



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ciencias (Estructuras)

**Análisis del comportamiento sísmico por variación de
amortiguadores de fricción rotacionales en marcos de acero
optimizados con algoritmos genéticos**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestro en Ciencias (Estructuras)

Presenta:

Ing. Emiliano Ponce López

Dirigido por:

Dr. Miguel Ángel Pérez Lara y Hernández

Codirigido por:

Dr. Humberto Yáñez-Godoy

Dr. Miguel Ángel Pérez Lara y Hernández

Presidente

Dr. Humberto Yáñez-Godoy

Secretario

Dr. Luis Francisco Pérez Moreno

Vocal

Dr. Iván Fermín Arjona Catzim

Suplente

M. C . Joaquín Noriega Jiménez

Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.

Fecha de Aprobación por el consejo (Mes /Año)

México

La presente obra está bajo la licencia:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Bajo los siguientes términos:



Atribución — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#), brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#). Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.



NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con [propósitos comerciales](#).



SinDerivadas — Si [remezcla, transforma o crea a partir](#) del material, no podrá distribuir el material modificado.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una [excepción o limitación](#) aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como [publicidad, privacidad, o derechos morales](#) pueden limitar la forma en que utilice el material.

Por permitirme divagar, abandonar, regresar, crecer, cambiar, pero sobre todo ser. Gracias.

A todas a las personas que me impulsaron, y apoyaron, a aquellos que me amaron y les amo, a todos aquellos que me hicieron reír e hice reír, a todos aquellos con los que partí el pan y el vino, y a todos aquellos que compartieron un pedazo de vida, gracias.

A todos los que partieron, en cuerpo mas no en alma, gracias.

Por todos aquellos que, sin estar presentes, están conmigo, gracias.

Les agradezco

Agradezco porque he cometido la mayor de las virtudes
que el hombre puede cometer. He sido feliz.

Que las praderas del espíritu
me arrastren y me pierdan, despiadadas.
Mis padres me engendraron para el juego
arriesgado y hermoso de la vida,
para la tierra, el agua, el aire, el fuego.

Y no defraudé. Soy feliz. Cumplida
su joven voluntad. Mi mente
se aplicó a las simétricas porfías
del arte, que entreteje naderías.
Y me donaron valor. Fui valiente.
Mis temores enfrentados están.
Siempre está a mi lado
La luz de ser amado.

Agradecimientos.

Agradecido por los días que he tenido hasta este momento, a mis padres, a mi familia, a mi amor, a mis amigos, a mis maestros, y a todos aquellos que son parte de mí.

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), a la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) en México y al Instituto de Ingeniería Mecánica (I2M) de la Universidad de Burdeos, en Francia, por el apoyo invaluable brindado en la realización de este proyecto.

Índice.

I. Contenido

II. Resumen.....	9
III. Abstract.....	10
I. Introducción.....	1
I. I. Planteamiento del problema	2
I. II. Justificación.....	3
II. Estado del arte.	4
II. I. Control sísmico pasivo enfoque en disipadores de fricción rotacionales	4
II. II. Estado del arte de amortiguadores de fricción, énfasis en RFD.....	6
II. III. Principales enfoques para la modelación matemática de RFD.....	7
II. IV. Metodologías de diseño y optimización reportadas en la literatura.....	9
II. IV. I. Método iterativo.....	9
II. IV. II. Algoritmos metaheurísticos énfasis en algoritmos genéticos.....	9
II. V. Síntesis crítica: discrepancias, comparabilidad y delimitación del problema	11
III. Fundamentación teórica.....	15
III. I. Análisis dinámico no lineal paso a paso.....	15
III. I. I. Análisis tiempo historia regla del punto medio.	15
III. I. II. Resultados de NLTHA, máximos, historias y energía.....	16
III. II. Amortiguadores de fricción rotacionales (RFD).....	17
III. II. I. RFD, mecanismo rotacional y variable resistente Mf	17
III. II. II. Criterios de evaluación del desempeño de RFD.....	18
III. II. III. Modelos constitutivo en dinámica no suaves.....	19
III. III. Algoritmos genéticos.	23
III. III. I. Representación, genotipo, fenotipo y función fitness.....	24
III. III. II. Selección	25
III. III. III. Cruce	25
III. III. IV. Mutación.....	26
III. III. V. Reemplazo.....	26
III. III. I. Manejo de restricciones	26
IV. Hipótesis.....	29
V. Objetivos.....	29

