno de los sistemas es diferente, ya que en un tiempo de

5 días en el sistema con separación a 5 metros el perfil del nivel freático ha bajado más de un metro, mientras que en el sistema con separación entre drenes de 25 metros este nivel ha disminuido solo unos centímetros (ver Figura 5.27), de otra manera, el tiempo de drenado del suelo para una distancia de 5 metros es de 20 días, mientras que para la separación de 25 metros es de 85 días.



**Figura 5.28. Evolución de la concentración de sales en el suelo al aplicar los lavados**

Finalmente, para el diseño de los sistemas de drenaje parcelario en sitios con problemas de salinidad, es necesario tener en consideración la concentración inmediata de sales a la que quiere llevar al suelo para poder sembrar un determinado cultivo, ya que una mala elección en el cálculo de la separación entre drenes puede ocasionar que la disminución de la concentración de sales en el perfil producto del lavado del suelo tarde mas de lo esperado.

## 6. CONCLUSIONES

Los procesos de infiltración y drenaje fueron modelados con las ecuaciones de Richards y Boussinesq respectivamente, las cuales se resolvieron utilizando el método de diferencias con un esquema implícito. Este mismo esquema fue adaptado para resolver la ecuación de advección-dispersión para modelar el transporte de sales.

En las ecuaciones intervienen las características hidrodinámicas, es decir, la curva de retención que relaciona la presión del agua con el contenido volumétrico de agua en el suelo, y la curva de conductividad hidráulica que relaciona la conductividad de la ley de Darcy con el contenido volumétrico de agua o la presión de la misma en el suelo; se adoptaron para su representación algebraica la ecuación propuesta por van Genuchten para la primera y modelos fractales para la segunda. Los parámetros que intervienen en estas representaciones algebraicas se estimaron mediante la aplicación de una metodología basada en la curva granulométrica y problemas inversos. Los parámetros se clasificaron como parámetros de forma ( $m$ ) y parámetros de escala ( $K_s$  y  $\psi_d$ ), el primero fué estimado con la curva granulométrica y los segundos con problemas inversos. Aunados a estos parámetros, se presenta parámetro relacionado con la condición de radiación impuesta en los drenes en la ecuación de Boussinesq, el cual representa una conductancia adimensional ( $\kappa$ ) que permite transferir el agua del suelo a la atmósfera.

Los parámetros de escala  $K_s$  y  $\psi_d$ , el primero la conductividad hidráulica saturada en el proceso de infiltración y el segundo la escala de presión en el mismo, se estimaron utilizando un algoritmo de optimización no lineal a partir de datos medidos de la lámina infiltrada en una prueba de infiltración y la solución numérica de la ecuación

unidimensional de Richards. Los resultados obtenidos con los modelos fractales de conductividad reprodujeron de buena manera la lámina infiltrada medida.

La diferencia mínima de los valores de la conductividad hidráulica a saturación de  $K_s$  obtenidos con los diferentes modelos de conductividad hidráulica indica que los tres modelos empleados describen de buena manera el estado permanente, y que el empleo de cualquiera de ellos en la caracterización hidrodinámica de los suelos es recomendable.

En la solución de la ecuación unidimensional de Boussinesq del drenaje agrícola se presentaron dos esquemas numéricos para la discretización de la derivada temporal, la cual representa el cambio de almacenamiento. En uno aparecen de manera explícita la carga y la porosidad drenable, variables ligadas con una relación funcional, que se ha denominado esquema mixto; en el otro aparece sólo la carga hidráulica, denominado esquema en carga. Los dos esquemas coinciden cuando la porosidad drenable es independiente de la carga.

La validación de ambos esquemas fue realizada mediante la comparación de las mismas con una solución analítica reportada en la literatura para formas particulares de la porosidad drenable y la transmisibilidad. Las evoluciones de la carga de agua en el perfil y la lámina drenada calculadas con la solución analítica son similares, bajo un criterio de error, a las calculadas con la solución numérica para todo tiempo. La ausencia de fluctuaciones tanto en el tiempo como en el espacio de la carga y de la lámina drenada permite recomendar los esquemas numéricos propuestos, para el estudio de la dinámica del agua en los sistemas de drenaje agrícola subterráneos en condiciones más generales.

