Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Psicología

LA INFLUENCIA DE LAS NOTACIONES EN LA SOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS ADITIVOS

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Desarrollo y Aprendizajes Escolares

Presenta
Cristel María Elena Pérez Mejía

Santiago de Querétaro, Qro; noviembre del 2010

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Maestría en Desarrollo y Aprendizajes Escolares

LA INFLUENCIA DE LAS NOTACIONES EN LA SOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS ADITIVOS

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Desarrollo y Aprendizajes Escolares

Presenta:
Cristel María Elena Pérez Mejía

Dirigido por:
Dra. Mónica Alvarado Castellanos

SINODALES

Dra. Mónica Alvarado Castellanos
Presidente
Firma

Dra. Andrea López Pineda
Secretario
Firma

Mtra. Gabriela Calderón Guerrero
Vocal
Firma

Mtro. Francisco Rivera Ramírez
Suplente
Firma

Dra. Marcela Ávila Eggleton
Suplente
Firma

Mtro. Jaime E. Rivas Medina
Director de la Facultad

Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Santiago de Querétaro, Qro.
Noviembre del 2010
México

RESUMEN

Esta investigación analizó la influencia de las notaciones en la resolución de algunos problemas aditivos de categoría II y IV según la clasificación propuesta por Vergnaud (1991). Para esto se analizó: cuál medio notacional proveía mayor soporte cognitivo y si dicha notación era la misma considerando el tipo de problema y la experiencia escolar; cómo representaban los niños la incógnita, los estados y transformaciones y la forma en la que operaron aritméticamente; cómo afectó el uso del espacio gráfico la resolución de los problemas y, a qué soluciones y procedimientos recurrieron los niños cuando sus respuestas no fueron las convencionales. En esta investigación se entrevistaron a 30 alumnos inscritos en los tres primeros grados de educación primaria, los cuales debían resolver seis problemas aditivos. Para este fin se proporcionaron dos mediadores: hojas en blanco que invitaban a realizar notaciones espontáneas y tablas de datos que constreñían el uso de notaciones a un formato predeterminado. Se encontró que las tablas de datos son un medio notacional más eficiente, sobretodo cuando se cursa primer grado, además de que su utilidad es mayor cuando se resuelven problemas de categoría IV. Se manifestaron diversos tipos de representaciones para dar cuenta de los estados y transformaciones e incógnita; sin embargo no se identificó una forma de representación más útil que otra. Aquellos niños que recuperaron los estados y transformaciones explícitos, la posición de la incógnita y los momentos del problema, son aquellos que tuvieron mayor éxito al momento de resolver los problemas. Fueron más útiles aquellas notaciones que a través de su organización gráfica marcaron claramente los momentos del problema, la ubicación de la incógnita y los estados y transformaciones explícitos, mientras que cuando no se realizaron notaciones o se recurrió a notaciones aisladas el apoyo cognitivo provisto fue casi nulo. Los niños errores de los niños no fueron azarosos, sino que evidenciaron un pensamiento inteligente; el análisis de sus procedimientos permitió comprender el razonamiento subyacente a sus respuestas.

Palabras clave: representación externa, notación, problemas aditivos.

SUMMARY

This research examined the influence of the notations in the resolution of some additive problems of category II and IV according to Vergnaud's classification (1991). It were analyzed: which notational resource provided a bigger cognitive support and if this notation was the same considering the type of problem and the scholar experience; how did children's represent the unknown, the states and the transformation, and the way in what they worked arithmetically; how did the graphic space affect the children's resolution and procedures and, what solutions and procedures did the children use when their answers were not conventional. this research included interviews with 30 students enrolled in the first three grades of elementary education whose should solve six additive problems. For this purpose were provided two mediators: white sheets that invited them to make spontaneous notations and data tables which constrained the use of notations to a predetermined format. It was found that the data tables are the most efficient notational resource, especially when it is attended first grade; in addition, it is more useful when solving problems of category IV. There were different types of representations to account the states, transformations and unknown; however it was not identified another way of representation more useful. Those children who recovered the explicit states and transformations, the unknown position and the moments of the problem, where those whose had a bigger success at the moment of solving the problems. It was more useful those notations that, thru their graphic organization showed up clearly the problem's moments, the unknown position and the explicit states and transformations, whereas, when there was not made any notations, or it were used isolated notations, the cognitive aid was almost null. Children's mistakes were not randomized, but evidenced an intelligent thought; the analysis of their procedures allowed understanding the reasoning behind their answers.

Key words: external representation, notation, additive problems.

AGRADECIMIENTOS

Un profundo agradecimiento a los niños de la escuela “Emeteria Valencia” que participaron en esta investigación. Gracias por permitirme aprender con ustedes.

Un agradecimiento especial al personal directivo que me dio todas las facilidades para realizar las entrevistas, a los docentes que me han abierto sus aulas y han tenido el tiempo y la disposición para trabajar en equipo. He aprendido mucho de ustedes.

Un amplio reconocimiento a la Secretaría de Educación de Guanajuato y al SNTE sección 45 por el apoyo dado para la realización de esta tesis. La educación es el camino.

Mi más grande gratitud a los profesores y compañeras que con sus conocimientos, ideas y opiniones me enriquecieron durante estos años. Hay amistades que duran por siempre.

Gracias a mi familia, a Sol, Vero y Lauri, pero sobre todo, agradezco a mis padres a los que quiero más que a nadie. Son mi más grande ejemplo.

Gracias, Dios, por darme tantas bendiciones.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se desprende de la investigación de Alvarado y Brizuela (2010) que, a su vez, guarda relación con la llevada a cabo por Vergnaud y Durand (1976). En éste último se analizó el grado de complejidad de diferentes problemas aditivos así como las edades aproximadas en las que la media poblacional lograba resolverlos. Por su parte, el trabajo de Alvarado y Brizuela (2010) buscó averiguar cuál era el impacto de las representaciones externas (notaciones espontáneas, tablas de datos con y sin etiquetas[1]) en la solución de problemas aditivos de categoría II y IV, según la clasificación de Vergnaud (1991); bajo la premisa de que las representaciones externas pueden facilitar el trabajo cognitivo de los niños[2].

A diferencia del trabajo de Alvarado y Brizuela (2010), el propósito de la investigación que aquí se presenta fue analizar cómo dos diferentes tipos de notaciones, tablas de datos y notaciones espontáneas, afectan las soluciones que dan los niños de primero, segundo y tercer año de primaria a problemas aditivos categoría II y IV según la clasificación propuesta por Vergnaud (1991).

El presente estudio analiza las diferencias de resolución que pueden surgir cuando como mediador se usan notaciones espontáneas u otras herramientas notacionales con un mayor grado de convencionalidad (tablas de datos). Mientras que en las primeras los niños tiene libertad para emplear los recursos notacionales de los que disponen, en la segunda condición el contexto notacional se circunscribe a restricciones gráficas importantes: tendrán que emplear una tabla

[1] Cabe aclarar que las tablas sin etiqueta estaban en blanco: los niños recibían una hoja en la que previamente se había trazado una tabla de doble entrada de dos columnas por 4 renglones. Las tablas con etiquetas, además de presentar el formato anterior, presentaban en una de las columnas, de manera escrita, las siguientes palabras o etiquetas: “Inicio”, “Primera ronda”, “Segunda ronda” y “Final”.

[2] Para mayor información sobre los problemas de categoría II y IV utilizados en esta investigación, consultar las páginas 53 y 54 de este trabajo.

de datos (aunque no necesariamente les resulte un formato familiar ni puedan hacer un uso convencional de la misma), lidiando con la organización que impone el formato gráfico y las etiquetas pre establecidas.

Si bien la segunda condición a analizar pudiera resultar más demandante que la elaboración de notaciones espontáneas, es de nuestro interés saber si el empleo de formatos sociales -como lo es la tabla de datos-, facilita la tarea aditiva a la que se somete a los niños, en tanto que incluye una lógica de análisis particular de los problemas planteados. En este sentido, esta investigación pretende averiguar cómo los niños hacen uso de estas herramientas representacionales y cuál de ellas provee mayor soporte cognitivo.

Hasta hace algunos años, el estudio de las representaciones externas había estado sometido al de las representaciones internas, a las cuales se les concedía toda la importancia; se veía a las externas como representaciones de escaso valor en tanto que se les consideraba una manifestación o reflejo de las representaciones internas.

A lo largo de las últimas décadas, los resultados de las investigaciones realizadas sobre las representaciones fueron evidenciando que las representaciones externas no estaban sometidas a las internas (Zhang, 1997; Eskritt & Lee, 2007; Martí y Pozo, 2000) pues aunque se interrelacionaban ampliamente, las últimas, por su carácter externo permitían no sólo dar cuenta de los procesos mentales internos, sino que al fungir como mediadores, modificaban la cognición humana.

De esta manera, cada vez más investigaciones se sumaron al interés por entender cómo las representaciones externas podían dar cuenta de los procesos mentales internos. Como lo señala Zhang, (1997) entender la naturaleza de las representaciones externas posibilitaría entender tanto los códigos con los que opera la cognición humana, como los mecanismos desarrollados para hacer las operaciones posibles. El resultado de las investigaciones realizadas fue una serie de modelos explicativos que iban desde dar cuenta a cerca de cómo se solucionaban problemas más o menos prácticos, hasta cómo se daba el aprendizaje de sistemas lógicos muy complejos, entre los que se encuentran los sistemas notacionales.

Por su parte, desde la psicología cognitiva, autores como Harris, 1999; Olson, 1999; Pérez Echeverría &Scheuer, 2007; Zhang, 1997; han enfatizado que el uso de representaciones externas provee de nuevas formas de percibir el entorno y recuperar información a través una reorganización del pensamiento, además de que posibilitan una mejor comprensión de los procesos mentales humanos.

En la actualidad, debido al reconocimiento sobre la influencia de las representaciones externas en los procesos mentales humanos más complejos, y bajo la comprensión de que la resolución de problemas matemáticos es la vía idónea para construir conceptos matemáticos, distintos trabajos han centrado su atención en cómo las representaciones externas inciden sobre la resolución de problemas (Alvarado y Brizuela, 2010; Brizuela & Lara-Roth, 2002; Elia et al., 2007; Martí, 2007; Reed, 2001).

Tanto el estudio de las representaciones externas como el de la resolución de problemas son bastos; hasta el momento, los estudios que se han llevado a cabo se centran principalmente en la resolución de problemas aditivos y en las representaciones externas denominadas notaciones. En esta investigación, se aborda la resolución de problemas aditivos de categoría II, por ser ampliamente utilizados dentro de la educación primaria y, de categoría IV, por ser de gran complejidad y no obstante estar presentes constantemente dentro de la vida cotidiana. Además, se analiza cómo dos tipos de notaciones (notaciones guiadas por tabla de datos y notaciones espontáneas) influyen en la solución efectuada de los problemas.

Los problemas aditivos forman parte importante de la escolaridad básica de nuestro país de tal manera que ya desde el Programa de Educación Preescolar 2004 (SEP), en su campo formativo "Pensamiento matemático", se señala que uno de los propósitos principales de este nivel educativo es desarrollar el pensamiento matemático infantil a través de la resolución de problemas. Para esto se propone: *plantear y resolver problemas en situaciones que le son similares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos*. Así mismo, este mismo programa propone para la solución de estos problemas el uso de materiales –manipulación de objetos- y la aceptación de formas espontáneas y personales de representación.

A diferencia de los contextos de apoyo propuestos en preescolar, al ingresar a la educación primaria los niños se enfrentan formalmente a la resolución de problemas aditivos a través de situaciones problemáticas donde las representaciones numéricas se encuentren presentes, pasando con ello de las representaciones personales a las convencionales.

En los libros de distribución gratuita de la SEP, los problemas aditivos más empleados son aquellos de cambio. En las situaciones de cambio, es más frecuente que la posición de la incógnita recaiga en el estado final, que en la transformación o estado inicial (SEP, 1994). La complejidad de algunos problemas aditivos, así como una menor exposición a los problemas donde la incógnita no recae en el estado final, puede explicar en buena parte las dificultades que los niños tienen para resolver cierto tipo de problemas.

Al analizar las estadísticas efectuadas por el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE) se pueden constatar las dificultades que tienen los niños de tercer grado para resolver problemas aditivos[3]. Los resultados del

[3] Las evaluaciones elaboradas por este organismo se aplican únicamente a niños de tercer grado de preescolar, tercero y sexto de primaria y tercero de secundaria, por lo cual no se tienen datos del porcentaje de logro al resolver problemas aditivos de niños de primer y segundo grado,

examen de la calidad y el logro educativo (EXCALE) 2006-2007, de niños que cursan tercer año en primarias urbanas públicas, muestran un logro aproximado del 70% al resolver problemas aditivos. A continuación se dan dos ejemplos de problemas de cambio planteados a los niños en dicha evaluación y que por su característica estructural equivalen a la categoría II de la propuesta por Vergnaud (1991); además, se muestra el porcentaje de éxito a nivel nacional y el obtenido en primarias urbanas públicas.

Resolución de problema de cambio con la incógnita en el *estado final*:

En una sala de cine había 162 personas. Al empezar la película llegaron otras 55. ¿Cuántas personas hay ahora en la sala de cine?[4]

A. 217

B. 107

C. 117

D. 712

Porcentaje de logro: Nacional, 68%. Primarias Urbanas Públicas, 69%

Resolución de problemas de cambio con la incógnita en la *transformación*:

Diana tenía $570 pesos. Con ese dinero se compró un suéter y le quedaron $290. ¿Cuánto le costó el suéter?

A. $280

B. $380

C. $760

D. $860

Porcentaje de logro: Nacional, 70%. Primarias Urbanas Públicas, 70%

---

retomándose por este motivo únicamente los resultados obtenidos por niños de tercer grado de primaria.

[4] Respuesta correcta dada en negritas.

Estos resultados muestran que la resolución de problemas aditivos dista mucho de ser simple y que niños que han cursado la primera mitad de la educación primaria, aún no consolidan del todo los problemas de cambio. Cabe señalar que los estudios de Vergnaud (1976, 1991) señalan que los problemas aditivos son complejos y la solución de algunos de ellos no se logra sino hacia el final de la escolaridad primaria. Es de nuestro interés averiguar si la realización de notaciones puede facilitar la resolución de los problemas aditivos.

Debido a los objetivos que persigue esta investigación, en el siguiente capítulo se abordan brevemente las representaciones externas y su incidencia en la cognición humana; además, se abordan las características constitutivas de los problemas aditivos de categoría II y IV. El tercer capítulo trata sobre el problema de investigación, esbozando los objetivos perseguidos con este trabajo y las variables involucradas, así como las hipótesis planteadas, todo esto a partir de las preguntas de investigación.

El diseño metodológico se plasma en el capítulo cuatro donde se da a conocer la composición de la muestra, los materiales e instrumentos que se utilizaron. En el quinto capítulo se analizaron los datos, tanto en su aspecto cuantitativo como cualitativo. De forma cuantitativa se analizó la respuesta dada a la incógnita, la manera en la que representaron: los estados y transformaciones explícitos, la incógnita y la composición de los estados y transformaciones. Además, se examinó el cálculo aritmético efectuado por los niños al resolver los problemas y el uso que hicieron del espacio gráfico. Desde el ámbito cualitativo se analizó la manera como se recuperaron la incógnita, los valores y momentos del problema.

El análisis de datos da pie al sexto capítulo en el que se discuten los hallazgos aquí encontrados y su relación con otras investigaciones, esbozando las principales conclusiones a las que se llegaron. Finalmente, se presentan los recursos bibliográficos empleados para desarrollar y sustentar esta investigación.

2. MARCO TEÓRICO

Antes de abordar el problema de investigación es indispensable dilucidar acerca de los dos temas centrales sobre los que se sustenta esta investigación, las representaciones externas y los problemas aditivos.

En el primer apartado se intentará definir a las representaciones externas (en lo sucesivo identificadas como RE), para ello se discutirá brevemente acerca de la compleja interrelación que hay entre las representaciones internas y las externas. Se señalarán las características de las representaciones externas, ahondando en los sistemas de representación externa y las notaciones como herramientas cognitivas.

El segundo apartado del Marco Teórico se enfocará en la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas y las variables didácticas que imprimen a éstos un mayor o menor grado de dificultad. Posteriormente se analizará la caracterización de los problemas aditivos propuesta por Vergnaud (1991) centrándose en las características distintivas de los de categoría II y IV.

2.1 Representaciones externas

La psicología cognitiva ha tenido como principal campo de estudio las representaciones, no obstante, éstas no son siempre comprendidas de una forma única (Pertner, 1991). Uno de los factores que han creado ambigüedad en el uso del término representación es la sencillez de su definición: “aquello que está en lugar de algo más”,[5] pues aunque de forma concisa expresa lo que es una

[5] En su acepción más amplia, se ha entendido por representación “aquello que está en lugar de algo más”, por lo cual, una representación nunca será idéntica a eso que representa, no obstante poseerá algunas propiedades y relaciones de lo representado y a su vez excluirá otras, siendo así que las relaciones entre aquello que es representado y su representación, podrán ser semejantes o arbitrarias (Ferreiro, 1997).

representación, su mismo laconismo da cabida a que se le adjudiquen propiedades o características que no posee.

Pertner (1991) define representación como “algo que mantiene una *relación de representación* con otra cosa” (p. 32). Otra definición semejante a la anterior es la que expresan Olson y Campbell (1993) quienes explican que representaciones son “artifacts, devices or other means, whether external (public) or internal (mental), for maintaining a relation (an intentional connection) with an object or event *in its absence*”.[6]

Otro aspecto que ha dificultado la comprensión de lo que son las representaciones ha sido la necesidad de la psicología por abordar fenómenos objetivos que la consoliden como una disciplina autónoma y científica. Desde esta perspectiva, corrientes teóricas de la psicología experimental como lo es el conductismo, se rehusaron a considerar fenómenos psicológicos internos -introspección, estados e imágenes mentales, ideas, representaciones, etc.- como parte de sus temas de estudio (Pertner, 1991).

El surgimiento de la teoría del procesamiento de información y su estudio de la mente reivindicó las representaciones, tornándolas el recurso idóneo para analizar el funcionamiento mental humano, por lo que durante las últimas décadas la psicología cognitiva comenzó el rescate de los procesos mentales enfocándose en las representaciones. Sin embargo, hasta hace unos años centraba su atención principalmente en las representaciones internas (RI) como vías principales para comprender y analizar la mente humana, dejando de lado las representaciones externas (RE) (Zhang, 1997).

---

[6] Artefactos, dispositivos u otro medio, tanto externos (públicos) o internos (mentales), que mantienen una relación (una conexión intencional) con un objeto o evento *en su ausencia*” (traducción propia)

Se percibía a las RE como sometidas a las RI, considerando a las primeras tanto una copia infiel, pues durante su materialización dejaban en el camino muchas de las características fundamentales de los procesos mentales internos, como una simple transcripción que nada nuevo podía proveer acerca del funcionamiento cognitivo humano, por lo que no valía la pena darles atención cuando se podía investigar de primera mano sobre los procesos mentales al dirigirse directamente a las representaciones internas (Ferreiro, 1997, 2002).

Poco a poco se fue reconociendo que las representaciones externas, aunque tienen lazos en común con las internas, no están subyugadas e éstas, dando inicio al estudio de las representaciones externas desde la psicología cognitiva. No obstante, los primeros acercamientos percibían a las representaciones externas como una serie de estímulos externos –input- que llegaban a la mente, donde internamente eran procesados, para posteriormente externalizar la respuesta o proceso mental –output- que se había llevado a cabo internamente; desde este punto de vista las RE no hacían sino llevar información a la mente sin ejercer ninguna clase de efecto cognitivo (Zhang, 1997).

Diferentes autores (Olson, 1999; Pérez & Scheuer, 2007; Zhang, 1997) se han manifestado en contra de esta postura, argumentando que las RE son más que simples vehículos de información, pues ellas influyen cualitativamente sobre la forma de pensar, comunican, recuperan y almacenan información, además de que permiten a los humanos efectuar actividades metacognitivas. Surgen así, dentro de la psicología cognitiva, propuestas en las que se reconoce la importancia de los contextos físicos, como artefactos mediadores que influyen en la cognición, y de los contextos de interacción social, donde se reconoce el valor de las interacciones humanas, sin por esto restarle importancia a los procesos mentales internos (Zhang, 1997)

En la actualidad se ha aceptado que las representaciones externas no son una copia visible de los procesos mentales internos, ni tampoco son simples estímulos externos que luchan por llegar a la mente. Al poseer tanto lazos en común con los procesos mentales, como características propias que las hacen diferentes de éstos, se muestran como medios que permiten entender la complejidad de la mente (Pérez & Scheuer, 2007; Zhang, 1997)

Cabe mencionar que la distinción que se ha hecho desde la psicología cognitiva entre representaciones mentales internas y representaciones mentales externas no se ha realizado con el fin de promover una relación de dependencia de una sobre otra, pues ambas son indispensables para la cognición humana; tampoco se pretende sugerir una dicotomía pues las dos involucran una serie de procesos mentales con características diversas pero también rasgos en común, que confluyen y se entrelazan de múltiples maneras durante los procesos cognitivos.

Así, Pérez Echeverría & Scheuer (2007) niegan que con la distinción entre RI y RE se pretenda establecer una frontera absoluta entre ambas, explicando la necesidad de hacer tal distinción para favorecer una mejor comprensión de éstas, así como de su impacto en la mente humana diferenciándolas a través de los escenarios manifiestos o privados en los que cada una se lleva a cabo y que permiten o no su percepción.

“Rather, we consider “external” and “internal” as simplified ways of referring to subtle and multifaceted processes. It seem to us that for the time being, such terms offer the advantage of clearly signalling the noteworthy difference between a) instances of representational patterns and processes that are partly displayed in overt, visible, audible, or palpable scenarios, and b) instances of representation patterns and processes that can occur exclusively within private scenarios, so their material (neurobiological) correlates can only be observed or recorded with the help of complex technologies”[7] (p. 8)

[7] “Más bien, consideramos “externo” e “interno” como formas simplificadas que hacen referencia a procesos sutiles y multifacéticos. Nos parece que, por el momento, dichos términos

De la misma forma, diversas voces se elevaron para expresar que tampoco dentro de las RE se da un sometimiento de unas respecto a otras, pues cada cual posee características propias que impactan a la cognición humana en diferente forma. A este respecto, se tiene la crítica hecha por Ferreiro (1997,2002) a aquellas perspectivas que conciben a la escritura como un código o transcripción de lo oral. Esta autora rechaza firmemente que la escritura sea un código, explicando que las unidades de análisis de lo oral no se encuentran en la escritura y, en cambio, la escritura proporciona un *soporte* para reflexionar sobre la oralidad. Por otro lado, niega que se trate de una trascripción de la oralidad, aunque tampoco concibe la escritura como una entidad gráfica radicalmente diferente a ésta, sino como un sistema que *representa* pero que a su vez genera nuevas representaciones en un proceso dialéctico.

2.1.1 Propiedades de las representaciones externas

Diferentes autores han dado su definición de lo que es una representación externa (RE) y sus características, sin llegar a la fecha a un consenso total sobre el término. Uno de los debates más importantes es aquel en el que se atiende a la perdurabilidad de las representaciones. Mientras que autores como Tolchinsky (2007) son muy enfáticos en que un rasgo distintivo de una RE lo constituye la perdurabilidad, autores como Martí y Pozo (2000) y Pérez y Scheuer (2007) aceptan como representaciones externas aquellas no perdurables en el tiempo o el espacio, como el lenguaje oral o los gestos.

Una característica esencial y en la que todos los autores están de acuerdo es en que las representaciones poseen *doble naturaleza (doubleface),* esto implica que una representación es lo que es –una fotografía, un gráfico, etc.-, pero al

---

ofrecen la ventaja de señalar claramente la notable diferencia entre a) ejemplos de patrones y procesos representacionales que son parcialmente exhibidos en escenarios evidentes, visibles, audibles o palpables, y b) ejemplos de patrones y procesos representacionales que pueden ocurrir exclusivamente dentro de un escenario privado, por lo cual sus relaciones sólo pueden ser observadas o grabadas con ayuda de tecnología compleja" (Traducción propia) mismo tiempo evoca algo más –un acontecimiento del pasado, las relaciones entre ciertos conjuntos de objetos, etc.-

Otra característica que encuentra total aceptación es aquella que señala que las RE son *intencionales (deliberateness)* en cuanto a que de forma deliberada buscan representar una realidad; es decir, una representación será producida por su creador con una intención simbólica determinada; aunque, el receptor no siempre podrá percatarse de la intención subyacente a una RE, pudiendo darle una interpretación diferente de aquella para la cual fue creada.

Es así como un objeto, marca gráfica, movimiento corporal, etc. no se constituirá como representación, si no es creado intencionalmente para simbolizar determinada realidad. En un camino podemos ver piedras que se apilan aleatoriamente sin ninguna intencionalidad comunicativa; por otro lado, una persona puede apilar piedras en una forma específica para indicar a otros o a sí mismo los peligros, la fauna que ahí habita, etc. Lo que hace la diferencia entre una pila y otra, es que una ha sido puesta ahí con una intencionalidad comunicativa y guarda una relación de representación, mientras que la otra es producto de la casualidad, de una se desprende significado y de la otra no.

Por otro lado, las RE presentan *dinamismo,* que permite al ser humano, a partir de una representación, detenerse en determinado tiempo, pero a su vez le permite moverse a través de éste. Es decir, las representaciones externas son representaciones dinámicas que trascienden las barreras del tiempo, pues a través de ellas la mente humana se ve en la posibilidad de pensar avanzando hacia el futuro, detenerse en el presente, regresar al pasado, según las construcciones y reconstrucciones cognitivas que el humano haga al tener como mediadoras a las representaciones (Olson & Campbell, 1993; Pertner, 1991).

Al respecto, Pertner (1991) ha llamado representaciones secundarias a aquellas que permiten a un sujeto separarse del aquí y el ahora gracias a la confluencia de modelos múltiples que admiten pensar sobre el pasado y el futuro e incluso abren la posibilidad de pensar sobre lo que nunca ha existido. “La <<mente>> representa lo que el caso es en realidad, lo que fue, lo que en el futuro podría deparar, etc., todo al mismo tiempo.

La mente, por tanto, debe mantener diversos modelos mentales al mismo tiempo.” (p.46) Es la actividad mental que surge gracias a la mediación de las RE la que trasciende el espacio. Más allá de la posibilidad de que algunos tipos de RE subsistan al pasar el tiempo gracias a su materialización y puedan ser consultadas en un futuro, es la trascendencia cognitiva la que es realmente relevante cuando se habla del impacto cognitivo de las RE sobre la mente humana.

Pérez Echeverría y Scheuer (2007) señalan que una característica esencial de las representaciones externas es el ser *evidentes.* Es decir, pueden percibirse visual, auditiva o táctilmente, sin que para su manifestación pública intervengan forzosamente aparatos tecnológicos sofisticados. Esta característica señala a las RE como manifestaciones que se producen dentro de una realidad accesible a los sentidos, distinguiéndolas claramente de las internas, que escapan a la percepción humana por darse en contextos mentales privados.

Al aseverar que una RE debe ser evidente se abre un amplio abanico de posibilidades perceptuales, lo que rompe con las posturas que consideraban como RE únicamente a aquellas desplegadas de forma viso-espacial, al resaltar que lo importante es que la externalización sea perceptible por los sentidos, sin necesidad de restringirla a uno de éstos.

Las RE además de caracterizarse por ser intencionales, son *socialmente construidas*. Su componente sociocultural es el que determina en gran medida las condiciones de elaboración, su funcionamiento, cuáles representaciones son más apropiadas para simbolizar determinado aspecto y una vez elaboradas, dicta qué interpretación es la más coherente, etc. Aunque esta característica pertenece a todas las RE, es especialmente trascendente en aquellas representaciones que se constituyen en sistemas.

Sin duda alguna, la característica más importante de las RE es la de incidir en los procesos cognitivos al ser *herramientas para pensar,* pues las representaciones externas modifican la cognición humana en diferentes maneras gracias a su función mediadora. Las representaciones al actuar como herramientas de mediación, tienen la capacidad de transformar –mediar- la manera en la que se percibe la realidad, viabilizando nuevos aspectos que no se habían identificado anteriormente.

Las RE gracias a la organización estructural que poseen –tanto la organización como la percepción de sus elementos constitutivos- y a la información que explicitan –atrayendo la atención hacia determinados rasgos-, concientizan al sujeto sobre situaciones que no se habían percibido antes, evidencian relaciones que no habían sido descubiertas y posibilitan una reorganización mental en el sujeto transformando su cognición.

Al hacer conscientes situaciones que antes no se habían descubierto la persona buscará nuevas alternativas, significados, relaciones, representaciones (de las representaciones) ampliando las posibilidades cognitivas que hasta hace un momento había desplegado, generándose así una reconstrucción de las representaciones mentales hasta entonces desarrolladas. Estas múltiples reconstrucciones cognitivas son las que enriquecen cada vez más la mente humana y modifican su funcionamiento posibilitando que en futuras ocasiones representaciones más complejas afronten la realidad.

Además, las representaciones externas por ser herramientas de conocimiento también se tornan vías para analizar el conocimiento, es así como se habla de representaciones de las representaciones, o en términos más apropiados, *metarrepresentaciones* (Olson, 1999; Pertner, 1991).

En este sentido, las representaciones en sí mismas, son una fuente de conocimiento (Tolchinky, 2007) pues a través de ellas se puede entender su funcionamiento, la forma en la que se organizan para imprimir significado, los saberes que posibilitan y aquellos que, por sus características, no son asequibles. Es por esto que las representaciones externas, por ser formas de conocimiento así como vías para analizar el conocimiento, deben ser atendidas por todo individuo, no sólo para formar parte de su sociedad sino como forma de conocer y conocerse (Pérez & Scheuer, 2007).

A manera de síntesis se presenta en la figura 1 las características distintivas de toda representación externa y que son ampliamente aceptadas por la comunidad psicológica.

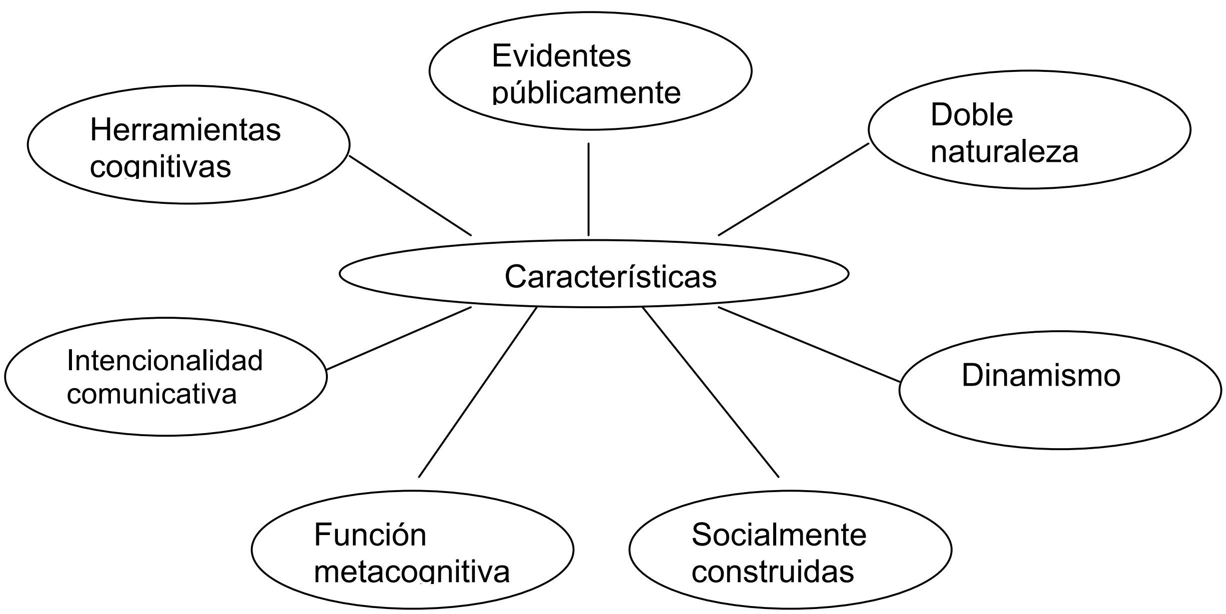


Figura 1. Características de las representaciones externas

El debate sobre el rasgo de perdurabilidad de las notaciones ha sido discutido a lo largo de los trabajo que abordan el tema sobre las RE. Desde una perspectiva como la de Tolchinsky, la perdurabilidad física posibilita que las RE se vuelvan objetos para la reflexión y tematización, no sólo de sus autores, sino también de quien las presencia.

De una manera muy similar, la definición expresada por Zhang (1997) pone énfasis en la materialización de las RE: “the knowledge and structure in the environment, as physical symbols, objects, or dimensions (e.g., written symbols, beads of abacuses, dimensions of a graph, etc.) and as external rules, constrains, or relations embedded in physical configurations (e.g., spatial relations of written digits, visual and spatial layouts of diagrams, physical constraints in abacuses, etc.)”[8](p.1)

Al respecto Martí y Pozo (2000) reconocen el peso que para la cognición tiene la perdurabilidad física de algunas representaciones externas. De hecho, consideran que las posibilidades de desplegar reflexiones metacognitivas, en buena medida se da gracias a la posibilidad de evocación, la cual se ve fuertemente favorecida cuando las representaciones quedan plasmadas. No obstante, sostienen que representaciones como el lenguaje también poseen cierto grado de perdurabilidad, no necesariamente física, lo que también les da el estatus de RE. Sin embargo, en su trabajo se enfocan principalmente en las RE que dejan marca gráfica y que por lo mismo son aquellas con un mayor grado de perdurabilidad, diferenciando dentro de éstas, aquellas más analógicas (como los dibujos y mapas), las representaciones con carácter arbitrario (escritura, números) y las representaciones analógicas de relaciones (gráficos, tablas).

Martí y Pozo (2000) explican que, al trascender el momento de su creación y volverse objetos reales, las RE pueden pensarse desde ellas mismas. De igual

[8] “el conocimiento y la estructura en el medio ambiente, como símbolos físicos, objetos o dimensiones (ej. símbolos escritos, cuentas en ábaco, dimensiones de un gráfico) y como reglas externas, limitaciones, o relaciones incluidas en configuraciones físicas (ej. relaciones espaciales de dígitos escritos, diseños visuales y espaciales de diagramas, limitaciones físicas en ábacos, etc.)”(Traducción propia)

manera, las RE al posibilitar la construcción de sistemas notacionales a través de su organización manifiestan *información explícita* directamente perceptible, pero al mismo tiempo revelan *información implícita*, debido a la lógica con la que está organizado el sistema.

A diferencia de otros autores (Tolchinsky, 2007 ; Zhang, 1997) que niegan directa o indirectamente que el lenguaje oral, lenguaje de signos, gestos corporales, etc. sean representaciones externas, Pérez Echeverría y Scheuer (2007) los reconocen como tal, por ser representaciones manifiestas que se dan en un contexto público –evidente- y que se distinguen claramente de las RI, al ser perceptibles sin necesidad de tecnología avanzada, pero sobre todo, por su capacidad para transformar la cognición humana al permitir una mayor conciencia sobre el propio conocimiento abriendo la posibilidad de enriquecerlo; además, aunque el lenguaje oral, representaciones corporales, etc., no se manifiesten a través de marcas gráficas, poseen cierto grado de permanencia en la mente humana, que permite pensar sobre ellos.

Es importante señalar que incluir como formas de representación externa al lenguaje y a las notaciones espontáneas, constituye un aporte con fuerte impacto para el estudio de la psicología del desarrollo ya que antes de que los sujetos puedan tener dominio sobre los sistemas de representación externa, sus aproximaciones se dan empleando y probando formas pre-convencionales de los mismos. Más aún, la adquisición de los sistemas externos de representación puede verse favorablemente apoyado a través del lenguaje. Como lo señala Perret-Clermont y Carugati (2003) es bajo su influencia y en combinación de numerosas exploraciones a propósito de una notación, que los niños logran análisis metacognitivos que les posibilitan, tanto mayor dominio del mismo lenguaje, como de los instrumentos notacionales.

En este trabajo consideramos que la esencia fundamental de las RE no es el poder ser plasmadas sobre una superficie, sino la capacidad de fungir como *mediadores externos que modifican la cognición humana*. En este sentido, el enfoque que guía la presente investigación es acorde con la perspectiva de Pérez Echeverría y Scheuer (2007).

A pesar de que múltiples estudiosos han defendido la idea de que las representaciones externas impactan positivamente y de distintas formas la cognición humana (Alvarado y Brizuela, 2010; Elia, et al. 2007; Eskritt & Lee, 2007; Martí y Pozos, 2000; Reed, 2001; Tolchinsky, 2007; Zhang, 1997) se pueden encontrar posturas menos favorecedoras que ponen en duda la influencia permanente de éstas sobre la mente.

Eskritt y Lee (2007) mencionan cómo Platón creía que las representaciones externas podían ser perjudiciales para la cognición humana al concebirlas como un simple almacén de donde se podía sacar información sin necesidad de pensarla. Por otro lado, señalan que Norman (1991, citado en Eskritt & Lee, 2007) no considera que las RE incrementen la capacidad cognitiva de una persona, sino que simplemente alteran la naturaleza de la tarea propuesta. La postura de los autores es clara al explicar que las RE obtienen sentido a partir de su componente cultural que dicta la forma en la que éstas serán usadas, así como sus alcances y limitaciones, por lo que su impacto cognitivo dependerá del propósito y contexto en el que y para el que se usen.

Las características que cada tipo de RE posee impactarán en forma diferente la mente humana. Una RE puede clarificar cierta información pero a su vez puede mantener ciertos elementos ocultos, por lo que será útil en determinado contexto pero en otras circunstancias podrá incluso resultar desfavorable. Es por esto que la psicología cognitiva tiene como uno de sus principales campos de interés cómo distintas representaciones influyen en la resolución de tareas (Eskritt & Lee, 2007; Zhang, 1997).

2.1.1.1 Sistemas de representación externa

La acción humana difiere de la animal, al ser la única que es capaz de transformar las funciones elementales en funciones psicológicas de orden superior a través de la actividad mediadora de las herramientas culturales y del signo (Vigotsky, 1988). Esta actividad mediadora ha sido la responsable del desarrollo evolutivo de la humanidad. Es así como los humanos han sido los únicos seres vivos capaces de hacer uso de las herramientas de representación externa, sólo ellos pueden crearlas, comunicarlas y comprenderlas. Cuando estas representaciones externas son socialmente compartidas y organizadas mediante reglas estrictas de combinación, se constituyen en verdaderos sistemas lógicos de comunicación llamados sistemas de representación externa (SRE).

Para que un sistema de representación externa se constituya como tal deberá estar compuesto por elementos que mantengan relaciones de significado entre sí, existir consenso social entre el significado atribuido por su autor a la representación y el significado comprendido por quienes son ajenos a la construcción de la representación; sus formas de funcionamiento, organización y creación serán realizadas bajo una serie de reglas claras, sistemáticamente formuladas y de aceptación general que pueden llegar a poseer un alto grado de arbitrariedad.

Son estas reglas las que especifican cómo han de organizarse sus elementos constitutivos para imprimir determinado significado, es decir, dictan la construcción e interpretación de estos sistemas, por lo cual es necesario que sean dominadas tanto por el productor como el receptor. Ejemplos de sistemas de representación externa son los sistemas de notación musical, sistemas gráficos de numeración, lenguaje, tablas de doble entrada, gráficos, sistemas de escritura, entre otros.

Es importante señalar que se pueden encontrar representaciones pre convencionales, como son las que emplean los aprendices antes de lograr pleno dominio sobre los sistemas de representación. De esta manera las RE pueden presentar características que incluyen ciertas propiedades del sistema que está siendo representado y dejar de lado otras, el aprendiz, al atravesar un proceso de apropiación de las reglas de conformación del sistema irá reconstruyéndolo hasta hacerlo suyo por completo logrando la convencionalidad.

Diferentes culturas a lo largo de la historia han dejado rastro de los sistemas de representación empleados por ellas para comunicarse y salvaguardar información (Cardona, 1994; Harris, 1999). El paso de representaciones poco estructuradas al de sistemas de representación ha sido producto de un proceso histórico y cultural, por esta razón los medios de representación empleados por distintos pueblos han mostrado coincidencias y variaciones estructurales. Por ejemplo, la escritura, un sistema de representación externa, ha variado principalmente en función del lenguaje oral empleado, de los acontecimientos políticos, sociales y religiosos que atravesaba un pueblo en determinado momento de su historia (Cardona, 1994)

Los sistemas de representación externa por ser un producto histórico y social impactan la vida humana a nivel tanto sociocultural como cognitivo. En lo sociocultural, al permitir el registro del conocimiento humano, su manipulación y su comunicación para así preservarlo, construirlo y reconstruirlo. A nivel cognitivo, al posibilitar el acceso a conocimientos que de otra manera se escaparían al intelecto humano o serían poco accesibles para él; permitiendo repensar y de ser necesario cambiar lo que se conoce (Harris, 1999; Olson, 1999; Pérez & Scheuer, 2007; Sampson, 1997).

Cada individuo, para formar parte activa de su entorno deberá ser partícipe del conocimiento construido socialmente haciéndolo suyo e incluso modificándolo posteriormente en favor de un conocimiento más complejo y que dé mayores beneficios a la comunidad de la que forma parte. Uno de los principales promotores para su aprendizaje es la escuela; aunque sistemas de representación externa como el lenguaje oral se adquieren sin intervención escolar, existen sistemas como el gráfico alfabético, el sistema de notación musical y el sistema gráfico numérico que son delegados en manos de instituciones para su enseñanza formal (Morales, 2005), sin que esto implique que antes de recibir una enseñanza institucionalizada la persona no posea ya ciertos conocimientos sobre el funcionamiento de estos sistemas gracias al intercambio sociocultural cotidiano que le brinda el medio en donde se desenvuelve.

Dentro de la psicología cognitiva se han utilizado diferentes expresiones para referirse a los sistemas de representación externa. Algunos autores emplean el término sistemas de notación, sistemas de símbolos externos permanentes, sistemas externos de representación o simplemente representaciones externas (Eskritt & Lee, 2007; Martí y Pozo, 2000; Morales, 2005). Sin embargo, como ya se ha venido esbozando, los vocablos "notación" o "permanentes" no resultan convenientes. Pues por un lado, existen sistemas de representación externa que no poseen la "permanencia" que muchos teóricos solicitan –en el sentido de materialización física que permita a la representación ser utilizada en otro contexto o referirse a ella tiempo después de su creación-; por otro lado, no todas las notaciones se constituyen en sistemas. Entre los teóricos de la investigación cognitiva el término más empleado actualmente es el de sistemas de representación externa (external representation systems), por lo cual es el que en esta investigación se retoma.[9]

Un sistema de representación externa con el que nos encontramos constantemente a lo largo de nuestra vida y que sin embargo no resulta fácil de comprender y mucho menos de elaborar son las tablas de datos, las cuales se retoman en esta investigación por ser RE que obligan a un análisis y organización de la información que otros medios de representación no proveen.

[9] Otras investigaciones en castellano usan el mismo término, sin embargo, la traducción es diferente: sistemas externos de representación.

Tablas de datos

Las tablas de datos son encontradas constantemente en una amplia variedad de contextos como periódicos, revistas, empaques de comida, carteleras, anuncios, etc. Éstas se han mostrado como una de las formas más eficaces de organizar, sistematizar y presentar datos; sin embargo, a pesar de sus apariciones frecuentes en la vida cotidiana, la comprensión de estos medios puede ser tardía –según las experiencias de cada sujeto- y en situaciones complejas incluso será incomprendida por algunos (Martí, 2007).

A pesar de su aparición frecuente en la cotidianeidad y de la organización cognitiva que favorece la tabla de datos, pocas investigaciones han abordado su impacto en la cognición humana. Una de ellas es la de Brizuela y Lara-Roth (2002) donde se aborda la resolución de problemas matemáticos en niños de segundo grado a través de tablas generadas por ellos mismos.

Martí (2007) por su parte, analiza la construcción de tablas de datos -en la que dos variables se intersectan sistemáticamente- hechas por niños de segundo y quinto grado. Encontró que estos pequeños utilizaban cuatro formas diferentes para organizar la información: la primera a través de la escritura de un texto linear –oraciones o párrafos-, la segunda mediante listas de los elementos involucrados, la tercera donde se hace uso de una tabla en la que la organización se da a partir de una sola variable y, la cuarta en la que los niños elaboran tablas que involucran dos variables, siendo estas últimas los modelos completos para representar la situación planteada.

La escasez de estudios sobre tablas de datos puede deberse a la errónea creencia de que por ser de uso común en la vida cotidiana es fácil para los sujetos interpretarlas y construirlas o debido al interés por el estudio de sistemas de representación pensados como más complejos o importantes. A este respect Martí asevera “Like other external representations, tables are not transparent media for communicating and transmitting information; they are governed by a series of cognitive processes (segmentation and categorization of information, identification of variables) that are graphically expressed by different notional decisions”[10]

Los datos aportados por Brizuela, Lara-Roth (2002) y Martí (2007) nos permiten conocer que la comprensión del funcionamiento de las tablas de datos se construye poco a poco, gracias a la interacción del sujeto con éstas y en presencia de contextos variados de uso; sin embargo, a pesar de que la comprensión sobre cómo se interpreta y construye una tabla lleva tiempo, los saberes previos de los niños, obtenidos a partir de su vida cotidiana, les permiten acercarse al uso de éstas aun cuando no haya habido una enseñanza previa de su funcionamiento.

Pero no sólo eso, las tablas al propiciar una reorganización de los conocimientos se muestran como herramientas que permiten una amplia representación cognitiva de las relaciones involucradas en los problemas, y por ende, una mejor comprensión de las situaciones problemáticas. Sobre el argumento anterior descansa el principal sustento de la investigación presente para retomar las tablas de datos como herramientas que posibiliten una resolución más completa de problemas aditivos considerados como complejos.

2.1.1.2 Herramientas notacionales

Las notaciones son en la actualidad objeto de estudio de la psicología ya que por ser representaciones externas, dan cuenta de la lógica del razonamiento de su creador y por otro lado, inciden directamente sobre la mente humana.

Pérez y Scheuer (2007) definen el término notación como: “Notations are graphic marks produce by means of some intermediate instrument (though on

[10] “A diferencia de otras representaciones externas, las tablas no son medios transparentes para comunicar y transmitir información; están gobernadas por una serie de procesos cognitivos (segmentación y categorización de la información, identificación de variables) que son expresadas gráficamente por medio de diferentes decisiones notacionales” (Traducción propia).

occasion body parts are used) on some kind of surface (skin, sand, walls, floors, clay, paper, cloth, screens)."[11](p.3)

Las notaciones, además de las características constitutivas de todas las RE, se distinguen por estar inscritas en un soporte material que les otorga cierta permanencia. Esta materialización física les confiere una existencia relativamente independiente de su autor abriendo la posibilidad de seguir funcionando tiempo después de haber sido creadas, separarse del lugar en el que nacieron e incluso el de ser utilizadas en un contexto diferente para el cual fueron dispuestas.

Las notaciones, debido a su materialización física son relativamente inmunes al tiempo; es decir, pueden ser elaboradas por su creador en un momento específico y llegar a un tercero mucho tiempo después. En estas circunstancias no es necesario que el productor conozca a los futuros receptores pues la representación se ha independizado de su creador manteniendo su función simbólica, esto ocurre sobre todo con aquellas notaciones que se han constituido en sistemas.

Sin embargo, la materialización física tiene su verdadero impacto al permitir la objetivación de relaciones y elementos que de otra manera no habrían podido ser descubiertos (Olson, 1999). Las notaciones facilitan la percepción del contenido de una forma más duradera, lo que posibilita que el sujeto encuentre relaciones que antes no había percibido, practique nuevas y más ricas soluciones, prevea distintas organizaciones redescubriendo mediante esta acción nuevos elementos que antes había pasado por alto. Todo este proceso lo llevará a modificar sus supuestos, comenzando así una nueva reestructuración mental.

---

[11] "Las notaciones son marcas gráficas producidas por medio de algún instrumento (aunque en ocasiones son usadas partes del cuerpo) en cierto tipo de superficie (piel, arena, paredes, piso, arcilla, papel, ropa, pantallas)." (Traducción personal)

Esta toma de conciencia de elementos y relaciones que antes no habían sido percibidos modifica directamente los procesos mentales llevados a cabo por un individuo que está siendo mediado por una notación, incidiendo de esta forma sobre las capacidades cognitivas; como Zhang (1997) explica, diferentes operaciones perceptuales implican diferentes operaciones cognitivas.

Además de la objetivación que influye en la cognición humana, las notaciones tienen la capacidad de incidir en los procesos memorísticos. En este sentido las notaciones no sólo funcionan como almacén de información, sino que al posibilitar la externalización de la información manteniéndola dentro del campo perceptual, proveen una nueva forma de trabajar con la memoria al facilitar la organización y análisis de los datos, viabilizando de esta manera nuevas formas de comprensión (Pérez & Scheuer, 2007).

Diversas investigaciones se han enfocado en analizar cómo las notaciones inciden en la capacidad cognitiva del ser humano, aquí sólo se hará mención de algunas de ellas y de los aportes que han brindado.

Alvarado y Brizuela (2010) realizaron una investigación –la cual dio pie a la que aquí se presenta- en la que niños de primer grado resolvieron algunos problemas aditivos de categoría II y IV haciendo uso de una de tres distintas herramientas notacionales: notaciones libres (papel y lápiz), tablas sin etiqueta y tablas con etiqueta. Partiendo del supuesto que distintas notaciones impactan en forma diferente la resolución de problemas buscaron averiguar si el uso de notaciones ayudaba a los niños al momento de resolver problemas de categoría II y IV y cuál tipo de notación les resultaba más útil.

