

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ciencias Instrumentación y Control

“Regulación PID de posición para sistemas Euler-Lagrange de un grado de libertad actuado por un PMSM.”

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestría en Ciencias

Presenta:

Ing. Jonathan Verástegui Galván

Dirigido por:

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán.

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán
Presidente


Firma

Dr. Roberto Valentín Carrillo Serrano
Secretario


Firma

Dr. Jorge Alberto Orrante Sakanassi
Vocal

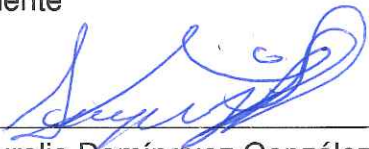

Firma

M.C. Alfonso Noriega Ponce
Suplente


Firma

Dr. Edgar Alejandro Rivas Araiza
Suplente


Firma


Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad


Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Directora de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Noviembre del 2016

RESUMEN

Este trabajo se enfoca a la regulación de posición en sistemas Euler-Lagrange de un grado de libertad, considerando que el subsistema mecánico es actuado por un motor síncrono de imán permanente (PMSM). La propuesta consiste en un controlador proporcional-integral-derivativo (PID) para el subsistema mecánico y una variación del control por campo orientado (FOC) para el PMSM, tomando en consideración la dinámica eléctrica del motor durante el análisis de estabilidad. También se muestra la prueba de estabilidad para dicho esquema de control, sin requerir que el subsistema mecánico cuente con la fricción viscosa y de esta forma asegurar estabilidad asintótica global (GAS).

(Palabras clave: PMSM, control PID, control FOC, análisis de estabilidad de Lyapunov)

SUMMARY

This work focuses on the position regulation in one degree of freedom Euler-Lagrange systems, considering that the mechanical subsystem is actuated by a permanent magnet synchronous motor (PMSM). The proposal consists of a proportional-integral-derivative (PID) controller for the mechanical subsystem and a variation of field oriented control (FOC) for the PMSM, taking into account the motor electric dynamics during the stability analysis. The stability proof for such control scheme is also shown, without requiring the possession of viscous friction by the mechanical subsystem, assuring global asymptotic stability (GAS).

(Keywords: PMSM, PID control, FOC control, Lyapunov stability analysis)

**A Dios, a mis padres, a mis maestros,
y amigos.
-por toda su ayuda.**

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) por mi formación como maestro en ciencias.

Al Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán por su gran ayuda, por su constante retroalimentación, por sus comentarios enriquecedores y recomendaciones respecto a este trabajo.

Al Dr. Jorge Alberto Orrante Sakanassi por sus observaciones constructivas y su gran apoyo.

Al Dr. Roberto Valentín Carrillo Serrano por sus comentarios, observaciones y recomendaciones.

Al M.C. Alfonso Noriega Ponce y al Dr. Edgar Alejandro Rivas Araiza por sus comentarios y recomendaciones.

A CONACYT por su ayuda recibida a través de la beca para la realización de mis estudios.

ÍNDICE DE CUADROS

4.1. Parámetros de simulación del mecanismo Euler-Lagrange de un grado de libertad.	40
4.2. Parámetros del DM1015B.	44
4.3. Características del DM1015B.	44
4.4. Ganancias y constantes que cumplen con las reglas de sintonía.	46
4.5. Ganancias que no cumplen con las reglas de sintonía.	50

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Mecanismo pistón-biela-manivela.	6
2.2. PMSM de rotor saliente y de rotor redondo.	8
2.3. Esquema de motor PMSM trifásico (A, B, C) y su transformación a dos fases (d, q).	9
2.4. Esquema de control FOC para el PMSM.	10
2.5. Esquema de control PID de posición para un robot (modificado de Kelly et al. (2005)).	12
2.6. Esquema de control PID de posición para un robot sin medición de velocidad (modificado de Kelly et al. (2005)).	13
2.7. Ejemplo de $h(x)$	19
2.8. Ejemplo de $s(x)$	20
2.9. Ejemplo de $SAT(x)$	21
3.1. Esquema general de control.	25
3.2. Ejemplo de $G(\tilde{q})$ y $H(\tilde{q})$ (modificada de Hernández-Guzmán et al. (2013)).	34
4.1. Mecanismo pistón-biela-manivela.	40
4.2. Diagrama a bloques del mecanismo pistón-biela-manivela realizado en <i>Simulink</i>	41
4.3. Gráfica de posición del mecanismo.	42
4.4. Gráfica del desplazamiento del mecanismo.	43
4.5. Mecanismo en su condición final.	43
4.6. Esquema del control propuesto realizado en <i>Simulink</i>	45
4.7. Gráfica de posición que cumple las reglas de sintonía.	47
4.8. Gráfica de par que cumple las reglas de sintonía.	48
4.9. Gráfica de corriente en la fase q que cumple las reglas de sintonía.	49
4.10. Gráfica de corriente en la fase d que cumple las reglas de sintonía.	49
4.11. Gráfica de posición que no cumple con las reglas de sintonía.	51
4.12. Gráfica de par que no cumple con las reglas de sintonía.	51
4.13. Gráfica de corriente en la fase q que no cumple con las reglas de sintonía.	52
4.14. Gráfica de corriente en la fase d que no cumple con las reglas de sintonía.	52

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	I
SUMMARY	II
DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTOS	IV
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Objetivo	2
1.3. Hipótesis	2
1.4. Justificación	2
1.5. Antecedentes	3
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	5
2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	5
2.2. Modelo dinámico de pistón-biela-manivela	6
2.3. Modelo matemático del PMSM	8
2.4. Control vectorial para el PMSM	10
2.5. Controlador PID de posición	11
2.6. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	13
2.6.1. Sistemas autónomos	13
2.6.2. Principio de invarianza de LaSalle	15
2.6.3. Funciones de comparación	16
2.6.4. Sistemas no autónomos	16
2.6.5. Cota última	17
2.7. Conceptos generales	18
2.7.1. Propiedades del modelo Euler-Lagrange	18
2.7.2. Funciones de saturación	19
3. METODOLOGÍA	22
3.1. Modelo en lazo abierto	22
3.2. Modelo en lazo cerrado	23
3.3. Convergencia de variables \dot{q} , ϑ , I_d y ρ a una bola	25
3.3.1. Función de Lyapunov	25

3.3.2.	Derivada de la función de Lyapunov	26
3.3.3.	Cota última	29
3.4.	Prueba de estabilidad asintótica global	30
3.4.1.	Punto de equilibrio	31
3.4.2.	Función de Lyapunov	33
3.4.3.	Derivada de la función de Lyapunov	35
3.4.4.	Principio de invariancia de LaSalle	36
4.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	39
4.1.	Simulaciones	39
4.1.1.	Mecanismo Euler-Lagrange de un grado de libertad	40
4.1.2.	Parámetros que cumplen con las condiciones de estabilidad	44
4.1.3.	Parámetros que no cumplen con las condiciones de estabilidad	50
5.	CONCLUSIONES	54
	BIBLIOGRAFÍA	55
	APÉNDICES	58
A.	Programas utilizados	58
A.1.	Programa en MATLAB sobre mecanismo propuesto	58
A.2.	Programa en MATLAB para validar las condiciones de estabilidad	58

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Actualmente en la industria el controlador más utilizado para los robots manipuladores es el PID. Sin embargo, por lo pragmático que resultan ser los procesos en la industria no siempre se da a conocer el análisis teórico del funcionamiento del mismo. Esto puede llegar a producir situaciones en las que por causas no conocidas sucedan fallas en algún equipo, y más específicamente en algún robot manipulador. Es por ello que gracias a conceptos teóricos como lo son las pruebas de estabilidad, simulaciones y análisis de datos, con parámetros apegados a la realidad, se puede dar una opción más para atacar el problema de alguna posible falla.

Comúnmente el proceso clásico para el análisis teórico de algún sistema se lleva a cabo, verificando qué elementos componen a dicho sistema, como en el caso de los robots manipuladores, los elementos físicos del sistema están compuestos por los brazos del robot y el elemento que proporciona el movimiento a los brazos, llamados actuadores y que comúnmente son motores eléctricos. Después de ello se obtiene el modelo matemático de dichos elementos, que por lo general está compuesto por ecuaciones que describen su comportamiento dinámico. Posteriormente dichas ecuaciones son manipuladas para poder agregar las leyes de control que ayudará al sistema a comportarse como el usuario desee. En seguida, se obtienen ecuaciones modificadas o ecuaciones en lazo cerrado que incluyen las leyes de control del sistema, dependiendo de lo propuesto por el usuario y de la respuesta del sistema, creando errores que deben ser disminuidos para mejorar su desempeño. Finalmente el sistema en lazo cerrado puede ser analizado matemáticamente.

Se puede observar que en dicho proceso, el paso de mayor complejidad es agregar las leyes de control o controladores, a los modelos matemáticos ya encontrados. Actualmente para el diseño de controladores en sistemas mecánicos se ha despreciado la dinámica eléctrica de los motores, debido a que si se considera la dinámica de los actuadores, se complica la tarea del diseño de control (Petrović et al., 2001; Donaire y Junco, 2009). Sin embargo al no considerar la dinámica eléctrica puede deteriorar el desempeño en lazo cerrado del sistema o incluso producir inestabilidades (Eppinger y Seering, 1987; Tarn et al., 1991a). Por otro lado, uno de los términos dentro del modelo matemático del robot manipulador es la fricción viscosa, la cual presenta desventajas cuando se usa para sintonizar el controlador, ya que es muy pequeña e incierta y presenta cambios durante la operación normal en sistemas mecánicos (Kelly et al., 2000).

Finalmente para poder atacar el problema, es necesario considerar un sistema que involucre la dinámica de los actuadores y que no considere la fricción viscosa, para posteriormente realizar una prueba formal de estabilidad involucrando reglas de sintonización.

1.2. Objetivo

Asegurar GAS en sistemas Euler-Lagrange de un grado de libertad y considerar la dinámica de los actuadores (PMSM) sin incluir la fricción viscosa; mediante la regulación de posición con un controlador PID al utilizar el método de estabilidad de Lyapunov para sistemas autónomos y no autónomos.

1.3. Hipótesis

El control PID para regulación de posición en los sistemas Euler-Lagrange de un grado de libertad, sin considerar la fricción viscosa y considerando la dinámica del PMSM, asegura GAS.

1.4. Justificación

Actualmente trabajos realizados en el área de robots manipuladores han propuesto controladores complejos, pensando que el PID es una herramienta de control que no satisface las exigencias de los sistemas no lineales. Sin embargo, gracias a los análisis de estabilidad que se pueden hacer con estos sistemas se pueden dar conclusiones favorables aún utilizando

un PID. Por otro lado, el PMSM ha empezado a formar parte como uno de los motores más utilizados en el área de los robots manipuladores gracias a sus grandes ventajas. Es por eso que este trabajo da a conocer por primera vez una prueba de estabilidad en donde al utilizar un PID para el control de posición que no considere la fricción viscosa e incluyendo la dinámica de un PMSM, se asegura GAS.

1.5. Antecedentes

El control de posición para robots con brazos rígidos de cadena cinemática abierta, es una de las áreas más estudiadas debido a que cuentan con el modelo bien definido y con propiedades establecidas. Para ello, probar estabilidad asintótica global cuando se usa un PID para la regulación de posición para n -grados de libertad en robots rígidos, ha motivado a ciertos trabajos recientemente (Yarza y Santibáñez, 2010; Yarza et al., 2011). Sin embargo la mayoría de las propuestas recaen en asumir que el robot naturalmente posee fricción viscosa, suposiciones que generan inconvenientes por lo mencionado anteriormente.

Por otro lado, es importante mencionar que los trabajos anteriores requieren la medición de la velocidad para poder realizar el control, siendo los sensores de velocidad la herramienta crucial. Sin embargo, existen diversos problemas con dichos sensores de velocidad. Principalmente, el problema con los tacogeneradores es el tamaño y peso de dichos elementos acoplados a los motores del robot. También existen los encoders cuya función principal es obtener la posición angular de un eje, obteniendo la velocidad al derivar la posición. El problema común de este tipo de sensor es que al utilizar la diferenciación numérica se amplifica el ruido, además que desde el punto de vista teórico, no existe una prueba formal de estabilidad para un sistema en lazo cerrado que respalde este procedimiento. No obstante, Kelly et al. (1994) propusieron un filtro pasa altas de la posición para obtener información de la velocidad, evitando la diferenciación numérica. Es por ello que Ortega et al. (1995) plantearon un controlador PID para robots manipuladores de n -grados de libertad el cual no necesita la suposición antes mencionada de la fricción viscosa. Sin embargo, solo prueban estabilidad asintótica semiglobal. Es importante destacar que en este controlador, la velocidad es estimada usando un filtro pasa altas de la posición, propuesto por Kelly et al. (1994). Otro trabajo presentado por Loria (1996) fue el primer controlador para seguimiento de trayecto-

rias que asegura estabilidad asintótica global uniforme sin requerir la suposición de la fricción viscosa. No obstante, este resultado es válido solo para sistemas Euler-Lagrange de un grado de libertad. En el trabajo más reciente realizado por Loria (2016) se da a conocer la estabilidad asintótica global uniforme para seguimiento de trayectoria en sistemas Euler-Lagrange de n -grados de libertad, sin considerar la presencia de la fricción viscosa y considerando la dinámica eléctrica del actuador. Esto se logra al obtener la linearización exacta de la dinámica del motor cuando se considera el par generado del motor como salida. Sin embargo, esto representa una desventaja siendo que la linearización introduce grandes cantidades de operaciones computacionales, y también un deterioro en el rendimiento del sistema en lazo cerrado debido a errores numéricos e incertidumbres paramétricas (Ortega et al., 1998, cap.11).

A excepción de Loria (2016), una característica común de todos los trabajos anteriormente mencionados es que asumen que el par es la entrada de control, es decir, ellos omiten la dinámica eléctrica de los motores. Pero al hacer esto, existe una degradación del rendimiento del sistema en lazo cerrado como menciona Tarn et al. (1991b).

Es por ello que en este trabajo, para poder asegurar GAS, se introduce un esquema de control para la regulación de posición de un sistema Euler-Lagrange de un grado de libertad (1-DOF) considerando la dinámica eléctrica de un PMSM como actuador, y omitiendo el término de la fricción viscosa.

La razón por la cual se utiliza un actuador PMSM en comparación con un motor de corriente directa con escobillas (CD), es debido a que presenta menor fricción, menor peso, mayor disipación de calor al tener los devanados en el estator, mayor eficiencia energética, un menor mantenimiento al no tener escobillas, mayor par y acoplamiento directo a la flecha del motor, evitando el efecto de backlash (Hu et al., 1994; Carrillo-Serrano et al., 2011).

Es importante enfatizar que nuestro esquema de control para el motor es muy similar al control por campo orientado (FOC) estándar usado en los PMSMs, además que la propuesta es válida para los dos tipos de motores conocidos como motor de rotor redondo y el otro como motor de rotor saliente (Krishnan, 2009). Es por ello que se debe recalcar el aporte de este trabajo, ya que la mayoría de los resultados en la literatura solo consideran al motor de rotor redondo; debido a que el motor de rotor saliente resulta tener controladores muy complejos (Petrović et al., 2001; Donaire y Junco, 2009).

Capítulo 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para poder analizar matemáticamente el comportamiento de un sistema físico se deben considerar dos vertientes, la primera es la cinemática que se encarga de describir el comportamiento a través de una trayectoria sin considerar las causas que lo producen, y la segunda es la dinámica que relaciona las fuerzas y el movimiento para conocer la evolución en el tiempo del mismo. Un sistema se puede modelar mediante las ecuaciones de la mecánica clásica o de Newton y también mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange propuestas en 1788 por Joseph Louis Lagrange en su escrito "*Méchanique analytique*" que consideran la energía del sistema. Cabe mencionar, que para el modelado de un robot manipulador de n grados de libertad, el método más utilizado son las ecuaciones de Euler-Lagrange, debido a su sencillez en el procedimiento, mientras que usando las ecuaciones de Newton, su procedimiento tiende a ser muy extenso.

Si se considera un robot manipulador de cadena cinemática abierta con n grados de libertad entonces, su energía total E está dada por la suma de la energía cinética K y la energía potencial U .

$$E(\dot{q}, q) = K(\dot{q}, q) + U(\dot{q}, q) \quad (2.1)$$

Siendo $q = [q_1, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ el vector de las posiciones y $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ el vector de las velocidades.

El Lagrangiano $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$ se representa por la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = K(\dot{q}, q) - U(\dot{q}, q) \quad (2.2)$$

donde la energía potencial representa a las fuerzas conservativas como la fuerza gravitacional y la fuerza de los resortes. La energía cinética representa el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa determinada desde el reposo hasta la velocidad indicada.

Considerando lo anterior se puede decir que las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}, q)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}, q)}{\partial q_i} = \tau_i \quad (2.3)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representa cada una de las uniones del robot, es importante mencionar esto ya que el número de grados de libertad relaciona la cantidad de ecuaciones dinámicas del robot; además τ_i representa a las fuerzas no conservativas, sean la fricción, la resistencia por un fluido y las que dependen del tiempo y la velocidad, así como los pares externos aplicados por los actuadores.

2.2. Modelo dinámico de pistón-biela-manivela

Para el desarrollo de este modelo se utilizó el propuesto por Tomei et al. (2009) realizando modificaciones para poder incluir el término gravitacional. En la Figura 2.1 se puede observar el modelo propuesto que cumple con las características necesarias para la realización de este trabajo.

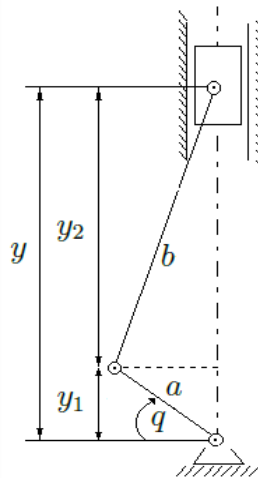


Figura 2.1: Mecanismo pistón-biela-manivela.