Mediante el problema inverso, la reproducción de la lámina drenada con la ecuación de Boussinesq se realizó estimando el coeficiente de conductancia adimensional, fijando en una primera etapa los parámetros de escala obtenidos en el proceso de infiltración a través de la ecuación de Richards. Sin embargo, la lámina drenada teórica no reprodujo de manera satisfactoria la lámina drenada medida, por lo que se procedió a hacer la optimización de tres parámetros; es decir la conductancia adimensional y los parámetros de escala de las características hidrodinámicas. Los valores obtenidos en el proceso de drenaje fueron diferentes a los estimados en el proceso de infiltración, lo cual evidencia que existe un fenómeno de histéresis en el suelo.

En la ecuación de advección-dispersión para modelar la evolución temporal de la concentración de las sales evacuadas por el sistema de drenaje se presenta el parámetro de dispersividad ( $\lambda$ ). Mediante el problema inverso, la reproducción de la concentración de sales totales con la ecuación advección-dispersión se realizó estimando el parámetro de dispersividad en una primera etapa, usando los parámetros de escala obtenidos en el proceso de drenaje. El valor obtenido del coeficiente de dispersividad se mantuvo estable independientemente de los modelos utilizados para representar las características hidrodinámicas.

El sistema de ecuaciones acoplados, reproduce de manera satisfactoria los datos medidos, tanto en los tiempos cortos, donde se la variación de la concentración es fuerte, como en los tiempos largos donde los valores de la concentración tienden a una asíntota. Este valor asíntótico de la concentración depende de la separación entre drenes del sistema de drenaje agrícola subterráneo.

En una segunda etapa se realizó optimizando la masa acumulada. Esta optimización fue superior, en cuanto al criterio de error cuadrático medio entre los valores teóricos

y experimentales, con relación a la optimización realizada con la concentración. Debido a que ésta última es una propiedad integrada en el tiempo y la concentración es observada a niveles puntuales.

Finalmente, una vez realizada la calibración de los parámetros del sistema se presentaron simulaciones del abatimiento del nivel freático para diferentes separaciones entre drenes, con la finalidad de dar escenarios posibles para eliminar los excesos de agua y mantener a las plantas en optimas condiciones. Además, de que se mostró la disminución de la concentración de sales en el perfil del suelo como función del número de lavados del mismo. Escenarios que indican que en el diseño de los sistemas de drenaje también es importante considerar el estado final de la salinidad en el medio poroso para el desarrollo adecuado de los cultivos.

Los resultados presentados muestran que para el diseño de la red de drenaje, se debe de tomar en cuenta el grado de salinización presente en el suelo así como tener en cuenta la concentración inmediata a la que se requiere llevar el perfil del suelo después de instalado el sistema de drenaje. Lo anterior es para que los cultivos elegidos a plantar tengan un óptimo crecimiento.

En consecuencia, la metodología propuesta, formada por la resolución de las ecuaciones diferenciales de los procesos de transferencia de agua y transporte de solutos, y la caracterización hidrodinámica del suelo en un sistema de drenaje agrícola subterráneo, será una herramienta útil para el diseño de nuevos sistemas que permitan el desarrollo óptimo de los cultivos en función de sus necesidades hídricas y del grado de tolerancia a la salinidad.