Entre sus hallazgos están: la identificación de un mayor porcentaje de respuestas correctas en la categoría II que en la IV –en concordancia con Vergnaud-. Cuando se hizo uso de algún medio notacional para resolver los problemas aditivos, aquellos niños que usaron tabla sin etiquetas tuvieron un mayor porcentaje de aciertos, seguidos por aquellos que realizaron notaciones libres con hoja y papel mientras que la notación que se mostró menos eficiente fue la tabla con etiquetas. Además, encontraron una interacción entre el tipo de notación empleada y la categoría del problema a resolver donde las notaciones tienen un mayor impacto en la resolución de problemas con mayor dificultad (categoría IV).

Por su parte, Zhang (1997) expone la importancia de conocer cómo la naturaleza de las RE afecta la resolución de problemas "the form of a representation determines what information can be perceived, what processes can be activated, and what structures can be discovered from the specific representation". (p.4) [12] Para analizar este supuesto, usa 4 diferentes versiones del juego Tic-Tac-Toe (TTT), la tradicional o lineal, la numérica, la de formas y la de color. Este juego para dos jugadores –en esencia semejante al "juego del gato"- consiste en seleccionar y colorear un círculo por turno, el jugador que logre colorear tres círculos que hagan una línea recta (horizontal, diagonal o vertical) es el ganador.

Tres diferentes experimentos fueron llevados a cabo. Se examinó el efecto de tendencias resolutorias inconsistentes durante la solución de problemas y cómo la simetría y las diferentes operaciones mentales activadas a través de distintas representaciones afectan la resolución de problemas. Encontró que los diferentes niveles de dificultad al momento de resolver el TTT fueron debidos principalmente a la percepción de los invariantes ganadores y el uso de la estrategia "más es mejor", los cuales eran más fácilmente percibidos en ciertas versiones del juego. Además, encontró que la percepción de la simetría dentro de la tarea facilitaba la resolución del problema. Con todo esto se pudo concluir: la resolución que se haga dependerá en gran medida de la estructura de la tarea.

[12] "La forma de una representación determina qué información puede ser percibida, qué procesos pueden ser activados, y cuáles estructuras pueden ser descubiertas desde las representaciones específicas" (Traducción propia)

Reed (2001) analiza cómo los dibujos de los niños median su conocimiento y comprensión de problemas matemáticos. Encontró que los niños hacen uso de los dibujos como una forma de significar la información matemática facilitando su comprensión, pero también como una manera de dramatizar la información matemática. Ellos son capaces de emplear los dibujos en forma cada vez más abstracta y económica, al pasar del dibujo explícito de veinte brujas, al de veinte palos que ahora las representan.

La autora señala la interacción entre distintas representaciones externas, no necesariamente notacionales, por ejemplo, cómo los pequeños conjugan los dibujos que manifiestan, la información matemática con la que trabajan y el lenguaje dirigido a sí mismo “selftalk” para ampliar su comprensión de la tarea. Más aún, rescata la importancia de la interacción entre pares que se da cuando los niños resuelven problemas que los lleva a debatir, reorganizar sus dibujos, defender sus creencias, clarificar sus ideas; en suma, reorganizar por completo sus conocimientos matemáticos.

Por otro lado, Elia, Gagatsis y Demetriou (2007) analizaron los efectos de diferentes modos de representación en la solución de problemas aditivos simples. Cuatro fueron las diferentes formas de representación utilizadas por ellos, a) la versión donde se usa *exclusivamente la escritura* para dar a conocer el problema matemático, b) la representación en donde la escritura del enunciado matemático es acompañada por un *dibujo decorativo* que alude a algún elemento del problema pero que no encarna en sí mismo información relevante, c) el *dibujo informativo*, donde por medio de dibujos y escritura se manifestaba la información matemática y d) la representación donde además de la escritura del problema se incluía una *recta numérica* para ser usada por los niños.

Se evidenció un desempeño semejante al resolver los problemas aditivos cuando se usó la versión escrita, el dibujo decorativo y la recta numérica, mientras que el desempeño fue menor al momento de resolver problemas con dibujo informativo. El menor desempeño en estos problemas es explicado por los autores por tener que enfrentarse a diferentes tipos de representación en un mismo problema matemático con la consiguiente necesidad de incluir procesos mentales en mayor cantidad y complejidad.

Estas investigaciones evidencian cómo las notaciones son herramientas mediadoras que modifican la forma en la que se percibe una situación problemática facilitando o dificultando su resolución; más aún, la influencia de las notaciones depende en gran medida de las tareas que median, por lo que la utilidad de éstas dependerá del contexto en el que sean empleadas.

2.2 Problemas Aditivos

La resolución de problemas ha sido abordada a través de diferentes investigaciones (Carrillo y Contreras, 2001; Chamorro y Vecino, 2003; Elia et al. 2007; Reed, 2001; Soriano, 1999; Vergnaud, 1991; Zhang, 1997) Cada una de ellas centra su foco de atención en diferentes ámbitos de la resolución de problemas, sin embargo, todas coinciden en señalar que la resolución de problemas es la forma ideal para reconstruir los conocimientos matemáticos.

La resolución de problemas ha sido reconocida como el elemento principal a través del cual se puede comprender las matemáticas. Sin embargo no se puede hablar de resolución de problemas como de algo exclusivo del dominio matemático; al solucionar un problema intervienen también los aspectos semánticos, pragmáticos y sintácticos del lenguaje (Chamorro y Vecino, 2003; Ehrlich (1990) citado en Chamorro y Vecino, 2003), además del sistema cognitivo que brinda soporte para interactuar con la situación problemática buscando una respuesta a la situación presentada.

En este sentido, Chamorro y Vecino (2003) señalan: “Muchas de las dificultades que se han encontrado en la resolución de problemas aritméticos simples nada tiene que ver con la mal comprensión o ejecución de los algoritmos, son de otra naturaleza. Conciernen a la lectura y comprensión del enunciado, a la selección y organización de las informaciones pertinentes dadas en el enunciado, y a la traducción de esta organización en términos matemáticos. La mayor dificultad es la interpretación del contexto semántico, necesaria para interpretar y seleccionar las informaciones dadas por el enunciado…" (p. 279)

Los problemas matemáticos, o de cualquier índole, no son neutros. Es decir, la dificultad que representan depende de la condición del sujeto que lo enfrenta, de manera que algo "difícil" para uno, puede resultar "sencillo" para otro de acuerdo con el sistema cognitivo que posea cada quien, la experiencia que tenga sobre el tema y en consecuencia, de los esquemas de acción desarrollados hasta entonces.

Además, los problemas matemáticos poseen variables didácticas que les imprimen diferentes grados de complejidad (Chamorro y Vecino, 2003; Vergnaud, 1991). La primera hace referencia al *soporte* específico usado, éste por sus particularidades específicas imprime un grado de mayor o menor dificultad, e incluso dentro de un mismo soporte la variación en su diseño podrá facilitar o complejizar el problema presentado. Existen principalmente cuatro variedades de soporte: mediante un enunciado, ya sea oral o escrito, una ilustración, el uso de tablas y finalmente, el empleo de gráficos.

La segunda hace referencia a la *información suministrada*. Aquí será relevante el orden de la información dada, la cantidad de datos incluidos dentro de un problema, el uso exclusivo de los datos necesarios para resolver la situación problema o la inclusión de información irrelevante, el que la información esté implícita o sea explícita, exista coherencia sintáctica en su planteamiento, la familiaridad que se tenga con los actores involucrados (objetos, situaciones) y la contextualización de la información dada.

Los *datos numéricos* utilizados serán un elemento decisivo, no será lo mismo trabajar con números naturales que con relativos (7 vs -7, +7), esto se constata por la mayor facilidad con que se resuelven problemas de categoría I donde sólo se involucran estados (números naturales), que los de tipo II y IV que involucran transformaciones (números relativos). Los números enteros serán de mayor facilidad para su manejo y comprensión que los números decimales (4 vs 3.7). La magnitud de las cantidades manejadas entre más crezca, imprimirá un grado mayor de dificultad (83 vs 3921). Las cantidades con mayor grado de redondeo, es decir, más cercanas a la base 10, posibilitarán un manejo más rápido y fácil al momento de efectuar un cálculo numérico (2500 vs 7459) y por último, las cantidades discretas serán más fácilmente comprendidas que las continuas (5 pelotas vs 5 metros de listón).

Otro elemento que modifica a los problemas matemáticos hace referencia a las *relaciones matemáticas* implicadas: La relaciones negativas se muestran particularmente más difíciles de manejar que aquellas que son positivas;[13] además, un problema que contiene relaciones con signo contrario será más complejo que aquel en el que las relaciones tienen signo semejante. Es necesario distinguir entre las relaciones dinámicas, en las que intervienen transformaciones que modifican el tamaño de una cantidad y por tanto son más complejas que aquellas donde ninguna acción se ejerce sobre las medidas y que reciben el nombre de relaciones estáticas.

[13] Existen problemas donde aparecen involucradas relaciones negativas y sin embargo, resultan ser más fácilmente resueltos que aquellos con relaciones positivas, esto se debe a la semántica del enunciado matemático que da pistas lingüísticas falsas o correctas sobre la operación que deben seguir. Ejemplo: Luis tiene seis chocolates. Se come algunos chocolates. Ahora le quedan dos chocolates ¿cuántos chocolates se comió? Más de un niño se puede ver tentado a restar 6-2=4 obteniendo el resultado correcto, debido a que la palabra comió los remite a hacer una resta (Nunes & Bryant, 1996)

Los *conceptos matemáticos* también influyen en el grado de dificultad del problema, no será lo mismo hablar de volumen que de longitud, peso, tiempo, cardinales, etc. Finalmente, la *ubicación de la incógnita* tendrá un grado de dificultad menor si se ubica en C que en B, y menor si se posiciona en B que en A.

En esta investigación se utilizan problemas de enunciado oral, donde la información provista es suficiente y relevante, además de que está en el orden en que las variables aparecen (a-b-c), se contextualizó en la entrevista las situaciones problema y se familiarizó a los niños con el término rondas. Por el tipo de problemas empleados, los datos numéricos incluían números relativos y naturales, enteros, con magnitud no mayor a 10 y en todos se manejaron cantidades discretas –cantidad de canicas-.

De los problemas de categoría IV, dos poseen signo diferente (*Pablo*: +5-3=+2 y *Bruno*: +10-7=+3) y uno signo semejante (*Cristian:*+5+4=+9)[14], tanto la categoría II como la IV pertenecen a problemas dinámicos, es decir, en ellos una acción interviene aumentando o disminuyendo un conjunto. Para cada una de las dos categorías estudiadas se analizan problemas donde la incógnita recae en a, b y c.

Para los fines de esta investigación, se retomará la definición que el INEE da de lo que es la resolución de un problema, entendiéndose así a todo el proceso que debe seguir un resolutor para poder contestar la pregunta planteada, es decir, desde la lectura, el establecimiento de las relaciones entre los datos –representación de variables-, el cálculo numérico, hasta que puede dar un dato como solución a la pregunta planteada –representación y respuesta a la incógnita- (INEE, 2009)

[14] En el siguiente capítulo se presentan las características de cada problema.

2.2.1 Categorización de los problemas aditivos

Gérard Vergnaud en su libro “El niño, las matemáticas y la realidad” (1991) (L’enfant, les mathématiqueset la réalité) divide los problemas aritméticos en dos grandes categorías: problemas aditivos y problemas multiplicativos. Los problemas de tipo aditivo son los que hacen necesaria una adición o sustracción para resolverlos. En cambio, los problemas multiplicativos son aquellos que se resuelven mediante una división o multiplicación.

Vergnaud Indica que los problemas aritméticos se van complejizando en función de las relaciones elementales que intervienen en ellos y centra su explicación en aquellos que son puros y mixtos. Donde los problemas puros serán aquellos que únicamente implican lo aditivo o lo multiplicativo y los mixtos aquellos que mezclan lo aditivo y lo multiplicativo siendo estos últimos más complejos que los primeros. En este trabajo dirigiremos nuestra atención a los problemas de tipo aditivo puros.

Autores como Vergnaud (1991) y Carpenter & Moser (1983) han propuesto diferentes categorías de problemas aditivos. Aunque la cantidad de categorías y el nombre sean diferentes, comparten un rasgo en común, ambos centran el análisis de los problemas en sus características semánticas.

Carpenter y Moser (1983) identifican 4 dimensiones que caracterizan a las relaciones involucradas en los problemas aditivos: la primera, basada en si las *relaciones del problema* son estáticas –donde la cantidad involucrada no disminuye ni aumenta- o dinámicas –en las que hay un cambio de tamaño -. La segunda hace referencia a las *relaciones de inclusión de conjuntos*, donde dos relaciones son un subconjunto de la tercera –dos relaciones se componen para formar la tercera relación-; la tercera dimensión, exclusiva de los problemas dinámicos, en la que el *cambio de tamaño* de la cantidad inicial puede incrementarse o decrecer y finalmente incluyen una cuarta, la *posición de la incógnita*.

Tomando en cuenta estas dimensiones, clasifican los problemas aditivos en 6 categorías, donde los 4 primeros problemas implican una relación dinámica y los dos últimos una relación estática.[15]

1. Unión: Connie tiene 5 canicas. Jim le dio 8 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Connie en total?
2. Separación: Alfredo tiene 11 dulces. Le da 7 dulces a Linda. ¿Cuántos dulces quedan a Alfredo?
3. Igualación-agregando: Hay 6 chicos y 8 chicas en el equipo de futbol. ¿Cuántos chicos deben ingresar al equipo para que haya la misma cantidad de chicos que de chicas?
4. Igualación-quitando: hay 11 tazas y 7 platillos en la mesa. ¿Cuántas tazas tengo que quitar para tener el mismo número de tazas y platillos?
5. Parte-parte-todo: Hay 6 chicos y 8 chicas en el equipo de futbol. ¿Cuántos muchachos hay en total en el equipo?
6. Comparación: Hay 6 chicos y 8 chicas en el equipo de futbol. ¿Cuántas chicas más hay en el equipo que chicos?

Por su parte, Vergnaud (1991) centra su trabajo en las implicaciones que el cálculo relacional -entendido como la comprensión de las relaciones involucradas- tiene sobre la resolución de problemas aritméticos. Asevera, “El conocimiento consiste en gran medida en establecer relaciones y en organizarlas en sistemas” (p. 15). Explica que las relaciones involucradas en un problema hacen necesaria una actividad intelectual que no siempre es accesible a todos los sujetos, pues las relaciones no son simples verificaciones de la realidad, por lo cual, para comprenderlas deben ponerse en marcha diferentes procesos cognitivos que permitan establecer deducciones, inferencias y análisis de los elementos involucrados.

[15] Los problemas son retomados de Carpenter & Moser, 1983.

Las relaciones aditivas al ser de tipo ternario, es decir, en donde intervienen 3 elementos, posibilitan gran diversidad de estructuras aditivas. De esta manera, los problemas aritméticos de tipo aditivo no serán siempre los mismos, ni en estructura, ni en complejidad sino que variarán dependiendo de las relaciones aditivas que permeen el problema.

Vergnaud (1991) describe seis grandes categorías de relaciones aditivas según las medidas, transformaciones y relaciones que las compongan. En el capítulo *El número y la medida*, Vergnaud expresa que la operación de medida consiste en encontrar el cardinal de un conjunto. Señala: “Numerosas relaciones de la realidad son de hecho relaciones “dinámicas”, en el sentido de que ligan estados sucesivos de la realidad y no elementos simultáneos de dicha realidad. Nos podríamos conformar con hablar de relaciones “estáticas” (que relacionan elementos simultáneos de la realidad) y relaciones “dinámicas” (que relacionan elementos no simultáneos); pero es más claro y más explícito en el último caso hablar de transformaciones” (p. 46)

- La primera categoría es aquella en la que dos medidas se componen para dar lugar a una tercera medida. Ejemplo: Luis tiene 6 pantalones azules y 4 pantalones negros, en total tiene 10 pantalones.
- La segunda categoría hace referencia a la relación ternaria en donde una transformación opera sobre una medida para dar lugar a otra medida. Ejemplo: Luis tenía 10 pantalones en enero, rompió un pantalón en febrero, ahora tiene 9.
- En la tercera categoría una relación une dos medidas. Ejemplo: Luis tiene 9 pantalones, Cristóbal tiene 2 menos; entonces Cristóbal tiene 7.
- La cuarta se refiere a dos transformaciones que se componen para dar lugar a una tercera transformación. Ejemplo: A Luis le regalaron 6 pantalones nuevos, esta semana usó 2, le quedan 4 por estrenar.

- La quinta categoría hace referencia al esquema ternario en donde una transformación opera sobre una relación para dar lugar a una relación. Ejemplo: Luis tenía sucios 8 pantalones, lavó 3, le quedan por lavar 5.
- En la sexta categoría dos relaciones se componen para dar lugar a una relación. Ejemplo: Luis debe lavar 5 pantalones, su mamá le va a lavar 3, entonces solo debe lavar 2.

Se puede ver que los ejemplos esbozados por Carpenter y Moser (1983) como de unión y separación, coinciden con las características de los problemas tipo II de la categorización ofrecida por Vergnaud (1991). Para los fines de esta investigación se retomará la categoría planteada por Vergnaud por considerársele más completa explicativamente a cerca de las relaciones semánticas involucradas.

Dentro de cada una de las 6 categorías propuestas por Vergnaud (1991) se encuentran diferentes clases de problemas. A continuación, y debido a los fines de este trabajo, la atención se centrará en los problemas aditivos categoría II y IV así como sus clases.

2. 2.1.1 Problemas aditivos categoría II

Vergnaud (1991) esquematiza la categoría II de la siguiente manera:

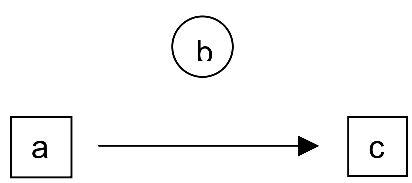


*Figura 2.*Esquema sagital para esquematizar los problemas aditivos de categoría II

El cuadrado indica un número natural (medida), el círculo un número relativo (transformación positiva o negativa) y la flecha la composición de elementos de naturaleza diferente (una transformación o una relación).

La segunda categoría de los problemas aditivos se divide en seis grandes clases, según dos variables: que la transformación sea positiva o negativa y la ubicación de la incógnita. Es importante señalar que dentro de las 6 clases no se tiene el mismo grado de complejidad, aquellas en la que la incógnita se ubica en "c" serán las más sencillas, mientras que las de la incógnita ubicada en "a" serán las de mayor complejidad.

Clase 1: donde la transformación es positiva y la incógnita se ubica en c.

Ejemplo: El camión a Toluca lleva 19 pasajeros, en Querétaro suben 23; si no vuelve a subir ni bajar ninguno ¿Cuántos pasajeros llegarán a Toluca?

Clase 2: donde la transformación es positiva y la incógnita se ubica en b.

Ejemplo: En un gallinero hay 23 gallinas, el dueño compra algunas más, ahora hay 38 ¿Cuántas gallinas compró el propietario?

Clase 3: donde la transformación es positiva y la incógnita se ubica en a.

Ejemplo: Juan colecciona estampillas, hoy le regalaron 12 estampillas nuevas para su colección, ahora tiene 59 estampillas en su álbum ¿Cuántas estampillas tenía antes de que le regalaran las 12?

Clase 4: donde la transformación es negativa y la incógnita se ubica en c.

Ejemplo: En una fiesta hay 304 invitados, a las 12:00pm se van 63 ¿Cuántos invitados quedaron en la fiesta?

Clase 5: donde la transformación es negativa y la incógnita se ubica en b.

Ejemplo: Felipe fue a la feria con 58 dulces en su bolsa, al subir a la montaña rusa se le cayeron algunos, al bajar se dio cuenta que le quedaban 36 ¿Cuántos se le cayeron?

Clase 6: donde la transformación es negativa y la incógnita se ubica en a.

Ejemplo: Un paletero hizo paletas, de esas paletas 49 se derritieron pero pudo vender en buenas condiciones 189 ¿Cuántas paletas fueron las que hizo?

Es importante señalar que dentro de las 6 clases no se tiene el mismo grado de complejidad, la 1 y 4 serán las más sencillas, mientras que la 3 y la 6 serán las de mayor complejidad.

2.2.1.2 Problemas aditivos categoría IV

El diseño sagital empleado por Vergnaud (1991) para esquematizar las relaciones establecidas en los problemas aditivos categoría IV es el siguiente:

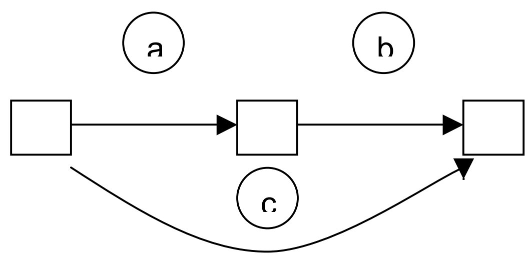


Figura 3. Esquema sagital para esquematizar los problemas aditivos de categoría IV

El cuadrado indica un número natural (medida), el círculo un número relativo (transformación positiva o negativa), la flecha la composición de elementos de naturaleza diferente (una transformación o una relación), a es la primera transformación elemental, b, la segunda transformación elemental y c la transformación compuesta –producto de a y b-.

La cuarta categoría de los problemas aditivos se divide en veinticuatro clases, según tres variables: que las transformaciones sean positivas o negativas, valor absoluto de la magnitud relativa de las transformaciones y la ubicación de la incógnita.

Según lo revisado anteriormente, se entiende que las clases de problemas que entrañan una mayor dificultad serán aquellas donde la incógnita se ubica en alguna de las transformaciones elementales (especialmente en la primera) y las transformaciones compuestas son de signo contrario. Las ocho primeras clases aluden a la posición de la incógnita en c, mientras que las siguientes 8 corresponden a la incógnita ubicada en b. Se deja en manos del lector analizar las últimas 8 clases donde la incógnita es ubicada en la primera transformación elemental.

Clase 1: Dos transformaciones elementales positivas dan una compuesta positiva, siendo la primera transformación elemental mayor que la segunda.

Ejemplo: Luis subió de peso 3 kilos el primer semestre del año y 2 kilos el segundo ¿Qué sucedió a fin de cuentas?

Clase 2: Dos transformaciones elementales negativas dan una compuesta negativa, siendo la primera transformación elemental mayor que la segunda.

Ejemplo: Luis perdió 3 kilos de peso el primer semestre del año y 2 kilos el segundo ¿Qué sucedió a fin de cuentas?

Clase 3: Dos transformaciones elementales, la primera positiva y la segunda negativa, dan una compuesta positiva, siendo la primera transformación elemental mayor que la segunda.

Ejemplo: Luis subió de peso 3 kilos el primer semestre del año y perdió 2 kilos el segundo ¿Qué sucedió a fin de cuentas?

Clase 4: Dos transformaciones elementales, la primera negativa y la segunda positiva, dan una compuesta negativa, siendo la primera transformación elemental mayor que la segunda.

Ejemplo: Luis perdió 3 kilos de peso el primer semestre del año y recuperó 2 kilos el segundo ¿Qué sucedió a fin de cuentas?

Clase 5: Dos transformaciones elementales positivas dan una compuesta positiva, siendo la primera transformación elemental menor que la segunda.

Ejemplo: Luis subió de peso 2 kilos el primer semestre del año y 3 kilos el segundo ¿Qué sucedió a fin de cuentas?

Clase 6: Dos transformaciones elementales negativas dan una compuesta negativa, siendo la primera transformación elemental menor que la segunda.

Ejemplo: Luis perdió 2 kilos de peso el primer semestre del año y 3 kilos el segundo ¿Qué sucedió a fin de cuentas?

Clase 7: Dos transformaciones elementales, la primera positiva y la segunda negativa, dan una compuesta negativa, siendo la primera transformación elemental menor que la segunda.

Ejemplo: Luis subió de peso 2 kilos el primer semestre del año y perdió 3 kilos el segundo ¿Qué sucedió a fin de cuentas?

Clase 8: Dos transformaciones elementales, la primera negativa y la segunda positiva, dan una compuesta positiva, siendo la primera transformación elemental menor que la segunda.

Ejemplo: Luis perdió 2 kilos de peso el primer semestre del año y recuperó 3 kilos el segundo ¿Qué sucedió a fin de cuentas?

Clase 9: Dos transformaciones positivas, la primera de las elementales y la compuesta, dan la segunda elemental positiva, siendo la transformación elemental menor que la compuesta.

Ejemplo: Luis subió 2 kilos de peso el primer semestre del año, al final del año había subido 5 kilos ¿Qué pasó en el segundo semestre?

Clase 10: Dos transformaciones negativas, la primera de las elementales y la compuesta, dan la segunda elemental negativa, siendo la transformación elemental menor que la compuesta.

Ejemplo: Luis perdió 2 kilos de peso el primer semestre del año, al final del año había perdido 5 kilos ¿Qué pasó en el segundo semestre?

Clase 11: Dos transformaciones, la primera de las elementales positiva y la compuesta negativa, dan la segunda elemental negativa, siendo la transformación elemental menor que la compuesta.

Ejemplo: Luis aumentó 2 kilos de peso el primer semestre del año, al final del año había perdido 5 kilos ¿Qué pasó en el segundo semestre?

Clase 12: Dos transformaciones, la primera de las elementales negativa y la compuesta positiva, dan la segunda elemental positiva, siendo la transformación elemental menor que la compuesta.

Ejemplo: Luis perdió 2 kilos de peso el primer semestre del año, al final del año había subido 5 kilos ¿Qué pasó en el segundo semestre?

Clase 13: Dos transformaciones positivas, la primera de las elementales y la compuesta, dan la segunda elemental negativa, siendo la transformación elemental mayor que la compuesta.

Ejemplo: Luis subió 5 kilos de peso el primer semestre del año, al final del año había subido 2 kilos ¿Qué pasó en el segundo semestre?

Clase 14: Dos transformaciones negativas, la primera de las elementales y la compuesta, dan la segunda elemental positiva, siendo la transformación elemental mayor que la compuesta.

Ejemplo: Luis perdió 5 kilos de peso el primer semestre del año, al final del año había perdido 2 kilos ¿Qué pasó en el segundo semestre?

Clase 15: Dos transformaciones, la primera de las elementales positiva y la compuesta negativa, dan la segunda elemental negativa, siendo la transformación elemental mayor que la compuesta.

Ejemplo: Luis subió 5 kilos de peso el primer semestre del año, al final del año había perdido 2 kilos ¿Qué pasó en el segundo semestre?

Clase 16: Dos transformaciones, la primera de las elementales negativa y la compuesta positiva, dan la segunda elemental positiva, siendo la transformación elemental mayor que la compuesta.

Ejemplo: Luis perdió 5 kilos de peso el primer semestre del año, al final del año había subido 2 kilos ¿Qué pasó en el segundo semestre?

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como fue antes mencionado, el estudio que a continuación se desarrolla analiza cómo influye el uso de notaciones en la resolución de problemas aditivos categoría II y IV de la categorización propuesta por Vergnaud (1991).

Es también del interés de esta investigación identificar si el uso de diferentes herramientas de notación (tabla de datos y notaciones espontáneas) es igualmente efectivo como instrumento representacional o existe alguna diferencia en cuanto al soporte y organización cognitiva que proveen y por ende uno de estos medios representacionales resulta más fructífero a la hora de resolver los diferentes problemas aditivo. De ser así, será necesario analizar si es un medio notacional el que mayor soporte provee a lo largo de los tres grados iniciales de escolaridad o si los medios notacionales varían en cuanto a utilidad, dependiendo del tipo de problema, la experiencia escolar de los niños y la manera en que los niños empleen sus recursos notacionales.

3.1 Preguntas de investigación

Este trabajo pretende dar respuesta a las cinco preguntas que a continuación se exponen:

1. ¿Qué efecto produce el uso de notaciones como lo son la tabla de datos y la notación espontánea, en las soluciones que dan los niños de los tres primeros grados de primaria frente a los problemas aditivos categoría II y IV?

2. ¿Qué tipo de notación (tabla de datos, notación espontánea) se muestra más útil para los niños al momento de resolver problemas aditivos? ¿La utilidad de dicha notación es la misma considerando el tipo de problema -si pertenece a la categoría II o IV- y la experiencia escolar -valorada según el grado de primaria que se curse-?

3. ¿De qué manera los niños logran representar las variables implícitas y explícitas, en los problemas tipo II y IV?, analizando la…

Incógnita.

Operacionalización del problema.

Los estados y transformaciones explícitos.

4. ¿Cómo afecta el uso del espacio gráfico de la tabla de datos la resolución de problemas de categoría II y IV?

5. ¿A qué soluciones y procedimientos recurren los niños cuando sus respuestas no son las convencionales?

3.2 Objetivos

Esta investigación trató de averiguar la posible influencia que dos diferentes tipos de notaciones –tabla de datos y notaciones espontáneas-, pueden tener en la resolución de problemas aditivos. Para esto se pretendió…

1. Identificar si el uso de notaciones, en este caso las tablas de datos y las notaciones espontáneas, facilitan la resolución de problemas aditivos categoría II y IV, logrando que se dé una mejor comprensión y solución de esta clase de problemas a edades menores de las encontradas por investigadores como Vergnaud y Durand (1976)

Al poseer las tablas de datos y las notaciones espontáneas características propias, será importante determinar cómo su manejo puede posibilitar un soporte cognitivo diferente, que lleve a organizaciones diversas de los conocimientos puestos en juego, por lo cual será relevante…

2. Conocer si el uso de tablas de datos y el uso de notaciones espontaneas tiene el mismo nivel de eficacia al momento de resolver problemas matemáticos.

2.1 Conocer si las notaciones muestran el mismo nivel de utilidad al momento de resolver problemas de categoría II que de categoría IV.

2.2 Identificar qué medio notacional se muestra más útil según la experiencia escolar de los niños

Desde el cálculo relacional, la identificación y comprensión de las relaciones que subyacen a un problema es fundamental para lograr un entendimiento completo de la situación, los conocimientos previos podrán facilitar la identificación de estas relaciones, por otro lado, un soporte que posibilite la percepción de las relaciones que anteriormente no habían sido percibidas podrá generar nuevo conocimiento, por consiguiente, fue necesario…

3. Examinar la manera en que los niños representan las variables implicadas en los problemas aditivos tipo II y IV y cómo éstas influyen en la respuesta dada a la incógnita.

4. Analizar cómo el uso del espacio gráfico de la tabla incide en la forma en que el niño resuelve la situación problemática presentada y el resultado al que llega.

Bajo el supuesto de que los errores de los niños, son errores cognitivos que denotan inteligencia se buscó…

5. Llevar a cabo un análisis descriptivo/explicativo que ponga de manifiesto los procesos cognitivos que subyacen a los procedimientos y soluciones a los que recurren los niños al resolver problemas aditivos de categoría II y IV con incógnita en A o B.

5.1 Identificar qué situaciones representan una mayor complejidad para los niños al momento de enfrentarse a los problemas aditivos y qué razones cognitivas hay detrás.

5.2 Demostrar que los errores infantiles no son azarosos, sino que se fundamentan en saberes que han sido aplicados a una situación para la cual no eran pertinentes, expresando así esfuerzos inteligentes por dar solución a una situación conflictiva.

3.3 Variables

El presente trabajo intentó averiguar cómo la notación empleada, la experiencia escolar del niño y la categoría del problema a resolver inciden en la resolución efectuada por los niños de los problemas aditivos presentados.

3.3.1 Variables Independientes

En esta investigación se retomaron tres variables independientes. La primera se refiere al tipo de notación empleada para resolver el problema, para este fin se retomaron 2 tipos de herramientas de representación, la tabla de datos con etiqueta y las notaciones espontáneas a través de hoja en blanco y lápiz.

La segunda variable hace referencia a la experiencia escolar de los niños entrevistados, niños que cursan primer grado de primaria, segundo y tercero. Por último, la tercera variable alude al tipo de problema presentado en las entrevistas, retomándose en específico los problemas aditivos categoría II y IV.

3.3.2 Variable dependiente

La variable dependiente alude a la resolución de los problemas aditivos efectuada por los niños. Debido a la complejidad que implica la resolución de un problema aditivo, se llevó a cabo el análisis a partir de la respuesta a la incógnita dada por los sujetos experimentales, la representación y recuperación de los estados y transformaciones explícitos, así como de la incógnita y la representación de la composición aritmética; el tipo de cálculo aritmético inmiscuido, el uso del espacio gráfico y la recuperación de los valores explícitos, momentos del problema y la incógnita.

La respuesta dada a la incógnita se analizó en términos de si la cantidad y la operación efectuada eran convencionales o no. Sin embargo, para llegar a una solución, fuera o no convencional, los niños debieron poner en juego distintos procesos mentales que los guiaron en la resolución de los problemas aditivos.

Para comprender los razonamientos que subyacían a sus respuestas fue necesario identificar cómo comprendían las variables manifestadas así como la forma en que las relacionaban, por lo que se investigó cómo representaban los estados, transformaciones, incógnita y la composición que vincula los datos del problema, de cada uno de estos aspectos se consideró lo siguiente:

- Transformaciones y estados explícitos: representa (tipos de representaciones hechas), no representa.
- Incógnita: representa (tipos de representaciones hechas), no representa.
- Operación que vincula los datos del problema: opera llegando a un resultado convencional, opera llegando a un resultado no convencional, no opera.

Además, fue fundamental identificar la manera en la que los niños hicieron uso del espacio gráfico. En la modalidad en la que se les presentó la tabla de datos se consideró si hicieron uso de ésta y cómo emplearon las etiquetas al momento de representar las variables explícitas:

- Empleo de tabla: espontáneo, por sugerencia del adulto, no hay empleo de etiquetas a pesar de que se sugiera.
- Empleo de etiquetas para representar en los recuadros de la tabla los estados y/o transformaciones: de forma exhaustiva, de forma parcial, no hay empleo de etiquetas.

Cuando se analizó el uso del espacio gráfico mediante la modalidad de hoja en blanco, se rescataron los diferentes arreglos gráficos empleados por los pequeños al plasmar la información proveniente del problema.

Finalmente, fue necesario analizar la forma en la que los niños recuperaron tanto los valores explícitos –estados y transformaciones-, como la incógnita y los momentos planteados en el problema.

3.4 Hipótesis

Las hipótesis que a continuación se presentan guiaron el desarrollo de esta investigación:

1. El uso de medios notacionales permitirá una comprensión más completa de problemas aditivos categoría II y IV a niveles educativos más tempranos que aquellos encontrados en investigaciones que no emplean notaciones de este tipo.

1.1 Los niños que forman parte de la muestra que en esta investigación se reporta podrán llegar a mejores soluciones que los reportados por Vergnaud y Durand (1976) gracias al empleo de notaciones externas.

1.2 Las respuestas de los niños que forman parte de la muestra que en esta investigación se reporta podrán ser mejores cuando se empleen tablas de datos que cuando se realicen notaciones espontáneas.

2. La tabla será un factor de apoyo en la resolución de problemas aditivos en la medida en que las variables involucradas sean ubicadas en ella.

2.1 Se espera que a los niños que cursan tercer grado de primaria las tablas les resulten más útiles que a aquellos que cursan segundo y primero.

4. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Muestra

La muestra estuvo compuesta por un total de 30 alumnos (diez por cada grado escolar, de primer a tercer año) de una escuela primaria pública ubicada en el centro de la ciudad de Celaya, Guanajuato. El rango de edad de la población entrevistada osciló entre 6 y 8 años, ninguno de ellos había reprobado algún grado escolar.

De los 30 niños entrevistados, la mitad enfrentó la tarea de resolución de problemas empleando tablas con etiquetas. La otra mitad empleó notaciones espontáneas usando hoja en blanco. Se cuidó que cada modalidad de la tarea fuera realizada por cinco niños de cada uno de los grados escolares.

Tabla 1

Composición de la Muestra

Experiencia Escolar	Tabla de datos	Notación espontánea	Total
1ro.	5	5	10
2do.	5	5	10
3ro.	5	5	10
Total	15	15	30

Se buscó que la cantidad de niños y niñas estuviera equilibrada para cada una de las modalidades de la tarea y grado escolar[16]. Aunque en la investigación

[16] En primer grado tres niños y dos niñas resolvieron los problemas apoyándose de tablas de datos, por lo que tres niñas y dos niños resolvieron empleando hoja en blanco para realizar notaciones espontáneas. En segundo fueron tres niñas y dos niños quienes usaron tabla de datos

efectuada por Vergnaud y Durand (1976) hay un número menor de respuestas correctas por parte de las niñas, los autores atribuyen esta discrepancia a factores de la metodología, más específicamente, al tamaño de la muestra retomada en la investigación.

El INEE, en sus evaluaciones EXCALE (2007), no reporta diferencias significativas entre hombres y mujeres al resolver problemas aritméticos; por lo tanto, se parte del supuesto de que el género no es una variable determinante en la resolución de problemas aditivos.

Para hacer la selección de los participantes, se pidió a las maestras de grupo que indicaran qué niños consideraban ellas poseían los conocimientos propuestos por los planes y programas de estudio vigentes, según el grado y bimestre en el que se encontraban (tercer bimestre); evitando en lo posible niños que consideraran poseían conocimientos muy por arriba o muy por debajo de los esperados a esa altura del ciclo escolar.

A los padres de los niños indicados por ellas se les envió una solicitud de permiso para participar en la investigación. Los primeros niños cuyos padres respondieron positivamente a la petición fueron los que se retomaron como parte de la muestra. La asignación de niños en cada tarea (resolución de problemas empleando notación espontánea o tabla de datos) fue al azar, únicamente cuidando equilibrio entre cantidad de niños y niñas.

4.2 Materiales e instrumentos

Se realizó una entrevista clínica a cada uno de los 30 niños, la cual se llevó a cabo en un aula de la institución en la que estudian y dentro del horario escolar, en un periodo comprendido entre finales de enero e inicios de junio del año 2009.

---

y dos niñas y tres niños realizaron notaciones espontáneas; de forma semejante se equilibró la distribución de género en tercer grado.

Se eligió este periodo de tiempo para controlar la experiencia escolar de los niños. Se consideró que a finales de enero e inicios de febrero era la época en la que los niños habrían revisado al menos la mitad de los contenidos escolares, estando así expuestos a la resolución de problemas aditivos. A pesar de las previsiones realizadas, las entrevistas se concluyeron hacia el mes de junio debido a las múltiples actividades escolares.

Todas las entrevistas fueron grabadas en video o audio y luego transcritas con el fin de tener una mejor comprensión sobre los procedimientos y explicaciones empleados por los niños.

A lo largo de la entrevista se solicitó a cada uno de los pequeños que resolvieran seis problemas aditivos: tres de categoría II y tres de categoría IV. Estos problemas corresponden a los mismos empleados por Vergnaud y Durand (1976) en su investigación.

Cabe señalar que Vergnaud y Durand (1976) presentaron un total de 12 problemas aditivos de categoría II y IV a niños con edades de 6 a 12 años que cursaban las enseñanza de primer nivel (semejante a los 5 primeros grados de la educación primaria en México). Sólo 7 de los 12 problemas fueron aplicados a la totalidad de la población debido a que los restantes resultaban de un grado de complejidad muy elevado para los niños más pequeños.

De los siete problemas presentados al total de la muestra, seis permitían hacer una comparación entre la categoría II (Estado-Transformación-Estado en los sucesivo E-T-E) y la categoría IV (Transformación-Transformación-Transformación, T-T-T) pues la operación a efectuar era la misma en ambos casos y la incógnita se ubicaba en posición semejante. Estos problemas son los que retomamos para nuestro estudio.

La comparación se realizó entre los problemas de *Pedro*[17] (E-T-E) y *Pablo* (T-T-T) donde la incógnita recaía en el estado final en uno y la transformación compuesta en otro; *Claudio* (E-T-E) y *Cristian* (T-T-T), donde la incógnita se situaba en la transformación y transformación compuesta respectivamente y finalmente la pareja de *Bernardo* (E-T-E) y *Bruno* (T-T-T) en los que la incógnita se ubicaba en el estado inicial en el primero y en la primera transformación elemental en el último.

Otra diferencia importante a considerar es que el interés de Vergnaud y Durand (1976) consistía principalmente en identificar las diferencias entre las soluciones presentadas para los problemas de categoría II y IV[18]en términos de resultado convencional o no convencional, para así poder determinar la edad aproximada a la que los niños pueden acceder a la resolución convencional de un problema aditivo.

La presente investigación no se reduce a la respuesta última de los niños, sino que pretende indagar el procedimiento que siguen cuando su resolución está mediada por las herramientas notacionales (tabla de registro y hoja en blanco). Uno de nuestros propósitos principales es el de indagar el procedimiento y razonamiento cognitivo subyacente a la respuesta –o respuestas- del niño, más allá de las posibilidades de llegar a respuestas correctas en la resolución de los problemas. [19]

---

[17] Para fines de identificación del problema se utiliza el nombre de los personajes que juegan en cada uno de los problemas.

[18] Es importante mencionar que en el trabajo de Vergnaud y Durand (1976), se hace mención de únicamente 5 categorías de problemas aditivos, a diferencia del trabajo posterior de Vergnaud (1991) donde identifica 6 categorías. Una aclaración adicional se hace necesaria, en el trabajo de 1976 se analiza la segunda y tercera categoría de problemas aditivos, equivalentes a la segunda y cuarta categoría de la categorización propuesta por Vergnaud en 1991, que es la que en este trabajo se retoma.

[19] No significa que a Vergnaud y Durand (1976) no les interesen los procedimientos empleados por los niños, simplemente, el propósito de su estudio fue diferente al de la

El presente trabajo demandó hacer una traducción lo más fiel posible de los seis problemas usados por Vergnaud y Durand (1976). Es importante señalar que dado que los niños se confundían respecto a la circunstancia problemática involucrada cuando dos problemas presentados de manera contigua aludían a las mismas cantidades, un mínimo de cambios motivados por la equivalencia absoluta en las cantidades involucradas fueron introducidos (este fue el caso del problema de *Pablo)*. Optándose por utilizar el antecesor de los numerales empleados en la versión original del problema.

A continuación se exponen los problemas aditivos utilizados correspondientes a las categorías II y IV, propuesta por Vergnaud (1991) en el orden que fueron presentados a los niños:

Tabla 2

Problemas presentados a los estudiantes durante las entrevistas

Categoría	Descripción	Estructura del problema
II	Pedro tiene 6 canicas. Juega una ronda de canicas y pierde 4. ¿Cuántas canicas tiene al finalizar el juego?	6-4=(2)[20]

investigación que aquí se presenta. Ambos autores señalan en su trabajo de 1976 que sería relevante en posteriores investigaciones analizar los procedimientos no canónicos que siguen los niños y cómo estos van modificándose, intentando averiguar si existe una posible evolución psicogenética.

[20] La escritura entre paréntesis corresponde a la incógnita planteada, es decir, la respuesta solicitada a los niños.

IV	Pablo juega dos rondas en un juego de canicas. En la primera ronda gana 5 canicas. En la segunda ronda pierde 3 canicas. ¿Qué sucedió en el juego?	x+5-3=x(+2)
II	Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde 7 canicas. Al finalizar el juego tiene 3 canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?	(10)-7=3
II	Claudio tiene 5 canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene 9 canicas. ¿Qué pasó durante el juego?	5(+4)=9
IV	Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana 5 canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado 9 canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?	x+5(+4)=x+9
IV	Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde 7 canicas. Después de las dos rondas, ha ganado 3 canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?	x+(10)-7=x+3

En cuanto a las entrevistas hechas en ambas investigaciones, hay una diferencia importante en la forma en que se desarrollaron. La investigación de Vergnaud y Durand (1976) se llevó a cabo de la siguiente manera: presentaron a los niños entrevistados los problemas a través de un ficha de cartón donde el problema estaba escrito a mano en tinta azul, y los datos relevantes involucrados estaban escritos en tinta roja, el enunciado era leído por el entrevistador y se dejaba al alcance de la vista del niño el cartón con el problema impreso, así como el diseño sagital correspondiente al problema.

La entrevista no admitía uso de papel o lápiz; sin embargo, los niños podían hacer uso de sus dedos. Siempre pedían explicaciones de cómo habían llegado los niños a determinada respuesta. Cuando la respuesta no era convencional, el entrevistador volvía a leer el problema, la pregunta formulada en el problema o pedía una explicación sobre cómo había llegado a esa solución.

A continuación se describe en detalle la manera como se realizaron las entrevistas a los niños de la muestra. El niño era introducido a un aula donde se llevaron a cabo todas las entrevistas, se le explicaba brevemente el motivo de su visita -ayudar a resolver unos problemas sobre niños que jugaban a las canicas-, la entrevistadora se aseguraba de que los niños conocieran las canicas y explicaba mediante un ejemplo qué es una ronda –palabra que se constató no siempre era comprendida por los niños, sobre todo por los más pequeños-.

Cada una de las entrevistas fue formulada verbalmente, sin presentar ningún tipo de material impreso, esto debido a que los niños de la muestra son alfabetizados formalmente al ingresar a primer año de primaria y algunos de los que cursaban primer grado aún no consolidaban el sistema gráfico alfabético (SGA); sin embargo, la lectura de los problemas por parte de la entrevistadora no fue limitada en ningún momento, se hacía saber a los niños que podían solicitar cuantas relecturas fueran necesarias.

La presentación de los 6 problemas siguió un mismo orden para todos los niños. Los 2 primeros problemas – de *Pedro* y *Pablo*- funcionaron como control, no se permitía hacer uso de papel y lápiz, ni de ninguna otra herramienta -como fichas, palitos, o cualquier tipo de marca gráfica-para resolverlos. Sin embargo, se permitió a los niños que así lo requirieron utilizar sus dedos. Igual que Vergnaud y

Durand (1976), no se daba ningún tipo de retroalimentación sobre si la respuesta era o no correcta. No obstante, para cualquier respuesta y procedimiento, fueran convencionales o no, siempre se pedía al niño una explicación de su resolución al problema. Por ser una entrevista clínica, se iba realizando el interrogatorio según las respuestas dadas por cada niño, la entrevistadora dejaba de cuestionarlo sobre su actuación hasta que el niño daba una respuesta y/o argumentos estables y contundentes.

Otra variación respecto a la consecución de la entrevista de Vergnaud y Durand (1976) fue el uso de las notaciones aquí empleadas, correspondientes a dos diferentes tipos: el primero, una tabla de datos con etiquetas y el segundo, correspondiente al uso de una hoja en blanco donde el niño podía realizar cualquier tipo de notación espontánea.

Las tablas empleadas tenían como medidas 8cm de alto y 14cm de largo, impresas en tinta negra, en media hoja de papel bond blanco tamaño carta. Estaba compuesta por 8 recuadros de forma 2 columnas por 4 filas; los 4 recuadros de la columna izquierda indicaban mediante una etiqueta las posibles variables o elementos a identificar (inicio o estado inicial, primera ronda y segunda ronda relativas a las transformaciones efectuadas y fin o estado final o transformación compuesta). [21]

[21] En ninguno de los problemas se necesita hacer uso de las 4 etiquetas, según la categoría del problema y la ubicación de la incógnita será labor de quien emplea la tabla determina cuáles de las variables manejadas serán pertinentes cifrar.

Inicio	
Primera ronda	
Segunda ronda	
Final	

Figura 4. Tabla de registro dada a los niños para realizar notaciones

Para llevar a cabo la sistematización de los datos obtenidos en cada entrevista, se retomó de la investigación de Alvarado y Brizuela (2010) un protocolo de análisis de datos que fue modificado según los objetivos de esta investigación, en él se anotaron datos de identificación: del niño, de los problemas y la modalidad de la tarea. Por cada problema se registraba el manejo hecho de las variables: la respuesta dada a la incógnita, la forma en que representaban la composición de los estados, transformación o ambos (operación), la representación que hacían de las cantidades explícitas (estados y transformaciones), la representación de la incógnita (cantidad desconocida) desde el comienzo, la representación de la incógnita una vez resuelto el problema, la recuperación de la información en la justificación del procedimiento, la resolución del problema o cálculo aritmético involucrado y si el pequeño preguntaba por la cantidad inicial. Además, para aquellos que empleaban la modalidad de tabla, se registró el uso que hacían de la tabla y si representaban en los recuadros de ésta los estados y/o transformaciones. Finalizaba con un apartado para realizar observaciones adicionales.

5. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Como ya se señaló en el capítulo anterior, se presentaron a treinta alumnos seis problemas aditivos en el mismo orden, tres de ellos de categoría II y los tres restantes de categoría IV; 15 niños usaron tablas con etiquetas para resolver los problemas y los 15 restantes hojas en blanco.

El análisis de los datos se organizó a través de siete categorías que permitieran responder a las preguntas de investigación planteadas en este trabajo, las variantes al interior de cada categoría fueron obtenidas con base en las respuestas de los niños.

En los 2 primeros problemas –el primero perteneciente a la categoría II y el segundo a la categoría IV-, no se permitió el uso de papel y lápiz por tratarse de reactivos control que permitieran asegurarse que los niños poseían la competencia matemática necesaria para enfrentarse a los problemas subsiguientes. Por lo anterior estos problemas sólo se retoman en las categorías de análisis uno y cinco: respuesta a la incógnita y cálculo aritmético efectuado, respectivamente.

A continuación se describen las respuestas de los niños de acuerdo con cada una de las siete categorías de análisis y las subdivisiones que las conforman. La información obtenida se presentará a continuación de acuerdo al orden de las preguntas de investigación planteadas; sin embargo, cada una de las categorías puede responder a una o más preguntas de investigación.

5.1 Respuesta a la incógnita

Esta categoría aborda la resolución dada a la incógnita o resultado del problema. Aquí se consideraron tanto el valor de la respuesta, como el tipo de operación efectuada. En total, se observaron 8 diferentes variantes: la primera hace referencia a respuestas correctas, la segunda y tercera a respuestas parcialmente correctas, mientras que las cinco restantes a soluciones incorrectas.

1. La primera de ellas alude a la *respuesta donde la cantidad es correcta al igual que la operación*, ejemplo (Aarón, 3, P3, TD):

(Frente al problema: Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?)
A: Al principio perdió siete canicas, al final tenía tres, entonces al principio tenía diez.
E: ¿Cómo supiste que al principio tenía diez?
A: Le sumas siete más tres son diez y como perdió siete le quedaron tres.

