Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
División de Estudios de Posgrado
Maestría en Docencia de las Matemáticas

"TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA, UNA PROPUESTA DIDÁCTICA ACERCA DE CÓMO UTILIZAR LA HISTORIA Y LAS APLICACIONES PARA PROMOVER SU APRENDIZAJE"

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Docencia de las Matemáticas

Presenta

Alexander Bell Mejía

Querétaro, Qro., mayo 2003

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Docencia de las Matemáticas

"TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA, UNA PROPUESTA DIDÁCTICA ACERCA DE CÓMO UTILIZAR LA HISTORIA Y LAS APLICACIONES PARA PROMOVER SU PRENDIZAJE"

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Docencia de las Matemáticas

Presenta:
Alexander Bell Mejía

Dirigido por:
M.C. Roberto Torres Hernández

Sinodales:

M.C. Roberto Torres Hernández — Firma
Presidente

M.C. Ana Irene Ramírez Galarza — Firma
Secretario

Dr. Rodolfo San Agustín Chi — Firma
Vocal

Dr. Alejandro J. Díaz-Barriga Casales — Firma
Suplente

M.C. José Enrique Crespo Baltar — Firma
Suplente

Ing. Jorge Martínez Carrillo
Director de la Facultad de Ingeniería

Dr. Sergio Quesada Aldana
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Mayo 2003
México

RESUMEN

En este trabajo se presenta una colección de problemas que constituyen una guía excelente para aquellos maestros que tienen el deseo de desarrollar un curso de Geometría Analítica para Bachillerato basado en la resolución de problemas. A veces recurriendo a la Historia de la Matemática y a veces a la relación que existe entre la Matemática y otras ciencias como la Física, la Astronomía y la Economía, se plantean una serie de problemas que le permitirán al profesor poner en relieve la coherencia, estructura y significatividad lógica de los primeros contenidos de un curso tradicional de Geometría Analítica de Bachillerato y proporcionar a los alumnos la posibilidad de aplicar, de manera integrada, los conocimientos matemáticos que han ido construyendo a lo largo de su formación en esta área del conocimiento. El trabajo se divide en dos partes, en la primera se desarrolla y fundamenta la problemática central y se describe la metodología que se llevó a cabo. Posteriormente, en la segunda parte, se muestra la propuesta didáctica que surge como producto de esta obra y que tiene como objetivo coadyuvar en la intervención del profesor que busca que sus alumnos realicen un aprendizaje significativo de las matemáticas.

(**Palabras clave:** Resolución de problemas, Construcción de conocimientos, Aprendizaje significativo, Significatividad lógica)

SUMMARY

In this work we present a collection of problems which constitute an excellent guide for those teachers who wish to develop an Analytic Geometry course for high school based upon the resolution of problems. Sometimes resorting to the History of Mathematics and sometimes to the existing relation between Mathematics and other sciences such as Physics, Astronomy and Economics, a series of problems are shown which will permit the professor to place emphasis on the coherency, structure and logical significance of the initial contents of a traditional course of high school Analytic Geometry and give the students the possibility to apply, in an integrated manner, the mathematical knowledge which they have been constructing throughout their formation in this area of knowledge. The work is divided in two parts; in the first, the theoretical bases for the main problem are developed and the methods used are described. In the second part, the didactical proposal arising as the product of this work and whose purpose is to aid in the intervention of the professor, who seeks a significant gain in the knowledge of mathematics for his pupils, is set forth.

(**Key Words:** Resolution of problems, construction of knowledge, significant learning, logical significance.)

Cualesquiera que hayan sido nuestros logros,
alguien nos ayudó siempre a alcanzarlos.

Althea Gibson

ÍNDICE

1. Introducción

Es común que quienes se dedican a la didáctica de las matemáticas, en cualquier nivel, reconozcan en la actividad de resolución de problemas una característica esencial: hacer matemáticas es, ante todo, resolver problemas. Situación que motiva una convergencia de opiniones con respecto a considerar a la resolución de problemas como la estrategia didáctica central para la enseñanza de las matemáticas y como una actividad óptima para su aprendizaje.

Por ello no resulta extraño que aquellos quienes participan en la docencia de esta ciencia encaminen esfuerzos a promover un aprendizaje basado en la resolución de problemas. Sin embargo, plantear situaciones que le den sentido a un concepto y el seleccionar problemas a los que ese concepto proporciona una respuesta, son cuestiones que demandan investigaciones profundas que requieren de gran experiencia y de una perspectiva que sólo da el haber escalado una altura mayor de conocimientos que aquélla en que se ubica lo que se pretende enseñar, lo que no en pocas ocasiones se traduce en el abandono de esa metodología didáctica.

Así, y teniendo como objetivo principal el apoyar al profesor de Bachillerato en su búsqueda por promover un aprendizaje basado en la resolución de problemas; en ocasiones desde las aplicaciones de las matemáticas, y en ocasiones tratando de recuperar algunos métodos y técnicas antiguas en la resolución y el estudio de los problemas de diversa índole, el presente trabajo constituye una propuesta didáctica para abordar los primeros temas tradicionales de un curso de Geometría Analítica de Bachillerato, vía el planteamiento de situaciones problemáticas.

La estructura del trabajo contiene los pasos correspondientes a una *investigación generalizable a ambientes educativos*, del tipo *investigación y desarrollo* en el que se han diseñado productos efectivos para ser usados en la escuela como material de entrenamiento para profesores y material de aprendizaje (Gay, 1996).

El trabajo se divide en dos partes, en la primera se desarrolla y fundamenta la problemática central y se describe la metodología que se llevó a cabo. Posteriormente, en la segunda parte, se muestra la propuesta didáctica que surge como producto de esta obra y se bosquejan algunos posibles trabajos futuros para continuar en la línea aquí presentada.

2. Planteamiento del problema.

Cuando alguien se dedica a la enseñanza de la matemática se encuentra constantemente con situaciones que señalan, de manera natural, por no decir de manera obvia, la gran *unidad* que caracteriza a esta ciencia. Con esto queremos decir que al estudiar cualquiera de las ramas de la matemática, se puede percibir que sus conceptos están íntimamente ligados y que la relación entre las diferentes ramas y especialidades es muy estrecha. Por poner un ejemplo, ¿qué maestro desconoce la interrelación que existe entre una gráfica (geometría), la tabulación de la misma (aritmética) y su expresión algebraica (álgebra)?

A este respecto, López de Medrano (1970) explica: "En el aspecto teórico las diversas ramas y especialidades de la matemática están estrechamente relacionadas y si bien hay etapas de su desarrollo en que parecen distanciarse irremisiblemente, en otras etapas se vuelven a acercar y enlazar y aparecen principios unificadores y nuevas ramas en que se funden y sintetizan." (pág. 45)

El ejemplo por excelencia, por lo menos a nivel medio superior, al que se recurre para ilustrar esta situación se toma de lo que hoy conocemos como Geometría Analítica; como se sabe, uno de los grandes méritos de René Descartes fue la aplicación conveniente de la bien desarrollada álgebra del siglo XVI al análisis geométrico de los antiguos (lo que hoy denominamos Geometría Euclidiana). Un curso de Geometría Analítica requiere de algebrizar situaciones geométricas y de interpretar geométricamente resultados algebraicos a veces insospechados o esperados.

Sin embargo existe una gran diferencia entre este rasgo característico de la matemática y la percepción que el estudiante de matemáticas de bachillerato tiene sobre ella. En general, los estudiantes de este nivel (aún aquellos que ya cursaron Geometría Analítica), conciben a la matemática como una serie de temas o conceptos independientes.

Esta problemática es descrita de manera puntual por Valencia Arvizu (1990), quien al respecto señala que: "Al terminar un curso de Geometría Analítica, es común que los estudiantes no tengan la menor idea de los alcances y limitaciones de la herramienta matemática que acaban de adquirir, puesto que no poseen elementos de comparación; incluso llegan a pensar que la Geometría que se trabaja en la Geometría Analítica no es Geometría Euclidiana." (pág. 16)

Lamentablemente, si un estudiante de matemáticas concibe a esta ciencia como una serie de temas o conceptos independientes, y no como un todo integrado, entonces la posibilidad de que reconozca sus principios generales relevantes es muy reducida y, como consecuencia de ello, se genera en él la ya consabida sensación de que la matemática es un conjunto enorme de reglas y procedimientos difíciles de aprender[1].

Ante tal panorama, podemos decir que la problemática toma una dimensión mayor. El hecho es que todo alumno que no reconoce el estrecho vínculo entre los conceptos matemáticos que va estudiando adquiere una visión restringida de lo que la matemática es. Situación que, por un lado, le impide comprender el importante papel que esta ciencia tiene como acervo cultural de la humanidad y, por otro, lo limita a poder distinguir lo esencial de lo menos importante o superfluo, a explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, a establecer las relaciones de la matemática con otras disciplinas, a la aplicación de esos conceptos en la resolución de problemas matemáticos y extramatemáticos, ...

[1] En relación a esto, Valencia Arvizu (*ibid.*) señala: "Esta tendencia a atomizar y encapsular los conocimientos obstaculiza el aprendizaje" (pág. 19).

En este contexto (y haciendo referencia de manera concreta al Nivel Medio Superior) uno de los retos que el profesor de matemáticas debe enfrentar, es el de diseñar los medios a través de los cuales los alumnos descubran las conexiones entre las diversas ramas de la matemática que se estudian en el Bachillerato; ya que para un alumno de este nivel, le resulta complicado establecerlas sin una conducción sistemática.

Conscientes de la problemática descrita en los párrafos anteriores y con la responsabilidad que nos atañe como profesores de la asignatura de matemáticas IV de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro, emprendemos aquí una tarea concreta y que constituye el problema a resolver en la presente investigación:

DISEÑAR INSTRUMENTOS DIDÁCTICOS QUE PROPORCIONEN A LOS ALUMNOS DE BACHILLERATO QUE CURSAN LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS IV LA POSIBILIDAD DE APLICAR, DE MANERA INTEGRADA, LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS QUE HAN IDO CONSTRUYENDO A LO LARGO DE SU FORMACIÓN EN ESTA ÁREA DEL CONOCIMIENTO.

3. Justificación

Desde nuestro punto de vista, las dos ideas principales que permean el objetivo general del Programa de Matemáticas IV, del Plan de Estudios de la Escuela de Bachilleres de la U. A. Q. (1999), son:

1. *Dar una visión amplia de lo que es la Geometría Analítica,* y
2. *Integrar los tres cursos previos de matemáticas.*

Sin embargo, la realidad es que son muy pocos los alumnos que, una vez cursada la asignatura de Matemáticas IV, logran concebir a la matemática como un todo integrado.

Sobre este punto, se sabe de sobra que la visión simplista de considerar a la enseñanza como un proceso controlable por el profesor —en donde el papel del alumno se reduce al de un receptor de información—, fomenta en los estudiantes un aprendizaje receptivo-repetitivo, carente de significado y por tanto inconexo y vulnerable al olvido.

A este respecto, Valencia Arvizu (*op. cit.*) señala que la integración de los conocimientos[1] se deja, innecesariamente, para lo último; que la tendencia a atomizar y encapsular los conocimientos obstaculiza el aprendizaje y que, pese a ello, la tenemos muy arraigada.

Desde la perspectiva de Díaz Barriga (1998), esa práctica docente es la causa de que estudiantes preuniversitarios y universitarios empleen, primordialmente, estrategias de aprendizaje centradas en la repetición o memorización de los contenidos, en detrimento de aquéllas que posibilitan un

[1] "Integrar un conocimiento significa, en este caso, relacionarlo con otros conocimientos, buscando semejanzas y diferencias, tratando de incluirlo en estructuras más generales" (*ibid.*, pág. 19)

aprendizaje significativo y el despliegue de habilidades de razonamiento o solución de problemas.

Ante tal situación, es necesario que el profesor reoriente su práctica docente. Es preciso que el alumno de matemáticas sea conducido a través de una serie de experiencias significativas de aprendizaje, cuidadosamente diseñadas, en donde pueda participar activa y críticamente en el descubrimiento de soluciones, sin descuidar la necesidad de inducirlo a una sólida construcción conceptual.

En este sentido, y en concordancia con lo que propone el programa correspondiente, creemos que los primeros temas del curso de Geometría Analítica deben ser tratados (dado que lo son) como ampliaciones o extensiones de los ya adquiridos en los niveles anteriores, facilitando así la integración de los conceptos antecedentes y los que están en construcción. En este contexto, consideramos que no se debe menospreciar la capacidad del estudiante y postergar (hasta el final) tal integración, bajo la idea errónea de que los alumnos deben tener muchos conocimientos para realizarla.

Si las conexiones entre las ideas matemáticas no se promueven de manera adecuada, se corre el riesgo de que el alumno crea que lo que se le está proporcionando es una gran cantidad de reglas o procedimientos los cuales debe memorizar. Por el contrario, si se hace énfasis en esas conexiones, buscando que el alumno descubra que cada concepto de la Geometría Analítica es una extensión o continuación de lo que ya conoce, entonces comprenderá a la matemática como un todo integrado, lo que, a su vez, le servirá para comprender con mayor facilidad los conceptos e ideas matemáticas.

De este modo, para que las propuestas didácticas plasmadas en el plan de estudios no queden como declaración de principios o buenas intenciones, una tarea fundamental del docente es: buscar sistemáticamente que sus alumnos logren la integración de los conceptos matemáticos, a través del diseño de experiencias de aprendizaje que la promuevan de manera eficiente.

Así, de manera específica, lo que se pretende obtener como producto de la presente investigación es un medio didáctico a través del cual, y con la ayuda de su profesor, los alumnos experimenten la integración de los conceptos que ya conocen con aquéllos que irán construyendo en el curso de Geometría Analítica.

4. Marco teórico

Para establecer el sustento teórico de esta investigación, en primera instancia recurrimos a la *"Propuesta para la conformación del Nuevo Plan de Estudios de la Escuela de Bachilleres"*, de la Universidad Autónoma de Querétaro (1999) y, de manera específica, al Programa de Matemáticas IV. Esto con la intención de adherirnos a los principios didácticos teóricos (explícitos o implícitos), bajo los cuales se inspira dicho programa y, de esta forma, buscar que el producto de este proyecto de investigación sea coherente con el currículo matemático vigente.

A continuación transcribimos algunas de las ideas expuestas en ese documento que, desde nuestro punto de vista, manifiestan dichos principios teóricos:

- "Es muy importante que el estudiante esté consciente que saber matemáticas implica saber resolver problemas. Por un problema entendemos una situación nueva para el sujeto, lo distinguimos de un ejercicio donde solamente repite caminos ya conocidos y técnicas, y que sirven para aumentar la habilidad y la destreza. Un problema exige mucho más y de hecho **la parte formativa de las matemáticas, en el sujeto que la estudia, es el generar estrategias que le sirvan para resolver problemas de su entorno, de su vida y de su profesión**. Los problemas que el docente elija para trabajar en su grupo deben propiciar la adquisición significativa del conocimiento sin buscar el nivel de profesionalización del estudiante en la matemática misma." (pág. 4)

- "Ante la perspectiva y la visión de qué es la matemática, se adopta la posición de que siempre que sea posible, se abordarán los temas a través de problemas, no nada más con ejercicios teóricos o técnicos, sino con problemas que vinculen la realidad con la teoría matemática." (pág. 14)

- Se pretende que Matemáticas IV "sea un curso integrador de los tres cursos anteriores." (pág. 38)

- "Al igual que en los cursos anteriores se sugiere iniciar cada tema o subtema con algún problema, mismo que representará un reto al estudiante..." (pág. 39)

Tomando estas ideas como hilos conductores, a continuación expondremos, en primer lugar, dos de los rasgos característicos de las matemáticas que están íntimamente ligados con algunos principios teóricos de la psicopedagogía. Principios que, al ser desarrollados, enmarcarán teóricamente el por qué perseguir una educación matemática apoyada en la resolución de problemas que, además de vincular los conceptos de la matemática misma, muestren la estrecha relación entre ella y otras áreas del conocimiento. Posteriormente, a través del desarrollo de algunos conceptos, se buscará llegar a establecer el de *aprendizaje significativo* como un ingrediente esencial en la concepción constructivista del aprendizaje escolar y, al mismo tiempo, abordar el tema de la intervención pedagógica, a la luz de esta corriente.

4.1 Dos rasgos característicos de la matemática

1) Su unidad

Antes de explicar qué queremos decir con *unidad*, describiremos de manera breve un par de situaciones, de la infinidad que existen, en las que dicha característica es evidenciada.

Situación 1. El concepto de número fraccionario, extensión del concepto de número entero (positivo), tiene su origen en la interacción entre la aritmética y la geometría.

Precisemos lo anterior:

Cuando como resultado del análisis y generalización de una inmensa cantidad de experiencia práctica, el hombre aprende el concepto de número natural y la noción abstracta de forma, las condiciones están dadas para que, de esta misma manera (analizando y generalizando la experiencia práctica), pueda surgir la noción de magnitud geométrica. Esto es cierto ya que *medir* es comparar una magnitud con otra de la misma especie que, de manera arbitraria (o convencional) se toma como unidad.

Demos un ejemplo: Para medir la longitud de un objeto, se *aplica* a éste una cierta unidad de longitud y se *calcula* cuántas veces es posible repetir esa operación; el primer paso (aplicación) es de carácter geométrico y el segundo (cálculo) es de carácter aritmético.

Es un hecho que, en este proceso de medir, generalmente ocurre que la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se está midiendo y, entonces, surge la necesidad de fraccionar la unidad de medida.

En este sentido (y como las primeras magnitudes que se midieron fueron de carácter geométrico —longitudes, superficies de terrenos cultivables y volúmenes de líquidos o de materiales desmenuzables—) es como se afirma que ...n la aparición de las fracciones se observa, de manera clara, la acción mutua de ...tmética y la geometría.

...ación 2. La Geometría Analítica se originó por la unión de la Geometría, ... la idea de magnitud variable.

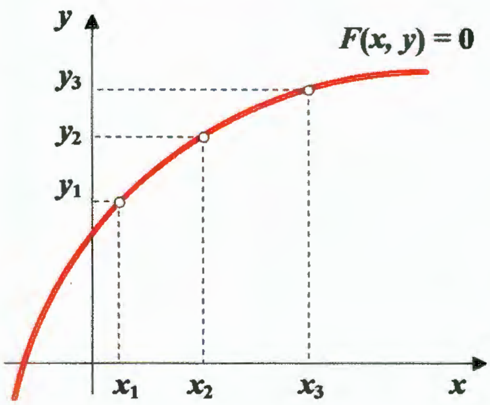
...emos esta afirmación:

En los siglos XVI y XVII la revolución en la astronomía, de manera conjunta al uso productivo y el perfeccionamiento de las máquinas, influenciaron de manera decisiva a la mecánica teórica y al estudio científico del movimiento y del cambio en general.

Aquí, como un reflejo (como una *adaptación*, en el sentido de Piaget[1]) ante los planteamientos teóricos establecidos por las propiedades generales del cambio, surgen en la matemática los conceptos de *magnitud variable* y de *función*.

De manera concreta se puede decir que "el primer paso definido hacia la matemática de las magnitudes variables fue la aparición, en 1637, de la «Geometría» de Descartes, donde se establecen las bases de la llamada Geometría Analítica." (Aleksandrov *et. al.*, 1985, págs. 68 y 69)

Para Descartes, las expresiones algebraicas con dos "incógnitas", $F(x, y) = 0$, tenían un sentido distinto al tradicional de aquella época. Desde su perspectiva, la x es considerada como la abscisa de un punto y y como su ordenada. De este modo, si a los valores de x se les determina (a través de la expresión algebraica) sus correspondientes valores de y, es posible obtener un conjunto de puntos en el plano que determinen una curva.



[1] Más adelante, y de manera detallada, explicaremos esta idea.

En este sentido, Descartes consideró a x y y como variables y no como incógnitas. Luego, la ecuación $F(x, y) = 0$ expresa la interdependencia entre dos magnitudes variables.

Así pues, bajo este enfoque, se considera la posibilidad de que cada expresión algebraica en dos variables, $F(x, y) = 0$, represente una curva en el plano y, recíprocamente, que cada curva represente la totalidad de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación $F(x, y) = 0$.

La consideración anterior sentó las bases para el desarrollo de una nueva rama de las matemáticas; la Geometría Analítica.

Es en este sentido que se afirma que la Geometría Analítica nace de la unión de la Geometría de los griegos (en especial de la teoría de las secciones cónicas: parábola, elipse e hipérbola) con la bien desarrollada álgebra del siglo XVI y la idea de magnitud variable que surgió del estudio del movimiento.

Desde luego que, tal y como señala Aleksandrov (*ibid.*), ninguna teoría surge como resultado de la simple formulación de nuevos conceptos, su creación y desarrollo requieren que esos nuevos conceptos cobren una actividad propia, es decir, que entre ellos se descubran nuevas relaciones que permitan la solución de nuevos problemas. Más aún, "un nuevo concepto sólo puede nacer, desarrollarse y ganar generalidad y precisión sobre la base de esos mismos problemas que aquél permite resolver, y sólo por medio de los teoremas que forma parte." (pág. 68)

Con las dos situaciones descritas anteriormente intentamos ejemplificar uno de los rasgos característicos de la matemática, su *unidad*. A ésta la entendemos en el sentido que López de Medrano (*op. cit.*) describe: "En el aspecto teórico las diversas ramas y especialidades de la matemática están estrechamente relacionadas y si bien hay etapas de su desarrollo en que parecen distanciarse irremisiblemente, en otras etapas se vuelven a acercar y enlazar y aparecen principios unificadores y nuevas ramas en que se funden y sintetizan. En los aspectos históricos y de vinculación con la práctica, existe una sólida concatenación, y a veces un contacto directo entre los resultados y problemas actuales y los que se presentaban hace miles de años, y entre los resultados más puros y los que se hallan en estrecha relación con la actividad práctica." (pág. 45)

En esta última cita se hace referencia al segundo rasgo característico de la matemática que aquí nos interesa comentar, a saber, su vinculación con la práctica, es decir, sus aplicaciones.

2) Sus aplicaciones

Para ilustrar esta característica, nuevamente, nos apoyaremos en el libro de Aleksandrov (*op. cit.*) quien señala: "En último término la vitalidad de la matemática se debe al hecho de que, a pesar de su abstracción, sus conceptos y resultados tienen su origen, como veremos, en el mundo real y encuentra muchas y diversas aplicaciones en otras ciencias, ... reconocer esto es el requisito previo más importante para entender la matemática." (...) "Es particularmente notable que incluso las construcciones más abstractas de la matemática, aquéllas que surgen dentro de la misma ciencia sin motivación inmediata de las ciencias naturales o de la tecnología, tienen sin embrago fructíferas aplicaciones." (págs. 20 y 22)

Algunos ejemplos notables que ponen en relieve lo asentado en el párrafo anterior (y que al mismo tiempo exhiben el hecho de que las matemáticas son, en principio, un lenguaje para expresar las leyes que rigen la naturaleza) son los siguientes:

- Generalizando las leyes de los fenómenos electromagnéticos, establecidos experimentalmente por Michael Faraday, el científico inglés James Clerk Maxwell logró expresarlas en forma de ecuaciones. Con base en esas ecuaciones Maxwell demostró, por métodos puramente matemáticos, que la electricidad y el magnetismo existían juntos (y esto fue lo que dio origen a la Teoría Electromagnética). Más tarde, el físico alemán Heinrich Hertz estudió esas ecuaciones planteadas por Maxwell y logró demostrar, con la producción de ondas electromagnéticas de origen puramente eléctrico, que éstas se desplazaban por el espacio sin necesidad de cables conductores y que su naturaleza es semejante a las ondas luminosas. Finalmente, al aplicar estos principios y leyes del electromagnetismo, a escala industrial, se ha logrado un gran avance tecnológico: la electrificación.

- En el año de 1846, mediante cálculos matemáticos, fue descubierto el planeta Neptuno. Después de analizar ciertas irregularidades en el movimiento de Urano, los astrónomos Adams y Leverrier concluyeron que éstas eran producidas por la atracción gravitacional de otro planeta. Leverrier determinó, mediante cálculos matemáticos, el lugar exacto donde debía estar ese planeta; situación que se comprobó cuando un observador, a quien Leverrier le indicó la posición calculada, pudo localizarlo mediante un telescopio.

- Carl Friedrich Gauss fue el primer hombre (parece ser) que creyó en la naturaleza independiente del postulado de las paralelas de Euclides. Pero como esto implicaba que otras geometrías, basadas sobre otra elección del axioma, fueran lógicamente posibles, se mantuvo al margen, por lo menos públicamente, de este asunto tan polémico en su época y de interés puramente matemático.

Los primeros en retar abiertamente a la autoridad de los milenios y en construir una geometría no-euclidiana fueron el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski y el húngaro Janos Bolyai.

Lobachevski, tuvo cuidado en denominar a su geometría como *imaginaria*, puesto que no veía sentido para ella en el mundo real. Más aún, para la mayoría de los matemáticos de aquella época, los resultados de esta nueva geometría no sólo les parecían imaginarios, sino incluso inimaginables y absurdos. Sin embargo, más tarde, estas ideas fueron la base para la construcción de teorías de espacios no-euclidianos (fundamento para el desarrollo de la Geometría).

Aquí, para mostrar el impacto de aquella *Geometría Imaginaria* de Lobachevski baste mencionar que, una cierta forma de Geometría no-euclidiana de un espacio de cuatro dimensiones, es la base de la Teoría General de la Relatividad.[2]

Desde luego que ejemplos como los citados en los párrafos anteriores son una muestra clara y contundente de lo que la matemática significa para el desarrollo de la ciencia, y ponen en relieve el papel tan importante que desempeña en el desarrollo de nuevas ramas de la tecnología. Sin embargo, todos sabemos que la excepcional amplitud de sus aplicaciones nos convierte no sólo en usuarios indirectos de sus conceptos, sino que en la vida diaria los empleamos de primera mano: Constantemente usamos la aritmética, por ejemplo, para calcular nuestros gastos; la Geometría para determinar el área de alguna superficie; y aunque las reglas que utilizamos son muy sencillas —comparadas con las que estudiantes de Bachillerato, ingenieros, químicos, biólogos, economistas, o cualquier otro profesionista puede usar— no se debe perder de

---

[2] El espacio de velocidades relativista tiene una simetría hiperbólica (Dubrovski *et. al.*, 1987)

vista que en algún periodo de la antigüedad representaron los logros matemáticos más avanzados de esa época.

4.2 La dinámica del desarrollo cognitivo individual

1) Una Teoría epistemológica estructural

Prácticamente todas las teorías modernas del desarrollo intelectual establecen que el avance de la inteligencia presenta diferencias cualitativas entre los conjuntos de actividades que caracterizan diversas etapas del desarrollo personal, en otras palabras, la inteligencia se desarrolla de una *estructura*[3] a otra cualitativamente distinta —una estructura posterior presenta características nuevas, características que no se encuentran presentes en alguna etapa anterior—. De este modo, no se trata sólo de un acumulamiento a lo que ya se tiene, sino que se transforma substancialmente el estilo del pensamiento.

En este contexto, "una pregunta fundamental desde el punto de vista epistemológico es: ¿Qué relación existe entre el medio y el desarrollo intelectual de un individuo? ¿El ambiente determina el desarrollo interior de la persona, o la persona construye internamente ese desarrollo?" (Pinto y Martínez, 1994, pág.14)

Se suele denominar "Interaccionistas" a las teorías que, ante tal cuestionamiento, ceden el impulso del desarrollo intelectual, a la interacción misma entre la persona y el entorno.

Estas corrientes han tenido implicaciones en muchos campos del conocimiento y han dado origen a sistemas pedagógicos. Con respecto a esto, Pinto y Martínez (*ibid.*) señalan: "Entre las construcciones teóricas que pueden

[3] Una *estructura* puede entenderse como el sistema de relaciones internas entre los elementos de un "objeto" que lo caracterizan como tal.

clasificarse como interaccionistas, se encuentra la producida por el conocido investigador suizo Jean Piaget y sus asociados. Una gran cantidad, si no prácticamente todos los programas educativos mexicanos se encuentran en la actualidad influidos en alguna medida, en ocasiones quizá inconscientemente por parte de sus autores, por las concepciones de esta teoría. (...) Ha resultado inspiradora de una enorme gama de aplicaciones curriculares, en particular para el aprendizaje de la matemática y las ciencias experimentales." (págs. 23 y 24)

Piaget, al intentar responder sus cuestionamientos sobre el desarrollo del intelecto humano y sobre la validez del conocimiento, explica que el desarrollo del intelecto radica en un proceso interno de adaptación dinámica a la realidad a través de la interacción del sujeto con el ambiente en un proceso doble e indisoluble de mutua transformación. El sujeto *asimila* (organiza) a su estructura intelectual los estímulos que le presenta el ambiente y, al mismo tiempo, el individuo *acomoda* (ajusta) esa estructura interior para responder coherentemente a los datos en asimilación. Esta situación, en palabras de Pinto y Martínez (*ibid.*), es la siguiente:

"En una etapa dada de su desarrollo, el niño cuenta con algunas operaciones intelectuales para sobrevivir y transformar el mundo. Percibe, fabrica conceptos y relaciones, extrae conclusiones y actúa. Pero los datos de la realidad no siempre responden a su conjunto de operaciones mentales con las conexiones definidas entre ellas. Esto pone de manifiesto un desequilibrio en su estructura interna. Gracias a ese desequilibrio y a la tensión por alcanzar el nivel máximo de equilibrio, la estructura intelectual se modifica. Se añaden operaciones, se definen y redefinen relaciones entre ellas; se alcanza un mayor nivel de equilibrio y se avanza en el desarrollo intelectual." (pág. 30)

Desde luego que este proceso de *asimilación-acomodación*, que se puede producir durante toda la vida del individuo, ampliando significativamente su capacidad cognoscitiva, deja entrever consecuencias importantes para una enseñanza no basada en la *transmisión* de conocimientos. Es precisamente esta situación la que motiva el siguiente apartado.

2) La influencia de Piaget en la Escuela

Aunque Piaget no construyó su teoría sobre el desarrollo intelectual con un interés pedagógico, sus seguidores han intentado traducir las formulaciones epistemológicas en orientaciones educativas, y uno de sus principales logros consiste en haber afianzado los principios generales de la *educación activa*, es decir, del *aprendizaje* a través de la práctica.

Con respecto a esto, es conveniente hacer dos puntualizaciones:

1. En esta perspectiva, *aprendizaje* significa la modificación de la estructura intelectual del sujeto y todo aquello que impulsa a esta modificación; y

2. La *educación activa* es aquélla que hace énfasis en el hecho de que tanto el desarrollo intelectual como el aprendizaje científico-técnico, son procesos en los que la actividad del estudiante es vital. Aquí, el alumno es contemplado como el protagonista de su autodesarrollo. Es el estudiante quien, con base en sus intereses, necesidades sentidas, actividades creativas, etc., construye el contenido de su propio aprendizaje. Así, por un lado, el proceso de producción de conocimiento está íntimamente ligado a una actividad creadora y, por otro, se considera al dinamismo (a la *actividad*) del intelecto como un elemento primordial.

Buscar, en el proceso educativo, congruencia con las ideas de la escuela piagetiana, implica proponer actividades acordes con el nivel de los estudiantes, las cuales provoquen el desequilibrio necesario para impulsar el desarrollo de su estructura intelectual. En otras palabras, las cuestiones que se les presenten a los alumnos deben ser captables parcialmente a partir de lo que ya saben (deben ser asimilables), pero a la vez debe contener algunos rasgos novedosos de pensamiento (factor de acomodación).

Aquí, las actividades educativas deben ser realizadas por el alumno. Éste debe ponerse en plena interacción con el medio físico y social. El profesor debe limitarse a orientar al estudiante en sus actividades, a guiarlo para la *autoconstrucción de su conocimiento*[4] y, como máximo, a proporcionarle conceptos y proposiciones estructuradas jerárquicamente junto con reglas adecuadas para que aquél manipule (intelectual o físicamente) los materiales de aprendizaje.

3) <u>La Teoría de Piaget y el Constructivismo en la Educación Matemática</u>

Con la intención de dar una idea general de lo que postula el constructivismo, tomaremos como punto de partida una de las reflexiones que a este respecto hace Kilpatrick (1987):

"Un viejo y no resuelto problema epistemológico de la filosofía occidental es el de qué tanto una realidad objetiva independiente puede ser conocida por un sujeto cognoscente que no tiene forma de comprobar qué de su conocimiento es conocimiento <u>acerca de</u>. Cualquier intento de comprobar la verdad de lo conocido debe él mismo ser un acto de conocimiento y, por lo tanto, subjetivo. Cualquier conocimiento de la "verdad objetiva", por lo tanto, es imposible. El constructivismo corta el nudo gordiano separando la epistemología de la ontología y argumentando que una teoría del conocimiento debe lidiar con la <u>adecuación</u> del conocimiento a la experiencia, no con la <u>correspondencia</u> entre el conocimiento y

[4] El sentido de la expresión "autoconstrucción de su conocimiento" quedará aclarado en el siguiente apartado.

la realidad. La única realidad que podemos conocer es la realidad de nuestra experiencia." (pág. 3)

Con esta postura, el constructivismo rechaza la existencia de un mundo exterior independiente que puede llegar a ser conocido por el sujeto cognoscente y, de aquí, que los educadores que están en comunión con esta corriente, en particular los educadores en matemáticas, se nieguen a usar términos como "descubrir" o "transmitir" y se inclinen por el de *construir*[5], cuando se hace referencia a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Así, el constructivismo involucra dos principios:

1) El conocimiento es activamente construido por el sujeto cognoscente, no pasivamente recibido del entorno.

2) Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo experiencial de uno; no se descubre un independiente y preexistente mundo fuera de la mente del conocedor.

En términos generales, ésta es la corriente que sin lugar a dudas hoy en día tiene mayor influencia en el campo de la educación matemática y aunque los puntos de vista de los educadores sobre la construcción del conocimiento matemático de sus estudiantes han sido desarrollados desde distintas teorías (epistemología genética, ciencia de la información, interaccionismo simbólico, entre otras), para darle el soporte teórico a nuestro trabajo es suficiente considerar, por el momento, solamente el lado desarrollista del constructivismo, formulado por Piaget y su escuela.

---

[5] De la misma manera que los números fraccionarios (o la ley de la gravitación universal), todo conocimiento es una construcción mental.

El recurrir a este autor obedece a que, tal y como ya lo mencionamos anteriormente, en la actualidad prácticamente todos los programas educativos mexicanos se encuentran influidos, en alguna medida, por las concepciones de esta teoría pero, más aún, porque con lo expuesto hasta este momento podemos afirmar que, estos lineamientos subyacen al Programa de Matemáticas IV de la Escuela de Bachilleres de la U. A. Q.

Antes de continuar y de exponer algunos aspectos que complementan las ideas sobre la dinámica del desarrollo cognitivo individual, consideramos importante resumir lo que para la escuela piagetiana y para los constructivistas en general, es el aspecto medular en el aprendizaje. Para ello, creemos pertinente recurrir, una vez más, a las puntualizaciones que a este respecto hacen Pinto y Martínez (*op. cit.*):

"El centro de aprendizaje radica en la captación de los significados subyacentes a las habilidades específicas; la construcción explícita de relaciones entre conceptos y procedimientos." (pág. 51)

"Un aprendizaje complejo no está formado de aprendizajes más sencillos ... un alumno, además de desarrollar los aprendizajes atómicos, debe realizar una integración personal de todos ellos para poder llegar al aprendizaje molecular. El educador puede promover esta integración, pero en definitiva depende del alumno el llevarla a efecto." (pág. 51)

"La transferencia de aprendizaje consiste, de manera congruente, no en la simple aplicación de habilidades a situaciones nuevas, sino en ejercer, ante esa situación nueva, la estructura cognoscitiva construida a través del proceso de aprendizaje." (pág. 51)

4.3 Interacción social y aprendizaje significativo

1) Algo más sobre el constructivismo

Como teoría de la adquisición del conocimiento, el constructivismo no es una teoría de la enseñanza pero, al igual que los seguidores de Piaget con su teoría epistemológica, los constructivistas contemplan algunas repercusiones para el ámbito educativo. Por ejemplo, ya hemos mencionado que desde la perspectiva de esta corriente, se debe renunciar a una búsqueda de la realidad objetiva ya que uno nunca llega a conocer una realidad fuera de nosotros y que esto conduce a los constructivistas a considerar a todo conocer activo y a todo conocimiento subjetivo. A través de acierto y error, uno construye un modelo viable de lo que quiere aprender.

Ahora expondremos algunas ideas relativas al siguiente señalamiento que, en relación a lo anterior, Piaget (el teórico más sistemático del constructivismo) hace:

"Con cada paso hacia adelante en el conocimiento que lleva al sujeto más cerca de su objeto, este último se retrae ... así pues, los modelos sucesivos elaborados por el sujeto no son más que aproximaciones que pese al mejoramiento nunca pueden alcanzar ... al objeto mismo, el cual continúa poseyendo propiedades desconocidas ..." (...) "Esto es aplicable a los niños tanto como a los científicos adultos y a la ciencia como una empresa social." (Piaget en Sinclair, 1987, pág. 2)

Ante tal afirmación conviene hacer dos observaciones, la primera es una aclaración: Que el conocimiento humano y el aprendizaje sean una construcción mental no significa que tengamos que caer en una versión deformada de lo real. Y la segunda es una pregunta natural, que surge ante la aclaración anterior: ¿cómo distinguir, entonces, las creencias subjetivas y el conocimiento objetivo?

Ante este último cuestionamiento, el mismo Piaget aclara: "El conocimiento objetivo sólo es alcanzado cuando ha sido discutido y confirmado por otros" (*ibid.*, pág. 5).

Esta afirmación, a su vez, nos lleva a puntualizar dos aspectos:

1. Una consecuencia inmediata para la educación: Los educadores tienen que contemplar el hecho de que el conocimiento, producto de un desarrollo cognitivo individual, forzosamente tiene la necesidad de ser contrastado con el conocimiento que otras personas han construido.

2. Una implicación inminente: El carácter social del conocimiento.

Este último punto lo desarrollaremos en el siguiente apartado.

2) <u>El conflicto sociocognitivo y la zona de desarrollo próximo</u>

Los seguidores de Piaget, al considerar el aspecto social del conocimiento, han dado lugar a la denominada "hipótesis del *conflicto sociocognitivo*". Aquí, se sostiene que los trabajos en grupo provocan una necesidad de confrontar puntos de vista moderadamente divergentes acerca de una misma tarea, que esta confrontación se convierte en un conflicto sociocognitivo que desequilibra las estructuras intelectuales existentes y fuerza al reacomodo, dando lugar al progreso intelectual.

Antes de dejar momentáneamente los lineamientos de Piaget y sus seguidores, citaremos textualmente la opinión de Vergnaud (1987) acerca de esta corriente y de su influencia en la educación matemática. Dicha opinión, en cierto sentido, resume lo expuesto hasta este momento:

"Yo veo al constructivismo como el mejor modo de considerar el proceso de apropiación mediante el cual un estudiante hace de las matemáticas un conocimiento propio. Más que una construcción pura y solitaria, el aprendizaje de las matemáticas es para mí la difícil apropiación de un conocimiento social." (pág. 9)

Ahora, para desarrollar algunas ideas concernientes al aspecto social del conocimiento, recurriremos a los trabajos de Vigotski y de sus discípulos. En sus estudios encontraremos que, al igual que la escuela piagetiana, su enfoque es netamente interaccionista, pero los primeros confieren una extraordinaria importancia a la interacción social.

Para Vigotski y sus seguidores, la socialización es el origen mismo de la inteligencia. Esta afirmación se sustenta en el siguiente principio: Toda función superior siempre aparece primero en un contexto interpersonal (en un primer momento, guiado por el profesor, el estudiante lleva a cabo ciertas actividades) y posteriormente pasa a un contexto intrapersonal mediante un proceso de internalización (el alumno interioriza su actividad).

En esta corriente, se afirma que el nivel de desarrollo sólo puede determinarse si se hace referencia, como mínimo, a dos niveles: 1) Al que el sujeto ya ha conseguido como resultado de su desarrollo y experiencias previas (*nivel de desarrollo efectivo*) y 2) al nivel de desarrollo que puede alcanzar (*nivel de desarrollo potencial*).

Es en este contexto en el cual se establece la idea de *zona de desarrollo próximo*. Ésta "no es otra cosa que la distancia entre el nivel del desarrollo real, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración de otro compañero." (Vigotski en Hernández, 1998, pág. 22)

Como puede observarse, la teoría del conflicto sociocognitivo explica solamente un tipo de situaciones interactivas, mientras que esta última postura (la de Vigotski) aborda los principios generales que se producen en cualquier interacción (incluyendo las de conflicto). De este modo, se puede decir que la línea de Vigotski es más general, pero no que se contrapone a la de los piagetanos.