## 7. REFERENCIAS

- Ahuja, L.R., S.A. El - Swaify y A. Rahman. 1976. Measuring hydrologic properties with a double-ring and multiple-depth tensiometers. *Soil. Sci. Soc. Am. J.* 40:494-499.
- Augeard, B., S. Assouline, A. Fonty, C. Kao, y M. Vauclin. 2007. Estimating hydraulic properties of rainfall-induced soil surface seals from infiltration experiments and X-ray bulk density measurements. *Journal of Hydrology.* 341: 12-26.
- Averyanov, S.F. 1950. About permeability of subsurface soils in case of incomplete saturation. Engineering Collection, VII, as quoted by P. Ya. Polubarinova Kochina. *The theory of ground water movement.* Princeton University, Princeton, New Jersey.
- Basha, H.A., 1999. Multidimensional linearized nonsteady infiltration with prescribed boundary conditions at the soil surface. *Water Resour. Res.* 35: 75-83.
- Baver, L.D., W.H. Gardner, y W.R. Gardner. 1972. *Física de suelos.* UTEHA. Primera edición. México.
- Boussinesq, J. 1904. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. *J. Math. Pure. Appl.* 5me. Ser. 10: 5-78.
- Bouwer H. 1964. Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters in flow system analysis. *Water Resources Research.* 36: 411-424.
- Braddock, R.D., J.-Y Parlange, y H. Lee. 2001. Application of a simple soil water hysteresis model to the power models of soil water relationship. *Transport y Porous Media.* 44: 407-420.

- Brebbia, C.A., y S. Walker. 1980. Boundary Element Techniques in Engineering. Newnes-Butterworths. London. 210 pp.
- Broadbridge, P., y I. White. 1988. Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model. 1. Analytic solution. *Water Resour. Res.* 24: 145-154.
- Brooks, R.H., y A.T. Corey. 1964. Hydraulic properties of porous media, in *Hydrol. Pap.* 3. Colo. State Univ. Fort Collins.
- Brutsaert, W. 1966. Probability laws for pore-size distributions. *Soil Sci.* 101: 85-92.
- Brutsaert, W. 1976. The concise formulation of diffusive sorption of water in a dry soil. *Water Resources Research.* 12: 1118-1124.
- Burdine, N.T. 1953. Relative permeability calculations from pore-size distribution data, *Petroleum Trans.* 198: 71-78.
- Celia, M.A., E.T. Boulountas, y R.L. Zarba. 1990. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research.* 26: 1483-1496.
- Chen, J.M., y Y.C. Tan. 2005. Analytical Solutions of infiltration process under ponding irrigation. *Hydrological Processes.* 19: 3593-3602.
- Chen, J.M., Y.C. Tan, y Chu-Hui. 2003. Analytical solutions of one-dimensional infiltration before and after ponding. *Hydrol. Process* 17: 815-822.
- Chen, J.M., Y.C. Tan, Chu-Hui, y J.-Y. Parlange. 2001. Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes. *Water Resour. Res.* 37: 1091-1093.
- Childs, E.C. 1967. Soil moisture theory. *Adv. Hydrosc.* Academic Press. New York. 5: 73-117.
- Childs, E.C. 1969. An introduction to the physical basis of soil water phenomena. John Wiley and Sons Ltd. New York.

- Childs, E.C., y N. Collis-George. 1950. The permeability of porous materials. Proc. Roy. Soc. Ser. 201: 392-405.
- Clapp, R.G., y G.M. Horberger. 1978. Empirical equation for some soil hydraulic properties. Water Resources Res. 14(4): 601-604.
- CONAGUA. 2010. Estadísticas del Agua en México. México. D.F. pp. 17-117.
- Crank, J. 1956. The mathematics of diffusion, Oxford Univ. Press, Londres y Nueva York.
- Darcy, H. 1856. Dètermination des lois d'écoulement de l'eau à travers le sable. *In* Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. Victor Dalmont, Paris. pp. 590-594.
- Downer, C.W., y F.L. Ogden. 2004. Appropriate vertical discretization of Richards' equation for two-dimensional watershed-scale modelling. Hydrological Process, 18: 1-22.
- Dumm, L. 1954. Drain spacing formula. Agricultural Engineering. 35: 726-730.
- El-Kadi Al., y G. Ling. 1993. The Courant and Peclet number criteria for the numerical solution of the Richards equation. Water Resources Research. 29(10): 3485-3494.
- Farrel, D.A., y W.E. Larson. 1972. Modeling the pore structure of porous media. Water Resources Res. 8: 699-706.
- Feddes, R.A., P. Kabat, P.J.T. Van Bakel, J.J.K. B. Bronswijk, y J. Halbertsma. 1988. Modelling soil water dynamics in the unsaturated zona- state of the art. Journal of Hydrology. 100:69-111.
- Feuchter, A.F.R. 2000. Rescate de suelos salinos mediante bioingeniería. Centro Regional Universitario del Noreste. Universidad Autónoma Chapingo. Ciudad Obregón, Sonora. México.
- Fragoza, F., C. Fuentes, M. Zavala, F. Zataráin, H. Saucedo, y E. Mejía. 2003. Drenaje agrícola subterráneo con capacidad de almacenamiento variable. Ingeniería Hidráulica en México. 18 (3): 81-93.

