



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

SOBRE EL MÁXIMO DEL ANCHO  
DE LOS TRIÁNGULOS INSCRITOS  
EN FIGURAS CONVEXAS

TESIS

QUE COMO PARTE DE LOS REQUISITOS PARA  
OBTENER EL GRADO DE:

**Licenciado en Matemáticas Aplicadas**

PRESENTA:

**David Sánchez Ortiz**

DIRECTOR:

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Querétaro, Qro Junio 2016





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**SOBRE EL MÁXIMO DEL ANCHO DE LOS  
TRIÁNGULOS INSCRITOS EN FIGURAS CONVEXAS**

**TESIS**

QUE COMO PARTE DE LOS REQUISITOS PARA OBTENER EL  
GRADO DE:

**Licenciado en Matemáticas Aplicadas**

PRESENTA:

**David Sánchez Ortiz**

DIRECTOR:

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Handwritten signature of Dr. Jesús Jerónimo Castro.

SINODALES:

M. en C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

Handwritten signature of Víctor Antonio Aguilar Arteaga.

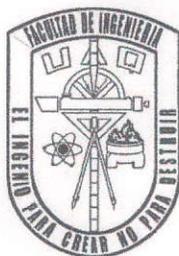
Dr. Francisco Gerardo Jiménez López

Handwritten signature of Francisco Gerardo Jiménez López.

M. en C. Roberto Torres Hernández

Handwritten signature of Roberto Torres Hernández.

Querétaro, Qro. Junio 2016





---

**Sobre el máximo del ancho de los  
triángulos inscritos en figuras  
convexas**

---

**David Sánchez Ortiz**



# Agradecimientos

---

Agradezco a mis padres por haberme instruido los valores necesarios para llegar a esta instancia, por brindarme su apoyo incondicional, así como su confianza y paciencia que fueron parte importante de mi formación. Les agradezco el interés que presentan ante los éxitos de cada miembro de la familia, pero sobretodo les agradezco la admiración que demuestran hacia mi, estoy muy orgulloso de ser su hijo y espero nunca defraudarlos.



# Introducción

---

El presente trabajo es una investigación enfocada al estudio de algunas propiedades de los conjuntos convexos, aquí se busca encontrar alguna relación entre el 3-ancho de un conjunto convexo y el ancho del mismo. Para determinar esta relación usaremos el número  $\lambda_3(K)$  ( $K$  es un conjunto convexo), que no es más que el cociente del ancho de la figura, sobre el 3-ancho de la misma. Como podrá notarse, esta es solo la versión particular de un problema más general que trata de determinar la relación entre el ancho de una figura con el  $n$ -ancho de la misma. Este ejercicio fue propuesto por el matemático griego G. Tsintsifas hace varias décadas, el problema original trata de encontrar cuál es el número más grande tal que el ancho de un polígono convexo multiplicado por dicho número es menor que el  $n$ -ancho del polígono. Esto se puede interpretar como la búsqueda de una cota superior del ancho en términos del  $n$ -ancho, en otras palabras, la búsqueda de  $\lambda_3(K)$ .

Varios investigadores han desarrollado soluciones particulares del problema y han conjeturado algunas proposiciones al respecto, pero siendo honestos los resultados encontrados le exigen demasiadas características al conjunto  $K$  y algunos no proporcionan una buena cota para el número  $\lambda_n(K)$ . Es cierto que varias de las conjeturas establecidas por otros autores ya han sido demostradas o descartadas, pero todavía quedan varias por analizar y nos quedan muchas cosas por conocer en este tema.

El interés para trabajar en esta área surge de lo gratificante que resulta resolver un problema del que se conocen muy pocos resultados, además es un problema

que parece ser muy simple, pero no lo es. Lo complejo de este asunto se le atribuye a lo complicado que resulta el cálculo del  $n$ -ancho de cualquier figura convexa, no es un número que se pueda predecir con facilidad y no existen los teoremas suficientes para poder calcularlo.

Nuestra investigación tiene como objetivo atacar este problema y encontrar una solución más general, aportando nuevas ideas y herramientas para desarrollar un mejor análisis en cada familia de figuras con las que trabajemos. Esto se pretende realizar adicionando herramientas computacionales para aproximarnos al  $n$ -ancho de una figura convexa. Como se menciona anteriormente este ejercicio es muy extenso y por ello nos limitaremos al caso  $n = 3$ , es decir, estudiaremos el número  $\lambda_3(K)$  a través del cálculo del 3-ancho de  $K$ .

---

# Contenido

---

<b>Dedicatoria</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Nociones básicas de geometría y convexidad</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos de conjuntos convexos . . . . .	1
1.2. Líneas soporte . . . . .	3
1.3. Ancho de una figura convexa . . . . .	6
1.4. El $n$ -ancho de figuras convexas . . . . .	11
<b>2. Antecedentes</b>	<b>13</b>
2.1. Cota superior para curvas convexas. . . . .	13
2.2. Cotas superiores para conjuntos finitos de puntos. . . . .	16

---

2.3. Algunos casos particulares . . . . .	19
<b>3. Cotas superiores para algunas clases de figuras convexas</b>	<b>29</b>
3.1. Curvas con centro de simetría . . . . .	29
3.2. Paralelogramos . . . . .	30
3.3. Polígonos regulares . . . . .	43
<b>4. Algoritmo para estimar <math>\lambda_3</math></b>	<b>49</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>55</b>
5.1. Curvas convexas . . . . .	55
5.2. Cuadriláteros . . . . .	56
5.3. Polígonos Regulares . . . . .	56

---

# Capítulo 1

## Nociones básicas de geometría y convexidad

---

### 1.1. Conceptos básicos de conjuntos convexos

Comenzaremos estableciendo algunos conceptos y teoremas necesarios para nuestra investigación, del mismo modo, introduciremos cierta notación que hará más cómoda la explicación.

**Definición 1.1.1.** *Decimos que un conjunto de puntos  $K \subset \mathbb{R}^2$  es una **figura**, si  $K$  es un conjunto compacto y tiene interior no vacío. Además, decimos que  $K$  es una **figura convexa** o **conjunto convexo** si para cualesquiera  $x, y \in K$  y cualquier  $\lambda \in [0, 1]$ , se cumple que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$ .*

La definición anterior se puede interpretar de esta manera: decimos que  $K$  es una figura convexa si al tomar  $A, B \in K$ , arbitrarios, el segmento  $AB$  está contenido en  $K$ .

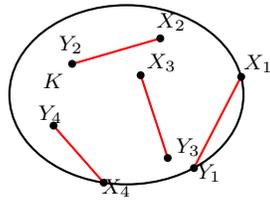


Figura 1.1: Figura convexa

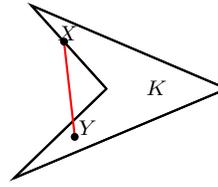


Figura 1.2: Figura no convexa

En la figura 1.1 tenemos un ejemplo de un conjunto convexo, ya que cualquier par de puntos contenidos en este conjunto contiene al segmento que los une. Por otro lado, en la figura 1.2 los puntos  $X$  y  $Y$  pertenecen a  $K$ , pero el segmento  $XY$  contiene puntos en el exterior de  $K$ . Para este caso el conjunto  $K$  no cumple la definición de convexidad.

**Definición 1.1.2.** Un **polígono convexo** es una figura convexa cuya frontera consiste únicamente de segmentos de línea (lados del polígono). Los puntos donde se intersectan dos segmentos se llaman **vértices**.

La familia de polígonos regulares cumple con la definición de polígono convexo, mientras que en la figura 1.2 tenemos un ejemplo de un polígono que no es convexo. Por otro lado, el conjunto que contiene un único punto en el plano cumple la definición de convexidad, a este tipo de conjuntos se les conoce como conjuntos convexos 0-dimensionales. Algunas curvas (rectas, semirectas y segmentos) también cumplen esta definición, y a esta familia de conjuntos se les conoce como conjuntos convexos 1-dimensionales; el resto de conjuntos convexos en el plano son llamados conjuntos convexos 2-dimensionales o simplemente figuras convexas.

Si  $K$  es una figura convexa, entonces  $K$  divide al plano en tres conjuntos:

1. Puntos exteriores a  $K$ : Aquellos para los que es posible dibujar una circunferencia que esté contenida en el complemento de  $K$ .
2. Puntos pertenecientes a  $K$ . Se dividen en:
  - a) Puntos interiores de  $K$ : Aquellos para los cuales es posible dibujar una circunferencia que esté contenida en  $K$ .

- b) Puntos frontera de  $K$ : Aquellos para los cuales cualquier circunferencia con centro en estos, contiene puntos interiores y puntos exteriores de  $K$ .

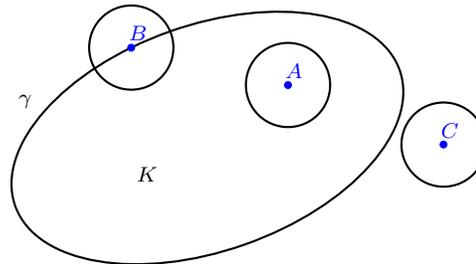


Figura 1.3: Punto interior ( $A$ ), frontera ( $B$ ) y exterior ( $C$ )

**Definición 1.1.3.** El conjunto de puntos interiores de una figura convexa es llamado **interior** de  $K$ , denotado por  $int(K)$ , el conjunto de puntos frontera de  $K$  es llamado **frontera** de  $K$ , denotado por  $Fr(K)$ , y el conjunto de puntos exteriores de  $K$  es llamado **exterior** de  $K$ , denotado por  $Ext(K)$ .

Estos tres conjuntos son disjuntos. La frontera de un conjunto convexo 2-dimensional es una curva cerrada  $\gamma$  llamada **curva convexa** (figura 1.3).

## 1.2. Líneas soporte

Ahora, supongamos que tenemos una línea  $l$  y un conjunto convexo  $K$ , entonces se cumple alguno de estos casos (figura 1.4):

1. La línea  $l$  y el conjunto  $K$  no tienen puntos en común (línea  $l_1$ ).
2. La línea  $l$  y el conjunto  $K$  sólo tienen un punto en común (línea  $l_2$ ).

3. La intersección de  $l$  y  $K$  es un segmento compuesto únicamente de puntos frontera (línea  $l_3$ ).
4. La intersección de  $l$  y  $K$  es un segmento compuesto únicamente de puntos interiores, a excepción de los puntos extremos del segmento (línea  $l_4$ )

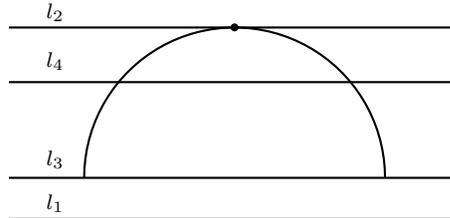


Figura 1.4: Líneas soporte

Recordemos que una línea  $l$  divide al plano en dos semiplanos. Utilizando esta noción y el resultado de los casos anteriores, surge la siguiente definición.

**Definición 1.2.1.** Una línea  $l$  es una **línea soporte** para un conjunto convexo  $K$  si:

- i) El conjunto  $K$  está contenido en alguno de los semiplanos determinados por  $l$ .
- ii) La intersección de  $l$  con el conjunto  $K$  es no vacía.

En la figura 1.4, las líneas  $l_2$  y  $l_3$  son líneas soporte de  $K$ . La línea  $l_1$  cumple la primera condición pero su intersección con  $K$  es vacía, mientras que la línea  $l_4$  cumple la segunda condición ( $l_4 \cap K \neq \emptyset$ ), pero no cumple la primera.

Ahora consideremos un punto  $M$  moviéndose a través de la frontera  $\gamma$  de una figura convexa  $K$ . Es posible establecer dos direcciones de movimiento para  $M$  a lo largo de  $\gamma$ , el movimiento en dirección contraria a las manecillas del reloj se conoce como **dirección positiva** de la curva convexa  $\gamma$ , y el movimiento en dirección opuesta es llamado **dirección negativa**. Sea  $O \in \text{int}(K)$ , el segmento

$OM$  cambia de dirección dependiendo del movimiento de  $M$ . Cuando  $M$  se mueve en dirección positiva a través de  $\gamma$ , el segmento  $OM$  gira en dirección opuesta a las manecillas alrededor de  $O$ . Cuando  $M$  se mueve en dirección negativa, el segmento gira como las manecillas del reloj.

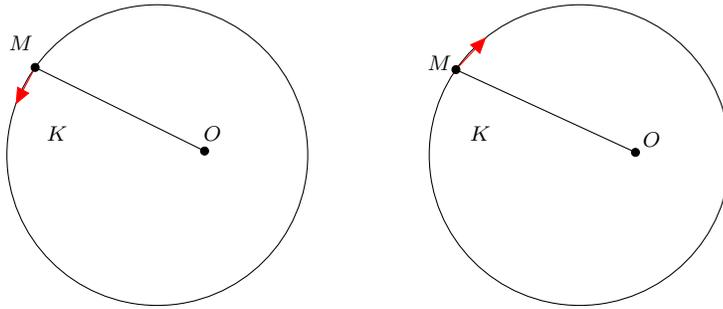


Figura 1.5: Dirección positiva (izquierda) y negativa (derecha) de  $\gamma$

También para las líneas soporte podemos establecer una dirección positiva y negativa, de la siguiente manera: Si  $K$  es una figura convexa y  $l$  es una línea soporte de ésta, la dirección positiva de  $l$  será establecida de manera que  $K$  se encuentre en el semiplano izquierdo determinado por  $l$ . Bajo esta noción, las dos rectas soportes paralelas,  $l$  y  $l'$ , de  $K$  mostradas en la figura 1.6 tienen la misma dirección. Además, si un punto se mueve a través de la curva convexa  $\gamma$  en dirección positiva, cruzará cualquier línea soporte en la misma dirección (dirección positiva).

Para hacer más fácil todas las explicaciones consideremos lo siguiente: Sean  $A, B$  y  $C$  tres puntos no colineales y sean  $l_1$  y  $l_2$  dos líneas paralelas. Denotamos como  $|A, l_1|$  a la distancia del punto  $A$  a la recta  $l_1$ , y como  $|l_1, l_2|$  a la distancia entre  $l_1$  y  $l_2$ . La distancia entre el punto  $C$  y la línea que contiene al segmento  $AB$  se denotará por  $|C, AB|$ , y la longitud del segmento  $AB$  será denotada por  $|AB|$ .