Así, el mensaje para los educadores es claro: el estudiante "tiene ya un determinado nivel de desarrollo y posee también un nivel de desarrollo que está al alcance de sus posibilidades a condición de que se le ayude; la enseñanza consistirá justamente en aportar esa asistencia que permite actualizar los contenidos incluidos en la zona de desarrollo potencial." (Palacios, 1987, pág. 180)

Una vez que con estas últimas ideas se complementan las expuestas por la escuela piagetiana, se puede decir que la sugerencia didáctica es: que el profesor interactúe con el alumno buscando provocar ciertos desequilibrios que no tendrían lugar de manera espontánea e intervenir en el consecuente ajuste, haciendo el papel de mediador entre el alumno y el conocimiento. Esta mediación implica, desde luego, observar el nivel de partida del alumno el cual le marcará cuándo y cómo intervenir. Aquí, el profesor decide qué y cuándo estudiar y el alumno decide el cómo, posibilitándosele así la actividad autoestructurante necesaria para la construcción del conocimiento.

Cabe aclarar que el papel de mediador (entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento) al que se hace referencia en el párrafo anterior, no necesariamente es exclusivo del profesor, ese puede caer en manos de un compañero. Cuando esto llega a suceder, entonces los papeles (alumno y mediador) continuamente se intercambian. Ésta es una situación que para el aprendizaje es deseable, ya que cuando un sujeto verbaliza su pensamiento, al mismo tiempo reestructura el razonamiento y mejora la comprensión.

Ahora bien, cuando se habla de que el profesor tiene que mediar el encuentro de sus alumnos con el conocimiento, en el sentido de orientar y guiar la actividad constructiva de sus alumnos, proporcionándoles una ayuda ajustada y pertinente a su nivel de competencia, no se está hablando de otra cosa más que, en resumen, de la actividad del profesor en la promoción del *aprendizaje significativo* de los alumnos. Es precisamente este último concepto el que motiva el desarrollo del siguiente apartado.

3) El aprendizaje significativo

El término *aprendizaje significativo* introducido por primera vez por Ausubel, es utilizado por él y por sus seguidores para hacer referencia "a la posibilidad de establecer vínculos sustantivos y no arbitrarios entre lo que hay que aprender, el nuevo contenido y lo que ya se sabe, lo que se encuentra en la estructura cognitiva de la persona que aprende, sus conocimientos previos." No se trata simplemente de asimilar la nueva información, "el aprendizaje significativo supone siempre su revisión, modificación y enriquecimiento estableciendo nuevas conexiones y relaciones entre ellos, con lo que se asegura la *funcionabilidad*[6] y la memorización comprensiva de los contenidos aprendidos significativamente" (Coll *et. al.*, 1991, págs. 121 y 122)

[6] Se dice que un aprendizaje es funcional si la persona que lo ha realizado puede utilizarlo de manera efectiva para resolver un problema determinado o, bien, cuando puede usarlo para abordar nuevas situaciones, para efectuar nuevos aprendizajes.

Con estas potencialidades resulta claro que el aprendizaje que debe buscarse promover en los alumnos es el significativo, como también es claro que la posibilidad de llevarlo a cabo se encuentra en relación directa a la cantidad y calidad de los aprendizajes previos y a las conexiones que se establecen entre ellos.

Desearlo, pues, no es suficiente. Desde la perspectiva de Coll (*ibid.*), para que los estudiantes puedan aprender significativamente, es necesario que el material que deben aprender, cuando menos, se preste para ello.

De acuerdo con este autor, una condición necesaria para que esto suceda, para que el material sea potencialmente significativo, es que los contenidos se presenten de tal forma que se ponga en relieve su coherencia, estructura y significatividad lógica, así como aquellos aspectos susceptibles de ser relacionados con esquemas de conocimiento previos, ya existentes en su estructura cognoscitiva.

4.4 Compilación

Es muy probable que al contemplar los rasgos característicos de la matemática, de manera intuitiva el docente se sienta invitado a seguir un camino delineado por ellos para la enseñanza de esta ciencia.

Así, por ejemplo, al observar la gran unidad que existe entre sus conceptos y entre sus ramas, o el vasto campo de aplicaciones tanto de sus resultados como de sus conceptos, el profesor no puede dejar de sentir que, en la enseñanza de las matemáticas, éstas son características que no deben ser soslayadas. Se siente que es necesario que en los salones de clase los alumnos apliquen sus matemáticas en otras ramas del conocimiento, que las contemplen como un todo integrado, que perciban que no sólo los nuevos conocimientos se fundamentan en los ya adquiridos, sino que sin estos últimos los primeros no tendrían razón de ser.

Por su parte, el constructivismo sostiene que esta inquietud, que en un principio puede ser intuitiva o natural, no solamente es deseable sino que, más aún, es una verdadera necesidad. Esto resulta evidente cuando dicha teoría hace los siguientes señalamientos: 1) Un estudiante debe establecer vínculos sustantivos y no arbitrarios entre lo que hay que aprender y sus conocimientos previos (lo cual resulta coherente con el rasgo que hemos presentado como "unidad" matemática). 2) La enseñanza debe promover la revisión, modificación y enriquecimiento de los conocimientos, estableciendo nuevas conexiones y relaciones entre ellos, con la intención de que el alumno pueda utilizarlos de manera efectiva para resolver problemas o, bien, para efectuar nuevos aprendizajes (lo que a su vez muestra concordancia con el rasgo denominado "aplicabilidad").

Aquí, la resolución de problemas tiene, por su parte, la intención de provocar en el alumno un desequilibrio cognitivo, en donde el profesor intervendrá en el consecuente ajuste (adaptación o re-equilibrio), haciendo el papel de mediador entre el alumno y el conocimiento.

En este contexto teórico, en el que el profesor de matemáticas debe intervenir con el objetivo de que sus alumnos realicen aprendizajes significativos, es en el cual nuestro trabajo de investigación se circunscribe. De manera concreta, creemos que en el diseño adecuado de problemas se tiene un excelente recurso para presentar los nuevos contenidos como potencialmente significativos.

5. Antecedentes

En 1959 durante el seminario de Royaumont, se sentaron las bases filosóficas de la tendencia curricular denominada *nueva matemática* o *matemática moderna*. Aquí, en términos generales, se propuso enseñar a los alumnos el carácter lógico deductivo de la matemática y al mismo tiempo unificar los contenidos por medio de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y los conceptos de relación y función de la matemática superior.

Lo anterior, en contraposición al modelo de enseñanza predominante en aquella época. La expresión del matemático francés Jean Dieudonné "abajo Euclides" exigía a los docentes abandonar, en su práctica educativa, aquella actitud de reducir todo conocimiento matemático a lo que puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones evidentemente verdaderas, las cuales tienen posibilidad de enunciarse empleando únicamente términos perfectamente conocidos[1] —estrategia didáctica que, por otro lado, conducía a identificar el enseñar y el aprender matemáticas con una presentación (del profesor a los alumnos) de un cuerpo de conocimientos cristalizados en una teoría—.

La exigencia de Dieudonné no reflejaba una inquietud nueva, por ejemplo, en 1933 (por no irnos más atrás) F. Leroy apuntaba "... considero que esta enseñanza (euclidiana) constituye el error pedagógico más formidable que se puede concebir." (Leroy en Jossette, 1981, pág. 30)

Más adelante, cuando la *nueva matemática* empezó a mostrar síntomas de fracaso, surgieron, principalmente a finales de los sesenta, algunas opiniones en

---

[1] Dieudonné en la introducción de su obra *Álgebra y geometría elemental*, publicada en 1964, expone "los sistemas de axiomas propuestos desde finales del siglo pasado, y ligados estrechamente a la tradición euclidiana, son de una complejidad y de una sutileza tales que es prácticamente imposible enseñarlos antes de la licenciatura. De ahí la necesidad, tan penosa para un matemático, de no presentar a sus alumnos más que seudorazonamientos que no resisten una crítica ni siquiera superficial ..." (Dieudonné en Jossette, 1981, pág. 30)

contra de ese enfoque adoptado[2]. En Francia, por ejemplo, desde 1968 se publicaron panfletos escritos bajo seudónimos, titulados "Viva Euclides" y "Cantor no tenía razón".

La opinión de R. Thom a este respecto refleja la opinión de aquéllos que consideraban que en Euclides se encontraba una mejor opción para la enseñanza de las matemáticas: "Ellos, los bourbakistas, abandonaron un campo ideal para el aprendizaje de la investigación: La geometría euclidea, mina inagotable de ejercicios, y la sustituyeron por las generalidades de los conjuntos y la lógica, materiales tan pobres, vacíos y frustrantes para la enseñanza como los que más. El énfasis puesto por los estructuralistas en la axiomática no es sólo una aberración pedagógica sino también matemática." (R. Thom en García)

El fracaso de la *nueva matemática* fue prácticamente evidente cuando se constataron dos situaciones: 1) Los alumnos no aprendían los conceptos ni las estructuras superiores pero, más aún, 2) seguían sin dominar los algoritmos y procedimientos básicos de cálculo.[3] Esto último como una consecuencia de que, en este movimiento, se tendía a menospreciar el dominio más o menos sólido que pudiera desarrollar el estudiante sobre las técnicas matemáticas.

Cabe mencionar, acerca de este último punto, que cuando se llega a ignorar la posible función de las técnicas en el proceso de aprendizaje, puede provocarse una catástrofe didáctica (situación especialmente visible cuando se afecta de esta manera a los niveles más elementales de la enseñanza de las matemáticas). Visualizada esta situación, y con la posibilidad extrema de poder

---

[2] Dentro de los estudios críticos de influencia internacional se encuentra *El fracaso de la matemática moderna "Por qué Juanito no sabe sumar"*, obra editada en español en 1976, de Morris Kline.

[3] En 1963, por ejemplo, André Revuz en su obra *Matemática moderna, matemática viviente* señala "He sido testigo de los resultados desastrosos de la introducción de nociones modernas en la enseñanza del segundo grado ... seguramente es posible enseñar tan mal las matemáticas actuales como las otras, pero no hay que olvidar el desastre general y permanente de la enseñanza tradicional." (Revuz en Jossette, *op., cit.*, pág. 31)

perderlo todo, la expresión de "abajo Euclides" fue sustituida, entre otras, por la de *volver a lo básico*.

En esta propuesta se identificaba a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas con enseñar y aprender técnicas algorítmicas. Aquí se propone que, a partir de ciertas técnicas, los ejercicios sirvan como refuerzo y así llegar a tener un dominio amplio de ellas.

Sin embargo, el poco fundamento teórico de este último movimiento, entre otras cosas, condujo a que los alumnos llegaran a manejar las técnicas algorítmicas de manera estéril. De este modo, cuando fue patente el hecho de que, sin comprenderlos, los alumnos aprendían de memoria los procedimientos (y esto en el mejor de los casos), se puso en evidencia que aquella interpretación del *retorno a lo básico*, definitivamente, no era la solución razonable a la enseñanza de las matemáticas.

Así, a finales de los setenta, la cuestión era ¿qué son las matemáticas básicas? Esta pregunta impregnó el III Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en Berkeley en el verano de 1980.

Allí, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), como una alternativa educativa de la matemática escolar, propone contemplar en la *resolución de problemas* toda una tarea a desarrollar, a interpretar y a llevar acabo. Se apunta que: "En la enseñanza de las matemáticas escolares se debe poner el enfoque en la resolución de problemas" (NCTM en García, *ibid.*)

Pero cuando se quiere adoptar esta postura, cuando se decide colocar el acento en la resolución de problemas, surgen varias posturas ante el cuestionamiento natural ¿qué significa poner el enfoque en la resolución de problemas?

A este respecto, consideramos que una excelente referencia para bosquejar algunas de esas posturas, se encuentra en el trabajo de Gascón (2001).[4]

Siguiendo a este autor, concluimos que por el momento caben al menos cuatro interpretaciones acerca de aquel "poner el enfoque en la resolución de problemas". A continuación, nos apropiamos de sus ideas con la finalidad de explicar en qué consiste cada una de ellas[5].

i) Enseñar y aprender matemáticas se identifica con enseñar y aprender una actividad exploratoria, libre y creativa, de problemas no triviales[6].

En este enfoque, la finalidad del proceso didáctico es la actividad de resolución de problemas en sí misma y se considera que dicho proceso es de descubrimiento inductivo y autónomo. De este modo se contempla que la actividad matemática, que deben desarrollar los estudiantes, es la exploración de problemas no triviales, en otras palabras, deben realizar tareas en las cuales no saben gran cosa de la solución (deben tantear técnicas diversas, aplicar algún resultado conocido, buscar problemas semejantes, formular conjeturas, buscar contra ejemplos o intentar resolver un problema un poco diferente).

Aquí, con la finalidad de asegurar que la exploración sea realmente libre (condición esencial en este marco) y creativa, en el sentido de no repetitiva y

---

[4] En dicho trabajo, la intención del autor es la de estudiar cómo se corresponden muchas decisiones y actuaciones docentes con los modelos epistemológicos generales que han existido a lo largo de la historia de las matemáticas.

[5] Es necesario precisar que las diferentes formas de interpretar el papel de la resolución de problemas en el proceso didáctico y su correspondiente puesta en práctica, son situaciones ideales, no existen en estado puro, las prácticas docentes reales por lo general tienen un carácter mixto y complejo.

[6] El adjetivo "no trivial" aquí es utilizado para hacer referencia a problemas en cuyos enunciados no se sugiere el procedimiento de resolución (prohibe explícitamente descomponer el problema en ejercicios) y que se encuentran en un dominio conceptual con el que los alumnos tienen cierta familiaridad.

original, se evita que los problemas aparezcan demasiado ligados a una teoría determinada o a un conjunto concreto de técnicas matemáticas para resolverlos.[7]

ii) La resolución de problemas es utilizada como una estrategia didáctica encaminada a que el alumno llegue a aprender y a utilizar directrices heurísticas[8].

Bajo esta interpretación, a diferencia de la descrita anteriormente, se enfatiza que el conocimiento e incluso el dominio de ciertas técnicas matemáticas básicas no limita, en absoluto, la posibilidad de elaborar autónomamente estrategias heurísticas complejas de resolución de problemas. Por esta razón, se busca relacionar funcionalmente dos momentos de la actividad matemática, el exploratorio y el trabajo de la técnica.

Así pues, partiendo de la suposición de que el alumno ha adquirido los conocimientos necesarios y domina las técnicas básicas para abordar los problemas de una cierta clase, su actividad es encaminada a la exploración en un campo acotado de problemas[9], buscando que elabore e interiorice una estrategia de resolución compleja, útil para abordarlos. De este modo, la resolución de problemas se ha utilizado como una estrategia didáctica encaminada a que el alumno llegue a dominar sistemas estructurados de procedimientos matemáticos que pueden cristalizar, o no, en un patrón de resolución[10].

---

[7] En este sentido se dice que la presentación de los problemas es aislada y descontextualizada.

[8] El término "heurísticas" es utilizado aquí en el sentido de no algorítmicas: Un algoritmo, por definición, garantiza la consecución de aquello que se trata de conseguir. Un heurístico, en cambio, constituye sólo "una buena apuesta", un procedimiento que creemos que nos ofrece una probabilidad razonable de solución, o al menos, de acercarnos a una solución, pero no hay garantía de que funcione.

[9] De este modo, el aislamiento de los problemas (que se presentaba en la interpretación anterior) se ve considerablemente disminuido.

[10] La expresión "patrón de resolución" se emplea en el sentido de Polya (1966). "Habiendo resuelto algunos problemas con perspicacia e interés, nos encontramos con una preciosa posesión: un patrón, un modelo, que podemos imitar para resolver problemas similares." (pág.170)

Al examinar este enfoque acerca de la resolución de problemas, un cuestionamiento importante que puede hacerse casi de manera automática es ¿y cómo crear las condiciones que permitan construir al alumno una estrategia de resolución de un problema mediante una combinación adecuada de técnicas?

Con respecto a este cuestionamiento cabe comentar que hay *actitudes* que el alumno poco a poco debe ir haciendo propias y que en Geometría Analítica una fundamental es "introducir el sistema coordenado *conveniente*", ya que brindada grandes ventajas al resolver problemas. Sin embargo no puede definirse en general qué significa *conveniente*. Por ejemplo, en el caso de una parábola el sistema *conveniente* usa como eje x la perpendicular a la directriz por el foco, pero no usa como eje y a la directriz porque entonces la ecuación de la parábola es menos simple que cuando se toma como eje y a la mediatriz del segmento de perpendicular del foco a la directriz.

Es claro, pues, que aquello de *conveniente* requiere de experiencia y, por tanto, de trabajo. Reflexionar en situaciones como estas permite dar su dimensión real a la interrogante ¿cómo crear las condiciones que permitan construir al alumno una estrategia de resolución de un problema mediante una combinación adecuada de técnicas?

*iii)*La resolución de problemas se utiliza como un medio para construir conocimientos nuevos.

Esta interpretación está fuertemente influida por la corriente epistemológica constructivista y, como consecuencia de ello, identifica el enseñar matemáticas con el posibilitar que los estudiantes construyan los conocimientos matemáticos.

Aquí, de manera específica, se considera que esa construcción de los conocimientos matemáticos se lleva a cabo mediante un proceso puramente psicológico y, por tanto, que no se trata de una actividad con relevancia matemática en sí misma. Por esta razón, en el proceso didáctico no se hace referencia explícita y no se dedica mucha atención a la naturaleza matemática de la propia actividad de construcción, ni al contexto en que se realiza.

En esta línea los problemas se eligen en función del concepto o conocimiento que se quiere que el alumno construya y, en este sentido, dicho concepto constituye un cierto contexto para el problema que se ha elegido como instrumento de construcción de la génesis de ese concepto[11].

iv) La actividad de resolución de problemas se engloba en una actividad más amplia, la "modelización matemática".

Al igual que el modelo docente anterior, esta interpretación puede considerarse constructivista, pero aquí el proceso de construcción del conocimiento no tiene una concepción meramente psicológica. En este enfoque, aprender matemáticas se identifica con un proceso de construcción de conocimientos matemáticos, relativos a un sistema (matemático o extramatemático), que se lleva a cabo mediante la utilización de un modelo matemático correspondiente a dicho sistema.

De esta manera la actividad de construcción no se toma como un mero instrumento al servicio de los conceptos que el alumno debe construir, dicha actividad tiene interés matemático en sí misma e implica una modelación matemática explicitable, controlable y, también, de gran interés.

[11] Aquí, si bien es cierto que se logra cierta contextualización de los problemas, estos por lo general se presentan de manera aislada.

Así, la resolución de problemas siempre debe pasar por la construcción explícita de un modelo del sistema subyacente y, más aún, los problemas sólo adquieren pleno sentido en el contexto de ese sistema.

En este contexto el objetivo de sumergir al alumno en esa actividad de resolución es: que logre obtener los conocimientos matemáticos relativos a un sistema modelizado que, en un principio, puede ser tanto matemático como extramatemático.

Por otro lado y a diferencia de las interpretaciones anteriormente descritas, se puede observar que, si la descontextualización de un problema de matemáticas es la separación entre el problema propiamente dicho y el sistema (matemático o extramatemático) a partir del cual el problema se genera de una manera natural (en el seno de una determinada actividad matemática), en esta línea didáctica la descontextualización desaparece hasta el punto de llegar a identificarse el "objetivo de la resolución de los problemas" con la "obtención de conocimientos sobre el sistema modelizado". Así pues, la relación entre el sistema y su modelo matemático es relevante matemáticamente porque produce (es la vía para que el alumno construya) conocimientos matemáticos relativos a ese sistema.

6. Metodología

Cuando como profesores del curso de Geometría Analítica[1] asistimos a la presentación del actual Programa de Estudios correspondiente a dicha asignatura, adquirimos conciencia acerca de algunas posturas y lineamientos didácticos que ahí fueron expuestos, de manera notable: 1) Considerar que esta asignatura debe tener un carácter integrador sobre los cursos previos y 2) siempre que sea posible, iniciar cada tema o subtema con un problema que represente un reto para el estudiante.

Sin embargo, con diez años de impartir en el Bachillerato el curso de Geometría Analítica (siempre apoyado en los libros de texto tradicionales) de una manera distinta a la que se demanda hoy en día y, sobre todo, ante el desconocimiento de la existencia de un libro diseñado con el enfoque propuesto en el actual Plan de Estudios, algunas dudas fueron surgiendo: *¿cómo hacerle*? ¿en dónde buscar problemas para iniciar los temas? ¿sería suficiente con tomar alguno de los problemas que tradicionalmente se dejan de tarea (aquéllos a los que les denominamos "de aplicación") y con él iniciar la clase? ¿existía algún libro de texto que iniciara los temas y subtemas con problemas? ¿existía un texto que pusiera en relieve ese carácter integrador que se busca promover? ¿qué ventajas, para el estudiante, representa el hecho de presentarle los contenidos de la manera que se proponía?

Teniendo en mente estas dos últimas preguntas, nos dimos a la tarea de investigar acerca de, por un lado, qué es lo que se dice sobre aquella enseñanza tradicional de la Geometría Analítica y, por otro, qué se dice de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática apoyados en la resolución de problemas.

---

[1] Asignatura que, de acuerdo con el Plan de Estudios de la Escuela de Bachilleres de la U. A. Q. (1999), debe cursarse en el cuarto semestre del Bachillerato.

Posteriormente, cuando constatamos cómo tanto las teorías didácticas, como la propia naturaleza de la matemática, argumentan de manera sólida la conveniencia y, más aún, la necesidad de que su enseñanza y aprendizaje estén basados en la resolución de problemas, se procedió a la búsqueda de libros que estuvieran diseñados sobre esa línea didáctica. De manera concreta; nos interesaba encontrar aquellos problemas a través de los cuales fuera posible presentar y abordar, de manera contextualizada, los temas propios de la Geometría Analítica que se estudian en el Bachillerato (plano coordenado, distancia entre dos puntos, la recta, la circunferencia, etc.).

Naturalmente que esa búsqueda no únicamente era un intento por contextualizar la enseñanza y el aprendizaje del curso de Geometría Analítica sino que, y en concordancia con el currículo de matemáticas, los rasgos característicos de esta ciencia y algunas teorías didácticas actuales (como por ejemplo, la del constructivismo); se pretendía, además, encontrar problemas que representaran un reto interesante para el alumno y que, al mismo tiempo, exhibieran el carácter integral de la matemática.

Después, en el desarrollo de nuestra tarea, nos quedó claro que el material didáctico adecuado a las necesidades de nuestros cursos no se hallaba explícito en los libros revisados y que era necesario sumergirse en el diseño de ese material y, con ello, realizar una investigación más profunda.

Así, convencidos de que nosotros mismos deberíamos desarrollar la delicada tarea del diseño de problemas a los que un concepto proporciona una respuesta, apostamos a que no sólo en los problemas que vinculan la realidad con la teoría matemática se encuentra la materia prima para el diseño de un material potencialmente significativo para el aprendizaje de esta disciplina, sino que en la Historia de la misma se tiene una veta inagotable de ellos.

De este modo, y no sin antes adoptar una postura acerca de lo que significa "poner el enfoque en la resolución de problemas", fue como se decidió diseñar (a veces desde su historia, a veces desde sus aplicaciones) uno o dos problemas a través de los cuales sea factible iniciar y desarrollar la enseñanza y el aprendizaje significativo de los primeros temas de la asignatura de Geometría Analítica en el Bachillerato.

La Propuesta

Pedí sabiduría …
y Dios me dio problemas para resolver.

San Agustín

Prólogo

Convencidos de que *en la enseñanza de las matemáticas escolares se debe poner el enfoque en la resolución de problemas*, e interpretando este postulado como una propuesta constructivista en la que aprender matemáticas se identifica con un proceso de construcción de conocimientos matemáticos (relativos a un sistema no necesariamente matemático) que se lleva a cabo mediante la utilización de un modelo matemático (correspondiente a ese sistema), este trabajo presenta una serie de situaciones[1] (algunas de la propia Matemática y otras no) que conducen al planteamiento de problemas interesantes, en los que la separación entre el problema propiamente dicho y la situación a partir de la cual se genera de una manera natural, desaparece hasta el punto de llegar a identificarse el «objetivo de la resolución de los problemas» con la «obtención de conocimientos matemáticos sobre la situación modelizada».

De una manera más puntual, podemos decir que, a veces recurriendo a la Historia de la Matemática y a veces a la relación que existe entre la Matemática y otras ciencias como la Física, la Astronomía y la Economía, se han diseñado una serie de situaciones que, vía el planteamiento y resolución de problemas, permiten desarrollar los primeros temas de la asignatura de Geometría Analítica en el Bachillerato, como una continuación o integración de algunos contenidos de los cursos previos. La intención es, por un lado, exhibir aquella gran unidad que existe entre las ideas matemáticas y, por otro, su aplicabilidad en otras áreas del conocimiento.

De este modo, en concordancia con el Nuevo Plan de Estudios de la Escuela de Bachilleres de la U. A. Q. (1999) y, de manera específica, con el Programa de la asignatura de Geometría Analítica, la propuesta aquí presentada

[1] Entendemos por ***situación*** el sistema de referentes reales que permiten imaginar todo lo descrito por un texto y construir su significado, teniendo en cuenta las experiencias del alumno.

pretende ser un instrumento didáctico con el cual se pueda promover el aprendizaje significativo de los conceptos que en dicha asignatura deben ser estudiados. Con esta intención, los problemas han sido diseñados de tal manera que: 1) El alumno pueda abordarlos con base en los conceptos de Álgebra, Trigonometría y Geometría, aprendidos en los cursos precedentes, pero 2) contienen algunos rasgos novedosos que, para llegar a resolverlos, le exigirán un verdadero esfuerzo intelectual, investigar, consultar los libros de texto tradicionales, comunicarse con sus compañeros o buscar la orientación del maestro.

Ahora, con el fin de disponer de una pronta referencia, en el *Cuadro* 1, bajo el epígrafe de *temario alternativo*, se listan los títulos de aquellas situaciones que aquí se han desarrollado paralelamente a los primeros temas del curso (*temas tradicionales*) de Geometría Analítica de la Escuela de Bachilleres de la U. A. Q.

TEMA TRADICIONAL	TEMA ALTERNATIVO
El plano cartesiano.	Planos Coordenados Diversos.
Distancia entre dos puntos.	La distancia del taxista.
La recta.	Programación lineal.
La circunferencia.	Funciones circulares. La cuadrática y la circunferencia.
La parábola.	La cúbica y la cuártica. La propiedad de reflexión de la parábola.
La elipse.	La elipse y la segunda ley de Kepler como antecedentes del Cálculo.

Cuadro 1

Por otro lado, y con la intención de que el alumno pueda reafirmar los conceptos aprendidos, el desarrollo de cada "tema alternativo" viene acompañado de una serie de problemas adicionales.

Se ha buscado que estos últimos no sean una gran cantidad de ejercicios repetitivos[2] de bajo orden cognitivo que, lejos de promover el aprendizaje significativo, dieran una imagen restringida de la Matemática, sugiriendo que ésta es una disciplina que se ocupa sólo de cuentas y algoritmos, una disciplina formada por una cantidad de conocimientos aislados sin interconexión alguna. Por el contrario, a través de aplicaciones directas del material estudiado o recurriendo a preguntas del tipo ¿se podría usar aquel otro dato ... ?, ¿y si ... ? o, bien, ¿y si no ... ?; se han seleccionado y diseñado problemas que, sin tener la complejidad de los primeros, representan un reto para el alumno. Con ellos, se busca hacer hincapié en la aplicabilidad de las Matemática, remarcar el vínculo tan estrecho que existe entre sus conceptos, mostrarla como una ciencia inagotable, en constante proceso de evolución y desarrollo.

Ahora, para finalizar estas líneas introductorias a la propuesta, comentaremos de manera superficial el contenido y algunas de las intenciones particulares de los temas que en ella se desarrollan.

En el tema *Planos Coordenados Diversos*, el plano euclidiano se convierte, paso a paso, en un plano coordenado general, marco de referencia en el que se estudia la distancia entre dos puntos, de donde surge la necesidad de analizar al plano cartesiano como un caso particular.

---

[2] "B. Kleinmuntz, analizando experimentos dirigidos por A. S. Luchins en 1942 y relativos a la "obstinación" en la proposición de problemas con soluciones sustancialmente idénticas, muestra cómo se produce un efecto negativo; el sujeto ... frente a un problema que se podría resolver de forma mucho más breve que los precedentes, continuará aplicando el mismo procedimiento. Justamente el haber adquirido un método que da frutos positivos es el obstáculo para crear estrategias nuevas ..." (D'Amore, 1997, pág. 71 y 72).

La intención es mostrar una idea amplia de lo que es un sistema de referencia coordenado y cómo el estudio de casos particulares puede facilitar su aplicación. Esto último se ilustra al comparar cómo se determina la distancia entre dos puntos en cada sistema coordenado estudiado (el general y el particular).

Como una aplicación inmediata de los planos coordenados se estudia la *distancia urbana*. Una de las intenciones de este tema es la de poner en contacto al alumno con una geometría no-euclidiana y, de esta manera, proporcionarle un marco de comparación que le permita apreciar totalmente a la geometría euclidiana, dándose cuenta de sus potencialidades y, al mismo tiempo, de sus restricciones.

En el tema *programación lineal* se parte del análisis de una situación específica en donde surge la necesidad de estudiar algunas características de la línea recta. Aquí, en ocasiones procediendo de manera inductiva y en otras de manera deductiva, se llegan a eslabonar una serie de conceptos y de teoremas que sirven de base para llegar a establecer el *teorema fundamental de la programación lineal*. Hecho esto se ilustran los alcances de este teorema, al aplicarlo en la resolución de problemas de optimización de recursos, reafirmando su carácter de herramienta fundamental en la programación lineal.

Partiendo del hecho de que en Cálculo, así como en otros cursos avanzados de matemáticas y en trabajos científicos, es necesario referirse a las funciones trigonométricas con dominios en los números reales, en el tema *funciones circulares*, se reconstruye aquel proceso en el cual los números reales se constituyen como dominio de las funciones trigonométricas; dejando de manifiesto el papel que la Geometría Analítica desempeñó en dicho proceso. Por otro lado, y después de estudiar algunas de las propiedades de las funciones trigonométricas circulares, al finalizar este tema, se conectan las ideas ahí desarrolladas con aquéllas que se derivan al definir al *seno* y al *coseno* como funciones trigonométricas con dominio en los ángulos.

Con la intención de remarcar aquel estrecho vínculo que existe entre el Álgebra y la Geometría, en el tema *la cuadrática y la circunferencia*, se analiza un método geométrico para resolver ecuaciones del tipo $x^2 - ax + b = 0$. Aquí, de manera original, se conjetura acerca de aquellas ideas que pudieron ser el germen de dicho método, actividad que permite poner en relieve cómo es que el fundir una serie de hechos aparentemente sin conexión puede ser la fuente de creación de nuevos principios. Posteriormente, y avanzando en una línea de trabajo análoga, el método para determinar las raíces de ecuaciones de grado tres y cuatro, del célebre matemático francés René Descartes, es abordado en el tema *la cúbica y la cuártica*.

Haciendo referencia al histórico sitio de Siracusa y la mítica participación de Arquímedes con sus espejos ardientes, y partiendo del análisis de algunos principios de la Física, en el tema *la propiedad de reflexión de la parábola* se hace un estudio preciso de esta propiedad, poniendo en relieve la estrecha relación que existe entre la Física y la Matemática.

Dentro de los temas tradicionales en la Geometría Analítica se encuentra el estudio de la Elipse y la Hipérbola. Nosotros creemos que estos temas deberían abordarse siguiendo la línea didáctica aquí bosquejada, pero con un matiz diferente, a saber, con la intención de poner en relieve (vía la resolución de problemas) aquella frase a la que continuamente hacemos referencia los profesores de Bachillerato "*la Geometría Analítica es un antecedente del Cálculo Diferencial e Integral*". Este sería un trabajo que, de manera natural, debería continuar al que aquí ahora presentamos y que está abierto para quien decida trabajar en esta línea.[3]

Como un ejemplo de lo que queremos decir en el párrafo anterior, aquí mostramos los hilos conductores de lo que pensamos podría ser el tema (alternativo) de "La Elipse". Para ello bosquejamos el diseño de una situación que se genera de un hecho histórico curioso acerca de una de aquellas leyes que sirven de base a la Astronomía y que marcan una época en la historia de la ciencia matemática: *la segunda Ley de Kepler* sobre el movimiento de los planetas.

---

[3] Desde luego que en esta tarea no sólo debe considerarse a la Geometría Analítica como una materia de "servicio", sino que también debe tomarse en cuenta el hecho de que es la introducción a otras geometrías como la Proyectiva, Diferencial, Algebraica, Compleja.

Planos Coordenados Diversos

Antecedentes:	El plano geométrico o plano euclidiano Ley de los cosenos
Temas relacionados:	Eje de abscisas o recta real El plano cartesiano Distancia entre dos puntos

---

Introducción

Poder ubicar la posición que ocupa un punto específico en un plano, es una actividad que, en términos generales, no es muy difícil de realizar. Por ejemplo, actualmente en la mayoría de lugares que son comúnmente visitados por turistas, existen mapas en los cuales aparecen señalamientos que dicen algo equivalente a "Ud. se encuentra aquí" y, si alguien observa estos mapas durante un tiempo razonable y al mismo tiempo visualiza algunos puntos de referencia a su alrededor, tarde que temprano ubica su posición en dicho lugar.

Algo totalmente distinto sucede con la construcción de un mapa, tarea que de ninguna manera puede considerarse fácil de realizar. Inclusive, sin pedir tanto, muchas personas son incapaces de hacer un buen croquis de la ubicación de su casa.

En este primer capítulo hablaremos de algo que tiene que ver con la situación descrita en el párrafo anterior; discutiremos sobre *planos coordenados*, concepto cuyas raíces se remontan a más de 2000 años de antigüedad.

Con la intención de dar una idea del paulatino proceso de construcción de este concepto, a continuación se mencionan algunas aportaciones que, a este respecto y a lo largo de distintas épocas, realizaron notables matemáticos.

Comenzaremos esta reseña histórica haciendo alusión al matemático griego Apolonio de Perga (alrededor de 247-205 a. C.) quien en su tratado de ocho libros sobre *Cónicas*, por medio de lo que Leibniz (1646-1716) posteriormente llamó *coordenadas*, ya contaba con una caracterización de esas secciones. Sin embargo, en los sistemas de referencia de Apolonio no había valores numéricos asignados. Esta última característica aparece en el tratado "*Geographia*" de Claudio Ptolomeo (alrededor de 100-168 d. C.). Allí, Ptolomeo determina la posición de lugares sobre la Tierra por *latitud* y *longitud*, que son ejemplos antiguos de coordenadas sobre una esfera de radio dado.

Más adelante, un ejemplo de vaga transición entre las coordenadas sobre la esfera terrestre de los antiguos y las coordenadas modernas se tiene en los trabajos de Nicole Oresme (1313-1382) quien escribió, alrededor de 1360, un folleto llamado "*De latitudinibus formarum*" en el cual grafica una variable dependiente (*latitudo*) contra una independiente (*longitudo*), la cual está sujeta a variación.

Tiempo después, en el siglo XVII, Pierre Fermat (1601-1665) escribió un corto artículo sobre geometría. Su "*Isagoge*" (publicado en 1679) contiene ecuaciones asignadas a líneas y cónicas con respecto a un sistema de ejes, ejes que generalmente son perpendiculares. Y aunque Fermat y sus contemporáneos vacilaron en aceptar valores negativos para las coordenadas, las condiciones ya estaban establecidas para que matemáticos como Euler, Newton y Leibniz realizaran sus estudios con esta "herramienta matemática".

Contemporáneo de Fermat, y por muchos autores considerado como el creador de la Geometría Analítica, el matemático René Descartes (1596-1650) fue quien sentó el hecho de que la geometría plana es *bidimensional* y, expresando todo lo perteneciente a la figura en términos de dos longitudes variables (x e y) junto con cantidades fijas[1], logró aplicar de manera conveniente la bien desarrollada álgebra del siglo dieciséis al análisis geométrico de los antiguos.

Así, finalmente, como resultado de las aportaciones de estos y otros matemáticos, se sentaron las bases para la construcción de una rama de las matemáticas, la Geometría Analítica, que tiene por objeto el estudio sistemático de la Geometría mediante el Análisis Matemático. Aquí, por medio de un *sistema coordenado* es posible obtener una correspondencia biunívoca entre puntos de una recta y números reales, lo cual permite aplicar los métodos del Análisis a la Geometría y, recíprocamente, los métodos de la Geometría Analítica pueden usarse para obtener una representación geométrica de las ecuaciones y de las relaciones funcionales.[2]

El plano coordenado

En cierto modo, y con base en lo mencionado en las líneas introductorias, se puede decir que Descartes y Fermat, ante la necesidad de tener un sistema de referencia que permitiera aplicar el Álgebra del siglo XVI a la Geometría, sentaron

[1] Descartes fue quien implantó, por primera vez, la moda de designar a las variables por x, y, z, y a las constantes por a, b, c.

[2] Como se recordará, hasta la primera mitad del siglo XVII, el estudio de la Geometría era un proceso deductivo en el cual la figura nunca se perdía de vista, consistía en obtener nuevas propiedades a partir de los postulados fundamentales y la observación directa de la misma (a este método actualmente se le llama método *sintético* o *geométrico puro*). En el nuevo método, llamado *analítico*, los puntos se sustituyen por pares ordenados de números (coordenadas) y el estudio directo de las figuras geométricas, recta, plano, circunferencia, etc., por el de ecuaciones que se satisfacen por las coordenadas de los puntos que forman la figura.

las bases para la construcción del concepto de lo que hoy en día se denomina *plano coordenado*. Ahora nosotros, con el propósito de estudiar este concepto y posteriormente utilizarlo, relacionaremos los puntos del *plano geométrico* o *euclidiano*[3] con los elementos del *producto cartesiano* $\mathbf{R}^2$.

Por supuesto que esta actividad no la podemos desarrollar sin antes tener una idea acerca de ese *producto cartesiano* y, por esta razón, a continuación se da la siguiente definición.

Definición (1). El conjunto de pares ordenados (x, y), donde x y y son números reales, se le denomina ***producto cartesiano*** y lo representaremos por el símbolo

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbf{R} \text{ y } y \in \mathbf{R}\}.$$

Hecho esto, nuestra tarea consiste en establecer una correspondencia biunívoca (uno-a-uno) entre el plano geométrico y el producto cartesiano definido anteriormente, de tal manera que a cada uno de los elementos de $\mathbf{R}^2$ le corresponda uno y solamente uno de los puntos del plano geométrico.

Podemos comenzar nuestro trabajo, por ejemplo, considerando que L_1 y L_2 son dos rectas cualesquiera del plano geométrico, que se cortan en un único punto O.

Así, una primer correspondencia que puede darse, entre los puntos del plano geométrico y los elementos de $\mathbf{R}^2$, es la siguiente:

- Al punto de intersección O, le corresponde el par ordenado $(0, 0)$ (*Figura* 1).

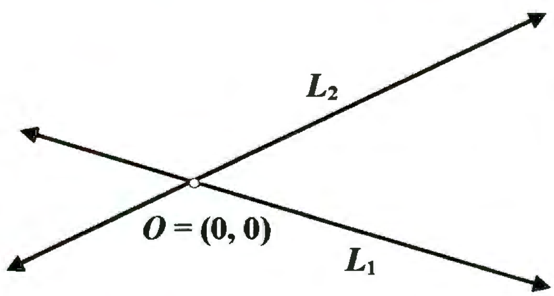


Figura 1

[3] Recuérdese que en la Geometría Euclidiana, el plano, al igual que línea y punto, son términos no definidos y que sus características quedan establecidas a través de una serie de axiomas como los siguientes:
1. Todas las líneas y planos son conjuntos de puntos.
2. Por dos puntos cualesquiera sólo puede pasar una línea que contenga a los dos.
3. Por tres puntos no colineales sólo puede pasar un plano que contenga a los tres.
4. Si dos puntos están en un plano, entonces la línea que los contiene está en el plano.
5. Toda línea contiene cuando menos dos puntos. Y todo plano contiene cuando menos tres puntos no colineales.

Ahora, con la intención de ir precisando algunos resultados parciales, es conveniente introducir la siguiente definición.

Definición (2). Los elementos x y y del par ordenado (x, y) de $\mathbf{R}^2$ relacionado con un punto P del plano geométrico, reciben el nombre de ***coordenadas del punto***. De este modo, por ejemplo, si el punto P del plano geométrico está en correspondencia con el par ordenado $(0, \sqrt{2})$, entonces 0 y $\sqrt{2}$ son las coordenadas de P.