- Fuentes, C. 1985. El potencial de presión y la conductividad hidráulica: análisis y predicción. Tesis de Ingeniero Agrónomo Especialista en Irrigación. Departamento de Irrigación. Universidad Autónoma Chapingo. Texcoco, Estado de México.
- Fuentes, C. 1992. Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés. Tesis de Doctorado en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia.
- Fuentes, C., A.C.D. Antonino, J. Sepúlveda, F. Zataráin, y B. De León. 2003. Predicción de la conductividad hidráulica relativa de los suelos con modelos fractales. Ingeniería hidráulica en México. 18 (4): 31-40.
- Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp. 2001a. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. Ingeniería hidráulica en México. 16 (2): 119-137.
- Fuentes, C., J.-Y. Parlange, R. Haverkamp, y M. Vauclin. 2001b. La solución cuasi-lineal de la infiltración vertical. Ingeniería Hidráulica en México. 16 (4): 25-33.
- Fuentes, C., M. Zavala, y H. Saucedo. 2009. Relationship between the Storage Coefficient and the Soil-Water Retention Curve in Subsurface Agricultural Drainage Systems: Water Table Drawdown. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. 135 (3): 279-285.
- Fuentes, C., R. Haverkamp, y J.-Y. Parlange. 1992. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. Journal of Hydrology. 134: 117-142.
- Fuentes, C., R. Namuche, L. Rendón, R. Patrón, O. Palacios, F. Brambila, y A. González. 1997. Solución de la ecuación de Boussinesq del régimen transitorio en el drenaje agrícola bajo condiciones de radiación: el caso del Valle del Carrizo, Sinaloa. Hermosillo, México: VII Congreso Nacional de Irrigación. pp. 3.141-3.145.
- Fujita, H. 1952. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II. Textil Research Journal. 22: 823-827.

- Gardner, W.R. 1958. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.* 85: 228-232.
- Gardner, W.R., y M.S. Mayhugh. 1958. Solutions en tests of the diffusion equation for movement of water in soil. *Soil Sci. Am.Proc.* 22: 197-201.
- Gee G.W., y A.L. Ward. 1999. Innovations in two-phase measurements of hydraulic properties. In: M. Th. Van Genuchten, F. J. Leij, y L. Wu (eds.) *Proceedings*.
- Green, W.H., y G.A. Ampt. 1911. *Studies on Soil Physics*. 1. Flow of air and water through soils. *J. Agric. Sci.* 4: 1-24.
- Groenevelt, P.H., y J.W. Kijne. 1979. *Physics of soil moisture*. Chapter 5. In: *Drainage principles and applications*. Publication 16. ILRI. Wageningen.
- Haverkamp, R. 1983. *Résolution de l'équation de l'infiltration de l'eau dans le sol. Approches analytiques et numériques*. Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.
- Haverkamp, R., Bouraoui F, Zammit C., y R. Angulo-Jaramillo. 1998. Soil properties and moisture movement in the unsaturated zone. In *The Handbook of Groundwater Engineering*, Delleur J (ed.). CRC Press: 5.1-5.50.
- Haverkamp, R., F.J. Leij, C. Fuentes, A. Sciortino, y P.J. Ross. 2005. Soil water retention: I. Introduction of a shape Index. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 69: 1881-1890.
- Haverkamp, R., Parlange J.-Y., Starr J.L., Schmitz G., y C. Fuentes. 1990. Infiltration under ponded conditions: 3. A predictive equation based on physical parameters. *Soil Sci.*, 149(5): 292-300.
- Haverkamp, R., y M. Vauclin. 1981. A comparative study of three forms of the Richards equation used for predicting one dimensional infiltration in unsaturated soil. *Soil Sci. Am. J.* 45: 113-120.