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $K$  una figura convexa. Si  $l$  es una línea soporte de  $K$ , entonces existe una única línea soporte  $l'$  de  $K$  tal que  $l \parallel l'$ , con la misma dirección que  $l$ .*

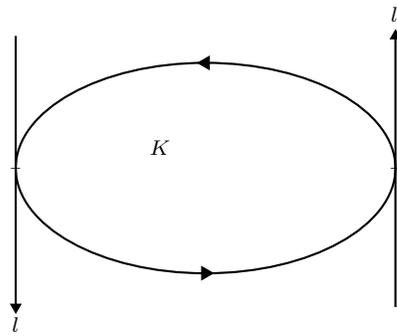


Figura 1.6: Dirección de las línea soporte paralelas

*Demostración.* Supongamos que  $l$  es una línea soporte de  $K$ , sea  $A \in K$  tal que  $|A, l| \geq |X, l|, \forall X \in K$ . Trazamos una línea  $l' \parallel l$  que pase por el punto  $A$  y cuya dirección sea contraria a  $l$ . Claramente  $l' \cap K \neq \emptyset$ , ya que esta intersección contiene al menos al punto  $A$ . Supongamos que  $K$  no está contenido en el semiplano ubicado a la izquierda de  $l'$ . Entonces existe  $A' \in K$  tal que  $A'$  está en el semiplano derecho de  $l'$ . Entonces  $|A, l| < |A', l|$  lo cual contradice nuestra hipótesis sobre el punto  $A$  ( $|A, l| \geq |X, l|, \forall X \in K$ ). Entonces  $l'$  es una línea soporte de  $K$ . Sea  $l_1$  una línea soporte paralela a  $l$ . Si  $|l, l_1| > |l, l'|$ , como  $l_1$  es línea soporte de  $K$ , entonces cualquier punto del conjunto  $K \cap l_1$  pertenece al semiplano izquierdo de  $l_1$  pero no pertenece al semiplano izquierdo de  $l'$ , lo cual es una contradicción ya que  $l'$  es una línea soporte. Análogamente, si  $|l, l_1| < |l, l'|$ , entonces cualquier punto del conjunto  $K \cap l'$  no pertenece al semiplano izquierdo de  $l_1$ , lo cual contradice al hecho de que  $l_1$  es línea soporte de  $K$ . Por tricotomía tenemos que  $|l_1, l| = |l', l|$ . Por lo tanto  $l_1 = l'$ .

□

### 1.3. Ancho de una figura convexa

Una vez establecido el concepto de línea soporte de una figura convexa nos encontramos en condiciones para presentar algunos de los conceptos de mayor utilidad en nuestra investigación.

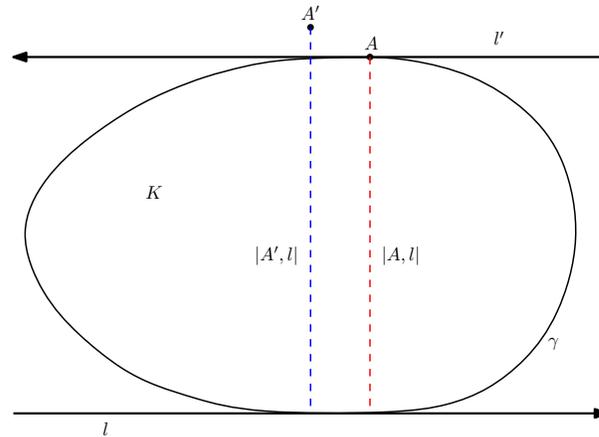


Figura 1.7: Líneas soporte paralelas

**Definición 1.3.1.** El ancho de una figura convexa  $K$  en dirección de una línea  $p$  es la distancia entre las dos líneas soporte de  $K$  perpendiculares a  $p$ .

El ancho en la dirección  $p$  es un valor único ya que solo existen dos líneas soporte paralelas que son perpendiculares a  $p$ . Podemos extender esta noción para la familia de conjuntos formados por una colección finita de puntos.

**Definición 1.3.2.** Sea  $\mathcal{A}$  una colección finita de puntos en el plano. El ancho de  $\mathcal{A}$  en la dirección  $p$ , es el ancho de la envolvente convexa de  $\mathcal{A}$  en dirección de  $p$ .

La línea  $p$  no tiene alguna restricción, puede tratarse de una línea que ni siquiera interseca al conjunto. Más adelante probaremos que para cualquier figura convexa existe una dirección de mayor y menor ancho, no necesariamente diferentes. Por ejemplo, en un rectángulo la dirección de las diagonales es la dirección de mayor ancho, y la dirección del lado más corto es la dirección del menor ancho. En una elipse, las direcciones del eje mayor y eje menor son las direcciones del mayor y menor ancho, respectivamente (figura 1.8).

Hablaremos ahora de algunas de las propiedades que caracterizan al ancho en una dirección. Sea  $h$  el ancho mayor de una figura convexa  $K$ , es decir, la distancia más grande entre todas las líneas soporte de  $K$  paralelas. Sean  $q$  y  $q'$  un par de

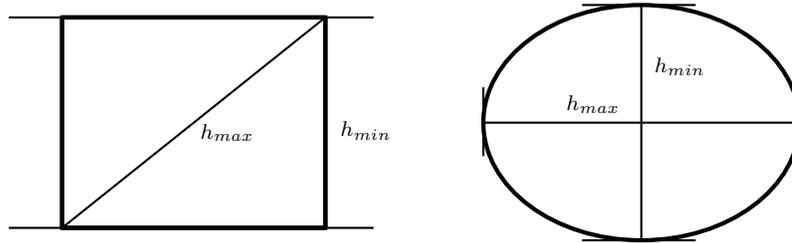


Figura 1.8:

líneas soporte paralelas, tal que su distancia es igual a  $h$ . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

**Propiedad 1.3.1.** *La distancia entre cualquier par de líneas paralelas  $s$  y  $s'$  que intersectan  $K$  no es mayor que  $h$ .*

*Demostración.* Sean  $r, r'$  líneas soporte paralelas a  $s$  y  $s'$ , entonces  $|s, s'| \leq |r, r'|$ , pero  $|r, r'| \leq h$ . Por lo tanto  $|s, s'| \leq h$ .  $\square$

**Propiedad 1.3.2.** *La distancia entre cualquier par de puntos  $A, B \in K$  no es mayor que  $h$ .*

*Demostración.* Sean  $r$  y  $r'$  líneas paralelas a través de los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Por la propiedad 1.3.1  $|AB| = |r, r'| \leq h$ .  $\square$

**Propiedad 1.3.3.** *Sean  $A \in q \cap K$  y  $B \in q' \cap K$ . Entonces  $AB$  es perpendicular a  $q$  y  $q'$ .*

*Demostración.* Como  $A \in q$  y  $B \in q'$ , tenemos  $|AB| \geq |p, p'| = h$ . Por otro lado, por la propiedad 1.3.2,  $|AB| \leq h$ . Entonces  $|AB| = h$ , esto sólo sucede si  $AB$  es perpendicular a  $p$  y  $p'$ .  $\square$

**Propiedad 1.3.4.** *Cada una de las líneas soporte  $q$  y  $q'$  tiene sólo un punto en común con  $K$ .*

*Demostración.* Supongamos que la línea  $q$  tiene al menos dos puntos en común con  $K$ ,  $A$  y  $A'$ . Si  $B$  es un punto común entre  $K$  y  $q'$ , entonces por la propiedad 1.3.3,  $AB$  y  $A'B$  son segmentos perpendiculares a  $q'$ . Entonces tenemos dos segmentos perpendiculares desde un punto  $B$  a la línea  $q$  lo cual es una contradicción. Análogamente, se prueba que  $q'$  tiene un sólo punto en común con  $K$ .  $\square$

Con estas propiedades ya tenemos herramientas suficientes para establecer el siguiente concepto que nos servirá para desarrollar nuevas propiedades.

**Definición 1.3.3.** *El diámetro de  $K$ , denotado por  $\delta(K)$ , es el supremo de las distancias entre dos puntos de  $K$ . Si  $K$  es una colección finita de puntos en el plano, el diámetro de  $K$  se define como el diámetro de su envolvente convexa.*

**Propiedad 1.3.5.** *El diámetro de  $K$  es igual a  $h$ .*

*Demostración.* Por la propiedad 1.3.2 sabemos que la distancia entre dos puntos de  $K$  es menor o igual que  $h$ . Por otro lado la propiedad 1.3.3 dice que la distancia entre los puntos de intersección de las rectas  $q$  y  $q'$  con  $K$ , es igual a  $h$ . Por lo tanto el diámetro se obtiene con dichos puntos y es igual a  $|p, p'| = h$ .  $\square$

**Propiedad 1.3.6.** *Sean  $A, B \in K$  tal que  $|AB| = \delta(K) = h$ , entonces  $A$  y  $B$  pertenecen a líneas soporte  $r$  y  $r'$  perpendiculares al segmento  $AB$ .*

*Demostración.* Trazamos líneas  $r$  y  $r'$  perpendiculares al segmento  $AB$  a través de los puntos  $A$  y  $B$  respectivamente. Claramente  $r \cap K \neq \emptyset$ . Considerando la dirección positiva de la línea  $r$ , supongamos que  $K$  no está completamente contenida en el semiplano ubicado a la izquierda de  $r$ . Entonces existe  $X \in K$  tal que  $X$  está en el semiplano ubicado a la derecha de  $r$ . Entonces  $|XB| > |AB|$  lo cual es una contradicción ya que  $|AB| = \delta(K)$ . Por lo tanto  $r$  es una línea soporte de  $K$ . Análogamente probamos que  $r'$  es una línea soporte de  $K$ .  $\square$

En un polígono convexo es muy fácil encontrar el diámetro, ya que con la ayuda de estas propiedades sabemos que las líneas soporte del diámetro pasan por los vértices más alejados del polígono.

Ahora analizaremos la menor distancia entre dos líneas soporte paralelas de  $K$  y veremos cuales son sus propiedades, este es uno de los dos conceptos fundamentales de nuestra investigación.

**Definición 1.3.4.** Sea  $K$  una figura convexa, el ancho mínimo o **ancho** de  $K$ , denotado por  $\omega(K)$ , es el ínfimo de las distancias entre dos líneas soporte paralelas de  $K$ . Si  $K$  es una colección finita de puntos en el plano, el **ancho** de  $K$  es el ancho de su envolvente convexa.

Existen figuras convexas en las cuales el diámetro y el ancho coinciden, un ejemplo lo encontramos en las figuras convexas donde la distancia entre cualquier par de líneas soporte paralelas es constante (como en la circunferencia). A estos conjuntos se les conoce como figuras de ancho constante.

Ahora, supongamos que  $h$  es el ancho de  $K$ , y  $p, p'$  son líneas soporte paralelas de  $K$ , tales que  $|p, p'| = h$ . Sea  $A_0A_1$  el segmento de la intersección de  $p$  y  $K$ , y sea  $B_0B_1$  el segmento de la intersección de  $p'$  y  $K$  ( $A_0A_1$  o  $B_0B_1$  puede contener un sólo punto). Por último sea  $C_0C_1$  la proyección de  $A_0A_1$  en  $p'$  (figura 1.9). Con esta construcción se tiene lo siguiente.

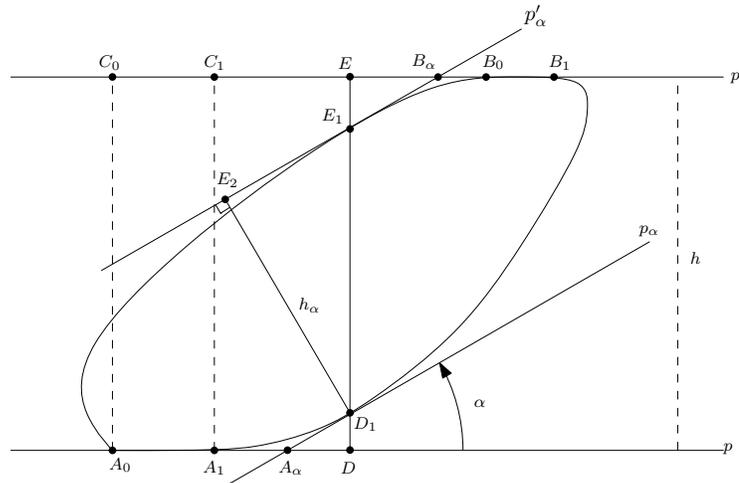


Figura 1.9:

**Teorema 1.3.1.** Los segmentos  $C_0C_1$  y  $B_0B_1$  tienen puntos en común.

*Demostración.* Supongamos lo contrario, que  $C_0C_1 \cap B_0B_1 = \emptyset$ . Entonces es posible dibujar un segmento  $DE$ , con  $D \in p$  y  $E \in p'$ , perpendicular a las líneas  $p$  y  $p'$ , tal que los segmentos  $C_0C_1$  y  $B_0B_1$  se encuentren en lados opuestos del

segmento  $DE$ . Por construcción  $|DE| = h$ . Sean  $p_\alpha$  y  $p'_\alpha$  líneas soporte de  $K$  que forman un ángulo  $\alpha$  con  $p$  y  $p'$ , respectivamente.

Llamamos  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  a los puntos de intersección de  $p$  y  $p'$  con las líneas  $p_\alpha$  y  $p'_\alpha$ , respectivamente. Cuando  $\alpha$  tiende a 0,  $A_\alpha$  se aproxima al punto  $A_1$  y  $B_\alpha$  se aproxima a  $B_0$ . Entonces, para algún  $\alpha$  suficientemente pequeño,  $A_\alpha$  y  $B_\alpha$  se encuentran en lados opuestos respecto al segmento  $DE$ . Más aún, para algún  $\alpha > 0$  tenemos que  $p_\alpha$  y  $p'_\alpha$  intersectan a  $DE$  en  $D_1$  y  $E_1$ , respectivamente. Tenemos entonces que  $|D_1E_1| < |DE| = h$ .

Por último sea  $E_2 \in p'_\alpha$  tal que  $D_1E_2$  es perpendicular a  $p_\alpha$ . Entonces  $h_\alpha = |D_1E_2| < |D_1E_1|$ . De estas dos desigualdades tenemos que  $h_\alpha < h$ . Lo cual contradice que  $h$  es el ancho de  $K$ . Por lo tanto,  $C_0C_1 \cap B_0B_1 \neq \emptyset$ .  $\square$

Este teorema se utiliza para demostrar que existe una dirección del ancho para cualquier conjunto convexo.

**Teorema 1.3.2.** *Si  $K$  es una figura convexa, entonces existen dos segmentos  $AB$  y  $A'B'$ , con extremos en la frontera de  $K$ , tales que  $AB$  es la dirección del diámetro, y  $A'B'$  es la dirección del ancho.*

*Demostración.* Sean  $A, B$  los puntos con los que se obtiene el diámetro de  $K$ , claramente  $A, B \in Fr(K)$  y el segmento  $AB$  tiene longitud  $\delta(K)$ , entonces  $AB$  es la dirección del diámetro. Sean  $p$  y  $p'$  las líneas soporte de  $K$  cuya distancia sea mínima, y sean  $A_p = p \cap K$  y  $B_p = p' \cap K$ . Por el teorema anterior existe una línea  $l$ , tal que  $l \cap A_p \neq \emptyset$  y  $l \cap B_p \neq \emptyset$ . Sean  $A' = l \cap A_p$  y  $B' = l \cap B_p$ . Claramente  $A', B' \in Fr(K)$  y  $|A'B'| = \omega(K)$ . Por lo tanto, el segmento  $A'B'$  es la dirección del ancho mínimo de  $K$ .  $\square$

Ahora sabemos que siempre existen una dirección del ancho mínimo, y una dirección del diámetro, no necesariamente diferentes. Estos resultados se aplican de igual manera a los conjuntos formados por una colección finita de puntos.