Luego, si consideramos que el punto O de coordenadas $(0, 0)$ divide a cada una de las rectas L_1 y L_2 en dos rayos con origen común O entonces, y de manera natural, a este punto se le puede denominar ***origen de coordenadas***.

Aquí, a partir del punto común O, y sobre uno de los rayos de cada una de las rectas, podemos señalar un segmento OU como unidad de longitud (*Figura* 2).

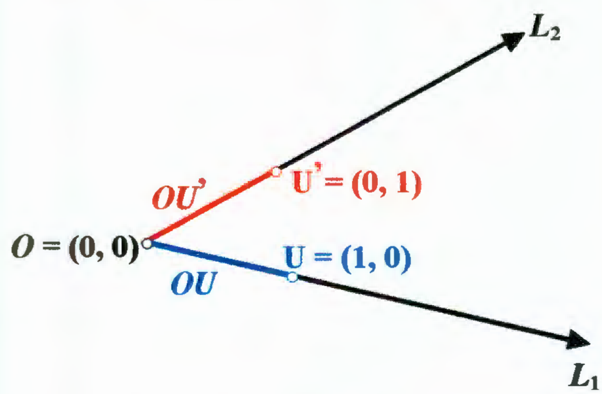


Figura 2

Hecho esto, es posible establecer dos correspondencias más, por ejemplo:

- Al punto U le corresponde el par ordenado $(1, 0)$.
- Al punto U' le corresponde el par ordenado $(0, 1)$.

Es importante observar que al asociar los puntos U y U' con $(+1, 0)$ y $(0, +1)$, respectivamente, queda determinado el *sentido* de los rayos que contienen a dichos puntos y cuyo origen es el punto $O = (0, 0)$. Ambos tienen ***sentido positivo***. Establecido esto, automáticamente, el otro rayo de cada recta será de ***sentido negativo***.

Así, como una consecuencia inmediata de las tres correspondencias establecidas hasta ahora, los elementos de $\mathbf{R}^2$ de la forma $(x, 0)$, $x \in \mathbf{R}$, pueden quedar en correspondencia con cualquier punto P (del plano geométrico) sobre L_1 y, de manera análoga, los elementos de $\mathbf{R}^2$ de la forma $(0, y)$, $y \in \mathbf{R}$, pueden

De este modo, los rayos que contienen a los puntos $(+1, 0)$ y $(0, +1)$, y cuyo origen es el punto $O = (0, 0)$, son el ***semieje positivo*** (***semieje de coordenadas positivas***) de su correspondiente eje de coordenadas y el otro lado del eje será el ***semieje negativo*** (***semieje de coordenadas negativas***).

Con fines prácticos, resulta conveniente asignarles nombres propios a cada uno de estos ejes. Con tal intención, y en correspondencia con las literales utilizadas en nuestro desarrollo, al primero de ellos (recta L_1) se le puede denominar ***eje x*** y al otro (recta L_2) ***eje y***.[5]

Por otro lado, observemos que los ejes coordenados dividen al plano geométrico en cuatro regiones. A cada una de ellas se les denomina ***cuadrantes***. Para distinguirlos, al cuadrante limitado por el rayo positivo de L_1 y el rayo positivo de L_2, se le denominará ***primer cuadrante*** o ***cuadrante* I** (**CI**); avanzando progresivamente en sentido levógiro (en contra del avance de las manecillas del reloj) ubicaremos al segundo, tercer y cuarto cuadrantes, respectivamente (*Figura* 4). De esta forma, el cuadrante **CII** está determinado por el rayo negativo de L_1 y el rayo positivo de L_2, el cuadrante **CIII** está determinado por los rayos negativos de ambos ejes, y el cuadrante **CIV** por el rayo positivo de L_1 y el rayo negativo de L_2.

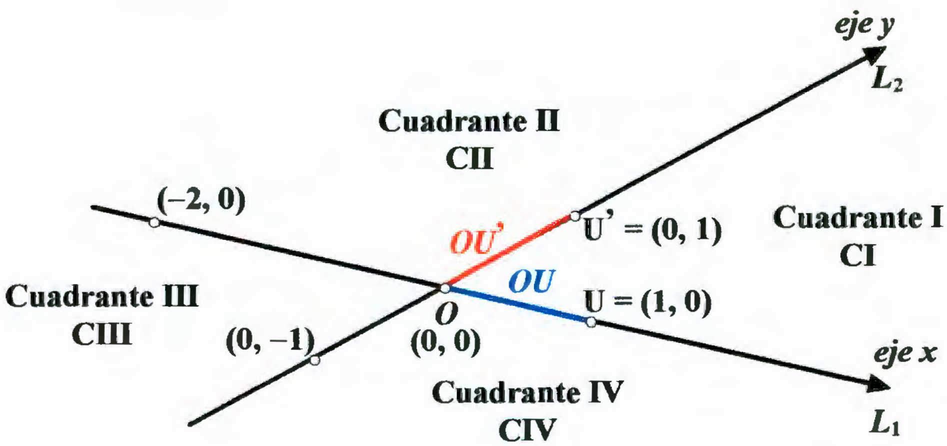


Figura 4

Ahora, con base en las relaciones establecidas hasta este momento, intentaremos finalizar nuestra tarea. Aquí, para terminar de establecer la correspondencia entre los puntos del plano geométrico y las parejas ordenadas del producto cartesiano, será necesario que a todo punto geométrico M, ubicado en cualquiera de los cuadrantes, se le haga corresponder un único elemento (x, y) de $\mathbf{R}^2$.

[5] Algunos autores prefieren llamarles ***eje de las x*** o ***eje de las abscisas*** y ***eje de las y*** o ***eje de las ordenadas***, respectivamente.

Por lo establecido en el postulado 1, se acostumbra utilizar al punto geométrico P y al par ordenado de números reales (x_P, y_P) de manera indistinta para hacer referencia al mismo objeto. Además, cuando se establecen las relaciones que permiten asignarle a cualquier punto P del plano geométrico sus correspondientes coordenadas $(x_P, y_P) \in \mathbf{R}^2$, entonces al plano euclidiano o geométrico se le suele denominar ***plano coordenado***.

Ahora que podemos contemplar al plano geométrico como plano coordenado, es posible, entre otras cosas, abordar algunos problemas planteados desde la Geometría Euclidiana vía nuestros conocimientos de álgebra y trigonometría. He aquí un primer reto:

Determinar una expresión algebraica que represente la distancia entre dos puntos cualesquiera.

Análisis de la distancia entre dos puntos cualesquiera *M* y *N*

Para simplificar nuestro análisis, pero sin que esto le reste generalidad, podemos suponer que los puntos M y N están ubicados en el primer cuadrante.

Observemos que bajo este supuesto: Si $M = (x_1, y_1)$ y $N = (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano coordenado y θ es el ángulo formado por la parte positiva de los ejes coordenados (*Figura* 7), entonces la paralela a L_1 que pasa por M se interseca, en el punto $R = (x_2, y_1)$, con la paralela a L_2 que pasa por N.

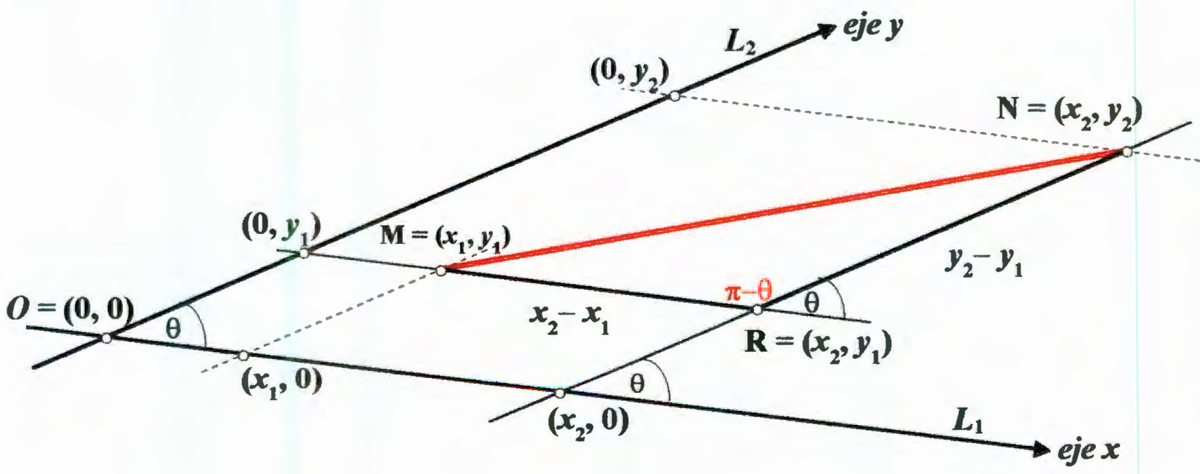


Figura 7

Luego, apoyados en la *Figura* 7, podemos darnos cuenta de que:

i) Calcular las longitudes de los segmentos MR y RN se limita a efectuar una resta de coordenadas, a saber, $MR = |x_2 - x_1|$ y $RN = |y_2 - y_1|$.

ii) El ángulo determinado por estos dos segmentos es congruente con el suplementario del ángulo formado por la parte positiva de los ejes coordenados, es decir, con

$$\pi - \theta.$$

Por lo tanto, determinar la longitud del segmento MN se reduce a aplicar, en el triángulo MRN, la ley de los cosenos.

Así,

$$MN = \sqrt{MR^2 + RN^2 - 2(MR)(RN)\cos(\pi - \theta)}\,.$$

Aquí, es importante actuar con cautela y hacernos algunas preguntas acerca de la fórmula que hemos obtenido. Quizás la más importante de ellas es la que cuestione su carácter general; ¿es aplicable a dos puntos cualesquiera?

Para responder de manera afirmativa a esta pregunta, sería suficiente considerar las distintas posiciones relativas entre los puntos considerados (M y N) y, desarrollando un análisis similar al que hemos seguido aquí, verificar que la expresión no se altera. En caso contrario nuestra respuesta tendría que ser negativa.

Estudiemos qué es lo que en realidad sucede:

Si fijamos nuestra atención en el triángulo MRN, y de manera específica en su ángulo interior opuesto al lado MN, podemos darnos cuenta de que éste no siempre medirá $\pi - \theta$; dependiendo de la posición relativa entre los puntos M y N, dicho ángulo puede medir $\pi - \theta$, como en el caso analizado anteriormente o, bien, ser congruente con el ángulo determinado por la parte positiva de los ejes coordenados, es decir, θ (*Figura* 8).

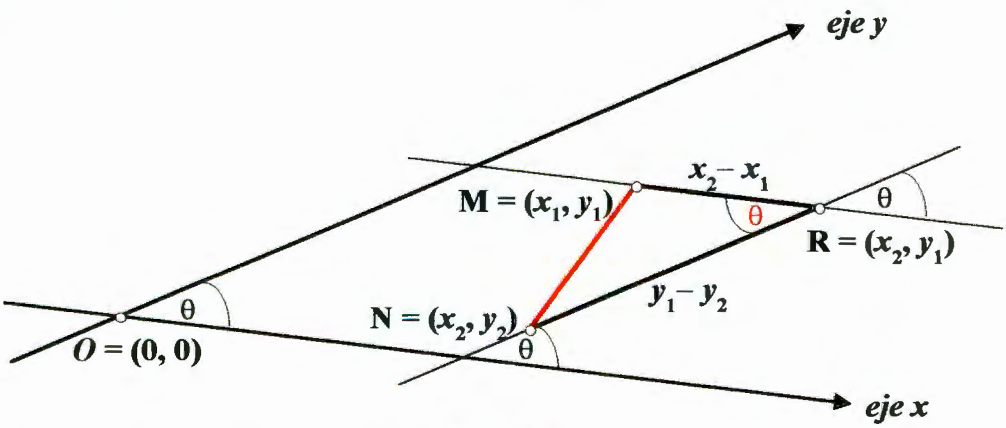


Figura 8

Luego, al aplicar nuevamente la ley de cosenos, se tiene que para este segundo caso, la longitud del segmento MN queda determinada por la expresión:

$$MN = \sqrt{MR^2 + RN^2 - 2(MR)(RN)\cos\theta}\,.$$

Naturalmente que se trata de la misma fórmula, pero el ángulo opuesto al segmento cuya longitud se desea determinar, en algunas ocasiones es congruente con el formado por la parte positiva de los ejes coordenados (θ) y en otras lo es con el ángulo suplementario de este último ($\pi - \theta$).

Por otro lado, podemos observar que, si las longitudes de los segmentos ***MR*** y ***RN*** se expresan en función de las coordenadas de los puntos ***M***, ***N*** y ***R***, entonces las expresiones que determinan la distancia entre los puntos ***M*** y ***N***, son:

$$MN = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 - 2|x_2 - x_1||y_2 - y_1|\cos(\pi - \theta)} \quad \text{y}$$

$$MN = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 - 2|x_2 - x_1||y_2 - y_1|\cos\theta}\,.$$

Donde θ, es el ángulo determinado por la parte positiva de los ejes coordenados y éste varía en el intervalo abierto $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi})$.

Ahora, una vez que nos hemos percatado de que debemos manejar "dos fórmulas" para determinar la distancia entre dos puntos del plano, la pregunta que se antoja plantear es ¿no habrá alguna forma de establecer una fórmula única?

Esta pregunta motiva nuestro siguiente análisis.

El plano coordenado rectangular o plano cartesiano

En el análisis anterior nos dimos cuenta de que, para expresar algebraicamente la distancia entre dos puntos cualesquiera, las distintas posiciones relativas entre dichos puntos conducen a establecer, en cierto sentido, dos expresiones distintas.

Se puede decir que, en esencia, la diferencia entre las dos expresiones es el ángulo que debe tomarse en cuenta para determinar la distancia. Como ya observamos, en ocasiones se debe considerar el ángulo determinado por la parte positiva de los ejes coordenados (θ) y, en otras, el suplementario ($\pi-\theta$).

Dada esta diferencia, y puesto que nuestra inquietud es la de establecer una expresión algebraica única que modele la distancia entre dos puntos cualesquiera, no hay nada más natural que buscar aquellas condiciones bajo las cuales los ángulos en cuestión sean congruentes, es decir, que

$$\theta = \pi - \theta\,.$$

Con esto en mente, podemos llegar a observar que una clave para responder la pregunta ¿habrá alguna forma de establecer una fórmula única? se halla en la Geometría Plana, ya que allí encontramos la siguiente definición:

<u>Definición</u> (3). Se llama ***ángulo recto*** a aquel ángulo que es congruente a su ángulo suplementario.

Es claro que tal definición tiene implicaciones fuertes sobre nuestro estudio, pues garantiza que si el ángulo formado por la parte positiva de los ejes coordenados (θ) es recto, entonces (tal y como se busca) se satisface que:

$$\theta = \pi - \theta .$$

Y con ello se garantiza que, si θ es recto entonces para cualquier disposición de los puntos $M = (x_1, y_1)$ y $N = (x_2, y_2)$, las expresiones para determinar la distancia entre ellos,

$$MN = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 - 2|x_2 - x_1||y_2 - y_1|\cos(\pi - \theta)} \quad \text{y}$$

$$MN = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 - 2|x_2 - x_1||y_2 - y_1|\cos\theta} \, ,$$

en todos sentidos, son la misma expresión.

Pero, todavía más, dado que

$$\cos(\pi-\theta) = \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

entonces en este sistema de referencia (*Figura* 9), la expresión para determinar la distancia entre dos puntos cualesquiera $M = (x_1, y_1)$ y $N = (x_2, y_2)$, se reduce a:

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Que, obviamente, no es otra cosa que el teorema de Pitágoras, expresado en términos de coordenadas rectangulares.

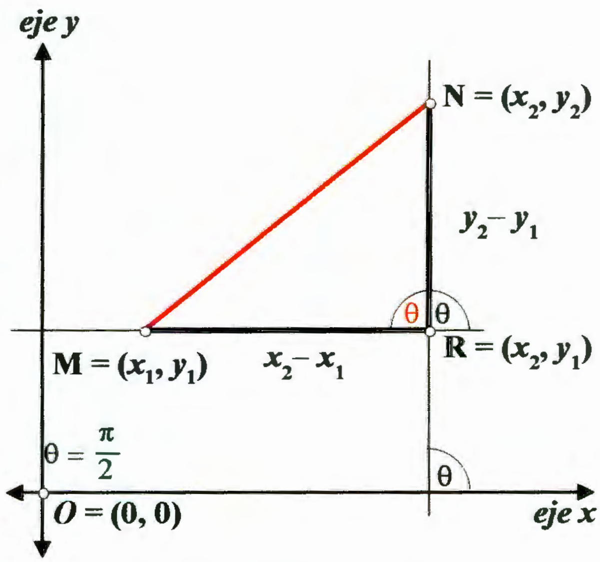


Figura 9

La ventaja de brindar una y sólo una expresión para determinar la distancia entre dos puntos, y que ésta sea más simple que sus equivalentes en otros sistemas coordenados, constituyen una de las razones por las que el sistema coordenado con $\theta = \frac{\pi}{2}$ se prefiere utilizar como herramienta de análisis en la Geometría Analítica, con respecto a cualquier otro sistema.

Así, dada la gran utilidad de ese plano coordenado, se le ha asignado un nombre propio. Aquí, para finalizar este primer capítulo, lo introducimos vía la siguiente definición.

Definición (4). Un plano coordenado cuyos ejes determinan un ángulo recto se denomina ***plano coordenado rectangular*** o, simplemente, ***plano cartesiano*** (denominado así en honor al matemático francés René Descartes).

Ejercicios

1.1) Tomando como base la *Figura* 10 y considerando que el área de la región sombreada es $-\boldsymbol{ab}\mathbf{cos}C$, desarrolla un análisis de áreas para deducir la ley de los cosenos.

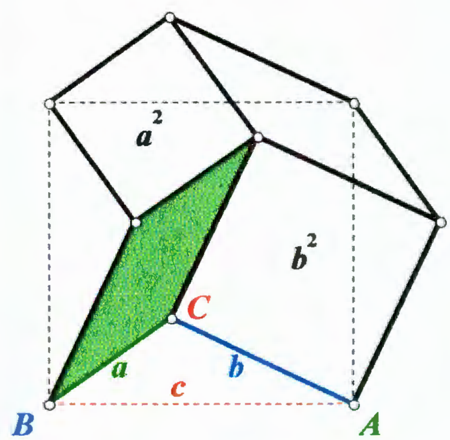


Figura 10

1.2) Halla la distancia entre los puntos:

a) $P = (0, 4)$ y $Q = (4, 0)$ b) $M = (1, 1)$ y $N = (5, 2)$,

en un plano coordenado tal, que la parte positiva de sus ejes determinan el ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$. Realiza un esquema.

1.3) Repite el ejercicio 1.2 pero ahora considera que $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Compara los resultados obtenidos en ambos ejercicios.

1.4) Para el plano coordenado descrito en el ejercicio 1.2 halla, mediante cualquier método o estrategia, seis puntos que equidisten tres unidades del punto $C = (1, 1)$. Realiza un esquema en el que se muestre la disposición de dichos puntos.

La Distancia Urbana

Antecedentes: El plano cartesiano

Temas relacionados: Circunferencia

Introducción

En el tema anterior se demostró que la distancia euclidiana (d) entre dos puntos cualesquiera, $M = (x_1, y_1)$ y $N = (x_2, y_2)$, puede ser determinada a través del teorema de Pitágoras; se puntualizó que esto es válido cuando el plano coordenado establecido es el rectangular o cartesiano y que, en ese contexto, la distancia $d\,(M, N)$ entre esos puntos, expresada en términos de sus coordenadas rectangulares, es:

$$d(M,N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{1}$$

Ahora, con la intención de analizar este resultado en un contexto diferente, pensemos en la siguiente situación:

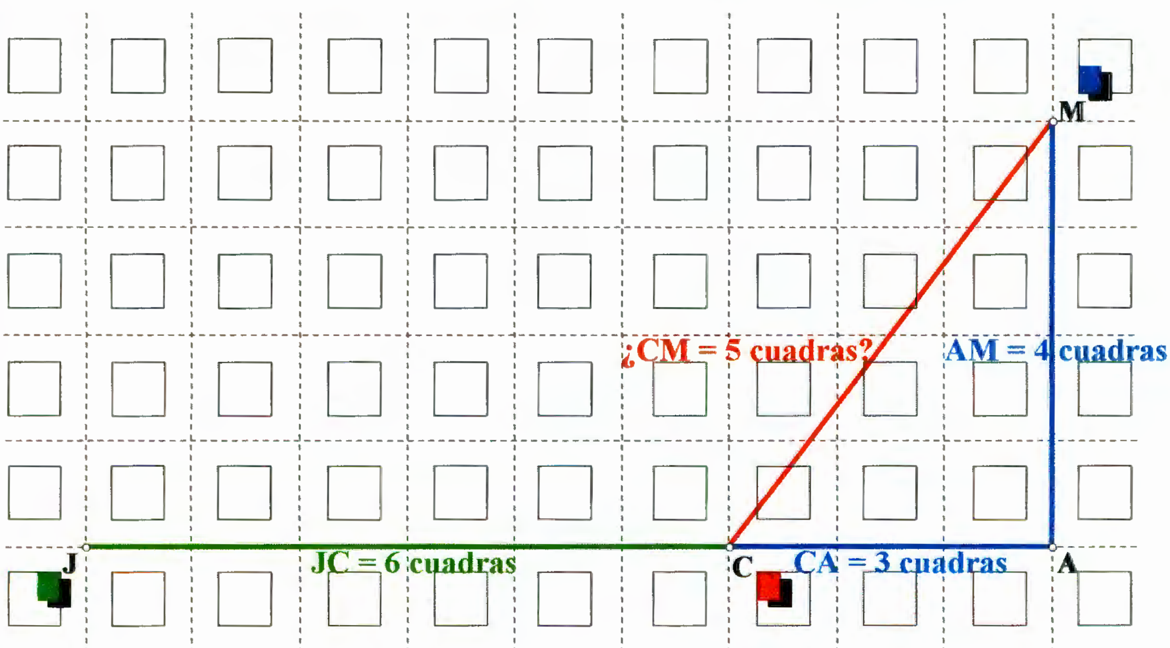


Figura 1

Supongamos que la *Figura* 1 es un croquis en el cual se muestra la ubicación de una determinada casa (*C*) con respecto a dos lugares públicos, un mercado (*M*) y un jardín (*J*).

En esta situación, y de acuerdo con la ecuación 1, la distancia del mercado a la casa es de **5** cuadras. Esto es cierto ya que

$$CM = \sqrt{CA^2 + AM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Y, en ese mismo sentido, la distancia de la casa al jardín es de **6** cuadras,

$$JC = \sqrt{JC^2 + 0^2} = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6.$$

Pero —tal y como lo proponen estos números— ¿es cierto que la casa (*C*) está "más cerca" del mercado (*M*) que del jardín (*J*)? ¿No es verdad que, de acuerdo con la *Figura* 1, si alguien camina de la casa a cualquiera de esos dos sitios, camina menos cuadras para llegar al jardín, que para llegar al mercado?

Observemos que para ir de ***C*** a ***M***, bajo la consigna de caminar el menor número de cuadras posible, se deben caminar **7** cuadras y no **5**.[1] Cabe hacer notar que pese a la restricción "caminar el menor número de cuadras", no existe sólo un camino de ***C*** a ***M***, en la *Figura* 1 únicamente se muestra (en azul) uno de los 35 caminos posibles.[2]

Si se reflexiona un poco sobre lo comentado en los párrafos anteriores, seguramente podrá notarse que la *distancia euclidiana* (establecida en el Tema 1 y que en cierto sentido queda determinada por la expresión 1) no es una expresión matemática muy adecuada para modelar la distancia que una persona debe caminar para trasladares de un punto a otro en la ciudad hipotética esquematizada en la *Figura* 1. Distancia a la que bien podríamos denominar ***distancia urbana***.

---

[1] En el estudio que aquí iniciamos, cuando hablemos de ir de un lugar ***A*** a otro ***B***, deberá entenderse que se está haciendo referencia al hecho de *caminar el menor número de cuadras* para ir de ***A*** a ***B***. Esta convención es equivalente a establecer la restricción de que, al ir de ***A*** a ***B***, una vez que horizontalmente se camina hacia la izquierda ya no se debe caminar hacia la derecha (o bien, si ya se caminó hacia la derecha queda prohibido caminar hacia la izquierda) y una vez que se camina verticalmente hacia arriba ya no se debe caminar hacia abajo (o bien, si ya se caminó hacia abajo ya no se puede caminar hacia arriba), es decir, al caminar de ***A*** a ***B*** debe considerarse sólo un sentido horizontal y sólo un sentido vertical.

[2] Para caminar el menor número de cuadras de ***C*** a ***M***, deben caminarse 3 "horizontalmente hacia la derecha" y 4 "verticalmente hacia arriba" lo que da un total de $\frac{7!}{3!4!} = 35$ rutas posibles.

Lo anterior nos conduce a plantear la siguiente pregunta, ¿de qué manera se debe definir una distancia, para que sirva como modelo matemático de la *distancia urbana*?

Dar respuesta a esta interrogante es uno de los objetivos que se persiguen en este apartado. Cabe mencionar que el cumplir esta tarea, traerá como consecuencia el desviarnos de los caminos de la Geometría Euclidiana, lo que seguramente, para el alumno que se inicia en el estudio de la Geometría Analítica, será una experiencia interesante y enriquecedora.

El modelo matemático de la distancia urbana

El análisis planteado en la introducción, de cierta manera, sugiere que es conveniente obtener un modelo con el cual se pueda determinar (*medir*) el número de "cuadras" que hay entre dos puntos dados ***P*** y ***Q***, los cuales representan cierta posición en una ciudad específica. Y recomienda que la distancia que llegue a establecerse, como resultado del estudio que se realice, se denomine *distancia urbana*, lo cual resulta útil para diferenciarla del concepto de distancia euclidiana.

Antes de emprender un estudio preciso, puede ser conveniente pensar en algunos aspectos que (apoyados en lo expuesto en la introducción) podemos intuir que la nueva distancia (esa que ahora queremos definir) deberá satisfacer de manera obligada:

1. La distancia entre dos puntos cualesquiera, ***P*** y ***Q***, deberá ser la suma de las unidades horizontales y verticales que haya entre ellos. Por ejemplo, de acuerdo con la *Figura* 2 (simplificación de la *Figura* 1) la distancia urbana nos deberá indicar que de la casa al mercado hay **7** cuadras de distancia, que de la casa al jardín hay **6** y que de este último al mercado la distancia es de **13** cuadras (lo que, naturalmente, debe ser independiente del camino o ruta que se elija para avanzar de un punto a otro, pero bajo la consigna de caminar el menor número de cuadras).

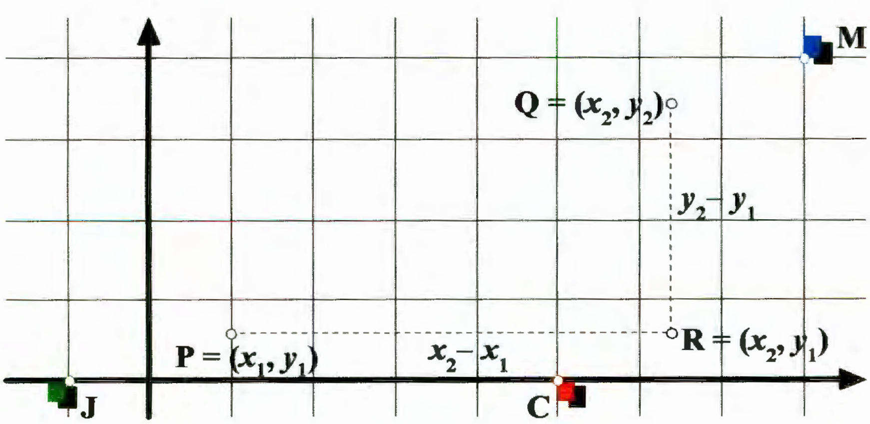


Figura 2

2. Deberá ser aplicable a todos los puntos del plano, ya sea que representen o no "esquinas de calles", por ejemplo a ***P*** y ***Q*** de la *Figura* 2.

Con respecto a lo anterior cabe comentar, por un lado, que la *Figura* 1 y la *Figura* 2 describen o representan la misma situación, sólo que la segunda es una simplificación de la primera. Naturalmente, en tal simplificación las líneas rectas representan las calles de la ciudad. Y, por otro lado, señalar que en la *Figura* 2 ya se introdujo una de las herramientas estudiadas en el Tema 1, a saber, un par de ejes coordenados rectangulares.

El hacer estos ajustes a nuestro croquis original, es con la intención de establecer las condiciones necesarias para realizar un estudio preciso de lo que hemos denominado la distancia urbana. Dicho estudio se desarrolla a continuación.

Tomando como referencia la *Figura* 2, consideraremos dos puntos cualesquiera de ella, $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$; al trazar una paralela al *eje x* que pase por P, y una paralela al *eje y* que pase por Q (tal y como se hizo en el tema anterior) las dos rectas se intersecan en un punto $R = (x_2, y_1)$ y, de este modo, la longitud de los segmentos PR y RQ son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$, respectivamente.[3] Luego, estas dos últimas expresiones pueden ser utilizadas para determinar el número de "cuadras" (horizontales y verticales) comprendidas entre el punto P y el punto Q (lo cual resulta coherente con los dos aspectos intuitivos descritos en párrafos anteriores).

De este modo, si la distancia urbana de un punto $P = (x_1, y_1)$ a un punto $Q = (x_2, y_2)$ la representamos por d_U (*distancia* $_{\text{Urbana}}$) resulta plausible enunciar la siguiente definición

<u>Definición</u> (1):

$$d_U(P,Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Así, esta definición no sólo establece el hecho de que la distancia urbana entre dos puntos cualesquiera, P y Q, es la distancia horizontal más la distancia vertical que hay entre ellos, sino que también es aplicable a cualquier par de puntos del plano, como se quería.

Ahora que contamos con dos definiciones de distancia, resulta adecuado convenir una notación específica para cada una de ellas. Con tal intención utilizaremos

---

[3] Nótese que en este análisis, es necesario manejar de manera precisa el concepto de valor absoluto (tal y como se hizo en el Tema 1) ya que de no ser así, lo más probable es que la distancia entre los puntos dependería de la posición relativa entre ellos.

$d_U\ (P, Q)$ para referirnos a la distancia urbana entre los puntos P y Q

$d_E\ (P, Q)$ al referirnos a la distancia euclidiana entre los puntos P y Q.

En este sentido, para dos puntos cualesquiera, $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, se tiene que

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y

$$d_U(P,Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

representan, respectivamente, la distancia euclidiana y la distancia urbana, entre dichos puntos.

Antes de comenzar a trabajar con la nueva distancia aquí definida, puede resultar conveniente reflexionar sobre lo siguiente: Una vez que se conocen dos definiciones —distintas— de distancia, es posible que alguien se pregunte ¿entonces se puede dar cualquier definición de distancia? o, más aún, ¿cualquiera puede "inventar" una definición de distancia?

Una afirmación es la respuesta para ambas preguntas, sin embargo existe una condición, condición que, por otro lado, resulta ser muy natural: La definición, cualquiera que esta sea, debe permitir que la distancia (es decir, lo definido) se comporte como tal.

Desde luego, en esta condición surge una interrogante fundamental (aún más importante que el par de preguntas iniciales): ¿cuál es el comportamiento de una distancia?, es decir, ¿cuáles son las características que debe poseer una distancia, para que se considere como tal?

Responder esta última pregunta no es tarea fácil sin embargo, en vista de lo analizado hasta ahora (incluyendo lo correspondiente al Tema 1), parece razonable pensar que si alguien decide "inventar" una definición de distancia entre dos puntos cualesquiera del plano —distancia que por comodidad se podría representar como d_i (*distancia* $_{\text{inventada}}$)—, entonces ella debe constituir un modelo matemático capaz de mostrar que:

1. La distancia (d_i) de un punto a él mismo es nula y viceversa, cuando la distancia entre dos puntos es nula, entonces se trata del mismo punto. Pero si se hace referencia a dos puntos distintos, entonces la distancia se corresponde, de alguna forma, con un número real positivo.
2. La distancia de un punto a otro es independiente del "sentido" en el cual se establezca, es decir, la distancia, d_i, del punto A al punto B, es la misma que la del punto B al punto A.

3. Seguir una ruta "directa" para ir de un punto A a otro punto B debe ser más corto, o a lo sumo igual, que ir de A a B dando un rodeo a través de otro punto C, en otras palabras, d_i debe satisfacer la propiedad denominada *desigualdad del triángulo* (un lado de un triángulo no puede ser más largo que la suma de las longitudes de los otros dos lados).

Estas características, expresadas con símbolos matemáticos, quedan de la siguiente manera:

$$d_i(A, B) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad d_i(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

$$d_i(A, B) = d_i(B, A)$$

$$d_i(A, B) \leq d_i(A, C) + d_i(C, B).$$

Es importante mencionar que estas propiedades constituyen la definición precisa de distancia, punto de partida de algunas áreas de la matemática tales como el Análisis Matemático y la Topología.

Trabajando con la distancia urbana

Ahora, con la intención de proporcionar un ambiente que nos introduzca a utilizar la distancia urbana, supongamos que se pretende graficar el conjunto de puntos cuya distancia euclidiana (d_E) al punto $C = (2, 1)$, es **3** unidades, en otras palabras, se quiere ubicar en el plano cartesiano a todos aquellos puntos $P = (x, y)$ que pertenecen al siguiente conjunto $\{P \mid d_E(P, C) = 3\}$.

Ante tal situación se dibujaría algo similar a lo mostrado en la *Figura* 3. Figura a la que bien se le podría denominar *circunferencia* de centro $C = (2, 1)$ y radio $r = 3$.

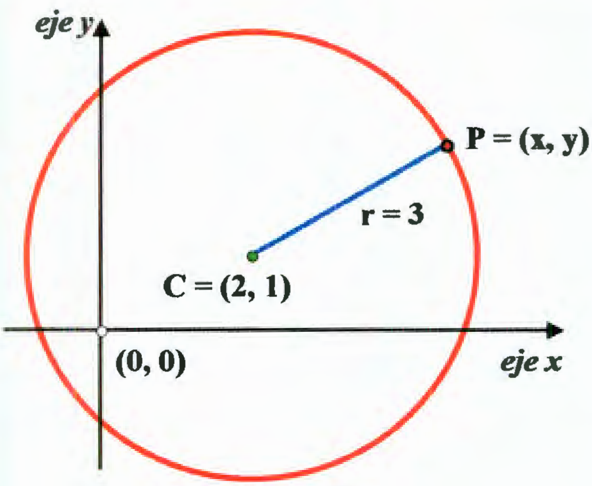


Figura 3

En un contexto general, podemos establecer la siguiente:

Definición (2): La ***circunferencia*** ($\mathcal{C}$) es el conjunto de puntos $P = (x, y)$, del plano, cuya distancia (r) a un punto dado (C) es constante. De este modo,

$$\mathcal{C} = \{P \mid d(P, C) = r\}$$

Al punto fijo se le denomina ***centro*** de la circunferencia y a la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia se le denomina ***radio***.

Como puede observarse, la definición de circunferencia no se restringe a la distancia euclidiana y, de este modo, tiene sentido preguntar: ¿Cómo será la gráfica de una circunferencia cuando se utiliza la distancia urbana? En particular, ¿cómo será la gráfica de la circunferencia $\{P \mid d_U(P, C) = 3\}$, donde $C = (2, 1)$?

Para contestar la segunda pregunta (y posteriormente intentar generalizar los resultados) podemos pensar en seguir una secuencia que conduzca a ubicar el conjunto de puntos $P = (x, y)$ cuya distancia urbana al punto $C = (2, 1)$ es **3**. Dicha secuencia puede ser, por ejemplo:

i) Considerar a los puntos $P = (x, y)$ que tanto horizontal como verticalmente están ubicados, desde C, a una $d_U = 3$. De esta manera, se tiene que los puntos $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (2, 4)$, $P_3 = (5, 1)$ y $P_4 = (2, -2)$, pertenecen al $\{P \mid d_U(P, C) = 3\}$ (*Figura* 4-A).

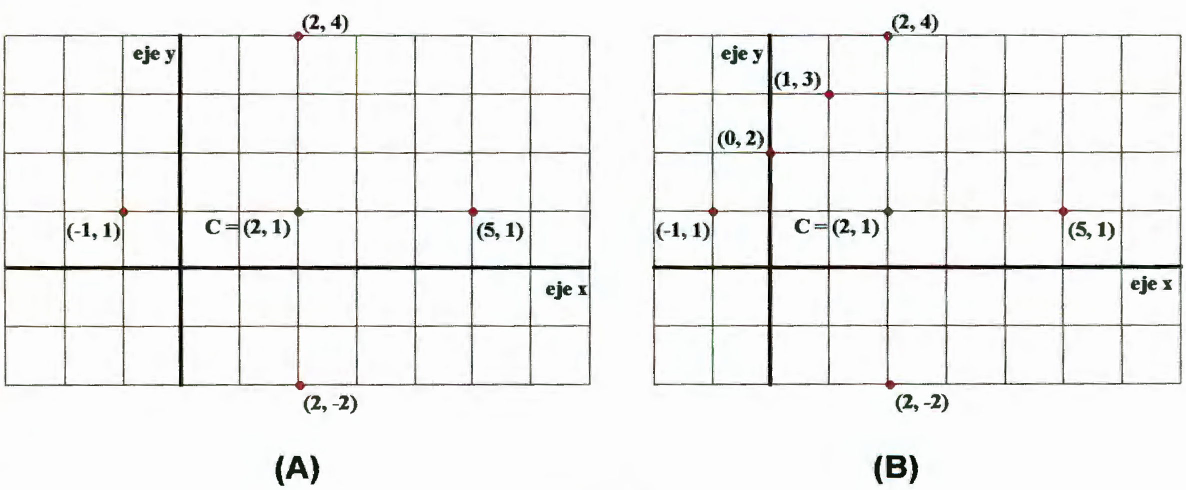
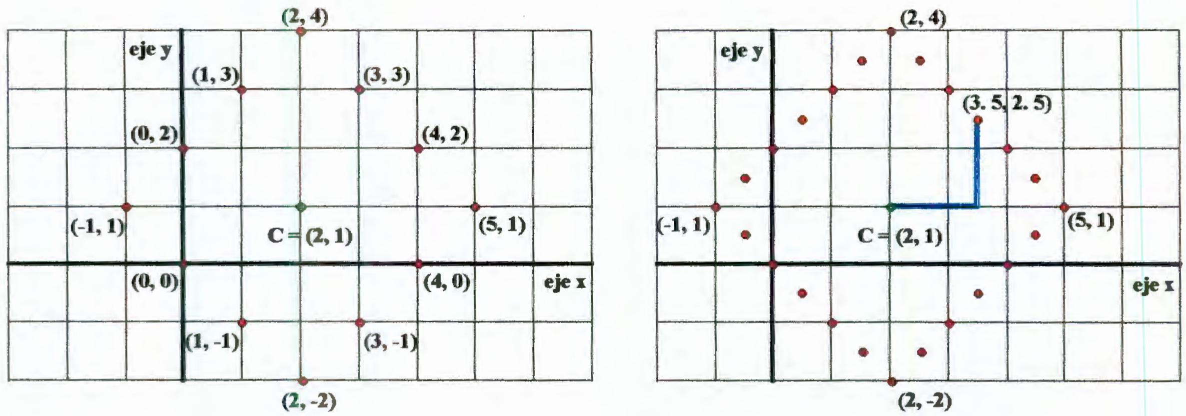


Figura 4

ii) Posteriormente se puede pensar en aquellos puntos $P = (x, y)$, de coordenadas enteras, que están alineados, por ejemplo, entre los puntos **(−1, 1)** y **(2, 4)**. Estos puntos son $P_5 = (0, 2)$ y $P_6 = (1, 3)$, los cuales, tal y como puede verificarse en la *Figura* 4-B, están a una d_U = **3** a partir de C y por esta razón también pertenecen al $\{P \mid d_U(P,C)=3\}$. Una vez verificado esto, no resulta difícil intuir, y confirmar aprovechando el esquema de la *Figura* 5-A, que los puntos **(0, 0)**, **(1, –1)**, **(3, 3)**, **(4, 2)**, **(3, –1)** y **(4, 0)**, también son elementos que pertenecen al conjunto considerado.