Las ecuaciones que describen el sistema Euler-Lagrange de un grado de libertad de la Figura 2.1 son:

$$y_1 = a \sin(q) \quad (2.4)$$

$$y_2 = \sqrt{b^2 - a^2 \cos^2(q)} \quad (2.5)$$

El desplazamiento del mecanismo estará dado por la suma de (2.4) y (2.5) siendo:

$$y = a \sin(q) + \sqrt{b^2 - a^2 \cos^2(q)} \quad (2.6)$$

Derivando (2.6) respecto a la posición q , se obtiene:

$$v = \frac{dy(q)}{dq} = a \cos(q) + \frac{a^2 \cos(q) \sin(q)}{\sqrt{b^2 - a^2 \cos^2(q)}} \quad (2.7)$$

Derivando (2.6) respecto del tiempo t , se obtiene:

$$v_y = \frac{dy(q)}{dt} = \left(a \cos(q) + \frac{a^2 \cos(q) \sin(q)}{\sqrt{b^2 - a^2 \cos^2(q)}} \right) \dot{q} = v \dot{q} \quad (2.8)$$

La derivada de (2.7) respecto a la posición q es:

$$a_c = \frac{dv(q)}{dq} = \left(-a \sin(q) + \frac{a^2(-a^2 \cos^4(q) - b^2 \sin^2(q) + b^2 \cos^2(q))}{(b^2 - a^2 \cos^2(q))^{3/2}} \right) \quad (2.9)$$

Derivando (2.7) respecto del tiempo t , se obtiene:

$$a_{cy} = \frac{dv(q)}{dt} = \left(-a \sin(q) + \frac{a^2(-a^2 \cos^4(q) - b^2 \sin^2(q) + b^2 \cos^2(q))}{(b^2 - a^2 \cos^2(q))^{3/2}} \right) \dot{q} = a_c \dot{q} \quad (2.10)$$

Considerando (2.2) se puede decir que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_0 v_y^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{q}^2 - m_0 g y \quad (2.11)$$

Usando la (2.3) se puede obtener:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} = (m_0 v^2 + J_0) \dot{q} \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \right] = (m_0 v^2 + J_0) \ddot{q} + (2v a_c) \dot{q}^2 \quad (2.13)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dq} = -\frac{1}{2} m_0 \dot{q}^2 \left[\frac{d(-v^2)}{dq} \right] - m_0 g v \quad (2.14)$$

Finalmente:

$$\tau = (m_0 v^2 + J_0) \ddot{q} + \frac{1}{2} m_0 \dot{q}^2 \left[\frac{d(-v^2)}{dq} \right] + (2va_c) \dot{q}^2 + m_0 g v \quad (2.15)$$

donde (2.15) es equivalente a:

$$\tau = m(q) \ddot{q} + c(q) \dot{q}^2 + g(q) \quad (2.16)$$

donde $m(q) = (m_0 v^2 + J_0)$ es la inercia, $c(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m_0 \dot{q}^2 \left[\frac{d(-v^2)}{dq} \right] + (2va_c) \dot{q}^2$ es el término de las fuerzas centrífugas y Coriolis y $g(q) = m_0 g v$ es el término de las fuerzas gravitacionales.

2.3. Modelo matemático del PMSM

El PMSM es un tipo de motor que se encuentra generalmente entre un motor de corriente directa (CD) sin escobillas y un motor de inducción, ya que un motor de CD sin escobillas contiene imanes en el rotor y devanados en el estator, sin embargo la estructura del estator presenta devanados que permiten una densidad de flujo sinusoidal en el entrehierro, parecido al motor de inducción trifásico. Cabe mencionar que existen diferentes formas en las que se pueden acomodar los magnetos en el rotor del PMSM, creando varios tipos de motores PMSM. Donde los dos tipos de motores PMSM más populares son los llamados de rotor saliente y de rotor redondo mencionados en Krishnan (2009), como se observa en la Figura 2.2.

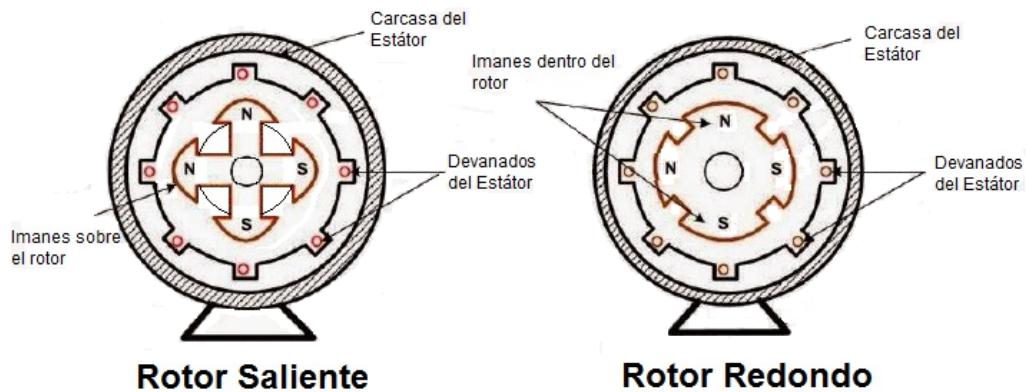


Figura 2.2: PMSM de rotor saliente y de rotor redondo.

El PMSM es un sistema que cuenta con tres fases para su funcionamiento donde la forma simplificada para su análisis es mediante la transformación dq o la transformación de Park que pasa de tres fases (A, B, C) a dos fases (d, q).

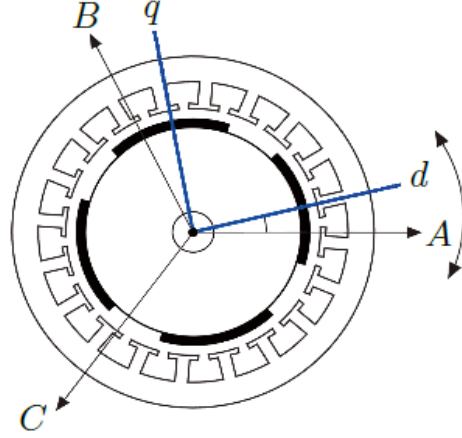


Figura 2.3: Esquema de motor PMSM trifásico (A, B, C) y su transformación a dos fases (d, q).

Como se muestra en la Figura 2.3 esta transformación es deseable debido a la simplicidad conceptual obtenida con solo dos devanados en el estator llamados de directa y de cuadratura respectivamente. Por otro lado, el rotor no presenta devanados, solo imanes que en el modelo matemático son representados como un campo magnético constante.

Las ecuaciones que modelan al PMSM mediante la transformación dq según Petrović et al. (2001); Krause et al. (2002); Dawson et al. (1998) son:

$$L_q \dot{I}_q = -R_s I_q - n_p L_d I_d \dot{q} - \Phi_M \dot{q} + V_q \quad (2.17)$$

$$L_d \dot{I}_d = -R_s I_d - n_p L_q I_q \dot{q} + V_d \quad (2.18)$$

$$\tau = n_p (L_d - L_q) I_d I_q + \Phi_M I_q \quad (2.19)$$

En las ecuaciones (2.17) y (2.18) se representa el modelo eléctrico del PMSM en donde $I_d, I_q \in \mathbb{R}$ representan las corrientes eléctricas en las fases dq , además V_q y V_d representan los voltajes aplicados. También existen constantes positivas como $L_d, L_q, R_s, \Phi_M, n_p$ que representa las inductancias en las fases dq , las resistencias en el devanado del estator, la constante de par y el número de pares de polos del rotor respectivamente. Cabe mencionar que (2.19) representa el par generado. Además del acople de los imanes en el rotor, los

PMSMs se pueden clasificar de acuerdo a sus inductancias, llamado motor de rotor redondo por $L_d = L_q$ y llamado motor de rotor saliente por $L_d \neq L_q$.

2.4. Control vectorial para el PMSM

De acuerdo con Krishnan (2009) el control por campo orientado (FOC) o también llamado control vectorial, llegó por primera vez a finales de 1960 en el ámbito de los controladores de corriente alterna para máquinas de inducción, sin embargo su desarrollo prominente no fue sino hasta 1980 para afrontar los retos de flujo magnético y par oscilatorio. La función de éste tipo de control recae en modelar un motor de corriente alterna (CA) como uno de corriente directa (CD) controlando de manera independiente la magnetización de la máquina y el par.

Los PMSMs se caracterizan por su alto desempeño y una alta eficiencia en el trabajo a realizar, además éste tipo de motores presentan aceleraciones y desaceleraciones rápidas. Por lo cual, para controlar dichos motores, es necesario utilizar el esquema general del FOC que se muestra en la Figura 2.4, en donde en el bloque del subsistema eléctrico pasan los voltajes de las fases d y q hacia los voltajes trifásicos del motor PMSM, esto es llamado transformación inversa dq . También se encuentran sensores de corriente en cada fase, para convertir las corrientes trifásicas a corrientes en las fases d y q , llamado así transformación dq .

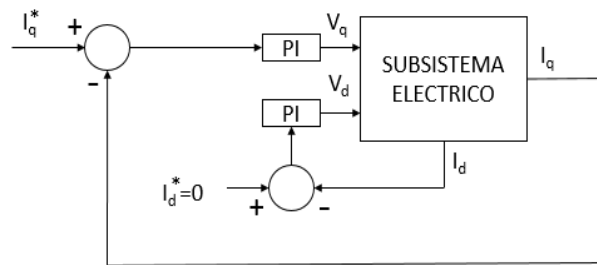


Figura 2.4: Esquema de control FOC para el PMSM.

Mostrando los dos PIs de corriente con las siguientes ecuaciones:

$$V_d = -K_{Pd}I_d - K_{Id} \int_0^t I_d(\sigma) d\sigma \quad (2.20)$$

$$V_q = -K_{Pq}\rho - K_{Iq} \int_0^t \rho(\sigma) d\sigma \quad (2.21)$$

donde los errores de corriente mostrados en la Figura 2.4 son:

$$\tilde{I}_d = I_d - I_d^* \quad (2.22)$$

$$\tilde{I}_q = \rho = I_q - I_q^* \quad (2.23)$$

Es necesario mencionar que la componente de directa de corriente del estator I_d es utilizada para controlar el flujo de magnetización del rotor y la componente de cuadratura I_q es utilizada para controlar la generación de par electromecánico. También se puede interpretar como $I_q^* = \frac{\tau^*}{\Phi_M}$ donde τ^* es el par de referencia. Para generar el par máximo, el flujo debido a I_q debe ser perpendicular al flujo debido a I_d , eligiendo $I_d^* = 0$ ya que presenta un flujo constante provisto por los imanes (Adhavan et al., 2011).

2.5. Controlador PID de posición

Kelly et al. (2005) realizaron una prueba de estabilidad asegurando GAS al utilizar un controlador PD de posición para robots manipuladores no incluyendo el término gravitacional (*i.e.* $g(q) = 0$). Sin embargo, cuando se incluye el término gravitacional en el modelo del robot manipulador *i.e.* $g(q) \neq 0$ ó $g(q_d) \neq 0$, siendo q_d la posición deseada, entonces el objetivo del control de posición no puede ser asegurado por medio de una simple ley de control PD ya que existe un error en estado estacionario que para compensarlo se necesita saber con exactitud el término de la gravedad. Es por ello que para eliminar el error en estado estacionario es necesario agregar una componente integral al control PD.

La ley de control PID es dada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_d \dot{\tilde{q}} + K_i \int_0^t \tilde{q}(\sigma) d\sigma \quad (2.24)$$

donde K_p , K_i , K_d son las ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente, $\tilde{q} = q_d - q$ representa el error de posición y $\dot{\tilde{q}}$ es la derivada de la posición. En la Figura 2.5 se puede apreciar el esquema de control en base a la ecuación (2.24).

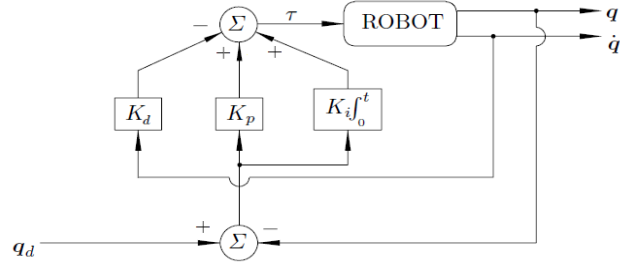


Figura 2.5: Esquema de control PID de posición para un robot (modificado de Kelly et al. (2005)).

Cabe mencionar que el control PID sigue siendo el controlador más común en aplicaciones con robots manipuladores industriales (Kelly et al., 2005). Pero una desventaja de este controlador es que requiere de mediciones de velocidad para poder ser implementado, y para los robots industriales generalmente es imposible contar con sensores de velocidad. Sin embargo, este problema se ha solucionado utilizando diferenciación numérica o utilizando un filtro pasa altas de la posición. En donde la principal desventaja de la diferenciación numérica desde el punto de vista práctico, es la amplificación del ruido, ya que es incierto en bajas y altas velocidades. Y desde el punto de vista teórico por la ausencia de una prueba de estabilidad formal.

Por otro lado, el uso de aproximación numérica evita la medición de velocidad utilizando algún sensor o el método de diferenciación numérica con sus desventajas antes mencionadas (Kelly et al., 1994).

Donde la ecuación general propuesta por Kelly et al. (1994) es:

$$\dot{x} = -Ax - ABq, \theta = x + Bq \quad (2.25)$$

Donde existen constantes positivas A y B , θ que representa la posición filtrada, q que es la posición calculada y x que es una variable utilizada para poder interpretar a (2.25) como:

$$\dot{\theta} = -A\theta + B\dot{q} \quad (2.26)$$

Más aún, ésta expresión también es equivalente a:

$$\Theta(s) = \frac{Bs}{A+s}Q(s) \quad (2.27)$$

donde $\Theta(s)$ y $Q(s)$ son las transformadas de Laplace de θ y q respectivamente, representando la forma equivalente de (2.25).

A pesar que (2.26) es más conveniente para el análisis de estabilidad, (2.25) muestra que θ puede ser calculada sin requerir mediciones de velocidad, mientras que (2.27) indica que Θ es dada como filtro pasa altas de la posición o filtro pasa bajas de la velocidad.

Finalmente la Figura 2.5 se modificaría evitando la medición de la velocidad y utilizando el filtro pasa altas de la posición como se ve en la Figura 2.6.

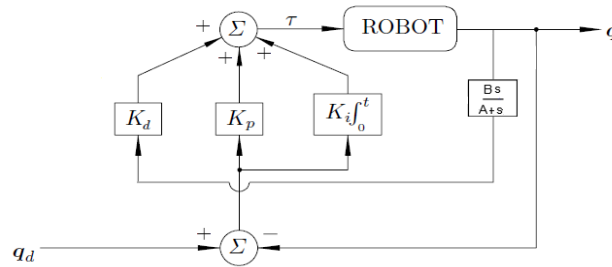


Figura 2.6: Esquema de control PID de posición para un robot sin medición de velocidad (modificado de Kelly et al. (2005)).

2.6. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

2.6.1 Sistemas autónomos

Son un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que no dependen de la variable independiente, es decir que los sistemas autónomos son invariantes en el tiempo.

Según Khalil (2002) considera el sistema autónomo como:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.28)$$

El estado x^* es un equilibrio de (2.28) si $f(x^*) = 0$ para $t \geq 0$. Suponga que el equilibrio siempre es $x^* = 0$. Si no es así, si $x^* \neq 0$, considere el cambio de variables $y = x - x^*$ en donde la derivada de y esta dada por:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x^*) = g(y), \quad \text{donde } g(0) = 0$$

En la nueva variable y , el sistema tiene equilibrio en el origen. Por lo tanto, sin perder generalidades, siempre podemos asumir que $f(x)$ satisface $f(0) = 0$ y estudiar la estabilidad del origen $x = 0$.

Definición 1

El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.28) es:

- Estable, si para cada $\epsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \forall t \geq 0. \tag{2.29}$$

- Inestable, si no es estable.
- Asintóticamente estable, si es estable y si δ puede ser escogida tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \tag{2.30}$$

Función de Lyapunov

Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable definida en el dominio de $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \tag{2.31}$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (2.28) es mostrada como:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \tag{2.32}$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema es dependiente de las ecuaciones del sistema. Por lo tanto, $\dot{V}(x)$ va a ser diferente para sistemas diferentes.

Si se cumple que:

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \tag{2.33}$$

entonces V va a decrecer a lo largo de la solución de (2.28), concluyendo que es una función de Lyapunov (Khalil, 2002).

Teorema 1 (*Teorema 4.1, (Khalil, 2002), pág. 114*)

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que si cumple con $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ en $D - \{0\}$ y $\dot{V}(x) \leq 0$ en D , entonces $x = 0$ es estable.

Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (2.34)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Teorema 2 (*Teorema 4.2, (Khalil, 2002), pág. 124*)

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad (2.35)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (2.36)$$

$$\dot{V}(x) < 0 \forall x \neq 0 \quad (2.37)$$

entonces $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

2.6.2 Principio de invarianza de LaSalle

Encontrar una función de Lyapunov en donde $\dot{V}(x) < 0$ es un reto. Es por ello que el hecho de que no se encuentre una función de Lyapunov que cumpla con lo anterior, no quiere decir que sea inestable, más bien, no se debe hacer ninguna conclusión. Afortunadamente, para los sistemas autónomos, existen métodos basados en ciertas condiciones restrictivas para poder dar una conclusión ante dicho problema. El principio de invarianza de LaSalle es uno de esos métodos ampliamente usado para el análisis de sistemas de control, el cual se mostrará a continuación.

Teorema 3 (*Corolario 4.1, (Khalil, 2002), pág. 128*)

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x)$ y sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y definida positiva en el dominio D conteniendo al origen $x = 0$,

tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en D . Sea $S = \{x \in D | \dot{V}(x) = 0\}$ y suponga que ninguna solución puede permanecer idénticamente en S más que $x(t) \equiv 0$. Entonces el origen es asintóticamente estable.

Teorema 4 (Corolario 4.2, (Khalil, 2002), pág. 129)

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x)$ y sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, definida positiva y radialmente desacotada tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0\}$ y suponga que ninguna solución puede permanecer idénticamente en S más que $x(t) \equiv 0$. Entonces el origen es globalmente asintóticamente estable.