2. La segunda variante abarca las respuestas donde *la cantidad es correcta* pero llegando a ella *a partir de una operación incorrecta*, a continuación se muestra el único caso presentado en las 180 respuestas dadas por los niños. Ejemplo (Karla, 2, P1, HB)[22]:

(Frente al problema: Pedro tiene seis canicas. Juega una ronda de canicas y pierde cuatro. ¿Cuántas canicas tiene al finalizar el juego?)
K: Y… ¿Dos?
E: ¿Cómo supiste que tenía dos?
K: Mmm, con una adivinanza.
E: A ver, ¿en esa adivinanza qué pensaste?
K: Es como, adiviné así como si a cuatro le quitaras dos.
E: A ver, ¿cuántas decía, te acuerdas cuántas decía que tenía Pedro?
K: Ehh, cuatro.
E: ¿Y cuántas perdió, te acuerdas?
K: Dos.
E: A ver, te la voy a leer: Pedro tiene seis canicas. Juega una ronda de canicas y pierde cuatro. ¿Cuántas canicas tiene al finalizar el juego?
K: Dos y perdió cuatro.
E: ¿Entonces al finalizar el juego cuántas tiene?
K: Dos.
E: ¿Y cómo me dices que supiste que tenía dos?
K: Con una adivinanza.
E: ¿Y en esa adivinanza qué pensaste?
K: En la, en, como en una resta.
E: ¿Y qué restaste?
K: Al número cuatro le resté dos.

3. La variante tres se refiere a la respuesta en la que *la cantidad que se da como respuesta es incorrecta, pero la operación efectuada es factible*. En esta variante se englobaron dos situaciones diferentes, aquella en la que el niño

[22] En lo sucesivo cuando se haga referencia al fragmento de alguna entrevista que ejemplifique el tipo de variante que se está explicando, se indicará entre paréntesis el nombre del niño entrevistado, el grado escolar -marcado por el numeral correspondiente al grado-, el problema del que se trata -utilizando una P y el número de problema que se aborda- y la modalidad de registro –TD para tabla de datos y HB para hoja en blanco.

efectúa el cálculo aritmético convencional pero al realizarlo incurre en algún error. La segunda situación se da cuando el cálculo aritmético es acertado, llevando al niño a emitir un numeral que es correcto; sin embargo, no logra saber si el número de canicas se gana o se pierde o equivoca la transformación. Un ejemplo de este último caso se presenta a continuación (Andrea, 3, P2, HB):

(Frente al problema: Pablo juega dos rondas en un juego de canicas. En la primera ronda gana cinco canicas. En la segunda ronda pierde tres canicas. ¿Qué sucedió en el juego?)
A: Que perdió.
E: ¿Cuántas perdió?
A: Dos.
E: ¿Cómo le hiciste para saber que perdió dos?
A: Al cinco le quitamos los tres y me dio el resultado que fue dos.
E: A ver, a cinco le quitaste tres y entonces te dio dos ¿y esas dos las perdió o las ganó?
A: Las perdió.

4. La cuarta situación encontrada es aquella en la que *tanto la respuesta a la incógnita como la operación son incorrectas*, ejemplo (Cecilia, 1, P4, TD):

(Frente al problema: Claudio tiene cinco canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Qué pasó durante el juego?)
E: A ver, ¿qué fue lo que hiciste Cecy?
C: Sumarlo.
E: ¿Qué sumaste?
C: Cinco mas nueve.
E: Ah, ¿y qué te dio?
C: El catorce.

5. Una *respuesta incorrecta a la incógnita y la ausencia de operaciones aritméticas* caracteriza la quinta situación. Aquí, aunque a simple vista las respuestas pueden parecer completamente azarosas por no guardar relación alguna con los datos involucrados en los problemas, al efectuar un análisis más detallado se observa que en seis de los ocho casos la respuesta dada a la incógnita retoma datos manejados en problemas anteriores, ejemplo (Luis, 1, P5, HB):

(Frente al problema: Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana cinco canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado nueve canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?)
L: Ganó cinco.
E: ¿Y tú cómo supiste eso?
L: En el principio.
E: Ah, se ganó cinco en el principio, pero aquí te dice, en la segunda ronda, la segunda vez que jugó ¿cuántas ganó? ¿cuántas habrá ganado José Luis?
L: ¿Siete?
E: ¿Cómo le hiciste para saber que siete?

L: (Pasan quince segundos, no responde)
E: ¿Hay algo que quieras anotar para que te asegures de cuál es el resultado?
L: (Niega)

6. En la variante seis se agruparon aquellas *respuestas en las que no había operaciones aritméticas* y donde el niño respondía a la incógnita de forma incorrecta *debido al movimiento o rotación que hacía de los datos*; es decir, cuando la incógnita se presentaba en “a” los niños movían los datos presentados de manera que la incógnita quedara en “b” o “c”, y si el problema planteaba la incógnita en “b” hacían el traslado a “c”, ejemplo (Paz, 2, P3, HB):

(Frente a: Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?)
E: Ahora vamos a ver qué pasó cuando jugó Bernardo, para el problema de Bernardo yo te voy a dar una hojita y un lápiz para que tú vayas anotando ahí lo que te sirva para resolver el problema y que tú estés bien segura del resultado y luego tú me lo vas a explicar. Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?
P: [7-3=4] Le sobraron cuatro.
E: ¿Cómo le hiciste para saber que le sobraban cuatro?
P: Haciendo una resta.
E: A ver, ¿qué restaste?
P:Siete, a siete le quitas tres, le sobraron cuatro.
E: ¿Y esas cuatro cuándo las tenía, al inicio, al final en la ronda o cuándo fue que salieron esas cuatro?
P: Al final.
E: Oye, y aquí lo que te preguntan es cuántas canicas tenía al inicio.
P: Tenía siete.
E: ¿Cómo le hiciste para saber que tenía siete?
P: Porque me acordé.

7. El séptimo foco de análisis para la categoría uno fue la *anulación del valor de la incógnita* por no aparecer dentro de las informaciones presentadas en los problemas, ejemplo (Monserrat, 1, P6, HB):

(Frente a: Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?)
E: A ver, ahorita me vas a ir de poquito en poquito, ¿Dónde está…? Dice, Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda. Ahí dónde indicas tú lo que pasó en la primera ronda.
M: Esto, con el cero (señala el 0)
E: Luego la segunda ronda donde pierde siete canicas ¿Dónde indicas lo que pasó en la segunda ronda?
M: (Borra =3) [-7] Con el siete.
E: Con el siete, a ver, ahí le pusiste esta rayita (señala una rayita horizontal junto al 7) ¿Esta rayita qué significa?
M: Menos siete.
E: ¿Por qué le pusiste menos siete?
M: Porque luego perdió siete.

E: Ah, y luego qué… Dice, después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total
M: Aquí explico con el deste, (señala el signo) igual.
E: Mff.
M: Y quiere decir el tres, esto me quiere dar a entender que yo al último le doy tres canicas.
E: Muy bien, y, ¡oye!, ¿y cero más menos siete te da tres?
M: No.
E: ¿Entonces porqué lo escribiste así?
M: Porque esa es de la manera en que yo lo entiendo.
E: Entonces dice ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego? ¿Qué pasó durante la primera ronda?
M: Ni ganó ni perdió.

8. El último valor agrupado fue aquel en donde *la respuesta a la incógnita fue incorrecta por compensación*, en estas situaciones, el niño da por respuesta una cantidad que compense a aquella que se ha perdido, ejemplo (Fernando, 2, P6, TD):

(Frente a: Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?)
E: Al final se da cuenta que salió del juego ganando tres canicas, entonces en la primera ronda Fernando ¿qué habrá pasado?
F: Había ganado siete canicas.
E: A ver, ¿cómo supiste eso?
F: Porque en la segunda ronda le quitaron siete canicas.

5.1.1 Resultados generales

Para la categoría 1 denominada respuesta a la incógnita, se registraron un total de 180 respuestas -treinta sujetos que responden a seis problemas- La variante con mayor número de respuestas fue la primera, cantidad y operación correctas, con 97 de los 180 posibles casos (53.89%), seguida por un total de 37 respuestas (20.56%) de la subdivisión donde la cantidad es incorrecta debido al movimiento de los datos y no hay operacionalización. Ninguna de las seis variantes restantes obtuvo un porcentaje de respuestas mayor al 10%. Esta información se presenta en la Figura 5.

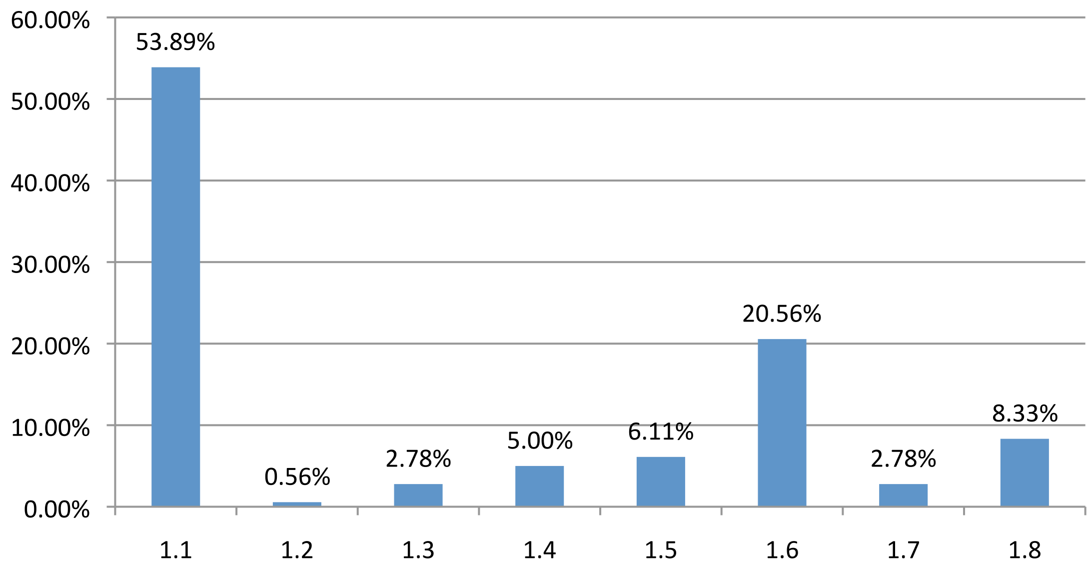


Figura 5. Categoría 1. Frecuencia de respuestas a partir del análisis de ocho variantes

Con fines estadísticos y buscando propiciar una mayor comprensión sobre el comportamiento de los datos, nos pareció pertinente reagrupar las ocho variantes en 3 subclases:[23]

a) respuestas correctas, tanto en la solución dada a la incógnita como en el procedimiento efectuado –coincidente con la variante 1.1-;

b) respuestas parcialmente correctas, las cuales demuestran cierta comprensión de las informaciones planteadas en los problemas, ya sea a través de un resultado o de una operación correcta, aquí se agrupan las variantes 1.2 y 1.3;

c) respuestas incorrectas, donde tanto la operación aritmética involucrada como la respuesta a la incógnita fueron incorrectas –variantes de la 1.4 a la 1.8-

Visto desde esta re-categorización, los resultados son los siguientes: las respuestas netamente correctas ascienden a 97 (53.89%), aquellas que denotan

[23] En otro momento de este análisis, dos de estas tres subclases se unen –respuesta correcta y parcialmente correcta- quedando exclusivamente dos grandes rubros: respuesta correcta y respuesta incorrecta; esto debido a la prueba estadística empleada.

comprensión acerca de la forma en que se relacionan los datos involucrados en los problemas, aunque no sean del todo correctas hacen un total de 6 (3.33%) y son 77 (42.78%) las respuestas en las que el valor de la incógnita no es el convencional y el procedimiento empleado denota escasa comprensión acerca de las relaciones implicadas. Esta información nos deja ver que las respuestas de los niños se polariza en los extremos: o dan respuestas correctas o éstas son francamente no pertinentes.

Al analizar las 8 variantes de forma independiente, la distancia entre las que tienen mayor cantidad de eventos es de 60 casos de diferencia; en cambio, al reagrupar las 8 subdivisiones de la categoría en tres subclases, la distancia disminuye notoriamente a 20 respuestas de diferencia. La figura 6 resume esta información.

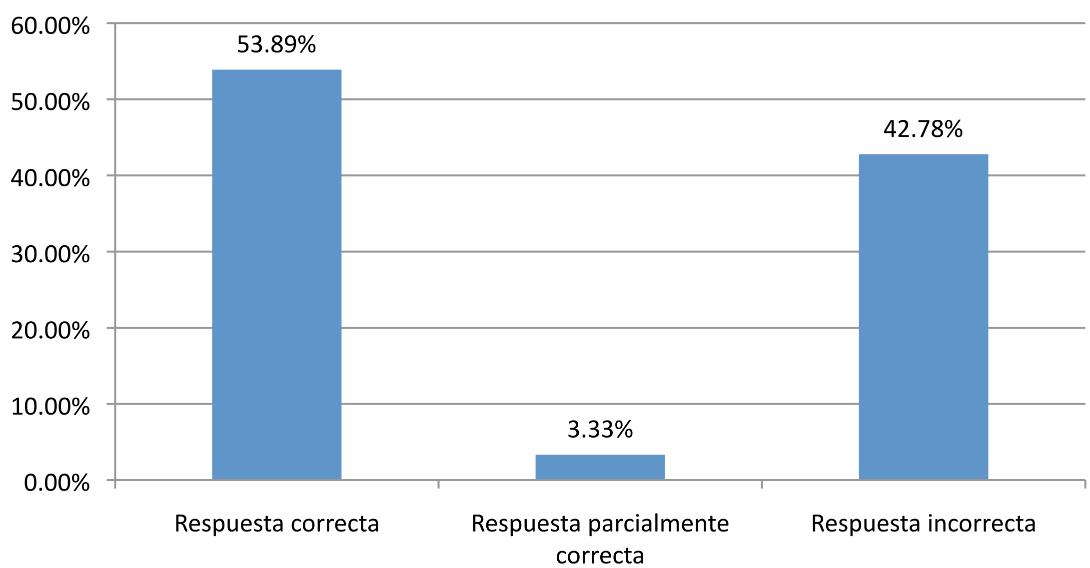


Figura 6. Categoría 1. Frecuencia de respuestas a partir de 3 subclases

A partir de este momento se explicará el comportamiento de los datos exclusivamente a partir de las 3 subclases, buscando con esto realizar un análisis más sintetizado que dé cuenta de los resultados de una forma más ágil y comprensible.

5.1.2 Resultados desde la modalidad de registro empleada

A continuación se presentan los resultados atendiendo a las respuestas de los niños de acuerdo con las modalidades de la tarea: uso de tabla de datos u hoja en blanco. Cada uno de los grupos a partir de la modalidad de registro empleada en la tarea, dio un total de 60 respuestas; considerando las soluciones dadas a los problemas del tres al seis (recordamos a lector que los dos primeros problemas control, no requirieron el uso de notaciones)

Cuando la representación se hizo mediada por la tabla de datos, la mitad de las respuestas fueron incorrectas, 30 de los 60 casos (50.00%). Las soluciones correctas quedaron ligeramente por debajo con un 48.33% y solamente se presentó un caso (1.67%) en que la respuesta fue parcialmente correcta.

Al utilizar hoja en blanco las respuestas incorrectas fueron más frecuentes que en la modalidad de uso de tabla de datos, presentándose 44 respuestas de este tipo (73.33%). En consecuencia, las soluciones correctas decrecieron presentándose sólo en 15 casos (25.00%). Las parcialmente correctas tuvieron la misma incidencia que cuando se usaron tablas (1.67%).

Se muestra una discrepancia de 14 respuestas correctas más, cuando se usa la modalidad de tabla de datos que cuando se usa para registro la hoja en blanco. La figura7 muestra lo dicho anteriormente.

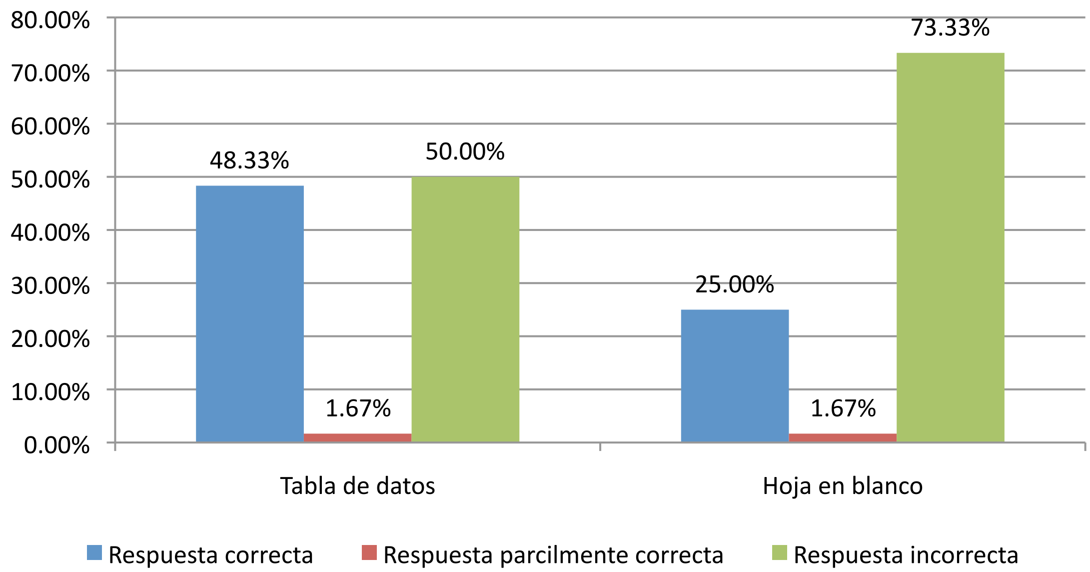


Figura 7. Categoría 1. Respuestas según la modalidad de registro empleada

Uno de los objetivos de esta investigación fue conocer si el uso de tablas de datos y el uso de notaciones espontáneas tienen el mismo nivel de eficacia al momento de resolver problemas aditivos. Con este fin, se analizó estadísticamente[24] a través de la prueba *t*, si la diferencia entre la frecuencia de respuestas correctas según la modalidad de registro empleada –tabla u hoja-, era significativa (t=2.357, gl=28, ns=.026). Los resultados muestran que las notaciones hechas en tablas fueron un medio de representación externa más eficiente al momento de enfrentarse los niños a la resolución de problemas aditivos.

5.1.3 Resultados por grado

A continuación se analizará dentro de la categoría 1 de respuesta a la incógnita, la resolución dada a la incógnita comparando las respuestas a partir del

[24] Para llevar a cabo la sistematización de datos, se utilizó el programa Excel de Microsoft; en dicho programa se realizó el vaciado de los resultados obtenidos en cada pauta de análisis, y se elaboraron recuadros que sintetizaban esta información. Para efectuar el análisis estadístico se empleó el Statistical Package for the Social Sciences (SPSS).

grado escolar de los niños de la muestra. Para esto se presenta la figura 8 que muestra la distribución de las respuestas de los niños de los tres grados entrevistados.

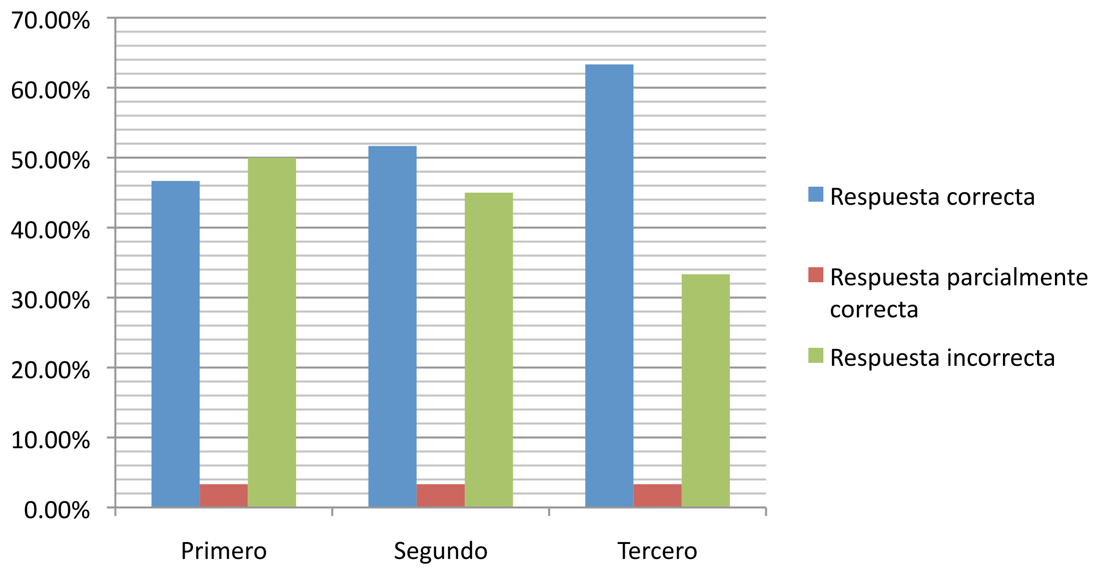


Figura 8. Categoría 1. Frecuencia de respuestas por grado escolar

La figura anterior permite apreciar que, salvo en primer año, las respuestas más frecuentes fueron las correctas. Así mismo, la presencia de este tipo de respuestas se fue incrementando en relación directa con el grado escolar, de tal manera que los niños de tercer grado fueron los que presentaron mayor cantidad de respuestas correctas. En sentido inverso se comportaron las respuestas incorrectas donde los niños mayores -tercer año- presentaron menor número de éstas que los de primero y segundo. Finalmente, las respuestas parcialmente correctas -3.33%- se presentaron en la misma proporción entre los niños de los diferentes grados escolares.

En primero, entre la subclase de respuesta correcta y respuesta incorrecta hay una diferencia del 3.33%, en segundo grado hay una separación de 6.67% y en tercer grado la discrepancia aumenta considerablemente hasta el 30.00%.

El análisis estadístico efectuado a través de ANOVA (*gl*=2, *ns*=.273) no revela una diferencia significativa en la frecuencia de respuestas correctas, de los niños de los tres diferentes grados.

5.1.4 Resultados por modalidad de registro y grado escolar

Al realizar el análisis entrecruzando dos de las variables independientes que esta investigación aborda, el tipo de modalidad de registro y el grado escolar de los niños, los datos se dividen en un total de seis agrupamientos, cada uno de los cuales expresa 20 respuestas[25]. A continuación se presenta una tabla que expone el porcentaje por tipo de respuesta a partir del grado y modalidad de registro empleada por el niño.

Tabla 3

Categoría 1. Porcentaje de respuestas por modalidad de registro empleada y grado

Tipo de respuesta	Primero		Segundo		Tercero	
	Tabla de datos	Hoja en blanco	Tabla de datos	Hoja en blanco	Tabla de datos	Hoja en blanco
Respuesta correcta	50.00%	5.00%	30.00%	35.00%	65.00%	35.00%
Respuesta parcialmente correcta	0.00%	5.00%	0.00%	0.00%	5.00%	0.00%
Respuesta incorrecta	50.00%	90.00%	70.00%	65.00%	30.00%	65.00%

[25] Recuérdese que sólo se toman las respuestas de los problemas tres al seis.

En los grados de primero y tercero se evidencia un mayor porcentaje de aciertos cuando se usó la tabla de datos que cuando se empleó la hoja en blanco, la excepción se da en segundo grado donde por un 5% los resultados son mayores cuando se usa hoja en blanco.

Esta diferencia puede ser debida al tamaño de la muestra, así como a las dificultades que conllevan la comprensión y uso de la tabla de datos. Donde los niños que recién inician la educación primaria parecen estar más abiertos al uso de distintos mediadores; conforme avanzan en la escolaridad las situaciones conflictivas que enfrentan los hacen refugiarse en recursos más conocidos para ellos –notaciones espontáneas-, para finalmente, gracias a la seguridad que adquieren con la experiencia, sentirse cómodos haciendo uso de nuevas herramientas.

Aquellos niños de tercer grado que usaron la tabla de datos fueron el grupo que mayor porcentaje de aciertos tuvo -65.00%-, continuando el grupo de niños de primero que usó tabla, con un 50.00%, una diferencia de sólo el 15.00%. En cambio, el grupo con menor porcentaje de respuestas convencionales es el de primer grado que usa hoja en blanco, con solamente el 5%. La discrepancia entre el porcentaje del grupo con mayor tasa de soluciones apropiadas y el de menor es del 60.00%.

Comparando los resultados de los grupos que usaron la tabla de datos contra los que emplearon la hoja en blanco se observa que en primer grado es cuando se da la mayor discrepancia en el nivel de respuestas correctas a la incógnita con un 45.00%, seguido por tercer grado en el que la diferencia es de 30.00% y finalmente en segundo la divergencia es de sólo el 5.00%, esta vez a favor de aquellos que usaron hoja en blanco. No obstante, estas diferencias resultan significativas únicamente en primer grado (t=4.811 gl=8, ns=.001). [26]Los resultados mencionados se observan en la figura 9.

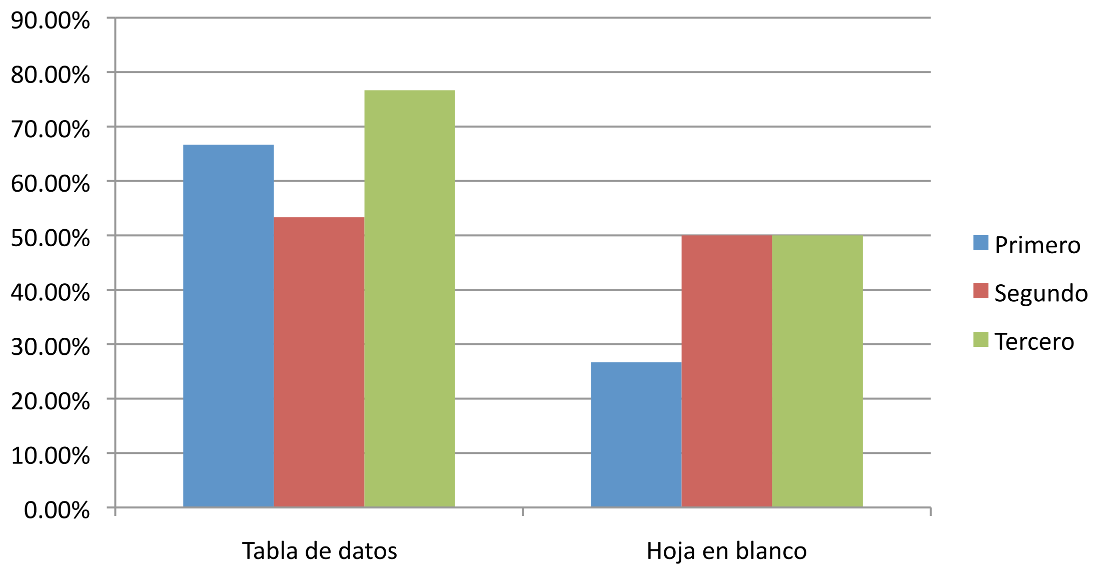


Figura 9. Categoría 1. Frecuencia de respuestas correctas por grado y modalidad de registro

5.1.5 Resultados por tipo de problema

A continuación se analizará la distribución de las respuestas de la categoría 1 -respuesta a la incógnita- desde los seis diferentes tipos de situaciones problemáticas presentadas. Recordamos al lector los problemas planteados a los niños, así como las categorías a las que corresponden, la estructura aritmética que lo forma y el lugar en el que recae la incógnita.

[26] Para segundo grado (t=-.365, gl=8, ns=.724). Para tercer grado (t=1.414, gl=8, ns=.195).

Tabla 4

Descripción de los problemas

Categoría (Vergnaud, 1981)	Descripción	Estructura del problema	Ubicación de incógnita
II (E-T-E)	Problema 1: Pedro tiene 6 canicas. Juega una ronda de canicas y pierde 4. ¿Cuántas canicas tiene al finalizar el juego?	6-4=(2)[27]	"C"
IV (T-T-T)	Problema 2: Pablo juega dos rondas en un juego de canicas. En la primera ronda gana 5 canicas. En la segunda ronda pierde 3 canicas. ¿Qué sucedió en el juego?	x+5-3=x(+2)	"C"
II (E-T-E)	Problema 3: Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde 7 canicas. Al finalizar el juego tiene 3 canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?	(10)-7=3	"A"
II (E-T-E)	Problema 4: Claudio tiene 5 canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene 9 canicas. ¿Qué pasó durante el juego?	5(+4)=9	"B"
IV (T-T-T)	Problema 5: Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana 5	x+5(+4)=x+9	"B"

IV (T-T-T)	Problema 5: Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana 5 canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado 9 canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?	x+5(+4)=x+9	“B”
IV (T-T-T)	Problema 6: Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde 7 canicas. Después de las dos rondas, ha	x+(10)-7=x+3	“A”

En adelante se hará referencia a los problemas por el número de presentación durante la entrevista o por el nombre del niño que juega; es decir, será problema 1 o problema de *Pedro*, problema 2 o de *Pablo*, problema 3 o de *Bernardo*, etc.

Para el análisis siguiente fueron considerados los 6 problemas planteados a los niños (a diferencia de los apartados de arriba en los que se excluyeron los problemas de control). La figura 10 permite observar el comportamiento de las respuestas dadas a cada tipo de problema.

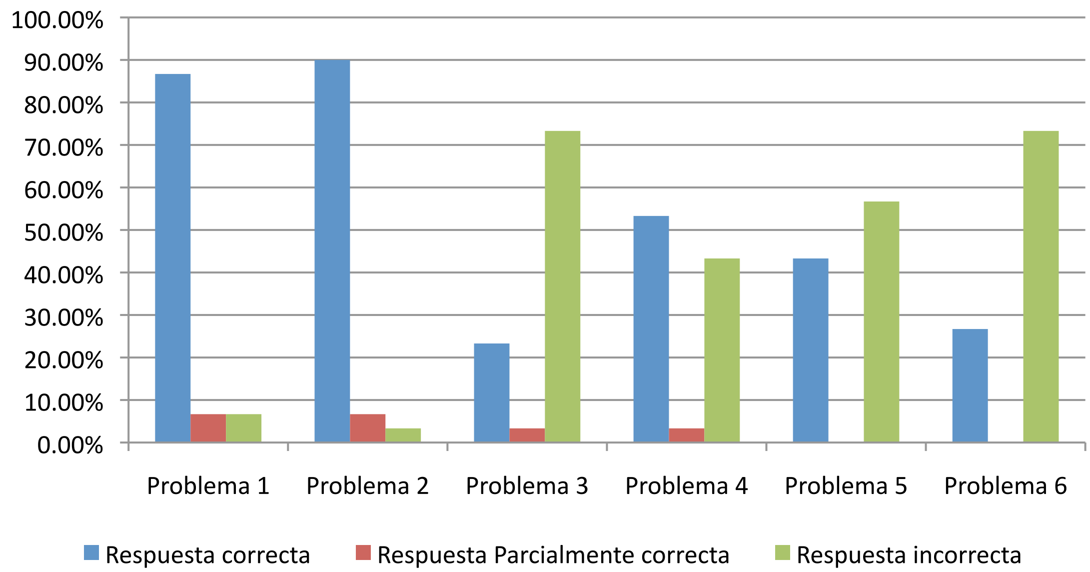


Figura 10. Categoría 1. Respuestas por tipo de problema

En forma general se puede expresar que los problemas 1, 2 y 4 muestran predominio de respuestas correctas, mientras que en el 3, 5 y 6 la respuesta incorrecta es la que tiene mayoría. Las respuestas parcialmente correctas se agrupan sólo en los primeros cuatro problemas presentados.

Estos resultados no son de extrañar pues de los seis problemas presentados, el cálculo relacional implicado en los dos primeros es el más sencillo (Vergnaud, 1991). Sin embargo, cabe mencionar que aunque por diferencia de un suceso, el problema 1 (*Pedro*) obtuvo menos aciertos que el 2 (*Pablo*). Asimismo, el segundo problema, aunque de dificultad menor comparada con los otros problemas presentados, implica un cálculo relacional más complejo que el primer problema.[28]

De acuerdo con las repuestas de los niños, los problemas 4 y 5 (*Claudio y Cristian*) –ambos con incógnita en “b”, aunque de diferente categoría- mostraron un grado intermedio de dificultad.[29] Estos dos problemas fueron más difíciles para los niños entrevistados que el primero y segundo pero menos complicados que el tercero y el sexto. Estas cuarta y quinta situaciones problemáticas tuvieron un nivel de acierto de 16 (50.00%) y 13 (43.3%) respuestas respectivamente. Estos datos son coincidentes con los recabados por Vergnaud y Durand (1976) donde más niños pudieron dar una resolución acertada a la incógnita en el problema de *Claudio* que en el de *Cristian*.

Asimismo, a partir de los resultados, podemos decir que los dos problemas de mayor complejidad para los niños fueron el tercero y sexto –de *Bernardo* y *Bruno,* que plantean la incógnita en “a” como rasgo en común-,[30] esto se esperaba, pues distintos trabajos (Vergnaud y Durand, 1976. Vergnaud, 1981) han puesto de manifiesto que la complejidad del cálculo implicado en ellos es grande y hasta edades avanzadas (11 o 12 años) se logra su resolución por la mayoría de los niños. Cabe destacar que entre estos dos problemas el de *Bruno* de categoría IV, representó mayor complejidad que el de *Bernardo,* de categoría II.

7 niños de 30 dieron respuestas acertadas al momento de resolver el problema de *Bernardo* lo cual equivale al 23.33% y 8 casos que hacen el 26.66% cuando se trató del problema de *Bruno*, este último de categoría IV y de mayor complejidad que el de *Bernardo* de categoría II.

A manera de resumen, y acorde con los resultados obtenidos a través del índice de dificultad, se puede decir que los problemas planteados representaron diferentes grados de dificultad. Del más simple al más complejo se identificaron tres niveles: los problemas 1 y 2 como los más sencillos, el 4 y 5 como problemas de dificultad intermedia y el 3 y 6 como los más complicados.

En algunas de las entrevistas efectuadas se observó que los niños daban respuesta acertada y, en general, una solución a la incógnita más elaborada a un problema de amplia complejidad pero no brindaban la respuesta convencional a algunos problemas con un cálculo relacional de menor dificultad. Esto será mejor observado cuando se analice el comportamiento de los datos para cada uno de los problemas desde el uso de las dos modalidades empleadas, tabla de datos y hoja en blanco; donde uno de los formatos de registro parece posibilitar una mayor reorganización cognitiva incidiendo en un desempeño más rico conforme se avanza en las entrevistas.

5.1.6 Resultados por tipo de problema y modalidad de registro

Al analizar las respuestas dadas por los niños a los seis diferentes problemas en combinación con la modalidad de registro empleada, la distribución de los datos muestra diferencias importantes, reflejado en la onceava figura.

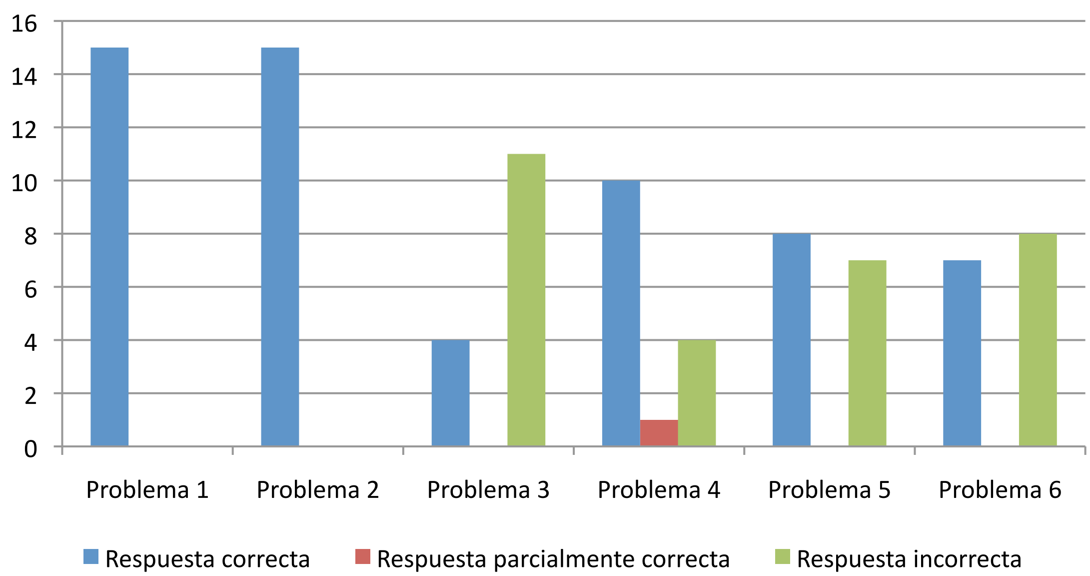


Figura 11. Categoría 1. Frecuencia de respuestas por problema, al emplear la tabla de datos

Para el grupo que usó como medio de representación la tabla de datos, las respuestas a los problemas uno y dos se ubican en su totalidad -15 casos- en la subclase de respuesta correcta; mientras que los problemas 4 y 5 obtuvieron el

67.00% y el 53.00% de respuestas acertadas, respectivamente. De los seis problemas, sólo el de Claudio presenta una respuesta parcialmente correcta.

El menor número de soluciones convencionales fue para el tercer problema de *Bernardo* (27.00%) y no el sexto de *Bruno* (47.00%) que implica un cálculo relacional más complejo –entre ambos se dio una discrepancia de 3 eventos-. Consideramos que esto puede deberse al uso cada vez más completo del medio notacional de la tabla de datos, que fue posibilitando una comprensión creciente de las situaciones presentadas, permitiéndoles a los niños replantear y reorganizar las informaciones proporcionadas logrando así un mayor número de aciertos.[31]

A continuación se analizan las respuestas a los seis problemas, de los niños que usaron la hoja en blanco como modalidad de registro. Esta información se resume en la figura 12.

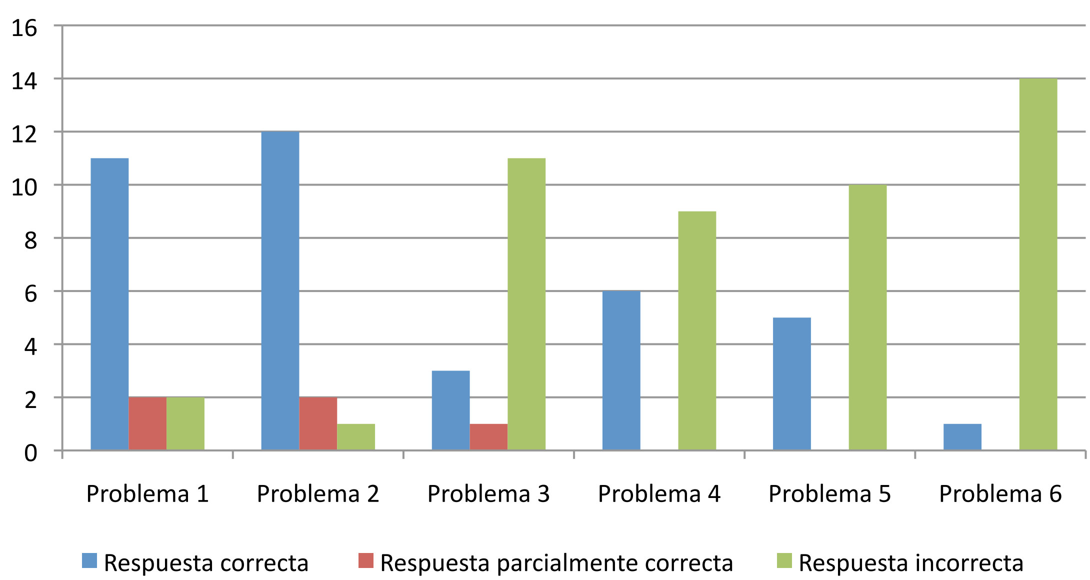


Figura 12. Categoría 1. Frecuencia de respuestas por problema, al emplear la hoja en blanco

Semejante al tipo de respuestas que dieron los niños que usaron para registro la tabla de datos, las situaciones problemáticas uno y dos con los que usaron la hoja en blanco presentan un alto nivel de resoluciones acertadas; sin embargo, en esta ocasión no se ubica el 100% de las respuestas en el tipo respuesta correcta. Para el problema de *Pedro* hubo once de quince aciertos, equivalente a un 73.33% y para el problema de *Pablo* un 80.00%; además, es importante mencionar que para cada uno de estos problemas hubo dos eventos en donde la respuesta fue parcialmente correcta, siendo así que el porcentaje de respuestas incorrectas es muy bajo, de un 13.33% y un 6.67% respectivamente.

Por medio del estadístico exacto de Fisher, se determinó que en los problemas 1 y 2, que sirvieron como reactivo muestra, no existe una diferencia significativa en cuanto a la frecuencia de respuestas acertadas entre aquellos niños que usaron tabla y los que usaron hoja; lo que manifiesta una competencia matemática básica semejante entre ambos grupos para afrontar los problemas restantes que implicaban una complejidad mayor.[32]

A diferencia de los dos primeros problemas en los que la mayoría de soluciones son del tipo respuesta correcta, para los problemas del tres al seis -aquellos en los que se emplearon notaciones-, la respuesta más comúnmente dada fue incorrecta. De estos cuatro problemas, el de *Claudio* fue el que menor número de respuestas incorrectas obtuvo equivalente a un 60% y el problema de *Bruno* con el 93.33% aquel en el que una mayor cantidad de soluciones incorrectas se dieron, es decir, catorce de quince respuestas.

La figura que se ofrece a continuación muestra cómo se comportaron las respuestas de tipo correcto a partir de las dos modalidades de registro empleadas en cada uno de los seis problemas presentados.

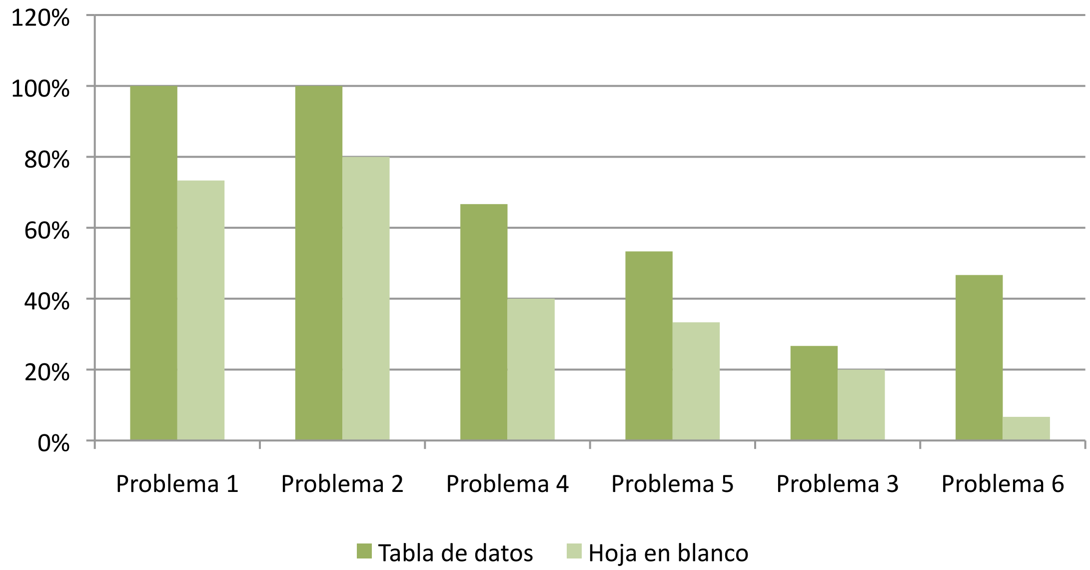


Figura 13. Categoría 1. Frecuencia de respuestas correctas por problema según la modalidad empleada

Enfocándonos exclusivamente en las soluciones convencionales, se observa una diferencia mínima entre ambas modalidades en cuanto al porcentaje de respuestas dadas al problema 3 de *Bernardo* de tan sólo el 7%, es decir, al usar la tabla de datos se presentó únicamente un caso más que cuando se usó la hoja en blanco. Por su parte, la diferencia mayor entre ambas modalidades se dio en el problema 6 de *Bruno*, donde existe un 40% de discrepancia.

Al analizar de manera estadística la incidencia de la modalidad de registro sobre la solución de los problemas, se encontró que únicamente en el problema 6 existe una diferencia significativa en cuanto al logro de resolución del problema, a favor de aquellos niños que usaron la tabla de datos (*Fisher*, ns=.035)[33]

Cuando se usó la tabla de datos, el comportamiento en la tasa de aciertos para los diferentes problemas muestra ciertas peculiaridades, tanto el problema 1 como el 2 poseen el mismo grado de aciertos y aunque se muestra un decremento de las respuestas correctas conforme se avanza en el nivel de complejidad[34], esto es así sólo hasta el problema 3. Posteriormente en el problema más complejo, el de *Bruno*, se da un incremento en el porcentaje de respuestas correctas.

En cuanto a los resultados al emplear hoja en blanco, exceptuando el incremento que se da en el problema de *Pablo*, el resto de las situaciones problemáticas muestra un decremento respecto a la frecuencia de respuestas correctas en concordancia con el nivel de complejidad de los problemas.

Para respaldar nuestros argumentos acerca de que la tabla de datos resulta más efectiva conforme los niños se van apropiando cada vez más de ella, haciendo un uso más exhaustivo del espacio gráfico, y posibilitándoles el encontrar nuevas relaciones aritméticas que anteriormente no se habían percibido, se analizará a continuación la entrevista efectuada a Paco, alumno de primer grado donde se puede apreciar el desarrollo que va teniendo a lo largo de la entrevista en cuanto a las resoluciones dadas, el uso que hace de la tabla y las posibilidades de reflexión que ésta le va brindando.[35]

…

E: A ver, ahora yo te voy a decir unas preguntas y tú me las vas a contestar lo mejor que puedas. Pon mucha atención, va la primera: Pedro tiene seis canicas. Juega una ronda de canicas y pierde cuatro. ¿Cuántas canicas tiene al finalizar el juego?

P: seis.

E: ¿Cómo supiste que tiene seis canicas al finalizar el juego?

P: Porque conté.

E: ¿Lo contaste? A ver, te la voy a volver a repetir: Pedro tiene 6 canicas. Juega una ronda de canicas y pierde 4. ¿Cuántas canicas tiene al finalizar el juego?

P: Dos.

…

E: ¿Cómo supiste que al finalizar tenía dos?

P: Porque me looo, pensé en mi cabeza.

E: A ver, ayúdame a entender cómo lo pensaste, porque yo no sé cómo lo pensaste, yo no alcanzo a entender así, ¿Qué pensaste que tenías que hacer?

P: Nada más me imaginé una mano en mi cabeza y, y, y bajando… las vi, las canicas.

E: Y luego, ¿cómo, de qué forma bajaron que supiste que quedaban dos al final?

P: Porque estaba, estaba, completando las menos.

…

Paco es el primer niño entrevistado, se muestra un poco cohibido al empezar la entrevista. Al resolver el problema de *Pedro* su primera solución es rescatar un valor de los que se manejaron en las informaciones, al volverle a cuestionar expresa la respuesta convencional pero le cuesta trabajo explicar cómo llegó a la solución[36], hasta que se indaga más a fondo explica cómo en su mente fue restando –completando las menos, en palabras suyas- apoyándose por un conteo con dedos en su mente.

…

P: Que Pablo al, en la primera ronda ganó cinco canicas y en la segunda ronda perdió tres canicas.

E: ¿Y al final qué sucedió en el juego?

P: Que Pablo se quedó con nada más… le quedó dos canicas.

E: ¿Cómo supiste que le quedaron dos?

P: Porque los vi, vi mis dedos y así hice (muestra su mano con 5 dedos extendidos, cierra 3 dedos y muestra a la entrevistadora dos dedos abiertos)

E: Ah, y te quedaron dos.

…

Debido a que se trató de realizar una traducción lo más fiel posible del trabajo de Vergnaud y Durand (1976), el problema de *Pablo* traducido al español presentó algunas dificultades. Al igual que Paco, varios niños entrevistados al preguntarles, ¿Qué sucedió en el juego?,[37] pensaban que la entrevistadora les pedía un recuento de lo que había pasado en las rondas así que se debía reformular la pregunta de forma que el niño comprendiera que se preguntaba por la transformación compuesta.

En este problema, aunque Paco recurre nuevamente a dar cuenta de su proceso mental a través de conteo con dedos, esta vez haciéndolo de forma efectiva; ni en el problema de *Pedro*, ni en el de *Pablo* usa los dedos para la resolución, sino que emplea el cálculo mental y hasta que se le cuestiona sobre su procedimiento para llegar a la respuesta es que explica que en su cabeza vio una mano donde se cerraba la cantidad de dedos que perdió, acompañando su explicación con movimientos observables de sus dedos.

…

E: ¿Te lo vuelvo a repetir, más despacito? Va de nuevo, Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?

P: Tres

E: ¿Cómo supiste que tenía al inicio del juego tres canicas?

P: Porque, (duda) porque me fijé.

E: ¿Porque te fijaste?

P: Lo escuché.

E: ¿Y dónde escuchaste la respuesta?

P: Mmm, de, de Pablo.

E: ¿De Pablo? Pero ahora estamos con Bernardo.

P: Mmm

E: A ver, si tú me tuvieras que escribir aquí cómo le hiciste. A ver, inténtame explicar utilizando eso (señala la tabla) para saber cómo le hiciste, para saber el resultado.

P: [bernadotenia tres canicas] (Escribe en el recuadro de inicio). [2 benadoperdio] (Escribe el 2 invertido en el recuadro de la primera ronda, parece no recordar cuánto perdió)

E: ¿Quieres que te lo repita para que sepas cuántas perdió?

P: Sí

E: Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego? ¿Ya supiste cuántas perdió?

P: Sí [7 canicas] (completa lo que estaba escribiendo en el recuadro de primera ronda). [benadoenpes o trarona y gano 8] (Lo escribe en el recuadro de segunda ronda). [benadoperdi 1 cania y cantscanicos 7] (Escribe en el recuadro del final) (Durante su escritura llega a borrar y corrige lo que escribió, algunas veces se da cuenta que las palabras están incompletas y corrige. Tarda escribiendo varios minutos) ¿Ya terminé esto?