(A) **(B)**

Figura 5

Antes de continuar con esta secuencia, abriremos un paréntesis con la intención de señalar un aspecto inherente a la misma:

> En ninguno de los esquemas de las *Figuras* 4 y 5 utilizados hasta ahora se han marcado caminos o rutas que indiquen dónde o cómo se midió el valor de la distancia d_U **(P_i, C = (2, 1))**. Esta omisión tiene como propósito, por un lado, hacer hincapié en el hecho de que esa actividad es independiente de la ruta que se elija medir y, por otro lado, remarcar el hecho de que el recurrir a la figura para verificar que los puntos, P_i, satisfacen la condición de que distan desde C = **(2, 1)** tres unidades, no es otra cosa que la aplicación, informal, de la definición 1. Así, por ejemplo, se tiene que si la expresión
>
> $$d_U(P,C)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$$
>
> se aplica a los puntos C = **(2, 1)** y P = **(3, –1)**, entonces
>
> $$d_U(P,C) = |2-3| + |1-(-1)| = 1+2=3.$$
>
> Lo que demuestra la veracidad de nuestra conjetura acerca del punto P = **(3, –1)**.

Ahora, una vez que hemos hecho estas observaciones, cerramos nuestro paréntesis y continuamos con la secuencia:

iii) Posiblemente, la *Figura* 5-B constituya el siguiente paso natural en nuestro desarrollo. Está construida para auxiliarnos en el análisis de los puntos P_i que están justamente "en medio" de dos puntos consecutivos ya obtenidos. A través de esa figura o, bien, de la definición 1, es fácil verificar que cualquiera de estos puntos distan, del punto C, tres unidades. Verifiquemos este hecho, por ejemplo, con el punto $\boldsymbol{P} = \mathbf{(3.5, 2.5)}$

$$d_U(P, C) = |2 - 3.5| + |1 - 2.5| = 1.5 + 1.5 = 3.$$

Desde luego que la secuencia anterior no demuestra que la *Figura* 6 sea la gráfica de la circunferencia definida por $\{\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{d}_U(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{C}) = 3\}$ pero, con base en ella, seguramente más de uno intuiría este hecho.

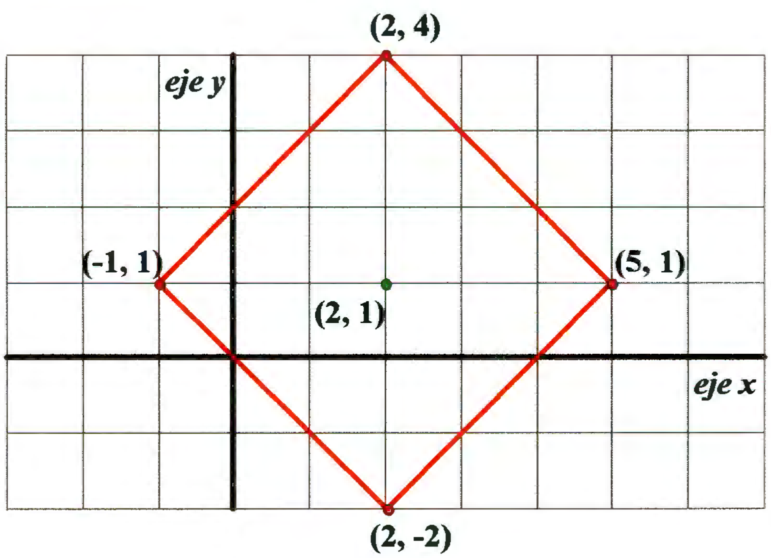


Figura 6

Para verificar esta conjetura llevaremos nuestro análisis a un terreno general y para ello estudiaremos las características del conjunto de puntos, $\boldsymbol{P}$, cuya distancia urbana al punto $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ es $\boldsymbol{r}$, en otras palabras, estudiaremos la circunferencia

$$\mathcal{C} = \{P \mid d_U(P, C) = r, C = (h, k)\}.$$

Por supuesto, este estudio tendrá como base las ideas anteriores por lo que, siguiendo un razonamiento análogo, tenemos que:

i) Los puntos $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ que horizontal o verticalmente están desde $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ a una distancia $\boldsymbol{d}_U = \boldsymbol{r}$, son:

$$A = (h-r,\ k),\ B = (h,\ k+r),\ D = (h+r,\ k) \text{ y } E = (h,\ k-r).$$

Y por lo tanto pertenecen a la circunferencia $\mathcal{C} = \{P \mid d_U(P, C) = r\}$ (*Figura* 7).

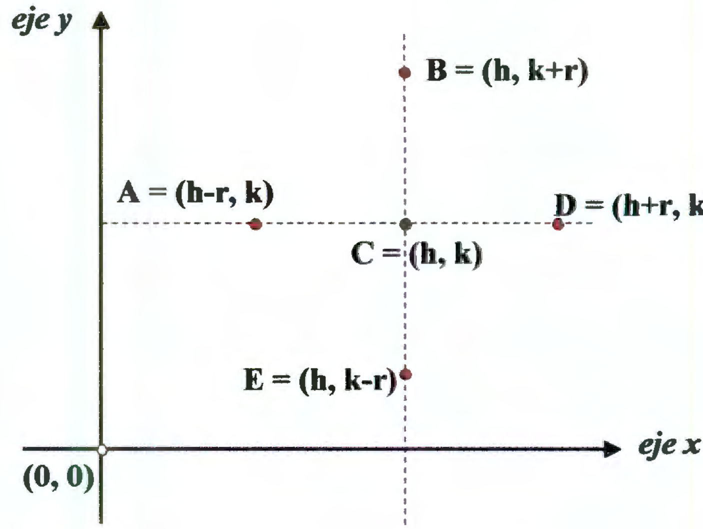


Figura 7

ii) Una vez ubicados esos puntos, y con la experiencia del ejemplo precedente, puede pensarse que todos aquellos puntos que se localizan en cualquiera de los segmentos AB, BD, DE y EA conforman la circunferencia $\mathcal{C} = \{P \mid d_U(P, C) = r\}$ (*Figura* 8).

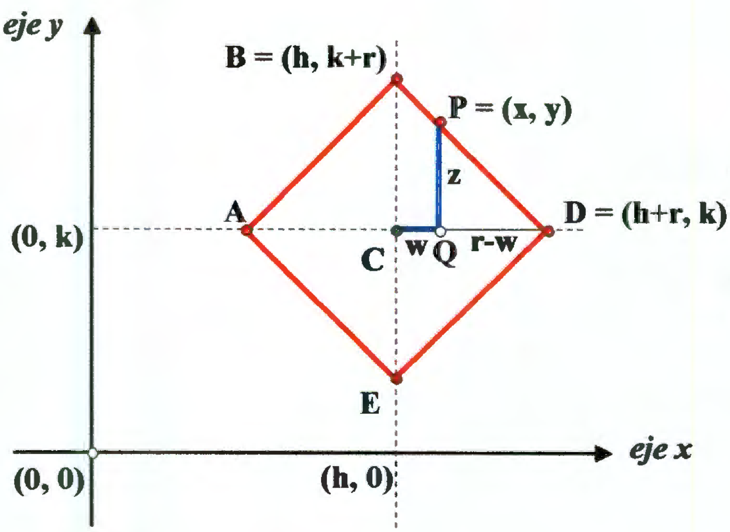


Figura 8

Para verificar que esta conjetura es cierta, basta observar que si $P = (x, y)$ es cualquier punto sobre cualquiera de esos segmentos, por ejemplo el segmento BD, y Q es el punto donde la perpendicular trazada desde P se interseca con el diámetro AD (*Figura* 8) entonces, e independientemente del valor de r, por la semejanza entre los triángulos BCD y PQD, se tiene que

$$\frac{r-w}{r} = \frac{z}{r}$$

por lo que

$$w + z = r.$$

Esto, en el contexto de la distancia urbana, significa que el número de cuadras horizontales (w) más el número de cuadras verticales (z) existentes entre el punto C y cualquier punto P (del segmento considerado) es una cantidad constante, (r cuadras).

Y ya que, procediendo de manera análoga, se puede establecer que los puntos $P = (x, y)$ de los segmentos AB, DE y EA, también pertenecen a dicho conjunto, el análisis aquí desarrollado demuestra que todos los puntos del cuadrado $ABDE$ de la *Figura* 8 pertenecen a la circunferencia $\mathscr{C} = \left\{P \mid d_{\mathrm{U}}(P, C) = r\right\}$.

Sin embargo, para que este estudio esté completo falta averiguar un último detalle, la *unicidad*; ¿los puntos considerados en la *Figura* 8 son los únicos que distan **3** unidades desde C?

La respuesta a esta última pregunta también es afirmativa y se dejará su demostración, vía el análisis del caso general, para los ejercicios propuestos (ver ejercicio 2.3).

Ahora ya estamos en posibilidades de dar respuesta a la pregunta ¿cómo será la gráfica de una circunferencia en el contexto de la distancia urbana?

Así pues, con la intención de formalizar nuestra respuesta, podemos enunciar la siguiente definición.

Definición (3): Dado un punto cualquiera $C = (h, k)$ y $r \in \mathbb{R}^{+}$, al conjunto

$$\left\{P \mid d_{\mathrm{U}}(P, C) = r\right\}$$

se le denomina ***circunferencia urbana*** con centro (h, k) y radio r. Y su gráfica es la que se muestra en la *Figura* 9.

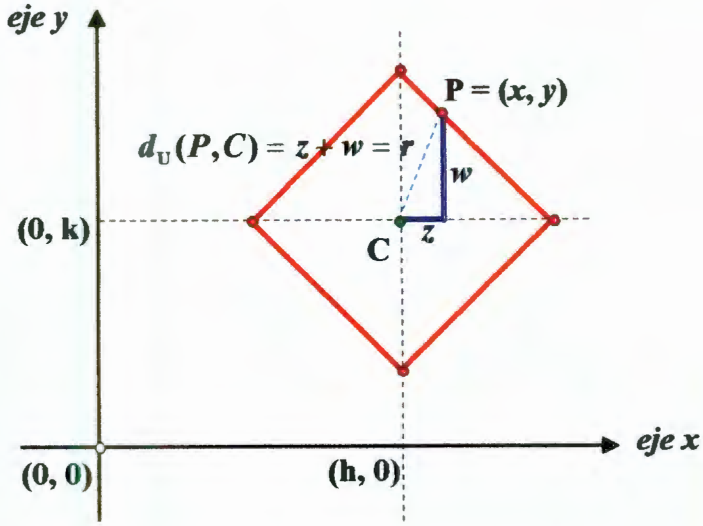


Figura 9

Ahora, a la luz de las ideas aquí expuestas, es posible abordar una serie de conceptos y relaciones geométricas que tradicionalmente son estudiadas en la geometría euclidiana, un ejemplo de esto se presenta a continuación.

En el contexto de la distancia urbana, ¿la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro es π?

Desde la primaria se conoce la razón de la longitud de cualquier circunferencia a su diámetro, se sabe que se denota con la letra griega π y que su valor es aproximadamente **3**. Naturalmente, esta razón obedece al hecho, generalmente no explícito de que ambos, tanto la longitud de la circunferencia como el diámetro de la misma, se "miden" con la distancia euclidiana. Sin embargo, una vez que se establece la definición 3, uno puede preguntarse ¿cuál es valor de la razón de la longitud de una circunferencia urbana a su diámetro?, ¿es un valor constante independiente de la circunferencia considerada? y, de ser este el caso, ¿será el irracional **3.14** ... ?

Para responder las preguntas anteriores será suficiente observar, por un lado, que para toda circunferencia urbana, sus segmentos AB, BD, DE y EA (*Figura* 10) son de longitud $2r$ —para cada segmento, el ir de un extremo a otro, por ejemplo de A a B, implica recorrer r unidades tanto horizontal como verticalmente—.

Y que, por esta razón, la longitud total de la circunferencia es[4]

[4] Naturalmente que esta forma de medir el perímetro de la circunferencia (recurriendo a estos cuatro puntos muy específicos) no es la única. Para un análisis complementario puede recurrirse al ejercicio 2.2.

$$4(2r) = 8r$$

Por otro lado, y de manera natural, podemos suponer que si r es el radio, entonces el diámetro de la circunferencia es $2r$ (ver ejercicio 2.1).

Por lo tanto, la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro es

$$\frac{8r}{2r} = 4.$$

Este razonamiento constituye la demostración del siguiente hecho.

Propiedad (1). La razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro, en el contexto de la distancia urbana, es **4**.

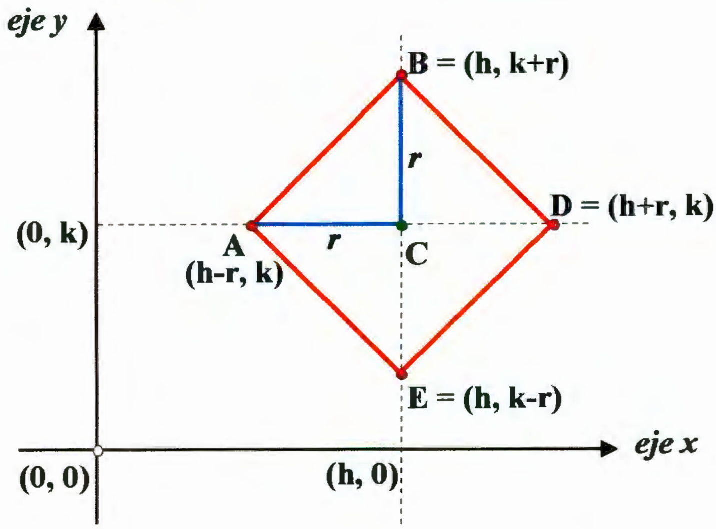


Figura 10

Desde luego que existe una infinidad de cosas que, sin ser muy complicadas, pueden analizarse desde esta perspectiva y llegar a obtener resultados interesantes. A este respecto, posiblemente a más de uno le sorprenda el hecho de que muchas propiedades estudiadas con la distancia euclidiana también se verifican al trabajar con la distancia urbana.

Ejercicios

2.1) Demuestra que cualquier diámetro de la circunferencia urbana (segmento que contiene al centro y cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia) tiene como longitud **2*r***.

Para cada uno de los ejercicios siguientes, y de acuerdo con lo establecido en este tema, dados dos puntos cualesquiera $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, considera

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

$$d_U(P,Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \quad (2)$$

2.2) Sean ***M***, ***N***, ***P*** y ***Q*** cuatro puntos cualesquiera (distintos de ***A***, ***B***, ***D*** y ***E***), uno sobre cada "lado" de la *circunferencia urbana* con centro **(*h*, *k*)** y radio ***r*** (*Figura* 11).

a) Determina $d_U(M, N)$, $d_U(N, P)$, $d_U(P, Q)$ y $d_U(Q, M)$.

b) Con base en los resultados del inciso anterior, demuestra que el perímetro de esta circunferencia es 8r.

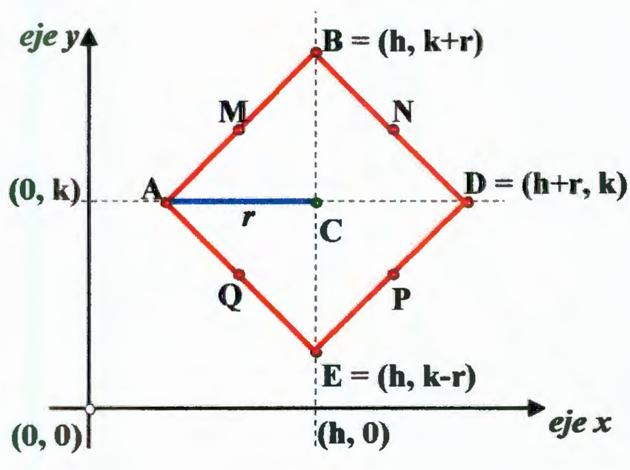


Figura 11

2.3) Demuestra que los puntos $P = (x, y)$ que pertenecen al cuadrado ***ABDE*** de la *Figura* 8, son los únicos puntos que tienen una $d_U = r$, a partir de C.

2.4) Grafica cada par de puntos ***P***, ***Q*** y determina la d_U y d_E entre ellos.

a) $P = (4, 5)$, $Q = (2, 1)$

b) $P = (-4, 3)$, $Q = (3, 2)$

c) $P = (3, -1)$, $Q = (-2, 4)$

d) $P = (4, -3)$, $Q = (-2, -3)$

2.5) Justifica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Si $d_U(P, Q) = d_U(R, S)$, entonces $d_E(P, Q) = d_E(R, S)$.

b) Si $d_E(P, Q) = d_E(R, S)$, entonces $d_U(P, Q) = d_U(R, S)$.

c) Para cualquier par de puntos P y Q, se tiene que $d_E(P, Q) \leq d_U(P, Q)$.

2.6) Determina las condiciones que deben satisfacer los puntos P y Q para que $d_U(P, Q) = d_E(P, Q)$.

2.7) Considerando que $A = (2, 1)$ y $B = (7, 4)$, determina la gráfica de:

a) $\{P \mid d_U(P,A) = 1 \text{ y } d_U(P,B) = 7\}$

b) $\{P \mid d_U(P,A) = 3 \text{ y } d_U(P,B) = 5\}$

c) $\{P \mid d_U(P,A) = 5 \text{ y } d_U(P,B) = 3\}$

d) $\{P \mid d_U(P,A) = 0 \text{ y } d_U(P,B) = 8\}$

e) $\{P \mid d_U(P,A) = 1.5 \text{ y } d_U(P,B) = 6.5\}$

f) $\{P \mid d_U(P,A) + d_U(P,B) = d_U(A,B)\}$

2.8) Considerando que $A = (1, 2)$ y $B = (9, 8)$, determina $d_E(A, B)$ y la gráfica de $\{P \mid d_E(P,A) + d_E(P,B) = d_E(A,B)\}$.

2.9) Considerando que $A = (-2, -1)$ y $B = (3, 2)$, determina la gráfica de:

a) $\{P \mid d_U(P,A) = 4 \text{ y } d_U(P,B) = 4\}$

b) $\{P \mid d_U(P,A) = 5 \text{ y } d_U(P,B) = 5\}$

c) $\{P \mid d_U(P,A) = 7 \text{ y } d_U(P,B) = 7\}$

d) $\{P \mid d_U(P,A) = d_U(P,B)\}$

2.10) Repite el ejercicio 2.9 utilizando d_E en lugar de d_U.

2.11) Para cada par de puntos propuesto, determina la gráfica de

$$\{P \mid d_U(P,A) = d_U(P,B)\}$$

a) $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$

b) $A = (0, 0)$, $B = (3, 5)$

c) $A = (0, 0)$, $B = (4, 4)$

d) $A = (-2, 2)$, $B = (3, 2)$

2.12) Determina la gráfica de $\{P \mid d_U(P,A) = 2d_U(P,B)\}$ considerando que $A = (-3, 0)$ y $B = (1, 2)$.

2.13) Repite el ejercicio 2.12 utilizando d_E en lugar de d_U.

2.14) Si $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, definimos a

i) $d_M(P,Q) = \text{Max}\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$ como la ***distancia del máximo*** entre los puntos P y Q.

ii) $d_m(P,Q) = \text{Min}\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$ como la ***distancia del mínimo*** entre los puntos P y Q.

Muestra que:

a) La distancia del máximo satisface las propiedades de las distancias, es decir, muestra que

$$d_M(P, Q) \geq 0 \quad \text{y} \quad d_M(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q.$$

$$d_M(P, Q) = d_M(Q, P)$$

$$d_M(P, Q) \leq d_M(P, C) + d_M(C, Q).$$

b) La distancia del mínimo **no** satisface las propiedades de las distancias.

2.15) Muestra que la distancia urbana cumple las propiedades de las distancias.

Los siguientes ejercicios hacen referencia a una "Ciudad Ideal", considera que dicha ciudad es aquella que fue esquematizada en la *Figura* 1.

2.16) Alba y Enrique es un matrimonio que siempre ha deseado vivir en Ciudad Ideal, ahora se les ha presentado la oportunidad ya que ambos recibieron excelentes ofertas de trabajo. Enrique trabajará en COPLAIN, empresa que se dedica a realizar estudios de impacto ambiental y que se encuentra ubicada en $\mathbf{C} = (3, 3)$. Por su parte, Alba trabajará en un laboratorio que se dedica a realizar estudios sobre la calidad del aire y del agua, este laboratorio se encuentra ubicado en $\mathbf{L} = (-3, -1)$. Ellos han decidido rentar un departamento cuya localización les permita trasladarse caminando a sus respectivos trabajos. ¿En que zona de la ciudad deberán buscar departamento, si ellos desean que la suma de las distancias caminadas desde su hogar hasta sus respectivos trabajos sea mínima?

2.17) En un momento de caballerosidad, Enrique decide que Alba **no** debe caminar más de lo que él recorra. Bajo esta nueva condición, pero sin pasar por alto que la suma de las distancias debe ser mínima, determina la zona de la ciudad en la cual deben buscar su departamento.

2.18) Si Alba logra convencer a Enrique de que ambos deben caminar la misma distancia a su trabajo, sin alterar la condición de que la suma de las distancias recorridas debe ser mínima, ¿en dónde deberían buscar?

2.19) Después de un día infructuoso de búsqueda deciden que, para que ésta se facilite un poco, la <u>única</u> condición que realmente debe satisfacer el lugar para vivir es que ambos estén a la misma distancia de sus respectivos trabajos. Ahora, bajo esta condición única, ¿en dónde deberán buscar?

2.20) Luego de otro día de mala suerte, acuerdan que lo que verdaderamente importa es que Enrique (que saldrá más tarde de trabajar) esté más cerca de su trabajo que Alba del suyo. ¿Ahora, en dónde podrán buscar departamento?

2.21) La sociedad de padres de familia de Ciudad Ideal ha decidido construir una biblioteca pública. Tomando en cuenta que la Universidad tiene una población estudiantil mayor que la del Tecnológico, consideran conveniente que la biblioteca diste como máximo **6** cuadras del Tecnológico $T = (-3, 0)$ y un máximo de **4** cuadras a la Universidad $U = (2, 2)$. ¿En dónde se puede construir la biblioteca?

2.22) La compañía telefónica de Ciudad Ideal quiere montar teléfonos públicos para que todas aquellas personas que, ubicadas en un perímetro no mayor a 12 cuadras del centro, tengan que desplazarse 4 cuadras, como máximo, cuando deseen utilizar este servicio. Determina el número mínimo de casetas telefónicas que se requieren y la ubicación de las mismas.

2.23) En Ciudad Ideal hay tres preparatorias públicas: Preparatoria Norte en $(-4, 3)$, Preparatoria Centro en $(2, 1)$ y Preparatoria Sur en $(-1, -6)$. Determina "zonas escolares" para que cada estudiante de Ciudad Ideal asista a la preparatoria más cercana.

2.24) Un grupo de estudiantes, recién egresados de la Facultad de Administración, quieren abrir una papelería equidistante a cada una de la preparatorias descritas en el ejercicio anterior, ¿cuál debe ser su ubicación?

Programación Lineal

Antecedentes: Sistemas de ecuaciones lineales

Temas relacionados: División de un segmento en una razón dada
Formas de la ecuación de la recta
Punto de intersección de dos rectas
Semiplanos
Conjuntos en el plano

El problema

Alejandro es un estudiante de preparatoria que ayuda a su padre en una pequeña carpintería de su propiedad. En este año las cosas han marchado bien y su papá ha decidido regalarle 990 metros de madera (165 tablones) y todos los materiales adicionales tales como clavos y barniz para que, en este periodo vacacional, construya bancos y mesillas (la especialidad de su carpintería) y que las ganancias sean íntegras para su hijo.

Por la experiencia que tiene, Alejandro sabe que para cada banco necesita 6 metros de madera (1 tablón) y 4 horas de mano de obra; mientras que para cada mesilla debe utilizar 15 metros de madera (2.5 tablones) y únicamente 3 horas de mano de obra. Además él estima que dadas las condiciones bajo las cuales fabricará los artículos, la ganancia por cada banco será de $99 y la de cada mesilla de $198.

Por otro lado, Alejandro ha estructurado un plan de trabajo y con base en él ha decidido trabajar, como máximo, siete de las ocho semanas que tiene de vacaciones, dedicándole nueve horas diarias de lunes a viernes, con excepción de la primera semana en la cual trabajará de lunes a sábado.

Imagina que Alejandro te pide un consejo acerca de cuántos bancos y cuántas mesillas debe fabricar para que su ganancia sea máxima, y que él te asegura que todo lo que fabrique en ese periodo vacacional se venderá, ¿qué le aconsejarías?

El modelo matemático

Con la intención de resolver este problema se puede buscar plantear un modelo matemático de la situación descrita anteriormente y luego, utilizando técnicas elementales de álgebra, realizar un análisis del mismo. Estas actividades son las que se desarrollarán a continuación:

Podemos comenzar llamando x a la cantidad de bancos y y a la cantidad de mesillas, que bajo las condiciones establecidas se pueden fabricar. De este modo tenemos que:

i) $6x + 15y \leq 990$ .... Para ver que esto es cierto observemos que: Si 6 y 15 metros son las cantidades de madera necesarias para construir, respectivamente, un banco y una mesilla, entonces $\mathbf{6x}$ y $\mathbf{15y}$ representan la cantidad de madera que se requiere para la producción de x bancos y y mesillas. Así, el total de la madera utilizada en la fabricación de los muebles ($\mathbf{6x + 15y}$) no debe exceder los 165 tablones obsequiados (990 metros).

ii) $4x + 3y \leq 324$ .... Tomando en cuenta que el tiempo máximo destinado por Alejandro para trabajar en el periodo vacacional es de 324 horas (35 días de nueve horas cada uno, correspondientes a las siete semanas, más las 9 horas del primer sábado) y que el tiempo que se debe dedicar para construir x bancos y y mesillas, respectivamente, es $\mathbf{4x}$ y $\mathbf{3y}$ (en virtud de que el tiempo necesario para la construcción individual de los primeros es de 4 horas y para los segundos es de 3 horas); lo que aquí se establece es que el tiempo total invertido para la fabricación de los muebles ($\mathbf{4x + 3y}$) no deberá exceder del tiempo máximo destinado por Alejandro (324 horas).

iii) $y \geq 0$ y $x \geq 0$ .... Puesto que la producción, de cualquiera de los artículos, no puede considerarse en cantidades negativas.

iv) $G = 99x + 198y$ ...... Si se toma en cuenta que la ganancia generada por cada banco es de \$99 y la de cada mesilla es de \$198, entonces la ganancia total (G) que se obtendrá por la producción de x bancos y y mesillas, queda determinada por la ecuación lineal que aquí se presenta.

De este modo podríamos decir que la ayuda que se le puede brindar a Alejandro consiste en determinar los valores, x y y, que garanticen que la ganancia $\mathbf{G = 99x + 198y}$ sea la máxima posible.

Un primer intento

Seguramente que existe una gran cantidad de parejas x y y que satisfacen a las tres primeras condiciones pero ¿cómo determinarlas? Y más aún, ¿cómo encontrar a la que genere la ganancia máxima ($G_{máxima}$)?

Posiblemente, alguien puede pensar que como la ganancia de las mesillas es superior a la de los bancos, y por si esto fuera poco su tiempo de fabricación es menor, se deberían producir exclusivamente mesillas.

Pero, si éste fuera el caso, entonces los 990 metros de madera, divididos entre los 15 metros necesarios para la fabricación de cada mesilla, sugieren elaborar 66 mesillas, de tal manera que

$$G = 198y = 198(66) = 13\,068 \text{ pesos.}$$

Y, bajo esta propuesta, hasta podría argumentarse, tratando de convencer de la bondad de la sugerencia, que únicamente es necesario invertir

$$3y = 3(66) = 198 \text{ horas} = 22 \text{ jornadas de } 9 \text{ horas,}$$

de cierto modo, ¡únicamente la mitad de las vacaciones!

Sin embargo si se estudian otras combinaciones, por ejemplo 50 mesillas y 40 bancos, se observa que, además de satisfacer las condiciones establecidas, a saber

$$6(40) + 15(48) = 960 \leq 990 \quad \text{y} \quad 4(40) + 3(48) = 304 \leq 324,$$

se obtiene una ganancia de

$$G = 99(40) + 198(48) = 13\,464 \text{ pesos,}$$

lo que representa una utilidad mayor que la anterior en $396.

Esto sugiere que bien valdría la pena conocer, o establecer, un "***método***" de análisis que nos guíe en la búsqueda y, sobre todo, nos garantice encontrar, si es que existe, una producción cuya ganancia económica sea la óptima.

Formulación del método

El análisis anterior muestra que el haber pensado que la producción de muebles debería limitarse únicamente a mesillas (porque éstas se venden a un precio mayor que los bancos y, además, demandan un tiempo menor en su fabricación) fue un error. Equivocadamente, no se tomó en cuenta la cantidad de madera necesaria para la construcción de cada mueble.

Esta situación nos muestra que para realizar un buen análisis hay que tomar en cuenta todas y cada una de las restricciones establecidas, es decir, que los valores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ que hagan que $\boldsymbol{G}$ sea máxima deben ser buscados tomando en cuenta las restricciones (***i***, ***ii*** y ***iii***) a las cuales se encuentra sujeta la ganancia.

Así, nuestra primer tarea (encaminada a buscar el apoyo solicitado por Alejandro) consistirá en realizar un estudio de las restricciones a las cuales se encuentra sujeta la ecuación de la ganancia.

Antes de comenzar observemos que esta primer tarea la podemos efectuar, por lo menos, de dos maneras: 1) Realizar un análisis particular de las expresiones previamente planteadas, obteniendo así un resultado exclusivo para el problema en cuestión. 2) Aprovechar la situación y desarrollar, paralelamente, un análisis general en el cual se obtenga un resultado aplicable tanto al problema que se está tratando de resolver, como a otros de características similares. Ésta última es la que se desarrollaremos a continuación.

Podemos comenzar preguntándonos acerca de las características que tienen las parejas de números reales (x, y) que satisfacen una desigualdad de la forma $ax + by + c \geq 0$. Cuestionamiento que tiene sentido si nos percatamos de que las restricciones i y ii son casos particulares de esa expresión general.

Así pues, observemos que si $ax + by + c \geq 0$, donde a, b, $c \in \mathbf{R}$ con $b \neq 0$[1], es la expresión que determina un cierto conjunto de puntos $P = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, entonces:

1) Si $b > 0$, al dividir por b en ambos miembros de la expresión

$$by \geq -ax - c,$$

se obtiene

$$y \geq \frac{-ax - c}{b}.$$

Esto significa que, para cualquier abscisa dada x_0, la expresión $ax + by + c \geq 0$ determina tanto al punto $P_0 = (x_0, y_0)$, con $y_0 = \frac{-ax_0 - c}{b}$, como a todos aquellos puntos cuya ordenada es mayor que $\frac{-ax_0 - c}{b}$, es decir, a los puntos $P = (x_0, y)$, con $y > y_0$. En otras palabras, el conjunto de puntos $P = (x, y)$ determinados por la expresión $ax + by + c \geq 0$, es el conjunto de todos los puntos que están en la recta $ax + by + c = 0$ o, bien, en la parte superior de la misma (*Figura* 1).

2) Si $b < 0$, al dividir por b en ambos miembros de la expresión

$$by \geq -ax - c,$$

se tiene que

$$y \leq \frac{-ax - c}{b}.$$

[1] El caso para cuando una condición sólo involucra a x se estudia más adelante.

Luego, para cualquier abscisa dada x_0, la expresión $ax + by + c \geq 0$ determina al punto $P_0 = (x_0, y_0)$, con $y_0 = \dfrac{-ax_0 - c}{b}$, y a todos los puntos $P = (x_0, y)$, con $y < y_0$, en otras palabras, para el caso en que $b < 0$ los puntos $P = (x, y)$ están en la recta $ax + by + c = 0$ o en la parte inferior a ella (*Figura* 2).

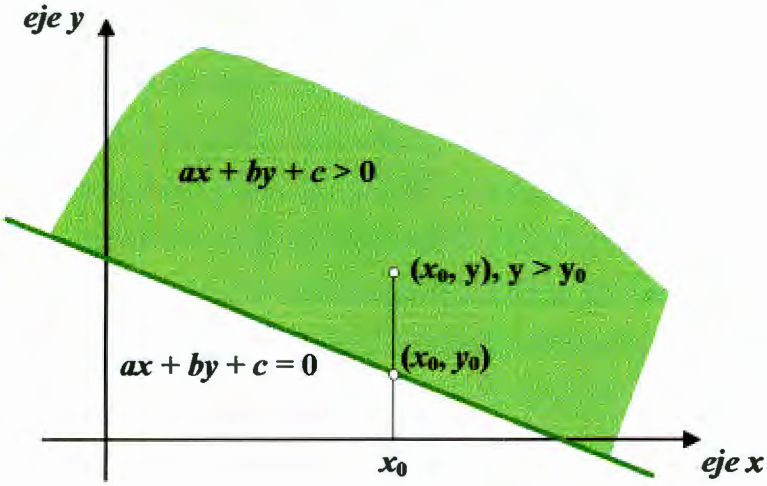


Figura 1

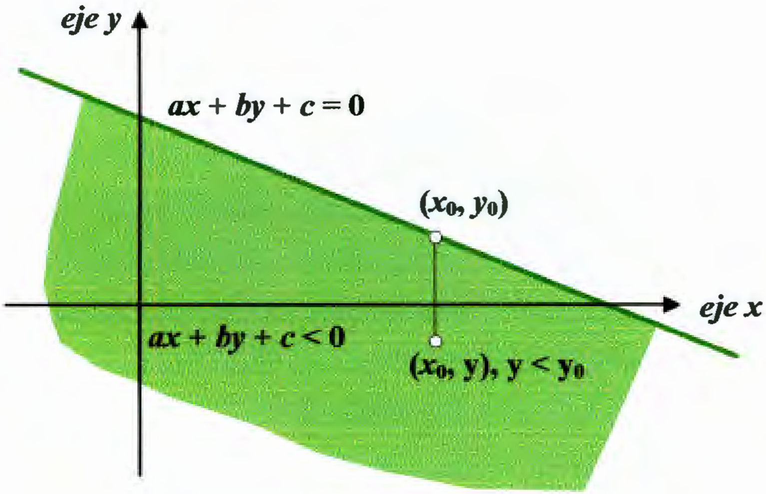


Figura 2

De acuerdo con este análisis, tiene sentido decir que la recta determinada por una expresión $ax + by + c = 0$, con $b \neq 0$, es la *frontera* del conjunto de puntos determinado por la expresión $ax + by + c \geq 0$.

Ahora, con la intención de tener una pronta y precisa referencia al hecho que acabamos de analizar, estableceremos una definición y un teorema cuya demostración la constituye el razonamiento desarrollado en los párrafos anteriores.

Definición (1). Entenderemos por ***semiplano cerrado*** al conjunto de todos los puntos de un plano que están en o a un lado de la recta que lo limita.

Teorema (1). Si $b \neq 0$, entonces el conjunto de todos los puntos de un plano cartesiano para los cuales $ax + by + c \geq 0$, es el semiplano cerrado que se halla por encima (cuando $b > 0$) o por debajo (cuando $b < 0$) de la recta $ax + by + c = 0$.

Naturalmente, si la desigualdad estuviera escrita en la forma $ax + by + c \leq 0$, bastaría multiplicarla por -1 y así obtener la expresión a la que se refiere el teorema.

Así pues, el teorema 1 afirma que la expresión $6x + 15y \leq 990$ (equivalente a la desigualdad $-6x - 15y + 990 \geq 0$) planteada en el problema de la carpintería, determina al semiplano cerrado que se halla en la parte inferior de la recta $6x + 15y - 990 = 0$ (*Figura* 3).

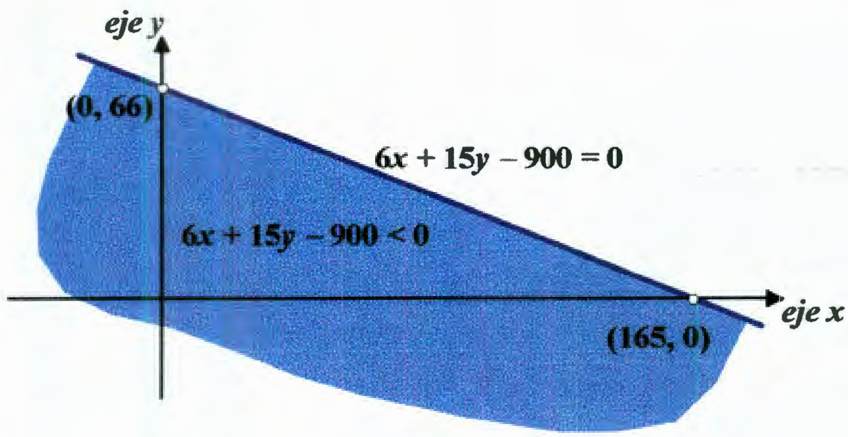


Figura 3

Ya sabemos que otra restricción a la cual se encuentra sujeta la ganancia de la carpintería es la representada por la desigualdad $4x + 3y \leq 324$, equivalente a la expresión $-4x - 3y + 324 \geq 0$ la cual, a través del teorema 1, nos indica que los valores x y y, que debemos recomendarle a Alejandro, no sólo deben localizarse en la región mostrada en la *Figura* 3, sino que, y de manera simultánea, también deben buscarse en el semiplano ilustrado en la *Figura* 4.

Desde luego que para establecer de manera precisa (si es que esto es posible) la región en la cual debemos buscar los valores de x y de y que nos permitan sugerirle la fabricación óptima a Alejandro, se deben tomar en cuenta dos restricciones más, a saber, $y \geq 0$ y $x \geq 0$, que son las mencionadas en *iii*. La primera de ellas, desde luego, puede ser estudiada bajo lo establecido en el teorema 1, y aunque seguramente la segunda la podemos estudiar de manera intuitiva, bien valdría la pena continuar en la línea que decidimos seguir y estudiarla a través de un caso general. Esto último es lo que a continuación realizaremos.

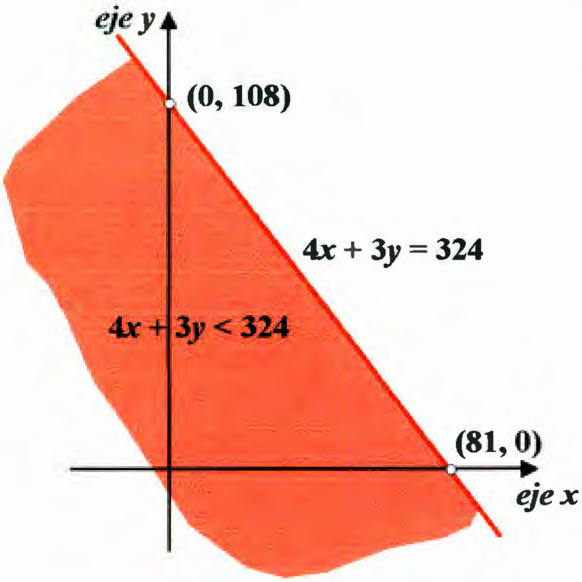


Figura 4

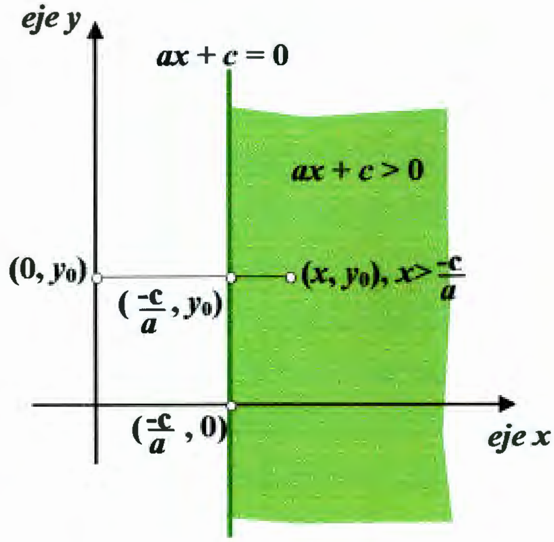


Figura 5

Podemos comenzar observando que la expresión $x \geq 0$, es un caso particular de la desigualdad $ax + c \geq 0$, donde a y $c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Y que si esta última desigualdad determina un cierto conjunto de puntos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces:

1) Si $a > 0$, al dividir por a en ambos miembros de la expresión

$$ax \geq -c,$$

se obtiene

$$x \geq -\frac{c}{a}.$$

Esto significa que, cuando $a > 0$, la expresión $ax + c \geq 0$ determina al conjunto de puntos $P = (x, y)$ cuya abscisa es mayor o igual que $-\frac{c}{a}$. Así, estos puntos $P = (x, y)$, con $x \geq -\frac{c}{a}$, determinan tanto a la recta $ax + c = 0$, como a la región del plano que se encuentra a la derecha de la misma (*Figura* 5).

2) Si $a < 0$, al dividir por a en ambos miembros de la expresión

$$ax \geq -c,$$

se obtiene

$$x \leq -\frac{c}{a}.$$

Luego, mediante un análisis similar al realizado en el caso anterior se tiene que, para este caso en el que $a < 0$, los puntos $P = (x, y)$ determinados por la expresión $ax + c \geq 0$ se encuentran sobre la recta $ax + c = 0$ o al lado izquierdo de la misma.