2.6.3 Funciones de comparación

Mientras nos movemos de los sistemas autónomos a los no autónomos, un grado de dificultad sobresale del hecho en poder dar solución a los sistemas no autónomos, es por ello que ciertos teoremas utilizan las definiciones de funciones de comparación para dar conclusiones. Las funciones de comparación se conocen como clase \mathcal{K} , \mathcal{K}_∞ y \mathcal{KL} que se definirán a continuación (Khalil, 2002).

Definición 2

Sea $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ una función continua que pertenece a la clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase \mathcal{K}_∞ si $a = \infty$ y $\alpha(r) \rightarrow \infty$ mientras $r \rightarrow \infty$.

Definición 3

Sea $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función continua que pertenece a la clase \mathcal{KL} si para cada s fija, el mapeo $\beta(r, s)$ pertenece a la clase \mathcal{K} con respecto a r y para cada r fija, el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ mientras $s \rightarrow \infty$.

2.6.4 Sistemas no autónomos

Los sistemas no autónomos son aquellos que tienen alguna parte de su modelo que varía directamente con el tiempo, debido a la pérdida o aumento de la magnitud, además es importante mencionar que éste tipo de sistemas son los más apegados a la realidad.

Khalil (2002) considera a un sistema no autónomo como:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.38)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua a tramos en t y localmente Lipschitz en $x : [0, \infty) \times D$, y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$. El origen es un punto de equilibrio para (2.38) en $t = 0$ si:

$$f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0 \quad (2.39)$$

2.6.5 Cota última

El análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov puede ser usado para mostrar acotación de la solución de la ecuación de estados, a pesar de no haber punto de equilibrio en el origen.

Teorema 5 (*Teorema 4.18, (Khalil, 2002), pág. 172*)

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen y $V : [0, \infty) \times D \Rightarrow \mathbb{R}$ sea una función continuamente diferenciable tal que:

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (2.41)$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall x \in D$ donde α_1 y α_2 son funciones clase \mathcal{K} y $W_3(x)$ es una función continua definida positiva. Se toma $r > 0$ tal que $B_r \subset D$ y suponga que:

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (2.42)$$

Entonces existen una función clase \mathcal{KL} nombrada como β y para cualquier estado inicial $x(t_0)$, satisface que $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$, hay una $T \geq 0$ (dependiendo de $x(t_0)$ y de μ) tal que la solución de (2.38) satisface:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (2.43)$$

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \forall t \geq t_0 + T \quad (2.44)$$

Más aún, si $D = \mathbb{R}^n$ y α_1 pertenece a una función clase \mathcal{K}_∞ , entonces (2.43) y (2.44) permanecen para cualquier estado inicial $x(t_0)$, sin restricción de que tan grande debe ser μ .

2.7. Conceptos generales

Estos conceptos serán de utilidad para el desarrollo del análisis de estabilidad y también serán de apoyo para poder fundamentar los resultados obtenidos.

2.7.1 Propiedades del modelo Euler-Lagrange

Algunas propiedades que se presentan a continuación son para el modelo Euler-Lagrange de un grado de libertad, éstas propiedades se pueden encontrar en Kelly et al. (2005), cap. 4.

$$m_m \leq m(q) \leq m_M, \quad m_m, m_M \in \mathbb{R}^+ \quad (2.45)$$

$$|c(q)| \leq K_c, \quad K_c \in \mathbb{R}^+ \quad (2.46)$$

$$c(q) = \frac{1}{2} \frac{dm(q)}{dq} \quad (2.47)$$

$$|g(q)| \leq k', \quad k' \in \mathbb{R}^+ \quad (2.48)$$

$$\left| \frac{dg(q)}{dq} \right| \leq K_g, \quad K_g \in \mathbb{R}^+ \quad (2.49)$$

$$K_h \geq \frac{2k'}{h_1\left(\frac{2k'}{K_g}\right)}, \quad K_h \in \mathbb{R}^+ \quad (2.50)$$

donde:

$$|g(q_d) - g(q)| \leq K_h |h_1(\tilde{q})| \quad (2.51)$$

para toda $q \in \mathbb{R}$.

2.7.2 Funciones de saturación

Las funciones de saturación forman un elemento fundamental en el análisis de estabilidad, ya que el controlador PID propuesto, al igual que los dos controladores PI de corriente del FOC están conformados por funciones de saturación para poder garantizar el resultado final.

Definición 4

De acuerdo con Zavala-Rio y Santibañez (2007), $h(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow h(x)$ es una función de saturación lineal y estrictamente creciente (véase Figura 2.7) para $L < N$, $L, N \in \mathbb{R}^+$ si:

$$h(x) = x, \text{ cuando } |x| \leq L \quad (2.52)$$

$$|h(x)| < N, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.53)$$

Además se requiere que sea continuamente diferenciable tal que:

$$0 < \frac{dh(x)}{dx} \leq 1 \quad (2.54)$$

Nótese que las condiciones anteriores implican que:

$$|h(x)| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.55)$$

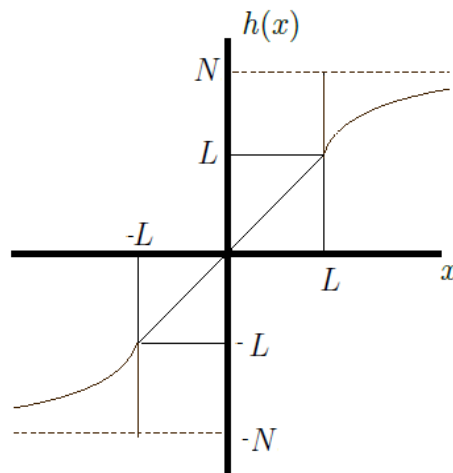


Figura 2.7: Ejemplo de $h(x)$.

Definición 5

La función $s(x) \in \mathbb{R}$ es una función de saturación como se muestra en la Figura 2.8 que satisface lo siguiente:

$$s(x) = \begin{cases} \sin(x), & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \\ -1, & x \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.56)$$

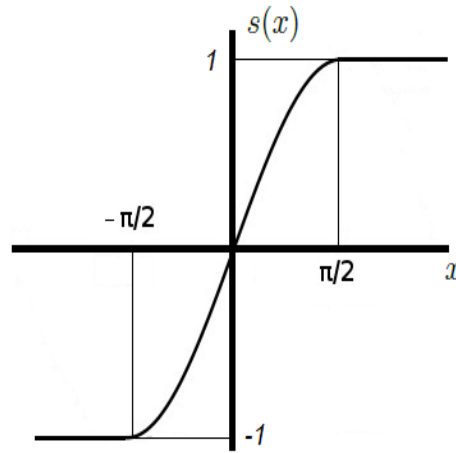


Figura 2.8: Ejemplo de $s(x)$.

Nótese que:

$$|s(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.57)$$

También que:

$$\frac{ds(x)}{dx} = 0, \quad \forall |x| \geq \frac{\pi}{2} \quad (2.58)$$

$$0 \leq \frac{ds(x)}{dx} \leq 1, \quad \forall |x| < \frac{\pi}{2} \quad (2.59)$$

Definición 6

La función $SAT(x) \in \mathbb{R}$ es una función de saturación como se muestra en la Figura 2.9 que satisface lo siguiente:

$$SAT(x) = \begin{cases} x, & |x| < K \\ K, & x \geq K \\ -K, & x \leq -K \end{cases} \quad (2.60)$$

donde $K \in \mathbb{R}$.

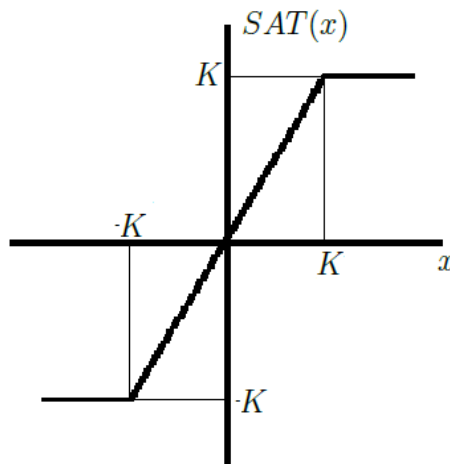


Figura 2.9: Ejemplo de $SAT(x)$.

Nótese que:

$$|SAT(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.61)$$

Capítulo 3

METODOLOGÍA

Este capítulo se divide en cuatro secciones. En la sección 3.1 se muestra el modelo en lazo abierto en base a los conceptos mencionados en el capítulo 2 sobre el modelo de los sistemas Euler-Lagrange de un grado de libertad y sobre el modelo del PMSM. En la sección 3.2 se proponen los errores del sistema, donde se dan a conocer los controladores a usar que serán fundamentales para el desarrollo del análisis de estabilidad, y finalmente se proponen algunas consideraciones de utilidad. En la sección 3.3 se prueba que la velocidad y la velocidad estimada convergen en tiempo finito a una bola con un radio conocido. Finalmente, en la sección 3.4 se demuestra que el origen es globalmente asintóticamente estable.

3.1. Modelo en lazo abierto

La ecuación (3.1) representa la unión mecánica dada por el acople directo del rotor del PMSM con un eslabón del sistema Euler-Lagrange.

$$m(q)\ddot{q} + c(q)\dot{q}^2 + g(q) = n_p(L_d - L_q)I_d I_q + \Phi_M I_q \quad (3.1)$$

Las ecuaciones (3.2) y (3.3) representan la parte eléctrica del modelo estándar dq del PMSM.

$$L_q \dot{I}_q + R_s I_q + n_p L_d I_d \dot{q} + \Phi_M \dot{q} = V_q \quad (3.2)$$

$$L_d \dot{I}_d + R_s I_d - n_p L_q I_q \dot{q} = V_d \quad (3.3)$$

donde I_d , I_q son las corrientes eléctricas de las fases d y q en los devanados del motor, a su vez, V_q y V_d representan los voltajes aplicados a dichas fases. Además, n_p , L_q , L_d , R_s ,

Φ_M representan el número de pares de polos, las inductancias por fase, la resistencia del devanado del estator y la constante de par respectivamente. El par generado del motor es representado por $\tau_m = n_p(L_d - L_q)I_d I_q + \Phi_M I_q$ como se puede observar en la ecuación (3.1). Cabe mencionar que q , \dot{q} y \ddot{q} representan el ángulo en radianes del rotor del motor, la velocidad y la aceleración respectivamente, $m(q)$ representa la inercia, $c(q)\dot{q}^2$ el término de fuerzas centrífugas y Coriolis y $g(q)$ el término de gravedad.

3.2. Modelo en lazo cerrado

En base a las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) se definen los errores del sistema como:

$$\tilde{I}_q = \rho = I_q - I_q^* \quad (3.4)$$

$$\tilde{I}_d = I_d - I_d^* \quad (3.5)$$

donde el error de corriente en la fase q es ρ y el error de corriente en la fase d es \tilde{I}_d . Nótese que $I_d^* = 0$ debido al uso de un PMSM, entonces la ecuación (3.5) es equivalente a $\tilde{I}_d = I_d$.

$$\tilde{q} = q_d - q \quad (3.6)$$

siendo \tilde{q} el error de posición y q_d la posición deseada.

Se proponen dos controladores PI para el control de corriente del PMSM:

$$V_d = -\alpha_d I_d - SAT_d(\alpha_{di} w_d) + y \quad (3.7)$$

$$V_q = -\alpha_q \rho - SAT_q(\alpha_{qi} w_q) + L_q \dot{I}_q^* \quad (3.8)$$

donde las ecuaciones (3.9) y (3.10) representan las integrales de los errores de corriente como se muestra a continuación.

$$w_d = \int_0^t I_d dt + w_d(0) \quad (3.9)$$

$$w_q = \int_0^t \rho dt + w_q(0) \quad (3.10)$$

Además, $SAT_q(\cdot)$ y $SAT_d(\cdot)$ son funciones de saturación mencionadas en la Definición 6 con las condiciones $K_{qq} > R_s k' / \Phi_M$ y $K_{dd} > 0$ respectivamente, donde K_{qq} y

K_{dd} representan el valor máximo del valor absoluto de la función $SAT_q(\cdot)$ y $SAT_d(\cdot)$ respectivamente. Es importante mencionar que $w_d(0)$ y $w_q(0)$ son los valores iniciales de w_d y w_q correspondientemente. También α_d , α_q , α_{di} y α_{qi} son valores positivos referentes a las ganancias proporcionales e integrales respectivamente de los controladores PI de las fases d y q .

Finalmente se describe y de la ecuación (3.7) como:

$$y = -n_p L_d I_q^* \dot{q} + \frac{\alpha}{m(q)} \vartheta \frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}} n_p (L_d - L_q) I_q \quad (3.11)$$

donde $I_q^* = \frac{\tau^*}{\Phi_M}$ representa la corriente deseada en la fase q .

Mencionado lo anterior el controlador PID propuesto se escribe como:

$$\tau^* = K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w) \quad (3.12)$$

donde $h_1(\cdot)$ y $h_2(\cdot)$ son funciones de saturación mencionadas en la Definición 4 que deben cumplir las condiciones $N_1 > L_1 > 0$ y $N_2 > L_2 > k'$ respectivamente. Además, K_p , K_i y K_d representan las ganancias proporcional, integral y derivativas del controlador PID.

También w esta dada por:

$$w = \int_0^t [\alpha(h_1(\tilde{q}) + \vartheta) + \frac{R_s}{\Phi_M} \rho] dt + \tilde{q} + w(0) \quad (3.13)$$

Dado a que se utilizará la definición del filtro de posición de (2.25), la ecuación para calcular la estimacion de velocidad ϑ es:

$$\dot{\vartheta} = -A\vartheta + B\dot{q} \quad (3.14)$$

Es por ello que considerando las ecuaciones (3.1)-(3.3), sustituyendo y agrupando (3.4)-(3.13) se obtienen las ecuaciones en lazo cerrado:

$$m(q)\ddot{q} + c(q)\dot{q}^2 + g(q) = n_p(L_d - L_q)I_d\rho + \Phi_M\rho + n_p(L_d - L_q)I_d I_q^* + K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w) \quad (3.15)$$

$$L_q \dot{\rho} = -(R_s + \alpha_q)\rho - n_p L_d I_d \dot{q} - \Phi_M \dot{q} - SAT_q(\alpha_{qi} w_q) + L_q \dot{I}_q^* \quad (3.16)$$

$$L_d \dot{I}_d = -(R_s + \alpha_d) I_d + n_p L_q \rho \dot{q} - SAT_d (\alpha_{di} w_d) + \frac{\alpha}{m(q)} \vartheta \frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}} n_p (L_d - L_q) I_q \quad (3.17)$$

En la Figura 3.1 se puede observar el esquema de control dado por las ecuaciones (3.4) - (3.13).

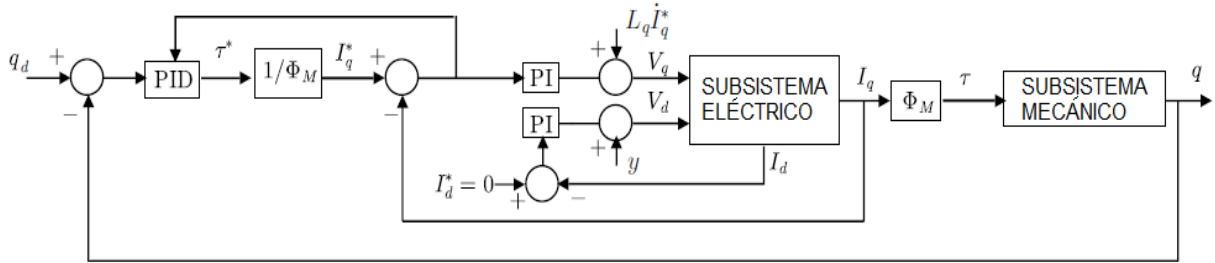


Figura 3.1: Esquema general de control.

3.3. Convergencia de variables \dot{q} , ϑ , I_d y ρ a una bola

A continuación se demuestra que $(\dot{q}, \vartheta, I_d, \rho) \in \mathbb{R}^4$ están acotadas y tienen una cota última para cualquier $(\tilde{q}, w, w_d, w_q) \in \mathbb{R}^4$ y cualquier condición inicial $(\tilde{q}(t_0), w(t_0), w_d(t_0), w_q(t_0)) \in \mathbb{R}^4$. Nótese que se definen $(\dot{q}, \vartheta, I_d, \rho)$ como los estados del sistema. Entonces q, \tilde{q}, w, w_d y w_q son funciones que dependen directamente del tiempo y por lo tanto la dinámica del sistema es no autónoma.

3.3.1 Función de Lyapunov

Usando la siguiente función escalar:

$$V_1(t, \dot{q}, \vartheta, I_d, \rho) = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 - \alpha \vartheta s(\dot{q}) + \frac{1}{2B} K_d \vartheta^2 + \frac{1}{2} L_q \rho^2 + \frac{1}{2} L_d I_d^2 \quad (3.18)$$

Se debe considerar que los términos $\frac{1}{2} L_q \rho^2 + \frac{1}{2} L_d I_d^2$ son positivos, ya que $L_d, L_q \in \mathbb{R}^+$.

Usando la ecuación (2.57), esta función satisface:

$$c_1(\dot{q}^2 + \vartheta^2 + I_d^2 + \rho^2) \leq V_1 \leq c_2(\dot{q}^2 + \vartheta^2 + I_d^2 + \rho^2), \quad (3.19)$$

con

$$c_1 = \min\{\lambda_{\min}(Q_1), \frac{L_q}{2}, \frac{L_d}{2}\}, \quad (3.20)$$

$$c_2 = \max\{\lambda_{\max}(Q_2), \frac{L_q}{2}, \frac{L_d}{2}\}, \quad (3.21)$$

siendo c_1 y c_2 funciones clase K_∞ que acotan por abajo y por arriba a V_1 .

Se considera a $Q = \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 - \alpha\vartheta s(\dot{q}) + \frac{1}{2B}K_d\vartheta^2$. La cual se escribe en su forma cuadrática como:

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |\dot{q}| \\ |\vartheta| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m(q) & -\alpha \\ -\alpha & K_d/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\dot{q}| \\ |\vartheta| \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Acotando por arriba y por abajo, Q se puede escribir como:

$$Q_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |\dot{q}| \\ |\vartheta| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_m & -\alpha \\ -\alpha & K_d/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\dot{q}| \\ |\vartheta| \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |\dot{q}| \\ |\vartheta| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_M & \alpha \\ \alpha & K_d/B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\dot{q}| \\ |\vartheta| \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

donde Q_1 y Q_2 son definidas positivas, y $c_1, c_2 > 0$, si y solo si:

$$\boxed{m_m K_d/B > \alpha^2} \quad (3.25)$$

De esta forma se concluye que V_1 es definida positiva.