E: Muy bien. A ver, me lo vas a ir explicando. A ver, ¿al inicio qué pasó?

P: Bernardo tenía tres ca, canicas (lee la primera parte de lo que escribió)

E: ¿Y luego? ¿Tú cómo llegaste a saber que Bernardo al inicio tenía tres canicas?

P: Porque usted me leyó y como que *

E: Ah, te la voy a volver a leer y tú me dices a ver si sí es cierto que dice que al inicio tenía tres canicas, o me explicas de donde piensas tú que tiene tres canicas. Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego? ¿Ahí yo te dije que al inicio tenía tres?

P: No.

E: No, no dice, ¿cómo pensaste que tenía tres al inicio?

P: A seis a siete, le tenemos que restar y me quedan tres.

P: Y (se interrumpe al hablar los dos al mismo tiempo)

P: Me confundí.

E: A ver, ¿de qué forma podemos hacerle para que no te confundas? A ver, explícame, ¿en la primera ronda qué pasó?

P: Que Bernardo… tenía siete.

E: Tenía siete ¿y qué pasó con esas siete?

P: * (explica algo a cerca de que su mamá le pone a escribir sumas y restas como la entrevistadora)

…

E: ¿Luego acá qué dice?

P y E: Segunda ronda (leen al mismo tiempo)

E: ¿Qué pusiste?

P: Bernardo empes, o, otra ronda y, gano ocho.

E: Te la voy a leer y tú me dices si hay una segunda ronda en este juego de Bernardo o si nada más hay una ronda. Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde 7 canicas. Al finalizar el juego tiene 3 canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego? ¿Ahí cuántas rondas jugó una o dos?

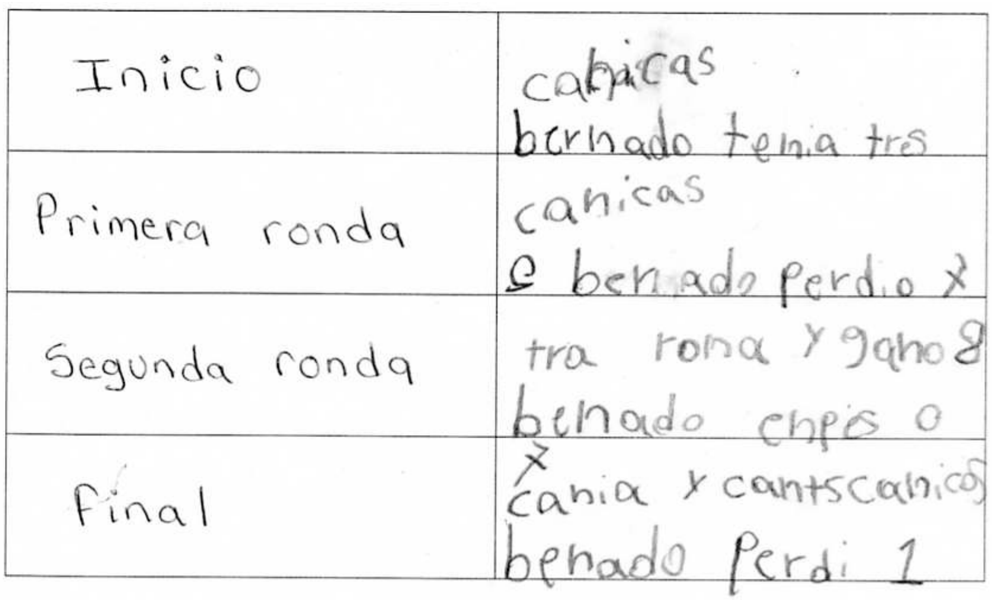
P: Dos.

E: ¿Dos? ¿Y al final qué dice que pasó con el juego de Bernardo? ¿Al final cuántas tenía?

P: Trece y perdió diez, le quedaron tres.

E: ¿Y al inicio, entonces cómo tú supiste que al inicio tenía tres canicas?
P: (Silencio por unos diez segundos)
E: Yo ya entendí que tenía siete, después ocho y entonces perdió una. (Lee lo que ha escrito Paco en una parte de la tabla) Al inicio explícame, ¿cómo supiste que al inicio tenía tres?
P: Estaba pensando que tenía siete, cuando le conté *
E: ¡A mira!, pensaste que tenía siete ¿y luego qué pasaba?
P: *
E: ¿Y entonces cuál es tu respuesta? ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?
P: Siete.
…
E: A ver, explícame ¿Cómo supiste que eran siete canicas?
P: Porque alcancé a recordar que cuando me dijo y estabaaa, luego yo pensé que estaba mal y pensé siete.
E: ¿Y cómo llegaste a pensar que eran siete y no seis?
P: Porque, si, si pierde, si pierde cani, si pierde siete, eso ganó.
…

La figura 14 muestra cómo utilizó Paco la tabla de datos cuando se enfrentó al problema de *Bernardo*.



Inicio	canicas bernado tenia tres
Primera ronda	canicas e benado perdio x
Segunda ronda	tra rona y gano 8 benado chpes o
Final	x cania y cantscanicos benado perdi 1

Figura 14. Paco, 1, P3, TD

En este fragmento podemos ver cómo antes de empezar a hacer algún tipo de registro en la tabla, Paco da la respuesta más básica de las ocho diferentes encontradas en esta investigación, aquella donde retoma un dato de los trabajados en algún problema anterior –en este caso el de *Pablo*-. Posteriormente, al pedírsele que haga el registro de su procedimiento, su respuestas es más elaborada que la primera.

En su segunda respuesta -que no la verbaliza pero sí la escribe-, Paco intuye que debe estar presente una cantidad mayor a siete, pues si *Bernardo* va a perder debe sobrarle al menos una para que gane las tres que tenía al final del juego; aquí Paco no se percata de que se trata de un juego con una sola ronda sino que para él hay dos rondas –como expresa en la entrevista- donde en la primera de ellas pierde siete y en la segunda gana tres.

Parece volver a su primera respuesta debido a la ubicación incorrecta que hizo de un dato al registrar en el recuadro de inicio. Su parecer cambia al cuestionarlo y volverle a leer la pregunta llegando así a la tercera solución, donde empieza por pasar la segunda a primera transformación, trasladando la incógnita de este modo de “a” a “b” –siete menos cuatro es igual a tres-, sin embargo, Paco no parece muy conforme con esta respuesta –menos elaborada que la anterior- y aclara que se confundió.

Intentando aclarar la confusión la entrevistadora retoma las anotaciones hechas por el niño y va pidiendo explicaciones; al final Paco no parece hacer mucho caso a toda la información que ha escrito anteriormente y replantea su respuesta –la cuarta- argumentando que si pierde siete, antes tuvo que ganar otras siete. Su última respuesta y con la que parece conforme, es un claro ejemplo de compensación, donde el niño se ve obligado a compensar en el inicio las canicas que va a perder en la ronda; este tipo de respuesta se caracteriza por tener en cuenta sólo una parte de la información –en este caso la transformación- y dejar de lado otra –el estado final-.

…

E: Te la voy a leer despacito y si tú quieres puedes ir anotando aquí en este cuadro las cosas que te sirvan, ¿sí? te fijas cómo tienes que anotar. Claudio tiene cinco canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Qué pasó durante el juego?

P: Que, Bernardo, en el inicio tiene cinco canicas.

E: Ajá (aprobación) fíjate, al inicio, ¿cuál de estos dice al inicio? (Señala las etiquetas de la tabla)

P: Aquí (señala el recuadro con la etiqueta que dice inicio)

E: Ah, ¿te puede servir ahí, saber qué tiene al inicio?

P: Sí.

E: (Se queda pensativo pocos segundos y empieza a escribir) [bernado en nel inicio tiene 5] (escribe en el recuadro de inicio, mira a la entrevistadora como esperando ayuda)

E: Juega una ronda y al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Qué pasó durante el juego?

P: No entendí.

E: Te la voy a volver a leer: Claudio tiene cinco canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Qué pasó durante el juego?

P: ¡Claudio!… (se da cuenta que es Claudio y no Bernardo el personaje del problema)

E: Ajá.

P: [caudio] (Borra bernado y escribe caudio) Claudio, en el, en nel, en el i, en nel jue, en el inicio tenía cinco canicas.

E: Muy bien, ¿y luego qué pasó, qué pasó con Claudio? ¿Al inicio tenía cinco y luego qué pasó?

P: (se queda pensando) Perdió seis canicas.

E: ¿Tú porqué crees que perdió?

P: (Duda unos segundos) Por que, porque, dice que… y, y, es que, escuchando.

…

E: A ver, te la leo a ver si sí es cierto que perdió 6. Claudio tiene 5 canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene 9 canicas. ¿Qué pasó durante el juego?

P: Escuché bien, Bernardo en el inicio tenía 5 canicas.

E: ¿Y luego?

P: Después… y después tenía seis canicas [i después tenia 6 conicas] (Se detiene confundido)

E: ¿Qué pasó?

P: No, no entiendo.

E: Fíjate, la preguntas es ¿Qué pasó durante el juego? ¿Qué fue lo que pasó, en el juego de Claudio?

P: Claudio tenía seis canicas… y de, y después tenía (se queda pensando borra el 6) [9] nueve canicas.

E: Tenía nueve. A ver, léeme lo que llevas.

P: Caudio (lee) en el inicio tenía cinco canicas, y, des, pues, tenía, nueve canicas. Cuan, cau.

E: Bien, ¿y qué pasó durante el juego?, ¿qué pasó para que de cinco, ahora tuviera nueve?

P: Que Claudio, porque Claudio… ganó… (va haciendo pausas)

E: ¿Qué ganó?

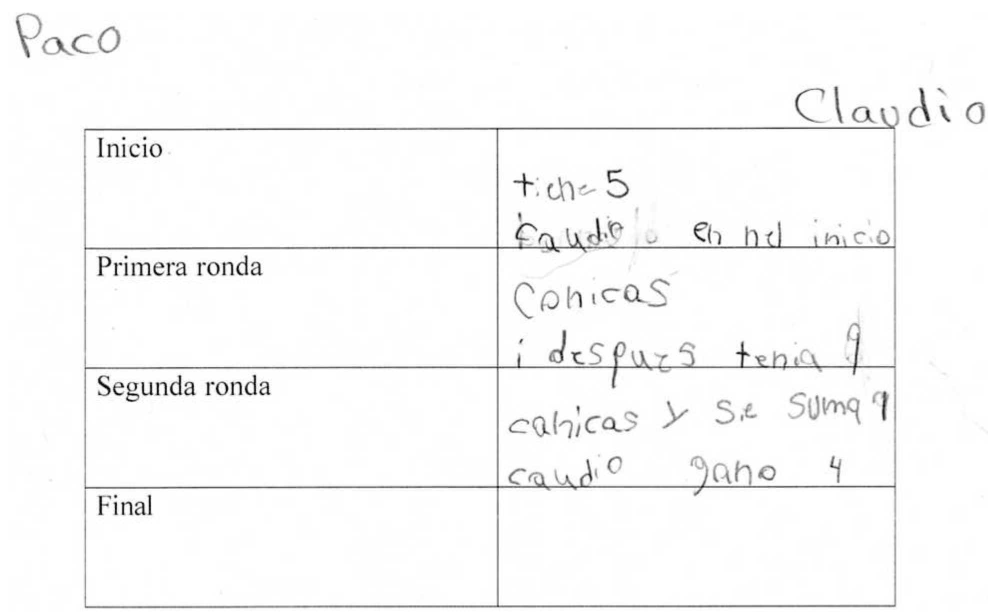
P: nueve, cuatro canicas… y cuando le sumas son nueve.

E: Ah, nueve ¿Tú supiste que eran cuatro? ¿Qué le sumaste, al cuatro qué le sumaste para saber?

P: Al cuatro le sumé unos cinco.

…

La figura 15 muestra el registro que realizó Paco en su tabla de datos cuando se enfrentó al problema de *Claudio*.


Paco

Claudio

Inicio	ti che 5 Claudio en mi inicio
Primera ronda	Conicas i despues tenia 9
Segunda ronda	canicas y se suma 9 claudio gano 4
Final	

Figura 15. Paco, 1, P4, TD

A penas empieza su registro y su primera respuesta es que *Claudio* pierde seis canicas, se le cuestiona si el problema dice que perdió seis canicas y se le vuelve a leer, esta vez ya no cree que perdió seis, sino que tiene seis; empieza a hacer el registro de ese hecho, pero algo parece chocarle, se percata de que no perdió seis sino nueve y hace los cambios necesarios, se le cuestiona sobre el valor de la incógnita y explica que ganó cuatro porque cuatro más cinco dan nueve. Es así como su primera respuesta parece ser un tanto azarosa –variante1.5- y posteriormente llega a la respuesta convencional apoyado por lo que ha registrado en su tabla y por la intervención de la entrevistadora.

…

E: Bueno, Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana cinco canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado nueve canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?

P: Que Cristian, ganó, ganóocin, co canicas.

E: Muy bien ¿Qué mas?

P: Durante el juego ganó, cinco canica.

E: ¿Ganó? En la primera ronda ganó cinco canicas, luego vuelve a jugar la segunda ronda, pero ahí no nos dice cuanto ganó o si perdió, y al final del juego sabemos que ganó nueve canicas, ¿cómo le hacemos para saber qué pasó durante la segunda ronda?

P: Cinco.

E: ¿Y luego, *?

P: [jeja 5] (Borra el 5) [una roa durante El junojana 5] (escribe en recuadro de inicio). [cristianjueja ora rona y doratellejojana 5 canicas] (escribe en el recuadro de primera ronda)

…

E: ¿Qué hiciste Paco, para saber que en la segunda ronda también había ganado cinco? Explícame cómo supiste.

P: Porque dice que, usted dijo que en la, en la, en la segunda ronda ganó cinco canicas.

…

E: ¿Cómo le hiciste para pensar que era, que tenías que sumarle otros cinco?

P: Para que, sean diez.

E: Para que sean diez, ¿Y aquí al final tenía 10 canicas?

P: Mmm, no sé.

E: ¿No te acuerdas cuánto tenía al final?

P: No.

E: A ver, yo te voy a volver a leer y te fijas cuántas tenía al final. Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana cinco canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado nueve canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda? ¿Sí ganaría diez canicas, o cuántas dice que ganó al final?

P: Sí, cinco (se queda pensativo) cinco canicas, cinco mas diez.

E: ¿Cinco en dónde, en cuál ronda? ¿quieres que te de otra, para que escribas mejor? Esa ya está muy llena (le intercambia la hoja por una nueva Paco parece decepcionado cuando ve que tiene que volver a escribir) A ver si te sirve, ¿dónde vas a anotar el número cinco? ¿Cuál es el número que te sirve?

P: (Guarda silencio varios segundos) Todavía no sé.

E: ¿Todavía no sabes? A ver, piénsale, ¿en tu tabla que tienes aquí dónde podrás poner el número cinco?

P: [cristianjano 5 canicas]

E: Cristian ganó cinco canicas (lee lo que escribió Paco) ¿Luego qué otra cosa puedes anotar que te sirva? Puedes irte fijando en lo que dicen los cuadritos y ver cómo puedes anotar cosas que te sirvan.

P: (se queda pensando lee la etiqueta que dice primera ronda y empieza a anotar [cristian jeja ora rona durante El jejo jana 6]. Ya.

…

E: A ver primero platícame qué pasó durante la segunda ronda.

P: Cri, cristian [cristian] en la segunda ronda ganooo nueve canicas.

E: ¿Cómo sabes que ganó 9 canicas?

P: Cristian [jano 9 canicas] (anota en el recuadro de la segunda ronda)

E: ¿Cómo supiste que ganó nueve canicas?

P: (Se queda pensando y tarda cerca de 20 segundos en responde) Porque yo escuché.

E: Porque tú escuchaste. Y luego dice, fíjate en la pregunta ¿qué pasó durante la segunda ronda? A ver, ¿qué pasó durante la segunda ronda?

P: Bernardo ganó nueve… canicas.

E: Ganó nueve canicas, ¿cómo supiste que ganó nueve canicas?

P: Porque, primero, lo pensé.

E: ¿Qué pensaste?

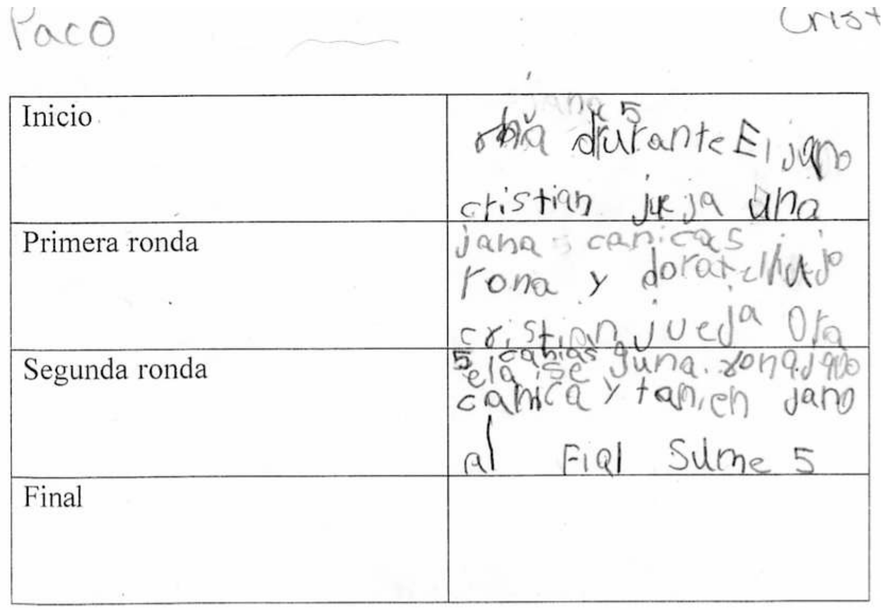
P: Primero pensé que era ocho y después pensé que eran diez, y ahora eran… nueve.

E: ¿Y cómo fue que pensaste que ya eran nueve y no 8?

P: Porque lo oí… yo e, escuché.

…

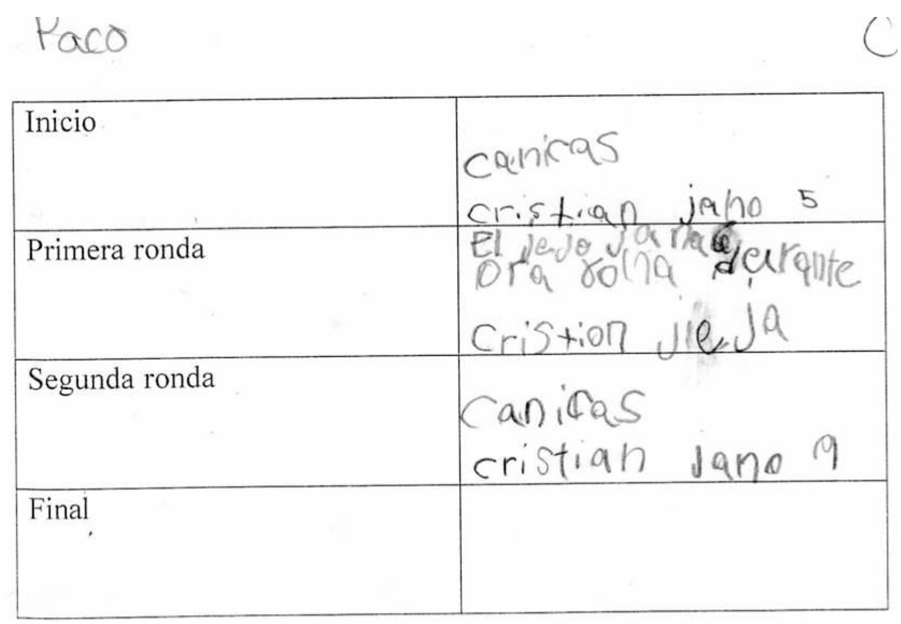
La figura 16 nos permite ver los dos distintos llenados de la tabla de datos que hizo Paco cuando se enfrentó al problema de *Cristian*.



Paco Crist

Inicio	ana durante El jugo cristian jueja una
Primera ronda	jana canicas rona y doratchado cristian jueja ota
Segunda ronda	5 canicas ela ise juna. rona jugo canica y tanien jano al Fial Sume 5
Final	

Figura 16. Paco, 1, P5a, TD



Paco C

Inicio	canicas cristian jano 5
Primera ronda	El jego jana durante ota rona Cristion jieja
Segunda ronda	canicas cristian jano 9
Final	

Figura 17. Paco, 1, P5b, TD

La primera respuesta de Paco, gana cinco canicas, es perteneciente a la variante 1.5, donde no se opera y la respuesta alude a uno de los datos del problema, esta solución la da antes de que haya hecho cualquier tipo de anotación, comienza con las anotaciones de forma poco sistemática y después de diferentes escrituras en la tabla, lo que ha registrado queda casi incomprensible.

Al cambiar a una nueva tabla, el registro que hace Paco es más organizado; sin embargo, aún no se guía por las etiquetas logrando anotaciones desfasadas que poco le posibilitan una reorganización más completa del pensamiento. A pesar de eso empieza a recuperar que hay cinco canicas y también nueve; ya no se queda con un dato aislado del problema, sino que se percata de otra información involucrada, aunque vuelve a ser incapaz de comprender las relaciones implicadas.

…

E: ¿Te la vuelvo a leer? Y si quieres puedes ir haciendo aquí anotaciones. Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?

P: Bruno, Bruno tenía, tres canicas.

…

P: [bruno jeja 1-2 en total] (Escribe mientras la entrevistadora va leyendo el problema)

E: Ah, muy bien, ahí que pusiste.

P: Bruno juega una, dos, en, en total (Va leyendo)

E: Muy bien, juega dos veces en total, ¿qué pasa en la primera ronda?

P: ¿Me la puede repetir por favor?

E: Mff (expresión afirmativa) Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?

P: [Bruno jeja la rinedrarona de canica] (Escribe mientras la entrevistadora va leyendo el problema)

…

P: Mmm ¿Me la repites?

E: Muy bien, va de nuevo: Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?

P: [luejElasejunarona perdió] (Queda dudoso, parece no recordar lo que pasaba)

E: Acuérdate qué pasaba durante la segunda ronda.

P: [7 canicas] (Completa. Voltea a ver a la entrevistadora como preguntando si va bien, duda si seguir adelante así que la entrevistadora interviene)

E: Ahora, Paco fíjate, nos falta llenar qué pasó al final, ¿Qué pasó al final para que le anotes ahí?

P: [Bruno jan 3 canicas]

E: (Cuando termina de escribir Paco) Muy bien, me escribiste que Bruno juega una y dos rondas (señala lo que ha escrito Paco). Luego, en la primera ronda (indica el recuadro correspondiente) Bruno juega… (Se detiene, se le dificulta leer lo que puso Paco) la primera ronda de canicas. En la segunda ronda pusiste (señala el recuadro correspondiente) que perdió 7 canicas y al final, Bruno ganó tres canicas (continúa leyendo lo que escribió Paco en los recuadros) Ahora, la pregunta que te hacen aquí, ¿Qué pasó durante la primera ronda? Aquí qué tuvo qué haber pasado para que al final solamente le quedaran tres ¿Tú qué crees que haya pasado en la primera ronda?

P: No sé.

E: ¿No sabes? A ver, piénsale. Con las cosas que tú me escribiste aquí piénsale qué fue lo que pasó en la primera ronda, si ganó o si perdió canicas porque ahí no nos están diciendo. Tú tienes que pensarle si ganó o si perdió y cuántas

P: Le quedó… (Se queda pensando) tenía…

(Llaman a la entrevistadora en la puerta y se levanta mientras Paco sigue escribiendo, regresa a los pocos segundo y el niño ya terminó de escribir y la espera)

E: A ver, Paco, me escribiste que tenía diez canicas en la primera (completó en el recuadro de la primera ronda [tenía 10 canicas]) ¿Cómo supiste que tenía diez canicas en la primera? Explícame.

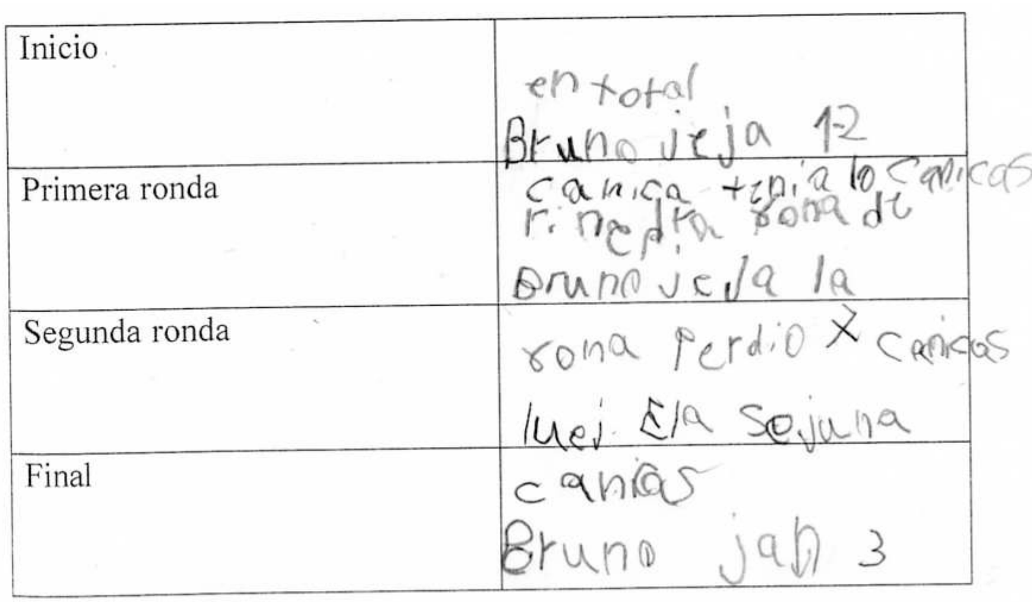
P: Porque yo estaba pensando cuántas debería de tener en la primera ronda.

E: Ah, ¿y cómo le hiciste para saber que debería tener diez?

P: Porque si pierde siete, si pierde siete, tendría que tener once o nueve o diez. Si tendría diez le quedaran, tres.

…

La figura 18 permite ver un llenado exhaustivo y acorde con las etiquetas al enfrentarse al último problema.



Inicio	en total Bruno jeja 12
Primera ronda	canica tenia 10 canicas r. nepta rona de cp. Bruno jeja la
Segunda ronda	rona perdio 7 canicas luej Ela sejuna
Final	canias Bruno jan 3

Figura 18. Paco, 1, P6, TD

Nuevamente, su respuesta antes de hacer algún tipo de registro es de las menos elaboradas, se remite a rescatar un dato del problema sin hacer ningún tipo de operación aritmética o cálculo alguno. Aquí Paco parece comprender la importancia de saber si se trata de un juego con una o dos rondas y lo expresa. Además, por primera vez guía su registro según las etiquetas de forma exhaustiva, recuperando tanto en el registro como al momento de operar, todos los datos involucrados. Cabe mencionar que aquí la entrevistadora interviene poco, principalmente para repetir el problema y aunque es el de mayor complejidad, es uno de los que resuelve con mayor rapidez y donde muestra menos cansancio.

5.1.7 Respuestas por modalidad de registro y categoría de los problemas

Para analizar este apartado, sólo se retomó la frecuencia de respuestas correctas ocurrida en los problemas del 3 al 6 agrupándolos por la categoría a la que pertenecen. Recordamos al lector que los problemas 3 y 4 pertenecen a la categoría II, mientras que los problemas restantes (5 y 6) son de categoría IV.

La figura 19 muestra cómo al usar tabla de registro se observaron resultados más o menos equivalentes entre las respuestas correctas para los problemas de categoría II y las de los problemas de categoría IV (14 y 15 frecuencias, respectivamente). Por otro lado, cuando los niños usaron notaciones espontáneas la diferencia entre las respuestas correctas difiere, mientras que los problemas de categoría II se resuelven correctamente en 9 frecuencias, sólo en 6 sucesos es así para los problemas de categoría IV.

Al centrarnos en la categoría II se puede observar una discrepancia de cinco casos entre las dos modalidades, en cambio, en la categoría IV la diferencia se da por nueve eventos. Al realizar el análisis estadístico por medio de la prueba *t*, se encontró que exclusivamente en la categoría IV la modalidad de representación influye significativamente en la resolución acertada (*t*=2.553, *gl*=28, *ns*=.016). (Categoría II: *t*=1.323, *gl*=28, *ns*=.197).

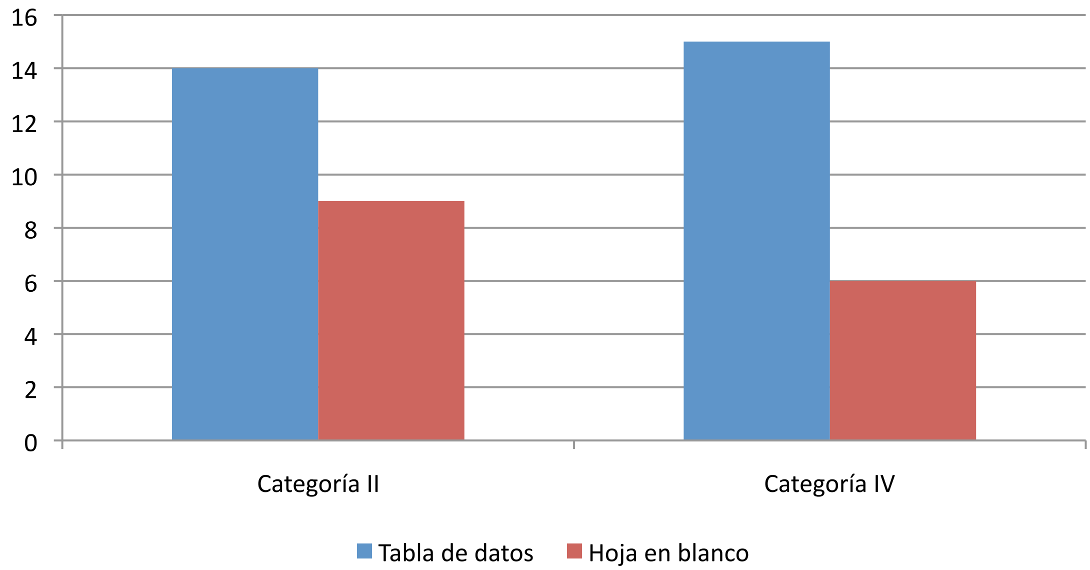


Figura 19. Categoría 1. Frecuencia de respuestas correctas por modalidad de registro y categoría de los problemas

5.1.8 Resultados por tipo de problema y grado escolar

Como fue indicado con anterioridad, en este estudio se entrevistaron a 10 niños de cada uno de los tres primeros grados de la educación primaria; de tal suerte que para poder analizar los resultados en función del grado escolar, consideramos las frecuencias de respuestas como unidades de análisis.

Como lo muestra la figura 20, los niños de primer grado mostraron un número elevado de aciertos en los problemas 1 y 2 aunque sin llegar al máximo de eventos posibles -10-. El problema de *Claudio* evidencia la mitad de soluciones convencionales. Para los problemas 3, 5 y 6 el tipo de respuesta predominante es incorrecta.

Por el grado de complejidad involucrada en los problemas (según la categoría a la que pertenecen y la posición de la incógnita) se esperaría que el problema de *Bruno* fuera el más difícil debido a que es de categoría IV y la incógnita se ubica en “a” y, en consecuencia, presentara la menor cantidad de respuestas convencionales, sin embargo, fue la tercera situación problemática la que presentó el menor número de respuestas correctas. Así mismo, conforme los problemas aumentan en complejidad hay un descenso en las respuestas correctas, no obstante, en el problema de *Bruno* se detiene el descenso y se observa un ligero incremento en la tasa de respuestas convencionales.

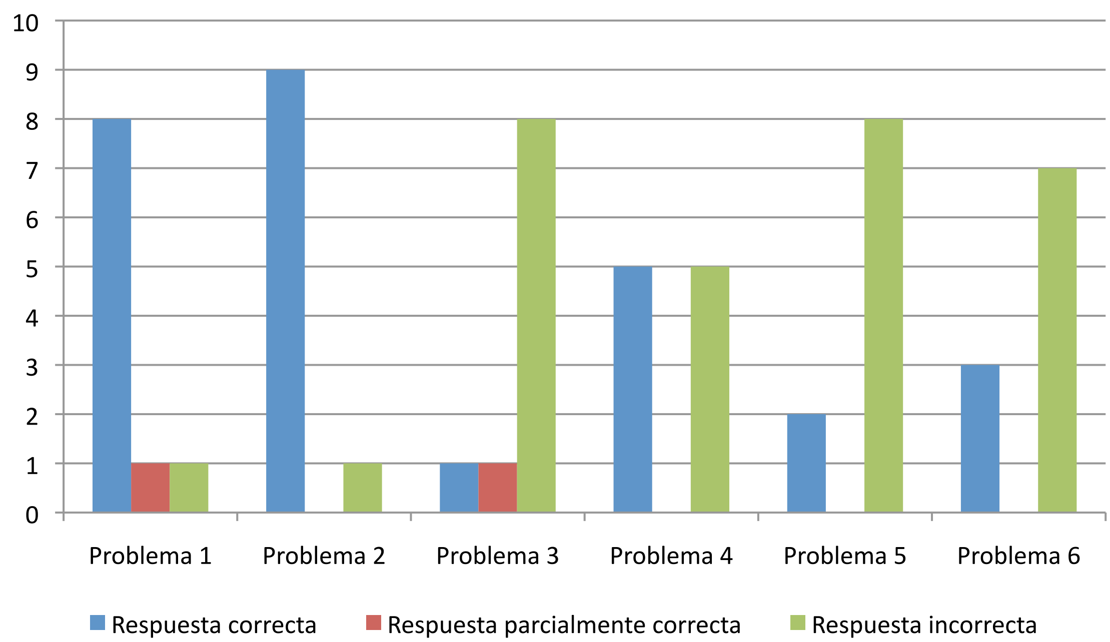


Figura 20. Categoría 1. Respuestas de primer grado por tipo de problema

Los niños de segundo grado tienen un desempeño ligeramente mayor en el problema 1 que los niños de primer grado; en cambio, en el problema 2 muestran un rendimiento semejante. A pesar de que parece no haber una gran diferencia numérica entre las respuestas a los problemas 1 y 2 de los niños de los dos primeros grados, la figura 21 nos muestra que si bien en segundo grado no se logró la totalidad de respuestas de tipo convencional para estos dos problemas, tampoco se presentó ninguna respuesta de tipo incorrecta.

Mientras que los niños del grado menor fueron capaces de dar una respuesta correcta y otra parcialmente correcta al problema de *Bernardo*, ningún niño de segundo pudo dar una solución convencional a esta situación presentada. Tanto para el problema 4 como para el 5 la mayoría de los niños entrevistados de segundo pudieron dar una respuesta a la incógnita de forma convencional y sólo uno pudo resolver correctamente el problema 6.

Se puede ver que si se agrupa a los seis problemas en pares de acuerdo a la ubicación de la incógnita, no hay diferencia en el nivel de resolución entre los problemas que conforma el primer par –problemas 1 y 2 de menor complejidad- pues ambos manifiestan 9 casos en los que la respuesta es correcta, algo semejante sucede para el par de mediana complejidad 4 y 5, aunque la tasa de respuestas correctas ha disminuido en comparación con la primera pareja. Este comportamiento se rompe en el último par, que es el más complicado, aunque por una diferencia pequeña –un caso-. La anterior información se muestra en la figura 21.

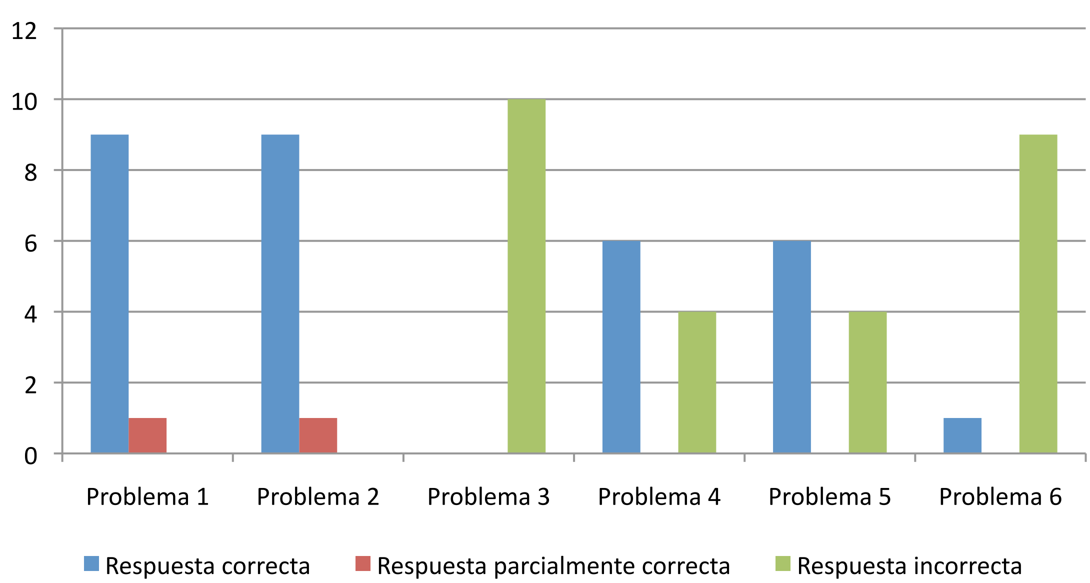


Figura 21. Categoría 1. Respuestas de segundo grado por tipo de problema

Los niños del grado más avanzado evidencian un nivel más alto de resoluciones acertadas. Los problemas 1 y 2 son los que mayor cantidad de respuestas correctas tienen coincidiendo en cantidad con segundo grado. En tercer grado se observa un descenso en el tipo de respuesta correcta, pero no a partir del nivel de complejidad de las situaciones problemáticas, sino según el orden de presentación de los problemas, a pesar de esta declinación, las cinco primeras situaciones presentadas tuvieron al menos la mitad de sus respuestas en el tipo de contestación convencional. Los datos mencionados se visualizan en la figura 22.

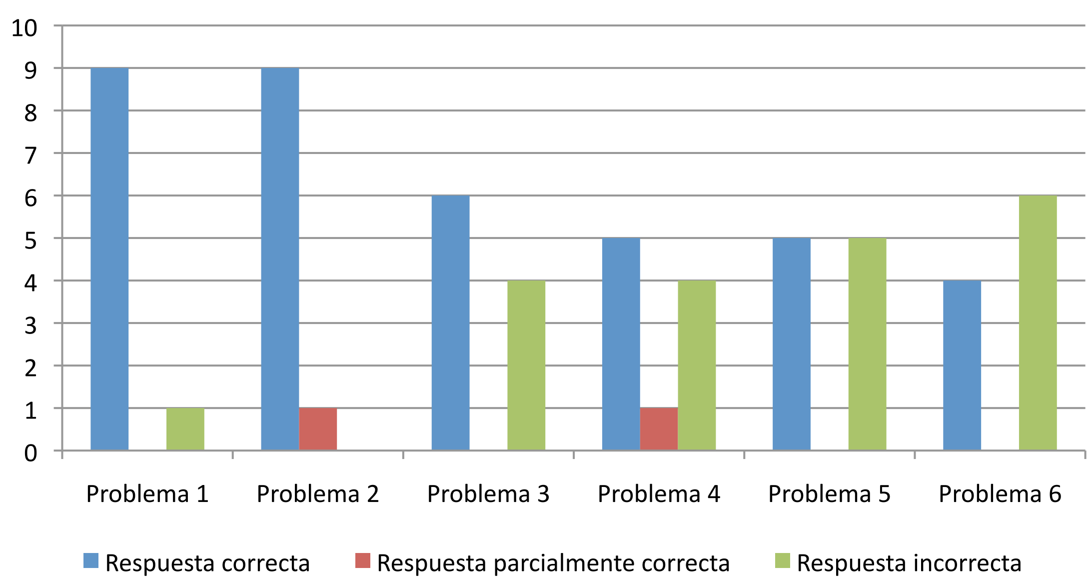


Figura 22. Categoría 1. Respuestas de tercer grado por tipo de problema

5.1.9 Resultados por tipo de problema, grado escolar y modalidad de registro

A continuación se analizará la distribución de los datos a partir del entrecruzamiento de las tres variables independientes manejadas en esta investigación. Se muestra en la tabla 5 la distribución del total de respuestas dadas por los niños a las situaciones problemáticas presentadas, donde se utiliza "P" y un numeral para indicar el número del problema, "RC" indica respuesta correcta, "RP", respuesta parcialmente correcta y "RI" respuesta incorrecta.

Tabla 5

Frecuencia de respuestas correctas por problema, grado y modalidad de registro empleada

	Primero						Segundo						Tercero					
	Tabla de datos			Hoja en blanco			Tabla de datos			Hoja en blanco			Tabla de datos			Hoja en blanco		
	RC	RP	RI	RC	RP	RI	RC	RP	RI	RC	RP	RI	RC	RP	RI	RC	RP	RI
P1	5	0	0	3	1	1	5	0	0	4	1	0	5	0	0	4	0	1
P2	5	0	0	4	0	1	5	0	0	4	1	0	5	0	0	4	1	0
P3	1	0	4	0	1	4	0	0	5	0	0	5	3	0	2	3	0	2
P4	4	0	1	1	0	4	3	0	2	3	0	2	3	1	1	2	0	3
P5	2	0	3	0	0	5	2	0	3	4	0	1	4	0	1	1	0	4
P6	3	0	2	0	0	5	1	0	4	0	0	5	3	0	2	1	0	4

RC: respuesta correcta, RP: respuesta parcialmente correcta, RI: respuesta incorrecta, P1: problema uno, P2: problema dos, P3: problema tres, P4: problema cuatro, P5: problema cinco, P6: problema seis.[38]

Los problemas 1 y 2 que funcionaron como reactivos prueba se mostraron -como se esperaba- más accesibles para ser resueltos por los niños, tanto en los grupos que usaron tabla con etiquetas como en aquellos que usaron hoja en blanco. El grupo de primer grado que usó hoja en blanco fue aquel que dio una menor cantidad de respuestas acertadas, mientras que en los tres grados, aquellos que usaron tabla fueron quienes dieron una mayor cantidad de respuestas correctas.

El problema 4 tiene al menos un representante en cada uno de los seis grupos que se muestra capaz de resolverlo; sin embargo, es sólo en segundo y en los grupos de primero y tercero que usaron tabla, cuando las respuestas correctas son mayoría. Para el problema 5 una mayoría de respuestas correctas sólo se da en el grupo de segundo que usó hoja y en el de tercero que empleó tabla. Los otros grupos logran dar también respuestas correctas aunque no hagan mayoría, exceptuando al grupo de primero que usa hoja en blanco para hacer notaciones espontáneas.

Como ya se mencionó anteriormente, el problema 3 de *Bernardo* se mostró más complicado para los niños entrevistados siendo el que menor número de respuestas correctas obtuvo, sólo en los dos grupos de tercero se tuvo más de la mitad de resoluciones correctas. Por su parte, el problema 6 de *Bruno*, segundo más complejo según la información obtenida de las entrevistas con los niños, fue resuelto en al menos una ocasión por ambos grupos de tercer grado y por aquellos de segundo y primero que emplearon tabla, pero no por los de primero y segundo que realizaron notaciones espontáneas.

Esta información refleja la complejidad de los problemas de *Bernardo* y *Bruno*, cuya incógnita recae en “a”, que empiezan a ser accesibles para la población de nuestra muestra hasta tercer grado, independientemente del tipo de notaciones que realicen. Pero a los que puede accederse desde grados tempranos cuando como mediador cognitivo se emplea algún SRE como lo es la tabla de registro con etiquetas.

Dos acotaciones se hacen importantes: el único grupo que logró dar una mayoría de respuestas correctas en los seis problemas presentados fue el grupo de tercero que usó tabla de registro; por otro lado, el grupo de primero que realizó notaciones espontáneas sólo emitió respuestas correctas en los tres problemas más sencillos.

5.2 Representación de los estados y transformaciones explícitos

La segunda categoría de análisis en esta investigación aborda la forma en la que los niños y niñas de la muestra representan los estados y transformaciones explícitos involucrados en el problema. Las representaciones hechas por los pequeños se agruparon en cinco diferentes tipos, a continuación se explicará en qué consistió cada una de las cinco variantes y se darán algunos ejemplos pertinentes.

5.2.1 La representación es hecha a través de *lenguaje escrito y numerales*. Aquí el niño utiliza los números para dar cuenta de las cantidades explícitas en el problema y se apoya de la escritura para hacer aclaraciones acerca de la naturaleza de las cantidades discretas –canicas-, el nombre del personaje del problema, los acontecimientos que surgieron en el juego –tenía, perdió, ganó, etc.- la situación temporal –al final, luego, al inicio, etc.- o de qué ronda se trata. Ejemplo (Andrea, 2, P5, HB)

Figura 23. Andrea, 2, P5, HB

5.2.2 Para hacer la representación se utilizó *exclusivamente numerales*. Los pequeños representaron sólo la cantidad de canicas, y en contados casos –como el que se presenta a continuación- especificaban la cantidad de rondas involucradas en el problema; sin embargo, no hacían acotaciones acerca de si era una transformación positiva o negativa, etc. La mayoría de los niños que recurrieron a esta forma de representación pertenecen a primer grado y en menor cantidad a segundo, ningún niño de tercero empleó esta modalidad. (Karina, 1, P4, HB)

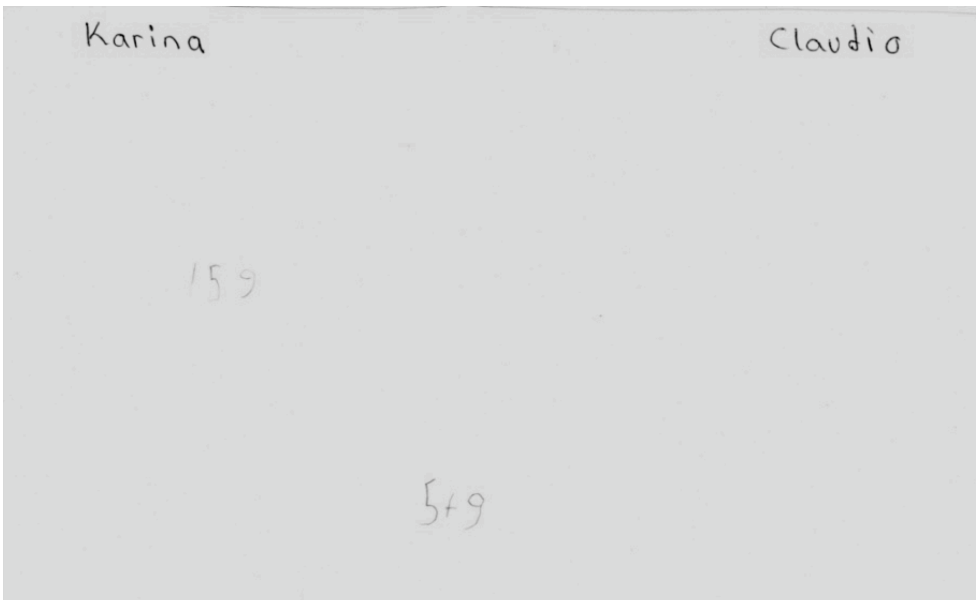
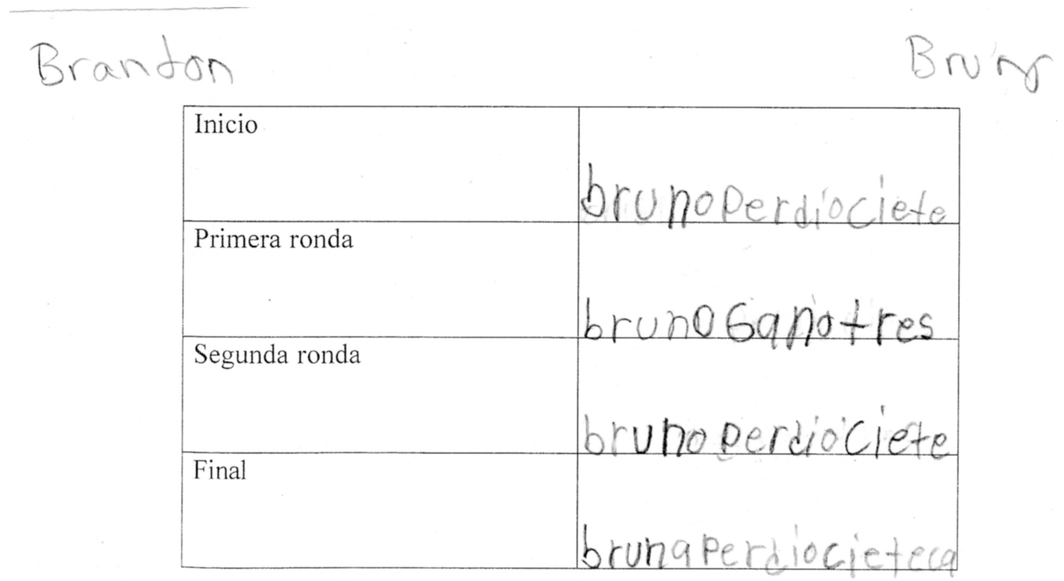


Figura 24. Karina, 1, P4, HB

5.2.3 La representación de los estados y transformaciones explicitados en los problemas se hizo *sólo con lenguaje escrito*. La diferencia entre esta variante y la número uno es que aquí las cantidades eran escritas no con numerales, sino a través de escritura. Sólo dos niños con tabla de registro de primer y segundo grado utilizaron esta modalidad, pero no a lo largo de todos los problemas que resolvieron. Ejemplo (Brandon, 1, P6, TD)



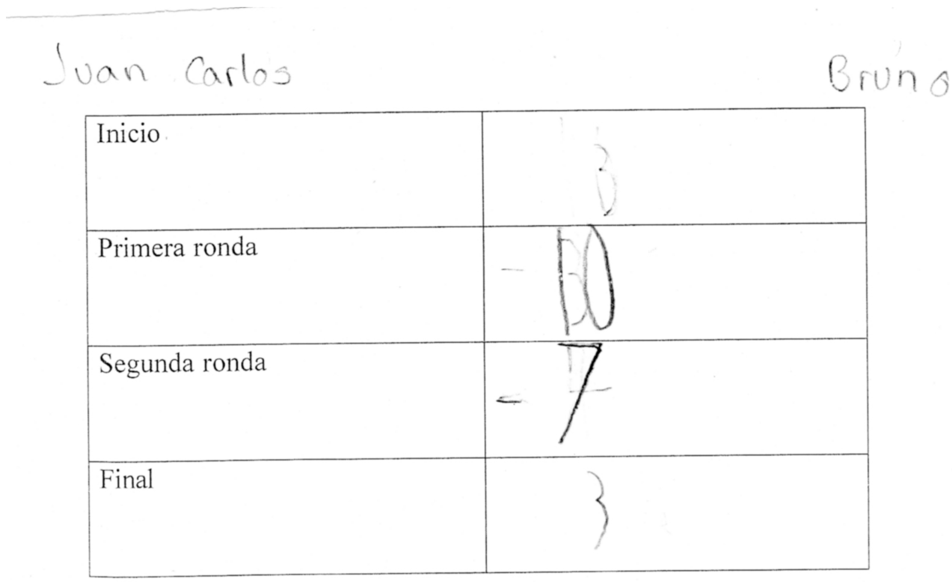
Brandon Bruno

Inicio	brunoPerdióciete
Primera ronda	brunoGanotres
Segunda ronda	brunoperdióciete
Final	brunaPerdiocieteca

Figura 25. Brandon, 1, P6, TD

5.2.4 La cuarta forma de representación fue a través de *numerales y signos*. Los niños que utilizaron este recurso anotaban numerales para designar las cantidades explicitadas en los problemas y éstos eran acompañados –a la izquierda o derecha- por algún signo. Los signos utilizados por los niños fueron tres diferentes, aquel que indicaba una transformación negativa (-), el que hacía referencia a una transformación positiva o adición de una nueva transformación (+) y por último, el signo igual (=), para expresar a su manera que han comprendido que dos transformaciones se han compuesto para generar una transformación compuesta.