De este modo, el razonamiento anterior constituye la demostración del siguiente teorema.

Teorema (2). Si $a \neq 0$, entonces el conjunto de todos los puntos de un plano cartesiano para los cuales $ax + c \geq 0$, es el semiplano cerrado que se halla a la derecha (cuando $a > 0$) o a la izquierda (cuando $a < 0$) de la recta vertical $ax + c = 0$.

Aquí, al igual que en el teorema uno, si la desigualdad llegara a estar escrita en la forma $ax + c \leq 0$, al multiplicarla por -1 se obtendrá la expresión a la que se refiere el teorema.

A manera de resumen, y como una consecuencia inmediata de los teoremas 1 y 2, podemos enunciar el siguiente hecho.

Propiedad (1). La desigualdad definida por un polinomio de primer grado en dos variables, $ax + by + c \geq 0$ (o, bien, $ax + by + c \leq 0$), representa un semiplano cerrado.[2]

Ahora, con base en los resultados obtenidos hasta aquí, estamos en posibilidades de afirmar que las otras dos restricciones a las cuales se encuentra sujeta la ganancia de la fabricación de muebles en la carpintería de Alejandro, $y \geq 0$ y $x \geq 0$, restringen (aún más) la búsqueda de los niveles de producción óptima, ubicándolos en el primer cuadrante del plano cartesiano y las partes positivas de los ejes coordenados. —Hecho que seguramente se pudo haber intuido desde un principio, pero que en los siguientes renglones lo estableceremos de manera precisa—

[2] Cabe observar que este resultado se puede extender enunciando que la desigualdad definida por un polinomio de primer grado en dos variables, $ax + by + c > 0$ (o, bien, $ax + by + c < 0$), representa un *semiplano abierto*, sin embargo para los objetivos que aquí se persiguen es suficiente enunciar la propiedad 1 tal y como está.

i) Si observamos que la expresión $\boldsymbol{x \geq 0}$ es una desigualdad del tipo $\boldsymbol{ax + c \geq 0}$, en la cual $\boldsymbol{a = 1 > 0}$ y $\boldsymbol{c = 0}$, entonces el teorema 2 nos dice que $\boldsymbol{x \geq 0}$ representa al semiplano cerrado que se halla a la derecha del *eje y*, es decir, el semiplano determinado por los cuadrantes uno y cuatro (*Figura* 6).

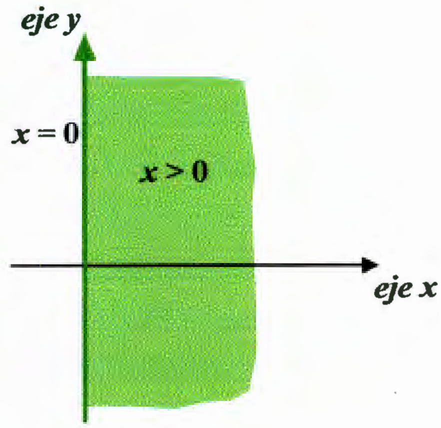


Figura 6

ii) Por otra parte, pero ahora recurriendo al teorema 1, y en virtud de que la expresión $\boldsymbol{y \geq 0}$ es una desigualdad del tipo $\boldsymbol{ax + by + c \geq 0}$, en la cual

$$a = 0, \quad c = 0 \ \text{ y } \ b = 1 \geq 0,$$

tenemos que la desigualdad $\boldsymbol{y \geq 0}$ es el semiplano cerrado que se halla arriba del *eje x*, es decir, el semiplano determinado por los cuadrantes uno y dos (*Figura* 7).

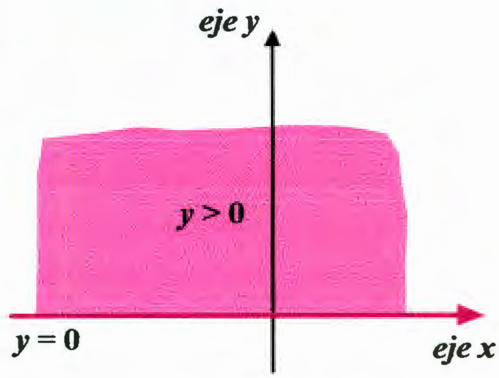


Figura 7

Y ya que la intersección de estos dos últimos semiplanos es el cuadrante uno y las partes positivas de ambos ejes, hemos justificado nuestra afirmación.

Recapitulando sobre lo que hemos obtenido hasta ahora, podemos decir que si bien es cierto que el conjunto de puntos $\boldsymbol{P = (x, y)}$ de cada semiplano (*Figuras* 3, 4, 6 y 7) satisfacen a su correspondiente restricción (desigualdad), también es cierto que no todos ellos satisfacen, simultáneamente, a todas esas restricciones, ésas a las que se encuentra sujeta la ganancia (G) de la producción de muebles. Esto sugiere que, en lugar de considerarlos de manera particular, debemos restringir el análisis a los puntos pertenecientes a la intersección de esos cuatro semiplanos (*Figura* 8).

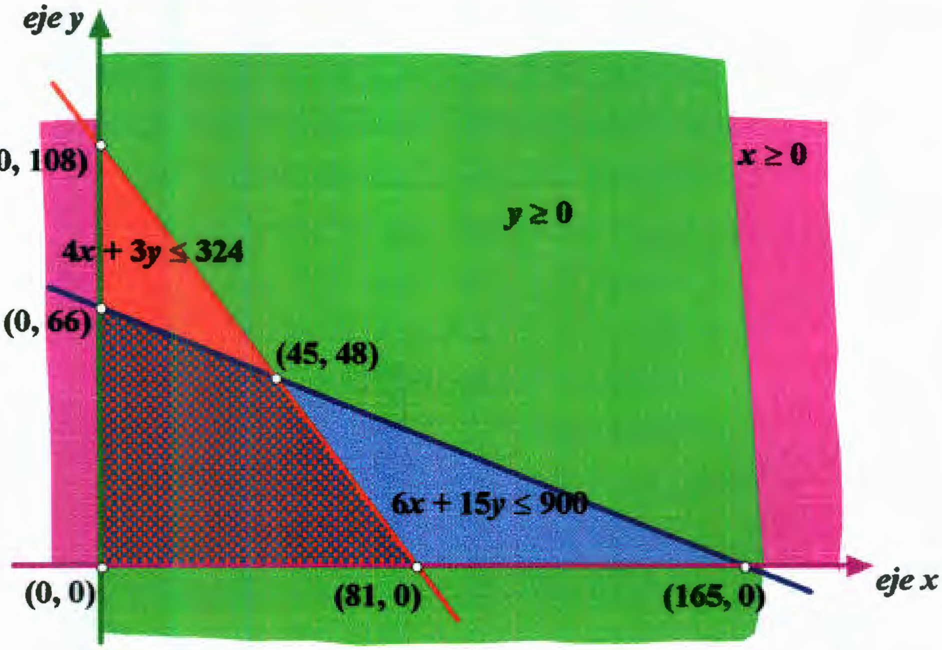


Figura 8

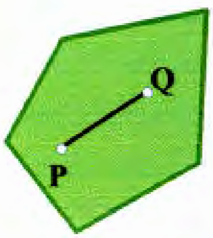
Aquí, es conveniente no perder de vista el hecho de que el polígono de vértices (0, 66), (0, 0), (81, 0) y (45, 48) (punto que puede determinarse resolviendo de manera simultánea las ecuaciones $6x + 15y = 990$ y $4x + 3y = 324$), no es otra cosa que la *frontera* del conjunto de puntos que satisfacen a todas las desigualdades establecidas en el modelo matemático, es decir, a todas las combinaciones posibles que, de acuerdo con las condiciones o restricciones planteadas de antemano, pueden considerarse para la producción de mesillas y bancos. —Con respecto a esto último cabe hacer notar que las parejas ya analizadas **(0, 66)** y **(40, 48)**, pertenecen a dicho conjunto de puntos—

Así pues, ahora que sabemos que la región del plano limitada por el polígono de vértices (0, 66), (0, 0), (81, 0) y (45, 48), incluyendo al polígono mismo, es el lugar en donde se debe buscar la pareja de valores x y y que maximice la ganancia, es conveniente comenzar a reflexionar sobre algunas de las características de dicho conjunto de puntos. Ésta es una de las razones por la cual nuevamente abandonaremos nuestro problema de la carpintería y nos sumergiremos en el terreno de lo general, sin que esto nos impida regresar de vez en cuando a nuestro problema original.

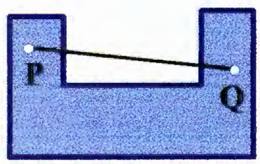
De este modo, a continuación estudiaremos una serie de definiciones y de propiedades que, poco a poco, nos irán acercando a un resultado por demás interesante y útil, el cual sugerirá de manera contundente la solución al problema de Alejandro.

Comenzaremos por estudiar de manera precisa una propiedad que, de manera intuitiva y de acuerdo con lo que estudiamos en la secundaria, podríamos afirmar que posee el conjunto de puntos cuya frontera es el polígono de vértices (0, 66), (0, 0), (81, 0) y (45, 48), dicha propiedad se denomina *convexidad*.

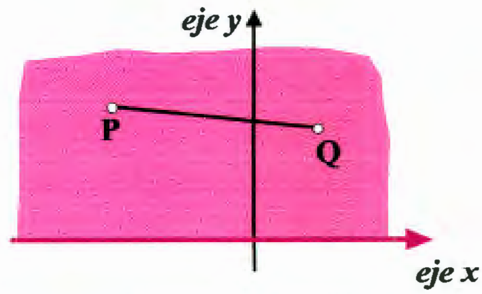
Definición (2). Se dice que un conjunto S de puntos de un plano es ***convexo*** si, siendo P y Q puntos de S, todos los puntos del segmento PQ pertenecen a S.



Conjunto convexo



Conjunto no convexo



Conjunto convexo

Demostrar de manera inmediata que la *Figura* 8 o, de manera general, que cualquier región determinada por la intersección de dos o más semiplanos cerrados es *convexa*, no es tarea sencilla, razón por la cual estudiaremos algunos lemas previos que nos conduzcan a la verificación de este hecho. Aquí, nuestra primer meta será demostrar que un semiplano cerrado es *convexo* y para ello conviene demostrar previamente el siguiente lema.

Lema (1). Un punto A que pertenezca al segmento PQ determinado por los puntos $P=(x_1, y_1)$ y $Q=(x_2, y_2)$ de un plano cartesiano tiene por coordenadas:

$$x = tx_2 + (1-t)x_1, \quad y = ty_2 + (1-t)y_1, \quad \text{donde} \quad 0 \le t \le 1.$$

Demostración.

Sea $A=(x, y)$ un punto que pertenece al segmento PQ (*Figura* 9) entonces por la semejanza entre los triángulos PQN y PAM, se tiene que

$$\frac{PA}{PQ} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = t \qquad (1)$$

Aquí, puesto que $0 \le PA \le PQ$, el parámetro t es tal que

$$0 \le t \le 1.$$

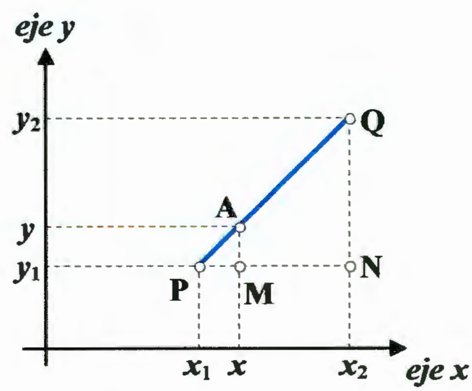


Figura 9

Así, al considerar la última igualdad de la expresión 1, se tiene que:

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1) = tx_2 - tx_1$$

luego,

$$x = tx_2 - tx_1 + x_1 = tx_2 + x_1 - tx_1$$

y al factorizar x_1, finalmente se obtiene

$$x = tx_2 + (1 - t)x_1.$$

Procediendo de manera análoga para $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$, se tiene que

$$y = ty_2 + (1 - t)y_1,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Lema (2). Un semiplano cerrado es un conjunto convexo.

Demostración.

Sea $ax + by + c \geq 0$ la desigualdad que determina un semiplano cerrado. Si $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ son dos puntos de dicho semiplano, entonces las coordenadas de estos puntos satisfacen esa desigualdad, de tal suerte que:

$$ax_1 + by_1 + c \geq 0 \qquad \text{y} \qquad ax_2 + by_2 + c \geq 0.$$

Suponiendo que $A = (x_0, y_0)$ es un punto del segmento PQ, entonces (por el lema 2) las coordenadas del punto A se pueden expresar como:

$$x_0 = tx_2 + (1 - t)x_1, \; y_0 = ty_2 + (1 - t)y_1, \quad \text{donde} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Sustituyendo las coordenadas del punto A en el primer miembro de la expresión algebraica del semiplano se tiene que:

$$\begin{aligned}
ax_0 + by_0 + c &= a[tx_2 + (1 - t)x_1] + b[ty_2 + (1 - t)y_1] + c \\
&= tax_2 + (1 - t)ax_1 + tby_2 + (1 - t)by_1 + c \\
&= t(ax_2 + by_2) + (1 - t)(ax_1 + by_1) + c \\
&= t(ax_2 + by_2 + c) + (1 - t)(ax_1 + by_1 + c) + c - tc - (1 - t)c \\
&= t(ax_2 + by_2 + c) + (1 - t)(ax_1 + by_1 + c) + c - tc - c + tc \\
&= \underbrace{t}_{\geq 0}\underbrace{(ax_2 + by_2 + c)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - t)}_{\geq 0}\underbrace{(ax_1 + by_1 + c)}_{\geq 0} + \underbrace{c - c - tc + tc}_{0} \geq 0.
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que el punto $A = (x_0, y_0)$ satisface la expresión algebraica $ax + by + c \geq 0$ que determina al semiplano cerrado correspondiente, es decir, se ha demostrado que el punto A pertenece al semiplano y (por lo establecido en la definición 2) que todo semiplano cerrado es convexo.

Ahora que demostramos que los semiplanos cerrados son conjuntos convexos, estamos listos para verificar que la intersección de los semiplanos ilustrada en la *Figura* 8 también es convexa, esto resultará evidente después de probar el siguiente hecho.

Lema (3). La intersección de dos o más conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Demostración.

Si $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$ es la intersección de los conjuntos convexos $S_1, S_2, \ldots, S_n$, se tiene que

i) Si S es el conjunto vacío o, bien, si S consta de un único punto, entonces S es un conjunto convexo.

Para verificar esto basta observar que la definición de *convexo* es una exigencia sobre los puntos del segmento entre dos puntos del conjunto, de tal suerte que si S es el conjunto vacío, entonces no hay puntos a los cuales verificarles la condición. Y si S consta de un único punto, entonces es un segmento degenerado que consta sólo de sí mismo y, por tanto, la condición se cumple trivialmente.

ii) Si S no es alguno de los caso anteriores, entonces contiene cuando menos dos elementos. Supongamos que P y Q son elementos de $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$, luego (por la definición de intersección de conjuntos) P y Q pertenecen a todos los conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ y como por hipótesis dichos conjuntos son convexos, entonces (por la definición 2) los puntos del segmento de recta PQ también pertenecen a todos ellos, por lo que están en su intersección, es decir, los puntos del segmento PQ pertenecen a S, con lo cual se demuestra que $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$ es un conjunto convexo.

Así pues, como una consecuencia inmediata de los lemas 2 y 3, estamos en condiciones de verificar la siguiente propiedad:

Teorema (3). La intersección de dos o más semiplanos cerrados es un conjunto convexo.

Para verificarlo basta observar que el lema 2 establece que un semiplano cerrado es un conjunto convexo y que el lema 3 afirma que la intersección de dos o más conjuntos convexos es un conjunto convexo, luego (por transposición) la intersección de dos o más semiplanos es un conjunto convexo.

Con estos resultados, ahora tenemos elementos suficientes para establecer la siguiente definición.

Definición (3). Se denomina ***conjunto convexo poligonal cerrado*** a la intersección de un número finito de semiplanos cerrados.

Y si esta definición la llevamos al problema de la carpintería, entonces podemos afirmar que:

> La región del plano limitada por el polígono de vértices (0, 66), (0, 0), (81, 0) y (45, 48), de la *Figura* 8, determinado por la intersección de los semiplanos $6x + 15y \leq 990$, $4x + 3y \leq 324$, $y \geq 0$ y $x \geq 0$, que no es otra cosa que el modelo matemático de las restricciones a las que se encuentra sujeta la ganancia de la producción de muebles ($G = 99x + 198y$), es un conjunto convexo poligonal cerrado.

Sabido esto, es el momento de iniciar (en ese conjunto) la búsqueda de los valores x y y con los cuales se logre obtener la máxima ganancia por la fabricación de los muebles.

Para desarrollar esta segunda tarea es conveniente realizar un estudio del comportamiento de nuestra *ecuación lineal objetivo* ($G = 99x + 198y$) en el conjunto convexo poligonal cerrado ya determinado. La estrategia que se seguirá en esta etapa es diferente a la utilizada en la tarea anterior, ahora se procederá de manera inductiva. Así, los resultados particulares que se vayan obteniendo al resolver el problema de la carpintería serán aprovechados como punto de partida para llegar a establecer algunas propiedades interesantes de carácter general.

Antes de comenzar, y con fines meramente prácticos, a los vértices del polígono de la *Figura* 8 les asignaremos una etiqueta, tal y como se muestra en la *Figura* 10. Es importante que tengamos presente (y por ello hacemos hincapié en este hecho) que el conjunto convexo poligonal cerrado $OABC$ es el conjunto en donde buscaremos la pareja (x, y) que, de existir, al sustituirla en la expresión $99x + 198y$ dará como resultado un valor óptimo.

Así, para dar inicio a nuestra búsqueda podemos plantearnos lo siguiente: ¿Existe en ese conjunto una zona específica en donde se localice el punto (x, y) que buscamos? por ejemplo, ¿en su interior?, ¿en la frontera?

Para responder comenzaremos analizando unos cuantos puntos con una propiedad en común, por ejemplo algunos que pertenezcan a una misma recta. En este sentido consideremos, por elegir alguna, la recta que pasa por los puntos de coordenadas **(0, 60)** y **(30, 0)**.

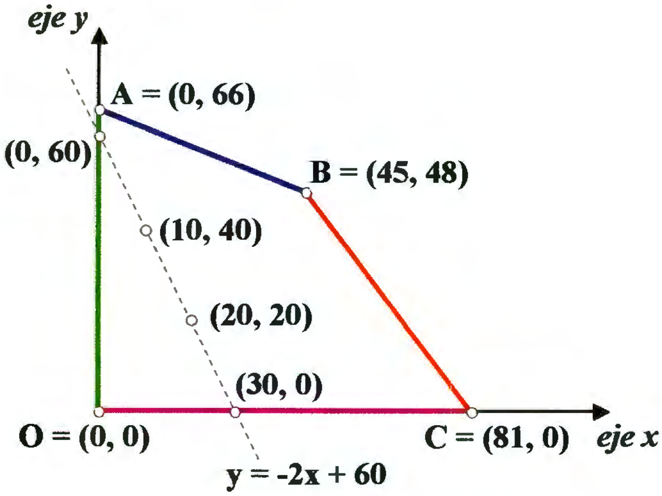


Figura 10

Esta recta arbitraria, pero convenientemente elegida, tiene una pendiente de $-\frac{\mathbf{60}}{\mathbf{30}} = \mathbf{-2}$ y su ordenada al origen es **60** (*Figura* 10) por lo que su ecuación (en la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$) es

$$y = -2x + 60.$$

Obsérvese que los puntos **(20, 20)** y **(10, 40)** satisfacen a esta ecuación, por lo que, tal y como lo sugiere la *Figura* 10, dicha recta también pasa por ellos.

De esta manera hemos localizado cuatro puntos de la región poligonal considerada, dos en la frontera y dos en el interior de ella. Para comparar el comportamiento de la ganancia $\boldsymbol{G}$ en esas zonas, podemos elaborar un cuadro como el siguiente:

PUNTO	UBICACIÓN EN EL POLÍGONO	GANANCIA ($\boldsymbol{99x + 198y}$)
(30, 0)	frontera	$ 2, 970
(20, 20)	interior	$ 5, 940
(10, 40)	interior	$ 8, 910
(0, 60)	frontera	$ 11, 880

Cuadro 1

Así, tomando en cuenta únicamente estos cuatro modos de producción, se observa que las ganancia mínima y máxima (valores mínimo y máximo de la expresión $99x + 198y$) se obtienen en aquellos puntos ubicados en la frontera del polígono.

El comportamiento aquí observado invita a considerar otra recta e intentar detectar el mismo comportamiento. Por supuesto, si esto llega a suceder se abrirán algunas interrogantes, ¿se tendrá que hacer una tercer confirmación?, ¿cuántas veces debe observarse este comportamiento para poder asegurarlo y excluir el estudio en el interior del polígono? ... Y en el hipotético caso de que las ganancias máxima y mínima se llegaran a dar para puntos en la frontera del polígono, quedaría por lo menos una pregunta más, ¿este comportamiento es exclusivo de este problema o, por el contrario, se puede observar para cualquier recta en cualquier conjunto convexo poligonal cerrado?

A continuación le daremos respuesta a estas preguntas de una manera contundente, para lograrlo será suficiente responder la última de ellas y después particularizar los resultados, en otras palabras, buscaremos demostrar que las expresiones lineales de la forma $Z = ax + by$, definidas sobre un conjunto convexo poligonal cerrado, tienen sus valores máximo y mínimo en las parejas ordenadas (x, y) de algún punto ubicado en la frontera del polígono. Por supuesto, para lograrlo, recurriremos a un análisis general.

Definición (4). Se dice que un número real ***c está entre*** dos números reales a y b, donde $a \leq b$, si $a \leq c \leq b$.

Lema (4). El valor de una expresión lineal $ax + by$ para un punto A de un segmento PQ, está entre sus valores para P y Q.

Demostración.

Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ los puntos que determinan al segmento PQ y $A = (x_0, y_0)$ un punto que pertenece a dicho segmento, entonces (por el lema 1)

$$x_0 = t x_2 + (1 - t)x_1, \qquad y_0 = t y_2 + (1 - t)y_1, \qquad \text{con} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Ahora, haciendo $C_i = ax_i + by_i$, con $i = 0, 1, 2, 3$ y $C_i \in \mathbf{R}$, se tiene que para los puntos A, P y Q, respectivamente,

$$C_0 = ax_0 + by_0, \qquad C_1 = ax_1 + by_1 \qquad \text{y} \qquad C_2 = ax_2 + by_2.$$

De este modo,

$$C_0 = ax_0 + by_0 = a[tx_2 + (1 - t)x_1] + b[ty_2 + (1 - t)y_1]$$

$$= tax_2 + (1 - t)ax_1 + tby_2 + (1 - t)by_1$$
$$= t(ax_2 + by_2) + (1 - t)(ax_1 + by_1)$$
$$= tC_2 + (1 - t)C_1$$

Luego, reescribiendo este resultado, se tiene:

$$C_0 = tC_2 + (1 - t)C_1 \qquad (2)$$

Por otro lado, y sin que esto represente pérdida de generalidad en la demostración, se puede suponer que

$$C_1 \leq C_2,$$

Así, bajo esta suposición (y tomando en cuenta que como $0 \leq t \leq 1$, también $0 \leq 1 - t \leq 1$) son válidas las siguientes relaciones:

$$(1 - t)\, C_1 \leq (1 - t)\, C_1 \leq (1 - t)\, C_2$$

$$\underbrace{tC_1 + (1-t)C_1}_{C_1} \leq \underbrace{tC_2 + (1-t)C_1}_{C_0} \leq \underbrace{tC_2 + (1-t)C_1}_{C_2}$$

o, bien,

$$ax_1 + by_1 \leq ax_0 + by_0 \leq ax_2 + by_2$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Una vez verificado este hecho, resulta fácil establecer el teorema que afirme la generalidad del comportamiento observado en el *Cuadro* 1:

Al trazar cualquier recta por un punto arbitrario A del interior de un conjunto convexo poligonal cerrado, ésta se interseca con dos puntos únicos, P y Q, de la frontera de ese polígono, determinando así el segmento PQ al cual pertenece el punto A (*Figura* 11). De esta forma, por el lema cuatro, el valor de la expresión lineal $ax + by$ para el punto A del interior del polígono estará entre los valores que toma para los puntos de la frontera P y Q.

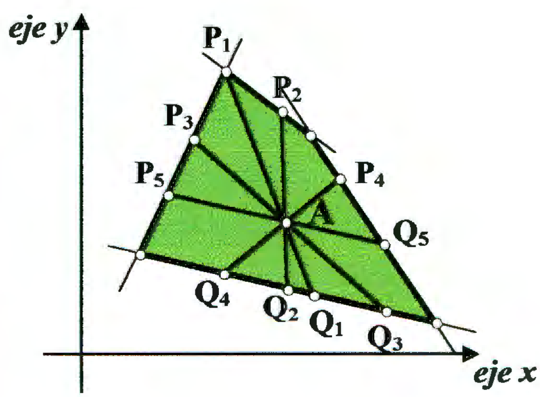


Figura 11

El razonamiento anterior constituye la demostración del siguiente teorema.

Teorema (4). El valor de la expresión lineal $ax + by$ para cualquier punto A del interior de un conjunto convexo poligonal cerrado, está entre los valores que toma $ax + by$ para algunos puntos de la frontera del conjunto. (*Figura* 11)

La información que proporciona este teorema, para el análisis que se está desarrollando, y para los que en un futuro se realicen, restringe el conjunto en el que debemos buscar los puntos $P = (x, y)$ que nos interesa localizar, garantizando que el valor de una *ecuación lineal objetivo* alcanza sus valores óptimos (ya sea *máximo* o *mínimo*) en algún punto de la frontera del conjunto poligonal.

Ahora el siguiente paso es buscar alguna propiedad de los puntos de la frontera que permita restringir, aún más, esa "zona de búsqueda". Veamos que dicha propiedad no es otra que el lema 4:

> Sean P y Q dos vértices consecutivos de la frontera del conjunto poligonal considerado (obsérvese que, en este sentido, los puntos P y Q determinan un lado del polígono, como se ilustra en la *Figura* 12), entonces el lema 4 garantiza que el valor de la expresión $ax + by$ para cualquier punto A del segmento PQ está entre los valores que adquiere para dichos vértices.

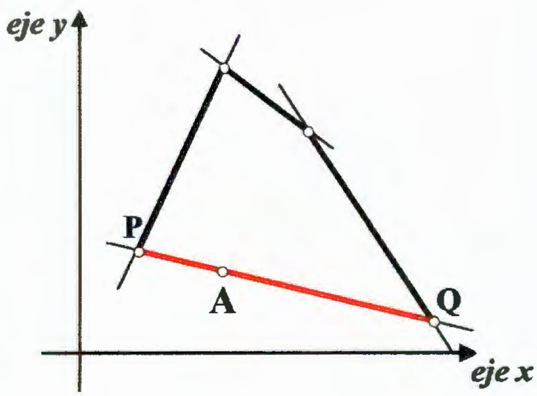


Figura 12

De este modo, y como una consecuencia inmediata tanto del lema 4 como del teorema 4, podemos desprender la siguiente propiedad, que permite estudiar de manera sistemática el comportamiento de cualquier ecuación lineal en un conjunto convexo poligonal cerrado.

Teorema (5). Una expresión lineal $ax + by$, definida sobre un conjunto convexo poligonal cerrado, tiene sus valores máximo y mínimo en uno o más de los vértices de la frontera del conjunto.

Si ahora aplicamos este teorema al problema original, lo que nos sugiere es que la *ecuación lineal objetivo*, $G = 99x + 198y$, toma sus valores máximo y mínimo en alguno de los siguientes puntos: (**0**, **0**), (**0**, **66**), (**80**, **0**) o (**45**, **48**), que son los vértices del polígono determinado por las restricciones a las que se encuentra sujeta dicha ecuación.

Así, sustituyendo dichos vértices en la ecuación que modela las ganancias de la carpintería, observamos que:

$$G\,(0, 0) = 99(0) + 198(0) = 0$$

$$G\,(0, 66) = 99(0) + 198(66) = 13\,068$$

$$G\,(80, 0) = 99(80) + 198(0) = 7\,920$$

$$G\,(45, 48) = 99(45) + 198(48) = 13\,959$$

Por lo tanto, la ganancia máxima ($13,959) se obtiene con una producción de 45 bancos y 48 mesillas ($891 mayor que aquella que se puede obtener con la producción sugerida en un inicio). Por supuesto, la pareja **(45, 48)** satisface las restricciones establecidas de antemano, es decir,

$$6(45) + 15(48) = 990 \leq 990,$$

$$4(45) + 3(48) = 324 \leq 324,$$

$$45 \geq 0,$$

$$48 \geq 0.$$

Así, con base en el teorema 5, podemos asegurarle a Alejandro que la producción que le dará la máxima ganancia es la de 45 bancos y 48 mesillas.

Ahora, una vez que se ha resuelto el problema originalmente planteado, resulta conveniente precisar el carácter general en el cual se circunscribe el estudio aquí realizado: Se dice que cuando se tiene una *función lineal objetivo en dos variables* la cual está sujeta a una serie de restricciones que se pueden representar a través de *un conjunto de ecuaciones y/o desigualdades lineales en las dos variables*, se tiene entonces un problema de *programación lineal*. La herramienta más importante para el análisis de tales problemas y que se desprende directamente de nuestro análisis, es el denominado:

Teorema fundamental de la programación lineal (6). Los *puntos óptimos*[3] de un problema de programación lineal de dos variables, sujetos a las condiciones que determinan un conjunto convexo poligonal cerrado, son vértices de la frontera de dicho conjunto.

[3] Se denominan *puntos óptimos* a los puntos $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ que sustituidos en una expresión lineal $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by}$ hacen que dicha expresión tome sus valores máximo o mínimo.

A continuación ilustraremos la potencialidad de este teorema, al aplicarlo en un ejercicio específico.

Ejemplo

Un campamento de 200 deportistas tiene un refrigerador capaz de conservar un máximo de 450 kg de carne por semana. El dietólogo del campamento quiere que cada deportista reciba, por semana al menos, 1 kg de carne magra y 0.75 kg de carne grasa, siendo las carnes de res y de cerdo. La carne de res, cuesta \$20 el kilogramo, es 80% magra y 20% grasa; la carne de cerdo, cuesta \$15 el kilogramo, es 40% magra y 60% grasa. ¿Cuántos kilogramos de cada carne deberá comprar el campamento por semana para que el costo resulte mínimo?

El modelo matemático

Si representamos con x a la cantidad (en kg) de carne de res que se comprará semanalmente y con y a la correspondiente cantidad de carne de cerdo, entonces las restricciones a las cuales se encuentra sujeto el gasto semanal, que el campamento deberá efectuar por la compra de carne, pueden modelarse con las siguientes desigualdades:

i) $x + y \leq 450$ .... Dado que 450 es la capacidad máxima del refrigerador.

ii) $0.8x + 0.4y \geq 200$ .... Si cada uno de los doscientos deportistas consume cuando menos 1 kg de carne magra, entonces el campamento debe recibir al menos 200 kilogramos de ese tipo de carne.

iii) $0.2x + 0.6y \geq 0.75(200) = 150$ .... Si cada deportista debe consumir cuando menos 0.75 kg de carne grasa, entonces el campamento deberá recibir al menos 200 veces esa cantidad.

Por otro lado, el costo semanal, C, por concepto de la compra de la carne, está modelado por la función lineal siguiente

iv) $C = 20x + 15y$ .... Que no es otra cosa que la suma de los costos parciales.

Por supuesto que esta última expresión constituye nuestra función lineal objetivo, función que en este caso tenemos la intención de minimizar, es decir, queremos determinar los valores x y y que, bajo las restricciones establecidas, hagan que el valor de C sea mínimo.

Solución

Al graficar las desigualdades *i*, *ii* y *iii*, se observa que las restricciones a las que se encuentra sujeta la función costo, determinan semiplanos cerrados que se intersecan entre sí (*Figura* 13).

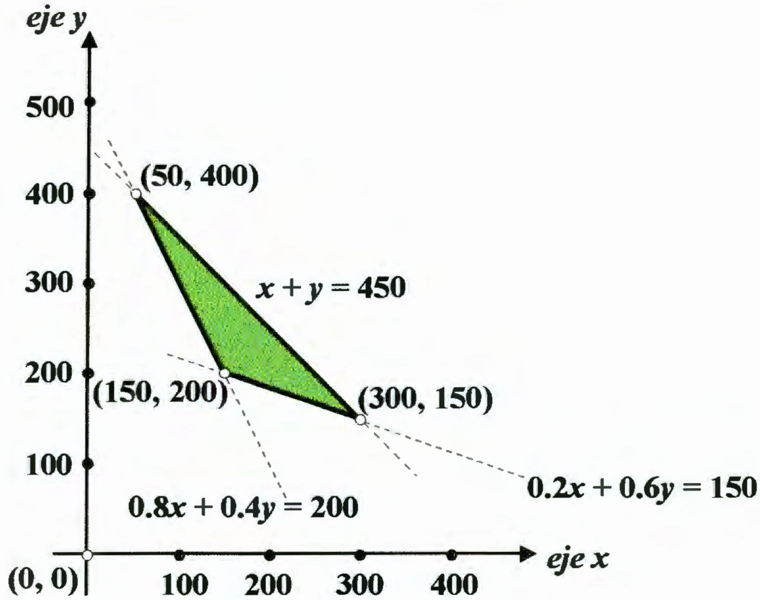


Figura 13

Sabido esto, y con base en el teorema 3, podemos afirmar que las desigualdades *i*, *ii* y *iii*, determinan un conjunto de puntos convexo. Luego, por el teorema 6, podemos garantizar que la ecuación $C = \mathbf{20x + 15y}$ toma sus valores máximo y mínimo en alguno de los siguientes puntos:

$$\mathbf{(50, 400)}, \qquad \mathbf{(150, 200)}, \qquad \mathbf{(300, 150)}.$$

Sustituyendo, tenemos que

$$C\,(50, 400) = 20(50) + 15(400) = 7000$$

$$C\,(150, 200) = 20(150) + 15(200) = 6000$$

$$C\,(300, 150) = 20(300) + 15(150) = 8250$$

Por lo tanto, para que el costo semanal sea el mínimo, se deberán comprar semanalmente 150 kg de carne de res y 200 kg de carne de cerdo. Y, de esta manera, el gasto será de $6,000 semanales.

Un comentario final

La utilidad de la programación lineal, como marco general para la formulación de problemas, queda manifiesta cuando se hace referencia a sus aplicaciones típicas. Una de ellas es la producción, a la cual recurrimos y ejemplificamos a través de la fabricación de muebles en una carpintería. Otras aplicaciones a las que se recurre tradicionalmente, para ilustrar su aplicabilidad, son relativas a problemas de dieta, de transporte, de almacenamiento, entre otros.

Ciertamente, no se puede suponer que las restricciones y ecuaciones que se formulen en un problema siempre serán lineales y en dos variables, más aún, no podemos afirmar que todas las restricciones y limitaciones involucradas en un problema son factibles de formulación.

A este respecto es necesario apuntar que, para aquellos problemas más complejos, los matemáticos han desarrollado métodos sistemáticos en los cuales se emplea el Álgebra Matricial, dichos métodos permiten atacar esos problemas más complicados.

Ejercicios

3.1) En un plano cartesiano dibuja el conjunto convexo poligonal cerrado determinado por el sistema de desigualdades dado:

a) $3x+2y\geq 6$
$x-y\leq 2$
$x+y\leq 3$

b) $2x+3y\leq 2$
$x-y\leq 2$
$x+y\leq 3$

c) $4x+2y\geq 8$
$2x+4y\geq 8$
$x\geq 0$
$x\geq 0$

3.2) De acuerdo con el ejercicio anterior, explica la diferencia principal del conjunto determinado por el sistema de desigualdades del inciso **a**, con respecto a los otros dos. Explica si los polígonos con características similares a los determinados en los incisos **b** y **c**, presentan alguna dificultad para ser estudiados utilizando el teorema fundamental de la programación lineal.

3.3)
a) Halla, si es que existen, los valores de x y y que maximizan a Z.

1) $\mathbf{Z = 3x + 2y}$ sujeta a
$2x+3y\leq 6$
$2x-y\geq 0$
$x\leq 2$
$y\leq 1$
$x\geq 0$
$y\geq 0$

2) $\mathbf{Z = 3x - 5y}$ sujeta a
$2x-y\leq -2$
$4x-y\geq 0$
$y\leq 3$
$x\geq 0$
$y\geq 0$

b) Determina, si es que existen, los valores de x y y que minimizan a Z.

$$\boldsymbol{Z = -3x + 2y} \quad \text{sujeta a} \quad \begin{aligned} 3x - y &\geq -5 \\ -x + y &\geq 1 \\ 2x + 4y &\geq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

3.4) Formula una versión para el "*Teorema Fundamental de la Programación Lineal Para Tres Variables*".

3.5) Si la función objetivo de un problema de programación lineal tiene el mismo valor en dos puntos extremos adyacentes, ¿entonces también tiene el mismo valor en todos los puntos del segmento de recta que une a esos dos puntos extremos?

3.6) Un huevo contiene 1.1 miligramos de hierro y 6 gramos de proteínas; 85 gramos de carne contienen 2.9 miligramos de hierro y 20 gramos de proteínas. La ración diaria para un hombre de tamaño medio es de 70 gramos de proteínas y 10 miligramos de hierro. Si la carne proporciona 60 calorías por cada 28 gramos y un huevo proporciona 70 calorías, determina las cantidades de cada uno de estos alimentos que proporcione por lo menos la dieta diaria mínima de hierro y proteínas, pero con el mínimo número de calorías.

3.7) Roberto tiene hasta \$100 000 para invertir. Su hermano le sugiere que invierta en dos tipos de acciones, A y B. Las acciones A implican algo de riesgo pero tienen un rendimiento del 10% anual y las acciones B son más seguras pero producen sólo el 7%. Después de ciertas consideraciones, decide invertir como máximo \$60 000 en la compra de acciones A y por lo menos \$20 000 en la compra de acciones B. Por otra parte, decide que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo debería invertir los \$100 000 para que sus utilidades anuales sean máximas?

3.8) Una fábrica produce dos modelos, A y B, de cierto artículo. Cada modelo ha de ser procesado en tres máquinas, L, M y N. Para terminar un artículo del modelo A, la máquina L tiene que trabajar 7 horas con 48 minutos, la máquina M 6 horas con 40 minutos y la máquina N una hora. Para terminar un artículo del modelo B, la máquina L tiene que trabajar una hora, la M 6 horas con 40 minutos y la N 9 horas y media. Ninguna de las máquinas trabaja más de 40 horas a la semana. Si el beneficio es de \$2 000 por cada artículo del modelo A y de \$3 000 por cada uno del modelo B, determina el número de artículos de cada modelo que deberán producirse semanalmente de tal forma que el beneficio total sea máximo.

3.9) Daniel, un estudiante que acaba de terminar la carrera de mercadotecnia, decidió establecer un negocio en el cual, entre otras cosas, transportará la mercancía que dos compañías estadounidenses exportan a la república mexicana. Cada caja de la compañía A indica que pesa 40 libras y que tiene 2 pies cúbicos de volumen. Cada caja de la compañía B indica que su peso es de 50 libras y que tiene 3 pies cúbicos de volumen. Después de realizar un estudio, Daniel decide que es conveniente cobrarle a la compañía A \$220 por cada caja transportada y a la compañía B, \$300. Por otro lado, él sabe que sus camiones no pueden transportar más de 37 000 libras y que tienen una capacidad máxima de 2 000 pies cúbicos. Bajo estas condiciones, ¿cuántas cajas de las compañías A y B se deben transportar en un camión para maximizar la utilidad del flete?

3.10) Una empresa desea enviar dos tipos de artículos, A y B, por camión de mudanzas, desde Mérida hasta Tijuana. El artículo A es frágil y necesita empaque y manejo especial, situación no necesaria para el artículo B. La compañía de mudanzas cobra \$5 por kilogramo por transportar los artículos frágiles y \$3 por kilogramo por los demás. Por otro lado, la empresa estipula que al menos un cuarto de cada carga sea de artículos A y al menos un cuarto de artículos B. Halla los costos máximo y mínimo por kilogramo de una carga.