3.3.2 Derivada de la función de Lyapunov

La derivada temporal de V_1 se representa como:

$$\dot{V}_1 = m(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{m}(q)\dot{q}^2(\dot{q}) - \alpha\dot{\vartheta}s(\dot{q}) - \alpha\vartheta\frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}}\ddot{q} + \frac{1}{B}K_d\dot{\vartheta}\vartheta + L_q\dot{\rho}\rho + L_d\dot{I}_d I_d \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.15) - (3.17) en (3.26) y considerando (2.47) se puede redefinir V_1 como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 = & \dot{q}[-g(q) + K_p h_1(\tilde{q}) + h_2(K_i w)] + \alpha A \vartheta s(\dot{q}) - \alpha B \dot{q} s(\dot{q}) - \frac{\alpha}{m(q)} \vartheta \frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}} [-c(q) \dot{q}^2 \\
& -g(q) + \Phi_M \rho + K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w)] - \frac{AK_d}{B} \vartheta^2 - (R_s + \alpha_q) \rho^2 - SAT_q(\alpha_{qi} w_q) \rho \\
& - \frac{R_s}{\Phi_M} \rho [K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w)] - (R_s + \alpha_d) I_d^2 - SAT_d(\alpha_{di} w_d) I_d
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Usando (2.57) y $|s(\dot{q})| |\dot{q}| = \dot{q} s(\dot{q})$, se puede acotar por arriba a \dot{V}_1 como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 \leq & k' |\dot{q}| + K_p N_1 |\dot{q}| + N_2 |\dot{q}| + \alpha A |\vartheta| |s(\dot{q})| - \alpha B |\dot{q}| |s(\dot{q})| - \frac{\alpha}{m_m} \frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}} |\vartheta| [K_c |\dot{q}|^2 + k' \\
& + \Phi_M |\rho| + K_p N_1 - K_d |\vartheta| + N_2] - \frac{K_d A}{B} |\vartheta|^2 - (R_s + \alpha_q) |\rho|^2 K_{qq} |\rho| + \frac{R_s}{\Phi_M} |\rho| [K_p N_1 \\
& - K_d |\vartheta| + N_2] - (R_s + \alpha_d) |I_d|^2 + K_{dd} |I_d|
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Agrupando en sus términos cuadráticos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 \leq & - \begin{bmatrix} |s(\dot{q})| \\ |\vartheta| \\ |\rho| \\ |I_d| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\alpha B}{2} & -\frac{\alpha A}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha A}{2} & -\frac{K_d A}{2B} & \frac{(R_s K_d / \Phi_M) - (\alpha \Phi_M / m_m)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(R_s K_d / \Phi_M) - (\alpha \Phi_M / m_m)}{2} & \frac{R_s + \alpha_q}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_s + \alpha_d}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |s(\dot{q})| \\ |\vartheta| \\ |\rho| \\ |I_d| \end{bmatrix} \\
& + |\dot{q}| \left[-\frac{\alpha B}{2} |s(\dot{q})| + N_2 + K_p N_1 + k' \right] + |\vartheta| \left[-\frac{AK_d}{4B} |\vartheta| + \frac{\alpha}{m_m} \frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}} [K_c |\dot{q}|^2 + k' + N_2 \right. \\
& \left. + K_p N_1] \right] - K_d \left(\frac{A}{4B} - \frac{\alpha}{m_m} \right) \vartheta^2 - \frac{R_s + \alpha_q}{4} \rho^2 - \frac{R_s + \alpha_d}{4} I_d^2 + |\rho| \left[K_{qq} + \frac{R_s}{\Phi_M} [K_p N_1 + N_2] \right. \\
& \left. - \frac{R_s + \alpha_q}{4} |\rho| \right] + |I_d| \left[K_{dd} - \frac{R_s + \alpha_d}{4} |I_d| \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Sea Q_3 la matriz cuadrada de (3.29), por tanto Q_3 es definida positiva si sus menores principales son positivos. Esto se logra si y solo si:

$$\boxed{\frac{\alpha B}{2} > 0} \tag{3.30}$$

$$\boxed{K_d > \alpha A} \tag{3.31}$$

y adicionalmente que α_q y α_d sean lo suficientemente grandes para asegurar que el tercer y cuarto menor principal de Q_3 sean positivos.

Finalmente para asegurar que \dot{V}_1 es definida negativa se condiciona a que:

$$|s(\dot{q})| > \frac{2(N_2 + K_p N_1 + k')}{\alpha B} \quad (3.32)$$

$$|\vartheta| > \frac{4B\alpha\left(\frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}}[K_c|\dot{q}|^2 + k' + N_2 + K_p N_1]\right)}{AK_d m_m} = f_2 \quad (3.33)$$

$$|I_d| > \frac{4K_{dd}}{R_s + \alpha_d} = I_{dM} \quad (3.34)$$

$$|\rho| > \frac{4(K_{qq} + \frac{R_s}{\Phi_M}[K_p N_1 + N_2])}{R_s + \alpha_q} = \rho_M \quad (3.35)$$

$$\frac{\alpha}{m_m} < \frac{A}{4B} \quad (3.36)$$

No obstante para asegurar que las condiciones de (3.32) - (3.35) se cumplan se realizará el siguiente análisis:

$$a_4 < \vartheta^2, \quad a_5 < \rho^2, \quad a_6 < I_d^2, \quad \dot{q}_M < |\dot{q}|, \quad \frac{a_1}{a_2} < |\dot{q}| \quad (3.37)$$

$$a_1 = \rho_M [K_{qq} + R_s(K_p N_1 + N_2)/\Phi_M] + I_{dM} K_{dd}$$

$$a_2 = \frac{\alpha B}{2} - K_p N_1 - k' - N_2$$

$$a_3 = \dot{q}_M [K_p N_1 + k' + N_2]$$

$$a_4 = \frac{a_1 + a_3}{K_d \left(\frac{A}{4B} - \frac{\alpha}{m_m} \right)}$$

$$a_5 = \frac{4(a_3 + f_2^2 K_d A / (4B) + I_{dM}^2 (R_s + \alpha_d) / 4)}{R_s + \alpha_q}$$

$$a_6 = \frac{4(a_3 + f_2^2 K_d A / (4B) + \rho_M^2 (R_s + \alpha_q) / 4)}{R_s + \alpha_d}$$

$$\dot{q}_M = \frac{\pi}{2} < |\dot{q}|$$

En las expresiones anteriores se consideró la ecuación (2.56) de acuerdo a (2.58) y (2.59).

Además, se utilizó $|s(\dot{q})| = 1$ en la expresión de a_2 la cual implica que $\dot{q}_M < |\dot{q}|$. Nótese que la ecuación (3.32) se puede reescribir como:

$$|\dot{q}| > f_1 = s^{-1}\left(\frac{2(N_2 + K_p N_1 + k')}{\alpha B}\right) \quad (3.38)$$

implicando que:

$$\boxed{1 > \frac{2(N_2 + K_p N_1 + k')}{\alpha B}} \quad (3.39)$$

donde $s^{-1}(\cdot)$ refiere a la función inversa de $s(\cdot)$.

Recordando a (2.58) y (2.59) como herramienta principal, se concluye que las condiciones suficientes para satisfacer los términos fuera de la matriz de (3.29) son:

$$\boxed{\frac{\alpha}{m_m} < \frac{A}{4B}} \quad (3.40)$$

y que el valor absoluto de cualquier variable \dot{q} , ϑ , ρ y I_d sea más grande que:

$$c_3 = \max\{f_1, f_2, \rho_M, I_{dM}, \sqrt{a_4}, \sqrt{a_5}, \sqrt{a_6}, \dot{q}_M, \frac{a_1}{a_2}\} \quad (3.41)$$

3.3.3 Cota última

Finalmente se escribe \dot{V}_1 como:

$$\dot{V}_1 \leq -\lambda_{\min}(Q_3)(s^2(\dot{q}) + \vartheta^2 + \rho^2 + I_d^2), \forall \|x_1\| > \sqrt{4}c_3 \quad (3.42)$$

donde $x_1 = (\dot{q}, \vartheta, \rho, I_d)$. De acuerdo a la ecuación (3.19) y al Teorema 5 se puede concluir que para cualquier condición inicial de $x_1(0) \in \mathbb{R}^4$ y para toda $(\tilde{q}, w, w_d, w_q) \in \mathbb{R}^4$ el estado $x_1(t)$ permanece acotado y existe una función β clase \mathcal{KL} y un $T \geq 0$ tal que satisface:

$$\|x_1(t)\| \leq \beta(\|x_1(t_0)\|, t - t_0), \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (3.43)$$

$$\|x_1(t)\| \leq b = \sqrt{4 \frac{c_2}{c_1} c_3}, \forall t \geq t_0 + T \quad (3.44)$$

donde b es llamada cota última de x_1 , acotando dichas variables a esa bola, siempre y cuando se cumpla que $K_d > 0$, $A > 0$, $B > 0$, $\alpha > 0$, $\frac{m_m K_d}{B} > \alpha^2$, $\frac{\alpha B}{2} > 0$, $K_d > \alpha A$, $\frac{\alpha}{m_m} < \frac{A}{4B}$, $1 > \frac{2(N_2 + K_p N_1 + k')}{\alpha B}$ y que el tercer y cuarto menor principal de la matriz Q_3 sean positivos.

3.4. Prueba de estabilidad asintótica global

A continuación se demuestra que para el sistema en lazo cerrado de la sección 3.2 existen constantes positivas $K_p, K_d, K_i, A, B, \alpha, \alpha_d, \alpha_q, \alpha_{di}, \alpha_{qi}$ tales que el origen es el único punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado y es globalmente asintóticamente estable.

Para ello se consideran los estados del sistema en lazo cerrado $x_2 = (\tilde{q}, \dot{q}, \vartheta, \rho, I_d, w - \frac{g(q_d)}{K_i}, w_d, w_q - \frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M \alpha_{qi}}) \in \mathbb{R}^8$ como:

$$\dot{\tilde{q}} = -\dot{q} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q} = \frac{1}{m(q)} [-c(q)\dot{q}^2 - g(q) + g(q_d) + n_p(L_d - L_q)I_d\rho + n_p(L_d - L_q)I_dI_q^* \\ + \Phi_M\rho + K_p h_1(\tilde{q}) - K_d\vartheta + h_2(K_i w) - g(q_d)] \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\dot{\vartheta} = -A\vartheta + B\dot{q} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = \frac{1}{L_q} [-(R_s + \alpha_q)\rho - n_p L_d \dot{q} I_d - \Phi_M \dot{q} - SAT_q(\alpha_{qi} w_q) - \frac{R_s}{\Phi_M} g(q_d) \\ - \frac{R_s}{\Phi_M} (K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w) - g(q_d))] \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\dot{I}_d = \frac{1}{L_d} [-(R_s + \alpha_d)I_d + n_p L_q \dot{q} \rho + n_p L_q \dot{q} I_q^* - SAT_d(\alpha_{di} w_d) + y] \quad (3.49)$$

$$\dot{w} = \alpha(h_1(\tilde{q}) + \vartheta) + \frac{R_s}{\Phi_M} \rho - \dot{q} \quad (3.50)$$

$$\dot{w}_q = \rho \quad (3.51)$$

$$\dot{w}_d = I_d \quad (3.52)$$

Remarcando que la dinámica es autónoma.

3.4.1 Punto de equilibrio

Considerando la ecuación (2.48) y la Definición 4 se puede concluir que $(\tilde{q}, \dot{q}, \vartheta, \rho, I_d, w - \frac{g(q_d)}{K_i}, w_d, w_q - \frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M \alpha_{qi}}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ es el único punto de equilibrio de la dinámica en lazo cerrado. Esto se puede verificar mediante el siguiente procedimiento:

$$\dot{\tilde{q}} = 0 = -\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = 0 \quad (3.53)$$

$$\dot{w}_q = 0 = \rho \quad \Rightarrow \quad \rho = 0 \quad (3.54)$$

$$\dot{w}_d = 0 = I_d \quad \Rightarrow \quad I_d = 0 \quad (3.55)$$

De acuerdo con (3.53) entonces:

$$\dot{\vartheta} = 0 = -A\vartheta + B\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 0 \quad (3.56)$$

Usando (3.53), (3.54) y (3.56) en (3.50):

$$\dot{w} = 0 = \alpha(h_1(\tilde{q}) + \vartheta) + \frac{R_s}{\Phi_M} \rho - \dot{q} \quad \Rightarrow \quad 0 = h_1(\tilde{q}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = 0 \quad (3.57)$$

Empleando (3.53) - (3.57) en (3.13), (3.9) y (3.10):

$$w = \int_0^t [\alpha(h_1(\tilde{q}) + \vartheta) + \frac{R_s}{\Phi_M} \rho] dt + \tilde{q} + w(0) \Rightarrow w = 0 \Leftrightarrow w(0) = 0 \quad (3.58)$$

$$w_q = \int_0^t \rho dt + w_q(0) \Rightarrow w_q = 0 \Leftrightarrow w_q(0) = 0 \quad (3.59)$$

$$w_d = \int_0^t I_d dt + w_d(0) \Rightarrow w_d = 0 \Leftrightarrow w_d(0) = 0 \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q} = \frac{1}{m(q)} [-c(q)\dot{q}^2 - g(q) + g(q_d) + n_p(L_d - L_q)I_d\rho + n_p(L_d - L_q)I_dI_q^* + \Phi_M\rho \\ + K_p h_1(\tilde{q}) - K_d\vartheta + h_2(K_i w) - g(q_d)] \Rightarrow \ddot{q} = -g(q) + h_2(K_i w) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Recordando que uno de los estados es $w - \frac{g(q_d)}{K_i}$; al utilizar (3.57) y (3.58) en (3.61) obtenemos:

$$\ddot{q} = -g(q_d) + h_2(-g(q_d)) \quad (3.62)$$

Además se sabe que $|g(q)| \leq k'$ y que $|h(x)| \leq |x|$; por tanto (3.62) se puede escribir como:

$$\ddot{q} = -k'_d + k'_d = 0 \quad (3.63)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (3.53) - (3.57) en (3.48):

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = \frac{1}{L_q} [-(R_s + \alpha_q)\rho - n_p L_d \dot{q} I_d - \Phi_M \dot{q} - SAT_q(\alpha_{qi} w_q) - \frac{R_s}{\Phi_M} g(q_d) \\ - \frac{R_s}{\Phi_M} (K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w) - g(q_d))] \Rightarrow \dot{\rho} = -SAT_q(\alpha_{qi} w_q) - \frac{R_s}{\Phi_M} h_2(K_i w) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Se debe recordar que uno de los estados es $w_q - \frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M \alpha_{qi}}$; al utilizar (3.57), (3.58), (3.59) en (3.64) obtenemos:

$$\dot{\rho} = -SAT_q\left(-\frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M}\right) - \frac{R_s}{\Phi_M} h_2(-g(q_d)) \quad (3.65)$$

Retomando que $|g(q)| \leq k'$, $|h(x)| \leq |x|$ y $|SAT(x)| \leq |x|$ concluimos que la ecuación (3.65) se puede escribir como:

$$\dot{\rho} = \frac{R_s}{\Phi_M} k'_d - \frac{R_s}{\Phi_M} k'_d = 0 \quad (3.66)$$

Utilizando (3.53) - (3.57) y reduciendo:

$$\begin{aligned} \dot{I}_d = \frac{1}{L_d} [-(R_s + \alpha_d)I_d + n_p L_q \dot{q} \rho + n_p L_q \dot{q} I_q^* - SAT_d(\alpha_{di} w_d) + y] \\ \Rightarrow \dot{I}_d = -SAT_d(\alpha_{di} w_d) + y \end{aligned} \quad (3.67)$$

donde:

$$y = -n_p L_d I_q^* \dot{q} + \frac{\alpha}{m(q)} \vartheta \frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}} n_p (L_d - L_q) I_q \Rightarrow y = 0 \quad (3.68)$$

De esta forma se reduce la ecuación (3.67) a:

$$\dot{I}_d = -SAT_d(\alpha_{di} w_d) \quad (3.69)$$

Finalmente al utilizar (3.60) se obtiene que:

$$\dot{I}_d = -SAT_d(0) = 0 \quad (3.70)$$

Concluyendo que $x_2 = \mathbf{0}$ es el único punto de equilibrio.

3.4.2 Función de Lyapunov

Se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$\begin{aligned}
 V_2(x_2) = & \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 - \alpha m(q)\dot{q}h_1(\tilde{q}) + K_p \int_0^{\tilde{q}} h_1(r) dr + U(q) - U(q_d) + \tilde{q}g(q_d) - \alpha m(q)\vartheta\dot{q} \\
 & + \frac{1}{2B}K_d\vartheta^2 + \int_{\frac{g(q_d)}{K_i}}^w (h_2(K_i r) - g(q_d)) dr + \int_{\frac{-R_s g(q_d)}{\Phi_M \alpha_{qi}}}^{w_q} (SAT_q(\alpha_{qi} r) + \frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M}) dr \\
 & + \int_0^{w_d} SAT_d(\alpha_{di} r) dr + \frac{L_q}{2}\rho^2 + \frac{L_d}{2}I_d^2
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Nótese que algunos términos tomados de V_2 se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 - \alpha m(q)\dot{q}h_1(\tilde{q}) - \alpha m(q)\vartheta\dot{q} = & \frac{1}{4}m(q)(\dot{q} - 2\alpha h_1(\tilde{q})) - \alpha^2 m(q)h_1(\tilde{q})^2 \\
 & + \frac{1}{4}m(q)(\dot{q} - 2\alpha\vartheta) - \alpha^2 m(q)\vartheta^2
 \end{aligned}$$

También se debe considerar que $K_p = K_{p1} + K_{p2}$ con las condiciones que $K_{p1} > 0$ y $K_{p2} > 0$, como lo proponen Hernández-Guzmán et al. (2013).