En palabras de los niños, menos siete (-7) porque perdió, más nueve (+9) porque ganó, igual (=) que quiere decir al último. Sólo cuatro niños recurrieron a este tipo de representación de los estados y transformaciones explícitos, y de éstos cuatro, sólo una niña empleó esta modalidad a lo largo de los cuatro problemas. Ejemplo (Juan Carlos, 1, P6, TD)



Juan Carlos Bruno

Inicio	3
Primera ronda	-10
Segunda ronda	-7
Final	3

Figura 26. Juan Carlos, 1, P6, TD

5.2.5 Finalmente, está la variante en la que el niño *prefiere no hacer representaciones* gráficas de los estados o transformaciones, a pesar de que se le sugiera.

De las cinco variantes usadas por los niños de nuestra muestra para representar los estados y transformaciones explícitos, la más empleada fue aquella en la que se conjuntaba lenguaje escrito y numerales con un 42.50%, seguida por un 38.33% de casos en los que no se realizó representación alguna de los momentos del problema, un 9.17% de representaciones con sólo numerales, 6.67% de representaciones con numerales y signos y, finalmente, la representación menos usada fue aquella en la que se usaba exclusivamente el lenguaje escrito, 3.33%. La distribución en porcentajes de los tipos de representación hecha por los pequeños se muestra en la figura 27.

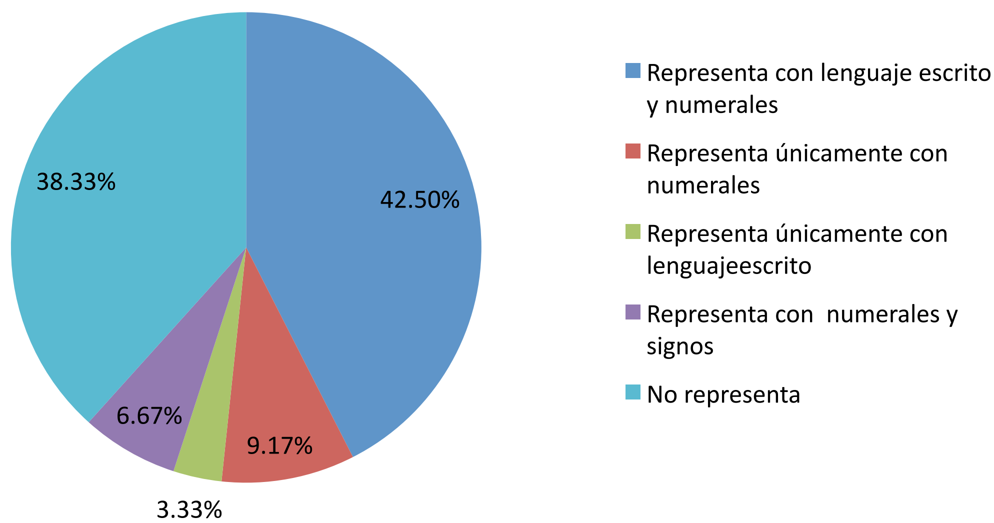


Figura 27. Categoría 2. Representación de los estados y transformaciones explícitos

A continuación se analizarán partes de la entrevista efectuada a Monserrat, una niña de primer grado que para resolver los cuatro problemas, realizó exclusivamente representaciones con numerales y signos. Se ahondará más sobre esta forma de representación debido a que esta modalidad manifiesta una amplia comprensión sobre los estados y transformaciones implicados en el problema así como las composiciones que tienen lugar.

Se eligió presentar las notaciones hechas por Monse por ser la única que usó este tipo de representación durante los cuatro problemas, permitiendo dar cuenta más claramente acerca de cómo los niños pequeños pueden percatarse y representar a temprana edad los estados y transformaciones implicados en los diferentes problemas y categorías usando exclusivamente numerales y signos; además, sus explicaciones sobre el por qué de sus notaciones nos permiten comprender mejor la forma como ella entiende las relaciones involucradas en el problema.

…

E: Vamos a la que sigue, para esta te voy a dar una hojita, una hojita y un lápiz (da media hoja en blanco y un lápiz), en esta hoja anota lo que creas necesario para resolver el problema, puedes anotar letras o números o dibujos o lo que tú necesites para resolverlo y luego me los vas a explicar. A ver, Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?

M: [7] Siete.

E: ¿Cómo sabes que siete?

M: Porque me lo dijiste.

…

E: ¿Cómo le haces, cómo supiste que tenía siete?

M: [3] Porque ahorita ya me la fuiste leyendo, como fuiste viendo ahí (Indica la hoja de la entrevistadora donde están escritos los problemas)

E: A ver, tú cómo le anotarías para saber si siete es el resultado.

M: Ahorita yo le estoy anotando un siete y un tres.

E: ¿Por qué le anotaste eso? ¿este siete qué significa? (Señala el siete que escribió)

M: Lo que, tenía al inicio.

E: Ajá, ¿luego? (Señala el tres)

M: Esto fue cuando, cuando ya terminó.

E: ¿Y en el juego, qué nos dice que pasó en el juego?

M: Perdió.

E: ¿Qué perdió cuántas?

M: Siete.

E: ¿Dónde le anotas que perdió siete?

M: Le anotaría menos siete.

E: A ver, anótale y ahorita me vas a explicar.

M: Menos [-7]

E: A ver, entonces cómo está ahí, qué pasó al inicio, que pasó en el juego y qué pasó al final.

M: Primero hizo, el inicio fue que perdió siete.

E: Ajá, perdió siete, ¿y luego?

M: Que se quedó con, con tres.

E: Ajá.

M: Y fue lo que pasó con él.

E: ¿Y entonces al inicio con cuántas canicas entraría a jugar?

M: Con siete.

…

Figura 28. Monserrat, 1, P3, HB

La primera notación de Monse es para representar la incógnita, no tiene signo pues se trata de un estado y ella parece percatarse de esto, ya que al representar los estados usa números naturales y cuando representa la transformación emplea números relativos. Posteriormente escribe un tres para indicar el estado final, éste también sin signo. Al preguntarle cómo anotaría que perdió siete propone escribir menos siete (-7), con esto Monse expresa la transformación negativa del problema de *Bernardo*.

…

E: A ver, te la leo, fíjate bien en lo que yo te leo y yo te voy a pedir que vayas señalando cada una de las cosas que tú anotaste. Claudio tiene cinco canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Qué pasó durante el juego?

M: [5+9] Que tenía muy pocas y luego, pudo ganar más canicas.

E: ¿Cómo sabes tú que ganó?

M: Que ganó porque ahorita me estás explicando como vas leyendo.

E: Ajá, de lo que te expliqué que te sirvió para saber que ganó, ¿cuántas ganó?

M: Nueve.

E: Nueve ¿Qué te sirvió para saber que ganó nueve, de lo que yo te dije?

M: Mmm, lo que me dijiste de cuánto ganó, y eso…

E: A ver, dice Claudio tiene cinco canicas. ¿Cómo lo pusiste ahí?

M: Con el cinco.

E: Juega una ronda y no nos dice qué fue lo que pasó, si ganó o si perdió, ¿ahí cómo lo pusiste?

M: (No responde, se queda dudosa)

E: Y eso es lo que queremos saber, si ganó o si perdió en esa ronda; y luego dice al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Cómo ponemos que al terminar de jugar ya tenía nueve?

M: Más nueve.

E: Ajá, y entonces dice ¿Qué pasó durante el juego?, ¿qué pasó en la ronda que jugó?

M: Que tenía muy pocas y quiso ganar más y puso más atención para poder ganarlas.

E: (Anota) ¿Cuántas ganó?

M: Nueve.

E: ¿Cómo me dijiste que supiste que ganó nueve?

M: Diciéndome cómo vas leyendo.

…

Figura 29. Monserrat, 1, P4, HB

Monse expresa el primer estado con un numeral sin signo (5), registra en un primer momento el más nueve (+9) al entender el estado final como una transformación, es decir, recurre al movimiento de cantidades para que la incógnita quede en “c”. Posteriormente, cuando la entrevistadora empieza a cuestionarla sobre los momentos del problema, en específico, cuando le dice “Juega una ronda y no nos dice qué fue lo que pasó” rompe con las relaciones que la niña había establecido en el problema, por lo que Monse recurre a explicar que el más nueve es lo que tenía al terminar, aunque en un inicio ese no fue su propósito. Esto se evidencia cuando al final de la transcripción la niña regresa a su primera postura –movimiento de cantidades- donde *Claudio* gana nueve. En el problema 5 sucede lo siguiente:

…

E: Ah, vamos a leerla de nuevo: Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana cinco canicas.

M: [+5] (Lo escribe al escuchar gana cinco canicas)

E: Luego juega una segunda ronda. No nos dice si gana o si pierde y es lo que nosotros queremos saber ¿Sí?

M: (Borra el signo +)

E: Al final del juego, ya que terminó de jugar, ha ganado nueve canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?

M: [+9] Tenía cinco canicas y quiso ganar un poco más y se puso más atención y para poder ganar las nueve en la segunda ronda.

E: ¿Cómo sabes que ganó nueve en la segunda ronda?

M: Porque ahí me fuiste diciendo como me vas leyendo.

E: (Anota) Bien, ahora me vas a explicar algo, ¿en la primera ronda cuántas fue que ganó, qué pusiste ahí para anotar cuántas ganó en la primera ronda?

M: Cinco.

E: Cinco, ¿en la segunda ronda cuántas ganó?

M: Nueve.

E: ¿Cómo pusiste para anotar?

M: Más nueve (señala el +9)

E: ¿Y al final del juego cuántas nos decía que había ganado?

M: Nueve.

E: ¿Eso cómo lo anotaste?

M: Con un nueve.

E: ¿Las dos, la de segunda ronda y la del final lo anotaste con el mismo nueve?

M: Asiente.

E: ¿Cómo la puedes anotar para que sean diferentes? Ya me explicaste que ésta es la primera ronda (señala el cinco) y ésta es la segunda ronda (señala el nueve), ¿ahora cómo anotamos el nueve que tenía al final?

M: [=9]

E: A ver, cómo está eso que anotaste, explícamelo.

M: Primero, aquí fue en la primera ronda (señala el cinco)

E: Ajá.

M: Luego ganó más en la segunda ronda.

E: Ajá.

M: Y luego al último, igual quiere decir al último, tuvo nueve.

E: Y luego… Ajá, ¡oye! ¡Y ese cinco más nueve es igual a nueve?

M: Mmm, no.

E: ¿Y entonces cómo nos salió eso? A ver, explícame.

M: Nada más que ahí, como me los ibas diciendo no es como suma.

E: Ah, no es como suma, ¡parece suma, pero no es? ¿o cómo? A ver, explícame

M: Es una suma pero yo lo, lo entiendo así.

E: Ajá.

M: Pero ahí no es como suma.

E: No es.

M: Ahí es como, esto viene siendo como una explicación.

…

Figura 30. Monserrat, 1, P5, HB

En un primer momento al escuchar que *Cristian* gana cinco canicas, Monse identifica una transformación positiva y la expresa como mas cinco (+5), no obstante, conforme se le sigue leyendo no parece muy segura del signo y opta por borrarlo. Podríamos aventurar que se debe a que al volver a sus notaciones ya no le queda claro si puso el sigo más (+) indicando una transformación –para lo cual resultaría pertinente- o una adición –para lo cual no resulta pertinente pues no hay un número que le anteceda-

Según la información de la entrevista, para que ella acepte un signo positivo a la derecha de un número, debe haber un número que lo anteceda. Esto parece ser así debido al comentario que hace en el problema de *Bruno* donde se percata de la adición de una transformación negativa, pero duda entre poner o no el signo más (+) aceptándolo finalmente debido a que antes hay un cero -el rechazo del signo no fue indagado por la entrevistadora-.

Al escuchar que al final ha ganado nueve canicas escribe más nueve (+9), nuevamente aquí recurre al movimiento de cantidades y expresa a la entrevistadora que en la segunda ronda es cuando *Cristian* ganó nueve canicas. Ella lo explica claramente, sabe que ganó nueve “Porque ahí me fuiste diciendo como me vas leyendo”; el orden en el que aparecen los momentos son recuperados por la niña sin percatarse de que entre las dos cantidades explicitadas está la incógnita.

La entrevistadora cuestiona a Monse acerca de cómo fue representando las transformaciones -hasta ese momento sólo había representado lo que para ella son las dos transformaciones elementales-; la niña resuelve la dificultad argumentando que un numeral representa dos transformaciones. No conforme con esta salida, la entrevistadora le solicita diferencie ambas representaciones, Monse escribe igual nueve (=9) para expresar que al último tenía nueve; aquí no acompaña al numeral con un signo positivo o negativo, a pesar de que también se trata de una transformación. El signo igual (=) es interesante, nos muestra cómo la pequeña se percata que no sólo sirve para explicitar lo que pasó al final, sino que empieza a surgir cierta comprensión acerca de que lo que hay al final es el resultado de las dos transformaciones anteriores.

La representación hecha tiene todo el parecido con un algoritmo, la entrevistadora intenta averiguar si es percibido o no por la niña como tal, al respecto Monserrat es enfática, "es una suma… pero ahí no es como una suma… viene siendo una explicación" De esta forma nos explica perfectamente que a pesar del parecido que tienen sus notaciones con un algoritmo, no lo son, es en cambio la forma como ella entiende las transformaciones implicadas en el problema.

…

E: Muy bien Monse (retira la hoja) Aquí está otra hojita (le da una nueva hoja) vamos a resolver otro problema. Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?

M: [3] (anota cuando escucha que ha ganado tres canicas en total) Que no ganó nada ni perdió.

E: ¿Cómo sabes que no ganó ni perdió?

M: Porque me lo quisiste decir, ahí no me dijiste nada.

E: A ver, ¿cómo le escribirías ahí en tu hojita que te ayudara a saber si es verdad que no ganó ni perdió?

M: ¿Cómo le pondría?

E: Ajá.

M: Pondría un cero aquí (señala en la parte superior izquierda)

E: ¿Y luego qué más pondrías?

M: Y luego ya cuando sé, ya cuantas en total, aquí ya no le pondría nada y mejor le pondría un igual [=]

E: A ver, explícame eso (quedó =3)

M: Aquí, [0] (escribe el cero) no supe cuánto ganó, ni perdió ni ganó y se quedó en ceros, luego más.

E: Mff.

M: [+] Este más (lo señala) se, ya, ya no se puede poner mas, no hay otro número con qué sumar, entonces, aquí ya casi no se pondría el más (lo borra y enseguida lo vuelve a poner) de todos modos se pondría por el cero, y luego, para saber qué pasó al último que dijiste que tres, bueno, yo pongo un igual, un tres (borra el tres y lo vuelve a poner)

E: A ver, ahorita me vas a ir de poquito en poquito, ¿Dónde está…? Dice, Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda. Ahí dónde indicas tú lo que pasó en la primera ronda.

M: Esto, con el cero (señala el 0)

E: Luego la segunda ronda donde pierde siete canicas ¿Dónde indicas lo que pasó en la segunda ronda?

M: (Borra =3) [-7] Con el siete.

E: Con el siete, a ver, ahí le pusiste esta rayita (señala una rayita horizontal junto al siete) ¿Esta rayita qué significa?

M: Menos siete.

E: Porqué le pusiste menos siete.

M: Porque luego perdió siete.

E: Ah, y luego qué… Dice, después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total.

M: [=3] Aquí explico con el deste, (señala el signo) igual.

E: Mff.

M: Y quiere decir el tres, esto me quiere dar a entender que yo al último le doy tres canicas.

E: Muy bien, y, ¡oye!, ¿y 0 más menos siete te da tres?

M: No.

E: ¿Entonces porqué lo escribiste así?

M: Porque esa es de la manera en que yo lo entiendo.

E: (Anota) Entonces dice ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego? ¿Qué pasó durante la primera ronda?

M: Ni ganó ni perdió.

…

Figura 31. Monserrat, 1, P6, HB

Monse explica a la entrevistadora que como no le ha proporcionado información sobre lo que pasó en la primera ronda, “no me dijiste nada”, seguramente *Bruno* no ganó ni perdió, ella expresa esta situación –la incógnita- a través de un cero, un numeral que para ella indica que no hubo ganancias pero tampoco pérdidas, por lo que no necesita ponerle un signo que lo anteceda. En cambio, al continuar con sus notaciones, Monse registra un signo positivo (+) después del cero, duda por un momento “ya no se puede poner más, no hay otro número con qué sumar”. Con este comentario, la niña parece indicar que si el signo va antes que el numeral indica si su valor es positivo o negativo y si va después, muestra si se debe sumar o restar.

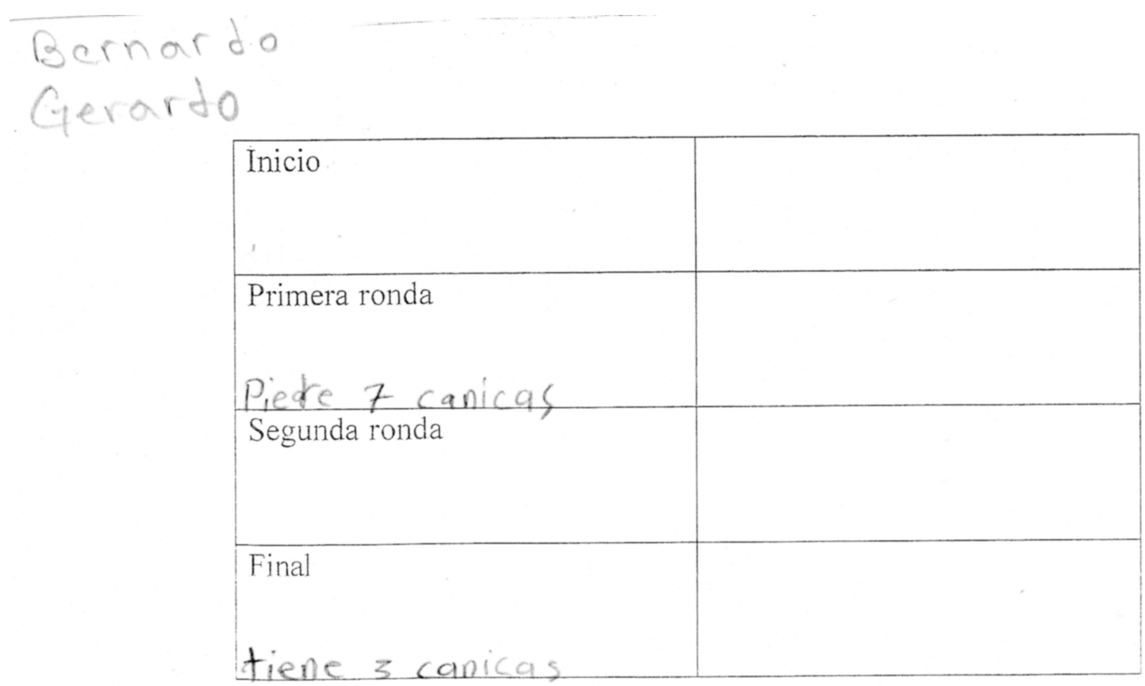
Continúa con su comentario, “ya casi no se pondría el más… de todos modos se pondría por el cero”, como indicando que un numeral antes del signo posibilita hacer una suma, aunque éste sea cero. Ella ha escrito igual tres (=3) mostrando que en total le quedaron tres a *Bruno*, pero al preguntarle cómo representó la segunda transformación, opta por borrar el =3 que va al final y hacerle lugar a un menos siete (-7) que expresa la pérdida de siete canicas, para más tarde volver a anotar =3, ahora sí al final. Con los movimientos que Monse introduce al hacer sus notaciones marca que para ella es importante que las representaciones queden ordenadas según cómo se van dando los momentos del problema.

Las notaciones que hace para el problema de *Bruno*, además, nos indican otra información importante, Monserrat acepta sin problemas que dos signos estén juntos, debido probablemente a que se percata que tienen propósitos distintos: uno indica una adición y el otro un valor negativo. Monse, de forma muy inicial, parece comprender que tratándose de adiciones éstas pueden adicionar tanto cantidades negativas como positivas.

5.3 Representación de la incógnita

En este apartado se analizará la forma en la que los niños realizaron sus notaciones para representar la incógnita. Esta categoría examina la representación de la incógnita en dos momentos, al comienzo del problema y una vez resuelto éste. Se encontraron seis variantes diferentes, las cinco primeras representan la incógnita según su posición y/o valor, mientras que en la sexta no se efectúa representación alguna, pero ejemplifica cómo para la mayoría de los niños no resultó necesario representar la incógnita. Cabe mencionar que las variantes que a continuación se explicarán se encontraron tanto en las representaciones al comienzo del problema como una vez resuelto éste.

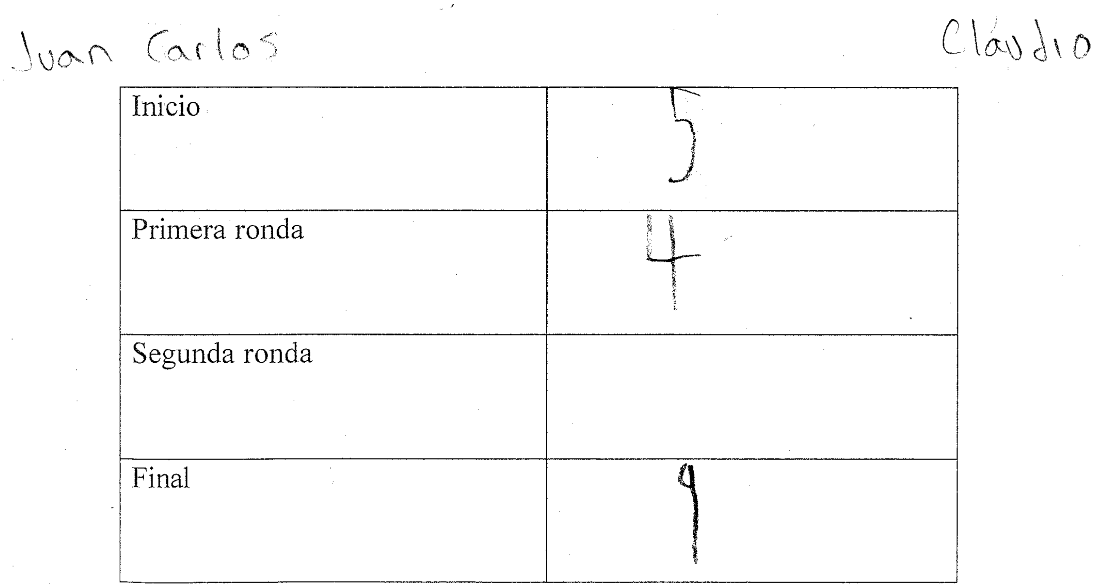
5.3.1 La primera variante se caracteriza en que para indicar la incógnita el niño deja un *espacio en blanco*. Esta situación se presentó en ocho ocasiones; en siete de ellas fue utilizada por niños que usaron tabla de datos, ellos registraban la información explícita del problema y el recuadro correspondiente a la ubicación de la incógnita lo dejaban en blanco. Cuando se usó la hoja en blanco la pequeña de segundo realizó notaciones cuya organización gráfica tiene gran semejanza con la que la tabla provee utilizando el espacio vació en un primer momento para marcar que ahí se ubicaba la incógnita.[39] El siguiente ejemplo muestra el uso del espacio en blanco como medio para manifestar la presencia de un dato que aún no se conoce. Ejemplo (Gerardo, 3, P3, TD)


Bernardo
Gerardo

Inicio	
Primera ronda Piede 7 canicas	
Segunda ronda	
Final tiene 3 canicas	

Figura 32. Gerardo, 3, P3, TD

5.3.2 La variante dos es aquella donde la incógnita se representó a través de un *numeral*. En ella los niños representan el valor de la incógnita por medio de un número que creen puede ser el valor de la incógnita. Ejemplo (Juan Carlos, 1, P4, TD)



Juan Carlos Cláudio

Inicio	5
Primera ronda	4
Segunda ronda	
Final	9

Figura 33. Juan Carlos, 1, P4, TD

5.3.3 El uso de *numerales y signos* conforma la variante tres, esta situación se mostró únicamente en dos ocasiones, se representó la incógnita a través de un numeral, pero acompañado por un signo que expresaba pérdida (-) o ganancia (+). Ejemplo (Karla, 2, P6, HB)

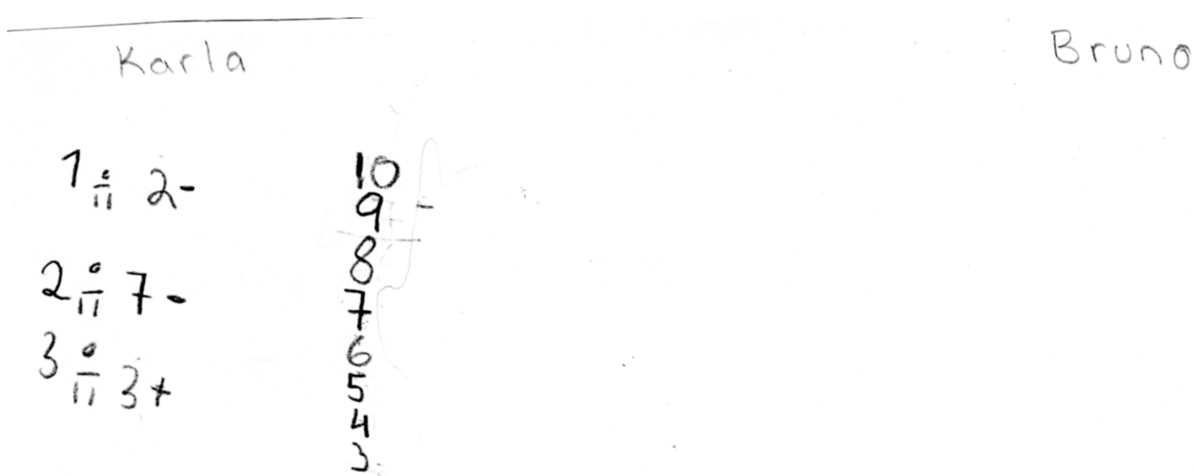


Figura 34. Karla, 2, P6, HB

La primera representación que Karla hace de la incógnita es a través del espacio en blanco, pero una vez que ha resuelto el problema emplea un numeral acompañado por un signo. Ella opta por escribir en su hoja tres marcaciones, en las dos últimas registra los valores explícitos y en cambio no anota valor alguno en el primer momento, que es en el que se ubica la incógnita.

Inicialmente Karla argumenta que en la primera ronda perdió, la entrevistadora pide que explique cómo llegó a esa conclusión y pregunta si alguna de las anotaciones que hizo en su hoja le ayudaron. La niña pone atención a sus notaciones y expresa "Creo que tenía unas nueve o diez canicas, antes de perder siete", al ser cuestionada nuevamente expresa "Porque si, no puede ser un cinco o un cuatro porque éste cabe en el número siete. Es como si a diez le quitaras siete sólo que con un número escondido"

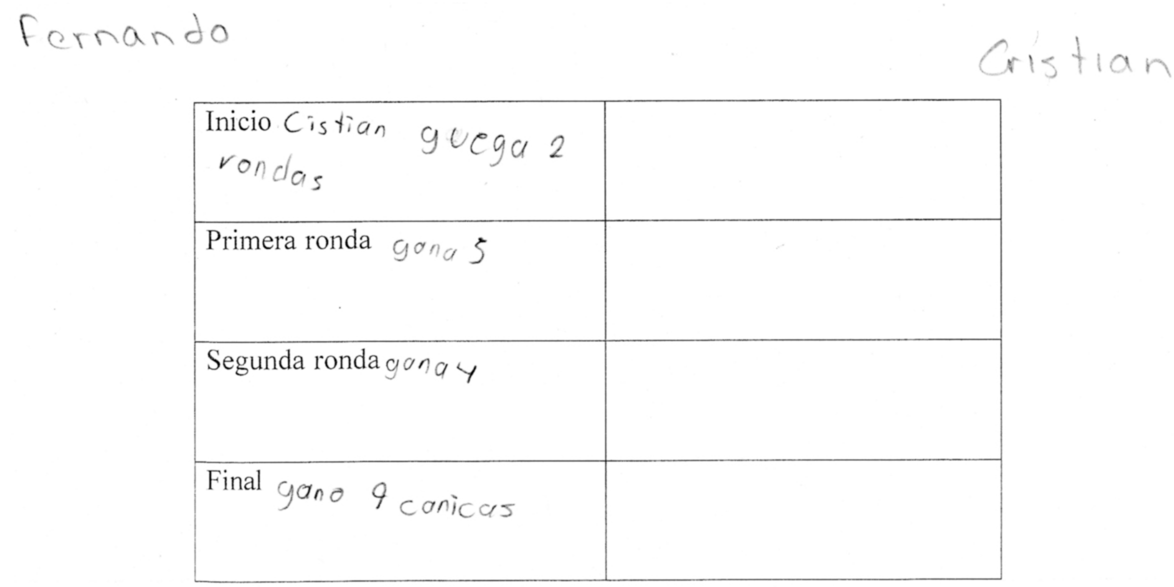
Al pedirle mayores aclaraciones, vuelve a la idea inicial en la que perdía canicas, pero es incapaz de saber cuántas perdió, por lo que la entrevistadora le sugiere que anote lo que necesite para asegurarse de su respuesta. Karla recurre al algoritmo diez menos siete (10-7). Sin embargo, incurre en un error de cálculo y en vez de quedarle tres como producto, le quedan cuatro, esto la desconcierta y opta por cambiar de estrategia. Borra el siete y debajo del diez escribe los números en orden descendente hasta llegar al tres. Cuenta cuántos números hay hasta antes del siete (diez, nueve, ocho) y ve que son tres, como no concuerda con su cálculo anterior donde quedaban cuatro, se desespera.

No es coincidencia que sus números inicien en diez y lleguen hasta el tres; Karla, al igual que otros niños entrevistados, parece saber que el diez está involucrado en el problema. Sin embargo, no logra entender del todo cómo es que se relaciona con las cantidades explicitadas. Así mismo, ella se da cuenta que el tres es una cantidad clave para resolver este problema –son tres las canicas que quedan-

La respuesta final de Karla al problema de *Bruno* es que perdió dos canicas (2-), ella llega a esta conclusión a partir de lo que denomina “cuenta regresiva” cuenta cuántos números hay del diez al siete, pero sin contar el diez “Me iba regresando al número siete… desde el número diez, pero no lo conté porque nada más conté desde el nueve hasta el siete, y así supe que en la primera a lo mejor perdió dos”. Sus cálculos anteriores en los que el diez estaba involucrado y que no la dejaron satisfecha la obligan a “contarlo sin contarlo” en su cuenta regresiva.

El ejemplo de Karla resulta interesante por varias razones. Es una de los pocos niños que logran marcar exhaustivamente los momentos del problema al usar hoja en blanco -marcación que en la tabla equivaldría a las etiquetas y recuadros-; usando exclusivamente números y signos expresa no sólo los momentos, sino las cantidades y si su valor es positivo o negativo (ganancia o pérdida), es decir, todos los datos necesarios para resolver el problema; muestra cómo algunas organizaciones gráficas posibilitan una mayor comprensión del problema aún si no se llega a un resultado convencional, expresa cómo el uso de un algoritmo no es la única opción para llegar a un resultado y que un error en el cálculo puede llegar a obstaculizar la comprensión que un niño tiene de una situación problemática.

5.3.4 La variante cuatro se caracteriza por ser una representación a partir de *lenguaje escrito y numerales,* los niños utilizan el numeral para especificar la cantidad y la lengua escrita para expresar si se trata de un pérdida o ganancia y aquello que se perdió o ganó –canicas- Ejemplo (Fernando, 2, P5, TD)



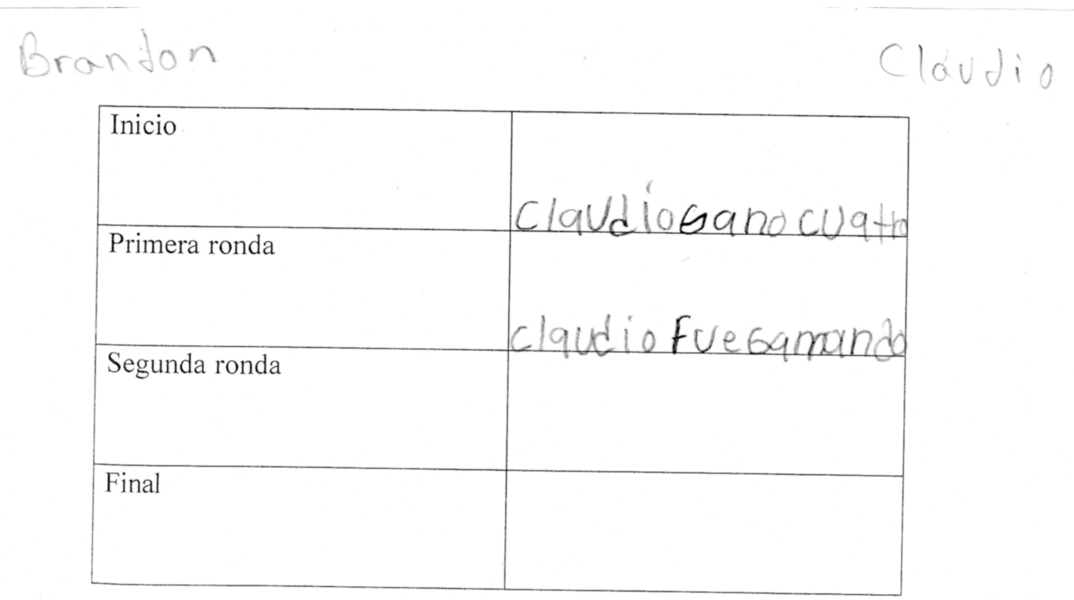
Fernando

Cristian

Inicio Cistian gucga 2 rondas	
Primera ronda gana 5	
Segunda ronda gana 4	
Final gano 9 canicas	

Figura 35. Fernando, 2, P5, TD

5.3.5 En la quinta forma de notación encontrada se usó *exclusivamente el lenguaje escrito*, fue un niño de primero el que a lo largo de los problemas en los que se hacían registros empleó esta modalidad para expresar el nombre del personaje involucrado, la cantidad y si se trataba de transformaciones -pérdidas, ganancias- o estados –tenía- Ejemplo (Brandon, 1, P4,TD)



Brandon	Claudio
Inicio	claudiogano cuatr
Primera ronda	claudio fueganando
Segunda ronda	
Final	

Figura 36. Brandon, 1, P4, TD

5.3.6 La sexta variante agrupó aquellas situaciones en las que los niños *no realizaron explicitación alguna* de la incógnita. Esta variante se diferencia de la primera debido a que en ésta el niño deja vacío intencionalmente el espacio de la incógnita y, en la segunda, la ausencia de la incógnita no es marcada propositivamente por el menor en forma verbal o gráfica. En el ejemplo que se presenta a continuación Guillermo registra la transformación y el estado final explícitos en el problema, diferenciando los momentos a través de la organización espacial que da a su escritura; sin embargo, no marca el momento de la incógnita ni a través de marca gráfica ni de espacio vacío (Guillermo, 3, P3, HB)

Figura 37. Guillermo, 3, P3, HB

La representación de la incógnita, como ya se mostró, fue realizada de cinco diferentes maneras; sin embargo, en buena parte de los problemas no se elaboró ninguna notación por parte de los pequeños para dar cuenta de la incógnita –sexta variante-. La figura 38 muestra la frecuencia de eventos para cada una de las variantes cuando los niños *representaron la incógnita desde el comienzo*.

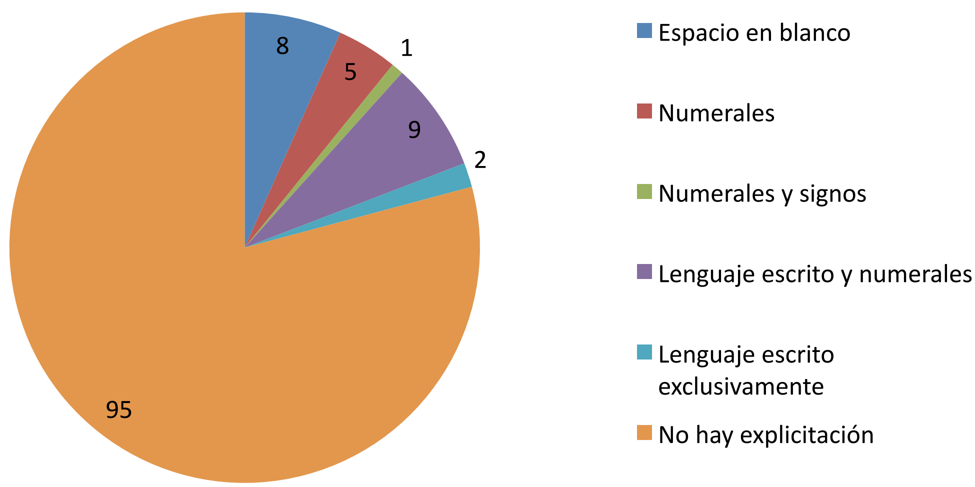


Figura 38. Categoría 3. Representación de la incógnita desde el comienzo

El gráfico muestra cómo en 95 de los casos -79.17%- no se realizó ningún tipo de explicitación a cerca del valor o posición de la incógnita. De las notaciones realizadas fue lenguaje escrito y numerales la que más veces se presentó -nueve ocasiones-

Los niños al momento de realizar el registro de la incógnita desde el comienzo del problema tenían poco tiempo para analizar la información proporcionada. De las veinticinco ocasiones en las que se expresó la incógnita desde el comienzo, en cuatro el valor fue acertado y en trece la incógnita no fue la convencional, mientras que en las ocho restantes, marcadas a través del espacio en blanco, aún al continuar con la resolución del problema no se hicieron notaciones.

Al transcurrir la entrevista sucedieron diferentes situaciones que llevaron a varios de los niños a cambiar la representación inicial que habían hecho de la incógnita y a otros más a representarla por primera vez, algunas de estas situaciones fueron: relecturas del problema, cuestionamientos sobre las respuestas y/o procedimientos por parte de la entrevistadora, nuevas anotaciones sobre los estados y transformaciones explícitos -de datos que anteriormente no habían sido anotados acorde a la información explicitada en el problema o habían sido pasados por alto-. Conforme avanzó la entrevista, sólo ocho de las veinticinco representaciones iniciales fueron cambiadas por sus creadores; cuatro de ellas por niños que en un primer momento dejaron espacio en blanco y posteriormente llenaron éste con algún tipo de notación.

Una vez resuelto el problema la cantidad de representaciones de la incógnita se incrementó, aunque aún un 65.00% de los problemas -78 casos- no mostró explicitación de la misma. Lo mencionado se observa en la figura 39.

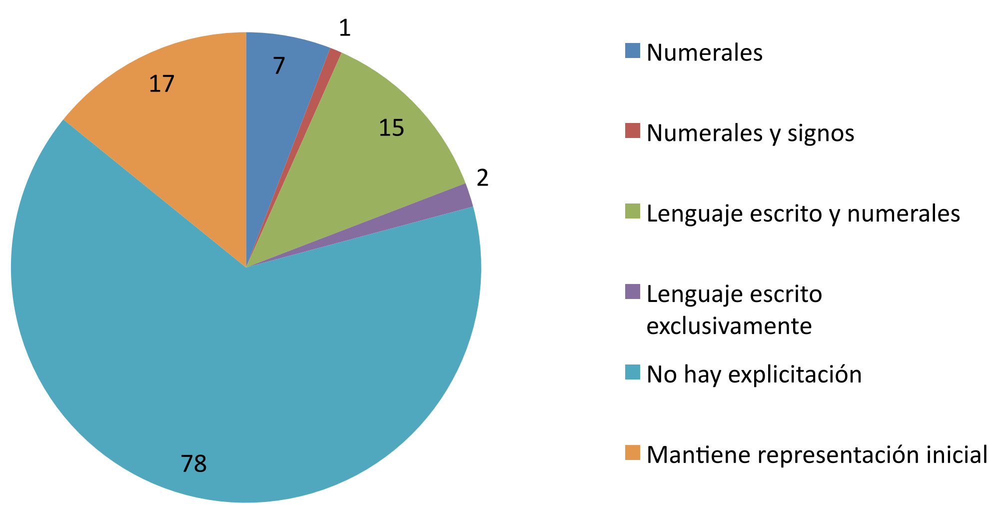


*Figura 39.*Categoría 3. Representación de la incógnita una vez resuelto el problema

5.4 Representación de la composición

La cuarta categoría de análisis indaga la forma en la que se representa por medio de notaciones la composición de un estado y una transformación (categoría II) o dos transformaciones (categoría IV), es decir, la notación aritmética que el niño efectúa para dar respuesta a la incógnita.[40] Se encontraron tres diferentes variantes:

5.4.1 La primera variante hace referencia a la representación de la composición a través de un *algoritmo pertinente*, es decir, de uno que resulta apropiado para dar cuenta de los elementos relacionales presentes en la situación problema. En esta modalidad se incluyó un algoritmo que aunque pertinente, no poseía una representación algorítmica convencional -la resolución donde se utilizó este algoritmo será descrita más adelante-. El ejemplo que se presenta a continuación muestra una representación que además de pertinente resulta convencional (Karime, 3, P3, TD)

(Frente al problema: Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?)

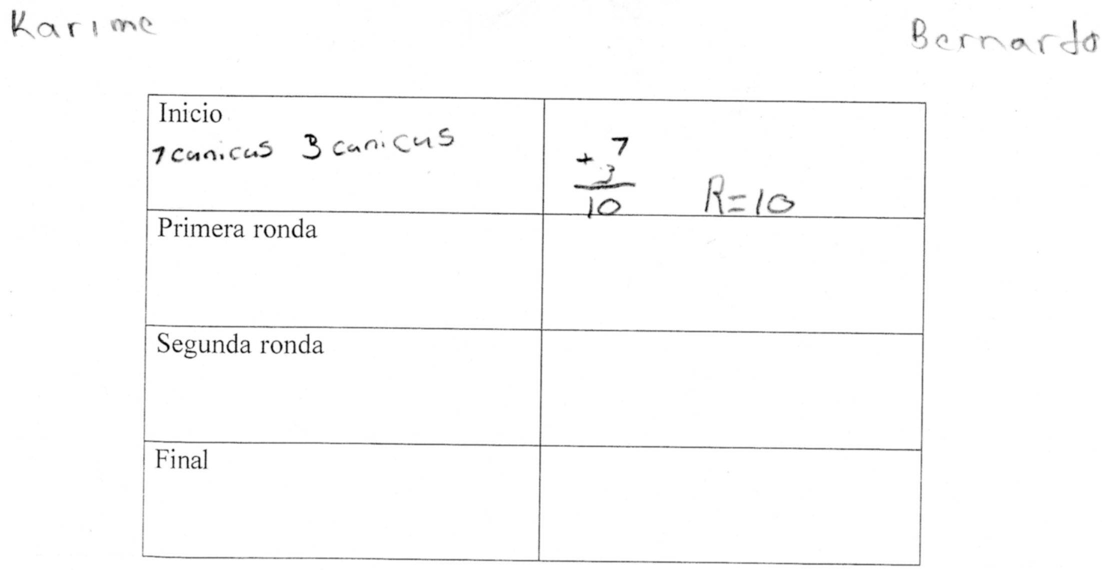
E: Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde 7 canicas. Al finalizar el juego tiene 3 canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?

K: [7 canicas] (anota en el recuadro donde está escrito inicio) ¿Me la puede repetir por favor?

E: Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde 7 canicas. Al finalizar el juego tiene 3 canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?

K: [3 canicas] (anota en el recuadro donde está escrito inicio)

K: [7+3=10] (Escribe en el recuadro al lado de inicio de forma vertical) [R= 10]



Karime Bernardo

Inicio 7 canicas 3 canicas	$\begin{array}{r} +7 \\ 3 \\ \hline 10 \end{array}$ R=10
Primera ronda	
Segunda ronda	
Final	

Figura 40. Karime, 3, P3, TD

5.4.2 La *representación algorítmica no pertinente* es la segunda variante encontrada; los motivos por los cuales el algoritmo planteado resultó inoportuno se debieron a la unión inadecuada de los dos estados o transformaciones explícitos, al rescate de sólo uno de ellos o a la inclusión de información no pertinente. Ejemplo (Rafael, 3, P5, HB)

(Frente al problema: Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana cinco canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado nueve canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?)

E: Vamos a ver ahora el juego del niño que se llama Cristian, a ver cómo le fue cuando estuvo jugando. Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana 5 canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado 9 canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?

R: [5+9=14] Ganó

E: ¿Cuántas habrá ganado?

R: 14

E:¿Cómo le hiciste tú para saber que había ganado 14?

R: Sumé 9+5

E: (Anota) ¿Cómo supiste que debías de sumar para saber el resultado?

R: Porque ganó, no perdió

Figura 41. Rafael, 3, P5, HB

5.4.3 La última variante es aquella en la que *no se realiza ningún tipo de representación notacional* que dé cuenta de las composiciones. Es importante señalar que aunque un niño no represente cómo los estados y trasformaciones se compusieron, esto no implica que no haya operado aritméticamente con la información del problema, más bien, que su procedimiento para llegar a un resultado no fue hecho a través de notaciones.[41] A continuación se muestra un caso en el que a pesar de que la entrevistadora sugirió el uso de notaciones la niña rechaza hacerlas pues se siente segura del cálculo mental que efectuó. (Rebeca, 3, P4, HB)

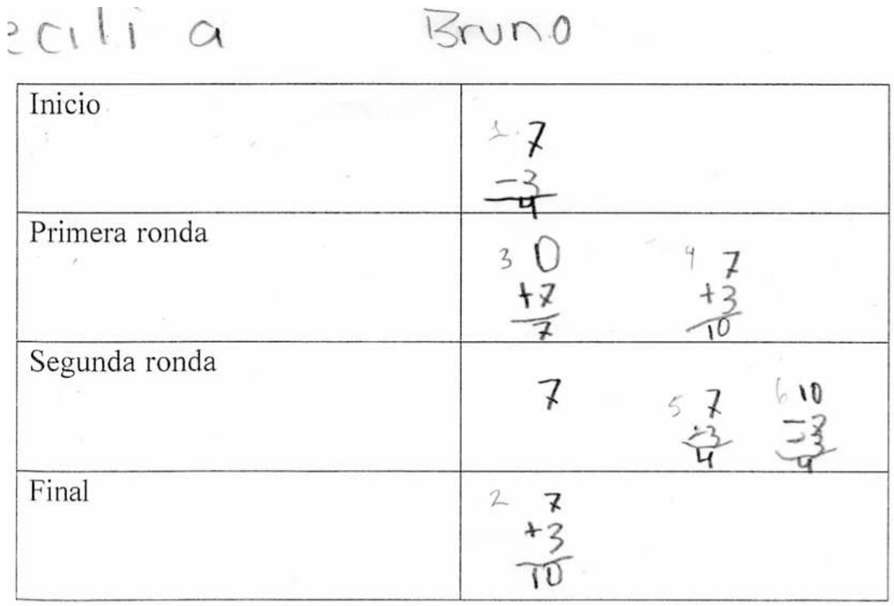
(Frente al problema: Claudio tiene cinco canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Qué pasó durante el juego?)
R: Ganó
E: ¿Cuántas ganó?
R: 4
E: ¿Cómo supiste que ganó 4?
R: Porque 5 más 4 me dan 9
E: (Anota) Muy bien, ¿hay algo que quieras anotar en tu hoja para asegurarte del resultado?
R: (Niega)

La variante donde se empleó un algoritmo pertinente fue la que obtuvo un menor porcentaje de aciertos, 7.50% equivalente a nueve casos. Al momento de representar la composición de los problemas con incógnita en “a” representaron el algoritmo de forma b+c (7+3) y a la inversa c+b (3+7), al reconocer la propiedad de la conmutatividad de la suma. Argüían que antes de perder (-7) debió haber tenido las siete canicas (+7) y por eso debían sumar siete a las tres que quedaban al final.