## 1.4. El $n$ -ancho de figuras convexas

Podemos extender la noción de ancho de un conjunto convexo de la siguiente manera: Si  $K$  es un conjunto convexo o un conjunto finito de  $m \geq n$  puntos,

entonces para  $n \geq 3$  el  $n$ -ancho de  $K$ , denotado por  $\omega_n(K)$ , es el ancho más grande que se puede obtener de los  $n$ -ágonos inscritos en  $K$ . En otras palabras:

$$\omega_n(K) = \text{máx}\{\omega(T) : T \text{ es un } n\text{-ágono con vértices en } K\}$$

Nuestro interés está en el caso particular de  $n = 3$ . El 3-ancho de  $K$  es el ancho más grande que se puede obtener de los triángulos inscritos en  $K$ .

**Definición 1.4.1.** Sea  $K$  una figura convexa o un conjunto finito de 3 o más puntos, el número  $\lambda_3(K)$  se define como:

$$\lambda_3(K) = \frac{\omega(K)}{\omega_3(K)}.$$

En general, para  $n \geq 3$  tenemos:

$$\lambda_n(K) = \frac{\omega(K)}{\omega_n(K)}.$$

Este número está bien definido ya que  $\omega_n(K) > 0$ , además el conjunto  $K$  es no vacío y acotado.

Ahora conocemos todos los conceptos que serán necesarios en esta investigación.

---

# Capítulo 2

## Antecedentes

---

### 2.1. Cota superior para curvas convexas.

En este capítulo hablaremos del enfoque principal de nuestro estudio y mostraremos algunos resultados relacionados con esta línea de investigación.

Supongamos que tenemos una curva convexa  $\gamma$  de un conjunto convexo  $K$  en el plano. Para este conjunto podemos calcular el cociente

$$\lambda_3(K) = \frac{\omega(K)}{\omega_3(K)}.$$

Anteriormente, vimos que el número  $\omega_3(K)$  representa el ancho más grande que se puede obtener de entre todos los triángulos inscritos en  $K$ . Encontrar este número es bastante complicado ya que tenemos una infinidad de triángulos inscritos en  $K$ . Si encontramos una aproximación de  $\omega_3(K)$ , obtendremos una cota superior para el número  $\lambda_3(K)$ , que será de gran ayuda. Veamos el caso de la circunferencia:

**Teorema 2.1.1.** Si  $K$  es una circunferencia en el plano, entonces  $\lambda_3(K) = 4/3$ .

*Demostración.* Supongamos que  $K$  es una circunferencia de radio 1, sea  $\triangle ABC$  un triángulo inscrito en  $K$ . Si  $\triangle ABC$  no es equilátero y los ángulos son  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ , entonces  $\alpha > 60^\circ$ . Podemos suponer que  $BC$  es el lado más grande (opuesto al ángulo  $\alpha$ ), y sea  $M$  el punto medio de dicho segmento. Trazamos la mediatriz de  $BC$  y llamamos  $T$  al punto de intersección de esta línea con  $Fr(K)$  (que es el más cercano al punto  $A$ ).

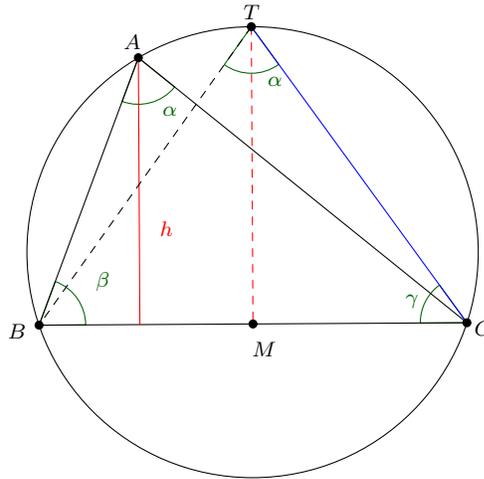


Figura 2.1: 3-ancho de la circunferencia unitaria

Se sigue que la altura menor del triángulo es  $h < |TM|$ , donde  $|TM| = |TC| \sin(\frac{\beta+\gamma}{2}) < |TC| \sin 60^\circ$ . Como  $\triangle ABC$  es arbitrario, entonces  $\omega(\triangle ABC) \leq \omega(\triangle TBC)$ . Pero la longitud del segmento  $TC$  es menor que la longitud del lado del triángulo equilátero inscrito en  $K$  ( $\sqrt{3}$ ). Entonces  $|TC| \sin 60^\circ < \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ . Esto implica que

$$\lambda_3(K) = \frac{\omega(K)}{\omega_3(K)} \leq \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Esta igualdad solo se cumple cuando  $\triangle ABC$  es un triángulo equilátero. Por lo tanto,  $\lambda_3(K) = \frac{4}{3}$   $\square$

Sin embargo, la cota superior  $\frac{4}{3}$  es válida para toda curva convexa con centro de simetría, como fué provado por Lassak y Gritzman en [7]

**Teorema 2.1.2.** *Si  $K$  es una curva convexa con centro de simetría. Entonces  $\lambda_3(K) \leq \frac{4}{3}$ .*

*Demostración.* Sea  $O$  el centro de simetría de  $K$ . Sea  $Q$  la circunferencia con centro en  $O$  y diámetro igual a  $\omega(K)$ . Entonces  $Q \subseteq K$  y  $Fr(K) \cap Q$  contiene un par de puntos  $A, D$  tal que  $|AD| = \omega(K)$  con  $AD$  perpendicular a las líneas soporte con las que se obtiene el ancho (figura 2.2).

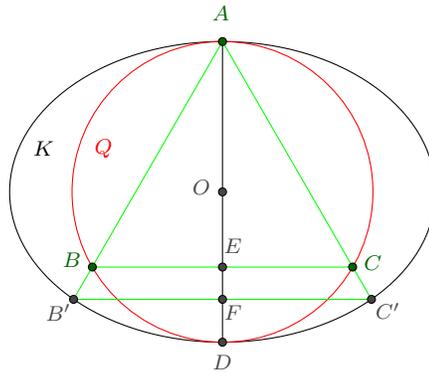


Figura 2.2:

Ahora sea  $\triangle ABC$  el triángulo equilátero inscrito en  $Q$ . Notemos que  $BC \perp AD$ , trazamos las rectas que pasan por  $AB$  y  $AC$ , y sean  $B'$  y  $C'$  la intersección de dichas rectas con  $K$ . Notemos que  $\triangle AB'C'$  es un triángulo inscrito en  $K$ . Por último sean  $E = AD \cap BC$  y  $F = AD \cap B'C'$ , como  $K$  es simétrica, entonces  $BC \parallel B'C'$ . Esto implica que  $\omega(\triangle ABC) \leq \omega(\triangle AB'C')$ . Por el teorema anterior sabemos que  $\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{4}{3}$ , por lo tanto

$$\lambda_3(K) = \frac{|AD|}{\omega_3(K)} \leq \frac{|AD|}{\omega(\triangle AB'C')} \leq \frac{|AD|}{\omega(\triangle ABC)} = \frac{4}{3}$$

□

Más adelante probaremos que la igualdad solamente se alcanza cuando  $K$  es una circunferencia.

Sin la hipótesis de simetría central sobre  $K$ , se tiene la cota  $\lambda_3(K) \leq 1.715$ , demostrada por Lassak y Gritzman en [8]. Este número se obtiene mediante el pentágono de Reuleaux y el triángulo equilátero contenido en éste (figura 2.3). Este triángulo se forma con un vértice en común con el pentágono (punto  $A$ ) y los otros dos vértices (puntos  $D$  y  $E$ ) tales que  $\angle BAD = \angle EAC = 24^\circ$ .

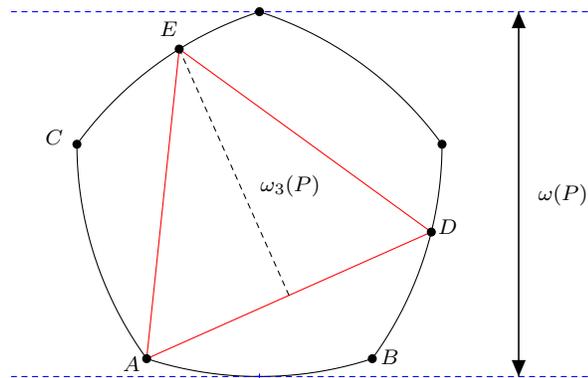


Figura 2.3: Pentágono de Reuleaux

Con este mismo conjunto se obtiene una cota del número  $\lambda_3$  para los conjuntos que tienen ancho constante, esta demostración se encuentra en [7].

## 2.2. Cotas superiores para conjuntos finitos de puntos.

El problema es aún más difícil si en lugar de tomar curvas convexas consideramos conjuntos finitos de puntos.

El siguiente problema fue propuesto por G. Tsintsifas en [16].

**Problema 1.** Sea  $\mathcal{G} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  un conjunto finito de puntos. Pruebe que si  $\omega_3(\mathcal{G}) \leq d$ , entonces  $\omega(\mathcal{G}) \leq 2d$ . Encuentre también el número mínimo  $k \in \mathbb{R}$ , tal que cualquier conjunto  $\mathcal{G}$  cumple que  $\omega(\mathcal{G}) \leq kd$ .

El mejor resultado de esta cota se puede encontrar en [12]. En [13] tenemos una solución de la primera parte de este problema. A continuación daremos un boceto de esta prueba.

**Solución.** Como  $\mathcal{G}$  es una colección finita, entonces existe un triángulo de área máxima, de entre todos los triángulos que se pueden formar con vértices en  $\mathcal{G}$ , digamos  $\triangle A_1A_2A_3$ . Además, podemos suponer que  $|A_1, A_2A_3| \leq 1$ . Consideremos el triángulo  $\triangle B_1B_2B_3$  homotético al triángulo  $A_1A_2A_3$ , con centro de homotecia en el centroide de  $A_1A_2A_3$ , y coeficiente de homotecia igual a  $-2$  (figura 2.4).

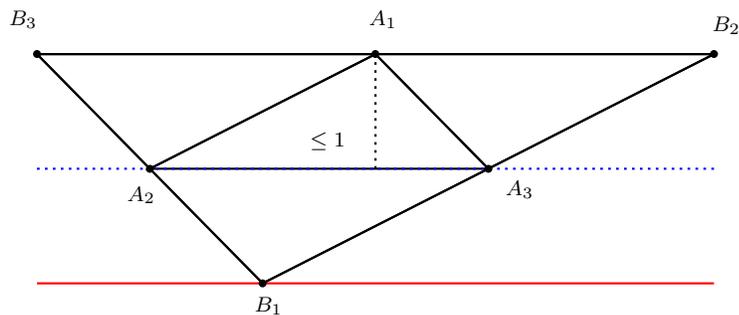


Figura 2.4: Resultado de Eckoff

El triángulo  $\triangle B_1B_2B_3$  contiene a  $\mathcal{G}$ . De no ser así, existiría un punto  $X \in \mathcal{G}$  en el semiplano derecho que determina la recta que contiene al segmento  $B_2B_3$ , entonces el triángulo  $\triangle XA_2A_3$  tendría área mayor que el área de  $\triangle A_1A_2A_3$ . Además, para todo punto  $X \in \mathcal{G}$  se cumple que  $|X, A_2A_3| \leq 1$ . Por lo tanto  $\omega(\mathcal{G}) \leq \omega(\triangle B_1B_2B_3) \leq 2$ .

En [3] tenemos algunos casos particulares que son útiles para encontrar el número  $k$  buscado en el problema 1. Consideremos los conjuntos de vértices que forman  $n$ -ángulos regulares como en la figura 2.5. Supongamos también que estos conjuntos

tienen 3-ancho igual a  $d$ , es decir  $\omega_3(\mathcal{G}) = d$ , y que el ancho del conjunto es igual a  $kd$ , donde  $k$  es un número real que depende del número de vértices del conjunto. Para cada conjunto el valor de  $k$  es diferente. Por ejemplo, en los vértices del

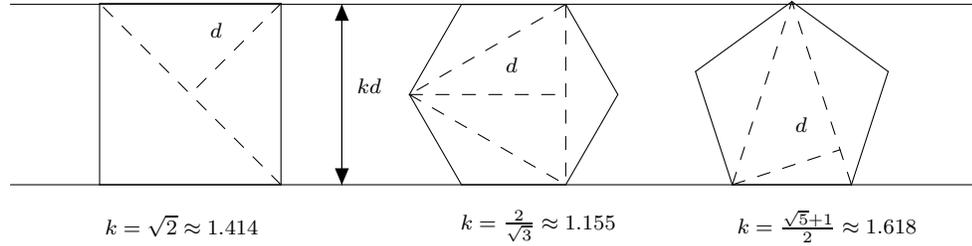


Figura 2.5:  $n$ -ágonos regulares

cuadrado  $k = \sqrt{2} \approx 1.414$ . En el hexágono tenemos que  $k = 2/\sqrt{3} \approx 1.1547$ , mientras que en el pentágono el valor es  $k = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618$ . Conforme aumenta el número de vértices el conjunto se aproxima a una circunferencia, para la cual el número  $k$  fué determinado anteriormente como  $k = \frac{4}{3}$ . Por consiguiente, para todos los conjuntos considerados, el valor  $k = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618$  bastaría para decir que el conjunto tiene ancho menor o igual que  $kd$ .

Ahora, sea  $\mathcal{F}$  una colección finita de puntos, si  $\omega_3(\mathcal{F}) \leq 1$ , entonces se cumple que  $\lambda_3(\mathcal{F}) \leq 1.79$ . Este resultado fué demostrado en [8]. Sin embargo, existe una conjetura que afirma que  $\lambda_3(\mathcal{F}) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$ , dice además que este número no se puede mejorar, como se observa en el siguiente ejemplo:

Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de vértices de un pentágono regular con longitud de lado igual a  $(\sin 72^\circ)^{-1}$ . Es fácil ver que  $\omega_3(\mathcal{P}) \leq 1$ . El ancho más grande que se puede obtener de todos posibles triángulos con vértices en  $\mathcal{P}$  es igual a 1, es decir,  $\omega_3(\mathcal{P}) = 1$ . Por otro lado,  $\omega(\mathcal{P}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Por lo tanto

$$\lambda_3(\mathcal{P}) = \frac{\omega(\mathcal{P})}{\omega_3(\mathcal{P})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ahora, suponiendo que  $\omega_3(\mathcal{F}) \leq 1$ , y agregando las hipótesis de que  $\mathcal{F}$  tiene



la intersección de  $AB$  con  $CD$  y  $\alpha = \angle BMC$ . De las suposiciones anteriores se obtiene que  $|C, AB| \leq 1$ ,  $|D, AB| \leq 1$  y  $|AC| \geq |AD|$ . También, se cumple que las proyecciones ortogonales de  $C$  y  $D$  sobre la línea  $AB$  están en el segmento  $AB$ .

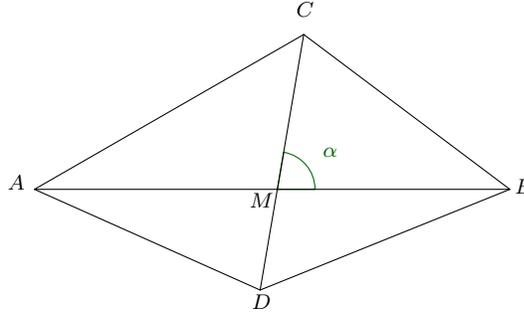


Figura 2.7:

Distinguiamos tres casos dependiendo de cual lado del triángulo  $\triangle BCD$  tiene mayor longitud.