Finalmente V_2 se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 V_2(x_2) = & \frac{1}{4}m(q)(\dot{q} - 2\alpha h_1(\tilde{q}))^2 - \alpha^2 m(q)h_1(\tilde{q})^2 + K_{p1} \int_0^{\tilde{q}} h_1(r) dr + K_{p2} \int_0^{\tilde{q}} h_1(r) dr + \\
 & U(q) - U(q_d) + \tilde{q}g(q_d) + \frac{1}{4}m(q)(\dot{q} - 2\alpha\vartheta)^2 - \alpha^2 m(q)\vartheta^2 + \frac{1}{2B}K_d\vartheta^2 + \frac{L_q}{2}\rho^2 + \frac{L_d}{2}I_d^2 \\
 & + \int_{\frac{g(q_d)}{K_i}}^w (h_2(K_i r) - g(q_d)) dr + \int_{\frac{-R_s g(q_d)}{\Phi_M \alpha_{qi}}}^{w_q} (SAT_q(\alpha_{qi} r) + \frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M}) dr + \int_0^{w_d} SAT_d(\alpha_{di} r) dr
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Se usa el procedimiento de Hernández-Guzmán et al. (2013) para encontrar que V_2 es definida positiva y radialmente desacotada si se cumple que:

$$\boxed{\frac{K_d}{2B} > \alpha^2 m_m} \tag{3.73}$$

$$\boxed{K_{p2} > K_g > 0 \quad \forall |\tilde{q}| \leq L_1} \tag{3.74}$$

Utilizando la propiedad (2.48), la Definición 4 y basándose en lo propuesto por Zavala-Rio y Santibañez (2007) entonces:

$$\boxed{\frac{2k'}{K_{p2}} < L_1 < N_1 \quad \forall |\tilde{q}| > L_1} \quad (3.75)$$

Más aún, si $\alpha^* > \alpha > 0$ entonces:

$$\boxed{G(\tilde{q}) > \alpha^{*2} m_M H(\tilde{q}) \quad \forall \tilde{q} \in \mathbb{R}} \quad (3.76)$$

donde:

$$G(\tilde{q}) = \begin{cases} \frac{K_{p1}}{2} \tilde{q}^2, & |\tilde{q}| \leq L_1 \\ \frac{K_{p1}}{2} L_1^2 + K_{p1} L_1 (\tilde{q} - L_1), & \tilde{q} > L_1 \\ \frac{K_{p1}}{2} L_1^2 - K_{p1} L_1 (\tilde{q} + L_1), & \tilde{q} < -L_1 \end{cases} \quad (3.77)$$

$$H(\tilde{q}) = \begin{cases} \tilde{q}^2, & |\tilde{q}| \leq N_1 \\ N_1^2, & |\tilde{q}| > N_1 \end{cases} \quad (3.78)$$

La condición (3.76) se entiende mejor visualmente en la Figura 3.2 en la cual se aprecia que cuando \tilde{q} crece, $G(\tilde{q})$ crece, mientras que $H(\tilde{q})$ llega a un máximo en $\lambda_M N_1^2$, donde $\lambda_M = \alpha^{*2} m_M$.

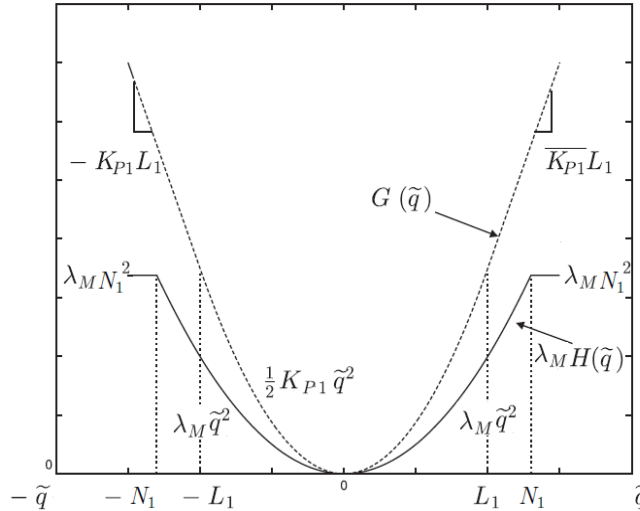


Figura 3.2: Ejemplo de $G(\tilde{q})$ y $H(\tilde{q})$ (modificada de Hernández-Guzmán et al. (2013)).

3.4.3 Derivada de la función de Lyapunov

Una vez cumplidas las condiciones anteriores en donde la función de Lyapunov V_2 es definida positiva y radialmente desacotada se deriva temporalmente dando como resultado:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x_2) = & m(q)\dot{q}\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{m}(q)\dot{q}^2(\dot{q}) + \alpha m(q)\dot{q}^2 \frac{dh_1(\tilde{q})}{d\tilde{q}} - \alpha m(q)h_1(\tilde{q})\ddot{q} - \alpha h_1(\tilde{q})\dot{q}^2\dot{m}(q) \\
& - K_p h_1(\tilde{q})\dot{q} + \frac{dU(q)}{dq}\dot{q} - g(q_d)\dot{q} - \alpha \dot{m}(q)\vartheta\dot{q}^2 - \alpha m(q)\vartheta\dot{q}\alpha m(q)\vartheta\ddot{q} + \frac{K_d}{B}\vartheta\dot{\vartheta} \\
& + [h_2(K_i w) - h_2(g(q_d))] * [\alpha h_1(\tilde{q}) + \alpha\vartheta + \frac{R_s}{\Phi_M}\rho - \dot{q}] + \\
& [SAT_q(\alpha_{q_i} w_q) - SAT_q(-\frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M})]\rho + SAT_d(\alpha_{d_i} w_d)I_d + L_q \rho \dot{\rho} + L_d I_d \dot{I}_d
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Sustituyendo los estados x_2 , utilizando (2.47) y reduciendo términos, se puede escribir V_2 como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x_2) = & \alpha \frac{dh_1(\tilde{q})}{d\tilde{q}} m(q)\dot{q}^2 - \alpha h_1(\tilde{q})c(q)\dot{q}^2 - \alpha h_1(\tilde{q})(g(q_d) - g(q)) - \alpha h_1(\tilde{q})n_p(L_d - L_q)I_d \rho \\
& - \alpha h_1(\tilde{q})n_p(L_d - L_q)I_d \frac{(K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w))}{\Phi_M} - \alpha \Phi_M h_1(\tilde{q})\rho - \alpha K_p h_1(\tilde{q})^2 \\
& + \alpha K_d h_1(\tilde{q})\vartheta - \frac{K_d A}{B}\vartheta^2 + \alpha A m(q)\vartheta\dot{q} - \alpha B m(q)\dot{q}^2 - \alpha c(q)\vartheta\dot{q}^2 - \alpha\vartheta(g(q_d) - g(q)) \\
& - \alpha \Phi_M \vartheta \rho - \alpha K_p \vartheta h_1(\tilde{q}) + \alpha K_d \vartheta^2 - (R_s + \alpha_q)\rho^2 - (R_s + \alpha_d)I_d^2 - \alpha n_p(L_d - L_q)I_d \vartheta \rho \\
& - \alpha n_p(L_d - L_q)I_d \vartheta \frac{(K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w))}{\Phi_M} - \frac{R_s K_p}{\Phi_M} h_1(\tilde{q})\rho + \frac{R_s K_d}{\Phi_M} \vartheta \rho \\
& + \frac{\alpha n_p(L_d - L_q)}{m(q)} \frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}} I_d \vartheta \rho + \alpha n_p(L_d - L_q) \frac{ds(\dot{q})}{d\dot{q}} I_d \vartheta \frac{(K_p h_1(\tilde{q}) - K_d \vartheta + h_2(K_i w))}{\Phi_M m(q)}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Las ecuaciones (3.45) - (3.52) son localmente Lipschitz en \mathbb{R}^8 . Nótese que \dot{q} , ϑ , ρ , I_d han sido acotados en la subsección 3.3.3 y dichas variables están presentes en las ecuaciones (3.45) - (3.52) e involucradas en términos de orden superior. Por lo tanto, la propiedad Lipschitz asegura que existe una única solución en x_2 para todo $t \geq 0$. Esto significa que x_2 no tiene un tiempo de escape finito. Así, de acuerdo a la subsección 3.3.3, para cualquier estado inicial de x_2 existe $T > 0$ tal que (3.44) permanece, E.g. $|\vartheta| \leq b, \forall t \geq t_0 + T$.

Usando las Definiciones 4 - 6, (2.45) - (2.49) y (3.44) en donde $|\vartheta| \leq b$. \dot{V}_2 se puede

acotar como:

$$\dot{V}_2(x_2) \leq -x_{2a} P x_{2a}^T \quad (3.81)$$

donde:

$$x_{2a} = [|h(\tilde{q})| |\dot{q}| |\vartheta| |\rho| |I_d|],$$

y la matriz P es definida como:

$$P_{1,1} = \alpha(K_p - K_h)$$

$$P_{2,2} = \alpha(Bm_m - m_M - N_1K_c - K_cb)$$

$$P_{3,3} = K_d\left(\frac{A}{B} - \alpha\right)$$

$$P_{4,4} = R_s + \alpha_q$$

$$P_{5,5} = R_s + \alpha_d$$

$$P_{1,3} = P_{3,1} = -\frac{\alpha}{2}(K_d + K_h + K_p)$$

$$P_{1,4} = P_{4,1} = -\frac{1}{2}\left(\alpha\Phi_M + \frac{R_sK_p}{\Phi_M}\right)$$

$$P_{1,5} = P_{5,1} = -\frac{\alpha n_p |L_d - L_q| (K_p N_1 + N_2)}{2\Phi_M}$$

$$P_{2,3} = P_{3,2} = -\frac{1}{2}\alpha A m_M$$

$$P_{3,4} = P_{4,3} = -\frac{1}{2}\left(\alpha\Phi_M + \frac{R_sK_d}{\Phi_M}\right)$$

$$P_{3,5} = P_{5,3} = -\frac{\alpha n_p |L_d - L_q| N_2}{2m_m \Phi_M} - \frac{\alpha n_p |L_d - L_q|}{2\Phi_M} \left(N_1 K_d + N_1 K_p + K_d b + N_2 + \frac{(K_p N_1 + K_d b)}{m_m} \right)$$

$$P_{4,5} = P_{5,4} = -\frac{1}{2}\alpha n_p |L_d - L_q| \left(N_1 + b + \frac{b}{m_m} \right)$$

$$P_{1,2} = P_{2,1} = P_{2,4} = P_{4,2} = P_{2,5} = P_{5,2} = 0$$

La matriz P es definida positiva si y solo si sus cinco menores principales son positivos. Para cumplir con esto es necesario que α sea positiva y suficientemente pequeña; además se requiere que K_p , B , K_d , α_q y α_d tengan valores suficientemente grandes. De esta manera se puede concluir que $\dot{V}_2 \leq 0$, $\forall t \geq t_0 + T$.

3.4.4 Principio de invariancia de LaSalle

Gracias al análisis de la subsección 3.4.3 y al Teorema 3, se sabe que existe un conjunto $S = \{x_2 \in D | \dot{V}(x_2) = 0\}$ tal que ninguna solución puede permanecer idénticamente en S más que $x_2(t) \equiv 0$. Es por ello que al considerar las variables $h(\tilde{q}) = \dot{q} = \vartheta = \rho =$

$I_d = 0$ se muestra que:

$$\dot{\tilde{q}} = 0 \quad (3.82)$$

$$\dot{\vartheta} = 0 \quad (3.83)$$

$$\dot{w} = 0 \Leftrightarrow h_1(0) = 0 \Rightarrow \tilde{q} = 0 \quad (3.84)$$

$$\dot{w}_q = 0 \quad (3.85)$$

$$\dot{w}_d = 0 \quad (3.86)$$

Reduciendo:

$$\ddot{q} = \frac{1}{m(q)} [-g(q_d) + h_2(K_i w)] \quad (3.87)$$

Y aplicando (3.58):

$$\ddot{q} = \frac{1}{m(q)} [-\cancel{k'_d} + \cancel{k'_d}] \Rightarrow \ddot{q} = 0$$

Reduciendo:

$$\dot{I}_d = -SAT_d(\alpha_{di} w_d) \quad (3.88)$$

Y aplicando (3.60):

$$\dot{I}_d = \frac{1}{L_d} [-SAT_d(\alpha_{di} w_d)] \Rightarrow \dot{I}_d = 0 \quad (3.89)$$

Reduciendo:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{L_q} [-SAT_q(\alpha_{qi} w_q) - \frac{R_s}{\Phi_M} h_2(K_i w)] \quad (3.90)$$

Y aplicando (3.59):

$$\dot{\rho} = \frac{1}{L_q} [\frac{\cancel{R_s}}{\cancel{\Phi_M}} \cancel{k'_d} - \frac{\cancel{R_s}}{\cancel{\Phi_M}} \cancel{k'_d}] \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \quad (3.91)$$

Concluyendo que es localmente asintóticamente estable.

Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (3.43), para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ solo x_1 se asegura que se acercan al origen, mientras que \tilde{q} , $w - \frac{g(q_d)}{K_i}$, $w_q - \frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M \alpha_{qi}}$, w_d pueden crecer. Sin embargo, se puede considerar que las últimas variables son definidas como integrales de x_1 para mostrar que tendrán un valor máximo las cuales están acotadas por:

$$|\tilde{q}(t_0 + T)| \leq \beta(\|x_1(t_0)\|, 0)T + |\tilde{q}(t_0)| \quad (3.92)$$

$$|w(t_0 + T) - \frac{g(q_d)}{K_i}| \leq \alpha\beta(\|x_1(t_0)\|, 0)\left(\frac{T^2}{2} + |\tilde{q}(t_0)|T\right) + c_4\sqrt{2}\beta(\|x_1(t_0)\|, 0)T + \beta(\|x_1(t_0)\|, T) + |w(t_0) - \frac{g(q_d)}{K_i}| \quad (3.93)$$

$$|w_d(t_0 + T)| \leq \beta(\|x_1(t_0)\|, 0)T + |w_d(t_0)| \quad (3.94)$$

$$|w_q(t_0 + T) - \frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M \alpha_{qi}}| \leq \beta(\|x_1(t_0)\|, 0)T + |w_q(t_0) - \frac{R_s g(q_d)}{\Phi_M \alpha_{qi}}| \quad (3.95)$$

donde:

$$c_4 = \max\left\{\alpha, \frac{R_s}{\Phi_M}\right\}$$

Cabe mencionar que al saber que x_1 está acotada por el análisis presentado en la subsección 3.3.3, que $\dot{V}_2 \leq 0, \forall t \geq t_0 + T$ presentado en la subsección 3.4.4 y por las ecuaciones (3.92) - (3.95) se puede concluir que dada una $\epsilon > 0$ siempre existe una $\delta(\epsilon) > 0$, dependiendo solo de ϵ , tal que $\|x_2(t_0)\| < \delta$ implicando que $\|x_2(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$. Significando que la dinámica autónoma de las ecuaciones (3.45) - (3.52) es estable. Por lo tanto, al ser localmente asintóticamente estable por $t \geq t_0 + T$, hace al origen atractivo para cualquier condición inicial $x_2(t_0)$. Concluyendo que el origen es globalmente asintóticamente estable.

De tal manera las condiciones para asegurar GAS, representan explícitamente las reglas de sintonía dadas por las ecuaciones en recuadro mostradas en las secciones 3.3 y 3.4.

Capítulo 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se evaluó y simuló el sistema Euler-Lagrange de un grado de libertad con parámetros obtenidos de Tomei et al. (2009) cambiando la masa de $m_0 = 16[Kg]$ a una masa de $5[Kg]$, esto debido al par máximo que soporta el motor DM1015B. También, se evaluó y simuló el sistema en lazo cerrado considerando las ecuaciones (3.45) - (3.52) en donde es importante mencionar que dichas ecuaciones incluyen la dinámica eléctrica del PMSM, la dinámica mecánica del mecanismo Euler-Lagrange de un grado de libertad, visto en la Figura 2.1, el controlador FOC y el controlador PID de posición sin medición de velocidad; esta simulación se divide en dos subsecciones para su análisis independiente. En donde en la subsección 4.1.2 todos los valores propuestos cumplen con las condiciones de sintonía dadas por las ecuaciones (3.25), (3.30), (3.31), además de que α_q y α_d sean lo suficientemente grandes para asegurar que el tercer y cuarto menor principal de Q_3 sea positivo, (3.40), (3.73), (3.74), (3.75), (3.76) y que los cinco menores principales de la matriz P deben ser positivos. Sin embargo, estas condiciones son muy restrictivas haciendo que la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado sea lenta. Es por ello que en la subsección 4.1.3 se realiza un ejemplo de simulación en donde las condiciones de sintonía no son respetadas y se logra mejorar el rendimiento del sistema en lazo cerrado.

4.1. Simulaciones

Para las simulaciones se utilizó el programa *MATLAB* y su herramienta *Simulink* versión R2014a en una computadora con sistema operativo Windows 7 de 64 bits. La computadora que se utilizó fue una Macbook Pro (2011) con un procesador Intel Core i5 de doble núcleo a $2.5 [GHz]$ con Turbo Boost de hasta $3.1 [GHz]$, $8 [GB]$ de memoria RAM DDR3 a

1.600 [MHz] y una unidad de memoria sólida de 256 [GB].

4.1.1 Mecanismo Euler-Lagrange de un grado de libertad

En esta subsección se retoma la figura del mecanismo Euler-Lagrange de un grado de libertad mostrado en el capítulo 2 (Figura 4.1).

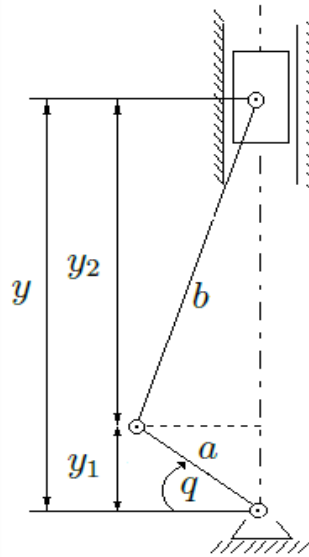


Figura 4.1: Mecanismo pistón-biela-manivela.