Otra forma de representación cuando la incógnita recae en “a” es la que hizo una pequeña de primero a través de un algoritmo no convencional, nos permitiremos ahondar en las notaciones hechas por la niña ya que nos muestran cómo va registrando diferentes algoritmos según las hipótesis que va teniendo a cerca de las relaciones entre estados y transformaciones y cómo el algoritmo no convencional sobre el que da su respuesta final conjuga dos diferentes creencias respecto a las relaciones entre los estados y las transformaciones inmiscuidos en el problema.

A Cecy se le proporcionó la tabla de datos para registrar sus notaciones, sin embargo, sólo en uno de los problemas –el aquí presentado- parece poner una breve atención a las etiquetas y disposición gráfica de ésta. Sus notaciones se limitaron a representar en los cuatro problemas la composición; solamente en el problema de *Bruno* registró las transformaciones explícitas. Cecy al usar tablas, les dio mayoritariamente el uso de hojas en blanco.

Mientras que para el problema de *Bernardo* resuelve mediante un único algoritmo de forma tres mas siete igual a diez (3+7=10), al enfrentarse al problema de *Bruno* tiene serias dificultades y esboza varios algoritmos. El último, con el que se queda para dar una respuesta a la incógnita, es un algoritmo peculiar que tiene poco de convencional, y que fue ubicado dentro de la variante de representaciones algorítmicas pertinentes dado que a pesar de su representación poco convencional, la primera parte de éste resulta pertinente y ayuda a Cecy a dar una respuesta correcta. (Cecilia, 1, P6, TD)



ecili a Bruno

Inicio	1. 7 −3 4
Primera ronda	3 0 +7 7 ; 4 7 +3 10
Segunda ronda	7 ; 5 7 −3 4 ; 6 10 −3 9
Final	2 7 +3 10

Figura 42. Cecilia, 1, P6, TD

Las representaciones que hizo para conocer la incógnita fueron varias. La primera fue siete menos tres igual a cuatro (7-3=4) Aquí, como ya se planteó anteriormente, Cecy recurre al movimiento de las cantidades para que de esta forma la incógnita quede ubicada en “c”. Ella argumenta que debe hacer una resta “porque era de quitarle”, y si pierde hay que restar. Cecy retoma uno de los datos -la pérdida de siete canicas-, pero la separa del resto de la información lo cual le impide darse cuenta de la totalidad de relaciones involucradas. Al pedirle que explique cómo llegó al resultado, la niña cambia de parecer y busca nuevas soluciones.

La segunda representación efectuada fue siete más tres igual a diez (7+3=10), esta vez vuelve a fijarse en sólo una parte del problema: en “ganó tres”, y esto la lleva a hacer una suma, pues para la pequeña si dice que gana hay que sumar. El tercer algoritmo corresponde a cero más siete igual a siete (0+7=7) y la razón por la cual es planteado de esta forma por ella es “porque decía en la hoja que tenía nada, que no tenía canicas y se ganó 7”, aquí Cecy está percatándose del momento dentro del problema en el que se marca la incógnita y de una de las cantidades involucradas, este análisis fragmentado del problema en el que pierde de vista la transformación compuesta, la lleva nuevamente a una respuesta no convencional.

En la siguiente representación prueba un nuevo algoritmo; sin embargo, no es capaz de explicar por que lo eligió y la entrevistadora la invita a que escriba de poco a poco para que sus notaciones sean más claras, es así como surge el quinto algoritmo. Al releerle el problema, cuando escucha pierde siete, opta por poner menos siete (-7), mediante una posterior relectura completa con tres, igual (3=) al escuchar que *Bruno* ganó tres canicas en total.

Aunque inicialmente esta representación hacía alusión a las transformaciones explícitas en el problema, Cecy termina usando sus notaciones como algoritmo y lo resuelve escribiendo debajo de las notaciones un cuatro, quedando siete menos tres igual a cuatro (7-3=4), es así como vuelve a su representación inicial que aunque no puede defender ante la entrevistadora -pues parece darse cuenta que algo está fallando-, tampoco puede abandonar.

A lo largo de la resolución del problema de *Bruno*, Cecy nos permite ver tres procedimientos: el primero, donde el movimiento de cantidades se hace presente y la incógnita se busca en “c”; el segundo, donde las dos transformaciones se componen convencionalmente para dar respuesta a la incógnita en “a”, y el tercero, donde el valor de la incógnita es anulado por no aparecer en la información dada.

Los dos primeros procedimientos son conjugados por la pequeña en su última notación, diez menos siete menos tres igual a cuatro (10-7-3=4) Su respuesta final a la incógnita es que al inicio *Bruno* tenía 10 canicas; no obstante, con su algoritmo nos muestra que aunque debe dar una respuesta, no queda del todo satisfecha, debatiéndose entre buscar la incógnita donde siempre la ha encontrado, en “c”, o en “a”, donde las informaciones del problema parecen indicar que está.

Para los problemas con incógnita en “b”, tres de los niños buscaron un número que al sumarle cinco les diera nueve, quedando en dos ocasiones como cinco más cuatro y en una, cuatro más cinco. Dos pequeños recurrieron a la representación de las dos cantidades explícitas en el problema restando a “c” “a” (9-5) para así identificar la incógnita.

Para este tipo de problema un niña hizo una representación no convencional que se catalogó dentro de las representaciones pertinentes pues su intención era restar las cantidades conocidas para de esta forma encontrar la incógnita, sin embargo la organización que hizo invirtiendo el minuendo y el sustraendo hizo que la representación del algoritmo, así como el producto de éste, no fueran convencionales a pesar de que los datos involucrados y la composición eran pertinentes (5-9=3)[42]

Por otro lado, la segunda variante, el uso de algoritmos no apropiados para resolver la situación problemática presentada, obtuvo un 10.00%. De los once algoritmos planteados aquí, ocho aluden a una unión no adecuada de los estados y transformaciones implícitos. En los problemas con incógnita en “a” los niños restaban siete menos tres igual a cuatro (7-3=4) y en aquellos con incógnita en “b” sumaban cinco más nueve (5+9=14).

En sólo uno de los algoritmos se retomó únicamente una de las informaciones presentadas (-7) y a ésta se aunó el valor dado por el niño a la incógnita (7), quedando el algoritmo siete menos siete igual a cero (7-7=0)

La última forma de representación de los algoritmos que no resultaron pertinentes fue aquella en la que se incluían cantidades que no tenían que ver con los estados o transformaciones inmiscuidos. Mary Paz recurrió a esta modalidad al resolver los problemas de categoría IV; incluyó, además de las cantidades de las transformaciones explícitas en el problema, el número de rondas efectuadas, dos. Cabe mencionar que ninguno de los algoritmos hechos por Mary fueron retomados por ella al dar respuesta a la incógnita.[43]

Finalmente, en el 82.50% de los casos los niños no recurrieron a algún tipo de notación. A pesar de que se les sugirió hacer todos los registros que necesitaran en su hoja o tabla, varios niños se mostraron parcos en sus notaciones, algunos de los que usaron hoja en blanco no realizaron notación alguna en uno o varios de los problemas. En cambio, al usar tabla de registro, todos realizaron algún tipo de notación, aunque no siempre guiada por el soporte grafico del SRE, ni alusiva a la forma en la que se componían los estados y transformaciones.

La distribución de los diferentes tipos de notaciones hechos para representar la composición de los estados y transformaciones se muestra en la figura 43.

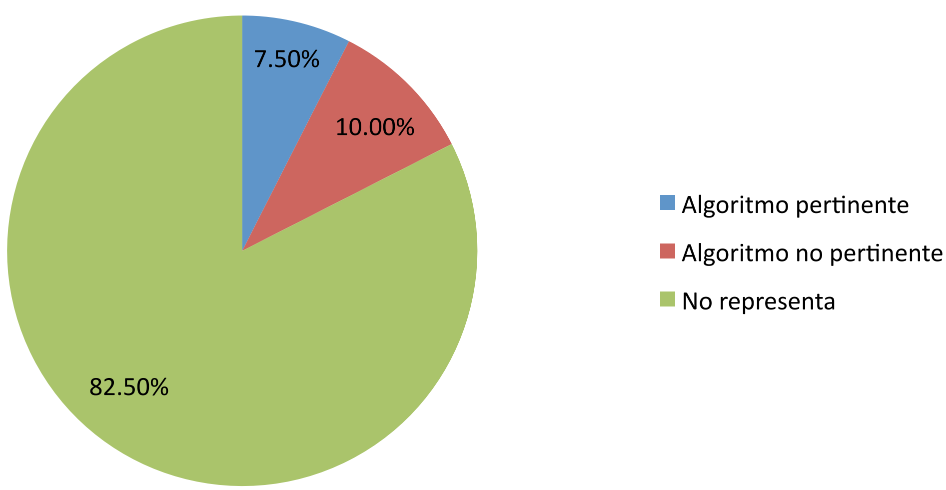


Figura 43. Categoría 4. Representación de la composición

5.5 Cálculo aritmético efectuado

En esta quinta categoría se analiza el tipo de cálculo aritmético que los pequeños efectúan para dar respuesta a la incógnita a través de cinco diferentes variantes. La última de ellas alude a una respuesta en la que el cálculo aritmético está ausente; sin embargo, se muestra aquí por permitir explicar de dónde proviene la solución que los niños dan a la incógnita a pesar de que no haya habido una fase aritmética de involucrada.

A diferencia de las categorías 5.2, 5.3 y 5.4, en las que por tratarse del análisis de las notaciones realizadas sólo se retomaban los datos de los cuatro últimos problemas, en esta categoría se retomará la información proveniente de los seis problemas presentados, aunque no todos sean aplicables a las variantes. Se retomó aquel procedimiento o cálculo aritmético por medio del cual expresaron la respuesta final a la incógnita, independientemente de si a lo largo de la entrevista recurrieron a diferentes tipos.

5.5.1 *Cálculo apoyado con dedos:* esta variante se presentó únicamente en los problemas 1, 2 y 6, se le dio este nombre debido a que el cálculo con los dedos fue determinante en las respuestas que los pequeños dieron. Engloba dos situaciones distintas, aquella en la que los niños se apoyaron exclusivamente de los dedos para hacer el conteo y expresar su respuesta final a la incógnita y, la segunda, en la que se usaron los dedos como mediadores, pero además se realizó algún tipo de registro gráfico como apoyo adicional. Ejemplo (Karina, 1, P1, HB)

…

E: Muy bien, vamos a empezar con el primero, Pedro tiene seis canicas. Juega una ronda de canicas y pierde cuatro. ¿Cuántas canicas tiene al finalizar el juego?

K: (Al oír seis levanta seis dedos, cuando escucha pierde cuatro cierra cuatro dedos) Dos.

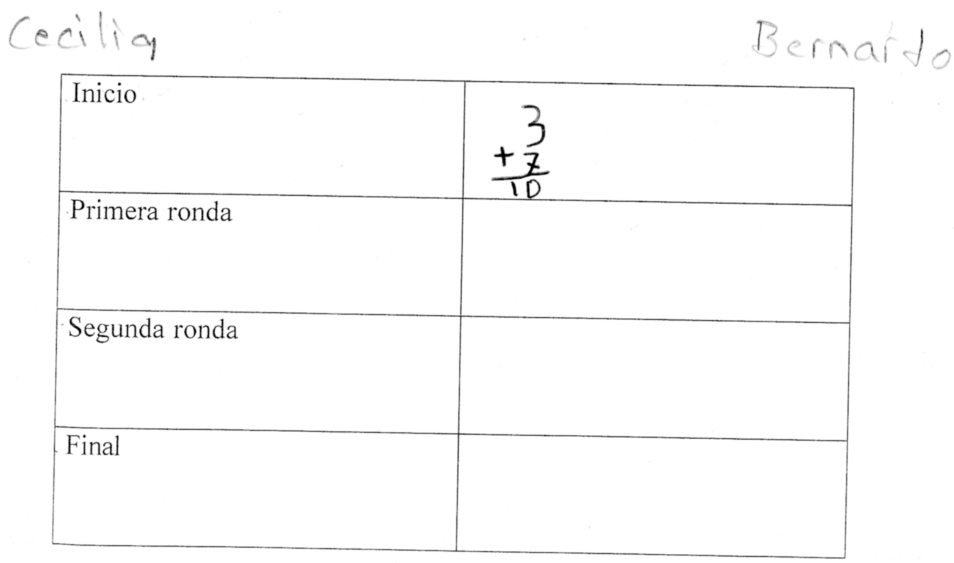
E: ¿Cómo supiste que tiene dos?

K: Contando con mis dedos.

…

La segunda situación se presentó sólo una vez en el problema seis. La pequeña, además del cálculo con los dedos, utiliza una representación algorítmica que descarta posteriormente y, finalmente, para dar una respuesta a la incógnita, la niña registra en columna números del diez al tres en orden descendente realizando conteos de los números y apoyándose con los dedos para saber cuántos números había entre el diez y el siete.[44]

5.5.2 *Cálculo aritmético utilizando un algoritmo*: en esta variante los niños para dar una respuesta a la incógnita recurrieron al planteamiento de un algoritmo que podía o no, ser el convencional.[45] Se observaron dos diferentes maneras de obtener el producto, resolviendo el algoritmo mentalmente o apoyándose con los dedos[46]. Ejemplo (Cecilia, 1, P3, TD)



Cecilia	Bernardo
Inicio	$3 + 7 = 10$
Primera ronda	
Segunda ronda	
Final	

Figura 44. Cecilia, 1, P3, TD

5.5.3 *Cálculo mental*: se dio este nombre a las situaciones en las que los niños de manera interna efectúan diferentes cálculos aritméticos para llegar a un resultado. Ejemplo (Luis, 1, P4, HB)

…

E: A ver, te la vuelvo a leer, tú si quieres puedes anotarle en tu hojita y ahorita me vas a explicar, cómo es, qué respuesta es y cómo es que sabes tú que esa es la respuesta, Claudio tiene cinco canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Qué pasó durante el juego?

L: Se ganó nueve.

E: A ver, tú cómo supiste que se ganó nueve.
L: Porque tenía cinco y se ganó cuatro.
…
E: (Anota) A ver, entonces ya no entendí ¿ganó cuatro en esa ronda o ganó nueve?
L: Cuatro.
…
(Luis no realiza ningún tipo de notación en su hoja)

5.5.4 *Ausencia de cálculo aritmético:* en la cuarta variante se agruparon aquellas respuestas en las que no se presentó ningún tipo de cálculo aritmético. Se encontraron tres variedades: la primera es aquella en la que el niño retoma sólo uno de los datos explícitos del problema y esboza éste como solución a la incógnita; la segunda alude a respuestas sin aparente relación con los datos, son aquellas para las que el niño da una cantidad que no fundamenta y que no guardan relación con los estados o transformaciones involucrados; el tercer tipo de respuesta aquí englobado hace referencia a las soluciones expresadas con base en la ausencia de un dato, es decir, el niño identifica que la incógnita se ubica en un lugar diferente al que está acostumbrado a encontrarla, esto lo confunde pues para los dos primeros momentos siempre le habían sido dados de forma explícita los valores, al no encontrar el valor explicitado en el problema opta por darle un valor nulo.

Esta última variante guarda relación estrecha con las últimas cuatro variantes de la categoría 5.1. Sólo un evento es la excepción, pues al analizarlo a partir de la categoría 5 se ubica dentro de la cuarta variante de cálculo mental; esto se debió a que la compensación que Jenny hizo difirió de la que el resto de los niños hicieron, ella compensó la primera de las cantidades explícitas, pero además sumó una unidad adicional para que con esa pudiera ganar las tres canicas que tenía al final –gana ocho canicas, para que pueda perder siete y todavía le quede una con la cual ganar las tres canicas que tenía al final-, utilizando cálculo mental para dar su respuesta.

Cálculo mental es la variante con mayor número de incidencias, 53.33%, seguida por ausencia de cálculo aritmético con 37.22%.

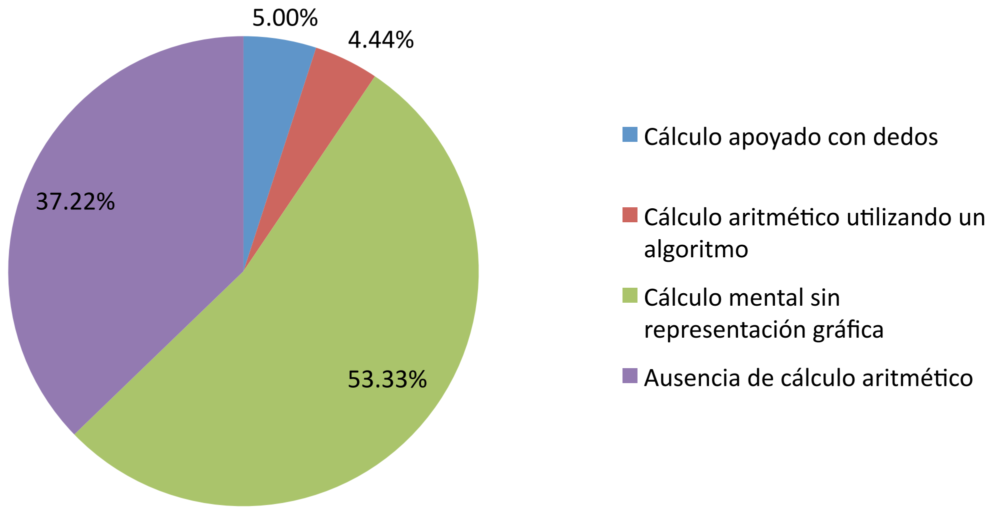


Figura 45. Categoría 5. Frecuencia de estrategias aritméticas utilizadas para responder a la incógnita

El lector recordará que a partir del análisis de la categoría 5.1, los seis problemas presentados se agruparon en pares de acuerdo a su complejidad, en el par de menor dificultad –problemas 1 y 2-, más del 80% de los niños recurrieron al cálculo mental sin representación gráfica, para el de mediana complejidad –problemas 4 y 5- lo hizo casi el 50% y para el par más complejo menos de una tercera parte recurrió a esta estrategia.

El uso elevado de estrategias de cálculo interno en los dos primeros problemas puede deberse a que no se les permitía hacer registros, no obstante, el comportamiento de los datos señala que cuando el problema resulta fácil, los pequeños optan primordialmente por el uso de estrategias mentales internas, conforme se avanza en complejidad esta modalidad decrece y van incluyéndose otras en las que las notaciones se presentan como alternativa; sin embargo, en las situaciones más difíciles la ausencia de cualquier tipo de cálculo aritmético se hace cada vez más frecuente.

5.6 Uso del espacio gráfico

La sexta categoría, denominada uso del espacio gráfico, analiza la manera en la que los niños ocuparon los espacios en sus hojas de registro, es decir, la disposición espacial que dieron a sus notaciones. Debido a que se emplearon dos medios de registro con características gráficas y organizacionales diferentes, se examinará en un primer momento el arreglo espacial efectuado al trabajar con tablas de registro y posteriormente al usar hojas en blanco.

5.6.1 Tablas de datos

Las tablas de datos proveyeron en sí mismas una organización particular del espacio gráfico, guiando en cierta medida los posteriores registros de los pequeños. Todos los que usaron la tabla de datos realizaron algún tipo de notación, aunque, como se verá más adelante, no siempre era acorde con la organización gráfica que la tabla proveía.

Antes de leer el problema 3 la entrevistadora presentaba una tabla al niño, le explicaba lo que era y dirigía su atención a las etiquetas leyendo cada una de ellas, posteriormente lo invitaba a escribir lo que considerara conveniente para resolver el problema. Al presentar un nuevo problema volvía a atraer la atención hacia las etiquetas en la tabla si lo consideraba pertinente u obviaba esa parte, dependiendo de si el niño había mostrado comprender la organización gráfica de ésta en los anteriores problemas o expresaba de alguna manera haber comprendido su formato.

Por uso espontáneo se entenderá aquel en el que, salvo la invitación inicial, el niño toma la iniciativa para registrar en la tabla sus notaciones. Por uso sugerido se retomó aquel en el que una vez leído el problema y, a pesar de la invitación inicial, el niño no realizaba ningún tipo de registro, por lo que la entrevistadora vuelve a sugerir o recuerda al chico que puede utilizar la tabla para anotar lo que necesita para resolver el problema.

La figura 46 evidencia cómo conforme avanza la entrevista, los niños muestran mayor espontaneidad al momento de usar la tabla de datos y el uso sugerido va decreciendo.

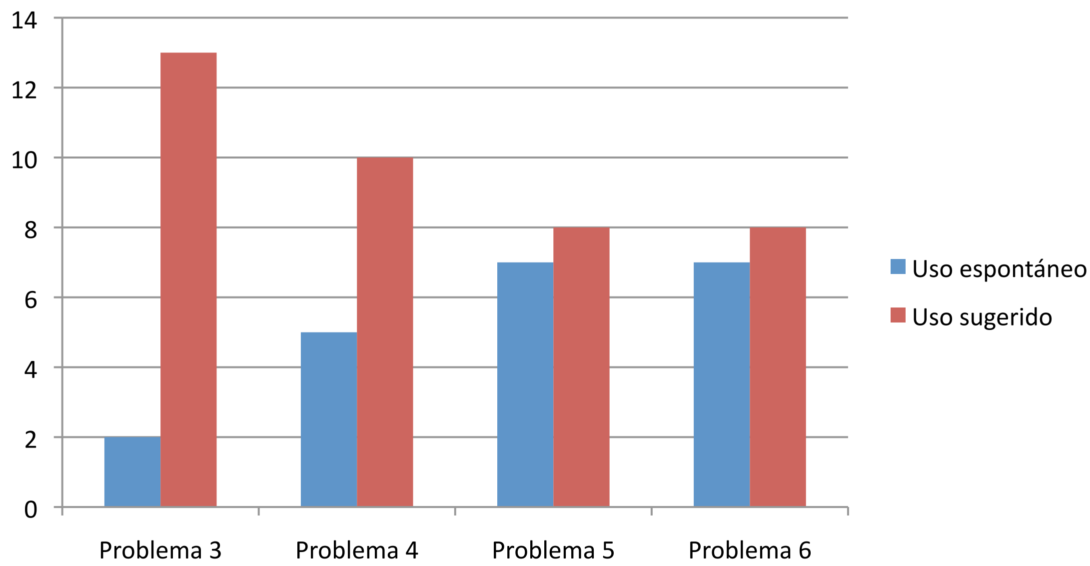
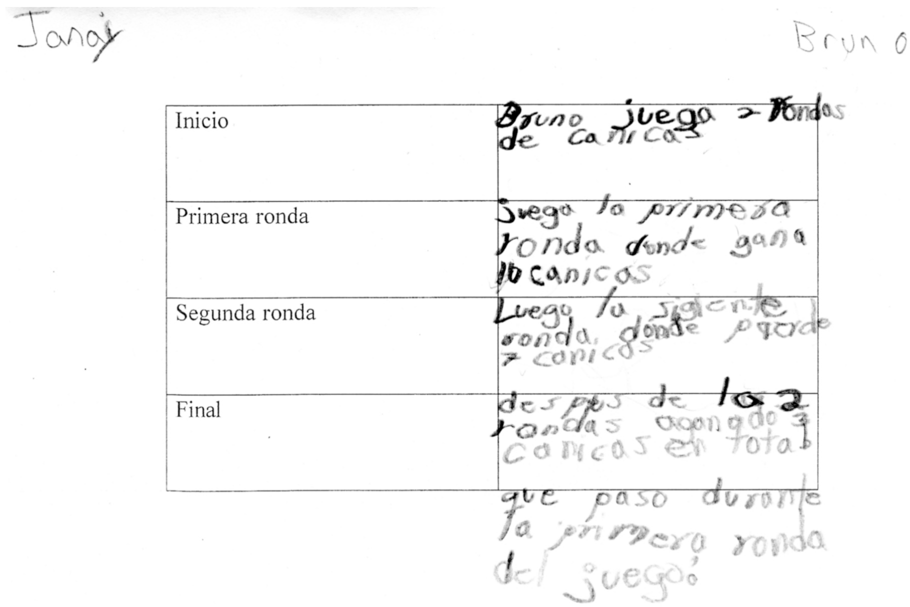


Figura 46. Categoría 6. Uso de tabla de datos

A continuación se analizará la forma en la que se representaron los estados y las transformaciones explícitos en la tabla de datos, guiándose o no por las etiquetas. Siete variantes se encontraron.

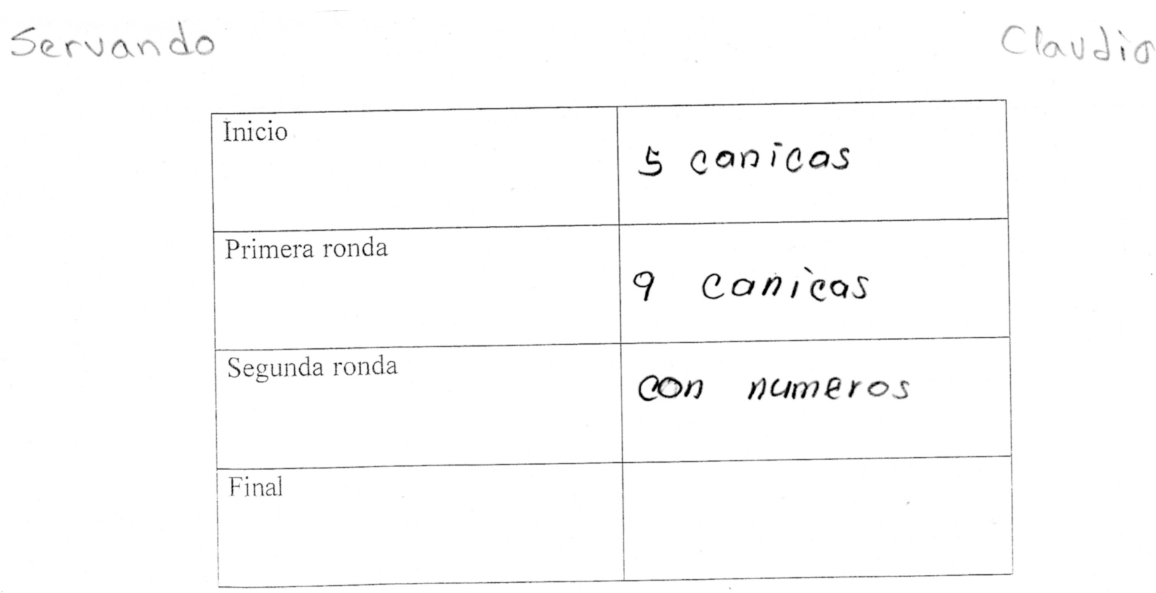
La primera variante es aquella en la que se representaron los dos datos manifiestos en el problema y se hizo la organización de éstos acorde a las etiquetas. Ejemplo (Janay, 2, P6, TD)



Inicio	Bruno juego 2 rondas de canicas
Primera ronda	Juego la primera ronda donde gana 10 canicos
Segunda ronda	Luego la sigiente ronda donde pierde 7 canicos
Final	despues de las 2 rondas gano 3 canicas en total

Figura 47. Janay, 2, P6, TD

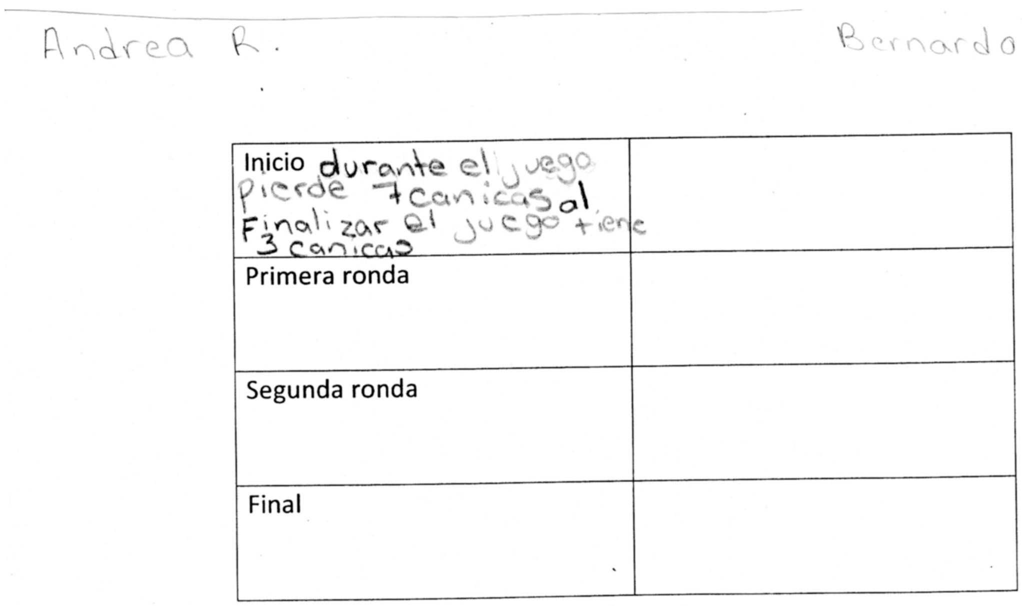
En la segunda manera de usar el espacio gráfico el niño *registró los dos datos explícitos, pero sólo uno de ellos era acorde con las etiquetas*. Ejemplo (Servando, 2, P4, TD)



Inicio	5 canicas
Primera ronda	9 canicas
Segunda ronda	con numeros
Final	

Figura 48. Servando, 2, P4, TD

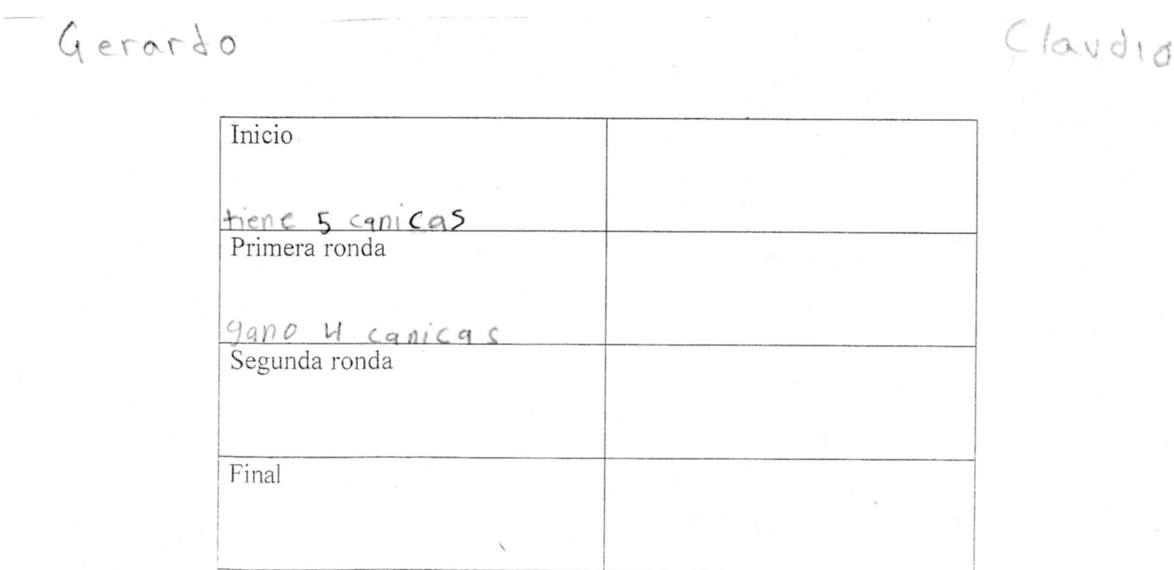
En la tercera variante se representaron los dos datos manifiestos sin guiarse por las etiquetas. Ejemplo (Andrea, 2, P3, TD)



Andrea R.	Bernardo
Inicio durante el juego pierde 7 canicas al Finalizar el juego tiene 3 canicas	
Primera ronda	
Segunda ronda	
Final	

Figura 49. Andrea, 2, P3 TD

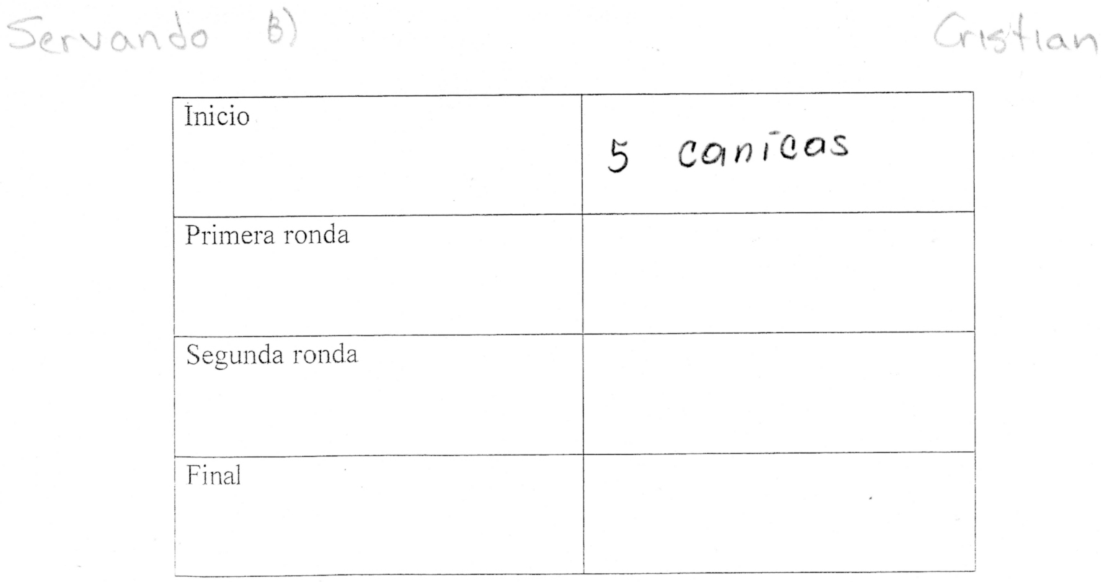
La representación guiada por la etiqueta de sólo uno de los datos explícitos constituye la cuarta variante. Ejemplo (Gerardo, 3, P4, TD)



Gerardo	Claudio
Inicio tiene 5 canicas	
Primera ronda gano 4 canicas	
Segunda ronda	
Final	

Figura 50. Gerardo, 3, P4, TD

En quinto lugar se observó el registro de *un dato en la tabla, el cual no guardaba relación con la etiqueta*. Ejemplo (Servando, 2, P5, TD)


Servando b) Cristian

Inicio	5 canicas
Primera ronda	
Segunda ronda	
Final	

Figura 51. Servando, 2, P5b, TD

La situación en la que el niño *representa uno o dos de los datos explícitos pero incluye otros* que no aparecen en el problema ocupa el sexto lugar. Ejemplo (Jennifer, 1, P3, TD)

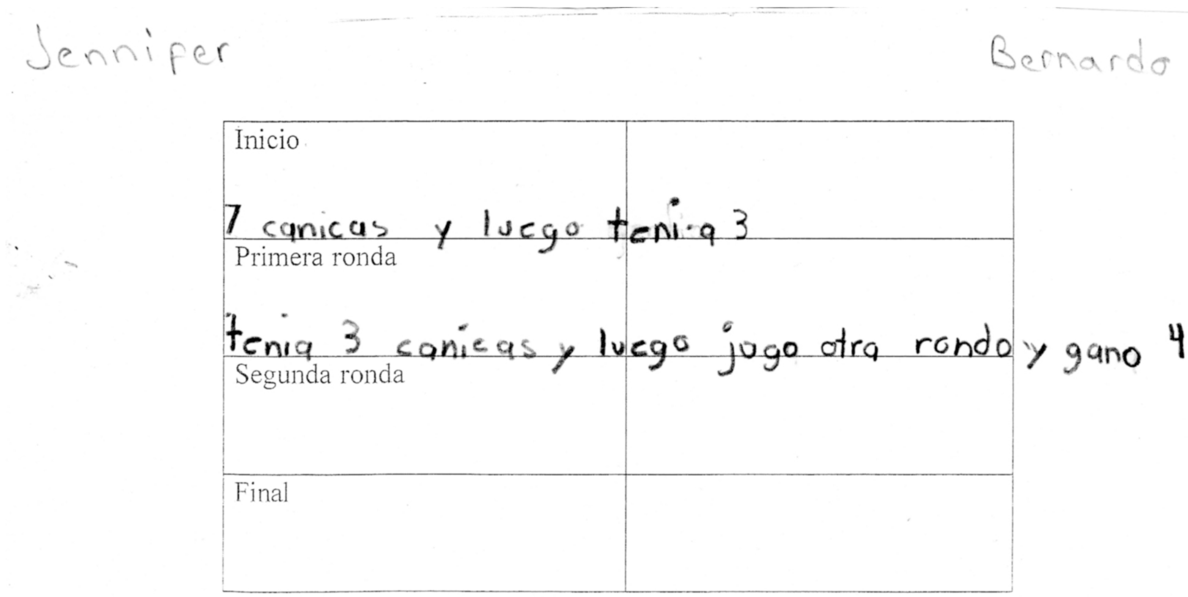


Figura 52. Jennifer, 1, P3, TD

La séptima variante alude a los casos en los que *no se representaron los estados o transformaciones*. Ejemplo (ver categoría 5.3, quinta variante. Brandon, 1, P4, TD)

La mayor cantidad de casos –veintiuno- se dio cuando los pequeños elaboraban notaciones guiadas por las etiquetas para poner de manifiesto los dos datos explícitos, seguida por quince situaciones en las que aunque se registraron ambos datos, la ubicación espacial de uno no coincidía con las etiquetas. La figura 53 muestra los porcentajes que tuvieron cada una de las variantes.

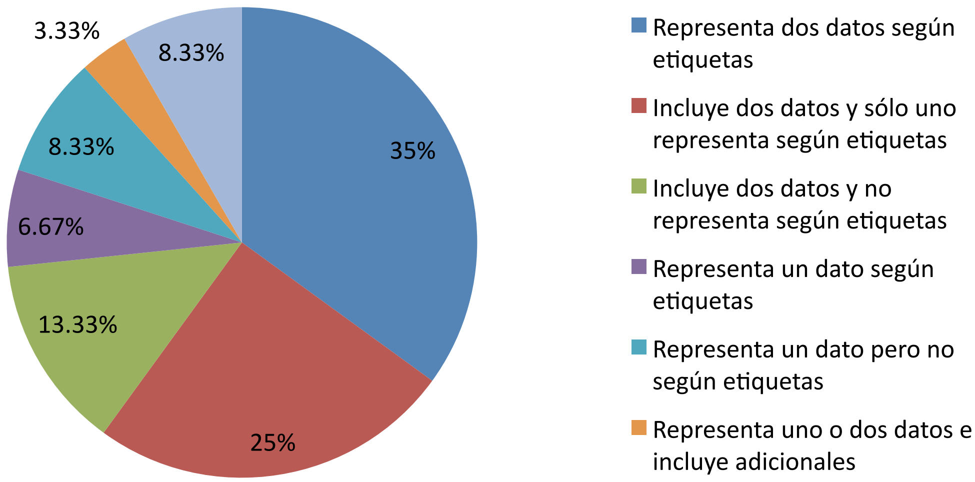


Figura 53. Categoría 6. Representación de estados y transformaciones explícitos según el espacio gráfico provisto por la tabla

Muy variados fueron los usos que del espacio gráfico hicieron los pequeños. Algunos niños llenaban convencionalmente los espacios vacíos de la tabla con la información faltante respetando las etiquetas; otros, aunque se guiaban por las etiquetas hacían su registro en los recuadros que ya estaban siendo ocupados por éstas. Algunos pequeños utilizaban el espacio gráfico de la tabla exclusivamente para registrar la información proveniente del problema y cuando necesitaban hacer algún algoritmo o notación adicional lo hacían fuera de la tabla. En otros casos la tabla no se utilizó como tal, sino que se le dio el uso de hoja en blanco.

A lo largo de las entrevistas se observó que conforme se avanzaba en la resolución de los problemas, y por ende, se tenía mayor familiaridad con la tabla, el uso de ésta se acercaba más a lo convencional, los niños se guiaban con mayor frecuencia por las etiquetas y la organización de los espacios. La tabla parecía facilitar la comprensión de las relaciones aritméticas inmiscuidas, aunque el solo uso de la tabla no fue suficiente para una resolución exitosa; sin embargo, la apropiación que los niños hacían de ésta era fundamental, es decir, entre mejor comprendían la importancia de la organización gráfica que la tabla les proveía y adecuaban la información al espacio gráfico guiándose por las etiquetas, mayor comprensión se generaba respecto a las relaciones matemáticas involucradas en el problema, lo que llevaba a los niños a aproximarse cada vez más a una respuesta convencional de la incógnita.

Al analizar estadísticamente cómo influía el registro de los estados y transformaciones explícitos acorde con las etiquetas, únicamente para el problema 5 se encontró una relación significativa entre el registro de las dos transformaciones acorde con las etiquetas y la emisión de una respuesta convencional para la incógnita (*Fisher*, *ns*=.001)[47]

5.6.2 Hojas en blanco

Las hojas en blanco permitían a los niños libertad en sus arreglos gráficos sin imponer ningún tipo de organización, ésta quedaba por completo en manos de los pequeños que hacían las notaciones. Se encontraron diversas formas de plasmar las notaciones en el espacio que proveía la hoja en blanco, a continuación se presentan las variantes encontradas.

La primera variante fue denominada *notaciones con disposición lineal*, que hace referencia a todas aquellas representaciones numéricas, de lenguaje escrito o ambas que se distribuyen en la hoja de forma conjunta y siguiendo una línea no fragmentada. En este tipo de notaciones los pequeños tienden a escribir toda la información de forma contigua, sin hacer separaciones mediante espacios o por división en renglones. Estas notaciones tendieron a iniciar en la parte superior izquierda de la hoja. Ejemplo (Andrea, 3, P6, HB)

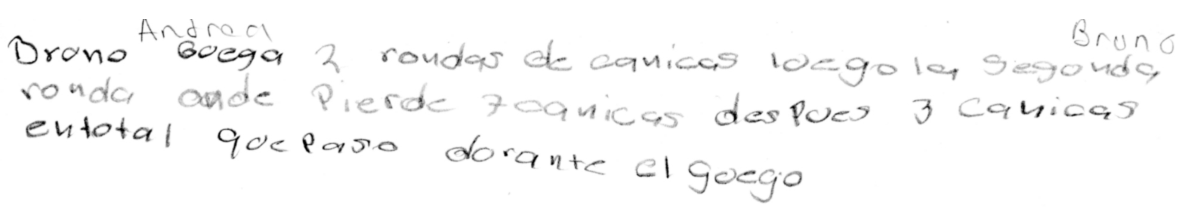


Figura 54. Andrea, 3, P6, HB

A la segunda variante se le dio el nombre de *algoritmo*, en esta situación los niños se limitan a registrar uno o más algoritmos en su hoja. El espacio en la hoja ocupado por el algoritmo variaba; sin embargo, los pequeños tendieron a ubicarlo en la zona superior o central. Ejemplo (César, 2, P3, HB)

Figura 55. César, 2, P3, HB

En las *notaciones en renglón* se utilizó tanto lenguaje escrito como numerales. La diferencia entre esta variante y la lineal radica en que las notaciones no son continuas, sino que los niños van separándolas por medio de espacios formando así renglones, cada uno de los cuales marca un momento específico del problema. Esta modalidad por su distribución gráfica guarda parecido con el de la tabla de datos. Ejemplo (Guillermo, 3, P5, HB)

Figura 56. Guillermo, 3, P5, HB

Elemento aislado es el nombre que se dio a las notaciones compuestas por un único numeral o palabra y que en los tres casos que se presentaron fueron ubicadas en la parte superior izquierda de la hoja. Ejemplo (Francisco, 2, P3, HB)

Figura 57. Francisco, 2, P3, HB

En la quinta variante se englobaron las *notaciones mixtas*, son aquellas que conjugaban dos de las cuatro primeras variantes mencionadas. El ejemplo que se presenta contiene notaciones realizadas en forma lineal y hay un cambio de renglón para diferenciar los datos explícitos de la respuesta a la incógnita (Karla, 2, P4, HB)

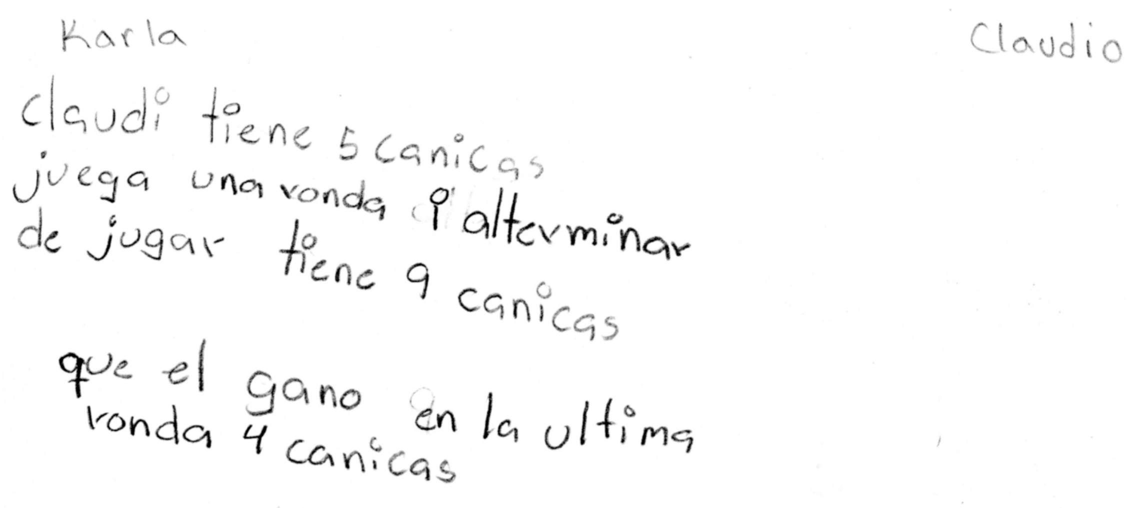


Figura 58. Karla, 2, P4, HB

La sexta variante engloba las situaciones en las que *no se elaboraron notaciones*.

La situación que más se presentó fue la ausencia de notaciones, seguida por doce casos en los que se recurrió a la distribución lineal y once en los que se efectuaron algoritmos. Los porcentajes de la distribución de las notaciones en la hoja en blanco se muestran en la figura 59.

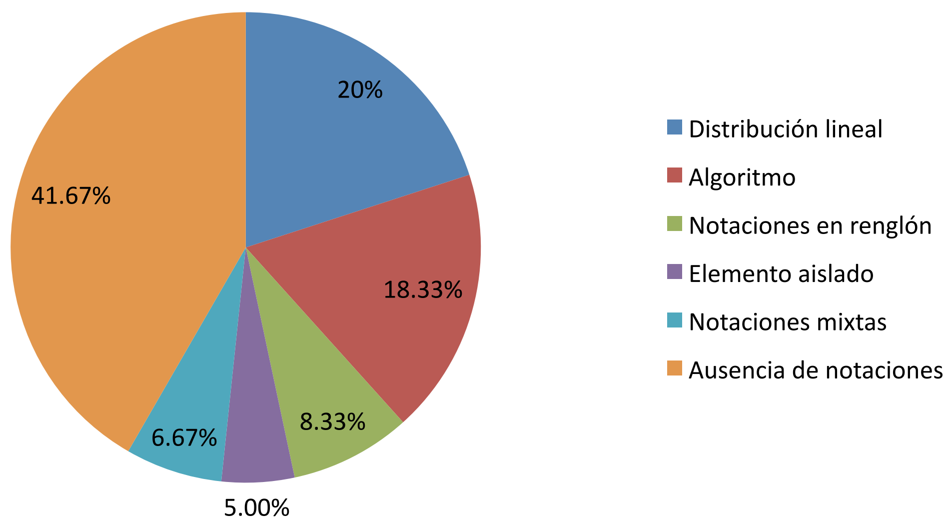


Figura 59. Categoría 6. Distribución de las notaciones en la hoja en blanco

5.7 Recuperación de la incógnita, valores y momentos del problema

Uno de los principales intereses de esta investigación es comprender el razonamiento que subyace a las respuestas y procedimientos de los pequeños cuando se enfrentan a problemas aditivos categoría II y IV con incógnita ubicada en "a" o "b". En un primer momento la presente categoría pretendía dar cuenta exclusivamente de aquellas resoluciones dadas por niños que no lograban un resultado convencional; sin embargo, al analizar con detenimiento las respuestas y procedimientos de los pequeños, tanto de los que lograron una respuesta convencional, como de los que no, surgieron datos interesantes que posibilitan un mayor entendimiento sobre el pensamiento infantil, por esta razón se optó por retomar la totalidad de resoluciones efectuadas por los chicos.

Este análisis -y por tanto las agrupaciones realizadas-, está guiado por tres situaciones: recuperación de la posición de la incógnita, recuperación de las variables o valores explícitos –estados y transformaciones- y la recuperación de los momentos de la transformación. Para afirmar que en determinada respuesta se recuperaron los valores explícitos o momentos marcados en el problema, se debió recuperar adecuadamente cada uno de ellos, no bastó con recuperar sólo uno. Además, al abordar los valores explícitos, fue necesario recuperar correctamente las transformaciones y/o estados, no siendo suficiente con que el niño expresara simplemente un numeral.

En este apartado solamente se analizarán las resoluciones efectuadas para los cuatro problemas más complejos, es decir, aquellos donde la incógnita se ubica en "a" y "b". Como el lector podrá constatar, a pesar de tratarse de problemas de diferente categoría y ubicación distinta de la incógnita, hay ciertas coincidencias en las resoluciones propuestas por los niños y la lógica que hay detrás de los cuatro problemas, por esta razón, y para hacer más ágil el análisis, se expresan las resoluciones de los niños de forma global, sólo en aquellas situaciones en las que no exista coincidencias se hará una explicación individual.