**Caso 1:**  $|BC| \geq |BD|, |CD|$ .

Entonces  $|DX| \leq 1$ , donde  $X$  es la proyección ortogonal de  $D$  sobre  $BC$ . Definimos los puntos  $B'$  sobre  $MB$  y  $N$  sobre  $CB'$  de manera que  $|CB'| = |CD|$  y  $|CN| = |CM|$ , y sea  $Y$  la proyección ortogonal de  $C$  sobre  $DN$  (ver figura 2.8). Dado que el triángulo  $\triangle CDN$  es simétrico al triángulo  $\triangle CB'M$ , tenemos que  $|CY| = |C, MB|$  y entonces  $|CY| \leq 1$ , y por el teorema de Pitágoras en el triángulo  $\triangle CDX$ , obtenemos que  $|CD| \leq \sqrt{2}$ . Esto implica que la banda acotada por las líneas paralelas a  $AB$  a través de  $C$  y  $D$ , tienen ancho menor o igual que  $\sqrt{2}$  y contienen a  $\mathcal{H}$ .

Ahora, de entre los ángulos formados por las líneas  $AC$ ,  $BC$ ,  $AD$  y  $BD$  con respecto a la línea  $AB$ , consideremos el menor de éstos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que tal ángulo es  $\angle ABD$ . En tal caso, tenemos que  $|C, BD| < \sqrt{2}$ ; además, la banda acotada por la línea  $BD$  y su paralela a través de  $C$  tiene ancho menor que  $\sqrt{2}$  y contiene a  $\mathcal{H}$ .

**Caso 2:**  $|BD| \geq |BC|, |CD|$ .

En este caso  $|C, BD| \leq 1$ . Escogemos el punto  $A'$  sobre la línea  $AB$  de tal mane-



$\triangle BCP$ , obtenemos que  $|BC| \leq \sqrt{2}$

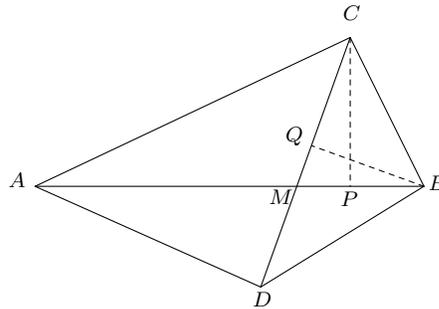


Figura 2.10:

Si  $CD$  es también el lado más grande del triángulo  $\triangle ACD$ , entonces tenemos que  $|AS| \leq |AR| \leq 1$ , con  $S$  y  $R$  las proyecciones de  $D$  y  $A$  sobre  $AM$  y  $MD$ , respectivamente (ver figura 2.11). Como  $|DS| \leq 1$ , tenemos entonces, por el teorema de Pitágoras en el triángulo  $\triangle ASD$ , que  $|AD| \leq \sqrt{2}$ . Si  $|D, AC| \geq |B, AC|$ , entonces la línea que contiene al segmento  $AC$  y su paralela a través de  $D$  son líneas soporte de  $\mathcal{H}$  y se encuentran a una distancia menor o igual a  $\sqrt{2}$ . Si  $|B, AC| \geq |D, AC|$ , entonces la línea que contiene a  $AC$  y su paralela a través de  $B$  son líneas soporte de  $\mathcal{H}$  y su distancia es menor o igual a  $\sqrt{2}$ .

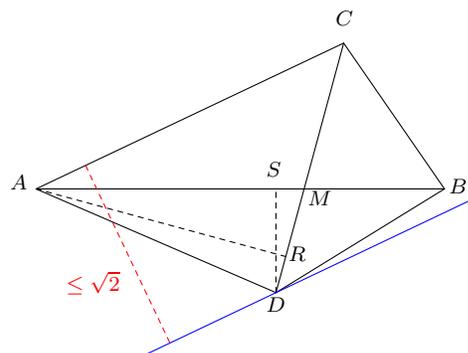


Figura 2.11:

Si ahora tenemos que  $AC$  es el lado más grande del triángulo  $\triangle ACD$ , entonces

$|D, AC| \leq 1$ . Definimos el punto  $A'$  como en el caso 2. Si  $A \in A'M$ , entonces las líneas que contienen a los segmentos  $A'C$  y  $BD$  son líneas soporte paralelas de  $\mathcal{H}$  y se encuentran a distancia menor o igual que  $\sqrt{2}$ . Si  $A$  no pertenece al segmento  $A'M$ , entonces la línea que contiene a  $AC$  y su paralela a través de  $D$  son líneas soporte de  $\mathcal{H}$  y están a una distancia no mayor que 1, como en el caso 2.

Ahora, supongamos que  $\omega(\mathcal{H}) = \sqrt{2}$ . Entonces estamos en el Caso 3 y debemos tener que  $|BC| = |AD| = \sqrt{2}$ . Tenemos que  $|BC| = \sqrt{2}$  implica que  $|BP| = |CP| = 1$  y entonces  $|BQ| = 1$ . En particular,  $\alpha = \pi/2$  y  $P = Q = M$ . De manera similar,  $|AD| = \sqrt{2}$  implica que  $|AM| = |DM| = 1$ . Por lo tanto,  $A, B, C$  y  $D$  forman un cuadrado de lado  $\sqrt{2}$ .  $\square$

Esta proposición da una cota del número  $\lambda_3$  cuando hablamos de cuadriláteros cuyo 3-ancho no es mayor que 1, en [13] podemos encontrar dos diferentes demostraciones de este resultado.

En la siguiente proposición tenemos un resultado para los conjuntos de cardinalidad 5 y 3-ancho no mayor a 1, esta proposición aparece como lema en [10] y a continuación se da la demostración del mismo.

**Proposición 2.** *Sea  $\mathcal{F}$  un conjunto de cinco puntos tal que  $\omega_3(\mathcal{F}) \leq 1$ . Entonces  $\omega(\mathcal{F}) \leq (\sin \frac{\pi}{5})^{-1}$ .*

*Demostración.* Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i=1}^5$  son los vértices de un pentágono convexo, ubicados como en la figura 2.12. Trazamos las diagonales del pentágono, y sea  $\alpha_i$  el ángulo formado con las diagonales y el vértice  $A_i$  (ver Figura 2.12).

Entonces  $\sum_{i=1}^5 \alpha_i = \pi$ , lo que implica que  $\exists k \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq k \leq 5$  tal que  $\alpha_k \geq \frac{\pi}{5} = 36^\circ$ .

Sea  $j \in \mathbb{Z}$ , tal que  $\angle A_j A_k A_{j+1} = \alpha_k$ , y sea  $h = |A_k, A_j A_{j+1}|$ . Supongamos que  $h > \frac{1}{\sin 36^\circ}$ , entonces  $|A_k A_j|, |A_k A_{j+1}| > \frac{1}{\sin 36^\circ}$  (ver figura 2.13). Además

$$h' = |A_j A_k| \cdot \sin \alpha_i > \frac{1}{\sin 36^\circ} \cdot \sin 36^\circ = 1.$$

Análogamente,  $h'' = |A_{j+1} A_k| \cdot \sin \alpha_i > 1$  (figura 2.13).

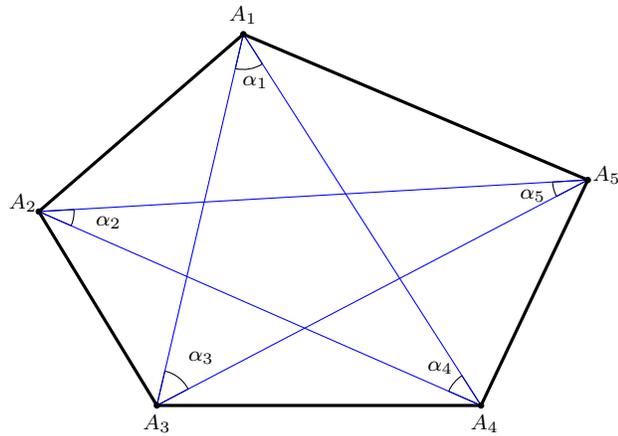


Figura 2.12:

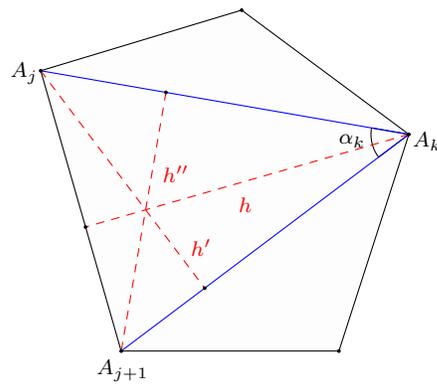


Figura 2.13:

Como  $h, h', h'' > 1$  tenemos que  $\omega(\triangle A_j A_k A_{j+1}) > 1$ , lo cual es una contradicción ya que  $\omega_3(\mathcal{H}) \leq 1$ . Entonces  $h \leq \frac{1}{\sin 36^\circ}$ . Por lo tanto,  $\omega(\mathcal{H}) \leq h = (\sin 36^\circ)^{-1}$   $\square$

Ahora toca revisar el caso de los conjuntos de 6 puntos, en la siguiente proposición tenemos que agregar una hipótesis adicional a todas las anteriores. Este es un resultado obtenido en [10].

**Proposición 3.** Si  $\mathcal{H} = \{A, B, C, D, E, F\}$  es el conjunto de vértices de un hexágono en donde cualquier par de lados opuestos son paralelos, y  $\omega_3(\mathcal{H}) \leq 1$ . Entonces  $\omega(\mathcal{H}) \leq \sqrt{2}$ .

*Demostración.* Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los puntos se encuentran como en la figura 2.14. Si  $|AC|, |CE|$  o  $|EA|$  es menor o igual que  $\sqrt{2}$ , entonces el teorema queda demostrado.

Asumimos, sin pérdida de generalidad, que  $|AE| \geq |AC| \geq |CE| > \sqrt{2}$ . Como  $\omega_3(\mathcal{H}) \leq 1$ , se cumple que  $\omega(\triangle ACE) \leq 1$  y  $|C, AE| \leq |E, AC| \leq |A, CE|$ , entonces tenemos que la línea que contiene al segmento  $AE$  y su paralela a través de  $C$  son líneas soporte de  $\triangle ACE$ . Además, como  $|AE| \geq |AC| \geq |CE| > \sqrt{2}$ , entonces tenemos que  $\angle ACE > \pi/2$

Sin pérdida de generalidad suponemos que  $\alpha = \angle FCE > \angle ACF$  y por consiguiente  $\alpha > \pi/4$ . Ahora, si  $|C, EF| > \sqrt{2}$  entonces  $|F, CE| = |FC| \sin(\alpha) \geq \sqrt{2} \sin \pi/4 > 1$ , y similarmente tenemos que  $|E, CF| > 1$ . De aquí se sigue que  $\omega(\triangle CEF) > 1$ , lo cual contradice que  $\omega_3(\mathcal{H}) \leq 1$ . Entonces  $|C, EF| < \sqrt{2}$ , por lo tanto  $\omega(\mathcal{H}) \leq \sqrt{2}$ .  $\square$

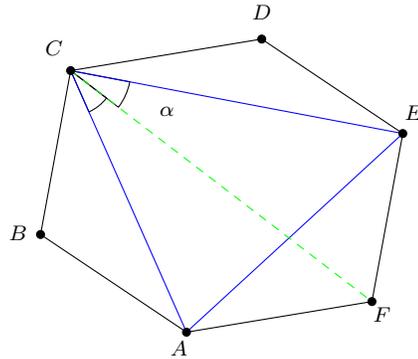


Figura 2.14:

Para los conjuntos de cardinalidad 8 también es necesario agregar una condición adicional (hasta el momento). Al igual que los últimos resultados, este es un lema propuesto en [10].

**Proposición 4.** Sea  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i=1}^8$  el conjunto de vértices de un octágono centralmente simétrico tal que  $\omega_3(\mathcal{F}) \leq 1$ . Si la distancia entre cualquier par de puntos es al menos 1, entonces  $\omega(\mathcal{F}) \leq \sqrt{2}$ .

*Demostración.* Supongamos que los vértices se encuentran como en la figura 2.15. Es fácil ver que un  $2n$ -ágono centralmente simétrico convexo,  $n \geq 3$ , tiene a lo más un par de ángulos no obtusos opuestos. Luego, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $\angle A_8 A_1 A_2, \angle A_2 A_3 A_4, \angle A_4 A_5 A_6, \angle A_6 A_7 A_8 > \pi/2$ . Como la distancia entre cualquier par de puntos es al menos 1, tenemos que  $|A_2 A_4| = |A_6 A_8| > \sqrt{2}$  y  $|A_4 A_6| = |A_8 A_2| > \sqrt{2}$ . También podemos asumir que  $|A_8 A_4| > \sqrt{2}$ ,  $|A_1 A_5| > \sqrt{2}$ ,  $|A_2 A_6| > \sqrt{2}$  y  $|A_3 A_7| > \sqrt{2}$ , de lo contrario el lema queda demostrado. Se sigue que la distancia entre cualquier par de puntos del conjunto  $\{A_2, A_4, A_6, A_8\}$  es mayor que  $\sqrt{2}$ . Usando la hipótesis de que  $\omega_3(\mathcal{F}) \leq 1$  es fácil probar que uno de los ángulos del triángulo  $A_i, A_j, A_k$ , para todo  $\{A_i, A_j, A_k\} \subset \{A_2, A_4, A_6, A_8\}$  es un ángulo obtuso. Supongamos que  $\angle A_6 A_8 A_2 \geq \angle A_8 A_2 A_4$  y considérese el triángulo  $\triangle A_6 A_8 A_4$ . Sabiendo que  $\angle A_8 A_6 A_4 \leq \pi/2$ , tenemos que o el ángulo  $\angle A_6 A_8 A_4 > \pi/2$  o el ángulo  $\angle A_8 A_4 A_6 > \pi/2$  (figura 2.15).