- Haverkamp, R., y J.-Y. Parlange. 1986. Predicting the water-retention curve from particle-size distribution: 1. Sandy soils without organic matter. *Soil Sci.* 142: 325-339.
- Hillel, D. 1971. *Soil and Water: Physical principles and processes*. Academic Press, New York.
- Hogarth, W.L., Parlange, J.-Y., y J. Norbury. 1992. Addendum to "First integrals of the infiltration equation". *Soil Sci.* 154, 341-343.
- Hogarth, W.L., Parlange, J.-Y., y R.D. Braddock. 1989. First, integrals of the infiltration equation, 2, nonlinear conductivity. *Soil Sci.* 148 (3), 165-171.
- Hogarth, W.L., y J.-Y. Parlange. 2000. Application and improvement of a recent approximate analytical solution of Richards' equation. *Water Resour. Res.* 36: 1965-1968.
- Hooghoudt, S. 1940. Bijdrage tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van der grond. *Verslag and Bouwk Onderzoek.* 46 (7): 515-707.
- Hopmans J.W., y J. Simunek. 1999. Review of inverse estimation of soil hydraulic properties. En: M. Th. Van Genuchten, F. J. Leij, y L. Wu (eds.) *Proceedings International Workshop Characterization and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media*. Pp. 643-660. University of California, Riverside CA.
- Hornung, U., y W. Messing. 1981. Simulation of two-dimensional saturated / unsaturated flows with an exact water balance. In: Verruijt, A., Barends, F.B.J. (Eds.), *Flow and Transport in Porous Media*. Balkema, Rotterdam, pp. 91-96.
- Horton, R.E. 1940. An approach towards a physical interpretation of infiltration capacity. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 5: 399-417.
- Jacques, D., B.P. Mohanty, y J. Feyen. 2002. Comparison of alternative methods for deriving hydraulic properties and scaling factors from single-disc tension infiltrometer measurements. *Water Resour. Res.* 38:25.1-25.14.

- Jarvis, N.J., L. Zavattaro, K. Rajkai, W.D. Reynolds, P.A. Olsen, M. McGechan, M. Mecke, B. Mohanty, P.B. Leeds-Harrison, y D. Jacques. 2002. Indirect estimation of near-saturated hydraulic conductivity from readily available soil information. *Geoderma*. 108: 1-17.
- Jhorar, R.K., J.C. van Dam, W.G.M. Bastiaanssen, y R.A. Feddes. 2004. Calibration of effective soil hydraulic parameters of heterogeneous soil profiles. *Journal of Hydrology*. 285: 233-247.
- Jury, W.A., W.R. Gardner, y W.H. Gardner. 1991. *Soil Physics*. John Wiley and Sons, Inc. U.S.A.
- King, L.G. 1965. Description of soil characteristics for partially saturated flow. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* 29:359-362.
- Klute, A. 1972. The determination of hydraulic conductivity and difusivity of unsaturated soils. *Soil Science*. 113: 264-276.
- Kool, J.B., J.C. Parker, y M.Th. van Genuchten. 1987. Parameter estimation for unsaturated flow and transport models - A review. *J. Hydrol.* 91: 255-293.
- Kostiakov, A.N. 1932. On the dynamics of the coefficient of waterpercolation in soils and on the necessity of studying it from a dynamic point of view for purposes of melioration. *Trans Com. Int. Soil Sci.* 6th. Moscow, Part A. pp. 17-21.
- Kunze, R.J., J.-Y. Parlange, y C.W. Rose, 1985. A comparison of numerical and analytical techniques for describing capillary rise. *Soil Sci.* 139: 491-496.
- Laliberti, G.E. 1969. A mathematical function for describing capillary pressure-desaturation data. *Bull. Int. Ass. Sci. Hydrol.* 14(2): 131-149.
- Langmuir, I. 1918. The adsorption of gases on plane surfaces of glass, mica, and platinum. *J. Am. Chem. Soc.* 40: 1361-1403.