3.11) Una pequeña empresa fabrica tres calidades de cierto producto. La empresa puede producir un máximo de 250 kg del producto diariamente, pero las demandas del mercado muestran que no deberá hacer al día más de: 200 kg del de la mejor calidad, 150 kg del de calidad media o 100 kg del de baja calidad. La utilidad por kilogramo del de mejor calidad es de \$12, del de calidad media es de \$15 y del de baja calidad es de \$16. Considerando este problema como uno tridimensional, halla el programa de producción que haga máxima la utilidad. (Nota: *Antes de intentar resolver este problema, es conveniente responder el ejercicio* 3.3)

3.12) En un ejido se tienen 360 parcelas, en las cuales se siembra maíz, lenteja y frijol; el rendimiento que los ejidatarios esperan para este año es de 15 costales por parcela de maíz, 20 por parcela de lenteja y 18 por parcela de frijol. Se sabe que para satisfacer las necesidades de la comunidad, se deben sembrar cuando menos 20 parcelas de maíz, 30 de lenteja y 40 de frijol. Por otro lado, para el almacenaje adecuado de la cosecha, disponen de una bodega donde caben 6 700 costales como máximo. Y estiman que las ganancias pueden ser: \$200 por costal de lenteja, \$175 por costal de maíz y \$125 por costal de frijol.

a) Calcula cuántas parcelas de cada producto se deben sembrar para obtener una ganancia máxima. Sugerencia: Reduce este problema a uno bidimensional designando por x, y y $(360 - x - y)$ al número de parcelas para maíz, lenteja y frijol, respectivamente.

b) ¿Podría incrementarse la ganancia máxima si el espacio de almacenamiento fuera mayor? ¿Qué espacio adicional podrá usarse ventajosamente?

c) Si la ganancia por costal fuera \$200 en el maíz, \$150 en la lenteja y \$125 en el frijol, muestra que se podrían sembrar de 84 a 290 parcelas con maíz sin alterar la ganancia total. (Nota: Antes de intentar resolver este inciso, es conveniente responder el ejercicio 3.5)

d) Si las ganancias fueran las del inciso anterior y además, el gobierno ofreciera un subsidio de \$30 por costal de maíz, ¿cómo se debería organizar el sembrado? ¿Podrá ahora incrementarse la ganancia total aumentando la capacidad de la bodega?

Funciones Circulares

Antecedentes: Valor absoluto
Funciones trigonométricas expresadas por una razón entre dos de los lados de un triángulo rectángulo

Temas relacionados: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

---

Nota histórica

Aunque los orígenes de la Trigonometría pueden remontarse a más de mil años antes de Jesucristo, a las investigaciones realizadas por chinos y egipcios, varios autores coinciden en establecer que esta ciencia surge, como tal, hasta 150 años antes de nuestra era, con los trabajos de Hiparco. Este astrónomo griego, considerado el astrónomo más grande de la antigüedad, desarrolló la Trigonometría como una herramienta para la Astronomía, y durante muchos siglos siguió siendo contemplada como una de sus ramas. Probablemente, no fue sino hasta los trabajos del persa Nasir ed Din (1201-1274) que, por primera vez, la Trigonometría empieza a figurar como disciplina autónoma.

La palabra Trigonometría (cuyas raíces griegas son *trigon*, que significa triángulo y *metra*, que significa medida) apareció impresa por primera vez en el título de la obra "*Trigonometria, sive de solutiones tractatus braevis et perspicuus*" del matemático alemán Bartolomé Pitiscus en 1600 d. C. y luego fue universalmente adoptada.

Ciento cincuenta años después de este acontecimiento, el eminente matemático suizo Leonhard Euler hizo señaladas aportaciones a esta disciplina (y en todo campo de la matemática que existía en su época). Por ejemplo, la concepción de los valores trigonométricos como razones y su útil notación, son aportaciones realizadas por él en su obra "*Introductio in analysin infinitorum*" (1748)[1]. Este prolífico autor, también consideró a las seis razones como funciones del ángulo central de un círculo de radio **1**.

La denominación "*funciones trigonométricas*" fue introducida por el alemán George Simon Klügel (1739-1812) y tiempo después se comenzó a usar la expresión "*funciones circulares*".

---

[1] Mención aparte merece el hecho de que, en esta obra, las curvas y superficies son tan libremente investigadas con la ayuda de sus ecuaciones, que puede considerarse como el primer texto sobre Geometría Analítica.

Naturalmente, este proceso es mucho más que una simple ampliación o evolución de términos, representa la generalización de los conceptos matemáticos involucrados, generalización que se ve reflejada en sus aplicaciones:

> En un principio los dominios de las funciones trigonométricas se restringieron a los ángulos y, sus aplicaciones, a la medición indirecta de ángulos y distancias. Posteriormente las funciones trigonométricas son definidas con dominios en los números reales y, con esto, sus aplicaciones abarcan muchos tipos de problemas que tienen poco o nada que ver con ángulos o triángulos, por ejemplo, se utilizan para estudiar fenómenos periódicos como el sonido, la luz y las ondas eléctricas, para describir el comportamiento de una cuerda vibrante, ciclos comerciales y movimientos planetarios, entre otros.

La definición de las "*funciones circulares*", basada en las coordenadas de un punto y la distancia de dicho punto al origen, es decir, en el marco de la Geometría Analítica, se remonta en su primera idea al italiano Andrea Cagnoli (1743-1816) en su "*Trigonometria piana e sferica*".

A continuación estudiaremos algunos de los conceptos básicos de la Trigonometría Analítica, los cuales están relacionados con lo bosquejado en estas líneas introductorias.

Funciones circulares

Nosotros, para reconstruir esa transición de ángulos a números reales, como dominio de las funciones trigonométricas (transición que, según lo señalado en la nota histórica precedente, llevó algunos siglos) primeramente estableceremos que a cada número real t le corresponde un ángulo de t "*radianes*". Con tal fin, y de manera previa, a continuación analizaremos un par de ideas. La primera de ellas se desarrolla con base en la siguiente definición.

Definición (1). Si en un sistema de coordenadas rectangulares se grafica la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, se obtiene una circunferencia con centro en el origen y radio 1, a esta circunferencia la denominaremos ***circunferencia unitaria***.[2]

Observemos que es posible establecer una correspondencia entre cualquier punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, $\mathscr{C}$, y un número real t, bajo la siguiente convención:

i) Si $t > 0$ Generamos un arco de circunferencia (*Figura* 1-A) partiendo de $(1, 0)$ y avanzando (en sentido contrario al que avanzan las manecillas del reloj) sobre $\mathscr{C}$ hasta

[2] Algunos autores, en forma alternativa, prefieren hacer referencia al ***círculo unitario***.

recorrer una distancia (*longitud de arco*) de t unidades. ($P = (x, y)$ es el punto *final* del arco y $(1, 0)$ es el punto *inicial*)

ii) Si $t = 0$ $\quad P = (x, y) = (1, 0)$ (*Figura* 1-B)

iii) Si $t < 0$ $\quad$ Generamos un arco de circunferencia (*Figura* 1-C) comenzando en $(1, 0)$ y avanzando (en el sentido que avanzan las manecillas del reloj) sobre $\mathscr{C}$ hasta recorrer una distancia (*longitud de arco*) de t unidades. ($P = (x, y)$ es el punto *final* del arco y $(1, 0)$ es el punto *inicial*)

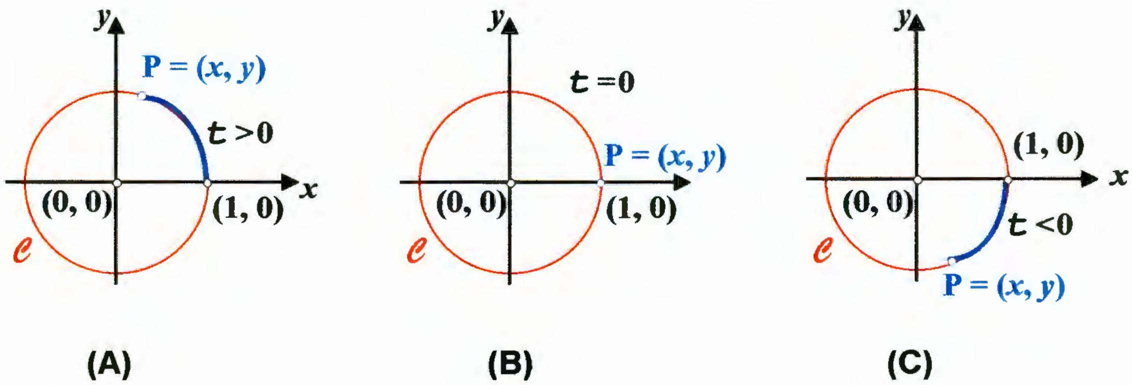


Figura 1

Así, hemos establecido que para todo $t \in \mathbb{R}$ existe exactamente un punto $P = (x, y)$ sobre $\mathscr{C}$ tal, que la longitud de arco del punto de coordenadas **(1, 0)** a P, medido en determinado sentido desde **(1, 0)** y sobre la circunferencia, es t.

Ahora, esta primera idea la conectaremos con el concepto de "*radián*" y, una vez hecho esto, estaremos en condiciones de establecer la correspondencia que buscamos precisar —que a cada número real t le corresponde un ángulo de t "*radianes*"—.

<u>Definición</u> (2). Si el vértice de un ángulo θ se coloca en el centro de un círculo con radio r (*Figura* 2) y la longitud del arco que subtiende sobre la circunferencia es t, entonces la medida en ***radianes*** de θ, se define como:

$$\theta = \frac{t}{r} \textit{ radianes}$$

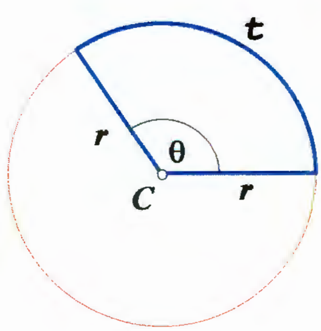


Figura 2

De acuerdo con esta última definición, para la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$, en la cual $r = 1$, se tiene que

$$\theta = t$$ [3]

Y, de este modo, si θ es un ángulo central que subtiende un arco de t unidades sobre la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$, a todo número real t le corresponde un ángulo central θ de t ***radianes***.

Una vez establecido este hecho tiene sentido enunciar una definición, de funciones trigonométricas, en términos de números reales.

Definición (3). Si sobre la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$, $t \in \mathbf{R}$ determina al punto $P = (x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \text{y} \qquad \cos t = x.$$

Es conveniente remarcar el hecho de que los elementos del dominio de las *funciones trigonométricas circulares* así definidas son números reales, es decir, medidas continuas y no ángulos, que son medidas discretas.

Ahora, antes de pasar a estudiar algunas propiedades de estas funciones circulares, es necesario detallar algunos aspectos relacionados con la unidad de medida denominada *radián*, unidad que quedó precisada en la definición 2.

i) Esta unidad de medida es general y, en este sentido, es independiente del tamaño de la circunferencia que se seleccione.

Para verificar la veracidad de este hecho, será suficiente considerar otra circunferencia cuyo centro coincida con el vértice del ángulo θ, de radio r' y con longitud de arco subtendido t' (*Figura* 3).

Así, de geometría elemental, los sectores circulares determinados, t y t', son proporcionales, es decir

$$\frac{t}{r} = \frac{t'}{r'}$$

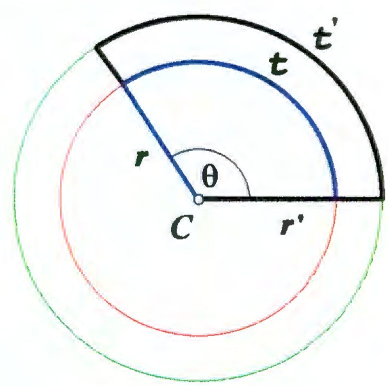


Figura 3

[3] Dado que r y t deben medirse con las mismas unidades, éstas se simplifican en el cociente $\frac{t}{r}$ y se obtiene un resultado adimensional (un número puro). Por este motivo, cuando se trata de la medición de ángulos en radianes, a menudo la palabra *radián* se omite, a menos de que se tenga un interés especial por indicarla.

De este modo,

$$\theta = \frac{t}{r} = \frac{t'}{r'}$$

por lo tanto, la medida en radianes de un ángulo cualquiera es independiente de la circunferencia.

ii) Dado que el perímetro de toda circunferencia es $2\pi r$, se tiene que la longitud t del arco subtendido por un ángulo θ de una rotación completa es $2\pi r$ (*Figura* 4). Luego, por lo establecido en la definición 2, la medida de dicho ángulo es

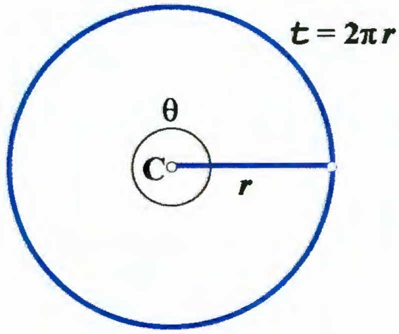


Figura 4

$$\theta = \frac{t}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes.}$$

De este modo, y como la medida en grados sexagesimales de ese mismo ángulo es $\mathbf{360^{o}}$, puede establecerse la siguiente equivalencia

$$360^{o} \approx 2\pi \text{ radianes.}$$

Y para un ángulo de media rotación ($\theta = 180^{o}$), se tiene que

$$180^{o} \approx \pi \text{ radianes.}$$

Así, quedan justificadas las siguientes equivalencias[4]:

$$1^{o} \approx \frac{\pi}{180} rad \qquad \text{y} \qquad 1\, rad \approx \frac{180^{o}}{\pi}$$

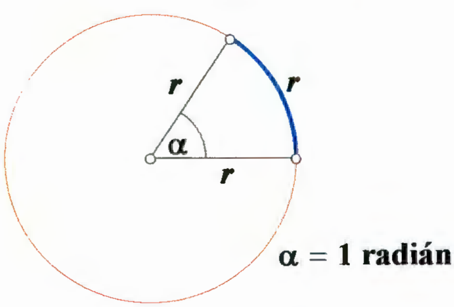


Figura 5

Observemos que, y de acuerdo con la definición 2, para el ángulo α de la *Figura* 5, $\alpha = \frac{r}{r} = 1\, \textit{radián} = \frac{180^{o}}{\pi}$. Por lo que tiene sentido decir que la unidad de medida denominada ***radián*** es el ángulo central de un círculo que subtiende un arco de longitud igual al radio del mismo.

[4] Se acostumbra emplear "*rad*" como símbolo de radianes.

Propiedades de las funciones circulares

Tomando como base la definición 3, se pueden obtener de manera directa algunas propiedades. A continuación se describen algunas de ellas:

i) $|\mathbf{sen}\, t| \leq \mathbf{1}$ y $|\mathbf{cos}\, t| \leq \mathbf{1}$

Para verificar este hecho basta observar que las coordenadas x y y de cualquier punto P situado sobre la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$ (*Figura* 6), son tales que

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Pero como la definición 3 establece que $\mathbf{sen}\, t = y$ y $\mathbf{cos}\, t = x$, entonces se tiene que

$$-1 \leq \cos t \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1.$$

Luego, expresando estas desigualdades en términos del valor absoluto,

$$|\operatorname{sen} t| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\cos t| \leq 1.$$

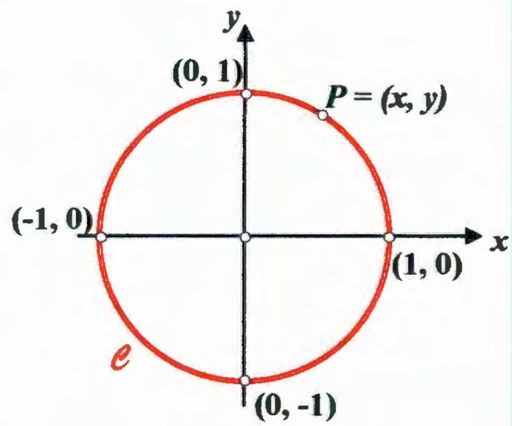


Figura 6

ii) Para cualquier número entero k se tiene que

$$\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \cos(t + 2k\pi) = \cos t$$

Esto es cierto en virtud de que si en la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$, $P = (x, y)$ es el punto al final del arco de longitud t cuyo punto inicial es $(1, 0)$, entonces el trazar otro arco a partir de P y de longitud 2π (*Figura* 7) implica regresar al mismo punto P (puesto que el desplazamiento efectuado, a partir de P, es una vuelta completa).

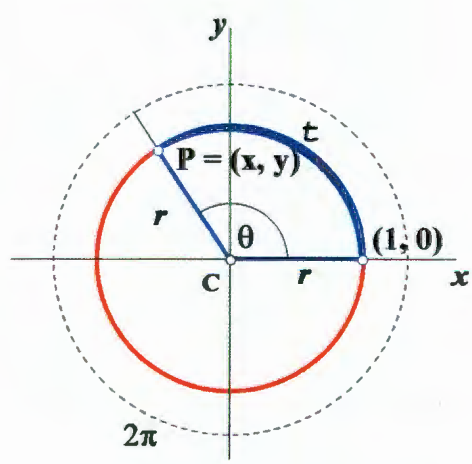


Figura 7

Desde luego que este comportamiento no sólo se da cuando el segundo arco es de longitud 2π, sino que también cuando esa longitud es $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (aquí k es el número de vueltas que se dan a partir de P). Así, al regresar siempre al mismo punto $P = (x, y)$, y aplicar la definición 3 a cualquiera de los arcos trazados, se tiene que

$$\operatorname{sen}(t + 2k\pi) = \operatorname{sen} t = y$$

y

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos t = x.$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

Cabe mencionar que las funciones con este tipo de comportamiento "repetitivo" se denominan *funciones periódicas*.[5]

iii) $\mathbf{sen^2 t + cos^2 t = 1}$

Esta propiedad es un resultado inmediato de las definiciones 1 y 3.

De la definición 1 se sabe que para cualquier punto $P = (x, y)$ situado sobre $\mathcal{C}$, se cumple que

$$x^2 + y^2 = 1$$

Y si en esta expresión se sustituyen las igualdades establecidas en la definición 3, se tiene que

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1.$$

iv) $\mathbf{sen(-t) = -sen\, t}$ y $\mathbf{cos(-t) = cos\, t}$

Para verificar esta propiedad observemos que, de acuerdo con la *Figura* 8, el punto $P = (x, y)$ correspondiente al arco de longitud t (con $t > 0$) y el punto $P' = (x, -y)$ correspondiente al arco de longitud $-t$, son simétricos con respecto al eje horizontal y, por esta razón, sus abscisas coinciden y sus ordenadas únicamente difieren en signo. De este modo, aplicando la definición 3 a cada uno de los arcos correspondientes, se tiene que

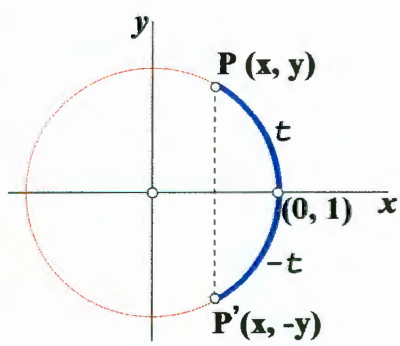


Figura 8

$$-y = \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad x = \cos(-t) = \cos t.$$

[5] De manera precisa, una función f es ***periódica*** si existe un número real positivo p tal, que $f(x+p) = f(x)$ para todo x en el dominio de f; el entero positivo más pequeño p, si existe, se denomina ***periodo fundamental*** de f (o, a menudo, ***periodo de*** f). Naturalmente, para el caso de las funciones seno y coseno que estamos estudiando, el período es 2π.

Funciones circulares y funciones trigonométricas

Ahora la intención es conectar las ideas anteriormente expuestas, relativas a las funciones circulares con dominio en los números reales, con aquella forma de definir al *seno* y al *coseno* como funciones trigonométricas con dominio en los ángulos.[6]

Con esto en mente, consideremos que $P = (x, y)$ es el punto final de un arco cualquiera de t unidades de longitud, sobre la circunferencia unitaria, y que, al mismo tiempo, dicho punto determina el lado terminal del ángulo θ cuya medida es t radianes (*Figura* 9).

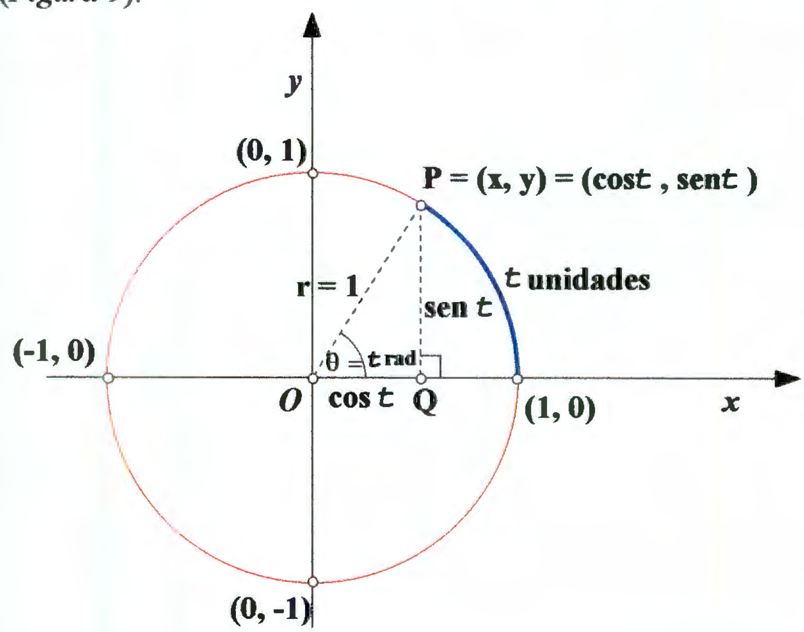


Figura 9

Así, aplicando la definición 3 al arco determinado por el punto $P = (x, y)$, se tiene que

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \text{y} \qquad \cos t = x$$

Pero, por otro lado, para el ángulo agudo θ = t rad del triángulo rectángulo OPQ, también se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(t \text{ rad}) = \frac{y}{1} = y \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = \cos(t \text{ rad}) = \frac{x}{1} = x$$

[6] Recuérdese que, en este sentido, las funciones *seno* y *coseno* se definen para los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cualquiera y se expresan por una razón entre dos de los lados del triángulo, a saber, $seno = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ y $coseno = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$.

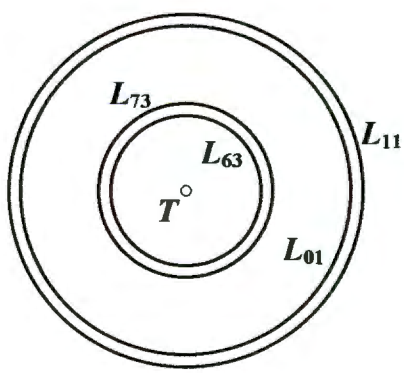
Luego, si se comparan estas igualdades con las dos anteriores, se observa que ambas definiciones son equivalentes

FUNCIÓN CIRCULAR		FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA
$\operatorname{sen} t = y$	$=$	$\dfrac{y}{1} = \operatorname{sen}(t\,\mathrm{rad}) = \operatorname{sen}\theta$
$\cos t = x$	$=$	$\dfrac{x}{1} = \cos(t\,\mathrm{rad}) = \cos\theta$.

Ejercicios

4.1) Suponiendo que la Luna gira alrededor de la Tierra describiendo una trayectoria circular cuyo diámetro aumenta aproximadamente $\frac{9}{\pi}$ centímetros cada año y representando con L_{63}, L_{70}, L_{01} y L_{11}, a las longitudes recorridas por la Luna al dar una vuelta alrededor de la Tierra en los años 1963, 1970, 2001 y 2011, respectivamente, determina la diferencia entre:

a) L_{63} y L_{70} b) L_{01} y L_{11}



c) Interpreta y compara los resultados.

4.2) El matemático griego Eratóstenes (276-194 a. C.) fue el primero en medir la longitud de la circunferencia de la Tierra y para ello formuló dos hipótesis muy atrevidas para su época: 1) la Tierra tiene forma esférica y 2) los rayos solares llegan en forma paralela.

Así, bajo estas hipótesis, Eratóstenes realizó sus cálculos a partir de ciertos hechos que él observó: Al medio día, durante el solsticio de verano (21 de junio), en Siena (hoy Aswan) los rayos solares caían perpendicularmente sobre la Tierra, mientras que en Alejandría un palo perpendicular a la superficie de la Tierra producía una sombra (*Figura* 10).

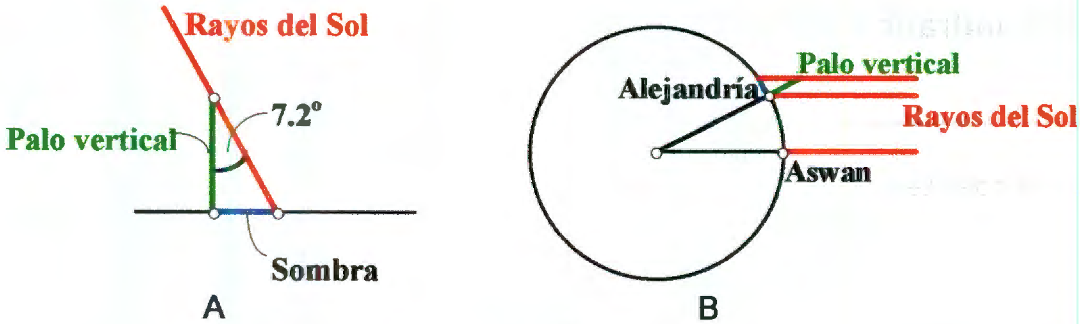


Figura 10

a) Describe al menos tres formas en las que Eratóstenes pudo determinar la medida del ángulo que se muestra en la *Figura* 10-A.

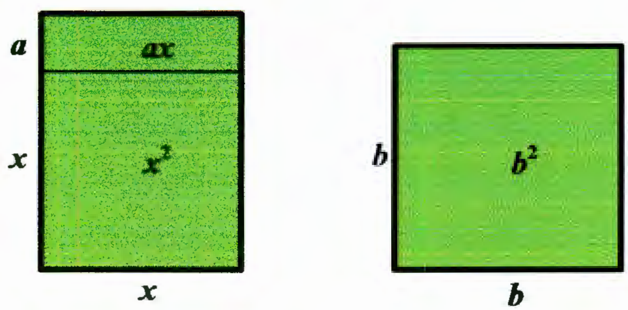
b) Si la distancia entre Aswan y Alejandría es de 794 kilómetros (5000 estadios según la unidad utilizada en la época de Eratóstenes), determina la circunferencia de la Tierra y compáralo con la longitud real (40 000 km).

La Cuadrática y la Circunferencia

Antecedentes:	Distancia entre dos puntos Solución algebraica de ecuaciones cuadráticas Potencia de un punto
Temas relacionados:	Forma estándar de la ecuación de la circunferencia Condiciones para determinar una circunferencia Punto medio de un segmento

Nota histórica

La matemática, y en especial la geometría (aproximadamente desde el siglo V a. C. hasta el siglo II d. C.), tuvo un extraordinario desarrollo en Grecia. Muchos de los problemas que hoy se abordan con ayuda del álgebra fueron tratados geométricamente por los antiguos griegos, por ejemplo, la ecuación que hoy escribimos como $x^2 + ax = b^2$, la establecieron como: "encontrar un segmento x tal que si al cuadrado construido con él se le suma un rectángulo construido con el mismo segmento y con un segmento dado a, obtengamos un rectángulo de área igual a la de un cuadrado dado".



El predominio de la geometría se conservó durante mucho tiempo, aun después de la época de los griegos. Una de las primeras contribuciones fundamentales a la geometría después de aquella época fue la idea de las coordenadas. Una vez que ésta apareció, la vinculación entre el álgebra y la geometría fue inminente y, con ella, el origen de la *Geometría Analítica*. Esta última es un ejemplo de cómo la unión de varias teorías matemáticas ha desempeñado un gran papel (en ocasiones decisivo) en el desarrollo de la matemática.

En el contexto de la geometría analítica es posible, entre otras cosas, resolver problemas geométricos a través de métodos algebraicos y viceversa, se pueden resolver problemas algebraicos por métodos geométricos. Es precisamente esta segunda característica la que ilustraremos en este apartado.

Supongamos que para resolver la ecuación $x^2 - 7x + 6 = 0$, se sugiere dibujar la circunferencia de centro $C = \left(\frac{7}{2}, \frac{6+1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ que pasa por el punto $(0, 1)$, garantizando que las raíces de la ecuación son las intersecciones de dicha circunferencia con el *eje x* (*Figura* 1).

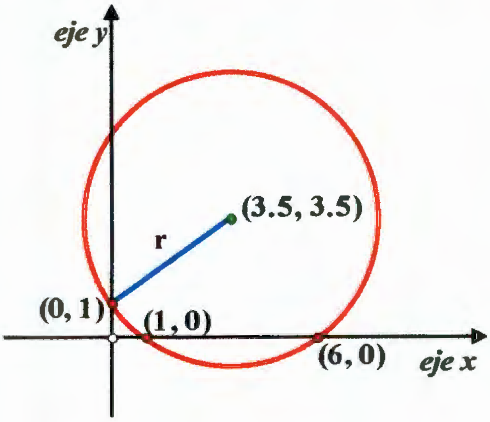


Figura 1

Es claro, ya que $(x - 1)(x - 6) = x^2 - 7x + 6$, que los valores de x en dichas intersecciones ($x_1 = 1$ y $x_2 = 6$) son las raíces de la ecuación y, de este modo, se ha resuelto un problema algebraico a través de un método geométrico.

Ahora, con la intención de precisar esta forma de proceder diremos que: ***resolver geométricamente*** una ecuación significa encontrar, mediante procedimientos geométricos, un segmento cuya longitud satisfaga a la ecuación propuesta.

Cabe aclarar que el desarrollar un análisis de cómo resolver ciertos problemas algebraicos a través de métodos geométricos, tiene como intención principal remarcar ese vínculo que se da entre el álgebra y la geometría, más no la promoción de un método como herramienta de resolución.

Análisis de un procedimiento geométrico para resolver ecuaciones algebraicas de segundo orden

Lo primero que haremos es enunciar, de manera precisa y general, la proposición que se presentó en la introducción acerca de cómo resolver geométricamente algunas ecuaciones algebraicas de grados dos y, por supuesto, demostrar su validez.

Considérese la ecuación $x^2 - ax + b = 0$ donde, por comodidad, se puede suponer que $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Proposición (1). Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia que pasa por el punto $B = (0, 1)$ y que tiene como centro al punto $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ (*Figura* 2). Si M y N son los puntos donde $\mathcal{C}$ intersecta al *eje x*, entonces las abscisas de estos puntos son las raíces de la ecuación, esto es, las longitudes de los segmentos OM y ON resuelven geométricamente a la ecuación.

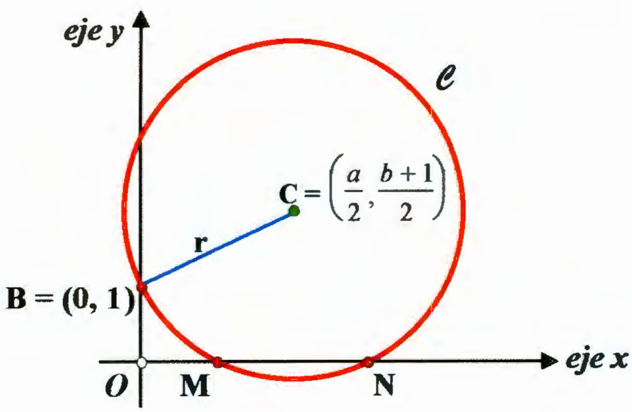


Figura 2

Demostración. Primeramente observemos que la distancia entre los puntos $B = (0, 1)$ y $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ no es otra cosa que la longitud del radio r de la circunferencia $\mathcal{C}$. Luego, expresando esa distancia en términos de las coordenadas de los puntos B y C, e igualándola con el radio de la circunferencia, tenemos que

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b+1}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + (b-1)^2}}{2}$$

De este modo, la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$, con centro $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ y radio r, es[1]:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + (b-1)^2}{4}$$

[1] Recuérdese que la ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Por otro lado, suponiendo que M y N son los puntos donde $\mathcal{C}$ intersecta al *eje x*, se tiene que

> *i*) Por estar sobre el *eje x*: tanto la ordenada de N como la de M son cero. Así, $N = (x_N, 0)$ y $M = (x_M, 0)$.
>
> *ii*) Por pertenecer a la circunferencia: las coordenadas $(x_N, 0)$ y $(x_M, 0)$ satisfacen a la ecuación de dicha circunferencia.

De tal manera que al sustituir las coordenadas, por ejemplo del punto M, en la ecuación de $\mathcal{C}$, ésta queda como

$$\left(x_M - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + (b-1)^2}{4}$$

o bien,

$$x_M^2 - ax_M + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{b}{2} + \frac{1}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} + \frac{1}{4}$$

y, al simplificarla, se tiene que

$$x_M^2 - ax_M + b = 0$$

Por supuesto que procediendo de manera análoga para $N = (x_N, 0)$, también se verifica que $x_N^2 - ax_N + b = 0$.

Esto significa que las abscisas, x_N y x_M, de los puntos considerados N y M, son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - ax + b = 0$ y, de esta manera, queda demostrada la proposición.

Por otro lado, si bien es cierto que la demostración anterior es precisa y no deja lugar a dudas sobre la veracidad de la proposición, también es verdad que cuando se comentan estrategias de este tipo, las cuales muestran aquella relación tan especial entre el álgebra y la geometría, es casi inevitable dejar de sorprenderse y no preguntarse ¿cómo es que se ocurre?, ¿cómo es que se le ocurre a alguien trazar un círculo para resolver una ecuación cuadrática?, ¿cómo es que se le ocurre considerar tal o cuál centro C, tal o cuál punto B?, etc.

Aspectos relacionados con estos cuestionamientos son precisamente los que se estudiarán a continuación.

En búsqueda de los orígenes del método

Si conjeturamos acerca del conjunto de ideas que posiblemente constituyeron el germen de la proposición 1, nuestras reflexiones pueden conducirnos a dos hechos que se demuestran en la Geometría Euclidiana y que pareciera sugieren las líneas generales del método mencionado anteriormente. Con la intención de recordarlas, estas propiedades geométricas se detallan a continuación:

i) En la *Figura* 3, desde un punto ***P***, exterior a una circunferencia dada, se han trazado dos secantes a dicha circunferencia, una de ellas la corta en los puntos ***A*** y ***B***, la otra en ***C*** y ***D***. Así, los triángulos ***PAC*** y ***PDB*** tienen común el ángulo en ***P***. También, los ángulos en ***A*** y en ***D*** son congruentes (porque están inscritos en el mismo arco). Luego, los triángulos ***PAC*** y ***PDB*** son semejantes y, se tiene que:

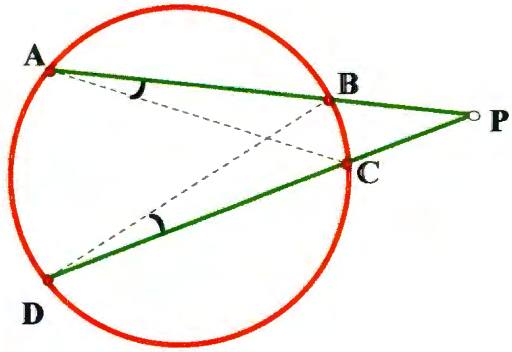


Figura 3

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

y, de este modo,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$ [2]

ii) En la *Figura* 4, desde el centro ***O*** de la circunferencia, se ha trazado una perpendicular a la cuerda ***AB*** y se ha denotado con ***H*** al punto en el que la perpendicular en cuestión corta a dicha cuerda. De este modo, los triángulos ***BHO*** y ***AHO*** son congruentes (puesto que son dos triángulos rectángulos que tienen respectivamente congruentes la hipotenusa —los radios ***OA*** y ***OB***— y uno de los catetos —el lado común ***OH***—) por lo que

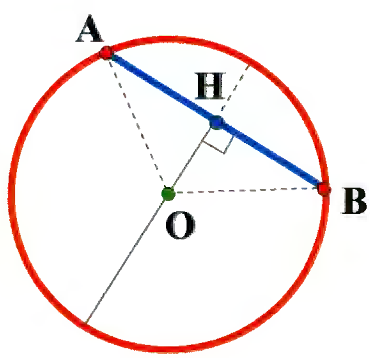


Figura 4

$$AH = BH.$$

Como se recordará, este razonamiento constituye la demostración del teorema geométrico que establece que: "*si una línea pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, entonces dicha línea bisecta a la cuerda*".

Una vez que se tienen presentes estos dos hechos, resulta conveniente hacer referencia a un tercero, pero este último es de naturaleza algebraica.

---

[2] Al producto ***PA·PB*** se llama *potencia de* ***P*** con respecto a la circunferencia dada.

iii) Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, entonces

$$(x-r)(x-s) = x^2 - \underbrace{(r+s)}_{a}x + \underbrace{rs}_{b} = x^2 - ax + b = 0$$

Aquí, tal y como se señala en la expresión anterior, es importante tener presente que si r y s son las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, entonces se verifica que

$$r + s = a \quad \text{y} \quad rs = b$$

Ahora, con base en los tres hechos descritos anteriormente, es posible elaborar una conjetura razonable acerca de cómo se pudo llegar a establecer la proposición 1 y, de esta manera, dar una respuesta factible a la pregunta ¿cómo se ocurre el método?

En primer lugar, tomemos en cuenta que los ejes coordenados pueden ser imaginados como secantes de una determinada circunferencia, donde el origen de coordenadas es el punto de intersección de dichas secantes (*Figura* 5).

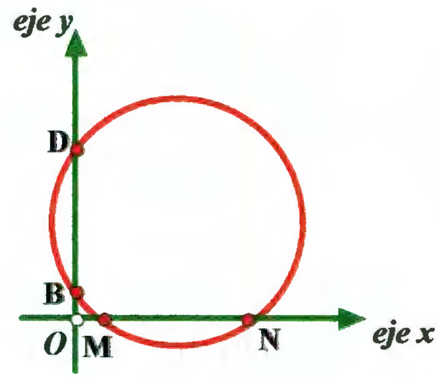


Figura 5

De este modo, y siendo congruentes con la propiedad «*i*», si B y D son los puntos de intersección del *eje y* con la circunferencia y, por su parte, M y N son los puntos de intersección de esta última con el *eje x*, entonces al determinar la *potencia* del punto O con respecto a la circunferencia, se tiene que

$$ON{\cdot}OM = OB{\cdot}OD$$

Pero si se quiere que, por ejemplo, ON y OM sean las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, entonces (de acuerdo con la propiedad algebraica «*iii*») deben ser tales que

$$ON{\cdot}OM = b$$

Luego, después de estudiar la *Figura* 5, lo más natural es elegir

$$OB = 1 \quad \text{y} \quad OD = b$$

Y de este modo obtener la igualdad deseada, $ON{\cdot}OM = OB{\cdot}OD = 1{\cdot}b = b$.

Obsérvese que, al hacer estas consideraciones, han quedado establecidos dos puntos por los cuales debe pasar la circunferencia, a saber, $B = (0, 1)$ y $D = (0, b)$. Sin embargo, ya que por dos puntos cualesquiera pasa toda una familia de circunferencias, aquello no basta para que la circunferencia quede completamente determinada. Para que esto suceda debe investigarse otra característica de la misma, por ejemplo, otro punto cualquiera de ella o, bien, su centro.

Una vía para seguir conjeturando acerca de los orígenes de este método es suponer, por un momento, que el centro C es conocido. Si esto fuera verdad, entonces es posible trazar desde C una perpendicular al *eje x*. De este modo, y por lo establecido en el segundo hecho geométrico «*ii*», se tiene que M y N son simétricos con respecto a dicha perpendicular, en otras palabras, si se denomina como H al punto de intersección de esa perpendicular con el *eje x* (*Figura* 6), se tiene que

$$MH = HN.$$

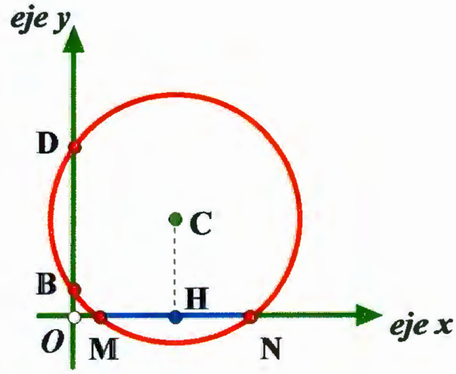


Figura 6

De esta forma, se puede establecer la siguiente cadena de igualdades

$$OM + ON = OM + (OH + \underbrace{HN}_{=MH}) = OM + (OH + MH).$$

Pero si se busca que OM y ON sean las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, entonces (por la propiedad algebraica «*iii*») la suma de ellos debe ser igual a a y, de este modo,

$$\begin{aligned} a &= OM + ON \\ &= OM + (OH + MH) \\ &= OM + (MH + OH) \\ &= (OM + MH) + OH \\ &= OH + OH \\ &= 2OH. \end{aligned}$$

y, así,

$$OH = \frac{a}{2}.$$

Es decir, la abscisa del centro C (que en un inicio se consideró conocida) es $\frac{a}{2}$.