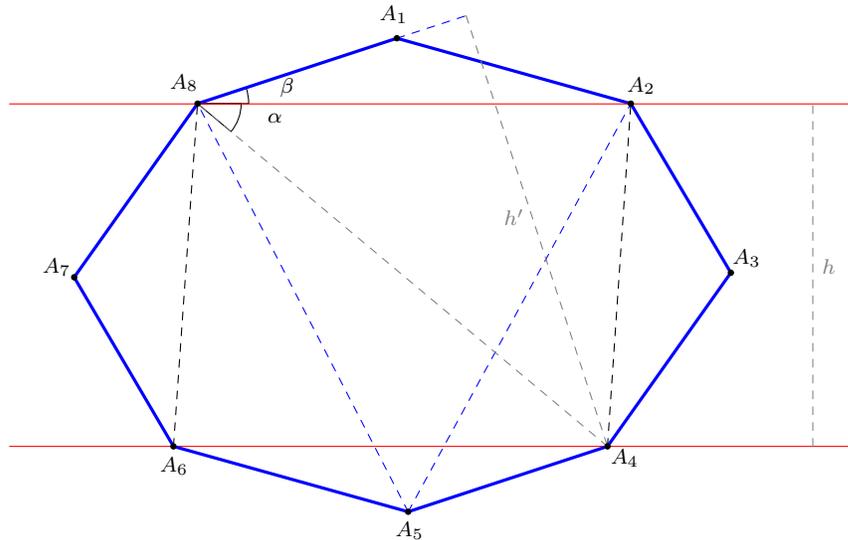


Figura 2.15:

**Caso 1:** Ángulo  $\angle A_6 A_8 A_4 > \pi/2$ . Se sigue que  $|A_8, A_6 A_4| \leq 1$ , y entonces tenemos que las líneas que contienen a los segmentos  $A_8 A_2$  y  $A_6 A_4$  se encuentran a una distancia no mayor a 1 y son líneas soporte del paralelogramo  $A_2 A_4 A_6 A_8$ . Considérese el triángulo  $\triangle A_2 A_5 A_8$ . Si  $|A_2 A_5| \leq \sqrt{2}$ , entonces la banda acotada por las líneas  $A_1 A_2$  y  $A_6 A_5$  tiene ancho a lo más  $\sqrt{2}$ . Similarmente, si  $|A_8 A_5| \leq \sqrt{2}$ , entonces las líneas paralelas que contienen a los segmentos  $A_1 A_8$  y  $A_4 A_5$  se encuentran a distancia a lo más  $\sqrt{2}$ . Entonces, podemos asumir lo contrario que  $|A_2 A_5| > \sqrt{2}$  y  $|A_8 A_5| > \sqrt{2}$ . Como  $\angle A_8 A_2 A_5 < \pi/2$ , tenemos dos casos:

**Caso 1(a).**  $\angle A_8 A_5 A_2 > \pi/2$ . Asíumase que  $\angle A_1 A_5 A_2 > \pi/4$ ; entonces debemos tener que  $|A_5, A_1 A_2| \leq \sqrt{2}$ , de otra forma  $\omega(\triangle A_1 A_2 A_5)$  (ver el último párrafo del teorema anterior). El caso en el que  $\angle A_8 A_5 A_1 > \pi/4$  es análogo.

**Caso 1(b):**  $\angle A_2 A_8 A_5 > \pi/2$ . El caso en el que el ángulo  $\angle A_5 A_8 A_4 > \pi/4$  es análogo a los dos sub-casos del caso 1(a). Ahora, supongamos que  $\alpha = \angle A_4 A_8 A_2 > \pi/4$ , y definamos  $\beta = \angle A_1 A_8 A_2$ . También, sea  $h = |A_4, A_8 A_2|$  y  $h' = |A_4, A_8 A_1|$ . Se tiene que:

$$h' \leq \frac{h'}{h} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \leq \frac{1}{\sin \alpha} \leq \sqrt{2}.$$

Entonces, las líneas que contienen a los segmentos  $A_1 A_8$  y  $A_4 A_5$  se encuentran a distancia no mayor a  $\sqrt{2}$ .

**Caso 2**  $\angle A_8 A_4 A_6 > \pi/2$ . Este caso es completamente análogo al caso 1. Concluimos que  $\omega(\mathcal{F}) \leq \sqrt{2}$ .  $\square$



---

## Capítulo 3

# Cotas superiores para algunas clases de figuras convexas

---

### 3.1. Curvas con centro de simetría

En el capítulo anterior pudimos observar los resultados obtenidos para figuras con centro de simetría, ahora presentaremos los resultados obtenidos en esta investigación para esta familia de figuras. Comencemos por probar lo siguiente.

**Teorema 3.1.1.** *Si  $K$  es una curva convexa con centro de simetría, entonces  $\lambda_3(K) \leq 4/3$  con la igualdad si y sólo si  $K$  es una circunferencia.*

*Demostración.* Ya se probó la desigualdad para curvas con centro de simetría, también probamos que si  $K$  es una circunferencia entonces  $\lambda_3(K) = 4/3$ . Ahora supongamos que  $\lambda_3(K) = 4/3$ , probaremos entonces que  $K$  es una circunferencia. Sea  $Q$  la circunferencia con centro en el centro de simetría de  $K$  y diámetro igual a  $\omega(K)$ . Supongamos que  $Fr(K)$  no coincide con  $Fr(Q)$ , entonces existe

un punto  $X \in Fr(K)$  que está en el exterior de  $Q$ . Sea  $A$  el punto donde el segmento  $OX$  intersecta a  $Fr(Q)$ . Consideremos el triángulo equilátero inscrito en  $Q$  que tiene un vértice en  $A$ , digamos  $\triangle ABC$ . Como  $\triangle XBC$  contiene a

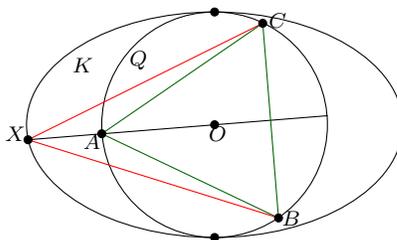


Figura 3.1:

$\triangle ABC$ , tenemos que  $\omega(\triangle ABC) < \omega(\triangle XBC)$ . Entonces tenemos que

$$\lambda_3(K) = \frac{\omega(K)}{\omega_3(K)} \leq \frac{\omega(K)}{\omega(\triangle XBC)} < \frac{\omega(K)}{\omega(\triangle ABC)} = \frac{4}{3}$$

Esto contradice la hipótesis de que  $\lambda_3(K) = \frac{4}{3}$ . Por lo tanto  $Fr(K) = Fr(Q)$ , es decir,  $K$  es una circunferencia.  $\square$

Este teorema nos da una cota mínima para el número  $\lambda_3$  para la familia de curvas convexas con centro de simetría.

## 3.2. Paralelogramos

Aunque para el caso de figuras sin centro de simetría no se sabe la cota mínima superior, se pueden analizar ciertas familias de figuras y obtener una buena cota superior. Tal es el caso de la familia de paralelogramos.

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $P$  un paralelogramo en el plano. Entonces*

$$\lambda_3(P) \leq \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}} \approx 1.115$$

*con la igualdad si y sólo si  $P$  es un cuadrado.*

Antes de demostrar este teorema es necesario probar que en el caso de los cuadrados el teorema es cierto.

**Lema 3.2.1.** Sea  $K$  un cuadrado en el plano. Entonces  $\lambda(K) = \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}} \approx 1.1153$ .

*Demostración.* Para facilitar la demostración y sin pérdida de generalidad, supongamos que el cuadrado tiene lado 1. Sean  $A, B, C, D$  los vértices del cuadrado, y sea  $\triangle MNP \subset K$  tal que  $\omega_3(K) = \omega(\triangle MNP)$ . Para el triángulo  $\triangle MNP$  tenemos los siguientes casos:

1. Ningún vértice de  $\triangle MNP$  es vértice de  $K$ .
2. Al menos un vértice de  $\triangle MNP$  es vértice de  $K$ .
  - a) Exactamente un vértice de  $\triangle MNP$  es vértice de  $K$
  - b) Dos o más vértices de  $\triangle MNP$  son vértices de  $K$

**Caso 1.** Supongamos que ningún vértice de  $\triangle MNP$  es vértice de  $K$ . En este caso los vértices de  $\triangle MNP$  se pueden ubicar de dos maneras diferentes, la primera es cuando todos los vértices se encuentran en lados diferentes, y la segunda es cuando dos vértices se encuentran en un mismo lado.

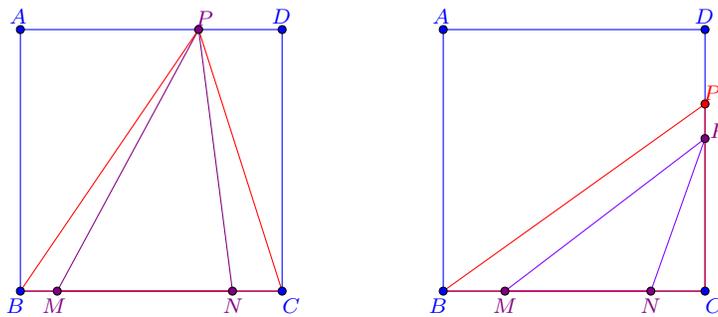


Figura 3.2:

Si dos vértices de  $\triangle MNP$  están en un mismo segmento, no importa cual, el tercero se puede encontrar en un lado adyacente u opuesto al primero (figura

3.2). En ambos casos es posible encontrar un triángulo que contiene a  $\triangle MNP$ , y que a su vez tiene ancho mayor que  $\omega(\triangle MNP)$ .

Supongamos ahora que los tres vértices de  $\triangle MNP$  se encuentran en segmentos diferentes, como en la figura 3.3. Sea  $M' \in MB$ , trazamos una recta paralela al segmento  $MN$  desde  $M'$ , tomamos el punto de intersección de la recta con el segmento  $CD$  y llamamos a ese punto  $N'$ . Entonces  $MN \parallel M'N'$ .

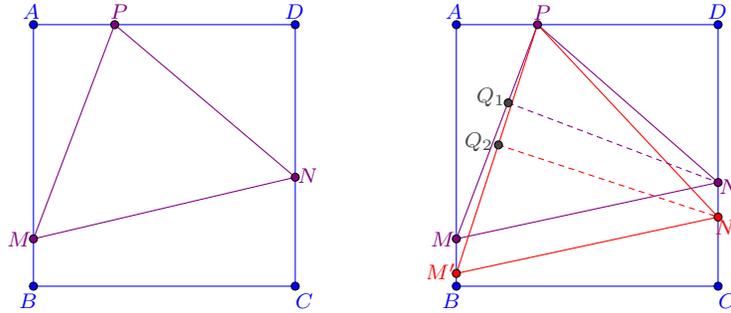


Figura 3.3:

Claramente  $|P, MN| < |P, M'N'|$ . Sean  $Q_1$  y  $Q_2$  las proyecciones de  $N$  en  $MP$  y  $N'$  en  $M'P$ , respectivamente (figura 3.3). Se cumple que  $\angle Q_1NM > \angle Q_2N'M'$  por construcción, además  $|MN| = |M'N'|$  lo que implica que  $|NQ_1| < |N'Q_2|$ , es decir,  $|N, PM| < |N', PM'|$ . Análogamente  $|M, NP| < |M', N'P|$ . Entonces  $\omega(\triangle M'N'P) > \omega(\triangle MNP)$ .

Luego este caso en el que  $\triangle MNP$  no tiene algún vértice en común con  $K$ , podemos encontrar un triángulo con ancho mayor que  $\omega(\triangle MNP)$  lo cual es una contradicción. Esto implica que este caso no es posible.

**Caso 2.a.** Supongamos ahora que existe exactamente un vértice de  $\triangle MNP$  que coincide con un vértice de  $K$ , entonces tomaremos los otros dos vértices en lados no adyacentes (si algún vértice es adyacente, es fácil encontrar un triángulo con ancho mayor).

Construimos un triángulo equilátero  $\triangle M_0N_0P_0$  inscrito en  $K$  tal que  $M_0 = B$  y  $\angle CM_0N_0 = \angle P_0M_0A = 15^\circ$ .

Sea  $h_0 = \omega(\triangle M_0N_0P_0) = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 15^\circ} \approx 0.8965$ . Por hipótesis,  $\triangle MNP$  tiene al

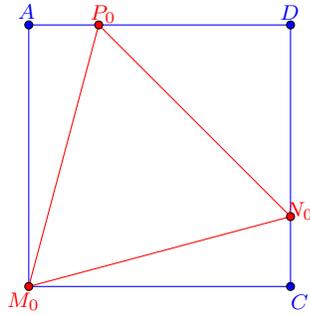


Figura 3.4: Equilátero inscrito en un cuadrado

menos un vértice en común con  $K$ . Para fines prácticos tomemos  $M = M_0$ . Para los puntos  $N, P$  tenemos distintos casos que analizar. Supongamos que alguno de estos puntos coincide con otro de los vértices de  $\triangle M_0N_0P_0$ . Sin pérdida de generalidad tomamos  $P = P_0$ , entonces para  $N$  tenemos dos opciones,  $N \in DN_0$  o  $N \in CN_0$ . Si  $N \in DN_0$  (figura 3.5), entonces  $h_1 = |P, MN| < h_0$ . Ahora, si  $N \in CN_0$  (figura 3.6), entonces  $h_2 = |M, NP| < h_0$ . En ambos casos  $\omega(\triangle MNP) < \omega(\triangle M_0N_0P_0)$  lo cual es una contradicción. Como el conjunto  $K$

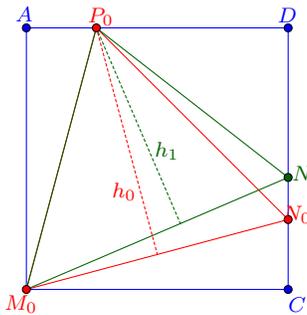


Figura 3.5:

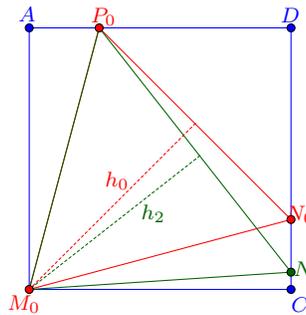


Figura 3.6:

es simétrico el caso  $N = N_0$  es el mismo que el caso  $P = P_0$ . Si los puntos  $N$  y  $P$  coinciden con los puntos  $N_0$  y  $P_0$ , entonces  $\omega(\triangle MNP) = h_0$

Si  $P \neq P_0$  y  $N \neq N_0$ , entonces nos encontraremos con tres posibilidades. La primera es cuando  $N \in DN_0$  y  $P \in DP_0$  (figura 3.7), la segunda es cuando  $N \in CN_0$  y  $P \in AP_0$  (figura 3.8), y la tercera cuando  $N \in DN_0$  y  $P \in AP_0$

(figura 3.9). Este último caso es simétrico al caso  $N \in CN_0$  y  $P \in DP_0$ .

En el primer caso,  $h_3 = |P, MN| < h_0$ . En el segundo,  $h_4 = |M, NP| < h_0$ . Para el tercer caso el análisis es más complejo. Sea  $M_1$  el punto medio de  $MP$

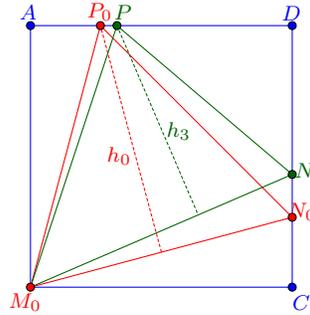


Figura 3.7:

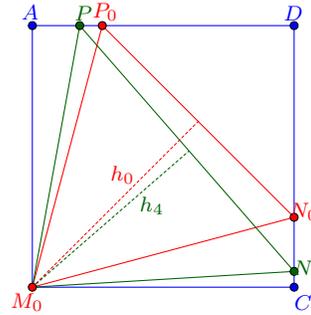


Figura 3.8:

y trazamos la mediatriz del segmento, tomamos el punto de intersección de esta mediatriz con el lado  $CD$  y lo llamamos  $N_1$  (figura 3.9).

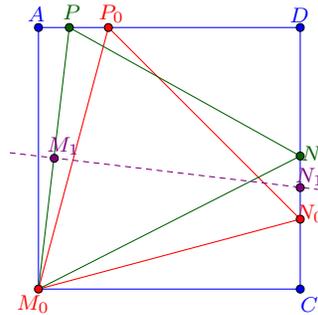


Figura 3.9:

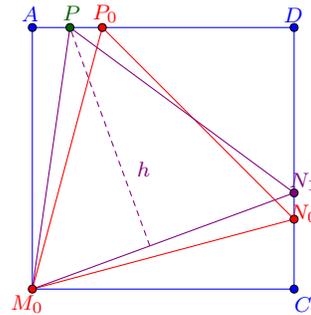


Figura 3.10:

Por construcción  $\triangle MN_1P$  es isósceles, es decir  $h = |P, M_0N_1| = |M_0, PN_1|$ . Notemos también que  $\omega(\triangle M_0N_1P) \leq h$ , y el número  $h$  se puede determinar mediante sencillos cálculos (usando geometría analítica).