Además, los parámetros mostrados en la Tabla 4.1 fueron obtenidos de Tomei et al. (2009), a excepción de la masa m_0 .

Tabla 4.1: Parámetros de simulación del mecanismo Euler-Lagrange de un grado de libertad.

Parámetros	Descripción	Valor
m_0	Masa concentrada	5 [Kg]
a	Longitud del eslabón 1	0.25 [m]
b	Longitud del eslabón 2	0.5 [m]
J_0	Momento inercial	0.005 [Kg m^2]
g	Gravedad	9.81 [m/s 2]

A partir de los valores de la Tabla 4.1 y la dinámica del mecanismo de la Figura 4.1 se realizó un diagrama de bloques mostrado en la Figura 4.2; del cual el código del bloque llamado *Función 1* se muestra en el apéndice A.1. Este bloque representa la dinámica del mecanismo Euler-Lagrange de un grado de libertad.

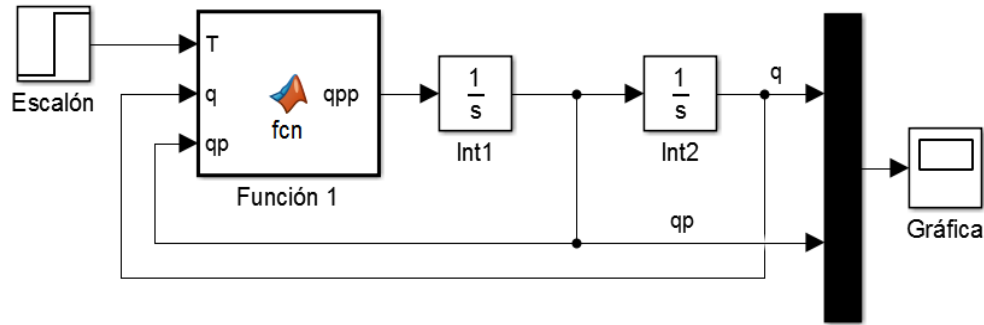


Figura 4.2: Diagrama a bloques del mecanismo pistón-biela-manivela realizado en *Simulink*.

La Figura 4.3 muestra el resultado cuando se aplica un par de $\tau = 0 [Nm]$ con condiciones iniciales de $q = 0 [rad]$ y $\dot{q} = 0 [rad/s]$. Se puede observar que la posición angular q en el primer instante de tiempo disminuye y presenta oscilaciones ya que de acuerdo a la Figura 4.1, el mecanismo por el peso tenderá a irse hacia abajo por la gravedad y posteriormente mantenerse en $q = -1,5708[rad]$ o $-90[^\circ]$.

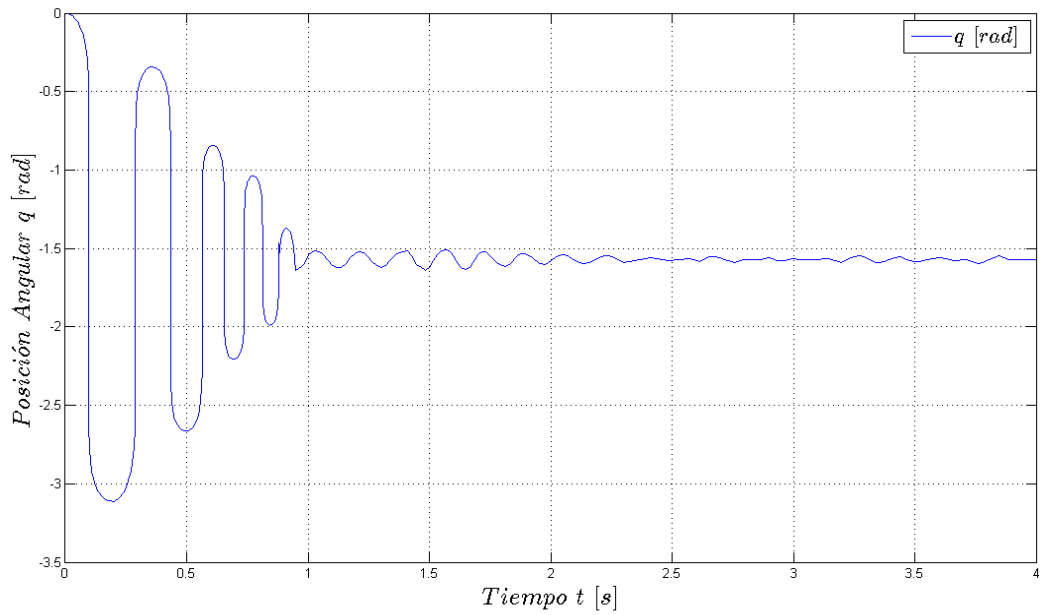


Figura 4.3: Gráfica de posición del mecanismo.

En la Figura 4.4 se muestra el desplazamiento del mecanismo, inicialmente $y = 0.433 [m]$, correspondiendo a $y = \sqrt{b^2 - a^2}$ de la ecuación (2.6) y finalmente manteniéndose en su condición final $y = 0.25 [m]$ como se observa en la Figura 4.5.

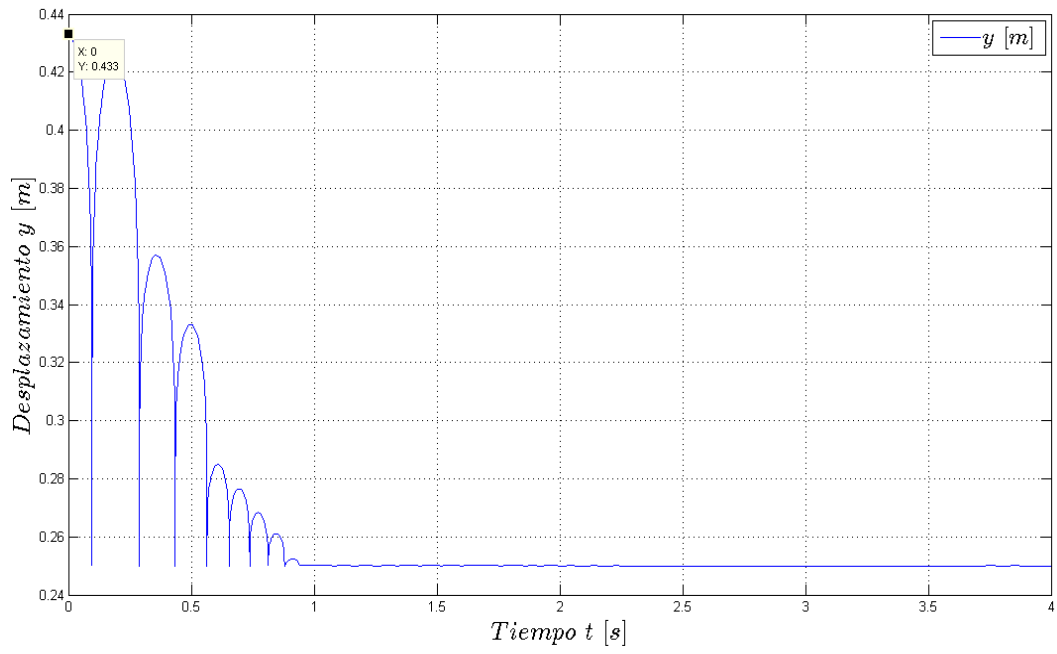


Figura 4.4: Gráfica del desplazamiento del mecanismo.

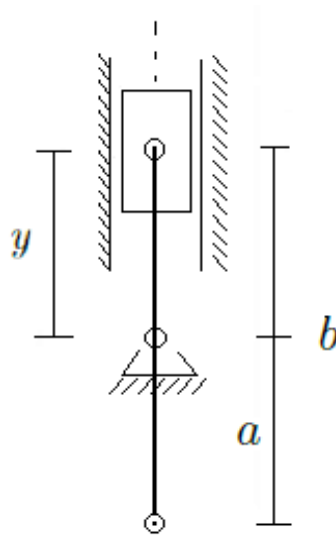


Figura 4.5: Mecanismo en su condición final.

4.1.2 Parámetros que cumplen con las condiciones de estabilidad

En esta subsección se deben considerar los parámetros propuestos para el sistema en lazo cerrado. Primero que nada se consideran los parámetros del mecanismo Euler-Lagrange de la Tabla 4.1, y después se consideran los parámetros del motor PMSM tomados de Campa et al. (2005) que se pueden observar en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Parámetros del DM1015B.

Parámetros	Descripción	Valor
N_p	Número de pares de polos	120
L_d	Inductancia en la fase d	0.00636 [H]
L_q	Inductancia en la fase q	0.00672 [H]
R_s	Resistencia del devanado del estator	1.9 [Ω]
Φ_M	Constante de par	1.5579 [Wb]

También, es importante mencionar que en la Tabla 4.3 se consideran algunas características de un motor de la serie DM, modelo DM1015B fabricado por la empresa DYNASERV, que serán útiles para algunas conclusiones.

Tabla 4.3: Características del DM1015B.

Parámetros	Valor
Par máximo	15 [Nm]
Voltaje por fase	115 [VAC]
Corriente máxima	20 [A]

A continuación en la Figura 4.6 se muestra el esquema de control a bloques para el desarrollo de las simulaciones.

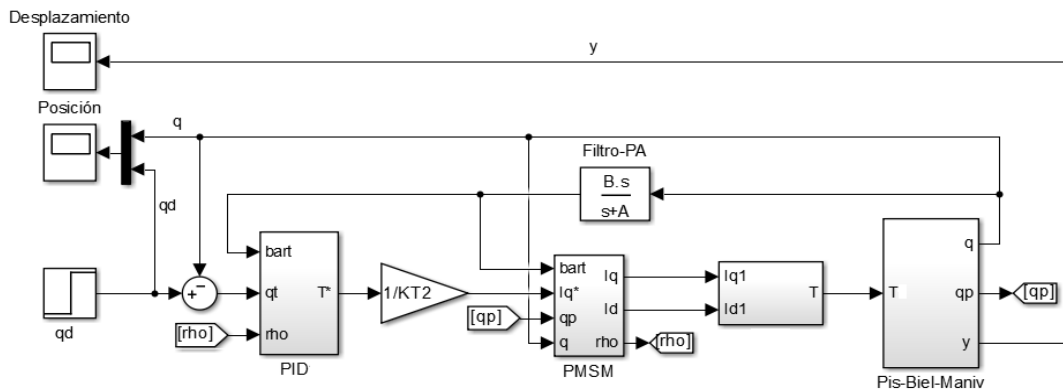


Figura 4.6: Esquema del control propuesto realizado en *Simulink*.

Aunado a este esquema de control a bloques en *Simulink*, se realizó un programa que cumple con todas las condiciones de estabilidad, mostrado en el apéndice A.2. En esta simulación se considero la posición deseada $q_d = \frac{\pi}{10} [rad]$ ya que en su posición inicial, el mecanismo tiende a irse para abajo realizando un esfuerzo de par en el primer instante de tiempo de la simulación para llegar a la posición propuesta, siendo un caso crítico.

Finalmente las ganancias y constantes que cumplen con las condiciones de estabilidad se pueden observar en la Tabla 4.4 mostrada a continuación.

Tabla 4.4: Ganancias y constantes que cumplen con las reglas de sintonía.

Parámetros	Descripción	Valor
Ganancias del controlador PID		
K_p	Ganancia proporcional	48.4786
K_i	Ganancia integral	8.9595
K_d	Ganancia derivativa	2.4954×10^3
Ganancias del controlador FOC		
α_q	Ganancia proporcional en fase q	9.8538×10^4
α_{qi}	Ganancia integral en fase q	5000
α_d	Ganancia proporcional en fase d	968.2143
α_{di}	Ganancia integral en fase d	1500
Parámetros de funciones de saturación		
N_1	Constante de función de saturación $h_1(x)$	1.4750
L_1	Constante de función de saturación $h_1(x)$	0.7375
N_2	Constante de función de saturación $h_2(x)$	35.8379
L_2	Constante de función de saturación $h_2(x)$	17.9189
K_{dd}	Máximo de función de saturación $SAT_d(x)$	61.3791
K_{qq}	Máximo de función de saturación $SAT_q(x)$	628.6431
Constantes varias		
A	Constante del Filtro	3.4867×10^5
B	Constante del Filtro	3.2400×10^5
α	Constante positivas	8.5148×10^{-4}
k'	Constante positiva del vector de gravedad	12.2625
K_g	Constante positiva del vector de gravedad	12.7238
K_c	Constante positiva de la fuerza centrífuga	0.5271
m_m	Mínimo del término inercial	0.0050
m_M	Máximo del término inercial	0.3175
b	Cota última	34.7302

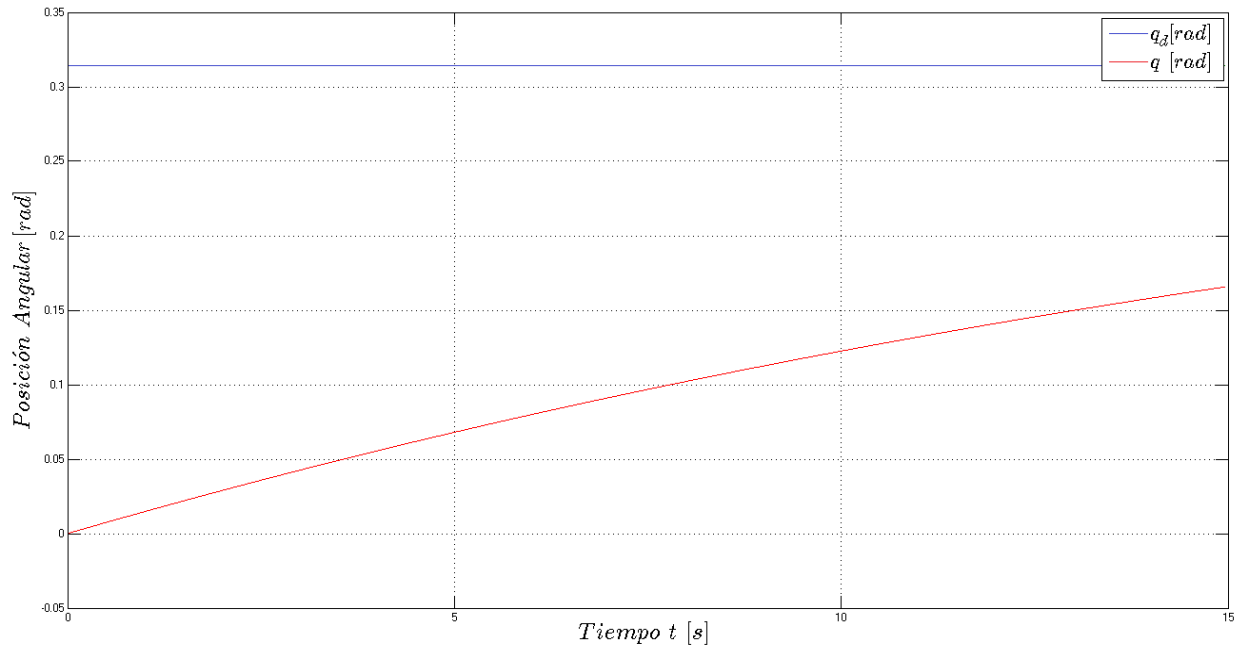


Figura 4.7: Gráfica de posición que cumple las reglas de sintonía.

Es importante identificar que a pesar de haber transcurrido $15[s]$ de simulación en la Figura 4.7, se puede observar una tendencia lenta de la posición del mecanismo hacia la posición deseada.

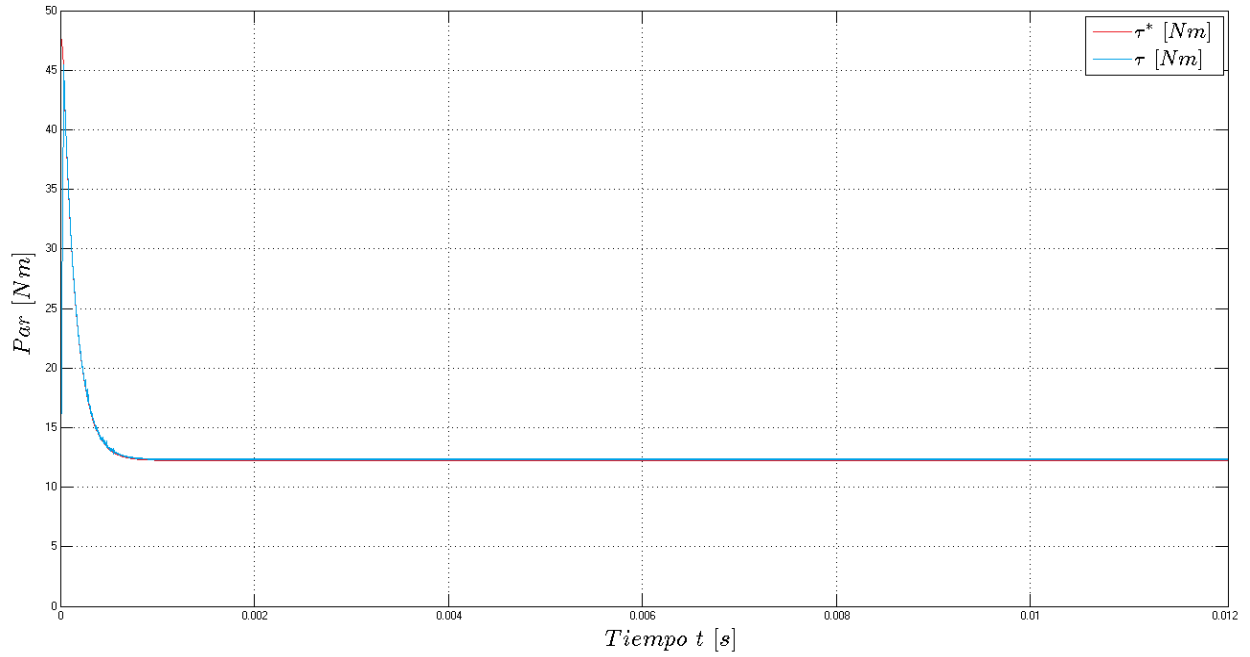


Figura 4.8: Gráfica de par que cumple las reglas de sintonía.