Las respuestas de los niños se separaron en diez grupos que serán descritos a continuación. Es importante aclarar que las respuestas de los niños no siempre estuvieron mediadas por escrituras espontáneas o por la utilización de las tablas u hojas proporcionadas. Sin embargo, el registro de las argumentaciones orales al momento de respaldar la respuesta de los problemas nos auxilió en la recuperación de algunos de los razonamientos subyacentes. Así mismo, al resolver un problema, el niño no siempre emitía una única respuesta, en varias ocasiones ensayaba varios procedimientos hasta encontrar uno que lo convencía más que los otros; sin embargo, como ya se ha venido haciendo, se retomó la resolución final y se dejó de lado las anteriores.

5.7.1 Resoluciones en las que recuperan la posición de la incógnita, los momentos de la transformación y los valores explícitos

Tabla 6

Recuperación de la posición de la incógnita, momentos de la transformación, y valores explícitos

Problema	Tabla de datos			Hoja en blanco			Total
	1ro	2do	3ro	1ro	2do	3ro	
Claudio	4	3	3	1	3	2	16
Cristian	2	2	4	0	4	1	13
Bernardo	1	0	3	0	0	2	6
Bruno	2	1	3	0	1	1	8
Total	9	6	13	1	7	6	43

Al resolver el problema de *Claudio*, dieciséis niños fueron capaces de recuperar la posición de la incógnita, los momentos de la transformación y los valores explícitos, mientras que en el problema de *Cristian* sólo trece lo lograron.[48] La estructura aritmética del problema de *Claudio* se puede identificar como a+x=c (5+4=9), en donde los valores de "a'' y "c'' son conocidos y la incógnita se presenta en la segunda posición ("b").

La estructura detrás del problema de *Cristian* parece a simple vista la misma que en el de *Claudio*; sin embargo, al tratarse de problemas de categoría distinta se hace patente una notable diferencia entre ellos. Ambos comparten la posición de la incógnita (a+x=c); no obstante, mientras que el primero incluye dos estados y una transformación (5+4=9), el segundo, maneja tres transformaciones (+5+4=+9).

Al resolver los problemas con incógnita en "b" todos los niños, con excepción de uno, conservaron la posición de la incógnita (a+x=c). Para llegar a la respuesta optaron por compensar uno a uno los valores que podría tener "b" hasta llegar a "c". Esta estrategia es nombrada por Vergnaud (1991) como "complemento" y es utilizada principalmente cuando la diferencia entre las dos variables explícitas es pequeña o cuando hay redondeo en las cantidades. Ejemplo (Brandon, 1, P4, TD)

…
E: A ver, ¿qué escribiste ahí?
B: Claudio ganó cuatro canicas
E: A ver, ¿le puedes anotar ahí qué hiciste o qué pensaste para darte cuenta que había ganado cuatro?
B: No'más le pongo otros cuatro y le dejé el cinco de uno (levanta un dedo) A ver, serían cinco, (baja el dedo) luego fui diciendo, seis, siete, ocho, nueve, (va subiendo un dedo por número que dice) así.
…

Otros argumentos en este mismo sentido fueron los siguientes: "Ganó cuatro canicas… porque cinco más cuatro son nueve", (Alexis, 3, P4, HB). "Es como si yo le fuera metiendo números… me fijé en la tabla de segunda ronda para ver porqué ganó nueve canicas, si aumento cuatro canicas que ganó se van a hacer nueve", (Janay, 2, P4, TD). "Porque es como la suma de la otra vez, que si le sumo a cinco, cuatro, va a salir nueve, porque si le voy a quitar no va a poderse, porque dice que al finalizar tenía nueve", (Karla, 2, P5, HB). "Mira, como tú me dijiste que ganó nueve canicas yo nada más puse mis cuatro deditos y supe que, mira, mis cinco y mis cuatro dedos y ya, supe que tenía eso y ya", (Jennifer, 1, P5, TD). Al preguntarles cómo sabían que debían hacer una suma explicaban: "Porque si él tenía al finalizar nueve y tenía antes cinco, no le podía quitar cuatro" (Karla, 2, P4, HB).

Sólo Francisco recurrió al procedimiento de la "diferencia" (Vergnaud, 1991), empleando una sustracción que expresaba la relación de "c" con "a" para así encontrar el valor de "b" (c-a=b, 9-5=4)[49]. Ejemplo (Francisco, 2, P5, HB)

…
F: Al final se quedó con… [9-5=4] (Escribe en forma vertical) Se quedó con cuatro.
E: ¿Esas cuatro cuándo fue que se quedó con ellas?
F: Cuando empezó la segunda ronda
…

El argumento de los niños que resolvieron el problema de *Claudio* coincidió con la estructura aritmética del problema "Primero Claudio *tenía*, este, *cinco* canicas, jugó la primera ronda y al, y este, y Claudio *ganó cuatro* canicas, y al terminar de jugar *tenía nueve en total*",[50] (José, 3, P4, TD). Esto no ocurrió de la misma manera con los argumentos emitidos al resolver el problema de *Cristian*. Aunque en distintos momentos de la entrevista los pequeños identificaron las transformaciones (ganó cinco, ganó nueve), durante posteriores explicaciones llegaban a dejarlas de lado. El perder las transformaciones al momento de dar su explicación final no indica que los niños no se percaten de ellas, más bien muestra la dificultad que tienen para coordinar todas las transformaciones matemáticas inmiscuidas en el problema. Ejemplo (Érika, 3, P5, TD)

…

Er: [al final gano 9 canicas] (Continúa escribiendo en recuadro segunda ronda) Que al principio *tenía cinco* canicas, aunque aquí no nos dice el número (señala la segunda ronda) él fue otra ronda, la segunda ronda y *ganó, cuatro.*

En: (Anota) ¿Cómo sabes tú que ganó cuatro?

Er: Porque si aquí *ganó cinco* (señala la primera ronda) y al final *tenía nueve* (señala final) en la segunda ronda *ganó cuatro*.

En: (Anota) ¿Qué te… cómo le hiciste tú para saber que eran cuatro las que había ganado?

Er: ¿Qué eran cuatro las que había ganado en la segunda ronda? Porque en la segunda ronda decía: luego juega otra ronda, al final *ganó nueve canicas* y ahí no nos decía que el número cuatro, ahí yo veo porque en al principio *tenía cinco*, para nueve, cinco, para nueve, no se puede, aquí no nos dice cuatro, pero le puse el cuatro porque cinco más cuatro, nueve.[51]

…

Podemos darnos cuenta cómo en distintos momentos de la entrevista Érika reconoce las transformaciones presentes; sin embargo, le es difícil dar una explicación en la que confluyan las tres transformaciones de forma coordinada. Mientras que al resolver el problema 5 en su argumento final todos los pequeños rescataron la transformación de la incógnita (ganó cuatro), sólo seis explicitaron, además de la transformación de la incógnita, la primera transformación elemental (ganó cinco), y ninguno fue capaz de coordinar las tres transformaciones.

Este fenómeno puede deberse a que para la mayoría de los pequeños no parece ser trascendente explicitar las transformaciones presentes, pero sí las cantidades inmiscuidas. Para pocos es relevante emplear en sus argumentos palabras que den cuenta más claramente que se trata de transformaciones y no de estados: "Este, porque otra vez *tenía cinco*, cinco canicas, *no tenía cinco*, en la primera ronda *ganó cinco*, en la segunda ronda ganó cuatro y al final las contó y ya tenía nueve" (Dayana, 2, P5, TD)

Al resolver el problema de *Bernardo,* seis pequeños identificaron la posición de la incógnita, los momentos del problema, las transformaciones y estados explícitos; un caso más -siete- se dio en el problema de *Bruno*. Ambos problemas coinciden en que su incógnita se ubica en "a" (x-b=c). Los pequeños que resolvieron los problemas con incógnita en "a" recurrieron a dos estrategias. La primera es aquella en la que para conocer el valor de la incógnita deben sumar la cantidad de canicas perdidas y la cantidad que quedó al final para de esta forma encontrar el primer término, siguiendo el razonamiento x=b+c.

Estos niños recurren a lo que aquí denominamos "compensación completa", donde deben compensar la cantidad de canicas perdidas, pero además compensan la cantidad de canicas del último término –y esto hace la diferencia entre el razonamiento de estos pequeños y una compensación incompleta que se mostrará más adelante-. Otra estrategia encontrada fue la del "estado o transformación inicial hipotético", caracterizada por plantear un estado o transformación inicial y aplicarle la transformación para así encontrar el estado final o transformación compuesta, corrigiendo la cantidad inicial hipotética de ser necesario (Vergnaud, 1991).

Cuando resolvieron el problema de *Bernardo*, todos los pequeños recurrieron al razonamiento x=7+3. Al pedirles que aclararan cómo llegaron a esta conclusión, explicaron -con excepción de la niña de primero que se mostró incapaz de dar a conocer su razonamiento-: "Por ejemplo, si tiene siete canicas y tres canicas (indica la operación) sumo siete, sumo siete más tres y me dan diez… Porque dice, cuántas canicas tenía, antes (al decir antes hace seña con la mano de izquierda a derecha y en subida como indicando algo que pasó)", (Karime, 3, P3, TD) "Porque el niño perdió siete y al final se quedó con tres", (Gerardo, 3, P3, TD).

Todos ellos al ser cuestionados por la entrevistadora explican que esas diez canicas las tenía *Bernardo* al inicio, es decir, reconocen la incógnita en "a".

Aunque emiten una respuesta correcta y comprenden que la incógnita se ubica en "a", sólo uno de ellos, Aarón de tercer grado que hace uso de tabla de datos, recupera en su argumentación no sólo el valor de la incógnita sino también su posición en la transformación, él explica: "Al principio perdió siete canicas, al final tenía tres, entonces al principio tenía diez". Cuando la entrevistadora le cuestiona cómo supo que al principio tenía diez, argumenta: "Le sumas siete más tres son diez y como perdió siete le quedaron tres". Así, un doble razonamiento se conjuga, b+c=a, porque a-b=c.

Varios de los niños que resolvieron el problema de *Bruno* reconocieron que para encontrar la respuesta tuvieron que sumar siete más tres (b+c=a): "En la primera ronda pudo tener diez. Y en la segunda ronda perdió siete y al final se quedó con tres, y sumé siete mas tres" (Gerardo, 3, P6, TD). Sin embargo, al preguntarles cómo sabían que eran diez y no otra cantidad, el razonamiento expresado fue del tipo, a-b=c (10-7=3): "Si tiene diez y pierde siete, le quedarían tres", (Guillermo, 3, P6, HB); por su parte Janay explicó: "tengo que anotar un número que dé mayor cantidad que siete", (Janay, 3, P6, TD). Aarón dijo: "Las tres que ganó son las que sobraron de las diez", (Aarón, 3, P6, TD). Son interesantes estas respuestas pues permiten ver cómo los niños recuperan las cantidades explícitas identificando el momento del problema en el que se dieron, lo que los ayuda a ubicar correctamente la incógnita. Fue en este problema donde la estrategia del estado hipotético se hizo presente.

Janay expresó oralmente algo que al parecer muchos niños pensaron, aunque no todos expresaron –incluyendo, como se verá más tarde, a otros pequeños cuyas respuestas fueron categorizadas en otro apartado-, si *Bruno* perdió canicas y aun así al final del juego ganó algunas, las que ganó en la primera ronda deben ser más que las que perdió. Como lo explica Paco de primer grado “si pierde siete tendría que tener once o nueve o diez” pero “son diez, porque si tiene diez le quedarían tres”.

Un dato resulta revelador, al igual que en el problema de *Cristian*, las transformaciones no fueron retomadas por los pequeños al momento de argumentar su respuesta; aunque aritméticamente el problema de *Bruno* se expresa como +10-7=+3, los siete niños en sus argumentos expresaron 10-7=3, como si se tratara de un problema de categoría II. Sólo dos de ellos manifestaron en algún momento de su entrevista una transformación positiva en la incógnita “ganó diez canicas”; los cinco restantes únicamente expresaron “tenía diez”, sin sentir la necesidad de dar cuenta de si se trató de una transformación positiva o negativa.

Al analizar las entrevistas se encontró que en algún momento de éstas, todos los niños habían expresado oralmente y/o por notación las dos transformaciones explícitas, únicamente Janay (2, P6, TD) externó las transformaciones tanto en forma oral como escrita. Lo anterior nos permite afirmar que a pesar de que los niños no expresen la transformación compuesta en su argumento final, se percatan perfectamente de la diferencia entre el problema de *Bernardo* y *Bruno* sin importar que la incógnita se ubique en la misma posición y los numerales empleados sean los mismos en ambos problemas.

Aunque todos reconocieron que las diez canicas las tenía *Bruno* en la primera ronda, para cinco de ellos no fue necesario expresar si esas diez canicas fueron ganadas o perdidas, desde su punto de vista bastaba con que quedara claro que *Bruno* las tenía en la primera ronda. Esto puede deberse a que es difícil para ellos –igual que para los otros niños entrevistados- dar cuenta de las transformaciones y los momentos, en parte por la complejidad del problema y en parte por que para ellos no parece ser muy relevante hacer la acotación acerca de la transformación. Ejemplo (Juan Carlos, 1, P6, TD)

…
E: ¿En la segunda ronda qué nos dice que pasó?

JC: Que perdió siete.
E: ¿Y al final cuando dejó de jugar cuántas tenía?
JC: Tres.
E: ¿Tres, y entonces en com… que crees que
E: haya pasado en la primera ronda? (interrumpida por Juan Carlos)
JC: ¡Ganó diez! (Exclama entusiasmado) le quitaron siete y se dio cuenta de que al final cuando terminó de jugar todavía tenía tres.
E: Anótale, pon lo que tú creas y ahorita me vas a explicar cómo te diste cuenta.
JC: (Borra lo que tenía en las tres primeras casillas) [10] (escribe diez en el recuadro de la primera ronda) [-7] (escribe -7 en la segunda ronda, deja vacío el recuadro de inicio)
E: A ver, explícame cómo sabes que en la primera ronda tuvo diez?
JC: Porque si le quedaron siete (se termina el cassette) se dio cuenta que tenía tres, siete más tres, ocho, nueve y diez. En la primera ronda no sabía que *tenía* diez, le ganaron siete y se salió de jugar y resulta que todavía le quedaron tres (tomado de las anotaciones de la entrevistadora)
…

Juan Carlos nos ayuda no sólo a ver cómo se percató que Bruno ganó diez, sino que en su posterior argumentación muestra con toda claridad cómo para los niños entrevistados lo más importante es dar una cantidad a la incógnita, siendo de menor trascendencia dar cuenta de la transformación que la acompaña. Juan Carlos explica "Ganó diez, le quitaron siete y se dio cuenta que al final cuando terminó de jugar todavía tenía tres", no obstante, en su argumentación final deja de lado la transformación positiva "gana" e igual que el resto de sus compañeros explica "tenía diez". Así, se evidencia cómo la palabra "tenía" la llegan a emplear indistintamente como indicadora de un estado o una transformación.[52]

Es importante mencionar que en sólo uno de los cuarenta y tres casos no se llegó a una respuesta convencional[53].

5.7.2 Resoluciones en las que recuperan la posición de la incógnita, los momentos de la transformación y los valores explícitos. Compensación de uno de los términos

Tabla 7

Recuperación de la posición de la incógnita, momentos de la transformación, y valores explícitos cuando hay compensación de uno de los términos

Problema	Tabla de datos			Hoja en blanco			Total
	1ro	2do	3ro	1ro	2do	3ro	

3 Bernardo	3**	1	1*	2	1	1	9
6 Bruno	1*	3	0	0	1	1	6
Total	4	4	1	2	2	2	15

Esta situación sólo se presentó en los problemas que tienen incógnita en "a" (x-b=c). Nueve niños recurrieron a la estrategia de compensación al resolver el problema de *Bernardo* y seis más al resolver el de *Bruno*[54]. Es importante resaltar que se decidió agrupar estas quince soluciones debido a que según las explicaciones que los niños daban de sus respuestas, mostraban una estructura semejante. Hay cosas en común y diferencias entre los quince eventos, en todos ellos los niños identificaron que la incógnita tenía posición en "a", y buscaron la compensación de "b"; sin embargo, cuatro niños no lograron recuperar los momentos y/o las transformaciones que planteaba el problema, no obstante, se incluyeron en este grupo debido a la semejanza de su razonamiento con los otros pequeños –compensación del primer término-.

En primer lugar, veremos las soluciones más completas, es decir, aquellas en las que el niño identificó la posición de la incógnita, los momentos y las transformaciones o estados explícitos; posteriormente se analizarán aquellas soluciones que perdieron de vista los momentos y/o valores manifiestos.

Los niños que identificaron los momentos y transformaciones se acercaron mucho a la estructura aditiva de los problemas (10-7=3 para el de *Bernardo* y +10-7=+3, para el de *Bruno*), pues sólo la parte referente a la incógnita fue diferente (7-7=3 y +7-7=+3) A pesar de recuperar la información necesaria, no lograron coordinarla, por lo que sólo se remitieron a un manejo parcial de la información contenida, dejando de lado aquella que no pudieron integrar, resultando así una compensación parcial; es decir, sólo retomaron el primer valor explícito y lo compensaron, olvidando compensar el valor que apareció en último término.

Sus explicaciones fueron guiadas por el siguiente razonamiento: “Ganó las siete y en la segunda perdió las siete canicas que ganó… Porque jugó la primera y luego jugó la tercer, la segunda, que en la segunda fue donde perdió las siete canicas y al final ganó tres canicas”, (Rebeca, 3, P6, HB). “Porque, porque aquí dice Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas y aquí, antes tenía siete pero las perdió, nada más deben quedarle tres”, (José, 3, P3, TD).

Varias son las diferencias entre las soluciones de estos pequeños y las de los que se describieron en el apartado “5.7.1”. Aunque los niños de ambos grupos recuperan los valores explícitos, los momentos y la posición de la incógnita, sólo los descritos en el apartado 5.7.1 logran encontrar el valor de la última, los que aquí se mencionan no lograron coordinar los estados y/o transformaciones explícitos por lo que sólo trabajaron con uno de ellos.

De igual manera, cuando los niños descritos en el apartado “5.7.1” dieron su argumento sobre cómo encontraron el valor de la incógnita en el problema de *Bruno*, manifestaron correctamente el valor de ésta, pero en su explicación no rescataron las transformaciones; por el contrario, todos los niños que en este apartado se describen expresaron las transformaciones explícitas, y dos de ellos además rescataron la transformación en la incógnita (+7-7=+3), aunque sin que esta última fuera la convencional.

Estos grupos de pequeños (5.7.1 y 5.7.2) nos permiten ver lo difícil que es para los niños coordinar por completo la información provista en el problema: un grupo logró obtener el valor convencional de la incógnita pero tuvo dificultades para expresar los estados y transformaciones en su argumento final; el otro no logró coordinar los dos datos explícitos lo que lo llevó a equivocar el valor de la incógnita y sin embargo, en su explicación manifestó correctamente las transformaciones y estados.

En cuatro de los quince eventos los niños tuvieron dificultades para dar cuenta de los estados, transformaciones y/o momentos. Aunque ellos también identificaron la posición de la incógnita y recurrieron a la compensación, al explicar cómo llegaron a una respuesta, se puso de manifiesto que no habían recuperado del todo la información proporcionada en el problema. Por ejemplo, para Brandon y Jennifer las tres canicas ganadas por *Bruno* no son el producto de las dos transformaciones elementales, sino que son percibidas como una transformación elemental más. Ejemplo (Brandon, 1, P3, TD)

…

E: Ah, bueno, si tú quieres, tú puedes ir haciendo anotaciones en tu hoja, ahí va de nuevo. Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?

B: Siete (contesta inmediatamente)

E: ¿Cómo supiste que tenía siete canicas?

B: ¿Por qué perdió siete?

E: Mff (expresión afirmativa) ¿y cómo supiste que perdió siete?

B: Y al último na'más tenía tres canicas.

…

E: (Anota) A ver, fíjate bien, entonces, ¿al inicio Bernardo cuántas canicas tenía?

B: Siete.

E: ¿Y cómo llegaste a saber que tenía siete?

B: Porque perdió siete y na'más le quedaban tres y al inicio decía que perdió siete, entonces tenía siete.

E: A ver, explícame un poquito más porque no entendí.

…

B: Porque Bernardo tenía siete y ganó tres y luego le ganaron siete y pus al último tenía siete.

E: A ver, ¿aquí dice que ganó tres o qué dice que pasó?

B: Perdió siete y luego ganó tres.

E: ¿Y luego ganó tres o le quedaron tres?

B: Le quedaron tres.

E: Ajá ¿y entonces al inicio cuántas tenía que haber tenido?

B: Siete.

E: ¿Y tú cómo sabes que son siete?

B: Porque él (palabras ininteligibles), tienes que sumar.

E: Ah, sumar, ¿y qué sumaste o qué le hiciste? A ver, ayúdame a entender qué hiciste.

B: Si tenía siete y usted dijo que tenía, que perdió siete y luego ganó tres entonces sí son siete.

…

Brandon recurre a la compensación igual que otros de sus compañeros, en un primer momento se percata que "al último na'mas tenía tres", pero conforme avanza la entrevista pierde de vista el estado final convirtiéndolo en una transformación, aunque la entrevistadora pide que aclare si tenía o ganó tres, al final el niño vuelve a su idea de que *Bernardo* había ganado tres. Con sus argumentos “Si tenía siete y usted dijo que tenía, que perdió siete y luego ganó tres entonces sí son siete” muestra cómo para él las tres canicas fueron ganadas –probablemente en otra ronda- y no como resultado del juego (7-7+3. Dificultad para ubicar los momentos y el estado final).

Érika, por su parte, al igual que Brandon entendió una ganancia de tres canicas, pero a diferencia de él ella plantea esa ganancia como producto de los estados y transformaciones anteriores (7-7=+3. Dificultad para recuperar el estado final).

Jennifer de primer grado al resolver el tercer problema incluyó un dato extra, al igual que otros niños tuvo que lidiar con dos hipótesis; una en la que hacía una compensación de uno de los términos (7-7=3) y otra –usada por otros niños como se verá más adelante- en la que operaba con las cantidades mencionadas en el problema olvidando la posición de la incógnita, los momentos, las transformaciones y los estados explícitos (7-3=4). Aunque uno de sus dos supuestos logró imponerse, rastros del otro permanecieron al explicar cómo supo que tenía *Bernardo* siete al inicio del juego: “Que al principio tenía siete canicas, luego per, perdió y luego tenía tres, y jugó otra ronda y ganó cuatro” (Jennifer, 1, P3, TD)[55] (7-__=3+4. Dificultad con los momentos, incluye uno adicional)

Por otro lado, cuando Jennifer resolvió el sexto problema de *Bruno* planteó una compensación diferente a la de sus compañeros, con ella pretendió abarcar no sólo uno de los valores conocidos sino dar cuenta de ambos, mas al no recuperar los momentos apropiadamente la compensación no fue la convencional. Desde la perspectiva de Jenny, las tres canicas no fueron ganadas al final del juego, sino como parte de otra ronda, ella en su entrevista expresa que debió tener una canica adicional para con ella ganar las tres: “Que Bruno no tenía nada y le prestaron uno, luego no, que tenía siete canicas y perdió las siete canicas, luego le prestaron una y ganó tres” (Jennifer, 1, P6, TD).

Posteriormente cambia de parecer y explica que el niño con el que está jugando no le querría prestar una canica, entonces la tuvo que ganar y es lo que la guía en su respuesta final “Ocho canicas y luego perdió siete canicas y después ganó tres canicas” (Jennifer, 1, P6, TD). Así, al ganar ocho canicas *Bruno* puede perder las siete que dice en el problema y aún tener una para ganar las tres; cabe pensar que si Jenny hubiera comprendido que al hablar de “ganó tres canicas” no se hacía referencia a la ganancia lograda en otra ronda sino a la ganancia total del juego, habría podido encontrar el valor convencional de la incógnita puesto que para encontrar el valor de la incógnita ya había intentado coordinar las transformaciones ocurridas en el problema.

5.7.3 Resoluciones en las que recuperan los momentos de la transformación, los valores explícitos y la posición de la incógnita negándole valor a ésta

Tabla 8

Resoluciones donde recuperan los momentos de la transformación, los valores explícitos y la posición de la incógnita, negándole valor a esta

Problema	Tabla de datos			Hoja en blanco			Total
	1ro	2do	3ro	1ro	2do	3ro	
5 Cristian	0	1	1	0	0	0	2
6 Bruno	0	0	1	1	0	1*	3
Total	0	1	2	1	0	1	5

Este tipo de respuesta se encontró en cinco ocasiones exclusivamente en los problemas de categoría IV[56]. Estas soluciones son realmente peculiares pues se evidencia cómo los pequeños recuperan perfectamente los momentos, transformaciones y estados explícitos, así como la posición de la incógnita; no obstante, al no lograr coordinar toda la información contenida prefieren negar valor a la incógnita. Ejemplo (Andrea R., 2, P5, TD)

…

E: Vamos a ver qué pasó cuando juega Cristian (retira la hoja y entrega una nueva) está otra tabla, igual que en las otras viene inicio, para que puedas tú anotar aquí qué habrá pasado en el inicio, en primera ronda, en la segunda ronda y al final qué fue lo que sucedió, ¿sí?, para que eso te ayude a resolver tu problema. Ahora el niño que juega se llama Cristian. Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana cinco canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado nueve canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?

A: Se ganó nueve canicas.

E: (Anota) A ver, te lo voy a ir leyendo despacito y tú me dices qué cosas las vas a anotar y dónde las vas a anotar Cristian juega dos rondas de canicas ¿Hay algo que quieras anotar ahí?

A: [Cristian juega] (Anota en el recuadro de inicio, debajo de la etiqueta)

E: En la primera ronda gana cinco canicas.

A: En la primera ronda [en la primera ronda gana 5 canicas]

E: Luego sigue, luego juega una segunda ronda ¿hay algo ahí que quieras anotar?

A: ¿Lo anoto aquí?

E: Fíjate, donde tú creas que es mejor que lo anotes, fíjate en tu tabla y ve dónde será mejor que lo anotes.

A: ¿Aquí?

E: A ver anótale ahí.

A: A ver.

E: Dice luego juega una segunda ronda.

A: [luego juega una segunda rondao] (Anota en el recuadro de segunda ronda, debajo de la etiqueta)

E: Sigue, al final del juego ha ganado nueve canicas, ¿eso dónde lo anotarías?

A: Aquí.

E: A ver, anótalo y ahorita vemos.

A: [al final del jego] (Anota en el recuadro de final, debajo de la etiqueta) ¿gana nueve canicas?

E: Mff.

A: [gana 9 canicas]

E: Y luego te preguntan ¿Qué pasó durante la segunda ronda?

A: *

E: ¿Mande?

A: ¿qué *

E: Ajá hasta ahí es la pregunta, ¿qué pasó durante la segunda ronda? Con eso que tú escribiste, ¿cómo te? Fíjate ¿cómo te puede ayudar a ti para que sepas qué pasó en la segunda ronda cuando jugó Cristian?

A: En la segunda… en la primera y en la segunda tenía cinco canicas y este, y, y en la segunda ronda, este…

E: ¿En la segunda qué es lo que habrá pasado?

A: En la segunda…

E: ¿En la primera te acuerdas qué pasó tú?

A: Que jugó una vez Cristian y tenía cinco canicas.

E: Ajá ¿y luego?

A: En la segunda ronda, este, estaba con sus cinco canicas.

E: ¿Y luego al final qué pasó, cómo quedó su juego?

A: Se ganó sus nueve canicas

E: Entonces la pregunta es ¿qué habrá pasado en la segunda ronda?

A: Este, se quedó con las cinco canicas que tenía en la primera ronda

E: (Anota) A ver, ¿cómo le hiciste tú para saber que se había quedado con cinco canicas? Las cinco canicas de la primera ronda

A: Porque este, no ganó ninguna ni perdió ninguna.

E: (Anota) ¿Tú cómo supiste que no ganó ni perdió ninguna?

A: Porque en la segunda ronda se quedó con cinco canicas

…

Aunque Andrea es capaz de reconocer las transformaciones y los momentos en los que ocurren éstas e identifica que en la segunda ronda se ubica la incógnita, no logra coordinar la información proporcionada en el problema para así encontrar el valor ausente. Andrea usa tablas con etiquetas como mediador para registrar sus notaciones, el problema cinco es el primero en el que se guía exhaustivamente por las etiquetas. Cuando la entrevistadora le pregunta sobre lo que pasó en la segunda ronda, Andrea inmediatamente se dirige a la tabla, se muestra perturbada al darse cuenta que no hay ningún valor escrito. Ella al igual que otros niños, se desconcierta al encontrar la incógnita en una posición inusual (a+x=c), una posición en la que siempre había encontrado manifiesto el valor, por lo que esta ausencia la hace negar que haya habido alguna ganancia o pérdida.

Una situación semejante pasa con Monse y José. La niña explica “Que no ganó nada ni perdió… Porque me lo quisiste decir, ahí no me dijiste nada” (1, P6, HB). Para ella igual que Andrea, si el problema no le dice el dato que hasta ahora siempre había encontrado, es porque no pasó nada.

Por su parte, José asigna a los problemas 5 y 6 un valor nulo; no obstante, no queda conforme con sus respuestas, se da cuenta que algo sucedió, pero se muestra incapaz de organizar la información que posee y operar con ella para conocer el valor de la incógnita. Intenta buscar una respuesta más plausible, tarda varios minutos pensando e intentando explicar, pero al ver lo que ha escrito en su tabla se da cuenta que sus explicaciones no resultan coherentes, manifiesta su escepticismo explicando “Porque dice juega la primera ronda, y luego, las siete no las perdió aquí, nadie ganó, luego juega la segunda, luego jugó la segunda y le ganaron siete canicas, no, no, no, le ganaron cuatro canicas, no, no”, (3, P6, TD). Así continúa intentando encontrar una respuesta que se soporte mejor, los registros que ha hecho en su tabla para el problema de *Bruno* le evidencian que algo pasó; sin embargo, al final José prefiere cesar en sus intentos por conocer el valor de la incógnita pues su frustración y angustia le impiden reestructurar la información para encontrar el verdadero valor de la incógnita.

El caso de Claudia es distinto, fue englobado en esta variante pues niega valor a la incógnita, sin embargo no identifica ni la posición de la incógnita, ni los momentos del problema, aunque sí los valores explícitos de las transformaciones elementales.

5.7.4 Resoluciones en las que identifican los momentos de la transformación y la posición de la incógnita pero no recuperan los valores explícitos

Esta situación se dio cuando Karime resolvió el problema de Claudio, ella identificó que se trataba de tres momentos y que en "b" se encontraba la incógnita; sin embargo, la forma algorítmica a la que recurrió para encontrar la respuesta (9-5=4) la llevó a confundir los estados y transformaciones explícitos equivocando así la respuesta. Ejemplo (Karime, 3, P4, TD)

…

K: Si… solamente que nueve le quite cinco (señala la suma de nueve más cinco)

E: A ver, fíjate, ¿te parece bien si te la leo? Tú piensas bien en qué tienes qué hacer, si hace nueve más cinco o nueve menos cinco o si haces otra cosa, tú puedes hacer, anotar ahí en tu tabla lo que te sirva para resolver el problema. Claudio tiene cinco canicas. Juega una ronda y al terminar de jugar tiene nueve canicas. ¿Qué pasó durante el juego?

K: (Borra todo lo del recuadro al lado de inicio) [9+5=14] [9-5=4] (lo anota en forma vertical en el recuadro correspondiente a inicio, usa los dedos para resolver el segundo algoritmo)

E: A ver, ahí qué anotaste

K: Si yo hago una suma le van a quedar catorce canicas, si yo hago una resta me van a quedar cuatro

E: A ver, ¿cuál de esas dos crees que te sirva?

K: La resta (la señala)

E: ¿Por qué la resta es la que te sirve para saber qué pasó en el juego de Claudio? Explícame eso

K: Porqueee en el juego de canicas se gana y como ya dije, se pierde, entonces vamos a decir que, este, Claudio perdió cuatro, como perdió cinco canicas, porque eso también puede pasar, pueden perder mucho más que cinco, entonces yo a nueve le quité cinco y me quedaron cuatro

E: ¿tú me dices que perdió cinco? Y que supiste porque a nueve le quitaste cinco y te quedan cuatro, entonces, la pregunta dice ¿qué pasó durante el juego? ¿qué pasó durante el juego de Claudio?

K: Perdió canicas

E: ¿Cuántas perdió?

K: cuatro

E: (Anota) ¿Me vuelves a explicar cómo supiste que perdió cuatro?

K: Este, que como Claudio puede perder mucho más canicas que cuatro, que cinco, porque, si él tiene diez canicas y se le pierden tres, les quedarían siete y aquí en vez, como en vez de recibir más perdió, este juego es de ganar o perder, los que tengan más canicas ganan y los que tengan más pierden; Claudio en el juego perdió cuatro canicas porque es nueve menos cinco, me dieron cuatro canicas.

…

Por los algoritmos que Karime plantea podemos darnos cuenta que se debate entre dos posibilidades; no obstante, ella termina guiándose por la resta, 9-5=4. Es aquí cuando surge la mayor confusión: para ella, Claudio ya no tiene cinco canicas sino que ha perdido cinco y el producto de la resta es visto también como una transformación negativa pues desde su punto de vista, si se hizo una resta "de perder", como muchos niños la llaman, el producto también debe ser una pérdida.

5.7.5 Resoluciones en las que se recupera la posición de la incógnita pero no los momentos de la transformación ni los valores explícitos.

Esta situación sólo se presentó cuando Cecy de primer grado resolvió el problema de *Bruno* apoyándose por la tabla de datos. Ella mezcló dos razonamientos observados en otros pequeños: 10-7=3 y 7-3=4, sólo en el primero la incógnita, momentos y valores explícitos se mantenían, en el segundo ninguno de ellos lo hacía. Ambos razonamientos fueron expresados por separado durante la entrevista, no obstante, ninguno de los dos la convencía por lo que los cambiaba conforme se le cuestionaba o se le pedía que explicara su respuesta. Al no poder optar por uno de ellos, prefirió hacer una mezcla que conjuntara ambos; la estructura que planteó fue 10-7-3=4.

En su respuesta final ella mantiene la incógnita en "a". Igual que otros niños, expresó que "tenía diez" sin hacer especificación alguna sobre la transformación. Aunque Cecy dio una respuesta apropiada, sus constantes cambios de estrategia, argumentos endebles y la gran dificultad que mostró para dar cuenta de su respuesta, evidencian cómo no quedó del todo claro para ella qué fue lo que sucedió en el juego de *Bruno*, a pesar de haber dado una respuesta aceptable. Sus supuestos iniciales la llevaron a un razonamiento, pero la información del problema le indicaba otro camino, y aunque al final tuvo mayor peso la estrategia que era coherente con los momentos, transformaciones y posición de la incógnita, su otro supuesto tuvo la suficiente fuerza como para no ser desterrado por completo logrando incluirse en la respuesta final.

Cecy nos muestra cómo las respuestas de los niños pueden estar guiadas por más de un razonamiento, que la costumbre de encontrar la incógnita siempre en “c” puede ser tan fuerte que haga que los niños se vean incapaces de renunciar a este hecho a pesar de que la información explicitada en el problema indique algo diferente y no sea coherente con la estrategia empleada, y que un pequeño puede emitir una respuesta correcta sin que para él quede claro cómo se relacionaron los datos del problema.

5.7.6 Resoluciones en las que recuperan los valores explícitos, pero no los momentos de la transformación ni la posición de la incógnita trasladando ésta última a “c”. Movimiento de cantidades

Tabla 9

Recuperación de valores explícitos pero no de los momentos de la transformación ni la posición de la incógnita

Problema	Tabla de datos			Hoja en blanco			Total
	1ro	2do	3ro	1ro	2do	3ro	
3 Bernardo	0	0	0	1	0	1	2
4 Claudio	1	0	1	1	0	2	5
5 Cristian	2	1	0	2	0	3	8
Total	3	1	1	4	0	6	15

En este tipo de soluciones los pequeños recuperan los valores explícitos –estados y transformaciones- pero pierden de vista los momentos del problema; además, los niños mueven los valores conocidos cubriendo con ellos la posición de la incógnita trasladándola de esta forma a “c”. Esta situación se presentó en quince ocasiones en los problemas de *Bernardo, Claudio y Cristian*. A pesar de que las quince respuestas tienen en común los rasgos anteriormente descritos, poseen ciertas variaciones que las separan entre sí, por lo cual se optó por realizar una subdivisión que permita clarificar de mejor manera cómo se dieron cada una de las resoluciones y las motivaciones detrás de ellas.

Expresan su respuesta de acuerdo con la posición original de la incógnita

Doce de los quince pequeños al momento de resolver problemas con incógnita en "b" (a+x=c), pasaron el valor de "c" hacia "b" para de esta forma cubrir el espacio generado por la incógnita, creando una nueva en "c" (a+b=x). Nueve de ellos operaron con los dos primeros términos a través de una suma para obtener "c" (5+9=14), dos más sólo enunciaron los valores en su nueva posición sin llegar a operar con ellos (+5+9=x) y sólo una pequeña de primer grado expresó su respuesta de una manera diferente. Ella explicó que en la primera ronda, *Cristian* había ganado cinco canicas, en la segunda había ganado nueve y, al último, tenía nueve (+5+9=+9)[57]. Ella, al igual que los otros niños, expresa que en la segunda ronda, *Cristian* ganó nueve; sin embargo, a diferencia de sus compañeros, termina por darse cuenta que las nueve que ganó fueron al final del juego –sin que esto la lleve a cambiar su respuesta-, por lo que no opera haciendo una suma, sino que se abstiene de operar con las cantidades que ha identificado expresando simplemente "esto viene siendo como una explicación" (Monserrat, 1, P5, HB).

A pesar de que la mayoría operó con las cantidades que aparecían en el problema obteniendo el valor de la nueva incógnita, al cuestionarles por lo que había pasado en la segunda ronda daban su respuesta tomando en cuenta el segundo valor y no la incógnita generada. Por ejemplo, Rafael (3, P5, HB) suma cinco más nueve y expresa que *Cristian* ganó catorce, de esta forma nos muestra cómo su primera acción es mover las cantidades hasta recorrer la incógnita a "c"; además, su respuesta inicial es dar el valor de "c" en vez del de "b" por el que le preguntó la entrevistadora.

Al cuestionarle cómo supo que debía sumar, su argumento es contundente, "Porque ganó, no perdió", así, Rafa evidencia cómo al momento de resolver problemas las relaciones matemáticas no son las únicas presentes, sino que también factores lingüísticos están involucrados, pues la semántica de algunas palabras incluidas en los problemas pueden ser un factor decisivo que guíe la estrategia del niño –en la primera ronda *gana* cinco canicas-. La palabra ganó le indicó que debía sumar y aunque a través de una suma podría haber llegado a un resultado convencional (5+4=9), al no recuperar los momentos no pudo operar correctamente con los datos.

La transformación positiva "ganó nueve" es vista por muchos de los niños entrevistados como una transformación elemental y no como una compuesta, "ganó nueve" lo entienden como producto de una ronda y no como resultado final del juego. Basta ver cómo Rafa no titubea al expresar que *Cristian* ganó nueve canicas en la segunda ronda y sin embargo, al momento de preguntarle qué pasó al final del juego, se hace evidente que no se percata que se le haya dado esa información en el problema.

A continuación se presentan tres ejemplos más que respaldan cómo los niños conciben que se ganaron nueve canicas en una ronda y no como resultado final del juego. En los dos primeros ejemplos las nueve se ganaron en una ronda adicional, el último ejemplo muestra cómo se interpreta que las cinco y las nueve son ganadas en una misma ronda, sólo que en distintos momentos de ésta "Claudio tiene cinco canicas y en una ronda ganó nueve canicas", (Claudia, 3, P4, HB). "Porque él al principio tenía unas cinco, y después sus amigos le quitaron las cin, las cuatro y le sobra una para el último juego y después ya tenía las nueve", (Karina, 1, P4, HB). "Porque el problema dice que tenía al principio cinco canicas y al final nueve, entonces pues le sumé y ya", (Érika, 3, P4, TD).

Otra información importante nos aportó Rafael. Su respuesta última se determinó finalmente por “lo que oyó”, él explica que supo que ganó nueve porque “estaba oyendo la pregunta”, es decir, como la entrevistadora le preguntó por lo que sucedió en la segunda ronda, la respuesta la encontró al oír el segundo valor que aparecía en el problema, dejando de lado el valor final de la nueva incógnita. Él no fue el único que siguió este camino: “Me fuiste diciendo como me vas leyendo”, (Monserrat, 1, P5, HB). “Porque ahí decía el problema”, (Érika, 3, P4, TD).

Expresan su respuesta buscando la incógnita en “c”

Hay una respuesta que se ubica en este subapartado. Cecy igual que los niños del apartado anterior suma cinco más nueve y obtiene catorce al considerar que ambas cantidades fueron ganadas por *Cristian* durante las rondas del juego. La diferencia entre esta resolución y la pasada, es que aunque varios de los niños en un primer momento dieron como respuesta catorce, al pedirles que justificaran su razonamiento o cuestionarlos se daban cuenta que la entrevistadora no estaba preguntando por el último término -lo que pasó al final del juego-, sino por lo que había pasado durante el juego o la segunda ronda -en el problema de *Claudio* y *Cristian* respectivamente-, cambiando así su respuesta y dando como contestación el segundo dato que era mencionado en el problema. Por su parte Cecy dio su respuesta con base en la nueva incógnita, sin tomar en cuenta que se le estaba cuestionando por otro momento del problema.

Expresan su respuesta buscando la incógnita en “c”. Respuestas correctas que no lo son.

Dos resoluciones muy interesantes se presentan en este apartado, ¿Puede una respuesta y procedimiento ser correctos sin serlo verdaderamente? Sí, por supuesto, esta situación se presentó con dos pequeños, José Luis de primero y Claudia de tercer grado, al momento de resolver el problema 3, ambos usando hoja en blanco.[58]

En la primer categoría del análisis de datos se examinó la respuesta a la incógnita donde la tercera variante, cantidad y operación correcta, fue la más avanzada, la respuesta de Claudia se incluyó dentro de esta variante por cumplir –aparentemente- con las características de ésta; sin embargo, el análisis cualitativo nos permite percatarnos que a pesar de que al momento de resolver un problema se dé un valor correcto a la incógnita y el procedimiento para llegar a ella haya sido pertinente, el razonamiento aritmético que guió esta resolución puede estar equivocado. Claudia explica que *Bernardo* tenía diez canicas, al cuestionarle cómo supo que eran diez y no otra cantidad, no da argumentos claros "lo supe por el problema", y a pesar de nuevos cuestionamientos no explica nada más.

Hasta aquí el valor de la incógnita es correcto y el procedimiento para llegar a éste también, al igual que algunos de los niños mencionados anteriormente, ella opta por operar con 7+3=10, pero una gran diferencia separa a Claudia de los otros pequeños, ella no busca la incógnita en "a" sino en "c", su razonamiento aritmético no es b+c=a, sino a+b=c. Para niños como Claudia, la incógnita *siempre* está ubicada en "c", por lo que le basta con mover las cantidades –perdiendo por completo los momentos del problema- para de esta forma llevar la incógnita al final, donde siempre la ha encontrado.

¿Bajo qué argumentos se sostiene que Claudia no buscaba "a" sino "c"? Este supuesto se hace evidente al analizar la totalidad de su entrevista. A diferencia de los otros niños que dejan en claro que Bernardo tenía diez al inicio, Claudia no da explicaciones que permitan constatar que efectivamente identificó la incógnita en "a", esto no parece suficiente -Cecy de primero tampoco fue capaz de explicar cómo llegó a esta conclusión-, no obstante, la principal fuente que permite afirmar que Claudia buscaba la incógnita en "c" y no en "a", son sus posteriores resoluciones. En cada una de ellas Claudia mueve los valores explícitos trasladando la incógnita a "c", por ejemplo, en el problema de Claudio suma 5+9 aseverando que ganó 14 canicas. Situaciones semejantes de movimiento de la incógnita a “c” se dan en el resto de los problemas resueltos por la niña.

5.7.7 Resoluciones en las que recuperan los valores explícitos, pero no identifican los momentos de la transformación ni la posición de la incógnita. No operan, mueven las cantidades y rescatan sólo una de ellas

Tabla 10

Recuperación de los valores explícitos sin identificar los momentos de la transformación ni la posición de la incógnita

Problema	Tabla de datos			Hoja en blanco			Total
	1ro	2do	3ro	1ro	2do	3ro	
3 Bernardo	0	1	0	0	0	1	2
4 Claudio	0	2	0	1	2	1	6
5 Cristian	1	0	0	1	0	1	3
6 Bruno	1	1	0	1	3	2	8
Total	1	4	0	3	5	5	19

Esta estrategia se caracteriza por la imposibilidad para recuperar la posición de la incógnita y los momentos en los que ocurren las transformaciones o estados, el rescate sin problemas de los datos explícitos y el posterior movimiento de cantidades. Guarda gran parecido con la estrategia descrita en 5.7.6; sin embargo, la principal diferencia estriba en que aquí los chicos no operan en manera alguna con los valores proporcionados a pesar de haberlos identificado. Diecinueve eventos de este tipo se presentaron. Ejemplo (César, 2, P6, HB)

…

E: Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?

C: Estaba él, ¿cómo se dice?, perdiendo, y luego, ya en la segunda ganó tres.

E: (Anota) Entonces fíjate, dice ¿en la primera ronda del juego qué pasó?

C: Mmm, iba perdiendo.

E: Iba perdiendo, ¿cuántas habrá perdido?

C: Siete.

E: ¿Tú cómo le hiciste para saber que iba perdiendo siete?

C: Fue fácil, pues el problema dijo que perdió siete y luego pues ahí ya puse mi inteligencia.

E: A ver, fíjate, ¿esas siete que perdió las perdió en la primera ronda o en la segunda?

C: En la primera.

E: A ver, te leo el problema y tú me dices si fue en la primera o en la segunda, Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?

C: Iba perdiendo y perdió siete.

E: (Anota) ¿Y cómo me dices que lo supiste?

C: Por el problema.

…

César muestra cómo estos niños mueven las cantidades cubriendo de esta forma “a” y “b”. Para ellos no es necesario operar con los valores que proveyó el problema, no sienten la necesidad de buscar el valor de “c” ya que la entrevistadora está preguntando por un dato que desde su perspectiva aparece explícitamente en la información que da el problema, por lo que sólo hay que rescatarlo. Si se pregunta por lo que pasó al inicio del juego o en la primera ronda, sólo basta con poner atención al problema y el primer dato numérico que aparezca será la respuesta; lo mismo ocurre cuando se pregunta por lo que pasó en la segunda ronda o durante el juego, ellos sólo deben oír bien y lo que aparezca en el problema como segundo dato será el valor buscado. Estos niños, al igual que Cesar, respaldaban sus respuestas argumentando “Porque primero dijo ese número y después dijo el tres”, (Andrea, F., 3, P3, HB). “Porque ahí dice el problema”, (Claudia, 3, P5, HB). “Oyendo la pregunta”, (Rafael, 3, P6, HB)

De los diecinueve pequeños que esbozan esta respuesta, diecisiete dieron el valor que se les pedía acorde con la aparición de los estados y transformaciones en el problema, César explica que *Bruno* perdió siete canicas durante la primera ronda, debido a que fue el primer dato en aparecer. Los dos niños restantes, aunque también emitieron sus respuesta según la posición del valor que se les pedía, no coincidieron con sus compañeros debido a que en un caso el niño escribe las cantidades en su tabla de forma poco sistemática y sin guiarse por las etiquetas, pero al momento de dar una respuesta sí las retoma; en el otro debido a que la niña invierte el orden de los valores manifiestos y aunque se le lee varias veces el problema, no se percata de este hecho “primero tenía nueve y luego ganó cinco”, (Paz, 2, P4, HB)

5.7.8 Resoluciones en las que recuperan los valores explícitos, pero no identifican los momentos de la transformación ni la posición de la incógnita. Adición de una información inexistente

Esta variante alude a la solución efectuada por Paz, en la que únicamente recupera las transformaciones explícitas involucradas. En un primer momento parece percatarse de la posición de la incógnita y los momentos del problema; si se revisa atentamente su entrevista, podemos darnos cuenta que su razonamiento era pertinente, debía restar al nueve que tenía al final, la cantidad que tenía al principio, para así encontrar la cantidad intermedia y de esta forma dar respuesta a la incógnita. Sin embargo, Paz incluye un estado inexistente debido a la confusión que tiene con las rondas -ella interpreta “dos rondas de canicas” como “dos canicas”-, esta información adicional la lleva a realizar su primer algoritmo que, aunque para su razonamiento se muestra apropiado, desde el punto de vista de las relaciones implicadas en el problema no es pertinente. Ejemplo (Paz, 2, P5, HB)

…

E: (Anota) Muy bien (retira la hoja) aquí está otra hojita Mary Paz, ahora vamos a resolver el juego de Cristian, en tu hoja tú puedes irle anotando lo que necesites para resolver el problema, ¿sí? Cristian juega dos rondas de canicas. En la primera ronda gana cinco canicas. Luego juega una segunda ronda. Al final del juego ha ganado nueve canicas. ¿Qué pasó durante la segunda ronda?

P: [2+5=7] [9-7=2] En la segunda ronda le sobraron dos

E: ¿Cómo le hiciste para saber eso?

P: Haciendo una suma y haciendo una resta

E: Explícame, este cinco aquí qué significa, ¿Por qué lo pusiste ahí?

P: Lo que se ganó primero

E: ¿Y este dos?

P: Lo que ya tenía

E: ¿Cómo supiste que ya tenía dos?

P: Lo había leído

E: ¿Y entonces este qué te dio?

P: 7

E: ¿Y entonces esto, cómo supiste que tenías que hacer una resta?

P: Porque he, al final tenía nueve y en la suma salió siete, y al nueve le quité siete y me sobraron dos

E: Muy bien, nada más lo que no entendí muy bien, es en qué parte tú escuchaste que yo te decía de esto (señala el dos) que esas las ganó

…

E: A ver, te la voy a leer y tú me levantas tu manita cuando escuches eso de que ganó dos ¿sí? Para yo saber en qué parte lo entendiste tú: Cristian juega dos rondas de canicas

P: (Levanta la mano)

E: A ver, ahí cuándo… (hablan al mismo tiempo)

P: Porque

P: Cristian tenía dos canicas, primero tenía, él avienta dos canicas y se las, él se las sacó, luego ganó cinco, hice la suma y me salió el número siete

E: Oye, ¿y esa era que tenía dos canicas o que había jugado dos rondas de canicas?