- Lassabatère, L., R. Angulo-Jaramillo, J.M. Soria Ugalde, R. Cuenca, I. Braud, y R. Haverkamp. 2006. Beerkan estimation of soil transfer parameters through infiltration experiments-BEST. *Soil Science Society of America*. 70: 521-531.
- Leij F.J., y M.Th. van Genuchten. 1999. Characterization and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media. In. M. Th. Van Genuchten, F. J. Leij, y L. Wu (eds.) *Proceedings International Workshop Characterization and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media*. pp. 1-12. University of California, Riverside CA.
- Liu, S., W.D. Graham, y J.M. Jacobs. 2005. Daily potential evapotranspiration and diurnal climate forcing: influence on the numerical modelling of soil water dynamics and evapotranspiration. *Journal of Hydrology*. 309: 39-52.
- Mandelbrot, B. 1982. *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman and Company. 458 pp.
- Marquardt, D.W. 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11: 431-441.
- Menziani, M., S. Pugnaghi, y S. Vincenzi. 2007. Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions. *Journal of Hydrology*, 332: 214-225.
- Moral, F.J., Martínez, E., Marcos, A., Cuadros, F., y F. López. 2002. Determinación de las funciones hidráulicas de un suelo arenoso: 1. Curva de retención del agua. VI Congreso Internacional de Ingeniería de Proyectos. Barcelona.
- Moustafa, M.M. 2000. A geostatistical approach to optimize the determination of saturated hydraulic conductivity for large-scale subsurface drainage design in Egypt. *Agricultural Water Management*. 42: 291-312.
- Mualem, Y. 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resour. Res.* 12: 513-522.

- Neuman, S.P. 1973. Saturated-unsaturated seepage by finite elements. Proceedings of ASCE. Journal of Hydraulics. 2233-2250.
- Nielsen, D.R., J.W. Biggar, y K.T. Erh. 1973. Spatial variability of field-measured soil-water properties. Hilgardia. 42: 215-260.
- Pan, L., Warrick, A.W., y P.J. Wierenga. 1996. Finite elements methods for modelling water flow in variably saturated porous media: numerical oscillation and mass distributed schemes. Water Resources Research. 32: 1883-1889.
- Paniconi C, Aldam A.A., y E.F. Wood. 1991. Numerical evaluation of iterative and noniterative methods for the solution of the nonlinear Richards equation. Water Resources Research. 27(6): 1147-1163.
- Parlange J.-Y., R.D. Braddock, I. Lisle, y R.E. Smith. 1982. Three parameter infiltration equation. Soil Sci. 11: 170-174.
- Parlange, J.-Y. 1975. On solving the flow equation in unsaturated soils by optimization: horizontal infiltration. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., vol. 39: 415-418.
- Parlange, J.-Y., Barry, D.A., Parlange, M.B., Hogarth, W.L., Haverkamp, R., Ross, P.J., Ling, L., y T.S. Steenhuis. 1997. New approximate analytical technique to solve Richards equation for arbitrary surface boundary conditions. Water Resour. Res. 33: 903-906.
- Parlange, J.-Y., R. Haverkamp, y J. Touma. 1985. Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations. Soil Sci. 139: 305-311.
- Parlange, M.B., Prasad, S.N., Parlange, J.Y., y M.J.M. Romkens. 1992. Extension of the Heaslet-Alksne technique to arbitrary soil water diffusivities. Water Resour. Res. 28: 2793-2797.
- Philip, J. R. 1969. Theory of infiltration, Advances in hydroscience, V. T. Chow, ed., Academic, New York. Vol. 5, pp. 215-296.