Razonando de manera análoga se observa que el centro, C, también se encuentra en la línea que es perpendicular al *eje y* y que bisecta al segmento BD. Pero como en este caso las coordenadas de los extremos de dicho segmento ya se establecieron, $B = (0, 1)$ y $D = (0, b)$, determinar la ordenada del centro C (que también en un inicio se consideró conocida) se limita a calcular la ordenada del *punto medio* del segmento BD, a saber, $\frac{b+1}{2}$.

De este modo, sabiendo que $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ y que $B = (0, 1)$ son, respectivamente, el centro y un punto de la circunferencia, ésta queda perfectamente determinada.

Y, con ello, terminamos nuestras conjeturas y reflexiones acerca del conjunto de ideas que posiblemente constituyeron el germen de la proposición 1, en la cual se establece que las intersecciones de esa circunferencia con el *eje x* satisfacen la ecuación $x^2 - ax + b = 0$. Trabajo que, sin lugar a dudas, nos permitió contemplar de cerca el trabajo de eslabonar una serie de conceptos e ideas para crear otras nuevas.

<u>Un comentario final</u>

Tanto para la ecuación ordinaria de la circunferencia

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

como para la ecuación general

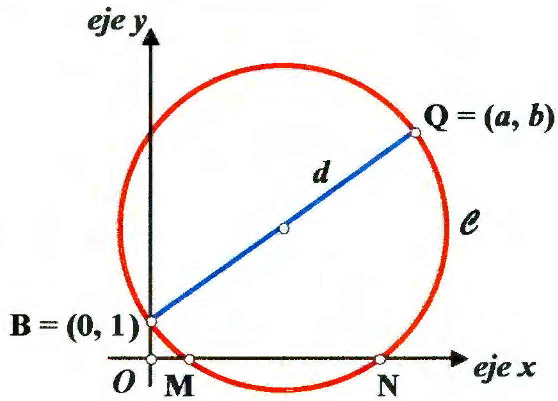
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

hay tres parámetros (h, k y r en el primer caso y D, E y F en el segundo). Y como la ecuación de toda circunferencia puede escribirse de cualquiera de estas dos formas, la ecuación de cualquier circunferencia particular puede obtenerse determinando los valores de los parámetros correspondientes.

Un equivalente geométrico a determinar esos parámetros algebraicos es hallar tres puntos cualesquiera de la circunferencia y, con ellos, geométricamente precisarla.

Así pues, resulta obvio que en algunos momentos del desarrollo de este capítulo pudo haberse continuado por otro camino y, así, hallar puntos distintos a los encontrados en nuestro estudio, para especificar la circunferencia buscada. Más aún, la propiedad 1 puede ser establecida de manera un poco diferente, por ejemplo:

Proposición (1'). Sea $B = (0, 1)$, $Q = (a, b)$ y $\mathcal{C}$ la circunferencia que tiene como diámetro el segmento BQ. Si M y N son los puntos donde $\mathcal{C}$ intersecta al *eje x*, entonces las abscisas de esos puntos son las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, esto es, los segmentos OM y ON la resuelven geométricamente.



Ejercicios

5.1) Siguiendo un procedimiento similar al desarrollado en este capítulo analiza la proposición **1'**.

5.2) Previo a enunciar la proposición 1, se propuso que para la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, se considerara que $a, b \in \mathbb{R}^+$. ¿La proposición no es válida sin esta consideración? es decir ¿el método falla si alguno de estos coeficientes es negativo?

5.3) ¿Qué interpretación algebraica se le puede dar al hecho de que, para cierta ecuación $x^2 - ax + b = 0$ dada, la circunferencia $\mathcal{C}$ sea tangente al *eje x*?

5.4) ¿Qué interpretación algebraica se le puede dar al hecho de que, para cierta ecuación $x^2 - ax + b = 0$ dada, la circunferencia $\mathcal{C}$ no intersecte al *eje x*?

5.5) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos (a, b) tales que la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, no tiene raíces reales?

La Cúbica y la Cuártica

Antecedentes:	Resolución de sistemas de ecuaciones
Temas relacionados:	Ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) Ecuaciones de segundo grado que son ecuaciones de circunferencias Parábola

Introducción

Ya en el capítulo anterior se comentó que muchos de los problemas que hoy se abordan con ayuda del álgebra fueron tratados geométricamente por los antiguos griegos, y se analizó una estrategia geométrica para resolver ecuaciones algebraicas de segundo orden. Ahora, siguiendo en la misma línea, intentado ilustrar cómo desde la perspectiva de la geometría analítica se pueden resolver problemas algebraicos utilizando métodos geométricos, pero sobre todo, con aquella intención de remarcar ese vínculo que se da entre el álgebra y la geometría, estudiaremos el interesante método que expuso René Descartes para determinar las raíces reales de las ecuaciones de tercero y cuarto orden (método que, como veremos, consiste en el análisis de la intersección de la parábola $y = x^2$ con una circunferencia apropiada).

Análisis previo

Antes de estudiar el método de Descartes para encontrar las raíces reales de las ecuaciones cúbicas y de las de cuarto grado (cuárticas), es necesario estudiar un par de proposiciones que serán útiles para clarificar los alcances de dicho método.

Proposición (1). Una ecuación cúbica $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ o una ecuación de cuarto grado $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ pueden llevarse a la forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (1)$$

Verificar esta afirmación no es difícil, pues si se considera la ecuación cúbica general

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

y en dicha ecuación se hace un cambio de variable adecuado, a saber,

$$z = x - \frac{a}{3}$$

se tiene que:

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

o bien, de manera equivalente:

$$x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{3}x - \frac{a^3}{27} + ax^2 - \frac{2a^2}{3}x + \frac{a^3}{9} + bx - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$x^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right)x - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Evidentemente, esta última expresión es de la forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Luego, multiplicando por x, se obtiene

$$x^4 + px^2 + qx = 0 \qquad (2)$$

que no es otra cosa que una ecuación de cuarto grado sin término en x^3, es decir, una ecuación de la forma (1), con $r = 0$.

De manera análoga, y congruente con la proposición 1, la ecuación general de cuarto grado,

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

puede reducirse a una ecuación de cuarto grado sin término en x^3. Para este caso el cambio de variable sugerido es

$$z = x - \frac{a}{4}.$$

Esta última afirmación, cuyo desarrollo se deja pendiente para la sección de ejercicios propuestos, completa la demostración de la proposición 1.

Obsérvese que una consecuencia inmediata de la proposición 1 —de importancia para el estudio que aquí se pretende realizar— es el siguiente hecho:

Proposición (2). La solución de cualquier ecuación cúbica o cuártica puede reducirse a la solución de una ecuación de cuarto grado sin término en x^3 (ecuación de la forma 1).

Efectivamente, si la ecuación $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ puede transformarse, según se demostró en la proposición 1, en la ecuación $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, entonces una vez que se encuentran los valores de x que satisfacen a esta última expresión, y sustituirlos en la igualdad $z = x - \frac{a}{3}$, también quedarán determinados los valores, z, que hacen verdadera a la ecuación $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ (Desde luego que esta forma de proceder, utilizando las expresiones correspondientes, es extensiva para la ecuación $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$).

Con respecto a lo estipulado en la proposición 2, cabe hacer notar que las ecuaciones de la forma 2, $x^4 + px^2 + qx + \underbrace{r}_{0} = 0$, admiten la raíz $x_4 = 0$, por lo que para cualquier ecuación particular de la forma $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, existe la posibilidad de que $z = -\frac{a}{3}$ sea una de sus raíces.

Ahora, tomando como punto de partida estas dos proposiciones, es el momento de iniciar el estudio del método de Descartes.

Análisis del método de Descartes para resolver ecuaciones algebraicas de cuarto y de tercer orden

Teniendo en mente que la solución de cualquier ecuación cúbica o cuártica puede reducirse a la solución de una ecuación cuártica sin término en x^3, y con la intención de introducirnos al estudio del método geométrico de Descartes relativo a este tema, analizaremos el siguiente cuestionamiento:

¿Qué situación geométrica puede llevarnos a considerar una ecuación de cuarto orden sin término cúbico $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (ecuación 1)?

Una posible respuesta se describe a continuación:

Cuando se estudia (algebraicamente) la intersección de la parábola

$$y = x^2$$

con una circunferencia de centro (h, k) y radio R, cuya ecuación es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2 \text{ o, bien, } x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - R^2 = 0$$

se procede a resolver, de manera simultánea, dichas ecuaciones. De este modo, por ejemplo, al sustituir la expresión $y = x^2$ en $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - R^2 = 0$, la ecuación resultante es

$$x^2 + x^4 - 2hx - 2kx^2 + h^2 + k^2 - R^2 = 0$$

o, de manera equivalente,

$$x^4 + (1 - 2k)\,x^2 - 2hx + h^2 + k^2 - R^2 = 0.$$

Pero esta última expresión puede escribirse como la ecuación 1, para ello basta establecer las siguientes equivalencias para h, k y R^2

$$\begin{aligned} 1 - 2k &= p, \\ -2h &= q, \\ h^2 + k^2 - R^2 &= r. \end{aligned}$$

De este modo, los valores reales de la variable x que satisfacen a la ecuación

$$x^4 + \underbrace{(1-2k)}_{p}x^2 + \underbrace{(-2h)}_{q}x + \underbrace{\left(h^2 + k^2 - R^2\right)}_{r} = 0$$

no son otra cosa que las abscisas de los puntos en los que se intersectan la parábola y la circunferencia consideradas en un principio.

Este análisis constituye la demostración de la siguiente afirmación (afirmación que ofrece una respuesta a la pregunta ¿qué situación geométrica puede conducirnos a considerar una ecuación del tipo $x^4 + px^2 + qx + r = 0$? con la que iniciamos nuestro estudio):

<u>Proposición</u> (3). Al determinar de manera algebraica las abscisas de los puntos en los que se intersectan una circunferencia y la parábola $y = x^2$ queda planteada una ecuación cuártica en x, sin término en x^3 (ecuación 1), siendo esas abscisas las raíces reales de ella.

Una vez que se conoce este hecho, la pregunta obligada es ¿y recíprocamente también se cumple? es decir ¿toda ecuación de la forma (1) puede representar las abscisas de los puntos de <u>intersección de una circunferencia con la parábola $y = x^2$</u>?

Naturalmente, al intentar responder este cuestionamiento no debe olvidarse ser coherente con el análisis hasta ahora realizado y, en este sentido, al estudiar las características de la ecuación $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, es importante no perder de vista aquellas equivalencias en las que se estipuló que $\boldsymbol{h^2 + k^2 - R^2 = r}$, $\boldsymbol{1 - 2k = p}$ y $\boldsymbol{-2h = q}$. Así, despejando $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{R^2}$ en estas últimas expresiones, se tiene que:

$$h = -\frac{q}{2}$$

$$k = \frac{1-p}{2}$$

$$R^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{(1-p)^2}{4} - r$$

Estas igualdades, para cualquier ecuación de la forma $\boldsymbol{x^4 + px^2 + qx + r = 0}$, nos indican quiénes deben ser $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{R}$ y, por consiguiente, cuál es la circunferencia que se debe intersectar con la parábola $\boldsymbol{y = x^2}$.

Desde luego, para la última de las igualdades, $\boldsymbol{R^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{(1-p)^2}{4} - r}$, puede suceder que

$$\frac{q^2}{4} + \frac{(1-p)^2}{4} < r$$

es decir, que el valor de $\boldsymbol{R^2}$ (el cuadrado de la longitud del radio de la circunferencia) resulte ser negativo. Si éste es el caso, entonces no hay circunferencia real que trazar y la ecuación $\boldsymbol{x^4 + px^2 + qx + r = 0}$ no tiene soluciones reales.

En caso contrario, si la ecuación tiene una solución real, digamos $\boldsymbol{x_1}$, entonces se verifica que

$$x_1^4 + px_1^2 + qx_1 + r = 0$$

es decir,

$$x_1^4 + (1-2k)x_1^2 - 2hx_1 + h^2 + k^2 - R^2 = 0$$

$$x_1^4 + x_1^2 - 2kx_1^2 - 2hx_1 + h^2 + k^2 - R^2 = 0.$$

Pero esta última expresión, al considerar la ecuación de la parábola y hacer una sustitución conveniente de $\boldsymbol{y_1 = x_1^2}$, puede escribirse como:

$$y_1^2 + x_1^2 - 2ky_1 - 2hx_1 + h^2 + k^2 - R^2 = 0$$

o bien como

$$\left(x_1^2 - 2hx_1 + h^2\right) + \left(y_1^2 - 2ky_1 + k^2\right) = R^2$$

$$R^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$$

Y de este modo queda demostrado el siguiente hecho.

Proposición (4). Si la ecuación $x^4+px^2+qx+r=0$ tiene una raíz real, entonces $R^2=\frac{q^2}{4}+\frac{(1-p)^2}{4}-r$ en realidad es un número positivo y todas las raíces reales de dicha ecuación son las abscisas de los puntos de intersección de la parábola $y=x^2$ con una circunferencia de radio R y centro el punto de coordenadas $\left(h=-\frac{q}{2}, k=\frac{1-p}{2}\right)$.

Así, las proposiciones 1 a 4 garantizan que si una ecuación de cuarto grado o, bien, una ecuación cúbica, tienen raíces reales, éstas quedan representadas geométricamente por las abscisas de los puntos de intersección de la parábola $y=x^2$ y una circunferencia específica.

Ahora con la intención de ilustrar el método aquí analizado, resolveremos algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 1. Resolver, geométricamente, la ecuación $x^4-15x^2+10x+24=0$.

Dado que $x^4-15x^2+10x+24=0$ es una ecuación de cuarto grado sin término en x^3, por la Proposición (4), de tener raíces reales, éstas pueden ser representadas por las abscisas de los puntos de las intersecciones de la parábola $y=x^2$ con aquella circunferencia cuyo radio R y centro (h, k) quedan determinados como sigue:

$$R^2=\frac{10^2}{4}+\frac{[1-(-15)]^2}{4}-24=65$$

$$h=-\frac{10}{2}=-5,\ k=\frac{1-(-15)}{2}=8$$

Es decir, las raíces de la ecuación $x^4-15x^2+10x+24=0$ son las abscisas de los puntos de las intersecciones de la parábola $y=x^2$ con la circunferencia $(x+5)^2+(y-8)^2=65$, a saber, $x_1=-4$, $x_2=-1$, $x_3=2$ y $x_4=3$ (*Figura* 1).

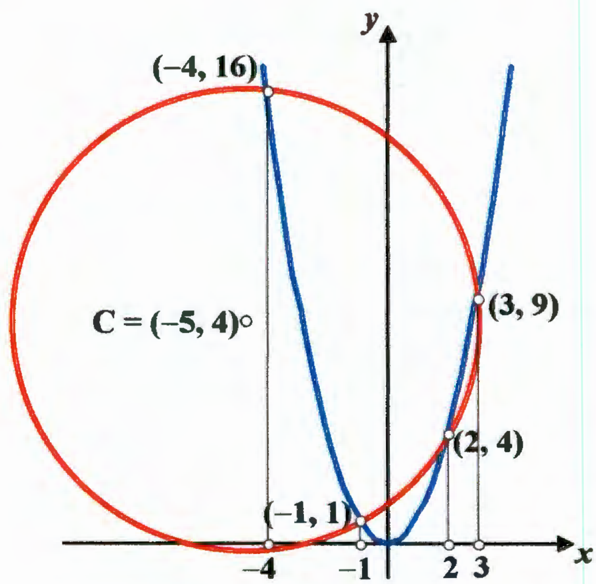


Figura 1

Ejemplo 2

Resolver, geométricamente, la ecuación $2x^4 - 20x^3 + 70x^2 - 100x + 48 = 0$.

Aquí, a diferencia del primer ejemplo, la Proposición (4) no la podemos aplicar de manera inmediata, pues la ecuación $2x^4 - 20x^3 + 70x^2 - 100x + 48 = 0$ no es de la forma $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Por esta razón, lo primero que haremos será reducir la ecuación dada a la forma (1). Para lograrlo será suficiente dividir dicha ecuación por dos (para tener una ecuación de la forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) y luego hacer un cambio de variable adecuado.

Así pues, al dividir por dos, la ecuación dada se puede escribir como:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Y al efectuar el cambio de variable sugerido, $x = z - \dfrac{a}{4}$, que para nuestro caso es

$$x = z - \frac{(-10)}{4} = z + \frac{5}{2}$$

la ecuación original se convierte en

$$\left(z + \frac{5}{2}\right)^4 - 10\left(z + \frac{5}{2}\right)^3 + 35\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - 50\left(z + \frac{5}{2}\right) + 24 = 0$$

expresión que, después de desarrollar las potencias y reducir los términos semejantes, puede escribirse como

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} = 0$$

Esta nueva ecuación es de la forma (1) por lo que sus raíces reales, si es que las tiene, estarán representadas por las abscisas de los puntos de la intersecciones de la parábola $y = z^2$ con la circunferencia de parámetros:

$$h = -\frac{0}{2} = 0$$

$$k = \frac{1 - \left(-\frac{5}{2}\right)}{2} = \frac{7}{4}$$

$$R^2 = 0 + \frac{\left[1 - \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2}{4} - \frac{9}{16} = \frac{5}{2}$$

Así, las raíces reales de la ecuación $z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} = 0$ son las abscisas de los puntos de la intersecciones de la parábola $y = z^2$ con la circunferencia $z^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{5}{2}$, a saber, $z_1 = -1.5$, $z_2 = -0.5$, $z_3 = 0.5$ y $z_4 = 1.5$ (*Figura* 2).

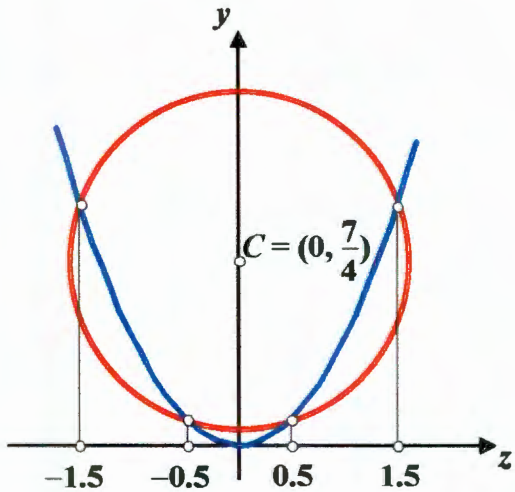


Figura 2

Ahora, una vez que se conocen los valores de z que resuelven la ecuación $z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{9}{16} = 0$, determinar los valores de la variable x que satisfacen a la ecuación $2x^4 - 20x^3 + 70x^2 - 100x + 48 = 0$ se reduce a sustituir los valores de las abscisas $z_1 = -1.5$, $z_2 = -0.5$, $z_3 = 0.5$ y $z_4 = 1.5$, en la igualdad que utilizamos para hacer el cambio de variable,

$$x = z + \frac{5}{2}$$

De este modo, y después de efectuar las operaciones correspondientes, se tiene que los valores $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 4$ son las raíces de la ecuación original $2x^4 - 20x^3 + 70x^2 - 100x + 48 = 0$.

Ejercicios

6.1) Demuestra que la expresión $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ puede reducirse a una ecuación de cuarto grado sin término en z^3. (*Sugerencia: Efectúa el cambio de variable sugerido en este capítulo*)

6.2) Resuelve, geométricamente, las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30 = 0$

b) $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$

c) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$

d) $x^4 - 27x^2 + 14x + 120 = 0$

6.3) Dada la ecuación cuadrática general $ax^2 + dx + c = 0$ donde $a \neq 0$, al despejar x^2 se obtiene $x^2 = -\frac{d}{a}x - \frac{c}{a}$. Si en esta última igualdad se hace $m = -\frac{d}{a}$ y $b = -\frac{c}{a}$, entonces dicha igualdad puede interpretarse (para x) como las abscisas de los puntos de intersección de dos gráficas.

a) ¿A qué gráficas se está haciendo referencia en la afirmación anterior?

b) En un sistema de coordenadas, y con base en tu respuesta al inciso anterior, muestra de manera general la situación descrita.

c) Los segmentos del origen del sistema de coordenadas a cada uno de los puntos sobre el *eje x*, cuyas longitudes son las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas referidas en los incisos anteriores, pueden tener una interpretación muy singular en relación a los valores de la variable x de la expresión original dada, $ax^2 + dx + c = 0$ donde $a \neq 0$. Explica si dicha interpretación tiene algo que ver con las soluciones de esa ecuación cuadrática.

6.4) Resuelve geométricamente las ecuaciones cuadráticas siguientes, trazando sus correspondientes gráficas. (*Nota: La pregunta 6.3 intenta ser un problema-guía que te permita establecer un método para resolver, geométricamente, ecuaciones de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$. *La idea es que las ecuaciones que se te presentan a continuación las resuelvas empleando dicho método*).

a) $x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^2 + x - 6 = 0$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

d) $2x^2 + 7x + 5 = 0$

e) $2x^2 + 11x + 5 = 0$

Propiedad de Reflexión de la Parábola

Antecedentes: El Principio de Fermat del tiempo mínimo
Leyes de la reflexión de la luz de Descartes

Temas relacionados: Ecuación de la recta en su forma punto-punto y en su forma pendiente-ordenada al origen
Recta tangente a la parábola
Pendiente y ángulo de inclinación
Ángulo entre dos rectas

Introducción

En la segunda guerra púnica, cuando el pueblo de Siracusa estuvo sitiado por el general romano Marcelo, sucedió que uno de los más grandes matemáticos griegos (y de la antigüedad en conjunto) Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) puso su habilidad técnica a disposición de los defensores de la ciudad. Así, gracias a las máquinas de guerra que él diseñó, la ciudad opuso una tenaz resistencia y no fue sino hasta después de un sitio de ocho meses y un bloqueo de tres años, que el general romano pudo apoderarse de esa ciudad.

En castigo a su terquedad, Marcelo no tuvo más alternativa que dejar la ciudad de Siracusa a merced de sus soldados, quienes en el saqueo dieron muerte a Arquímedes.[1]

Algunos historiadores cuentan que Arquímedes desarrolló una estrategia para incendiar los barcos de los invasores. La idea era la de reflejar la luz del Sol, mediante un gran número de espejos planos, hacia los barcos, que bajo la acción concentrada de los rayos del Sol terminaban por incendiarse.

Hoy en día tanto en óptica como en comunicaciones existen muchas situaciones que se ajustan perfectamente a esa idea, *concentrar una serie de ondas en un punto*.

En la *Figura* 1 se muestra (vista desde arriba) una versión simplificada de esta situación, que bien puede ser el diseño de Arquímedes en Siracusa (el hecho de que los rayos solares, o cualquier otro tipo de ondas, lleguen en forma paralela

[1] Se dice que un soldado romano que penetró en el jardín del sabio, lo encontró sumido en el estudio de unas figuras geométricas trazadas en la arena. Tan absorto estaba Arquímedes en sus estudios, que ni siquiera advertía lo que pasaba en torno suyo. "No pises mis círculos", dijo al legionario, y éste, que ignoraba quién era, lo atravesó con su espada.

a los espejos, obedece a que la fuente de emisión está tan lejos como para poder suponer que sucede de esta forma).

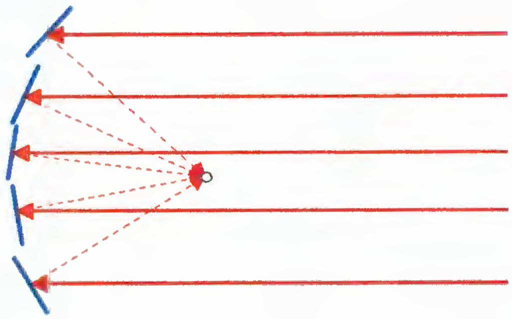


Figura 1

Pudiera parecer ocioso que aquí se comentara que el dispositivo de Arquímedes, ilustrado en la *Figura* 1, tenía que poseer, para concentrar las ondas reflejadas en un punto único, las siguientes características: 1) ningún espejo debe interponerse entre el Sol y los demás espejos, ni entre estos y el punto; 2) cada espejo debe reflejar, sobre el punto, los rayos solares que recibe. Sin embargo, este comentario tiene la intención de poner en relieve el hecho de que hoy, en geometría, se conoce una curva $\mathscr{C}$ tal que, bajo ciertas condiciones, si sobre ella inciden, por ejemplo, rayos de luz, éstos será reflejado en un punto único F. Hecho que es aprovechado para el diseño de: los faros de los automóviles, lámparas de mano, antenas parabólicas, telescopios, colectores de luz solar, micrófonos, antenas de radar, etc.

La curva $\mathscr{C}$ a la que se hace referencia en el párrafo anterior se denomina *Parábola* y en este capítulo se estudiará su *propiedad de reflexión*. Esta propiedad consiste en que si un rayo de luz, u otro tipo de onda, paralelo a su *eje* choca contra ella, será reflejado hacia el *foco* (*F*) de la parábola y recíprocamente, si se coloca una fuente de luz en el *foco* de la parábola, los rayos que sean reflejados por ella serán paralelos a su eje (*Figura* 2).

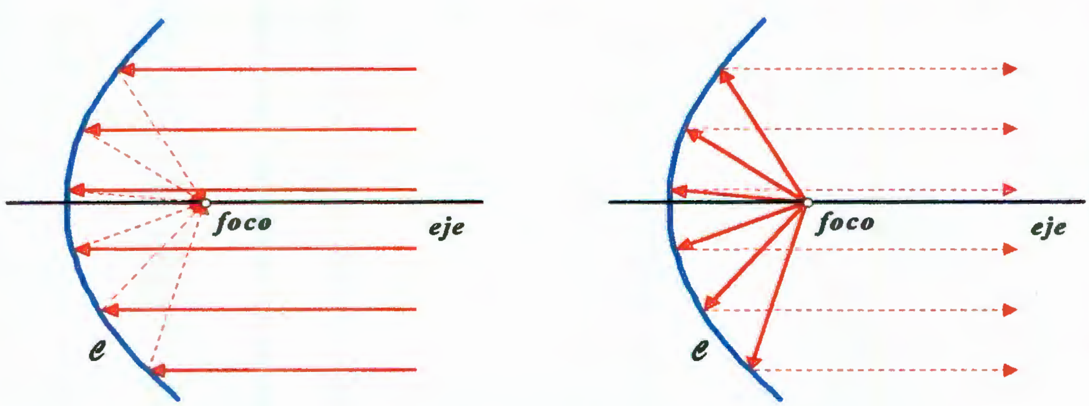


Figura 2

El Principio de Fermat

Para iniciar este estudio nos remitiremos a un hecho que habitualmente se estudia, desde la secundaria, en la asignatura de Física:

Principio de Fermat (del tiempo mínimo). De todas las trayectorias que unen dos puntos, la luz utiliza la que minimiza el tiempo de recorrido.

En otras palabras, este principio garantiza que si un rayo de luz viaja de un punto A a un punto B, la luz recorrerá el camino más corto y, por lo tanto, desde la perspectiva de la geometría euclidiana, afirma que la luz viaja en línea recta.

En este capítulo la intención es que, a partir de este principio, se llegue a deducir la propiedad de reflexión de la parábola, descrita anteriormente. Esta tarea se puede comenzar analizando ***geométricamente*** algunos aspectos acerca de la reflexión de la luz en un espejo plano, situación que es más sencilla pero que sin lugar a duda aportará algunos aspectos que serán de utilidad posteriormente.

Iniciemos pensando en un espejo plano (EE') y un rayo de luz que sale de A hacia el espejo, reflejándose en el punto X para posteriormente llegar a B, tenemos entonces que la luz viajó por la línea quebrada AXB (*Figura* 3). Esto es inmediato del principio de Fermat, pues la luz viaja en línea recta. Sin embargo, la cuestión aquí es ¿qué relación existe entre el ángulo α y el ángulo β?[2]

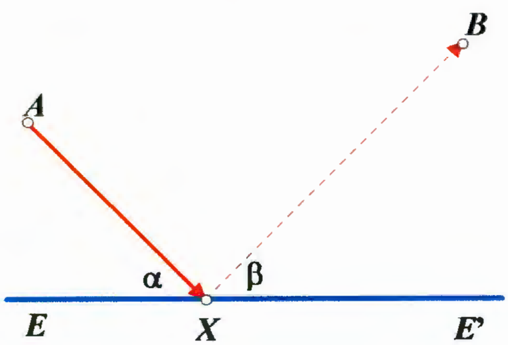


Figura 3

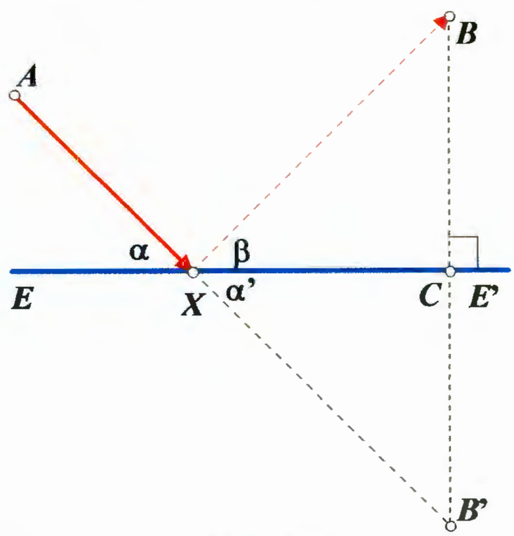


Figura 4

Para responder, pensemos que B' es un punto tal que BB' es perpendicular a EE' en C y $BC = CB'$ (*Figura* 4).

[2] El ángulo α se denomina ángulo de incidencia y β ángulo de reflexión.

Claramente, los triángulos XBC y $XB'C$ son congruentes[3] por lo que:

$$\beta = \alpha'$$

Pero como $\alpha' = \alpha$ (ya que son ángulos opuestos por el vértice) se tiene que:

$$\beta = \alpha.$$

Al ver el desarrollo anterior no es difícil suponer que la relación que existe entre los ángulos α y β es la congruencia, es decir, concluir que el ángulo α con el cual incide el rayo sobre el espejo, tiene la misma medida que el ángulo β con el cual es reflejado. Sin embargo, y aunque la mayoría de las consideraciones que se realizaron parecen razonables, es conveniente actuar con cautela y reflexionar acerca de la siguiente cuestión ¿Es verdad que el punto X, punto donde el rayo de luz incide con el espejo EE', está sobre el segmento AB'? en otras palabras ¿es cierto que el punto de intersección de las rectas EE' y AB' es X?

Considerar esta situación es importante ya que la falsedad de esta suposición implicaría la existencia de un punto X', distinto de X, donde se intersectan las rectas EE' y AB' (*Figura* 5) y, con esto, la posibilidad de que la igualdad establecida entre los ángulos de incidencia y reflexión también sea falsa.

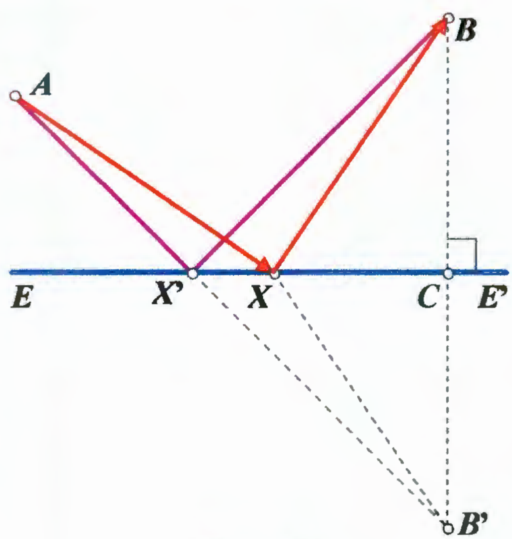


Figura 5

Para salir de dudas, pensemos acerca de qué pasaría si el punto de intersección entre las rectas EE' y AB' fuera un punto X', distinto al punto de incidencia del rayo de luz con el espejo (X).

[3] Esto es cierto dado que por hipótesis $BC \cong B'C$ y $\angle B'CX \cong \angle BCX$ y, por otro lado, CX es común para ambos triángulos.

Así pues, bajo esta suposición, y por la propiedad de la desigualdad del triángulo, se tendría que

$$AX + XB' > AB' \qquad (1)$$

Pero, por otro lado, la congruencia entre los triángulos ***X'BC*** y ***X'B'C*** garantizaría que $\boldsymbol{X'B'} \cong \boldsymbol{X'B}$ y, de este modo,

$$AB' = AX' + X'B' = AX' + X'B \qquad (2)$$

Además, dada la congruencia entre los triángulos ***XBC*** y ***XB'C***, se tendría que

$$XB' = XB \qquad (3)$$

De tal manera que, al sustituir (2) y (3) en (1), resultaría que

$$AX + XB > AX' + X'B$$

lo cual afirmaría que la luz siguió un camino más largo ($AX + XB$) al ir del punto A (y ser reflejado) al punto B, contradiciendo así al principio de Fermat. Por lo que, los puntos supuestos X y X' no son distintos, es decir,

$$X' = X.$$

Esto significa que el punto X, punto donde es reflejado el rayo de luz, es único y se localiza en la intersección de las líneas ***EE'*** y ***AB'***, tal y como se consideró en un principio.

El análisis desarrollado hasta aquí constituye una verificación de uno de los dos principios sobre la reflexión de la luz, propuestos por Descartes: *Si un rayo de luz incide sobre una superficie pulida plana, el ángulo de reflexión* (β) *es igual al ángulo de incidencia* (α).

Posiblemente todavía no se alcance a apreciar cómo es que estas ideas van a conectarse con la propiedad de reflexión de la parábola. Sin embargo, esta conexión está en realidad más cerca de lo que pudiera parecer. Lo que se necesita para establecer dicha conexión se limita a encontrar alguna recta que pueda "sustituir" localmente (en un punto) a una parábola dada y, una vez hecho esto, vincular la propiedad de reflexión de los espejos planos con esa recta y, consecuentemente, con la parábola.

Con esto en mente, a continuación, estudiaremos la ecuación de la "*recta tangente*" a la parábola $y^2 = 4px$.

Recta Tangente a la Parábola

Definición (1). Una recta t es ***tangente*** a una parábola en un punto P de ella, si corta a la parábola únicamente en P y todos los demás puntos de t están sólo en una de las regiones determinadas por la parábola (en la *Figura* 6 ninguno de los puntos de la recta tangente, t, están en la región sombreada)

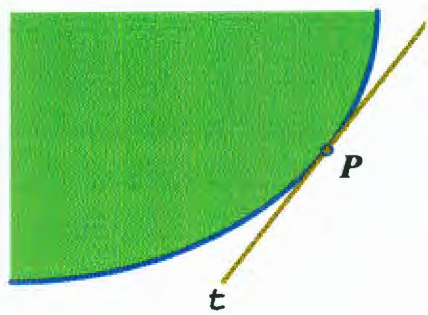


Figura 6

Aunque esta definición no es aplicable a cualquier curva, nosotros la utilizamos porque básicamente el método de Descartes, para encontrar tangentes (que es el que reconstruimos aquí), depende de la idea de que para muchas gráficas, la línea tangente en un punto dado es la única línea que intersecta la gráfica en ese punto solamente —esta idea geométrica de Descartes la vincularemos en nuestro siguiente análisis con el hecho algebraico de que al resolver de manera simultánea la ecuación de una recta y una parábola, el discriminante de la ecuación cuadrática resultante debe ser cero para tener una única raíz, es decir, para que la recta y al parábola tengan un único punto de intersección—.

Teorema (1). La ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto $P = (x_1, y_1)$ es[4]

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Demostración.

Como la recta buscada pasa por $P = (x_1, y_1)$, podemos afirmar que su ecuación tiene la forma

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)^{5} \qquad \textbf{(1)}$$

o bien

---

[4] Recuérdese que la ecuación de una parábola con *vértice* en el origen y eje el *eje x*, es $y^2 = 4px$, en donde el *foco* es el punto $(p, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

[5] Ésta es la ecuación de la recta que pasa por un punto determinado de coordenadas (x_1, y_1) y cuya pendiente es m.

$$y = y_1 + mx - mx_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Así, nuestra primer tarea en esta demostración es determinar la pendiente m de la recta que nos interesa. Para ello, y dado que ésta es tangente a la parábola $y^2 = 4px$, intentaremos encontrar el valor de m sustituyendo en la ecuación de la parábola el valor de y dado por (2), de este modo se tiene que

$$(y_1 + mx - mx_1)^2 = 4px$$

Elevando el trinomio al cuadrado e igualando a cero, esta última expresión puede escribirse como

$$m^2x^2 + 2my_1x - 2m^2x_1x - 4px + y_1^2 - 2mx_1y_1 + m^2x_1^2 = 0$$

si se agrupa para obtener una ecuación cuya variable sea x, se tiene que

$$m^2x^2 + \left(2my_1 - 2m^2x_1 - 4p\right)x + \left(y_1^2 - 2mx_1y_1 + m^2x_1^2\right) = 0$$

Pero de acuerdo con la definición 1, la cual establece que el *punto de tangencia* P es único, sólo puede haber un valor de x que satisfaga a la ecuación anterior y, por tanto, el discriminante[6] de la misma debe ser cero. De este modo

$$\left(2my_1 - 2m^2x_1 - 4p\right)^2 - 4m^2\left(y_1^2 - 2mx_1y_1 + m^2x_1^2\right) = 0$$

o bien, de manera equivalente,

$$\left(16m^2px_1 - 16mpy_1 + 16p^2 - 8m^3x_1y_1 + 4m^4x_1^2 + 4m^2y_1^2\right) + \left(8m^3x_1y_1 - 4m^4x_1^2 - 4m^2y_1^2\right) = 0$$

$$16px_1m^2 - 16py_1m + 16p^2 = 0$$

Claramente, esta última expresión es una ecuación cuadrática cuya variable es la pendiente m y sus coeficientes están determinados por el parámetro p de la parábola y por las coordenadas (x_1, y_1) del punto en donde la recta es tangente ella. De esta manera, determinar el valor de m se reduce a resolver una ecuación de segundo grado, ecuación que después de dividir por $16p$ puede escribirse como

$$x_1m^2 - y_1m + p = 0$$

así, el valor de m buscado es

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1}$$

---

[6] Recuérdese que el discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, es $b^2 - 4ac$. Y que cuando este es cero, sólo hay un valor de la variable que satisface a la ecuación.

Pero como el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ está sobre la parábola $y^2 = 4px$ se tiene que

$$y_1^2 - 4px_1 = 0 \tag{3}$$

De tal manera que la pendiente m, de la recta tangente a la parábola, es:

$$m = \frac{y_1}{2x_1} \tag{4}$$

Ahora, sustituyendo este valor en la ecuación 1, se tiene que la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$, en el punto $P = (x_1, y_1)$, es

$$y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1)$$

Una vez determinada la ecuación de la recta, la segunda tarea (con la cual finalizaría la demostración) consiste en hacer un desarrollo algebraico que transforme la ecuación encontrada en la que se menciona en el teorema. Así pues, hagamos

$$y = y_1 + \left(\frac{y_1}{2x_1}\right)x - \left(\frac{y_1}{2x_1}\right)x_1$$

$$y = y_1\left(\frac{2x_1 + x - x_1}{2x_1}\right)$$

$$y = \frac{y_1}{2x_1}(x + x_1)$$

Luego, al multiplicar ambos miembros de esta última igualdad por y_1, resulta que

$$y_1 y = \frac{y_1^2}{2x_1}(x + x_1)$$

Finalmente tomando en cuenta que $\frac{y_1^2}{2x_1} = 2p$, igualdad que es inmediata de la expresión 3, resulta que la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto $P = (x_1, y_1)$ efectivamente es

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Ahora, aunque ya podemos iniciar a eslabonar los resultados obtenidos hasta este momento y estudiar de lleno la propiedad de reflexión de la parábola, antes de realizar esta actividad conviene hacer un primer acercamiento a través de un caso particular.

Un planteamiento particular

Con la intención de ilustrar algunos vínculos entre los conceptos estudiados en los párrafos anteriores y bosquejar las líneas del estudio general de la propiedad de reflexión de la parábola, supóngase que se tuviera la necesidad de:

i) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 9x$ en el punto $P = (1, 3)$

ii) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P = (1, 3)$ y por el foco de la parábola $y^2 = 9x$,

iii) Comparar la medida de los ángulos α y β, sabiendo que α es el ángulo determinado por las rectas de los incisos anteriores y que β es el ángulo determinado por la recta tangente a la parábola $y^2 = 9x$ y la recta paralela al *eje x* (*eje de la parábola*) que pasa por $P = (1, 3)$.