Tomamos como origen el punto  $M_0$  y sea  $t = |AP|$ , entonces  $P = (t, 1)$ , la ecuación de la recta que pasa por  $M_0$  y  $P$  es  $l_1 : y = \frac{1}{t}x$ . La recta  $l_2 \perp l_1$

que pasa por  $M_1$  tiene ecuación  $l_2 : y = -tx + \frac{1+t^2}{2}$ . La intersección de  $l_2$  con el segmento  $CD$  es el punto  $N_1$  y tiene coordenadas  $N_1 = (1, \frac{t^2+1}{2} - t)$ . La recta  $l_3$  que pasa por  $M_0$  y  $N_1$  tiene ecuación  $l_3 : y = \frac{(t-1)^2}{2}x$ . Notemos que  $h = |P, M_0N_1| = |P, l_3|$ . Calculamos esta distancia y tenemos:

$$h = \frac{|t(t-1)^2 - 2|}{\sqrt{(t-1)^4 + 4}}$$

Como  $t = |AP|$ , entonces este número está definido en el intervalo  $(0, |AP_0|)$ . Esto implica que  $|t(t-1)^2 - 2| = 2 - t(t-1)^2$ . Es evidente que la altura  $h$  es un número que depende únicamente del valor de  $t$ , donde  $0 < t < |AP_0| = \tan 15^\circ$ , entonces podemos establecer una función  $h(t) : (0, \tan 15^\circ) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como:

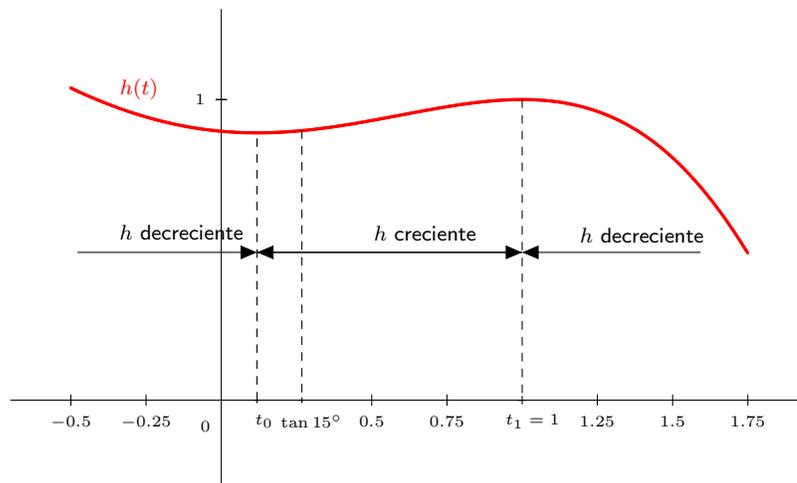
$$h(t) = \frac{2 - t(t-1)^2}{\sqrt{(t-1)^4 + 4}} \quad (3.1)$$

Evidentemente  $t \neq 0$  ya que estamos suponiendo que ningún otro vértice de  $\triangle MNP$  además de  $M$  coincide con un vértice de  $K$ , de igual manera  $t \neq \tan 15^\circ$  ya que eso implicaría que  $P = P_0$  y  $N_1 = N_0$ . Es fácil ver que  $h(t)$  es diferenciable en  $(0, \tan 15^\circ)$  y que

$$h'(t) = \frac{-t^4 + 6t^3 - 14t^2 + 10t - 1}{(t^2 - 4t + 5)\sqrt{(t-1)^4 + 4}} \quad (3.2)$$

La función  $h'$  es continua en  $\mathbb{R}$ , en particular en el intervalo definido para  $t$ . Además  $h'(t) = 0$  si y solo si el término  $-t^4 + 6t^3 - 14t^2 + 10t - 1 = 0$ . Este polinomio tiene dos raíces reales, una de ellas es en  $t_1 = 1$  y la otra es en  $t_0 = \frac{\sqrt[3]{-64+6\sqrt{114}} + \sqrt[3]{-64-6\sqrt{114}} + 5}{3} \approx 0.1187$ . Utilizando el criterio de la segunda derivada sabemos que el punto  $h(t_0)$  es un mínimo local y el punto  $h(t_1)$  es un máximo local de la función  $h(t)$  en el intervalo  $[0, 1]$ . La función  $h'(t)$  es negativa en el intervalo  $(0, t_0)$  y positiva en el intervalo  $(t_0, t_1)$ , esto nos dice que  $h$  es decreciente en  $(0, t_0)$  y creciente en  $(t_0, t_1)$  (figura 3.2). De lo anterior tenemos que  $\max_{0 \leq t \leq t_0} h(t) = h(0)$  y  $\max_{0 \leq t \leq \tan 15^\circ} h(t) = h(\tan 15^\circ) \leq h(t_1)$ , además  $\max\{h(t_0), h(\tan 15^\circ)\} = h(\tan 15^\circ)$ . En resumen:

$$h(t) < h(\tan 15^\circ) = h_0 \quad 0 < t < \tan 15^\circ.$$

Figura 3.11: Gráfica de la función  $h(t)$ 

Entonces para cualquier punto  $t = |AP| \in (0, \tan 15^\circ)$  se cumple que  $\omega(\triangle M_0 N_1 P) \leq h(t) < h(\tan 15^\circ) = h_0$ .

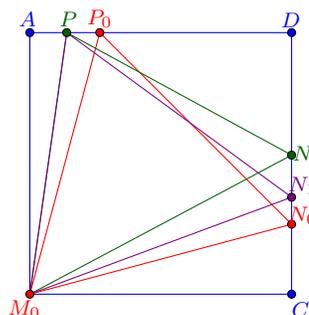


Figura 3.12:

Ahora, el punto  $N$  tiene tres posibilidades: la primera de ellas es que  $N = N_1$ , esto implica que  $\omega(\triangle MNP) = \omega(\triangle M_0 N_1 P) < h_0$ . La segunda es que  $N \in DN_1 - \{D, N_1\}$ , esto implica que  $\omega(\triangle MNP) \leq |P, MN| < \omega(\triangle MN_1 P) \leq |P, MN_1| < h_0$ . La tercera opción es que  $N \in N_0 N_1 - \{N_0, N_1\}$ , lo que implica que  $\omega(\triangle MNP) \leq |M, NP| < \omega(\triangle MN_1 P) \leq |M, N_1 P| < h_0$ .

En cualquier caso  $\omega(\triangle MNP) < \omega(\triangle MN_1P) < \omega(\triangle M_0N_0P_0) = h_0$ , pero esto contradice nuestra suposición sobre la relación de estos anchos ( $\omega(\triangle M_0N_0P_0) < \omega(\triangle MNP)$ ). Esta contradicción implica que

$$\omega(\triangle MNP) \leq \omega(\triangle M_0N_0P_0)$$

**Caso 2.b** Ahora supongamos que  $\triangle MNP$  tiene dos vértices en común con  $K$  ( $M$  y  $N$ ). Aquí se tienen dos casos, cuando los vértices son cruzados (figura 3.13) y cuando los vértices son adyacentes (figura 3.14).

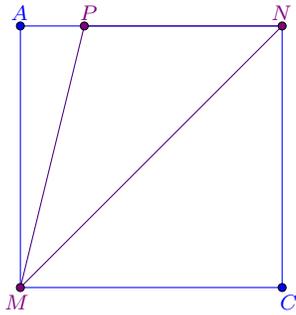


Figura 3.13:

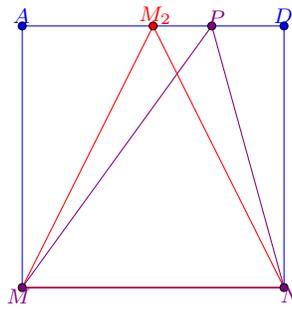


Figura 3.14:

En el primer caso (figura 3.13), sin importar donde se encuentre el tercer vértice,

$$\omega(\triangle MNP) \leq \omega(\triangle AMC) = \frac{1}{\sqrt{2}} < h_0$$

En el segundo caso (figura 3.14), si el tercer vértice pertenece a uno de los lados adyacentes, se tiene la misma cota  $\omega(\triangle MNP) < \omega(\triangle AMC)$ . Si el tercer vértice está en el lado opuesto, consideramos el punto medio  $M_2$  de este lado. Entonces  $|N, MP| > |N, M_2M|$  ó  $|M, NP| > |M, NM_2|$  pero no ambas. Gracias a esta disyunción exclusiva tenemos que  $\omega(\triangle MNP) \leq \omega(\triangle MNM_2)$ . Haciendo algunos cálculos obtenemos  $\omega(\triangle MNM_1) = \frac{2}{\sqrt{5}}$  y esto implica que

$$\omega(\triangle MNP) \leq \omega(\triangle MN_1) \approx 0.8944 < h_0 \approx 0.8965.$$

Para todos los casos  $\omega(\triangle MNP) < h_0$ , pero estamos suponiendo que  $\omega_3(K) = \omega(\triangle MNP)$ . De esta manera podemos afirmar que  $K$  no tiene dos vértices en común con  $K$ .

La hipótesis de que  $\triangle MNP$  tiene todos sus vértices en común con  $K$  también es falsa, ya que

$$\omega(\triangle MNP) = \frac{1}{\sqrt{2}} < h_0.$$

Entonces podemos afirmar que  $\triangle MNP$  tiene un solo vértice en común con  $K$ , y además  $\omega(\triangle MNP) = \omega(\triangle M_0N_0P_0)$ . Por lo tanto

$$\lambda(K) = \frac{\omega(K)}{\omega_3(K)} = \frac{1}{\omega(\triangle MNP)} = \frac{1}{h_0} = \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$$

□

Ahora tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema principal de este capítulo. Lo enunciaremos nuevamente y haremos la prueba.

**Teorema.** Sea  $K$  un paralelogramo en el plano. Entonces  $\lambda(K) \leq \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}} \approx 1.115$ . Con la igualdad si y solo si  $K$  es un cuadrado.

*Demostración.* Para fines prácticos supondremos que  $\omega(K) = 1$ . Si  $K$  es un cuadrado, por el Lema 3.2.1 se afirma que  $\lambda(K) = \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$ , en este caso se cumple la igualdad. Ahora supongamos que  $K$  es un rectángulo, con vértices  $A, B, C, D$ , también podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que los vértices se encuentran como en la figura 3.15. Sea  $b = |AB|$ , como  $\omega(K) = 1$  entonces la altura de  $K$  es igual a 1 y  $b > 1$ .

Sea  $M$  el punto medio de  $CD$ . Si  $b \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ , entonces  $b^2 \geq \frac{4}{3}$  lo que implica que  $b \geq \sqrt{1 + \frac{b^2}{4}} = |AM|$ , esto significa que  $|AB| \geq |AM| = |BM|$ , entonces el lado más grande de  $\triangle ABM$  es  $AB$ , y como la altura mínima es perpendicular al lado más grande, tenemos que  $\omega(\triangle ABM) = 1$ . Lo que implica que  $\omega_3(K) \geq \omega(\triangle ABM) = 1$ . Entonces  $\omega_3(K) > h_0$  y por tanto

$$\lambda_3(K) = \frac{1}{\omega_3(K)} < \frac{1}{h_0} = \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}}.$$

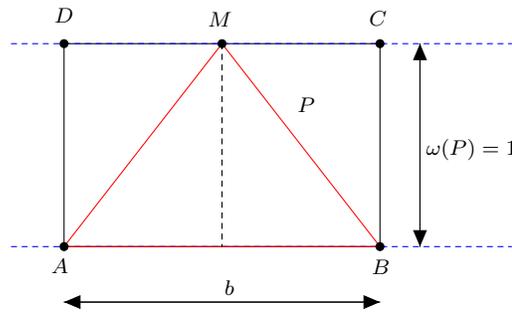


Figura 3.15:

En este caso si  $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$  tenemos que  $|AB| = |AM| = |BM|$ , en este caso el triángulo  $\triangle ABM$  es equilátero y su ancho es igual a 1.

Ahora analicemos el caso en el que  $1 < b < \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Tomamos los punto  $E \in AB$  y  $F \in CD$  tal que  $|AE| = |DF| = 1$ . Construimos el triángulo equilátero  $\triangle ANP$  inscrito en el cuadrado  $AEPD$  y trazamos la mediatriz del segmento  $AP$ , extendemos esta recta hasta su punto de intersección con la frontera del rectángulo  $ABCD$ , llamamos a ese punto  $H$  (figura 3.16). Esta mediatriz interseca al segmento  $BC$  ya que  $|AB| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} < 2^{**}$ .

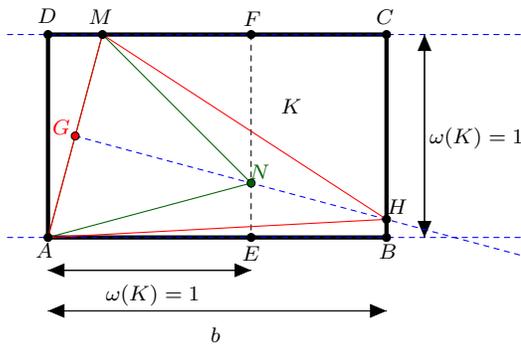


Figura 3.16:

Evidentemente se cumple que  $\omega(\triangle AMH) > \omega(\triangle AMN) = h_0$ , lo que implica que

$$\lambda_3(K) = \frac{1}{\omega_3(K)} \leq \frac{1}{\omega(\triangle APH)} < \frac{1}{h_0} = \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$$

Ahora supongamos que  $K$  es un paralelogramo con vértices  $A, B, C$  y  $D$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los vértices se encuentran como en la figura 3.17, sean  $a = |AD|$  y  $b = |AB|$  y supongamos, de igual forma, que  $a \leq b$ . Ahora, si  $\alpha = \angle CDA$  se tienen los siguientes casos para este ángulo:

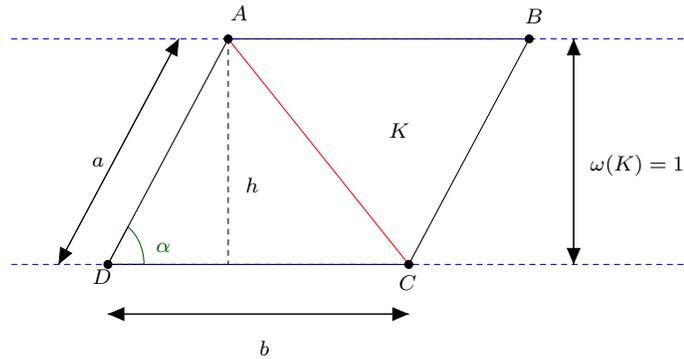


Figura 3.17:

El primer caso es cuando  $\alpha \leq 60^\circ$ , entonces tenemos que  $\angle ACD \leq \alpha \leq \angle DAC$ , entonces  $|DC| \geq |AD|, |AC|$ , esto implica que  $\omega_3(K) \geq \omega(\triangle ADC) = 1 < h_0$ . Consecuentemente

$$\lambda_3(K) = \frac{1}{\omega_3(K)} \leq \frac{1}{\omega(\triangle ADC)} < \frac{1}{h_0} = \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$$

El segundo caso es cuando  $60^\circ < \alpha < 75^\circ$ , aquí tenemos dos posibilidades, que la mediatriz de  $AD$  intersekte a  $DC$  o que intersekte a  $BC$ .