Además, se puede notar en la Figura 4.8 que el par τ y τ^* superan por mucho el valor máximo de par del motor mostrado en la Tabla 4.3, a pesar de este pico de par dicha respuesta se estabiliza en un valor menor a los 15 $[Nm]$ en un intervalo de tiempo pequeño.

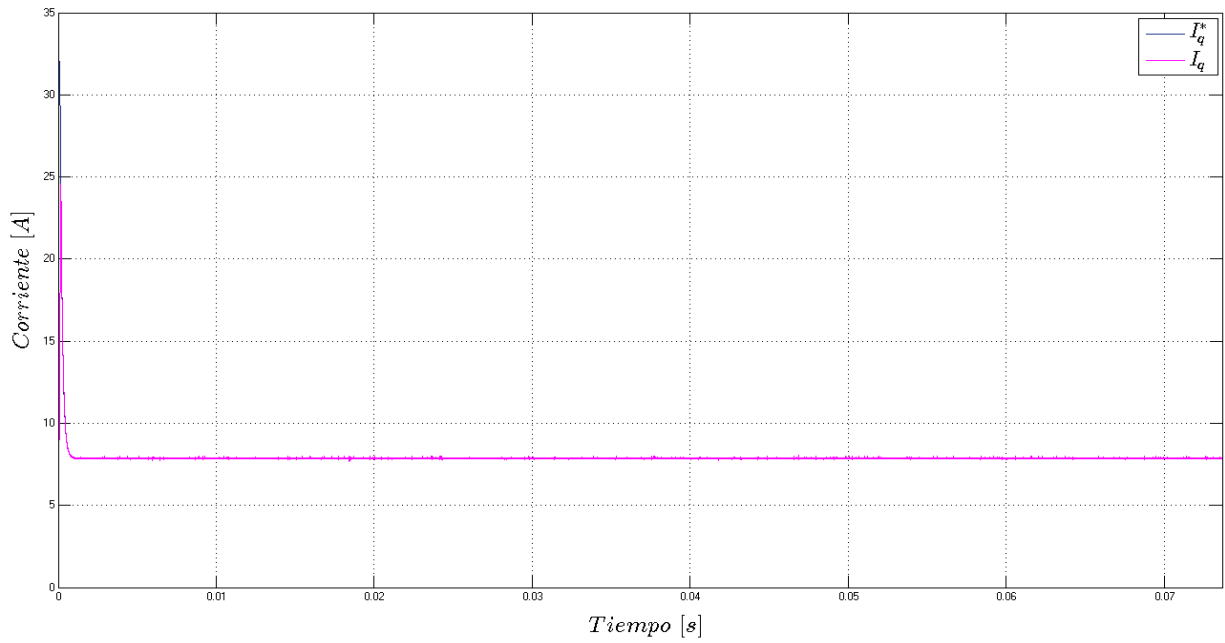


Figura 4.9: Gráfica de corriente en la fase q que cumple las reglas de sintonía.

En la Figura 4.9 se puede observar que I_q e I_q^* alcanzan un pico no superior a los $33[A]$.

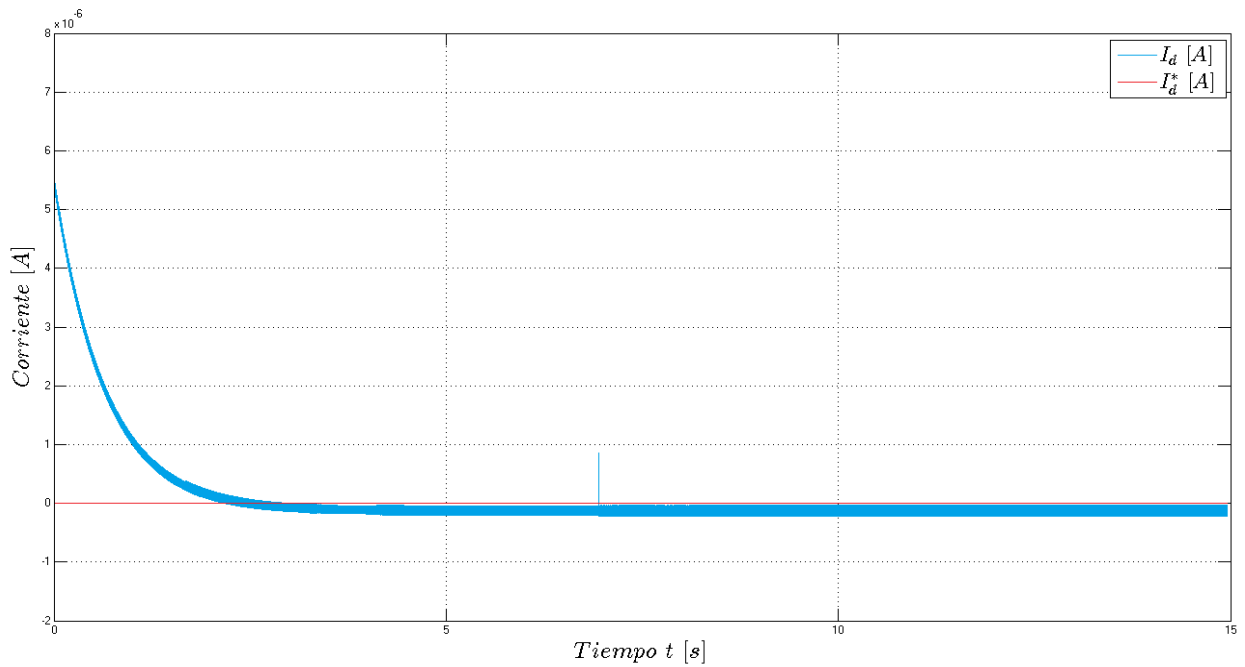


Figura 4.10: Gráfica de corriente en la fase d que cumple las reglas de sintonía.

En la Figura 4.10 cuando el tiempo transcurre se observa que la I_d se acerca a su valor deseado.

4.1.3 Parámetros que no cumplen con las condiciones de estabilidad

En esta subsección se proponen ganancias que no cumplen con las reglas de sintonía con la finalidad de mejorar la respuesta del sistema en lazo cerrado (véase la Tabla 4.5). También se considera la posición deseada como $q_d = \frac{\pi}{10} [rad]$.

Tabla 4.5: Ganancias que no cumplen con las reglas de sintonía.

Parámetros	Descripción	Valor
Ganancias del controlador PID		
K_p	Ganancia proporcional	0.82
K_i	Ganancia integral	7.4
K_d	Ganancia derivativa	0.85
Ganancias del controlador FOC		
α_q	Ganancia proporcional en fase q	10.0
α_{qi}	Ganancia integral en fase q	1159.0
α_d	Ganancia proporcional en fase d	530.0
α_{di}	Ganancia integral en fase d	3000.0
Constantes varias		
A	Constante del Filtro	250
B	Constante del Filtro	3000
α	Constante positiva	68
Parámetros de funciones de saturación		
N_1	Constante de función de saturación $h_1(x)$	6
N_2	Constante de función de saturación $h_2(x)$	13.95
K_{dd}	Máximo de función de saturación $SAT_d(x)$	90
K_{qq}	Máximo de función de saturación $SAT_q(x)$	90

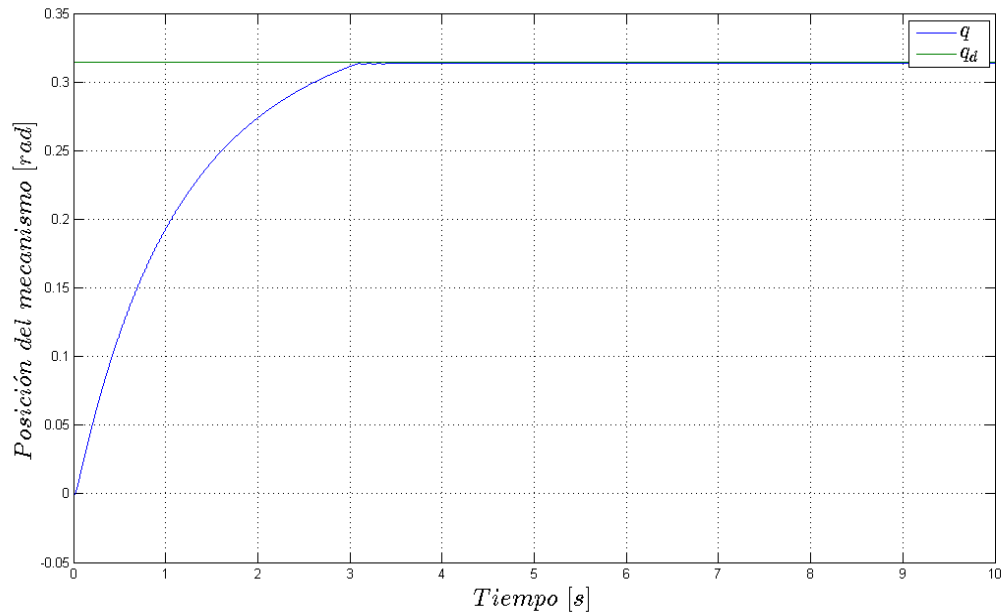


Figura 4.11: Gráfica de posición que no cumple con las reglas de sintonía.

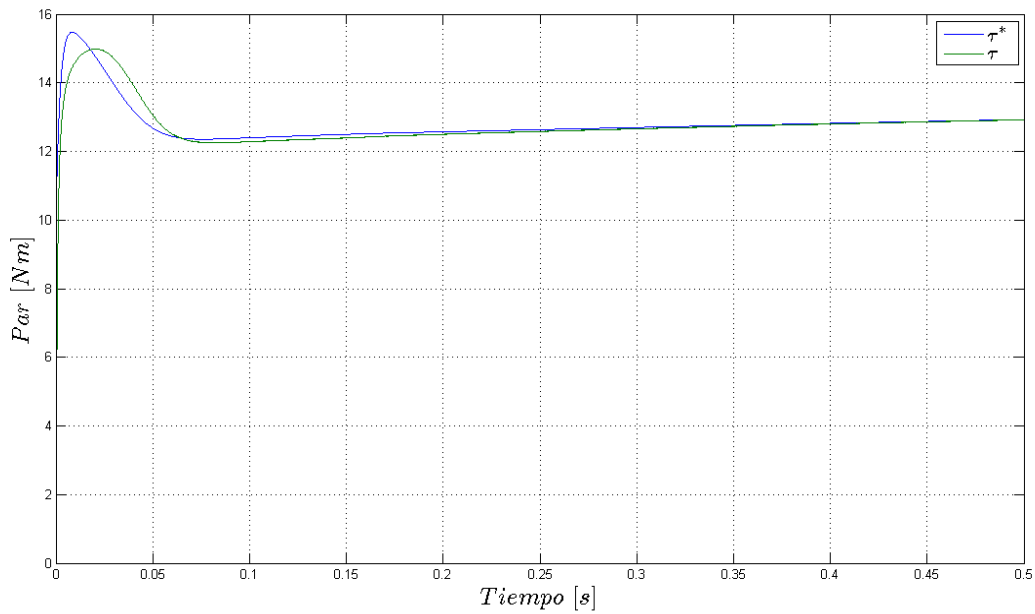


Figura 4.12: Gráfica de par que no cumple con las reglas de sintonía.

En la Figura 4.11 se puede observar como llega al valor deseado aproximadamente en 3.5 [s]. También en la Figura 4.12 es importante mencionar que no supera el par máximo

del motor reportado en la hoja de datos (véase la Tabla 4.3).

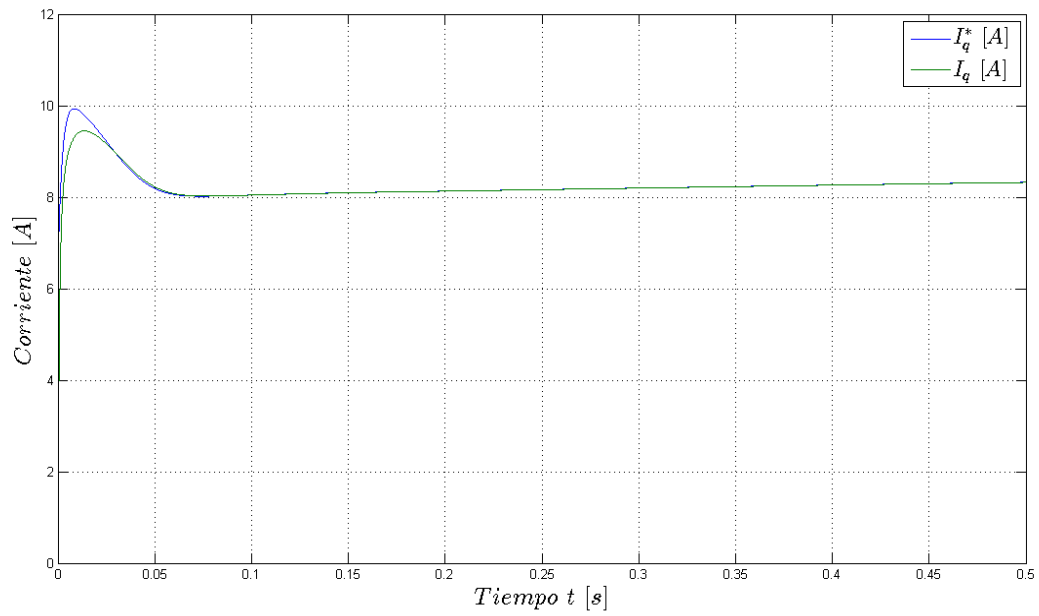


Figura 4.13: Gráfica de corriente en la fase q que no cumple con las reglas de sintonía.

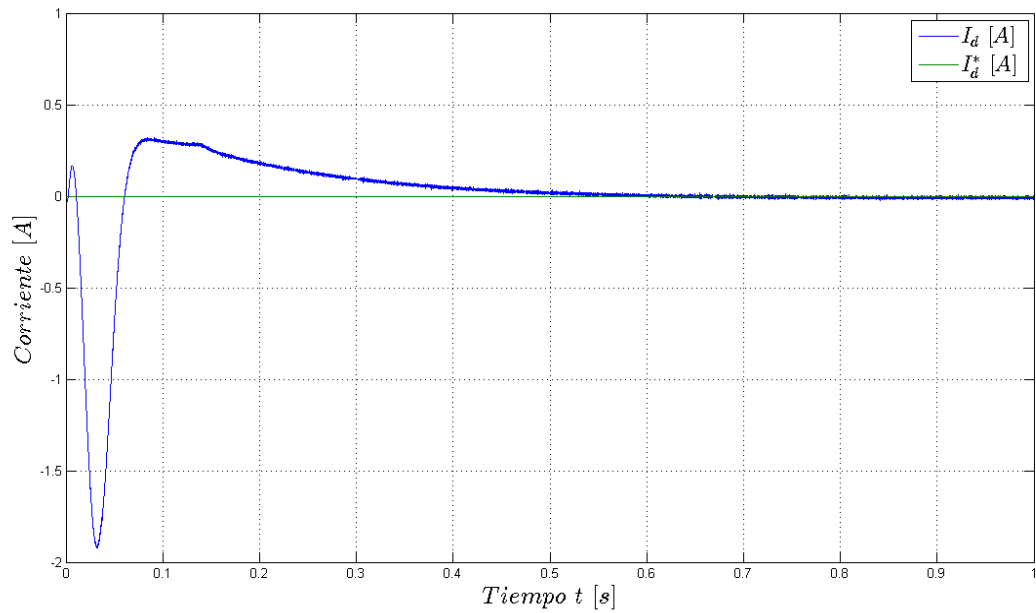


Figura 4.14: Gráfica de corriente en la fase d que no cumple con las reglas de sintonía.

Se puede observar en la Figura 4.13 como I_q no supera los $10[A]$ estando por debajo de los $20[A]$ por fase mostrado en la Tabla 4.3 y también en la Figura 4.14 se presenta un pico negativo de $1.8 [A]$ en I_d sin embargo, pasando los $0.7 [s]$ se puede observar como llega al valor deseado I_d^* .

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Se demostró que el control PID para regulación de posición en los sistemas Euler-Lagrange de un grado de libertad, sin considerar la fricción viscosa y considerando la dinámica del PMSM, asegura GAS. Con la intención de apegarnos a la realidad debido a que es comúnmente utilizado en aplicaciones industriales, se consideró el control por campo orientado (FOC) como base del sistema en lazo cerrado. Por tanto, esta prueba matemática justifica el uso del controlador PID en sistemas Euler-Lagrange de un grado de libertad cuando su actuador es un PMSM controlado en base al FOC. Además de incluir las reglas de sintonía para dicho esquema.

Este trabajo de investigación puede ser un preámbulo para justificar el uso de estos controladores tradicionales (PID, FOC) en sistemas mecánicos de un grado de libertad. A diferencia de trabajos presentados en la literatura, en éste no necesita asumir la presencia de la fricción viscosa para poder garantizar GAS. Más aún, se debe enfatizar en la contribución de este trabajo ya que al utilizar un controlador relativamente simple como lo es el PID propuesto, el resultado es válido tanto para motores de rotor redondo como motores de rotor saliente.

Los resultados de simulación demuestran que al cumplir con las condiciones de estabilidad el error del sistema en lazo cerrado tiende a cero lentamente. Sin embargo, al utilizar ganancias y parámetros que no cumplen con las condiciones de estabilidad, se logra la convergencia del error más rápidamente, mejorando el comportamiento del sistema. La razón de ello es que para el análisis de estabilidad se tomaron los casos más extremos para asegurar la convergencia del error a cero. Esto no implica, que dejando de cumplir las condiciones necesarias el sistema sea inestable.