P: Que había tenido dos canicas y que había jugado dos, una ronda

…

E: Luego dice: Al final del juego ha ganado nueve canicas ¿esas nueve canicas cuándo las ganó?

P: De al principio

E: Y la pregunta dice: ¿Qué pasó durante la segunda ronda?, ¿Entonces qué fue lo que pasó Mary Paz?

P: Que le había ganado las nueve

E: (Anota) A ver, explícame cómo supiste eso, ya no le entendí muy bien,

P: Porque me leyó, me le, me leyó el problema y yo empecé a pensar qué había pasado

E: ¿Esas nueve cuándo me dices que las ganó?

P: Al principio

E: (Anota) Oye, y aquí lo que nos pregunta es qué pasó durante la segunda ronda, ¿qué habrá pasado la segunda vez que jugó?

P: Que había perdido dos canicas

E: (Anota) ¿Cómo me dices que supiste eso?

P: Viendo la resta

…

Si analizamos su razonamiento, podemos percatarnos que el problema en la resolución propuesta por Paz se debió a que entendió que cuando se hablaba de dos rondas se trataba de la ganancia de dos canicas, lo cual la llevó a sumar esas dos con las otras cinco ganadas. Si en vez de haber restado a las nueve canicas finales las siete canicas hipotéticas, hubiera restado sólo las cinco canicas que efectivamente fueron ganadas, hubiera realizado un procedimiento acertado. No obstante, aún hubiera persistido la dificultad para comprender si el producto obtenido hacía referencia a una transformación positiva o negativa, pues como se evidencia en la parte final de la transcripción, Paz atribuye un valor negativo al dos que obtuvo como producto de la resta, tal vez por la misma razón que Karime –variante 5.7.4- donde un producto por el hecho de provenir de una resta se percibe como una pérdida.

5.7.9 Resoluciones en las que no recuperan los momentos de la transformación, los valores explícitos, ni la posición de la incógnita, trasladando ésta última

Tabla 11

Resoluciones donde no recuperan los momentos de la transformación, los valores explícitos ni la posición de la incógnita, trasladando ésta última

Problema	Tabla de datos			Hoja en blanco			Total
	1ro	2do	3ro	1ro	2do	3ro	
3 Bernardo	1	2	0	1	3	1	8
6 Bruno	0	0	1	0	0	0	1
Total	1	1	1	1	3	1	9

Este tipo de respuesta se dio exclusivamente en los problemas con incógnita en “a” en nueve ocasiones; los niños no lograron recuperar los momentos marcados en el problema, los estados y transformaciones explícitos ni la posición de la incógnita. La estructura aritmética del problema plantea la incógnita en “a” (x-b=c); no obstante, los pequeños no se percataron de esta ubicación, todos movieron las cantidades provistas en el problema perdiendo de vista los momentos y las transformaciones, ocho llevaron la incógnita a “c” (a-b=x) y uno a “b” (a-x=c), cambiando de esta forma la estructura del problema

Estos pequeños rescatan sólo los números mencionados en el problema, sin tomar en cuenta si se trata de números naturales (3) o relativos (-7); sin embargo, recuerdan que se aludió en algún momento a una pérdida (transformación negativa), por lo que intentan trabajar con ella pero descontextualizando a ésta por completo. Cinco de los ocho pequeños operan hasta encontrar “c” (7-3=4), dos más explican que *Bernardo* tenía siete y perdió tres (7-3) sin llegar a expresar el valor de “c” y sólo uno mueve el primer valor pero deja el último, buscando así la incógnita en “b” (7-4=3). Desde la perspectiva de estos niños, si es siete el primer término que aparece, será éste el que esté relacionado con la parte inicial del problema. Este supuesto los lleva a explicar que *Bernardo* tenía siete canicas al inicio del juego. Ejemplo (César, 2, P3, HB)

…

E: (Anota) A ver, te la voy a volver a leer y tú puedes irle anotando ahí lo que necesites para asegurarte si ese es el resultado y luego me lo explicas, Bernardo juega a las canicas. Durante el juego pierde siete canicas. Al finalizar el juego tiene tres canicas ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?

C: Siete, y necesito hacer una resta, para saber.

E: A ver, tú haz lo que creas conveniente y ahorita me vas a explicar.

C: Mff [7-3=4] Ya.

E: A ver, cuéntame qué fue lo que hiciste, ¿por qué hiciste esto?

C: Como, bueno, hay dos formas de hacerlo: con los dedos y escribiendo; como en el problema decía que tenía siete canicas y perdió tres, tuve que restarle siete a… sería tres… y en total me dio cuatro.

E: ¿Y esos cuatro cuándo fue que pasó?

C: Fue cuando perdió.

E: A ver, entonces la pregunta dice, ¿Cuántas canicas tenía al inicio del juego?

C: Siete.

…

Sólo la niña que resolvió el problema de *Bruno* recurriendo a la estrategia de 7-3=4 expresa su respuesta en función de la posición de la incógnita que ha creado “¿Cómo supe que perdió cuatro? Porque le resté 7 menos 3”, (Érika, 3, P6, TD).

5.7.10 Resoluciones en las que no recuperan la posición de la incógnita, los momentos de la transformación ni los valores explícitos. Rescatan una cantidad cualquiera

Tabla 12

Resoluciones donde no recuperan la posición de la incógnita, los momentos de la transformación ni los valores explícitos rescatando una cantidad cualquiera

Problema	Tabla de datos			Hoja en blanco			Total
	1ro	2do	3ro	1ro	2do	3ro	
3 Bernardo	0	2	0	2	0	0	4
4 Claudio	0	0	0	2	0	0	2
5 Cristian	0	1	0	2	0	0	4
6 Bruno	0	0	0	3	0	0	3
Total	0	3	0	9	1	0	13

De todas las resoluciones emitidas por los pequeños entrevistados, la menos avanzada se caracteriza por ser una solución en la que no se recupera la posición de la incógnita, los momentos en los que ocurren las transformaciones y/o estados ni los valores explícitos; en la mayoría de los casos no se trabaja de ninguna forma con la información proporcionada y, además, la respuesta emitida resulta bastante azarosa al no haber un trasfondo claro que ampare la razón por la que se dio ésta, e incluso, en ocasiones sea evidente que la contestación del pequeño no tiene relación alguna con lo involucrado en el problema.

Aún en estas contestaciones, hay algunas que evidencian un mayor entendimiento del problema y otras que, francamente, denotan que el niño no comprendió en absoluto lo que esbozaba el enunciado matemático. Por ejemplo, José Luis (1, P6, HB) rescata algunos de los datos que el problema le proporcionó e intenta operar con ellos; sin embargo, al no rescatar en su totalidad los momentos, transformaciones y posición de la incógnita se ve incapacitado para coordinar toda la información quedando tan confuso que finalmente renuncia a sus tentativas de operar aritméticamente y termina dando una respuesta con escaso fundamento en el problema.

El caso de Janay es interesante, pues aunque logra identificar que se jugaron dos rondas, al momento de comenzar a operar con la información eleva el número a tres, su comentario: “bueno, si juega nada más dos rondas, no tiene que jugar nada más dos” nos lleva a comprender cómo algunos niños se percatan perfectamente que se jugaron dos rondas en el problema 5 y, sin embargo, no tienen reparo en agregar una más o cuantas sean necesarias con el fin de facilitarse a sí mismos la comprensión de la situación planteada. Ellos no limitan el juego del niño a dos rondas, dándose la libertad de quitar o poner información con la finalidad de hacer más fácil y entendible aquello que los adultos plantean tan engorroso e incomprensible. Ejemplo (Janay, 2, P5, TD)

…

J: (Dura más de veinte segundos pensando y releyendo) ah, ya le entendí, es casi como la otra. Por ejemplo, Cristian juega, jugó primero dos rondas de canicas. Entonces se ganó en la primera, ronda, cinco canicas. Luego juegó una ronda más. Que se ganó seis canicas, en la tercera ronda, ganó, nueve canicas y eso pasó; aquí le puedo aumentar (escribe en el recuadro de primera ronda) [en la 2 6] Listo, ya le aumenté algo.

E: Muy bien Janay, explícame, dice ¿qué pasó durante la segunda ronda?

J: Durante la segunda ronda yo le aumenté, bueno, si juega dos rondas, no tiene qué jugar nada más dos rondas y dejar la otra al final, así que le aumenté en la segunda ronda seis canicas [segunda] (especifica que el 2 que escribió es de segunda)

E: ¿Cómo supiste que tenías qué aumentarle seis canicas Janay?

J: Porque me lo tuve qué inventar

…

Janay recupera que en la primera ronda *Cristian* ganó cinco canicas, arregla una tercera ronda donde ganó nueve canicas y en la segunda ronda no le resta más que “inventar” lo que sucedió, pues una vez que ha arreglado que las nueve canicas fueran ganadas en una tercer ronda, ya no queda ninguna información por coordinar que la obligue a pensar qué pasó en la segunda ronda, quedando así en completa libertad de introducir un suceso cualquiera.

Hasta aquí, los niños arriba mencionados en algún momento de la entrevista manifiestan cierta comprensión sobre lo que se les leyó recuperando parte de la información incluida en el problema, aunque al final no sean capaces de utilizarla para dar una solución más completa. Otras respuestas revelaron una casi nula comprensión del enunciado, se trata de aquellas que sólo rescatan una cantidad sin operar con ella, son incapaces de fundamentar su respuesta y/o no muestran el más mínimo reparo en cambiar su contestación cada vez que se les cuestiona, emitiendo cantidades al azar.

Por último, se muestra un fragmento de entrevista que ilustra las resoluciones menos elaboradas dentro de este apartado, que son aquellas en las que el niño se queda fijado en la información de otro problema. (Ximena, 1, P6, HB)

…

E: Entonces vamos a pasar a otro, este es un juego que lo jugó Bruno, tú pon mucha atención para que después me digas qué pasó cuando jugó Bruno ¿sí?, en tu hoja puedes anotarle todo lo que necesites para saber tú el resultado. Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?

X: Ganó cinco canicas y perdió tres canicas

E: (Anota) ¿En qué parte tú escuchaste eso o cómo lo supiste?

X: Pensé en mi mente, sabía y es todo

E: A ver Ximena, te la voy a leer y tú aquí vele anotando las cosas que te sirvieron para pensar en tu mente para que después me lo expliques. Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego? ¿De eso qué le puedes anotar para que te ayude a pensar el problema?

X: Mmm, de que le quitaron cuatro canicas

E: A ver, anótalo ahí, ahorita me vas a explicar cómo supiste

X: [canicas 4]

E: Explícame como sabes tú que ganó cuatro canicas

X: Pensé en mi mente, sabía y es todo

E: (Anota) ¿Tú te acuerdas en la segunda ronda qué fue lo que pasó?

X: No

E: ¿Y al final te acuerdas qué fue lo que pasó?

X: Tampoco

E: A ver, te lo leo, Bruno juega dos rondas de canicas. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. ¿Entonces, en la segunda te cuerdas qué pasó?

X: En la segunda… ganó cuatro canicas

E: ¿Aquí dice que ganó cuatro?

X: (Asiente)

E: Fíjate, te la vuelvo a leer. Juega la primera ronda, luego la segunda ronda donde pierde siete canicas. Después de las dos rondas, ha ganado tres canicas en total. Y nos preguntan ¿qué pasó durante la primera ronda del juego?, ¿tú qué me dices que pasó Ximena?

X: Que perdió tres canicas y le quedaron cinco canicas.

E: (Anota) ¿En tu mente qué pensaste para saber eso?

X: ¿En mi mente?

E: Mff

X: Sabía que tenía… le quitaron tres canicas y quedaron cinco, yo sabía
E: ¿Y eso cómo lo supiste?
X: Porqueeee, porque sí y es todo
E: ¿Hay algo que tú quieras anotarle ahí?
X: No.
…

Se encontraron cuatro casos en los que el niño vuelve a la información que se manejó en otro problema, tres de ellos fueron efectuados por Ximena. Ella, más que una respuesta, se limita a repetir datos que han aparecido en los problemas; del de *Pedro* retoma “pierde cuatro” y de *Pablo* “gana cinco y pierde tres”, este mismo tipo de comportamiento también se da cuando resuelve los problemas 3 y 5. No puede dar argumentos convincentes sobre cómo llegó a su respuesta por lo que zanja el asunto expresando que lo pensó en su mente –sin explicar qué fue lo que pensó- o simplemente recurriendo a un “porque sí”.

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El interés principal de este trabajo fue conocer cómo dos distintos medios notacionales influían en las soluciones que dan los niños a los problemas aditivos de categoría II y IV. A continuación se esbozan los principales hallazgos encontrados, ordenados de forma que respondan a las preguntas y objetivos planteados en esta investigación; sin embargo, varios de los resultados obtenidos responden a más de una de las preguntas u objetivos de investigación, si se ordenaron de este modo fue para hacer más comprensible los resultados.

La primera viñeta pretende dar respuesta al primer objetivo de investigación, la segunda viñeta al segundo problema de investigación y segundo objetivo, la tercera viñeta al tercer problema de investigación y tercer objetivo, y así sucesivamente. En confluencia, las distintas viñetas responden a la primera pregunta de investigación.[59]

• *Problemas aditivos con características similares a los de Pedro, Pablo, Claudio, Cristian y Bernardo son resueltos a edades semejantes tanto en investigaciones que permiten usar notaciones, como en las que no lo permiten. Sin embargo, en aquellas que motivan al niño a usar notaciones los problemas aditivos complejos como el de Bruno son resueltos a edades menores que las encontradas cuando no se hace uso de notación alguna.*

Vergnaud y Durand (1976) encontraron que aproximadamente la mitad de los niños que se encontraban en el primer año del curso elemental del nivel primario[60] eran capaces de resolver los problemas de *Pedro, Pablo, Claudio, Cristian* y *Bernardo*, mientras que el problema de *Bruno* era resuelto hasta los 11 ó 12 años por casi la mitad de los niños entrevistados -siendo este el más complejo por ubicar la incógnita en “a” y componerse por tres transformaciones-.

Desde los resultados de nuestra investigación, se encontró que la mayoría de los niños de segundo grado de primaria (con edades entre 7 y 8 años) son capaces de resolver con apoyo de notaciones los problemas de *Pedro, Pablo, Claudio* y *Cristian*, mientras que los de *Bernardo* y *Bruno* escapan de sus posibilidades. Por otro lado, al menos la mitad de los niños de nuestra muestra que cursan tercer grado de primaria (con edades de 8 años) logran resolver los cinco problemas menos complejos.[61]

En la investigación realizada por Vergnaud y Durand (1976) los niños del segundo año del curso medio –equivalente en nivel escolar a quinto grado en México y por edad a sexto grado- son aquellos que logran la mayor cantidad de resoluciones correctas en el problema de *Bruno* mientras que en la aquí presentada los niños de tercero tienen un desempeño semejante al de los pequeños del curso medio. Esto evidencia que cuando no se usan notaciones se accede al problema de *Bruno* aproximadamente hasta los 11 o 12 años, mientras que usando notaciones es factible aproximadamente a los 8 años de edad. Las RE resultan de gran utilidad al enfrentarse a una tarea compleja pues las notaciones no sólo ayudan a mantener dentro de la percepción visual información relevante para resolver un problema, multiplican las operaciones cognitivas que podemos poner en práctica logrando una mayor flexibilidad cognitiva (Tolchinsky, 2003)

• *Para el grupo de niños entrevistados en esta investigación el uso de tabla de registro se mostró más favorecedor que el de la hoja en blanco, principalmente al momento de enfrentarse a problemas de mayor complejidad como el de Bruno. Además, el soporte cognitivo que proveen las tablas de registro resultó más efectivo durante el primer grado de escolaridad y al momento de resolver problemas de categoría IV.*

Al analizar las respuestas de los niños, se encontró que aquellos que usaron tablas de registro mostraron una mayor comprensión de las relaciones aritméticas inmiscuidas en los problemas aditivos que aquellos que usaron hoja en blanco, logrando los primeros un mayor número de respuestas correctas. Pero no sólo eso, aún sin haber llegado a una respuesta convencional, se evidenció que las explicaciones y procedimientos empleados por los pequeños que usaron tabla de datos fueron, la mayor parte del tiempo, más complejas que aquellas dadas por niños a los que se les solicitaron notaciones libres. Diversos autores (Alvarado & Brizuela, 2010; Eskritt & Lee, 2007; Nunes & Bryant, 1997; Zhang, 1997) enfatizan que dependiendo de la representación que se use, se puede favorecer o restringir el desempeño cognitivo al momento de enfrentarse a determinada tarea, debido a que cada tipo de representación hace más obvia cierta información.

El que las tablas sean un medio de representación más eficaz puede deberse a que a través de su organización gráfica se hacen más evidentes los momentos del problema, por medio de las etiquetas se dirige la atención del niño para que ubique de acuerdo con los momentos, información que se le proporcionó en el mismo. Verschaffel y De Corte (1997) expresan que para lograr una resolución plausible de un problema es necesario construir una red representacional de sus relaciones semánticas básicas, estas representaciones internas son las que guiarán y organizarán el conocimiento de la persona. Existen representaciones externas que favorecen en gran medida la reorganización de las RI, por lo que se muestran más eficaces al momento de ser empleadas como mediadores externos para resolver problemas matemáticos.

De acuerdo con estos autores, el medio representacional ideal será aquel que a través de su organización permita identificar más claramente la información necesaria y relevante dentro del problema así como las relaciones semánticas inmiscuidas. No obstante, advierten que una organización que permita un mayor soporte cognitivo no siempre logrará la eficiencia esperada puesto que cuestiones como el rol dado a la resolución de problemas desde el contexto escolar, el grado de experiencia que el niño tenga al resolver cierto tipo de problemas, la estructura típica de los problemas escolares, entre otros, pueden llegar a obstaculizar el desenvolvimiento de un sujeto al momento de resolver problemas aditivos.

Si bien de forma general se encontró una diferencia significativa entre la cantidad de respuestas correctas emitidas por los niños que usaron tablas y aquellos que emplearon hojas en blanco, se analizó si esta diferencia se mantenía dentro de las dos categorías de problemas aditivos analizadas, o si una herramienta notacional era especialmente más útil dentro de una categoría que en otra. El análisis efectuado mostró que tanto al resolver problemas de categoría II como de categoría IV se tenía un mejor desempeño cuando se hacía uso de tablas de datos, no obstante, la diferencia resultó significativa únicamente dentro de la última.

Es decir, la tabla resulta especialmente útil al resolver problemas de categoría IV, que son de mayor complejidad, mientras que al resolver problemas de categoría II no se puede decir que la tabla sea el único o más completo medio de representación. Cabe mencionar que, al igual que en este trabajo, Alvarado y Brizuela (2010) encontraron que el uso de notaciones es más efectivo al resolver problemas de categoría IV.

Como ya se mencionó, la mediación cognitiva que la tabla provee es mayor que la que la hoja en blanco brinda. Esto es debido a la organización gráfica de la tabla de datos que vuelve perceptible información que de otra forma podría pasar desapercibida posibilitando así una reorganización cognitiva que lleva al niño a construcciones más ricas y amplias, sobre todo cuando se enfrenta con situaciones complejas que parecen escapar de su dominio.

Al observar que la tabla de datos fue un medio más idóneo para apoyar la resolución de los problemas de categoría IV, surgió la inquietud por analizar si dentro de un problema en específico una modalidad de representación se mostraba más útil que otra; por esta razón, aunque inicialmente no se había planteado, se analizó si existía un problema donde un tipo de representación tuviera mayor impacto.

Aunque en todos los problemas hubo un mayor número de respuestas correctas cuando se emplearon tablas, únicamente en el problema de *Bruno* se observó una diferencia significativa entre las respuestas de los niños que usaron tabla y aquellos que usaron hoja en blanco; lo que señala que si bien la tabla de registro parece posibilitar una mejor comprensión acerca de las relaciones aritméticas inmiscuidas en los problemas, no se puede señalar que sea rotundamente superior en utilidad sobre la hoja en blanco, salvo al momento de enfrentarse a problemas como el de *Bruno*, donde se manifiesta claramente que las tablas de datos prestan un mayor beneficio representacional posibilitando una toma de conciencia de las relaciones implicadas más basta que cuando se hacen notaciones espontáneas.

Cuando se usó hoja en blanco hubo un mayor número de resoluciones correctas en el problema más sencillo –de *Claudio*- decreciendo éstas conforme se avanzaba en complejidad. Algo semejante ocurrió al usar la tabla de datos, la frecuencia de respuestas admisibles fue decreciendo conforme aumentaban los problemas de complejidad; no obstante, en el problema de *Bruno* hubo un incremento en la frecuencia de respuestas correctas. Esto nos muestra que ambos medios representacionales son útiles al momento de resolver problemas de menor complejidad, no obstante, la tabla con etiquetas, debido a su disposición gráfica y la marcación que hace a través de las etiquetas y recuadros de los momentos del problema, posibilita una reorganización cognitiva que facilita la toma de conciencia de las relaciones aritméticas inmiscuidas en problemas más complejos.

A diferencia de los hallazgos aquí encontrados donde la tabla de datos con etiquetas prestó mayor soporte cognitivo al momento de resolver problemas aditivos, el trabajo que reportan Alvarado y Brizuela (2010) apunta a que las RE más útiles para los niños de su muestra fueron la tabla de datos sin etiquetas y la hoja en blanco, explican que el menor impacto de la tabla con etiquetas pudo deberse a que los niños entrevistados aún no consolidaban el principio alfabético.

Al analizar el impacto de los dos medios de representación a partir del grado escolar cursado por los chicos, se encontró que aunque en los tres grados el grupo que usó tabla emitió un número mayor de respuestas convencionales que aquellos que usaron hoja en blanco, la diferencia resulta significativa únicamente en primer grado, donde es notorio que las tablas de datos mejoran el desempeño de los pequeños al momento de enfrentarse a problemas aditivos. Esto es acorde con lo que ya se ha mencionado, donde SRE como la tabla de datos son más eficaces cuando una tarea es muy compleja para el sujeto abriéndole nuevas alternativas de acción.

Zhang (1997) explica que al momento de enfrentarse a una tarea, la información percibida a través de las RE, así como los conocimientos internos con los que un individuo cuenta, inclinan al resolutor a tomar determinados caminos para resolver la tarea. Si el sujeto se enfrenta a una tarea en varias ocasiones se pueden producir aprendizajes, siendo así que estos nuevos aprendizajes pueden incidir en la ejecución de la tarea. Esto parece suceder en algunas de las entrevistas, donde conforme se avanza en la resolución de los problemas, los niños hacen un uso más complejo de los medios proporcionados para registro, logrando muchos de ellos respuestas más complejas que aquellas dadas para problemas más sencillos que fueron presentados al inicio de la entrevista.

• *Se identificaron diversos tipos de representaciones para dar cuenta de los estados y transformaciones e incógnita, el más utilizado es aquel donde se empleó lenguaje escrito y numerales. No se identificó una relación entre el tipo de representación hecha y la respuesta dada a la incógnita, por lo que se puede decir que no hubo una forma de representación de los estados, transformaciones e incógnita más útil que otra.*

Al momento de registrar los estados y transformaciones explícitos se encontraron diferentes tipos de representaciones. A continuación se mencionan según la frecuencia de aparición dentro de las notaciones de los niños: la combinación de numerales y lenguaje escrito fue la más recurrida, seguida de las representaciones con numerales, de numerales y signos y, finalmente, aquella representación menos empleada fue en la que se utilizaba exclusivamente el lenguaje escrito. Además, hubo situaciones en las que el niño prefirió no hacer representaciones gráficas de los estados o transformaciones.

Cuando se trató de representar la incógnita se manifestaron diversos recursos. Al momento de enfrentarse inicialmente al problema las marcaciones de la incógnita fueron pocas, al analizar la representación de la incógnita una vez resuelto el problema se observó que la cantidad de notaciones se había incrementado. Las diferentes formas de representar la incógnita fueron: espacio en blanco para marcar su posición, para mostrar el valor de la incógnita: uso de numerales, manifestación a través de numerales y signos, representación a partir de lenguaje escrito y numerales y, usó exclusivo del lenguaje escrito. La mayor parte de los pequeños no sintió la necesidad de explicitar mediante algún registro notacional la posición o valor de la incógnita.

Aquellos niños que recuperaron los estados y transformaciones explícitos, la posición de la incógnita y los momentos del problema, son aquellos que tuvieron mayor éxito al momento de resolver los problemas, empleando en su mayoría estrategias más efectivas que los llevaron a una respuesta convencional o a un proceso más complejo, en comparación con aquellos que no identificaron esta información.

En un total de sesenta y tres ocasiones, los niños identificaron de forma oral, escrita, o ambas, el valor de los estados o transformaciones, la posición de la incógnita y los momentos del problema, de ellos, dos terceras partes lograron dar una respuesta correcta mediante el uso de distintas estrategias aritméticas. La parte restante, aunque no logró llegar a un valor convencional, dio generalmente respuestas más complejas que la mayor parte de los niños que no recuperaron completamente la información suministrada en el problema.

El que los niños que recuperan los momentos del problema, los estados y transformaciones explícitos, así como la posición de la incógnita hayan tenido un mejor desempeño que aquellos que no recuperan es comprensible, pues el proceso de recuperación de la información así como su externalización cambia los supuestos que en un primer momento el niño había elaborado. El rescate de la información es difícil, sin embargo, una vez explicitada, ya sea de forma oral o escrita favorece la objetivación del conocimiento, abriendo de esta manera una nueva forma de percibir el problema y hacerle frente (Vergnaud, 1997)

Los niños que mantienen diversos modelos mentales (Olson & Campbell, 1993; Pertner, 1991) parecen tener más éxito al momento de resolver los problemas, pues pueden conjugar los diferentes momentos del problema y coordinarlos logrando una respuesta más cercana a lo convencional, tómese como ejemplo al niño que sabe que Bruno al final del juego tenía 3 canicas y es capaz de ir hacia el pasado, reconocer la pérdida de canicas en la segunda ronda, e ir aún más atrás, conjugando los dos momentos más recientes para identificar lo que pasó en la primera ronda del juego, este pequeño coordina diversos modelos mentales acerca de lo que sucedió en el problema. Por otro lado, está el chico que fija su atención en sólo uno de los momentos, ya sea en la pérdida de las siete canicas o en las tres canicas que quedaron al final, sin lograr coordinar los distintos momentos involucrados en el problema.

Aunque la composición de los estados y transformaciones se representó exclusivamente a través de algoritmos, otras estrategias aritméticas que no incluían notaciones fueron llevadas a cabo con tanto o mayor acierto que la estrategia algorítmica.

La representación de la composición de los estados y transformaciones u operación aritmética efectuada para componer los datos explícitos se hizo a través de algoritmos pertinentes y no pertinentes, en el resto de los casos no se representó la composición. El cálculo aritmético a través de algoritmos fue escaso y, aún habiendo recurrido a este medio, varios niños descartaron sus operaciones y recurrieron a nuevas estrategias al cuestionarlos sobre el valor de la incógnita.

La representación algorítmica no fue la única estrategia empleada para dar cuenta de la composición de los estados y transformaciones, otros recursos aritméticos fueron utilizados por los niños aunque no fuesen plasmados en una hoja. Dentro de estos recursos se encontró el cálculo apoyado con dedos; al usar esta estrategia los pequeños utilizaron sus dedos como mediadores externos para representar los estados y transformaciones. Por ejemplo, levantaban los dedos de sus manos indicando el estado inicial, sobre esos dedos trabajaban aumentándolos o disminuyéndolos, según les indicaba la transformación, obteniendo el estado final o transformación compuesta.

El cálculo mental sin representación gráfica fue usado en más de la mitad de los casos, los niños operaban con la información del problema sin realizar notaciones o emplear algún otro mediador externo observable -como sus dedos-. Como ya se ha mencionado en otra parte de este trabajo, las RE pocas veces trabajan solas, gran parte del tiempo diferentes tipos de RE se conjugan, posibilitando nuevas y más variadas maneras para hacer frente a la tarea (Pérez & Scheuer, 2007).

En el cálculo mental sin representación gráfica se llegó a observar que aunque los niños no recurrían a marcas gráficas u objetos que mediaran sus operaciones mentales, algunos de ellos utilizaban el lenguaje para sí mismos (self-language) al momento de operar sobre el problema, se guiaban, regañaban, se hacían sugerencias, aceptaban o negaban los resultados a los que habían llegado, etc. La mayor parte del tiempo este lenguaje dirigido a sí mismos era inaudible para la entrevistadora, sólo algunas palabras llegaban a ella o eran entendidas por el movimiento de los labios o gesticulaciones de los pequeños, muy pocos registros se tuvieron de estas autoconversaciones tan fructíferas (Garton, 1993; Olson & Campbell, 1993; Reed, 2001)

El cálculo mental y la posterior representación mediante un algoritmo fue la forma menos empleada por los niños. Los datos mostraron cómo los pequeños prefieren usar el cálculo mental cuando se sienten cómodos, es decir, cuando se enfrentan a situaciones que les resultan de poca complejidad y con las que se sienten seguros para trabajar con los datos de manera interna.

Conforme se complejizan las situaciones optan por incorporar otros recursos que les proporcionen una ayuda cognitiva diferente, es así como se incrementa el uso de notaciones que guían sus respuestas, ya sea para dar una solución, o para comprobar si sus cálculos iniciales eran correctos. No obstante, entre más se complejiza la situación, estrategias como el cálculo mental disminuyen drásticamente y los niños no parecen muy seguros de utilizar notaciones.

En suma, cuando un problema se muestra muy complejo para un niño, éste opta por simplificarlo anulando cualquier tipo de cálculo mental. La ausencia de cálculo aritmético fue presentada en poco más de una tercera parte de los casos y se hizo patente principalmente en aquellos problemas más complejos. Consideramos que esto se debe a que la resolución de problemas es un proceso complejo que implica un gran esfuerzo cognitivo por parte del niño, en un primer momento éste recurre a estrategias que le son conocidas y con las que se siente confiado; sin embargo, cuando se enfrenta a situaciones desconocidas o que se van complejizando, es obligado a modificar o implementar nuevas estrategias. Si el pequeño se siente rebasado por la situación, tiende a volver a la estrategia o situación con la que se siente seguro y que le es familiar.

Para los niños resulta importante representar los estados y transformaciones –al menos cuando se les enfrenta a problemas del tipo y la forma en la que en esta investigación se presentaron-, pues en más del 60% de las ocasiones se plasmaron los estados, transformaciones o ambos. Por otro lado, no les parece relevante registrar las operaciones aritméticas que llevan a cabo o el valor de la incógnita -65% no hace registro del valor o posición de la incógnita-, optando por responder a ésta de forma oral.

Es importante prestar atención al proceso de resolución que sigue el niño para resolver problemas, no solo cuando llega al acierto sino también cuando no logra un resultado convencional, el dirigirnos hacia su procedimiento nos permite conocer qué parte comprendió, cuál malinterpretó, en dónde tiene dificultades, en suma, la resolución que el niño hace de un problema nos permite conocer cómo intervenir (Vergnaud, 1991; Vergnaud & Durand, 1976).

• *El uso de la tabla donde se registran correctamente los datos de manera acorde con las etiquetas posibilita una mejor comprensión de las relaciones matemáticas inmiscuidas y una toma de estrategias más eficientes; no obstante, esto no es suficiente para llegar a un resultado convencional salvo para el problema 5. Los pequeños que usaron hoja en blanco y no hicieron uso alguno del espacio gráfico o recurrieron a notaciones aisladas fueron aquellos que por lo general tuvieron un desempeño más pobre al momento de resolver problemas aditivos.*

La marcación que hacen los datos, acorde a las etiquetas, sobre los momentos del problema y los acontecimientos ocurridos, parece posibilitar una mejor comprensión sobre la forma en la que se relaciona matemáticamente la información del problema, por lo que las estrategias empleadas por los niños suelen ser más complejas que las de aquellos que sólo registran un dato o ninguno; sin embargo, la información recabada muestra que no por hacer un registro exhaustivo de los datos del problema se llega a un resultado convencional sobre el valor de la incógnita. Esto es así para los problemas 3, 4 y 6. Para el problema 5 existe una relación significativa entre el registro de los dos datos explícitos acorde a las etiquetas y la emisión de una respuesta convencional.

A algunos niños las tablas no parecen servirles de ayuda. Eskritt y Lee (2007) expresan que a pesar de que las RE son herramientas cognitivas, si se desconoce cómo usarlas de manera efectiva o no son apropiadas para resolver cierta tarea, la ayuda que presten será escasa. Por su parte Elia et al. (2007) explican que las RE no siempre proporcionan ayuda, pues si quien las usa no entiende cómo están organizadas es difícil que le encuentre relación con el problema que quiere solucionar y por lo tanto utilidad. Martí y Pozo (2000) explican que un SRE como lo es la tabla puede llegar a no ser del todo efectivo si quien lo usa como herramienta mediadora desconoce su uso, organización, características y el significado de sus elementos.

Martí (2007) expresa que el que una persona sea capaz de interpretar un tipo de notación como lo es la tabla de datos, no significa que sea capaz de construirla o usarla para resolver problemas, pues las habilidades que se ponen en práctica al momento de interpretar una tabla acabada no son las mismas que se usan para elaborarla. En su estudio encontró que aunque hay niños pequeños capaces de elaborar tablas que organizan una sola variable, es hasta edades más avanzadas cuando los niños comienzan organizar información en torno a dos variables, esto explica el por qué a varios niños les resultó tan complicado llenar la tabla de datos y aún una vez llena de forma exhaustiva no siempre lograban llegar a un resultado convencional.

Cuando se revisó el uso del espacio gráfico bajo la modalidad de hoja en blanco se encontró que en más de la mitad de las veces los niños realizaban algún tipo de notación. Las formas de representación más empleadas fueron los registros lineales, donde el niño escribía la información que rescataba del problema de manera continua; la segunda fue la algorítmica en la que se usaba la hoja en blanco para plantear un algoritmo que los niños consideraban pertinente para resolver el problema.

Otra forma de emplear el espacio gráfico fue por renglón, es decir, los niños registraban la información que les parecía trascendente separándola por un cambio de línea, marcando de esta manera los momentos del problema. Las notaciones mixtas, que conjugaban dos o más tipos de uso del espacio gráfico y aquellas donde se registraban elementos aislados –un único número o palabra- fueron las menos comunes.

Al analizar las respuestas dadas por los niños se observa cómo aquellos que no hacían tipo alguno de notaciones o sólo plasmaban un elemento aislado muestran generalmente las respuestas menos evolucionadas del total obtenido en esta investigación; mientras que el registro por renglones fue un medio de representación de gran ayuda para los niños, posibilitándoles una mejor comprensión sobre cómo se relacionaba la información y mejorando sus estrategias para enfrentarse a los problemas.

Zhang (1997) expresa que la percepción es fundamental cuando se trata de resolver problemas a través de RE, esta percepción de elementos importantes del problema, en conjunto con las RI de cada sujeto, son las que guían la resolución de un problema. La percepción a través de la RE no se da de la misma manera en todos pues cada sujeto posee un sistema perceptivo que analiza, procesa y transforma la información de diferente manera. A su vez, la percepción que provee una RE modifica las RI que el sujeto tenía en su primer acercamiento a la tarea.

Zhang (1997) nos da la clave fundamental para comprender por qué un tipo de notación puede ser útil a un niño, pero a otro le puede ser indiferente, aunque se trate de una misma RE, los caminos perceptuales que ésta abre no son los mismos para todos los sujetos, aún si se enfrentan al mismo problema, las estructuras mentales de cada uno serán diferentes debido a las experiencias brindadas por el entorno sociocultural en el que se desenvuelve y, por último, las percepción individual elicitada por la RE modificará las representaciones mentales del individuo, esto en conjunto nos ayuda a comprender el por qué aunque una RE parece ser efectiva, no siempre resulta útil para todos los que hacen uso de ella.

• *Los niños ponen en práctica distintas estrategias que los guían en la resolución de problemas, algunas de ellas son acertadas, otras no; sin embargo, salvo pocas excepciones, se empeñan en comprender los problemas que se les presentan, dando soluciones que son percibidas por ellos como pertinentes.*

Verschaffel y De Corte (1997) explican que las dificultades para comprender la relación parte-todo llevan a los niños a una respuesta incorrecta, es el caso de los pequeños que al resolver los problemas de *Claudio* y *Cristian* no comprenden que el estado final o transformación compuesta, según sea el caso, representan el todo, por lo que el razonamiento de que la parte faltante no puede ser mayor que el todo está ausente.

Es notorio cómo algunos niños deciden sus resoluciones con base en palabras como ganó, perdió, sin hacer un análisis detallado de cómo se relaciona la información. Además, en esta investigación se observó que palabras que representan situaciones poco familiares para los niños como la palabra rondas, pueden ser un factor que mine el desempeño del pequeño al resolver problemas. Diversos autores (Miura, 2001; Chamorro y Vecino, 2003; Verschaffel & De Corte, 1997) advierten sobre cómo cuestiones lingüísticas afectan la resolución de un problema, pues basta una sola palabra incomprendida o malinterpretada para que el resolutor equivoque la estrategia que debe seguir.

Al analizar las entrevistas se observó que varios niños se mostraban seguros cuando se les presentaban los dos primeros problemas con incógnita en “c”, pero al hacer frente al resto de ellos se les veía cohibidos y extrañados de que la incógnita estuviera en una posición diferente a la usual, muchos lograban sobreponerse y hacía frente al problema, otros preferían quedarse en terreno conocido y trasladaban la incógnita a “c”.

Aunque en muy pocas ocasiones sucedió, se encontraron pequeños que ensayaban procedimientos aleatorios, es decir, no se guiaban por la información del problema para determinar el procedimiento a seguir, sino que recurrían indistintamente a hacer sumas, restas o multiplicaciones, al cuestionarlos daban explicaciones del tipo “nos enseña la maestra”, “mi mamá me dice”, etc.

Verschaffel y De Corte (1997) señalan que las resoluciones estereotipadas muchas de las veces se deben a una enseñanza más o menos explícita. Un factor es el uso de libros de texto u hojas de ejercicio que dan pistas sobre el algoritmo idóneo o recurren a la copia de estrategias donde al inicio señalan un procedimiento y en los subsiguientes ejercicios el niño debe copiar la estrategia. Otro son las prácticas de los profesores, los cuales llegan a proponer ejercicios rutinarios, se centran en el resultado y no en el proceso y privilegian el uso de algoritmos rechazando cualquier otra estrategia.

Dentro de esta investigación se encontró niños que cuando rescataban los estados y transformaciones se remitían a recuperar información de alguno de los problemas pasados. A pesar de que se les leía nuevamente el enunciado problema o se les cuestionaba sobre sus afirmaciones para ver si se percataban que estaban retomando una información errónea se mostraban incapaces de recuperar la información actual. Además, se observó que las resoluciones menos desarrolladas eran aquellas efectuadas por pequeños que al dar un valor a la incógnita se remitían a rescatar un valor cualquiera de los que habían escuchado, sin operar de ninguna forma con la información suministrada.

Kammi et al. (2001) describen cómo niños pequeños dan contestaciones erróneas, sin embargo, al ahondar más sobre el porqué de su respuesta se percatan que han escuchado un cuestionamiento diferente al que se les había hecho debido a que su representación mental sobre cierta parte de la realidad es incompatible con lo que la entrevistadora pregunta, por lo tanto anulan por completo la información que no encaja con sus supuestos e integran la que es factible para ellos. Esto puede explicar en parte por qué algunos pequeños no logran trabajar con la información que se les presenta en los problemas, remitiéndose a información pasada. Otras cuestiones relacionadas con la memoria, la poca familiaridad con problemas aditivos con incógnita en “b” y “c”, con problemas en formato oral, etc. pueden ser factores que hayan generado la dificultad para rescatar la información del problema y trabajar con ésta.

En esta investigación se encontró que un mismo chico manifestaba distintas concepciones respecto a la resolución de un problema, en algunos de ellos una noción era más fuerte por lo que terminaban rechazando las otras, otros conjuntaban diversas posturas bajo un mismo procedimiento. Esto nos muestra que la cognición humana es compleja, que la comprensión de las relaciones aditivas no se da de forma todo-nada mediante un desarrollo lineal de las estructuras mentales, sino que es un proceso evolutivo donde diferentes concepciones están presentes y donde por medio de continuas reconstrucciones cognitivas el sujeto se va acercando cada vez más a una resolución convencional.

Al respecto Martí y Pozos (2000) dejan en claro que el paso de una representación no canónica a una convencional no se puede describir en términos de representaciones menos complejas que serán sustituidas por otras más complejas hasta de esta forma llegar a la convencionalidad, puesto que las representaciones no son rígidas ni se desarrollan de manera lineal, por lo que es posible que un niño manifieste a través de sus representaciones concepciones de distinta complejidad.

Los resultados de esta investigación nos hacen ver la importancia que tiene el trabajar dentro del aula con una amplia variedad de problemas, donde se aborden diferentes categorías y la incógnita no quede siempre en una misma posición.

No hay una RE ideal, la utilidad de la RE dependerá de la tarea que se va a enfrentar y de las características propias de cada individuo por lo que será recomendable permitir a los niños el uso de distintos mediadores externos al momento de resolver problemas aditivos; sin embargo, el simple acercamiento no es suficiente, será tarea del maestro proponer actividades que permitan al niño comprender la construcción de las distintas RE, su uso y funcionamiento, para que el pequeño decida qué mediador es más útil para él, según la tarea que está resolviendo.

Se hace indispensable el trabajo con tablas de datos dentro del aula desde que inicia la educación básica por ser una herramienta representacional de gran ayuda cuando los chicos se enfrentan a problemas complejos; no obstante, debido a que RE y RI están en continua interrelación en nuestras actividades diarias, será importante no restringir la resolución de problemas al uso exclusivo de un medio de representación, sino que será más enriquecedora la confluencia de múltiples medios de RE que favorezcan una resolución más integrada.

Por otro lado, es necesario reconocer que distintos sucesos pudieron incidir sobre las resoluciones de los niños. El hecho de llevar a los niños a un ambiente distinto del que suelen trabajar, con una persona poco conocida y bajo la presión de ser video grabados son situaciones que pudieron afectar el desenvolvimiento de los niños.

Como ya se mencionó en el capítulo de marco teórico, otro factor que incidió fue la forma en la que se estructuraron los problemas presentados a los niños, pues debido a la semántica de algunos de éstos (traducción de los presentados por Vergnaud y Durand, 1976) podían ser mal interpretados o de difícil comprensión para los chicos.

Aunque la entrevistadora procuró llevar a cabo las entrevistas con el mayor rigor posible, se debe reconocer que el sólo hecho de hacerse presente fue un factor que incidió en las respuestas de los pequeños (tan solo con el pedir que explicaran cómo habían llegado a determinada respuestas hacía que los niños se detuvieran a reflexionar y analizaran su procedimiento, lo que llevó a algunos a replantear su resolución)

Además, es necesario mencionar que las intervenciones de la entrevistadora fueron de acuerdo a como se iba desarrollando la entrevista, siendo que por lo general, con niños de tercero se llevó poco tiempo, mientras que con los de primero, a quienes se les dificultaba ampliamente hablar sobre su razonamiento, se tenían entrevistas más largas. Igualmente, la entrevistadora intervino en más ocasiones con aquellos niños que usaban tablas que con los que usaron hoja en blanco debido a que la totalidad de los primeros registró algún tipo de notación y a diferencia de los últimos que en varias ocasiones optaron por no realizar notaciones y cuando las hacían eran parcos en sus registros.

7. BIBLIOGRAFÍA

Alvarado, M. & Brizuela, B. (2010). First grader's work on additive problems with the use of different notational tools. Unpublished manuscript, Universidad Autónoma de Querétaro &Tufts University.

Andersen, C., Scheuer, N., Pérez Echeverría, M. P. & Teubal, E. (Eds.). (2007). *Representational systems and practices as learning tools.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Brizuela, B. & Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 309-319.

Cardona, G. (1994). El análisis de la escritura. De los orígenes a los sistemas históricos. Sociología de la escritura. Escritura y cultura. En: *Antropología de la escritura* (pp. 19-164, 185-194). España: Gedisa.

Carpenter, T., & Moser, J. (1983). The development of addition and subtraction problem solving skills. In T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. NY: Academic Press.

Carrillo J. y Contreras, L. (2001). El amplio campo de la resolución de problemas. En J. Carrillo y L. Contreras (Eds.), Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos (pp. 13-37). España: Hergue.

Chamorro, C. y Vecino, F. (2003). El tratamiento y la resolución de problemas. En C. Chamorro (Comp.) *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 273-300). Madrid: Pearson Educación.

Elia, I., Gagatsis, A. & Demetriou, A. (2007) The effects of different modes of representation on the solution of one-steps additive problems. *Learning and instruction, 17*, 658-672.

Eskritt, M., & Lee, K. (2007). The impact of notation on cognition & its development: Theoretical perspectives & empirical evidence. In E. Teubal, J. Dockrell, & L. Tolchinsky (Eds.), *Notational knowledge: Historical and developmental perspectives* (pp. 231-255). Rotterdam: Sense Publishers.

Ferreiro, E. (1997) La representación del lenguaje y el proceso de alfabetización. En *Alfabetización, teoría y práctica*. (Pp. 13-28) México: Siglo XXI.

Ferreiro, E. (2002) Escritura y oralidad: unidades, niveles de análisis y conciencia metalingüística. En *Relaciones de (in)dependencia entre oralidad y escritura*. (Pp. 151-171) Barcelona: Gedisa.

Garton, A. (1993) Representation in problem solving. En C. Pratt, & A. Garton (Eds.). *Systems of representation in children, development and use.* (pp.251-269) England: John Wiley and sons.

Harris, R. (1999). *Signos de escritura*. Barcelona: Gedisa.

Kamii, C., kirkland, L. & Lewis, B. (2001) Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. En A. Cuoco& R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics*. (pp. 24-34) Reston: NCTM.

Martí, E. (2007). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría, & E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools*. (133-148) Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishing.

Martí, E., y Pozo, J. I. (2000). Presentación. Más allá de las representaciones mentales: La adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y aprendizaje*, *90*, 7–30.

Miura, T. (2001). The influence of language on mathematical representations. En A. Cuoco & R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics*. (pp. 53-62) Reston: NCTM.

Morales, V. (2005). Producción y uso de notaciones y su relación con el conocimiento de los estados mentales en niños de 3 a 6 años. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, España.

Nunes, T & Bryant, P. (1996). Giving meaning to addition and subtraction. En *Children doing mathematics* (pp.114-141). UK: Blackwell Publishers.

Nunes, T & Bryant, P. (1997). Mathematics and intelligence. En T. Nunes, & P. Bryant (Eds.) *Learning and teaching mathematics an international perspective* (pp.1-4). UK: Psychology Press.

Olson, D. (1999). Desmitologización de la cultura escrita. Lo que la escritura representa: una historia revisionista de la escritura. Lo que la escritura no representa: cómo deben interpretarse los textos. En *El mundo sobre el papel* (pp. 21-31, 89-138). Barcelona: Gedisa.

Olson, D. & Campbell, R. (1993). Constructing representations. En C. Pratt, & A. Garton (Eds.). *Systems of representation in children, development and use* (pp.11-26). England: John Wiley and sons.

Pérez Echeverría, M. P. & Scheuer, N. (2007). External representations as learning tools. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría& E. Teubal. (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Perret-Clermont, A. y Carugaty, F. (2003) La perspectiva psicosocial: inter-subjetividad y contrato didáctico. En: C. Pontecorvo (Coord.) *Manual de Psicología de la Educación* (pp. 43-65) Madrid: Editorial Popular.

Pertner, J. (1991). Introducción: mente x representación. El concepto de representación. Hacia la mente representacional. La comprensión de las representaciones y las apariencias. En *Comprender la mente representacional* (pp.15-117). España: Paidós.

Reed, K. (2001). Listen to their picture an investigation of children's mathematical drawings. En A. Cuoco & R. Curcio (Eds.). *The roles of representation in school mathematics* (pp. 215-227). Reston: NCTM.

Sampson, G. (1997). Introducción. Consideraciones teóricas. En *Sistemas de escritura* (pp. 13-64). Barcelona: Gedisa.

SEP. (1994) Libros de texto gratuitos. México.

SEP. (2004). Programa de educación preescolar 2004. México.

Soriano, E. (1999). El planteamiento de problemas: una nueva etapa para la educación matemática. En *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 49-62). Madrid: La Muralla.

Tolchinsky, L. (2003). What philosophers say about representational means that may help us to understand what makes writing and numerals so special. En *The cradle of culture and what children know about writing numbers before being taught*. (pp. 1-20). London: Lawrence Erlbaum associates.

Tolchinsky, L. (2007). The multiple functions of external representations: Introduction. En E. Teubal, J. Dockrell, & L. Tolchinsky (Eds.), *Notational knowledge: Developmental and historical perspectives* (pp. 1-10). Rotterdam: Sense Publishers.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. México: Trillas.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nunes, & P. Bryant (Eds.) *Learning and teaching mathematics an international perspective* (pp.5-28). UK: Psychology Press.

Vergnaud, G., & Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie, 36*, 28-43.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997) Word problems: a vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? En T. Nunes, & P. Bryant (Eds.) *Learning and teaching mathematics an international perspective* (pp. 69-97). UK: Psychology Press.

Vigotsky, L. (1988). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. México: Grijalbo.

Zhang, J. (1997). *The Nature of External Representations in Problem Solving*. Extraído desde http://acad88.sahs.uth.tmc.edu/research/publications/estRep.pdf

Fuentes electrónicas:

Aprendizaje en Tercero de Primaria en México: Español, Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales. Extraído desde http://www2.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Resultados_aprendizaje/primaria_ejecutivo/Partes/excale07.pdf

www.inee.edu.mx/explorador