Cuando la mediatriz de  $AD$  intersekte al segmento  $DC$  (figura 3.18), tenemos que  $|DX| = |AX| \geq |AD|$ , entonces  $\omega(\triangle ADX) = 1$ . Siguiendo el razonamien-

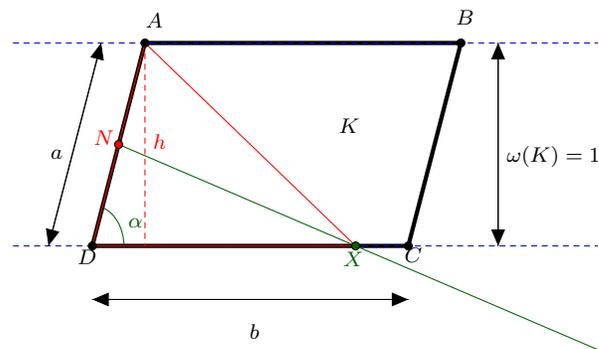


Figura 3.18:

to anterior tenemos que

$$\lambda_3(K) < \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}}.$$

Cuando la mediatriz de  $AD$  interseca al segmento  $BC$  (figura 3.19), tomamos un punto  $M$  en la mediatriz de  $AD$ , tal que  $|AD| = |DM| = |AM|$ . Como  $\angle DCX > 90^\circ$ , tenemos que  $|DX| > |DC|$  y como  $|DC| \geq |AD|$ , se sigue que  $|DX| > |DM| = |AD|$ , esto significa que  $M \in \text{int}(K)$ . Por otro lado  $|AD| = \frac{1}{\sin \alpha}$  y como  $\alpha < 75^\circ$ , entonces  $|AD| = \frac{1}{\sin \alpha} > \frac{1}{\sin 75^\circ} = d_0$ , donde  $d_0$  es la longitud del lado del triángulo  $\triangle M_0 N_0 P_0$  del lema anterior.

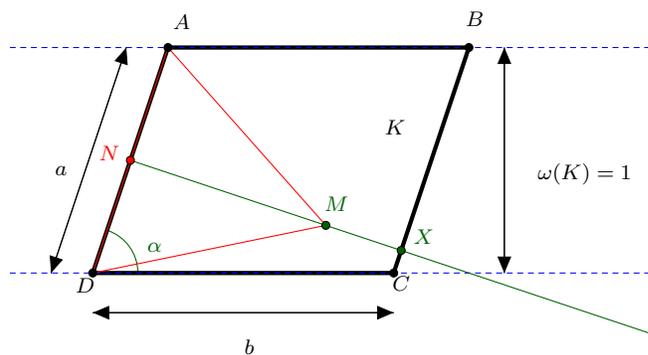


Figura 3.19:

Entonces  $\omega(\triangle ADX) > \omega(\triangle ADM) > \omega(\triangle M_0N_0P_0) = h_0$  y en consecuencia

$$\lambda_3(K) = \frac{1}{\omega_3(K)} \leq \frac{1}{\omega(\triangle ADX)} < \frac{1}{h_0} = \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$$

El tercer caso es cuando  $\alpha \geq 75^\circ$ . Tomamos la recta que pasa por  $D$  y forma un ángulo de  $75^\circ$  con el lado  $DC$ , claramente esta línea intersecta al lado  $AB$  en un punto  $M$ . Trazamos la mediatriz de  $DM$  y donde intersecta al segmento  $BC$  llamamos a ese punto  $X$ , tomamos el punto  $N$  en dicha mediatriz, tal que  $|DM| = |DN| = |MN|$ .

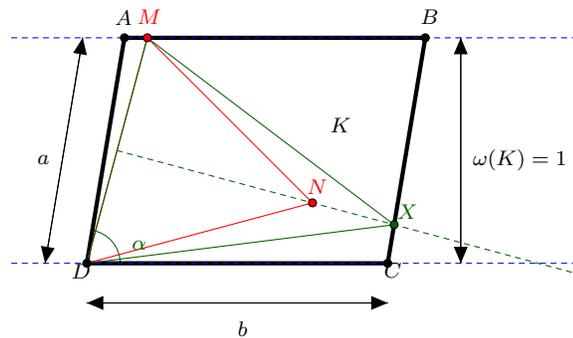


Figura 3.20:

Entonces  $\omega(\triangle DMX) > \omega(\triangle DMN) = h_0$ . Siguiendo el razonamiento del caso anterior tenemos que

$$\lambda_3(K) < \frac{2 \cos 15^\circ}{\sqrt{3}}$$

Habiendo considerado todos los casos para el paralelogramo  $K$  queda demostrada la desigualdad.  $\square$

Como pudo observarse la demostración de estos teoremas es bastante extensa ya que involucra revisar muchos posibles casos. Este análisis se elaboró gracias a la ayuda de un sistema de cómputo, mediante el cual pudimos obtener una aproximación al número  $\lambda_3(K)$ , y a su vez pudimos observar el comportamiento del triángulo con el cual obtenemos  $\omega_3(K)$ , y pudimos conjeturar lo que ya se demostró.

### 3.3. Polígonos regulares

En este espacio presentaremos los resultados obtenidos para la familia de polígonos regulares, para la cual sera necesario probar el siguiente lema.

**Lema 3.3.1.** Sean  $A, B$  y  $C$  los vértices de un triángulo equilátero en el plano y sean  $A', B'$  y  $C'$  los vértices de un triángulo semejante a  $\triangle ABC$ . Sean  $M, N$  y  $P$  puntos en los segmentos  $AA', BB'$  y  $CC'$ , respectivamente. Si los puntos  $M, N, P$  se encuentran a la misma proporción en sus segmentos, entonces el triángulo  $\triangle MNP$  es equilátero.

*Demostración.* Supongamos que  $M, N$  y  $P$  están a una proporción  $\alpha$ . Denotaremos al número complejo correspondiente al punto  $A$  como  $a$ , así mismo lo haremos para los puntos restantes. Sea  $\lambda = e^{i\frac{\pi}{3}}$ , entonces  $c = a + \lambda(b - a)$  y  $c' = a' + \lambda(b' - a')$

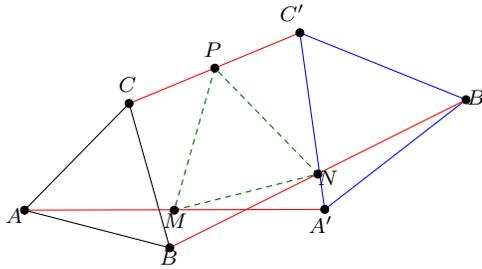


Figura 3.21:

Como  $M, N$  y  $P$  están en proporción  $\alpha$  en los segmentos  $AA', BB'$  y  $CC'$ , respectivamente, entonces tenemos  $m = \alpha a + a'(1 - \alpha)$ ,  $n = \alpha b + b'(1 - \alpha)$  y  $p = \alpha c + c'(1 - \alpha)$ . Tenemos que

$$n - m = \alpha(b - a) + (1 - \alpha)(b' - a')$$

Por otro lado, tenemos

$$p - m = \alpha(c - a) + (1 - \alpha)(c' - a')$$

si sustituimos  $c$  por  $a + \lambda(b - a)$  y  $c'$  por  $a' + \lambda(b' - a')$  en la ecuación anterior, tenemos

$$p - m = \lambda(\alpha(b - a) + (1 - \alpha)(b' - a')) = \lambda(n - m)$$

Entonces  $p = m + \lambda(n - m)$ , por lo tanto el triángulo  $\triangle MNP$  es equilátero.  $\square$

Gracias a este lema podemos encontrar una muy buena cota para el número  $\lambda_3(K)$ , cuando  $K$  es un polígono regular. Veámoslo en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 3.3.1.** Supongamos que tenemos un pentágono regular  $K$  de ancho 1, cuyo conjunto de vértices es  $\{A, B, C, D, E\}$ , y sin pérdida de generalidad supongamos que se encuentran como en la figura 3.22. Trazamos la bisectriz  $g$  del ángulo  $\angle BAE$ , y trazamos los rayos  $g_1$  y  $g_2$ , a través del punto  $A$ , que forman un ángulo con la recta  $g$  de  $30^\circ$ , en sentido anti-horario y horario, respectivamente.

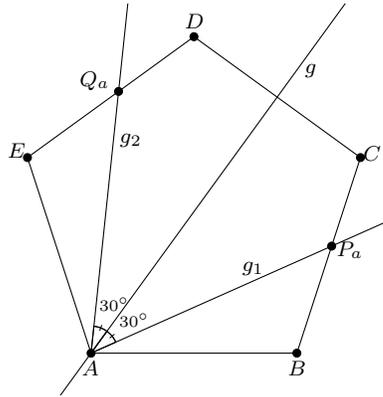


Figura 3.22:

Sean  $P_a$  y  $Q_a$  los puntos de intersección de  $g_1$  y  $g_2$  con  $Fr(K)$ , respectivamente, y sea  $h = \omega(AP_aQ_a)$ . Consecuentemente, el triángulo  $\triangle AP_aQ_a$  es equilátero. Ahora hacemos la misma construcción desde el vértice  $C$  y tenemos el triángulo equilátero  $\triangle CP_cQ_c$  (figura 3.23).

Si  $X \in AQ_c$ ,  $Y \in CP_a$  y  $Z \in P_cQ_a$  están en la misma proporción, aplicamos el lema 3.3.1 sobre los triángulos  $\triangle AP_aQ_a$  y  $\triangle CP_cQ_c$  y podemos afirmar que  $\triangle XYZ$  es equilátero. Observemos que  $|AQ_c| = |CP_a|$ , por simetría de la figura. Además,  $|XY| \leq |AP_a|$ , lo que implica que  $\omega(\triangle XYZ) \leq \omega(\triangle AP_aQ_a)$ . Ahora supongamos que tenemos un punto  $X$  en el segmento  $AQ_c$  y escogemos los puntos  $Y \in CP_a$  y  $Z \in P_cQ_a$  de manera que se encuentren a la misma proporción en sus respectivos segmentos. De esta manera se puede encontrar cualquier triángulo equilátero (inscrito en  $K$ ) que tenga un vértice en el segmento  $AQ_c$ , y además esos triángulos tienen ancho menor o igual a  $h_5$ .

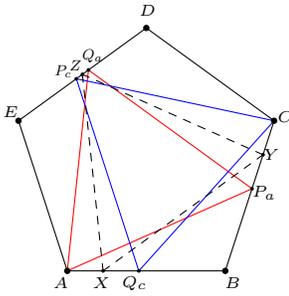


Figura 3.23:

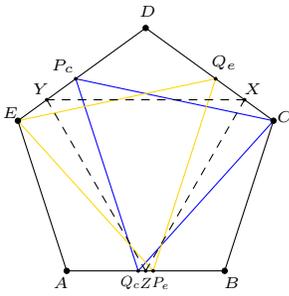


Figura 3.24:

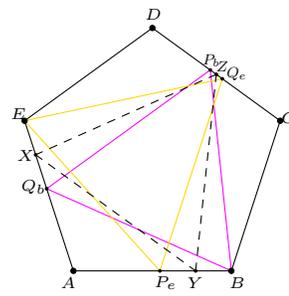


Figura 3.25:

Ahora hagamos la misma construcción desde el vértice  $E$  para formar el triángulo equilátero  $\triangle EP_eQ_e$  (figura 3.24). Aplicando el lema 3.3.1 a los triángulos  $\triangle CP_cQ_c$  y  $\triangle EP_eQ_e$  y se infiere, análogamente, que cualquier triángulo equilátero (inscrito en  $K$ ) con un vértice en el segmento  $Q_cP_e$  tiene ancho menor o igual a  $h_5 = \omega(CP_cQ_c)$ .

Repetimos la construcción desde el vértice  $B$  para obtener el triángulo equilátero  $\triangle BP_bQ_b$  (figura 3.25). Análogamente podemos decir que cualquier triángulo equilátero (inscrito en  $K$ ) con un vértice en el segmento  $P_eB$  tiene ancho menor o igual a  $h_5 = \omega(BP_bQ_b)$ . En conjunto tenemos que cualquier triángulo equilátero inscrito en  $K$  con un vértice en  $AB$  tiene ancho menor o igual que  $h_5$ , pero como  $K$  es simétrico, entonces afirmamos que cualquier triángulo equilátero inscrito en  $K$  tiene ancho menor o igual que  $h_5$ . Gracias a esta afirmación tenemos que:

$$\lambda_3(K) = \frac{\omega(K)}{\omega_3(K)} \leq \frac{1}{h_5} = \frac{\sin 48^\circ}{\sqrt{3} \sin 108^\circ \cot 72^\circ} \approx 1.3884.$$

**Ejemplo 3.3.2.** Ahora supongamos que  $K$  es un hexágono regular de ancho 1, cuyo conjunto de vértices es  $\{A, B, C, D, E, F\}$ . Podemos suponer que los vértices se encuentran como en la figura 3.26. Al repetir la construcción anterior del triángulo equilátero, desde cualquier vértice, se observa que dicho triángulo comparte todos sus vértices con el hexágono. Esto sucede con cualquier polígono regular cuya cantidad de vértices sea múltiplo de 3.