Solución

i)

Si la ecuación $y^2 = 9x$ se compara con la forma $y^2 = 4px$, se tiene que $9 = 4p$ y, por tanto, $p = \frac{9}{4}$. De este modo, de acuerdo con el teorema 1, la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 9x$ en el punto $P = (1, 3)$ es

$$3y = 2\left(\frac{9}{4}\right)(x+1)$$

o, de manera equivalente,

$$3x - 2y + 3 = 0$$

ii)

Recordando que el foco es el punto $F = (p, 0)$ y que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos cualesquiera $Q_1 = (x_1, y_1)$ y $Q_2 = (x_2, y_2)$ es $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$, se puede afirmar que la recta que pasa por el foco, $\boldsymbol{F}=\left(\frac{9}{4},0\right)$, y el por el punto $\boldsymbol{P}=(\mathbf{1},\ \mathbf{3})$, tiene por ecuación a la expresión:

$$y-3=\frac{3-0}{1-\frac{9}{4}}(x-1)$$

o, de manera equivalente,

$$12x+5y-27=0$$

Antes de seguir adelante, y sólo por razones prácticas, conviene determinar previamente las pendientes de las rectas a las que se hace referencia en el inciso *iii*, ya que se ocuparán en la expresión $\mathbf{tan}(\theta)=\dfrac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{f}}-\boldsymbol{m}_{\mathrm{i}}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{m}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{m}_{\mathrm{f}}}$ que, como se recordará, sirve para calcular el *ángulo entre dos rectas.*[7]

Para hallar la pendiente ($\boldsymbol{m}_{\mathrm{t}}$) de la recta tangente a la parábola $\boldsymbol{y}^{2}=\mathbf{9}\boldsymbol{x}$ en el punto $\boldsymbol{P}=(\mathbf{1},\mathbf{3})$, puede utilizarse la expresión 4 y, de este modo, obtener que

$$m_{\mathrm{t}}=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{3}{2(1)}=\frac{3}{2}$$

Para calcular la pendiente ($\boldsymbol{m}_{\mathrm{FP}}$) de la recta que pasa por $\boldsymbol{F}=\left(\frac{9}{4},0\right)$ y por $\boldsymbol{P}=(\mathbf{1},\mathbf{3})$, puede transformarse la ecuación $\mathbf{12}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}\boldsymbol{y}-\mathbf{27}=\mathbf{0}$ en su equivalente de la forma $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$, es decir, en $\boldsymbol{y}=-\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}+\dfrac{\mathbf{27}}{\mathbf{5}}$, de donde resulta inmediato que

$$m_{\mathrm{FP}}=-\frac{12}{5}$$

Finalmente, hay que recordar que la pendiente de cualquier recta paralela al *eje x* es cero.

Una vez hecho esto, los cálculos que se deben realizar para resolver el último punto se limita a la aplicación de la fórmula correspondiente, $\mathbf{tan}(\theta)=\dfrac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{f}}-\boldsymbol{m}_{\mathrm{i}}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{m}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{m}_{\mathrm{f}}}$. Sin embargo, para tener una mejor referencia acerca de quién

[7] Al utilizar dicha expresión es conveniente tomar en cuenta que: 1) Los ángulos se miden en sentido contrario al avance de las manecillas de un reloj, o sea, en sentido positivo, como en Trigonometría. 2) La recta a partir de la cual se mide el ángulo se llama *recta inicial*; la recta hacia la cual se dirige el ángulo se llama *recta final*. 3) Las pendientes de las rectas inicial y final se llaman *pendiente inicial* ($\boldsymbol{m}_{\mathrm{i}}$) y *pendiente final* ($\boldsymbol{m}_{\mathrm{f}}$), respectivamente.

es la pendiente inicial y cuál es la pendiente final, para los ángulos α y β en cuestión, será conveniente apoyarse en la representación gráfica de la situación descrita en *iii*, la cual se muestra en la *Figura* 7.

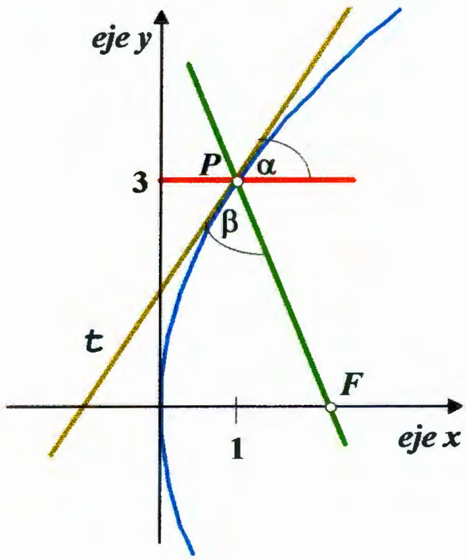


Figura 7

iii)

cálculo de α

$$(m_i = 0, m_f = \frac{3}{2})$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{3}{2} - 0}{1 + (0)\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

cálculo de β

$$(m_i = \frac{3}{2}, m_f = -\frac{12}{5})$$ [8]

$$\tan(\beta) = \frac{-\frac{12}{5} - \frac{3}{2}}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{12}{5}\right)}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

Así, y en virtud de que **tan^{-1}α = tan^{-1}β, 0° ≤ α ≤ 180° y 0° ≤ β ≤ 180°**, se tiene que

$$\alpha = \beta$$

[8] Esta asignación de pendientes corresponde al ángulo que es opuesto por el vértice a β ya que, como se recordará, en el teorema que se establece que $\tan(\theta) = \frac{m_f - m_i}{1 + m_i m_f}$ las rectas se consideran dirigidas hacia arriba.

Lo importante ahora es reflexionar acerca de los resultados, y de la situación en general, que se ha estudiado. Para ello, se podría comenzar planteando algunas preguntas:

¿El hecho de que α sea igual a β tendrá algo que ver con la propiedad de reflexión de la parábola (aquella propiedad mencionada en la introducción e ilustrada en la *Figura* 2)? ¿Este resultado es válido sólo para algunos casos particulares o es un resultado que puede generalizarse?

En el siguiente apartado se intenta dar respuesta a estas preguntas. La idea es considerar cualquier parábola de la forma $y^2 = 4px$ y proceder de manera análoga como hasta ahora.

La Propiedad de Reflexión de la Parábola

Con la intención de lograr una pronta referencia hacia los elementos que forman parte de nuestro objeto de estudio, resultará práctico comenzar el análisis asignando algunos nombres. De este modo, y teniendo en mente trabajar en el camino trazado en el caso particular, designemos como "t" a la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en algún punto $P = (x_1, y_1)$, como "h" la recta que pasa por dicho punto P y que es paralela al eje de simetría de la parábola (eje que para las parábolas de la forma $y^2 = 4px$ coincide con el *eje x*), como "s" a la recta que pasa por los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $F = (p, 0)$, y como m_t, m_h y m_s, a sus correspondientes pendientes (*Figura* 8).

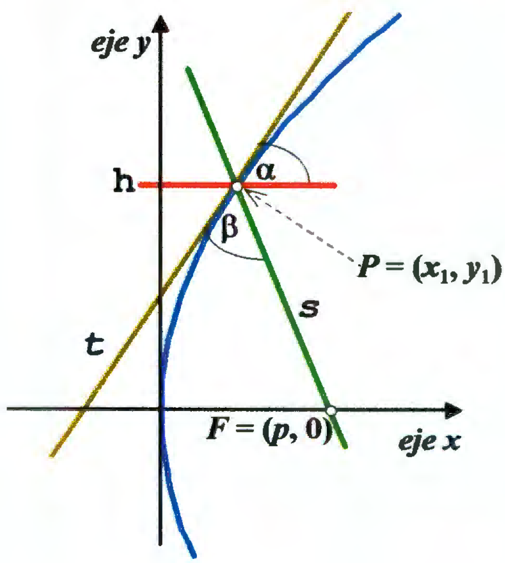


Figura 8

De este modo, y procediendo de manera análoga a como se hizo en el estudio del caso particular, se tiene que los valores de dichas pendientes son:

$m_{h} = 0$	Puesto que la recta ***h*** es horizontal.
$m_{t} = \dfrac{y_1}{2x_1} \cdot \left(\dfrac{y_1}{y_1}\right) = \dfrac{2p}{y_1}$	Esta igualdad es un resultado inmediato de multiplicar tanto al numerador como al denominador de la expresión 4 por y_1 y sustituir $\dfrac{y_1^2}{2x_1}$ por $2p$.
$m_{s} = \dfrac{y_1 - 0}{x_1 - p} = \dfrac{y_1}{x_1 - p}$	Puesto que $F = (p, 0)$ y $P = (x_1, y_1)$, basta determinar la razón entre los desplazamientos vertical y horizontal para determinar la pendiente de la recta ***s***.

Ahora, comparar los ángulos α (determinado por las rectas ***h*** y ***t***) y β (determinado por las rectas ***t*** y ***s***) se reduce a sustituir estos resultados en la fórmula para calcular el ángulo entre dos rectas, $\tan(\theta) = \dfrac{m_f - m_i}{1 + m_i m_f}$, de este modo

$$\tan\alpha = \frac{m_t - m_h}{1 + m_h m_t} = \frac{\dfrac{2p}{y_1} - 0}{1 + 0\left(\dfrac{2p}{y_1}\right)} = \frac{2p}{y_1}$$

$$\tan\beta = \frac{m_s - m_t}{1 + m_t m_s} = \frac{\dfrac{y_1}{x_1 - p} - \dfrac{2p}{y_1}}{1 + \left(\dfrac{2p}{y_1}\right)\left(\dfrac{y_1}{x_1 - p}\right)} = \frac{y_1^2 - 2px_1 + 2p^2}{x_1 y_1 - p y_1 + 2p y_1}$$

pero como $y_1^2 = 4px_1$

$$\begin{aligned}\tan\beta &= \frac{4px_1 - 2px_1 + 2p^2}{x_1 y_1 - p y_1 + 2p y_1} \\ &= \frac{2px_1 + 2p^2}{x_1 y_1 + p y_1} \\ &= \frac{2p(x_1 + p)}{y_1(x_1 + p)} \\ &= \frac{2p}{y_1}\end{aligned}$$

Luego,

$$\tan\alpha = \tan\beta$$

Y dado que todos los ángulos son agudos, se tiene que

$$\alpha = \beta.$$

Por lo tanto, y en virtud del análisis aquí desarrollado, si un rayo de luz (o de cualquier otro tipo de onda) parte del foco F y es reflejado en un punto de la parábola, entonces dicho rayo se alejará de ella en forma paralela a su eje de simetría y recíprocamente, si un rayo que viaja paralelo al eje de la parábola se refleja en un punto de ella, entonces el rayo reflejado incidirá en el foco (*Figura* 9).

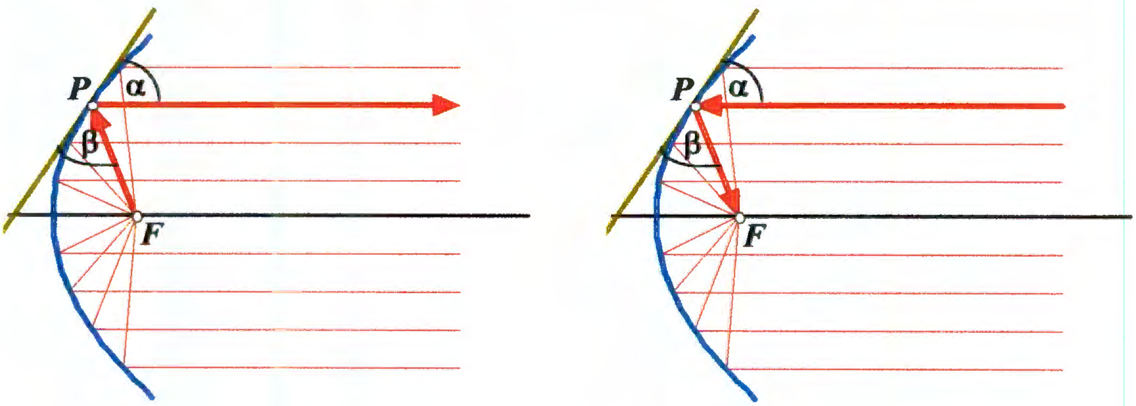


Figura 9

5.1) La *Figura* 10 presenta una situación similar a la descrita en este capítulo e ilustrada en la *Figura* 8, pero a diferencia de esta última, se está considerando a la recta n, la cual tiene la propiedad de ser perpendicular a la recta tangente t en el punto de tangencia $P = (x_1, y_1)$, denominada recta ***normal*** a la parábola en el punto P.

Demuestra que el ángulo ϕ, determinado por las rectas n y h, y el ángulo ϕ', determinado por las rectas s y n, son iguales, es decir, demuestra que la recta normal, n, determina ángulos respectivamente iguales con las rectas h y s. (*Sugerencia*: *Toma como guía el estudio de la Figura 8 presentado en este capítulo*)

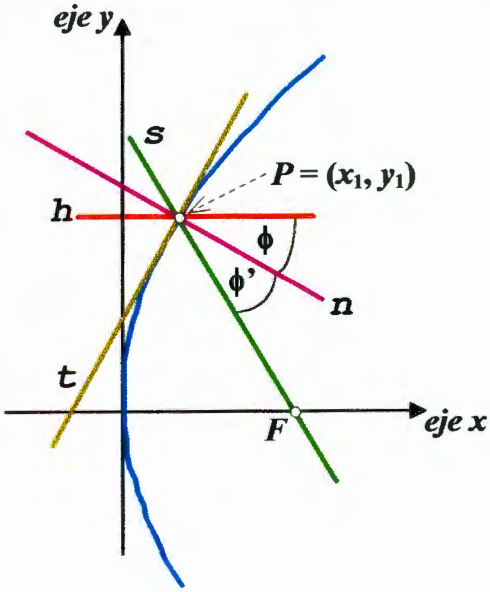


Figura 10

5.2) En este capítulo se estudió la propiedad de reflexión de la parábola, y para tal efecto se recurrió a la forma $y^2 = 4px$. Siguiendo un razonamiento análogo, desarrolla un estudio similar para la forma $x^2 = 4py$. Realiza un reporte escrito que incluya una descripción de las coincidencias y las diferencias entre ambos estudios, dando una posible explicación de por qué se presentan tales coincidencias y/o diferencias.

La Elipse y la Segunda Ley de Kepler Como Antecedentes del Cálculo

Temas relacionados: La Circunferencia
La Elipse

Introducción

Hasta ahora se han desarrollado temas o conceptos buscando mostrar, entre otras cosas, la estrecha relación que guardan entre sí diversas ideas matemáticas, la unidad que existe entre el álgebra y la geometría, el vínculo entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento.

Uno de los objetivos principales ha sido tratar algunos aspectos interesantes, relativos a los primeros temas del curso tradicional de geometría analítica de Bachillerato, de tal manera que muestren a las matemáticas como una disciplina viva y no como una teoría agotada. Persiguiendo esto, en distintos momentos el lector fue invitado a seguir un camino distinto al que aquí se presenta, a reflexionar, a conjeturar, a construir su propia vereda.

En cuanto a esta forma de proceder, uno de los propósitos es que el desarrollo de los temas proporcione los elementos suficientes para ser utilizados como un instrumento didáctico que posibilite a los alumnos el aplicar, de manera integrada, los conocimientos matemáticos adquiridos en sus cursos previos.

Y es precisamente aquí en donde queda abierta la invitación para seguir desarrollando, en esta misma línea, los otros dos temas tradicionales del curso de geometría analítica, *la elipse* y *la hipérbola*; estamos convencidos de que un factor imprescindible, en estos y otros temas posteriores, es el exhibir de manera específica aquella frase que quizás ya se pueda clasificar como clásica en el Bachillerato "la Geometría Analítica es un antecedente del Cálculo".

Vislumbramos, por el momento, dos vetas que se pueden explotar para motivar el estudio de esos temas: 1) para *la elipse*, el argumento matemático desarrollado por Kepler al establecer su segunda ley sobre el movimiento de los planetas, 2) para *la hipérbola*, el estudio de las funciones hiperbólicas.

A continuación presentamos lo que podría ser considerado como los hilos conductores en el desarrollo del tema *la elipse*. Cabe comentar que este análisis lo presentamos en el XXXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática

Mexicana, en la sesión especial "Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza", en el mes de octubre del 2002.

Algo de historia

El estudio de los movimientos de los objetos celestes ha sido motivo de estudio y reflexión desde hace muchos siglos. De entre los problemas más importantes que se abordaron estuvo el de determinar sus trayectorias y la relación entre los planetas y el Sol.

En el siglo III a. C. el astrónomo griego Aristarco aventuró la idea, nada obvia en esos tiempos, de que la Tierra se movía alrededor del Sol. La trascendencia de esta reflexión se manifestó hasta el siglo XVI, cuando el astrónomo polaco Nicolas Copérnico (1473-1543), basándose en la teoría de Aristarco, afirmó que la Tierra y todos los planetas giraban alrededor del Sol en órbitas circulares, teniendo precisamente al Sol como centro.

Tiempo después, a través de Michael Maestlin, profesor de matemáticas de la Universidad de Tübingen, la teoría heliocéntrica del movimiento planetario de Copérnico se convertiría en la influencia que condujera a Johannes Kepler a estudiar la mecánica celeste.

Aprovechando las ideas de Copérnico y tomando como base las pacientes observaciones astronómicas del danés Tycho Brahe (1546-1601), el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), después de muchos años de estudio y trabajo, descubre y establece que los planetas no se mueven formando círculos, sino describiendo elipses.

Este descubrimiento produjo un profundo cambio en la perspectiva científica acerca de la naturaleza de los cielos. El movimiento circular, soberano y perfecto, establecido desde los tiempos antiguos hasta los días de Copérnico y Tycho Brahe, era reemplazado por el de la elipse.

Este cambio en la concepción de la forma de las órbitas planetarias es el contexto en el cual se desarrolla nuestro estudio, estudio que iniciaremos —en cierto sentido parafraseando a la historia— "transformando una circunferencia en una elipse" vía una definición alternativa de esta última.

Una afirmación peculiar

En la escuela primaria no es raro escuchar a los niños describir alguna forma elíptica como un círculo aplastado o comprimido de algún modo. Esta idea intuitiva se analizará a continuación, no sin antes advertir que esta actividad nos alejará del contexto de la geometría euclidiana.

Afirmación. Una ***elipse*** es una circunferencia "contraída".

Desde luego que habrá que traducir esta afirmación informal a términos matemáticos y explicar lo que queremos decir.

Consideremos una circunferencia con radio a y centro en el origen. De cada punto $P' = (x, y')$ de esta circunferencia tracemos la perpendicular al *eje* x, tal como se ilustra en la siguiente figura:

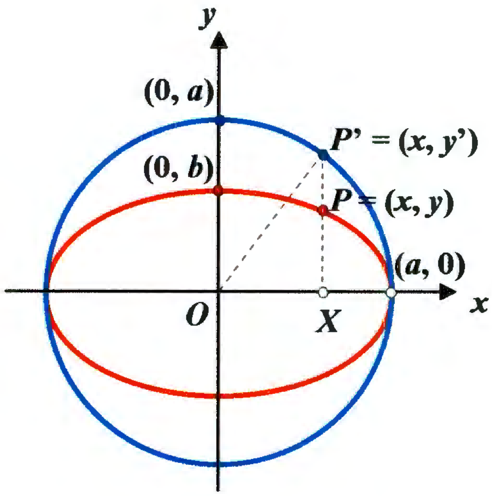


Figura 1

Supongamos ahora que las ordenadas y', de todos los puntos P' de la circunferencia, se "acortan" o "aplastan" mediante la multiplicación por un número k, llamado *coeficiente de "contracción"*, tal que $0 < k < 1$.

De esta manera, cada punto $P' = (x, y')$ será sustituido por otro punto $P = (x, y)$, de la misma abscisa que el primero pero con diferente ordenada, $y = k\,y'$.

Afirmamos que con este proceso la circunferencia se transforma en elipse. Y con la intención de deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ así determinados, observemos los siguientes tres hechos:

- De acuerdo con el proceso antes descrito, la ordenada de cualquier punto $P = (x, y)$ viene dada por

$$y = k\,y' \tag{1}$$

- Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $OP'X$ de la figura anterior, se tiene que

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2} \tag{2}$$

Por supuesto, si el punto P y su correspondiente P' están en la mitad superior o inferior del plano, respectivamente, se tendrá que

$$y' = +\sqrt{a^2 - x^2} \text{ o } y' = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

- El punto de intersección de la circunferencia con la parte positiva del *eje y* es el punto $(0, a)$. Si llamamos $b = ka$, el punto correspondiente en el lugar geométrico es $(0, b)$ y tendríamos que

$$k = \frac{b}{a} \tag{3}$$

Sustituyendo la igualdad 2 (incluyendo el doble signo) en la 1 tenemos

$$y = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}$$

Y utilizando la igualdad 3 llegamos a

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Luego

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

Finalmente, para cualquier punto $P = (x, y)$ se cumple la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación canónica de la elipse, demostrando así nuestra afirmación.

La segunda ley de Kepler

Astronomía Nova es la obra en la que Kepler, en 1609, como producto de sus grandes y cuidadosos esfuerzos por calcular la órbita de Marte, da a conocer sus resultados referentes al movimiento planetario. Dos de las leyes formuladas por este científico, se encuentran en esa obra y establecen lo siguiente.

Primera Ley: La órbita de todo planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos.

Segunda Ley: El radio vector que enlaza un planeta con el Sol, recorre áreas iguales en tiempos iguales.

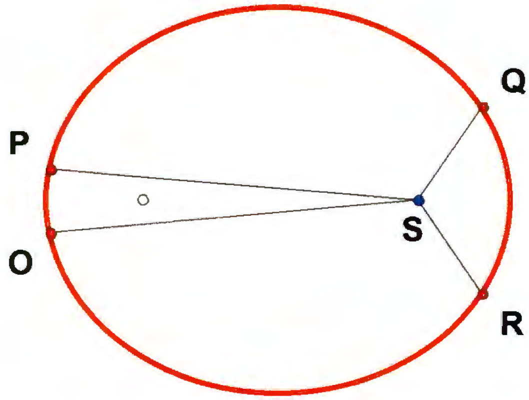


Figura 2

La primera ley nos fija el lugar de trabajo; la curva que hay que estudiar es una elipse. La segunda, que es la que estudiaremos mas de cerca, enuncia una característica del movimiento de los planetas que no es fácil intuir: Si S representa la posición del Sol (*Figura* 2) y si el planeta tarda un tiempo t en recorrer el arco OP y el mismo tiempo t en recorrer RQ, entonces el área del sector elíptico OPS es la misma que la del sector RQS.

Ahora, con la intención de analizar cómo es que Kepler llega a concluir este segundo hecho, que constituye un hito en la historia de la humanidad, seguiremos la línea de los argumentos matemáticos que este científico usó para establecer su segunda ley.

Para iniciar, al estudiar la órbita de Marte, Kepler logró determinar, por observación directa y de manera acertada, que si un planeta estaba en cualquiera de sus áspides (puntos de la órbita más cercano y más lejano al Sol), su velocidad v era inversamente proporcional a su distancia r al Sol.

Es decir, si v_1 es la velocidad en el punto P_1 (que es el afelio o punto de la órbita más cercano al Sol) y v_2 es la velocidad en P_2 (el perihelio o punto más lejano de la órbita) entonces existe una constante k tal que:

$$v_1 = \frac{k}{r_1} \text{ y } v_2 = \frac{k}{r_2}$$

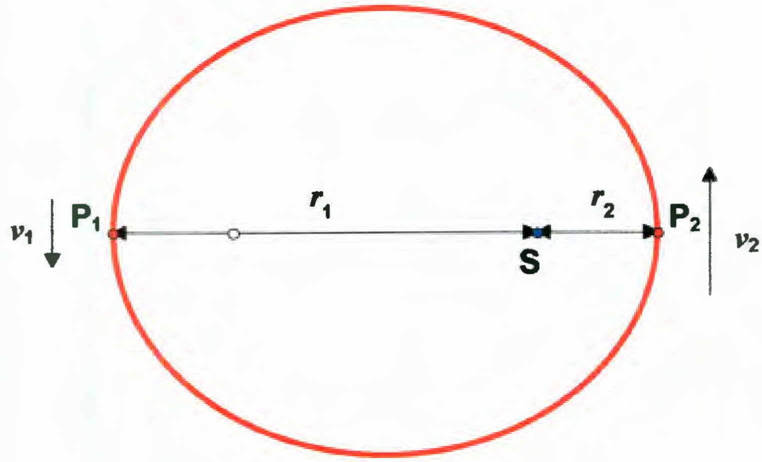


Figura 3

Con este par de observaciones, Kepler generaliza el resultado y establece que en todo punto P de la órbita, si v es la velocidad del planeta y r su distancia al Sol, entonces:

$$v = \frac{k}{r}$$

Esta suposición constituye un error (el primero) en el proceso de la argumentación de la segunda ley. Lo que en realidad se verifica es que:

La velocidad del planeta en P_1 (*Figura* 4) es inversamente proporcional a la distancia d_1 (perpendicular) desde el Sol (S) a la recta tangente a la elipse en P_1.

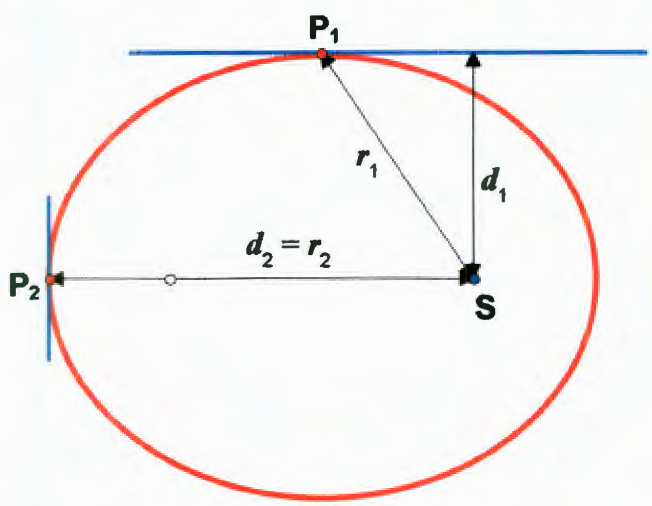


Figura 4

Como podemos darnos cuenta, sólo en los ápsides esta distancia coincide con la distancia r del planeta al Sol, ya que ahí la recta tangente y el radio vector son perpendiculares entre sí. Quizá el razonamiento seguido por Kepler fue: Si la relación se verifica en el punto más cercano y en el más lejano, podemos suponer que se verifica en cualquier punto de la órbita —razonamiento que, hemos de admitir, no es tan descabellado—.

De cualquier modo, la argumentación de la ley continúa:

Para calcular el tiempo t requerido por un planeta para recorrer el arco PQ de su órbita, Kepler divide el arco en un número n de subarcos de igual longitud Δs (*Figura* 5).

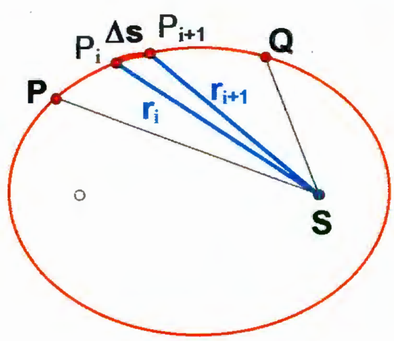


Figura 5

De este modo, si r_i es la distancia SP_i desde el Sol hasta el punto inicial P_i del i-ésimo subarco P_iP_{i+1}, v_i la velocidad del planeta en P_i (velocidad que, dada la "gran cercanía" entre los puntos P_i y P_{i+1}, puede considerase constante durante el recorrido que el planeta realiza entre ellos) y t_i el tiempo requerido por el planeta para recorrer este subarco, se obtiene que:

$$t = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Pero por la fórmula elemental de la velocidad, $velocidad = \dfrac{distancia}{tiempo}$, se tiene que

$$v_i = \frac{\Delta s}{t_i} \text{ o, de manera equivalente, } t_i = \frac{\Delta s}{v_i}$$

Y cuando Kepler emplea la relación (no válida)

$$v = \frac{k}{r}, \text{ que para este caso queda como } v_i = \frac{k}{r_i},$$

obtiene que:

$$t=\sum_{i=1}^{n}t_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta s}{v_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta s}{k/r_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i\Delta s}{k}$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}r_i\Delta s \qquad (4)$$

Por otro lado, Kepler consideraba el área de la sección i-ésima P_iSP_{i+1} como el área de un triángulo con base r_i y altura Δs, y como justificación de esta forma de proceder nos dice:

> *Ya que me he percatado que existe un número infinito de puntos en la órbita y por consiguiente un número infinito de distancias (desde el Sol) se me ocurre que la suma de estas distancias está contenida en el área de la órbita. Porque recuerdo que de la misma manera Arquímedes también dividió el círculo en un número infinito de triángulos.*

Aquí, consideramos conveniente hacer un paréntesis, para bosquejar brevemente la idea a la que Kepler hace referencia: Arquímedes, para deducir el área de un circulo de radio r, considera sectores circulares (a los que Kepler llama triángulos) como el *CAB* de la *Figura* 6.

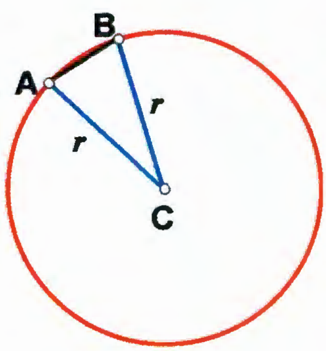


Figura 6

Donde, obviamente, la suma de las áreas de estos sectores nos dará el área del circulo. Pero el área de este sector es muy parecida al área de un triángulo con lados $AC=BC=r$ y AB. Más aún, entre "más delgado" sea el sector, esta área puede aproximarse por $\frac{r\cdot AB}{2}$, que es el área de un triángulo de base r y altura AB.

Luego, si utilizamos el hecho de que el perímetro del circulo es la suma de las longitudes AB de cada uno de los sectores, y si escribimos esta suma como $\sum AB$, tenemos que

$$\text{área del círculo} = \sum \frac{r \cdot AB}{2} = \frac{r}{2}\sum AB = \frac{r}{2}(2\pi r) = \pi r^2$$

donde se ha utilizado el hecho de que el perímetro del círculo es $2\pi r$.

Sin embargo, regresando ahora al argumento original que estamos analizando, al adoptar este razonamiento para el caso de la elipse, Kepler comete otro error (el segundo) en la justificación de su ley. De esto, y de la forma correcta de calcular esta área, nos ocuparemos un poco mas adelante, por lo pronto concluiremos con las ideas originales.

Tenemos, pues, que siguiendo a Arquímedes, Kepler argumenta que el área del sector SPQ, en la órbita del planeta, puede calcularse como la suma de las áreas de las rebanadas P_iSP_{i+1} —que como ya se dijo, pueden aproximarse por $\frac{r_i \cdot \Delta s}{2}$ (que son las áreas de triángulos con base r_i y altura Δs)—. Y, de este modo,

$$\text{área del sector } SPQ = \sum_{i=1}^{n} \text{ área del sector } P_iSP_{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i \Delta s}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i \Delta s$$

Y como de la expresión (4) se tiene que

$$t = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} r_i\,\Delta s \quad \text{o, equivalentemente,} \quad kt = \sum_{i=1}^{n} r_i\,\Delta s$$

de donde, sustituyendo, se llega a que

$$\boxed{\text{área del sector } SPQ = \frac{1}{2}kt}$$

Es decir, el área recorrida depende sólo del tiempo empleado (salvo por la constante $\frac{1}{2}k$).

De esta manera Kepler concluyó que a tiempos iguales corresponden áreas iguales y argumenta su segunda ley.

El segundo error ante el Cálculo

Ahora, con la intención de estudiar el segundo error de Kepler, observemos que bajo la idea de aproximar con áreas de triángulos, las áreas de los segmentos elípticos P_iSP_{i+1}, es posible determinar —de manera equivocada— cualquier área; para ello basta generalizar (erróneamente) el razonamiento seguido por Kepler, de la siguiente manera:

Consideremos una función continua $r=f(\theta)$ descrita en coordenadas polares, llamemos S al polo y observemos el área entre las rectas $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ y por la curva $r=f(\theta)$.

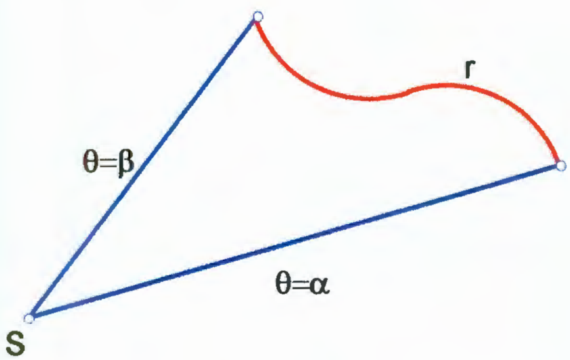


Figura 7

Ahora, siguiendo las ideas de Kepler, para calcular esta área podríamos dividir el trozo de curva $r=f(\theta)$ en n pedazos de longitud Δs (la distancia sobre la curva de P_i a P_{i+1}) y a cada rebanada P_iSP_{i+1}, aproximarla por el área de un triángulo con base r_i (la distancia de S a P_i) y altura Δs.

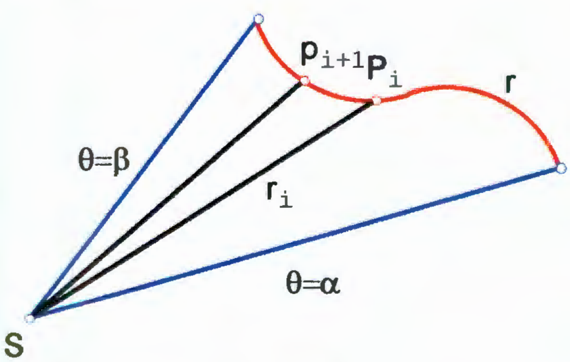


Figura 8

Al tomar la cantidad Δs cada vez más cercana a cero $(\Delta s \to 0)$ la aproximación propuesta es cada vez más exacta, de donde, si llamamos A al área buscada, tenemos que:

$$A = \lim_{\Delta s \to 0} \sum \frac{r_i \cdot \Delta s}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta s \to 0} \sum r_i \cdot \Delta s$$

Utilizando la definición de integral, esto se traduce en:

$$A = \frac{1}{2} \int r ds$$

El símbolo ds significa la diferencial de s, que es la longitud de arco, según lo hemos establecido.

Pero se sabe que la fórmula correcta es:

$$A = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$$

La diferencia fundamental de esta fórmula con la anterior es el hecho de que la aproximación no se basa en las longitudes Δs, sino en los pequeños ángulos $\Delta\theta$ formados en S por P_i y P_{i+1}.

Comparando ambas fórmulas, resulta entonces crucial investigar cuando se tiene la igualdad.

$$ds = r d\theta.$$

Pero como s representa la longitud de arco, se tiene una fórmula para calcularla en términos del ángulo θ, esto es:

$$s = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Así, al calcular la derivada de s respecto a θ obtenemos que

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

de donde

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \tag{5}$$

Ahora, si suponemos que $ds = r d\theta$, esta última igualdad se transforma en

$$\frac{ds}{d\theta} = r \text{ y, por lo tanto, } \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2$$

Y si sustituimos este resultado en la expresión (5), llegamos a que

$$(r)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

Es decir, para que las expresiones sean equivalentes, debe tenerse que

$$\boxed{\frac{dr}{d\theta} = 0 \text{, es decir, } r = f(\theta) \text{ debe ser constante}}$$

Resumiendo, suponer que $ds = rd\theta$, implica que la curva $r = f(\theta)$ debe de ser constante, esto es, una circunferencia. Y como todos los pasos son reversibles, también podemos decir que $r = f(\theta)$ es una circunferencia si y sólo si $ds = rd\theta$ el diferencial de arco es igual a r por el diferencial de ángulo.

Así es como, recurriendo al Cálculo, desarrollado después de la época de Kepler, hemos explicado porqué la aproximación al área dada por Arquímedes, en términos del perímetro (es decir, de la longitud de arco) resulta acertada en el círculo y de paso nos dice que para cualquier otra curva, la misma idea no funciona.

LITERATURA CITADA

Academia de matemáticas de la UAQ. 1999. "Propuesta para la conformación del nuevo plan de estudios de la Escuela de Bachilleres". UAQ. México.

A. D. Aleksandrov; *et. al.* 1985. "La matemática: su contenido, métodos y significado". Editorial Alianza. España.

Coll, C. 1994. "Un marco psicológico para el currículum escolar". En: Análisis curricular. Antología básica. 1994. U.P.N., México. Págs. 121 y 122.

D'Amore, B. 1997. "Pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas". Editorial Síntesis. España.

Díaz-Barriga, F. 1998. "Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista". McGraw-Hill. México.

Dieudonné, J. 1964. "Álgebra lineal y geometría elemental". En: **Jossette, A.** 1981. "La reforma de las «matemáticas modernas»". UNAM. México. (Traducción de: "La réforme des mathématiques modernes". l'Association Francophone D'Education Comparée. 26-27.). Pág. 30.

Dubrovski, S. *et. al.* 1987. "El mundo relativista". Colección Física al alcance de todos. Editorial Mir. Moscú.

García, D. "La didáctica de las matemáticas: una visión general". Red telemática educativa europea. (http://nti.educa.rcanaria.es./rtee/rtee.htm)

Gay, L. R. 1996. "Educational Research. Competencies for Analysis and Applications". En: **Hernández, D.** 1998. "Una Propuesta para la enseñanza de la geometría fractal en el bachillerato". Tesis presentada para aspirar al grado de Maestría en Docencia de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Querétaro. Pág. 28.

Gascón, J. 2001. "Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes". Relime, 4(2):129. Thomson Learning. México.

Kilpatrick, J. 1987. "Qué podría ser el constructivismo en matemáticas". En: Ontiveros S. (comp.) Antología. Aspectos epistemológicos de la educación matemática. UAQ. México. (Traducido de: "What constructivism might be in mathematics education". En: Bergeron, J.; Herscovics, N. y Kieran, C. (ed.). Proceedings of the 11th International Conference in PME. Canadá.

López, S. 1970. "Principios y métodos de la enseñanza de las matemáticas". Revista matemática, Segunda serie, 8:43. Sociedad Matemática Mexicana. México.

Leroy. F. 25 de abril de 1933. En: **Jossette, A.** 1981. "La reforma de las «matemáticas modernas»". UNAM. México. (Traducción de: "La réforme des mathématiques modernes". l'Association Francophone D'Education Comparée. 26-27.). Pág. 30.

Palacios, J.; Siguán, M. (Coord.); *et. al.* 1987. "Actualidad de Lev S. Vigotski". Anthropos. España.

Piaget, J. 1980. "Epistemología de la matemática". En: **Sinclair, H.** 1987. "Sobre el constructivismo". En: Ontiveros S. (comp.) Antología. Aspectos epistemológicos de la educación matemática. UAQ. México. (Traducido de: "About constructivism". En: Bergeron, J.; Herscovics, N. y Kieran, C. (ed.). Proceedings of the 11th International Conference in PME. Canadá. Pág. 2.

Pinto, J. y Martínez, J. 1994. "La teoría de Jean Piaget y el aprendizaje de las ciencias". UNAM. México. (Colección "Cuadernos del CESU"/30.)

Polya, G. 1966. "Matemáticas y razonamiento plausible". Editorial Tecnos. España.

R. Thom. 1973. "Modern Mathematics: does it exist?". En: **García, D.** "La didáctica de las matemáticas: una visión general". Red telemática educativa europea. (http://nti.educa.rcanaria.es./rtee/rtee.htm)

Revuz, A. 1963. "Matemática moderna, matemática viviente". En: **Jossette, A.** 1981. "La reforma de las «matemáticas modernas»". UNAM. México. (Traducción de: "La réforme des mathématiques modernes". l'Association Francophone D'Education Comparée. 26-27.). Pág. 31.

Valencia, M. 1990. "¿Aprovechamos nuestros cursos de geometría analítica?". Educación matemática, 2(2):14. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Verganud, J. 1987. "Qué podría ser el constructivismo en matemáticas". En: Ontiveros S. (comp.) Antología. Aspectos epistemológicos de la educación matemática. UAQ. México. (Traducido de: "What Constructivism might be in mathematics education". En: Bergeron, J.; Herscovics, N. y Kieran, C. (ed.). Proceedings of the 11th International Conference in PME. Canadá.

Vygotski, L. 1988. "El desarrollo de los procesos psicológicos superiores". En: **Hernández, H.** 1998. "La dificultad que presentan los alumnos del segundo grado de secundaria, para desarrollar las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento, en el campo de las matemáticas". Tesis presentada para aspirar al grado de Maestro en Ciencias de la Educación. Instituto Superior de Estudios de Posgrado del Estado de Guanajuato. México. Pág. 22.