- Philip, J.R. 1957. The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solutions. *Soil Sci.* 83: 345-357.
- Philip, J.R., 1960. General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation. *Aust. J. Phys.* 13, 1-12.
- Poiseuille, J.L. 1840. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* 12: 112-125.
- Poulovassilis, A. 1962. Hysteresis of pore water. An application of the concept of independent domains. *Soil Sci.* 93: 405-412.
- Poulovassilis, A., y E. Tzimas. 1975. The hysteresis in the relationship between hydraulic conductivity and soil water content. *Soil Sci.* 120(5): 327-331.
- Redinger, G.J., Campbell, G.S., Saxton, K.E., y R.I. Papendick. 1984. Infiltration rate of slot mulches: measurement and numerical simulation. *Soil Science Society of American Journal.* 48: 982-986.
- Richards, L. A. 1961. *Trans. 7th Inter. Congr. Soil Sci., Madison, Wisconsin.* Vol. 1: 67-69.
- Richards, L.A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics.* 1: 313-333.
- Rijtema, P.E. 1965. An analysis of actual evapotranspiration. *Agric. Res. Rep.* 659. Wageningen.
- Ritter, A., Hupet, F., Carpena, R.M., Lambot, S., y M. Van Clooster. 2003. Using inverse methods for estimating soil hydraulic properties from field data as an alternative to direct methods. *Agricultural Water Management.* 59: 77-96.
- Ross, P.J. 1990. Efficient numerical methods for infiltration using Richards' equation. *Water Resources Research.* 26 (2): 279-290.

- Ross, P.J. 2003. Modeling soil water and solute transport fast, simplified numerical solutions. *Agronomy Journal*. 95: 1352-1361.
- Ross, P.J., y J.-Y. Parlange. 1994. Comparing exact and numerical solutions of Richards' equation for one-dimensional infiltration and drainage. *Soil Science*. 157: 341-344.
- Rogowski, A.S. 1971. Watershed physics: Model of the soil moisture characteristic. *Water Resour. Res.* 17:1575-1582.
- Russell, T.F., y M.F. Wheeler. 1983. Finite element and finite difference methods for continuous flows in porous media. In R. E. Ewing, editor, *The Mathematics of Reservoir Simulation*, pp. 35-106. SIAM, Philadelphia, PA.
- Sander, G.C. J.-Y. Parlange, V. Kuhnelt, W.L. Hogarth, D. Lockington, y J.P.J. O'kane. 1988. Exact nonlinear solution for constant flux infiltration. *J. of Hydrology*. 97: 341-346.
- Saucedo, H., C. Fuentes, M. Zavala, y M. Vauclin. 2002. Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo. *Ingeniería hidráulica en México*. 17 (1): 5-17.
- Saucedo, H., P. Pacheco, C. Fuentes, y M. Zavala. 2003. Efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas. *Ingeniería Hidráulica en México*. 18 (4): 119-126.
- Schwab, G.O., Fangmeir, D.D., y W.J. Elliot. 1996. *Soil and Water Management systems*, Wiley. New York.
- Shukla, K.N., Chauhan H.S., y V.K. Srivastava. 1999. Transient drainage to partially penetrating drains in sloping aquifers. *Journal of Irrigation and Drainage*. 125 (5): 246-253.
- Simunek, J., Huang, K., y M.T. van Genuchten. 1998a. The HYDRUS code for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in

variably-saturated media. Version 6.0. No. 144, US Salinity Laboratory, USDA. ARS. Riverside.

Simunek, J., R. Angulo-Jaramillo, M.G. Schaap, J.-P. Vandervaere, y M.T. van Genuchten. 1998b. Using an inverse method to estimate the hydraulic properties of crusted soils from tension-disc infiltrometer data. *Geoderma*. 86: 61-81.

Singh, R.M., K.K. Singh, y S.R. Singh. Water table fluctuation between drains in the presence of exponential recharge and depth-dependent evapotranspiration. Technical Notes. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 133(2): 183-187.