Aplicamos el lema 3.3.1 usando los triángulos  $\triangle ACE$  y  $\triangle BDF$ , y de esta manera afirmamos que cualquier triángulo equilátero con un vértice en el segmento

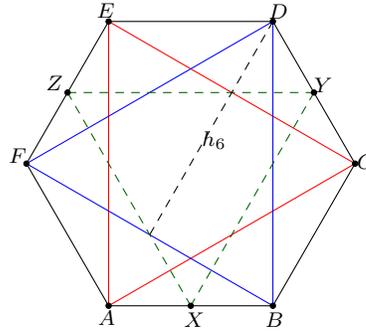


Figura 3.26: Ejemplo Hexagonal

$AB$  tiene ancho menor o igual que  $h_6 = \omega(\triangle ACE)$ . Por simetría de  $K$  concluimos que cualquier triángulo equilátero inscrito en  $K$  tiene ancho menor o igual que  $h_6$ . Entonces:

$$\lambda_3(k) \leq \frac{1}{h_6} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547.$$

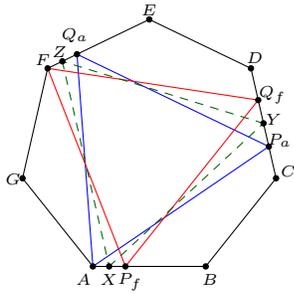


Figura 3.27:

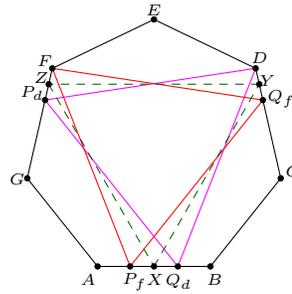


Figura 3.28:

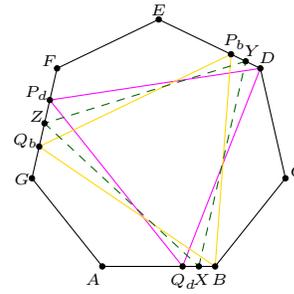


Figura 3.29:

**Ejemplo 3.3.3.** Supongamos que ahora tenemos un heptágono regular  $K$  de ancho 1 y su conjunto de vértices es  $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los vértices de  $K$  se encuentran como en la figura 3.27. Al repetir la construcción del triángulo equilátero sobre los vértices  $a$  y  $F$  obtenemos los triángulos  $\triangle AP_aQ_a$  y  $\triangle FP_fQ_f$  (figura 3.27), sobre los cuales podemos aplicar el lema 3.3.1. Así se afirma que cualquier triángulo equilátero (inscrito en  $K$ ) con un vértice en el segmento  $AP_f$  tiene ancho menor o igual a

$h_7 = \omega(\triangle AP_a Q_a)$ . Repetimos la construcción desde el vértice  $D$  para obtener el triángulo equilátero  $\triangle DP_d Q_d$  (figura 3.28). Aplicamos el lema 3.3.1 usando los triángulos  $\triangle FP_f Q_f$  y  $\triangle DP_d Q_d$ , y tenemos que cualquier triángulo equilátero (inscrito en  $K$ ) con un vértice en el segmento  $P_f Q_d$  tiene ancho menor o igual que  $h_7$ . Del mismo modo construimos el triángulo equilátero  $\triangle BP_b Q_b$  (figura 3.29). Análogamente podemos decir que cualquier triángulo equilátero (inscrito en  $K$ ) con un vértice en el segmento  $Q_d B$  tiene ancho menor o igual que  $h_7$ . Recapitulando, tenemos que cualquier triángulo equilátero con un vértice en el segmento  $AB$  tiene ancho menor o igual que  $h_7$ , pero como  $K$  es una figura simétrica, esto implica que cualquier triángulo rectángulo inscrito en  $K$  tiene ancho menor o igual a  $h_7$ . Entonces:

$$\lambda_3(K) \leq \frac{1}{\omega(\triangle AP_a Q_a)} = \frac{\tan(540/7) \sin(480/7)}{2\sqrt{3} \cos(180/7) \sin(720/7)} \approx 1.3403.$$

Como podemos apreciar el método utilizado para encontrar el equilátero de longitud de lado más grande inscrito en estas tres figuras se puede generalizar para poder encontrar el triángulo equilátero de longitud de lado más grande inscrito en cualquier polígono regular. Cabe destacar que tenemos una fuerte creencia de que en cada uno de estos casos se cumple la igualdad, es decir, el 3-ancho de cualquier polígono regular se obtiene con el equilátero de longitud de lado más grande inscrito en este.



---

## Capítulo 4

### Algoritmo para estimar $\lambda_3$

---

Como mencionamos anteriormente, encontrar el valor de  $\omega_3$  no es una tarea fácil, pero tampoco es imposible. Utilizaremos este espacio para explicar una manera sencilla de aproximarnos a este número, utilizando herramientas computacionales. A continuación explicaremos la idea intuitiva del algoritmo; después daremos un pseudocódigo; calcularemos la eficacia del algoritmo, es decir, que tanto nos aproxima al valor de  $\omega_3$ . Para fines prácticos nos limitaremos a calcular  $\omega_3$  de cuadriláteros convexos.

Supongamos que tenemos un cuadrilátero convexo  $K$ , dividimos cada segmento de  $K$  en  $n$  partes iguales, así obtenemos  $4n$  puntos en la frontera de  $K$ . Con este conjunto de puntos podemos formar a lo más  $\binom{4n}{3} - 4(n-1)$  triángulos diferentes, entonces tenemos un conjunto discreto de puntos para el cual es posible calcular su  $\omega_3$ . Es evidente que a medida que  $n$  crece el conjunto de puntos se aproxima a la frontera de  $K$ , pero a su vez la cantidad de posibles triángulos aumenta en gran medida. Por ejemplo, si dividimos cada segmento de  $K$  en 10 partes iguales tendríamos un total de 40 puntos frontera de  $K$ , con los cuales se pueden formar a lo más 9844 triángulos diferentes, pero si dividimos cada segmento en 100

tendríamos que revisar más de 10 millones de triángulos para encontrar  $\omega_3$ . Esto significa que para tener una buena aproximación de  $\omega_3(K)$  este algoritmo no es útil, entonces procederemos a hacer algunos cambios en nuestro método, comenzando por remover muchos de estos triángulos. Si un triángulo  $\triangle ABC$  inscrito en  $K$  tiene dos vértices en un mismo segmento del cuadrilátero, entonces el triángulo cuyos vértices son los extremos de dicho segmento y el vértice restante de  $\triangle ABC$  (figura 4.1), tiene ancho mayor o igual a  $\omega(\triangle ABC)$ , esto se debe a que dicho triángulo contiene a  $\triangle ABC$ .

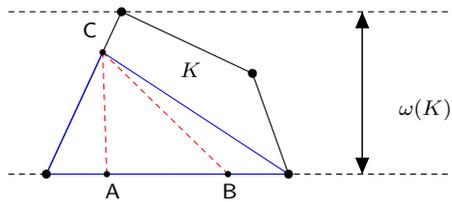


Figura 4.1:

Sabiendo esto podemos reducir la cantidad de triángulos por analizar. Si tenemos un total de  $4n$  puntos y descartamos los triángulos contenidos en otros casos, tenemos que el número total de triángulos diferentes es a lo más  $4n(n^2 - 2n + 2)$ .

Ahora, si el conjunto en cuestión tiene centro de simetría, entonces tenemos muchos menos casos que analizar y esto le da mayor fuerza a nuestro algoritmo. Si consideramos ambas condiciones a la hora de programar, el código será optimizado y dará mejores resultados.

En la tabla 4.1 podemos ver una comparación de la cantidad de triángulos que analiza cada método, es evidente que el segundo método es más eficiente ya que obtiene el mismo resultado y solamente analiza un tercio de todos los triángulos que analiza el primero.

Ahora, a pesar de que hemos modificado el algoritmo seguimos teniendo una gran cantidad de triángulos para calcular  $\omega_3$ , pero si queremos analizar todos

N° de Partes	Método 1	Método 2
2	52	16
10	9844	3280
20	82084	28960
50	1313204	480400
100	10586404	3920800
200	85012804	31681600

Cuadro 4.1: Comparación de métodos.

los posibles triángulos usando este algoritmo, entonces no tenemos alternativa. Aunque parezca que este método no es una buena opción, al programarlo nos daremos cuenta que el método sólo realiza operaciones básicas para calcular el ancho de cada triángulo, evidentemente son millones de operaciones básicas, pero una computadora convencional las puede ejecutar en un tiempo corto.

Entonces el pseudo-código de nuestro programa tiene la siguiente estructura.

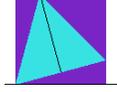
```

1  /*-----Estimacion de Omega_3-----*/
2  Punto P[4*n];
3  AcomodarPuntos(P);
4  Triangulo Auxiliar , Mayor;
5  double ancho_aux = 0;
6  double ancho_max = 0;
7  for(int i=0; i < 2*n; i++)
8      for(int j = n; j < 3*n; j++)
9          for(int k = 2*n; k < 4*n; k++ )
10             if (RevisarPuntos(P[i],P[j],P[k]))
11                 continue;
12             else
13                 {
14                     Auxiliar(P[i],P[j],P[k]);
15                     ancho_aux = CalcularAncho(Auxiliar);
16                     if(ancho_aux > ancho_max)
17                         {
18                             ancho_max = ancho_aux;
19                             Mayor = Auxiliar;
20                         }
21                 }
22  Imprime(ancho_max);

```

La función `RevisarPuntos()` se encarga de verificar si dos puntos pertenecen a un mismo segmento, si además de cumplirse esto los puntos en cuestión no son los puntos extremos de dicho segmento, entonces este caso no es revisado en este método.

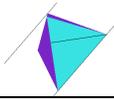
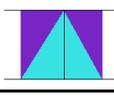
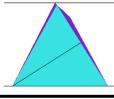
Al poner en marcha nuestro algoritmo sobre cualquier cuadrilátero  $K$  obtenemos resultados que nos aproximan al valor de  $\omega_3(K)$ . En la tabla 4.2 tenemos los resultados obtenidos para un cuadrado  $K$ .

Valor de $n$	Aproximación de $\lambda_3$	Figura
$n = 1$	$\lambda_3(K) \approx 1.414214$	
$n = 2$	$\lambda_3(K) \approx 1.118034$	
$n = 10$	$\lambda_3(K) \approx 1.118034$	
$n = 30$	$\lambda_3(K) \approx 1.116484$	
$n = 100$	$\lambda_3(K) \approx 1.117257$	

Cuadro 4.2: Estimación del 3-ancho del Cuadrado

Estos resultados solo nos sirven para tener una idea de cuál puede ser el posible valor de  $\lambda_3(K)$ , pero esto no vale como una demostración. Cabe destacar que estos resultados fueron los que nos acercaron a la demostración del teorema 3.1.1. En la tabla 4.3 podemos apreciar algunos resultados obtenidos para cinco cuadriláteros diferentes, recordemos que esta es una aproximación de  $\lambda_3(K)$ .

A simple vista se puede apreciar que el triángulo con el que se obtiene la apro-

Valor de $n$	Aproximación de $\lambda_3$	Figura
$n = 100$	$\lambda_3(K) \approx 1.071038$	
$n = 100$	$\lambda_3(K) \approx 1.028332$	
$n = 100$	$\lambda_3(K) = 1$	
$n = 100$	$\lambda_3(K) \approx 1.023592$	
$n = 100$	$\lambda_3(K) = 1$	

Cuadro 4.3: Estimación de  $\lambda_3$  para cuadriláteros

ximación de  $\lambda_3(K)$  tiene al menos un vértice en común con  $K$ , y además este vértice también pertenece a una de las líneas soporte con las que se obtiene el ancho de  $K$ . Por otro lado, podemos observar que a medida que  $n$  crece, el triángulo con el que se obtiene  $\omega_3(K)$  se aproxima a un triángulo equilátero. Estas observaciones son conjeturas que en esta investigación no pudimos probar.

Nuestro algoritmo, a pesar de no ser muy preciso, funciona con todo tipo de figuras convexas sin importar la cantidad de lados que tenga y se puede usar como herramienta para desarrollar una demostración.



---

# Capítulo 5

## Conclusiones

---

El objetivo principal de este trabajo era encontrar una mejor cota para  $\lambda_3$  en el caso de las figuras convexas centralmente simétricas y encontrar una solución más general al problema 1 presentado en el capítulo 2. Así mismo nos propusimos echar mano de las herramientas computacionales para dar una aproximación del valor  $\lambda_3$ . A continuación presentamos los resultados obtenidos para los conjuntos observados.

### 5.1. Curvas convexas

En el capítulo 3 propusimos el teorema 3.1.1 que señala que el número  $4/3$  sirve como cota superior de  $\lambda_3(K)$  cuando  $K$  es una curva centralmente simétrica, y la cota se alcanza si y solo si  $K$  es una circunferencia. A pesar de que ya se conocía la cota  $4/3$  para los centralmente simétricos, no se había establecido que figuras cumplían la igualdad. Se conjetura en esta investigación que el 3-ancho de las curvas centralmente simétricas se obtiene con el triángulo equilátero más

grande inscrito en el conjunto.

## 5.2. Cuadriláteros

El teorema 3.2.1 nos da una mejor cota de  $\lambda_3(K)$ , si  $K$  es un paralelogramo. Esta cota es mejor que las cotas de investigaciones anteriores ya que es menor y resume mejor la información del conjunto  $K$ . Este teorema también nos dice para que figuras se cumple la igualdad. Por otro lado, el algoritmo que programamos y usamos para obtener aproximaciones de  $\lambda_3(K)$  nos da información acerca de como tiene que ser el triángulo con el que se obtiene el 3-ancho de  $K$ . Conjeturamos que para la familia de cuadriláteros, el caso crítico es el caso del cuadrado, es decir,  $\lambda_3(Q) \leq \lambda_3(K)$ , donde  $Q$  es un cuadrado y  $K$  un cuadrilátero. También se conjetura en esta investigación que el 3-ancho de un cuadrilátero se obtiene con el triángulo equilátero más grande inscrito en este.

## 5.3. Polígonos Regulares

Para esta clase de figuras se estableció un método para encontrar el equilátero más grande que se puede inscribir en las figuras. Este método proporciona una muy buena cota de  $\lambda_3(K)$  (cuando  $K$  es un  $n$ -ágono regular) y se puede hacer una generalización para encontrar dicha cota dependiendo del número de vértices de  $K$ . Concluimos conjeturando que si  $K$  es un polígono convexo, el 3-ancho de  $K$  se obtiene con el triángulo equilátero más grande inscrito en  $K$ . De cumplirse esto tendríamos el valor exacto de  $\lambda_3$  para toda esta familia de figuras y podríamos establecer una cota para polígonos convexos en general.

---

# Bibliografía

---

- [1] T. Andreescu and D. Andrica *Complex numbers from A to Z*, Birkhäuser, Boston (2006).
- [2] R. V. Benson, *Euclidean geometry and convexity*, Mc Graw-Hill book company (1967).
- [3] P. Brass, W. Moser and J. Pach *Research problems in discrete geometry*, 231, New York (2005).
- [4] R. Deaux, *Introduction to the geometry of complex numbers*, Dover publications inc., New York (2008).
- [5] H. Debrunner and H. Hadwiger, *Combinatorial geometry in the plane*, Holt, Rinehart and Winston (1964).
- [6] J. Eckhoff, *Transversalenprobleme vom gallai'schen typ*, Dissertation, Göttingen (1969).
- [7] P. Gritzmann and M. Lassak, *Helly-Test for the minimal width of convex bodies*, Institute for mathematics and its applications, **357**, (1987).
- [8] P. Gritzmann and M. Lassak, *Estimates for the minimal width of polytopes inscribed in convex bodies*, *Discrete Comp. Geometry*, **4** (1989), 627 – 635.

- 
- [9] L. Hahn, *Complex numbers and geometry*, The mathematical association of america (1994).
- [10] M. Huicochea and J. Jerónimo-Castro, *The strip of minimum width covering a centrally symmetric set of points*, *Periodica mathematica hungarica*, **58** (2009), 47 – 58.
- [11] J. Jerónimo, *Line transversals to translates of unit discs* *Discrete. Comput. Geom.* **37**, 409-417 (2007).
- [12] J. Jerónimo-Castro and E. Roldán, *Line transversals to translates of a convex body*, *Discrete Comput. Geometry*, **45** (2011), 329 – 339.
- [13] J. Jerónimo-Castro, *Bandas que cubren un conjunto de puntos*, *Miscelánea Matemática*, **61** (2015) 75-86.
- [14] A. Lyusternik, *Convex figures and polyhedra*, D.C. Heath and company, Boston (1966).
- [15] G. Tsintsifas, *The minimum strip of points set*, Manuscript.
- [16] G. Tsintsifas, *The strip (Problem 5973)*, *Amer. Math. Monthly* **83** (1976), 142.
- [17] I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii, *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1961).