BIBLIOGRAFÍA

- Adhavan, B, A Kuppuswamy, G Jayabaskaran and V Jagannathan. 2011. Field oriented control of Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM) using fuzzy logic controller. Recent Advances in Intelligent Computational Systems (RAICS), 2011 IEEE. IEEE :587–592.
- Campa, R., E. Torres, V. Santibáñez and R. Vargas. 2005. Electromechanical dynamics characterization of a brushless direct-drive servomotor. Proc. VII Mexican Congress on Robotics, COMRob 2005. México D.F.
- Carrillo-Serrano, RV, VM Hernández-Guzmán and Víctor Santibáñez. 2011. PD control with feedforward compensation for rigid robots actuated by brushless DC motors. *Robotica* 29(04):507–514.
- Dawson, D. M., J. Hu and T. C. Burg. 1998. Nonlinear control of electric machinery. Marcel Dekker New York.
- Donaire, Alejandro and Sergio Junco. 2009. On the addition of integral action to port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica* 45(8):1910–1916.
- Eppinger, S. and W. Seering. 1987. Introduction to dynamic models for robot force control. *IEEE Control Systems Magazine* 7:48–52.
- Hernández-Guzmán, Victor M, Roberto V Carrillo-Serrano and Ramón Silva-Ortigoza. 2013. PD control for robot manipulators actuated by switched reluctance motors. *International Journal of Control* 86(3):540–554.
- Hu, J, DM Dawson, T Burg and P Vedagarbha. 1994. An adaptive tracking controller for

- a brushless DC motor with reduced overparameterization effects. *Decision and Control*, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on. 2 IEEE :1850–1855.
- Kelly, R, R Ortega, A Ailon and A Loria. 1994. Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 39(6):1222–1224.
- Kelly, Rafael, Jesús Llamas and Ricardo Campa. 2000. A measurement procedure for viscous and coulomb friction. *IEEE Transactions on instrumentation and measurement* 49(4):857–861.
- Kelly, Rafael, Victor Santibáñez Davila and Julio Antonio Loría Perez. 2005. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media.
- Khalil, H. K. 2002. *Nonlinear systems (3rd Ed.)*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Krause, P. C., O. Wasynczuk and S. D. Sudhoff. 2002. *Analysis of electric machinery and drive systems*. IEEE Press and Wiley Interscience New York.
- Krishnan, Ramu. 2009. *Permanent magnet synchronous and brushless DC motor drives*. CRC press.
- Loria, Antonio. 1996. Global tracking control of one degree of freedom Euler-Lagrange systems without velocity measurements. *European Journal of Control* 2(2):144–151.
- Loria, Antonio. 2016. Observers are unnecessary for output-feedback control of Lagrangian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 61(4):905–920.
- Ortega, R., A. Loria, P. Nicklasson and H. Sira-Ramírez. 1998. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems*. Springer London.
- Ortega, Romeo, Antonio Loria and Rafael Kelly. 1995. A semiglobally stable output feedback PI 2 D regulator for robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40(8):1432–1436.

- Petrović, Vladan, Romeo Ortega and Aleksandar M Stanković. 2001. Interconnection and damping assignment approach to control of PM synchronous motors. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 9(6):811–820.
- Tarn, T.-J., A. K. Bejczy, X. Yun and Z. Li. 1991a. Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control. *IEEE Transactions on robotics and Automation* 7:114–122.
- Tarn, T.-J., Antal K Bejczy, Xiaoping Yun and Zuofeng Li. 1991b. Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 7(1):114–122.
- Tomei, P, CM Verrelli, M Montanari and A Tilli. 2009. Robust output feedback learning control for induction motor servo drives. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 19(15):1745–1759.
- Yarza, Antonio and Victor Santibáñez. 2010. Estabilidad asintótica global del control PID clásico en robots manipuladores industriales.
- Yarza, Antonio, Victor Santibanez and Javier Moreno-Valenzuela. 2011. Global asymptotic stability of the classical PID controller by considering saturation effects in industrial robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems* 8(4):34–42.
- Zavala-Rio, Arturo and Vctor Santibañez. 2007. A natural saturating extension of the PD-with-desired-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs. *IEEE Transactions on Robotics* 23(2):386–391.

A. PROGRAMAS UTILIZADOS

A.1. Programa en MATLAB sobre mecanismo propuesto

Este programa es una función de SIMULINK, donde la variable qpp1 se integra dos veces para obtener los parámetros de entrada qp, q, también T que es el par de entrada.

```
function [qpp1,y] = fcn(T,q,qp)
%%Sistema Euler-Lagrange
a=0.25;
b=0.5;
mo=5;
Jo=0.005;
g=9.81;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
v=a*cos(q) + (a^2*cos(q)*sin(q))/(b^2 - a^2*(cos(q))^2)^(1/2);
ac=-2*(a*cos(q) + (a^2*cos(q)*sin(q))/(b^2 - a^2*cos(q)^2)^(1/2))*(a*sin(q)
- (a^2*cos(q)^2)/(b^2 - a^2*cos(q)^2)^(1/2)
+ (a^2*sin(q)^2)/(b^2 - a^2*cos(q)^2)^(1/2)
+ (a^4*cos(q)^2*sin(q)^2)/(b^2 - a^2*cos(q)^2)^(3/2));
mq=mo*(v^2)+Jo;
cq1=0.5*mo*-ac;
r1=(2*a*cos(q) + ((2*(a^2)*cos(q)*sin(q))/(b^2 - a^2*cos(q)^2)^(1/2)));
r2=(-a*sin(q))+((a^2)*(-a^2*(cos(q)^4) -b^2*(sin(q)^2)
+ b^2*(cos(q)^2))/(b^2 - a^2*(cos(q)^2)^(3/2));
cq2=r1*r2*mo;
cq=cq1+(cq2*mo);
gq=mo*g*v;
qpp1=(T-gq-(cq*(qp^2)))/mq;
y=a*sin(q)+sqrt(b^2-((a^2)*(cos(q)^2)));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

A.2. Programa en MATLAB para validar las condiciones de estabilidad

Este programa esta hecho para generar aleatoriamente valores que cumplen con todas las condiciones de estabilidad propuestas en el trabajo.

```

clc;clear all;
%% Posicion deseada
qd=pi/10; %% 18 grados
%% Parametros de Sistema EULER-LAGRANGE
g=9.81; %m/s^2
mo=5; %kg
a=0.25; %m
c=0.5; %m
Jin=0.005; %kg/m^2
%% Parametros del Motor (PMSM)-Salient
Flx=0.0106;
Np=120;
Ld=0.00636;
Lq=0.00672;
Rs=1.9;
KT2=Np*Flx*sqrt(3/2);
KT1=Np*(Ld-Lq);
%% Filtro
A=30;
B=9000000;
%% Parametros de funcion saturacion
%h(x)
N2=20;
L2=N2/2;
%SAT
Kdd=10;
Kq=30;
%% Controlador PID
Kpas=38.5;
Kpba=42.2;
Kp=Kpas+Kpba;
Kd=500;
Ki=1;
%% Controladores PI (FOC)
alpha=1;
alpha_as=1.01;
%Vq
alf_q=3950.0;
alf_qi=5000.0;
%Vd
alf_d=802.0;
alf_di=1500.0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a111=0.25;

```

```

c111=0.5;
mol11=5;
g111=9.81;
v111=a111*cos(qd) + (a111^2*cos(qd)*sin(qd))/(c111^2 - a111^2*cos(qd)^2)^(1/2);
g_qd1=mol11*g111*v111;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% %Calculo de mm y mM de m(q)
q123=0:0.001:2*pi;
vy=a*cos(q123) + (a^2*cos(q123).*sin(q123))/(c^2 - a^2*cos(q123).^2)^(1/2);
mq=(mo*(vy.^2))+Jin;
mm=min(mq);
mM=max(mq);
% Calculo de kprim
G1=mo*g*(vy);
kprim=abs(max(G1));
%Kg
kg_1=abs(-g*mo*(a*sin(q123) - (a^2*cos(q123).^2)/(c^2 - a^2*cos(q123).^2)^(1/2)
+ (a^2*sin(q123).^2)/(c^2 - a^2*cos(q123).^2)^(1/2)
+ (a^4*cos(q123).^2.*sin(q123).^2)/(c^2 - a^2*cos(q123).^2)^(3/2)));
KG=max(kg_1);
%Kc
ac=-2*(a*cos(q123) + (a^2*cos(q123).*sin(q123))
/(c^2 - a^2*cos(q123).^2)^(1/2)).*(a*sin(q123)
- (a^2*cos(q123).^2)/(c^2 - a^2*cos(q123).^2)^(1/2) + (a^2*sin(q123).^2)
/(c^2 - a^2*cos(q123).^2)^(1/2)
+ (a^4*cos(q123).^2.*sin(q123).^2)/(c^2 - a^2*cos(q123).^2)^(3/2)));
ac_1=abs(0.5*mo*-ac);
KC=max(ac_1);
%Kh
Kh=2*kprim/(tanh(2*kprim/KG));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha=0.009;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for a1234=1:1
ei2=2;
ei4=2;
while(ei2<4 || ei4<5 || ((Kd*mm)/B)<(alpha^2) || (A/(4*B))<(alpha/mm)
|| (1)<(2*(Kp*N1+kprim+N2))/(alpha*B) || (2*kprim)/Kpas>L1
|| Kpas<KG || (Kd/2*B)<(mM*(alpha^2)) || Kq<((Rs*kprim)/KT2)
|| L2<kprim || N1<L1 || N2<L2)
Kpas=rand*100;
Kpba=rand*100;
Kp=Kpas+Kpba;
Kd=rand*4000;

```

```

A=rand*400000;
B=rand*400000;
alf_q=rand*100000;
alf_d=rand*1000;
alpha=0.001*rand;
Kdd=rand*80;
Kq=rand*1000;
%h(x)
N2=rand*100;
L2=N2/2;

N1=rand*100;
L1=N1/2;
% Q1 y Q2
Q1=zeros(2,2);
Q1(1,1)=0.5*mm;
Q1(1,2)=-0.5*alpha;
Q1(2,1)=-0.5*alpha;
Q1(2,2)=0.5*Kd/B;
Q1_1=eig(Q1);

Q2=zeros(2,2);
Q2(1,1)=0.5*mM;
Q2(1,2)=0.5*alpha;
Q2(2,1)=0.5*alpha;
Q2(2,2)=0.5*Kd/B;
Q2_1=eig(Q2);
% Calculo de c1 y c2
c1=[min(Q1_1) Lq/2 Ld/2];
c1_1=min(c1);

c2=[max(Q2_1) Lq/2 Ld/2];
c2_1=max(c2);
%% Calculo de c3
% qm
qmp=pi/2;
%rhoM
rhoM=(4/(Rs+alf_q))*(Kq+((Rs*((Kp*N1)+N2))/KT2));
%IdM
IdM=(Kdd*4)/(Rs+alf_d);
%f1
f1=asin((2*((Kp*N1)+kprim+N2))/(alpha*B));
%f2
f2=4*B*(alpha/mm)*(((KC*qmp*qmp)+(Kp*N1)+kprim+N2)/(Kd*A));

```

```

%Condtot
a11=rhoM*(Kq+((Rs*((Kp*N1)+N2))/KT2))+IdM*Kdd;
a12=-((Kp*N1)+kprim+N2)-(alpha*B*0.5);
a13=qmp*((Kp*N1)+kprim+N2);

a2=(a11+a13)/(Kd*(A/(4*B))-(alpha/mm));
a3=a11/a12;
a4=(4/(Rs+alf_q))*(a13+((f2*f2*Kd*A)/(4*B))+((IdM*IdM*(Rs+alf_d))/4));
a5=(4/(Rs+alf_d))*(a13+((f2*f2*Kd*A)/(4*B))+((rhoM*rhoM*(Rs+alf_q))/4));
%c3
c3=max([f1 f2 rhoM IdM sqrt(a2) a3 sqrt(a4) sqrt(a5) qmp]);
%b
b=sqrt(4*(c2_1/c1_1))*c3;
% Para asegurar V(x)
% Los menores de Q3 deben ser positivos
Q3=zeros(4,4);
Q3(1,1)=alpha*B*0.5;
Q3(1,2)=-alpha*A*0.5;
Q3(1,3)=0;
Q3(1,4)=0;
Q3(2,1)=-alpha*A*0.5;
Q3(2,2)=(Kd*A)/(2*B);
Q3(2,3)=-(1/2)*((alpha*KT2/mm)+(Rs*Kd/KT2));
Q3(2,4)=0;
Q3(3,1)=0;
Q3(3,2)=-(1/2)*((alpha*KT2/mm)+(Rs*Kd/KT2));
Q3(3,3)=(1/2)*(Rs+alf_q);
Q3(3,4)=0;
Q3(4,1)=0;
Q3(4,2)=0;
Q3(4,3)=0;
Q3(4,4)=(1/2)*(Rs+alf_d);
%Eigenvalores
ei=eig(Q3);
for i=1:4
if(ei(i)>0)
    ei1(i)=1;
else
    ei1(i)=0;
end
end
ei2=sum(ei1);

P=zeros(5,5);
P(1,1)=alpha*(Kp-Kh);

```

```

P(1,2)=0;
P(1,3)=-0.5*alpha*(Kd+Kh+Kp);
P(1,4)=-0.5*(alpha*KT2+((Rs*Kp)/KT2));
P(1,5)=- (alpha/(2*KT2))*abs(KT1)*((Kp*N1)+N2);

P(2,1)=0;
P(2,2)=alpha*((B*mm)-mM-(N1*KC)-(KC*b));
P(2,3)=- (1/2)*(alpha*A*mM);
P(2,4)=0;
P(2,5)=0;

P(3,1)=-0.5*alpha*(Kd+Kh+Kp);
P(3,2)=- (1/2)*(alpha*A*mM);
P(3,3)=Kd*((A/B)-alpha);
P(3,4)=-0.5*(alpha*KT2+((Rs*Kd)/KT2));
P(3,5)=- ((alpha*abs(KT1)*N2)/(2*mm*KT2))-(((alpha*abs(KT1))/(2*KT2))*((N1*Kd)
+(N1*Kp)+(Kd*b)+N2+((Kp*N1)+(Kd*b))/mm));

P(4,1)=-0.5*(alpha*KT2+((Rs*Kp)/KT2));
P(4,2)=0;
P(4,3)=-0.5*(alpha*KT2+((Rs*Kd)/KT2));
P(4,4)=Rs+alf_q;
P(4,5)=-0.5*(alpha*abs(KT1)*(N1+b+(b/mm)));

P(5,1)=- (alpha/(2*KT2))*abs(KT1)*(Kp*N1+N2);
P(5,2)=0;
P(5,3)=- ((alpha*abs(KT1)*N2)/(2*mm*KT2))-(((alpha*abs(KT1))/(2*KT2))
*((N1*Kd)+(N1*Kp)+(Kd*b)+N2+((Kp*N1)+(Kd*b))/mm));
P(5,4)=-0.5*(alpha*abs(KT1)*(N1+b+(b/mm)));
P(5,5)=Rs+alf_d;

P1=P(1,1);
P2=det([P(1,1:2);P(2,1:2)]);
P3=det([P(1,1:3);P(2,1:3);P(3,1:3)]);
P4=det([P(1,1:4);P(2,1:4);P(3,1:4);P(4,1:4)]);
P5=det([P(1,1:5);P(2,1:5);P(3,1:5);P(4,1:5);P(5,1:5)]);

eiP=[P1 P2 P3 P4 P5];
for i=1:5
if(eiP(i)>0)
    ei3(i)=1;
else
    ei3(i)=0;
end
end

```



```

ei4=sum(ei3);
end

valmin1=[Kpas Kp Kd alpha A B alf_d alf_q];

if(a1234==1)
    valmin2=valmin1;
end

for i=1:8
if (valmin2(i) > valmin1(i))
    valores(i)=1;
else
    valores(i)=0;
end
end
valores1=sum(valores);
if(valores1>=5)
valmin2=valmin1;
end
end

Ki=N2/4;

Kpas=valmin2(1);
Kp=valmin2(2);
Kd=valmin2(3);
alpha=valmin2(4);
A=valmin2(5);
B=valmin2(6);
alf_d=valmin2(7);
alf_q=valmin2(8);
% Menores principales M
M1=Q3(1,1)
M2=det([Q3(1,1:2);Q3(2,1:2)])
M3=det([Q3(1,1:3);Q3(2,1:3);Q3(3,1:3)])
M4=det([Q3(1,1:4);Q3(2,1:4);Q3(3,1:4);Q3(4,1:4)])
% Menores principales P
P1=P(1,1)
P2=det([P(1,1:2);P(2,1:2)])
P3=det([P(1,1:3);P(2,1:3);P(3,1:3)])
P4=det([P(1,1:4);P(2,1:4);P(3,1:4);P(4,1:4)])
P5=det([P(1,1:5);P(2,1:5);P(3,1:5);P(4,1:5);P(5,1:5)])
% %%%%%%%%% Propuesta 1 %%%%%%%%%
% Para que V1(x) sea def. positiv

```

```

if ((Kd*mm)/B)>(alpha^2)
disp('Cond 1 cumplida')
else
disp('Cond 1 no cumplida')
end
% Para asegurar V1.(x)
%Tambien
if ((A/(4*B))>(alpha/mm))
disp('Cond 2 cumplida')
else
disp('Cond 2 no cumplida')
end
%Tambien
if ((1)>(2*((Kp*N1)+kprim+N2))/(alpha*B))
disp('Cond 3 cumplida')
else
disp('Cond 3 no cumplida')
end
%% %%% Propuesta 2 %%%
qtil=0.1:0.1:10000;
Gqtil=max(((Kpba/2)*(L1^2)+Kpba*L1*(qtil-L1)));
%SATURACIONES
if (Gqtil >= (mM*(alpha_as^2)*(N1^2)))
disp('Cond 4 cumplida')
else
disp('Cond 4 no cumplida')
end
%Kp*>kg
if (Kpas>KG)
disp('Cond 5 cumplida')
else
disp('Cond 5 no cumplida')
end
%Kd/2B>(alpha^2)*mM
if ((Kd/(2*B))>((alpha^2)*mM))
disp('Cond 6 cumplida')
else
disp('Cond 6 no cumplida')
end
%2*Kprim/Kpas<N1
if ((2*kprim)/Kpas<L1)
disp('Cond 7 cumplida')
else
disp('Cond 7 no cumplida')
end

```

```
%N2>kprim
if (L2>kprim)
disp('Cond 8 cumplida')
else
disp('Cond 8 no cumplida')
end
%Kq>(Rs*kprim)/KT2
if (Kq>(Rs*kprim)/KT2)
disp('Cond 9 cumplida')
else
disp('Cond 9 no cumplida')
end
```