Smirnova, T.G., Brown J.M., y S.G. Benjamin. 1997. Performance of different soil model configuration in simulating ground surface temperature and surface fluxes. *Monthly Weather Review*. 125: 1871-1884.

Sposito, G. 1981. *The thermodynamics of soil solutions*. Oxford University. Press Oxford.

Upadhyaya, A., y H.S. Chauhan. 2001. Falling water tables in horizontal/sloping aquifer. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 127(6): 378-384

Vachaud, G. 1969. Verification de la loi de darcy généralisée et détermination de la conductivité capillaire á partir d'une infiltration horizontale. Symposium 1966. *Water in the unsaturated zone. Proc. Unesco/IASH*: 277-294.

Van Dam, J.C., y R.A. Feddes. 2000. Numerical simulation of infiltration, evaporation and shallow groundwater levels with the Richards equation. *Journal of Hydrology*. 233: 72-85.

van Genuchten, M.Th. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of the unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 44: 892-898.

Varado N., Braud I., Ross P.J., y R. Haverkamp. 2006. Assessment of an efficient numerical solution of the 1D Richards' equation on bare soil. *Journal of Hydrology*. 323: 244-257.

- Vauchad, G. 1969. Verification de la loi de Darcy généralisée et détermination de la conductivité capillaire á partir d'une infiltration horizontale. Symposium. Water in the unsaturated zone. Proc. Unesco/IASH: 277-294.
- Villareal E., y S. Bello. 1964. La concentración y la conductividad eléctrica en soluciones acuosas de electrolitos. Revista Mexicana de Física. 13 (2): 55-74.
- Wang, Q.J., y J.C.I. Dooge. 1994. Limiting cases of water fluxes at the land surface. J. Hydrol. 155: 429-440.
- Warrick, A.W., 1975. Analytical solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation for arbitrary input. Soil Sci. 120: 79-84.
- Wösten, J.H.M., C.H.J.E. Schuren, J. Bouma, y A. Stein. 1990. Functional sensitivity analysis of four methods to generate soil hydraulic functions. Soil Sci. Soc. Am. J. 54:832-836.
- Zachmann, D.W., Duchateau, P.C., y A. Klute. 1982. Simultaneous approximation of water capacity and soil hydraulic conductivity by parameter identification. Soil Sci. 134:157-163.
- Zataráin F., C. Fuentes, V.O.L. Palacios, E.J. Mercado, F. Brambila, y N. Villanueva. 1998. Modelación del transporte de agua y de solutos en el suelo. Agrociencia. 32(4): 373-383.
- Zataráin Mendoza Felipe. 1996. Transporte unidimensional de agua y solutos en el suelo. Tesis de Maestría. Hidrociencias. Colegio de Posgraduados. México.
- Zavala, M., C. Fuentes, y H. Saucedo. 2003. Sobre la condición de radiación lineal en el drenaje de una columna de suelo inicialmente saturado. Ingeniería Hidráulica en México. 18 (2): 121-131.
- Zavala, M., C. Fuentes, y H. Saucedo. 2004. Radiación fractal en La ecuación de Boussinesq del drenaje agrícola. Ingeniería Hidráulica en México. 19 (3): 103-111.

- Zavala, M., C. Fuentes, y H. Saucedo. 2007. Nonlinear radiation in the Boussinesq equation of agricultural drainage. *Journal of Hydrology*. 332 (3): 374-380.
- Zavala, M., H. Saucedo, Namuche V.R., y P. Lázaro. 2008. Modelación del régimen de humedad y rendimiento de cultivos en suelos con drenaje. Proyecto Interno RD0803.1. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Cuernavaca Morelos, México. 106 pp.
- Zhang, Z.F., A.L. Ward, y G.W. Gee. 2003. Estimating soil hydraulic parameters of a field drainage experiment using inverse techniques. *Vadose Zone Journal*. 2: 201-211.
- Zienkiewicz, O.C., y C.J. Pareck. 1970. Transient field problems: two-dimensional analysis by isoparametric finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2: 61-71.