V. I.	Objetivo general.....	29
V. II.	Objetivos específicos.....	29
VI.	Metodología.....	30
VI. I.	Implementación del modelo parametrizable.....	32
VI. II.	Desarrollo de algoritmo genético	41
VI. III.	Análisis Estadístico.....	44
VI. III. I.	Variables compactas	44
VI. III. II.	Zonas de eficiencia	46
VI. III. III.	Probabilidad por piso.	46
VI. III. IV.	Cuantificación de efectos (ANOVA).....	46
VI. IV.	Correlación ubicación-desempeño y formulación de ecuaciones gobernadoras de diseño	46
VI. IV. I.	Superficie de respuesta	47
VI. IV. II.	Datos de calibración y variable objetivo	47
VI. IV. III.	Forma del modelo.....	47
VI. IV. IV.	Estimación de coeficientes.....	48
VI. IV. V.	Extrapolación y generación de múltiples soluciones.....	49
VI. V.	Validación frente a Monte Carlo y confirmación mediante GA.....	49
VI. V. I.	Repetición con Monte Carlo.....	50
VI. V. II.	Comparación directa de reglas: GA vs MC	50
VI. V. III.	Validación final	50
VII. I.	Implementación del modelo parametrizable.....	51
VII. II.	Desarrollo de algoritmo genético	57
VII. III.	Análisis Estadístico.....	60
VII. III. I.	Distribución de nd en Ω^*	60
VII. III. II.	Distribución de nd en Ω^*	61
VII. III. III.	Distribución de MF en región eficiente.....	64
VII. III. IV.	Convergencia topológica: probabilidad por piso.....	64
VII. IV.	Correlación ubicación-desempeño y formulación de ecuaciones gobernadoras de diseño	66
VII. IV. I.	Evaluación analítica de Ω^*	66
VII. IV. II.	Correlación de propiedades intrínsecas y cantidad y fricción.....	67
VII. IV. III.	Reglas gobernadoras finales	67

VII. V.	Validación frente a Monte Carlo, confirmación mediante GA y comparación contra algoritmo secuencial.	68
VIII.	Conclusiones.	72
IX.	Bibliografía o Referencias.	73

Índice de Figuras. Misma consideración de los cuadros.

Figura 1 Amortiguador de fricción rotacional	5
Figura 2 Mecanismo de amortiguador de fricción rotacional ante cargas laterales.....	5
Figura 3 Esquema de análisis geométrico de un marco integrando un RFD	17
Figura 4 Comparación entre ciclos histereticos y modelación aproximada por Mualla [21]	20
Figura 5 Marco de acero resistente a momento de 10 pisos.	33
Figura 6 Perfil de rigidez en por piso en escala semilogaritmica	35
Figura 7 Perfil de rigidez normalizado por alturas	35
Figura 8 Registro Sísmico Loma Prieta 1989 [29]	38
Figura 9 Registro Sísmico Nilttepec 2017 [30]	38
Figura 10 Registro Sísmico El Centro 1940 [29]	39
Figura 11 Registro Sísmico Jamiltepec 2018 [30]	39
Figura 12 Registro Sísmico Kobe 1995 [29]	40
Figura 13 Registro Sísmico Northridge 1994 [29]	40
Figura 14 Registro Sísmico Trinidad 1983 [29]	41
Figura 15 Registro Sísmico Zacatula 1997 [30]	41
Figura 16 Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. Histograma de desplazamiento $x(t)$ (arriba); velocidad $\dot{x}(t)$ (centro) e impulso friccional $\int f(t)$ (abajo). Sometido a excitación armónica con frecuencia $f = 1$ Hz. Fuerza máxima de fricción Ff : 200 N (izquierda), 500 N (centro) y 800 N (derecha). [22].	52
Figura 17 Reproducción mediante algoritmo desarrollado de un marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. Histograma de desplazamiento $x(t)$ (arriba); velocidad $\dot{x}(t)$ (centro) e impulso friccional $\int f(t)$ (abajo). Sometido a excitación armónica con frecuencia $f = 1$ Hz. Fuerza máxima de fricción Ff : 200 N (izquierda), 500 N (centro) y 800 N (derecha).	53
Figura 18 Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. Histogramas de desplazamiento $x(t)$ (arriba), velocidad $\dot{x}(t)$ (centro) e impulso friccional $\int f(t)$ (abajo). Excitación armónica con frecuencia $f = 5$ Hz. Fuerza máxima de fricción Ff : 200 N (izquierda), 500 N (centro) y 800 N (derecha).....	54
Figura 19 Reproducción mediante algoritmo desarrollado Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. Histogramas de desplazamiento $x(t)$ (arriba), velocidad $\dot{x}(t)$ (centro) e impulso friccional $\int f(t)$ (abajo). Excitación armónica con frecuencia $f = 5$ Hz(cercana a la frecuencia natural de 6.8 Hz). Fuerza máxima de fricción Ff : 200 N (izquierda), 500 N (centro) y 800 N (derecha).	55
Figura 20 Casos $Mf = 0$ y $Mf = Mf_{opt} = 13,000$ Nm. Izquierda: desplazamiento relativo respecto al terreno. Derecha: aceleración absoluta. (a) Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. (b) Último nivel del marco de tres niveles con barras de arriostramiento axialmente rígidas. (c) Último nivel del marco de cinco niveles con barras de arriostramiento axialmente rígidas.	56
Figura 21 Reproducción mediante algoritmo desarrollado Casos $Mf = 0$ y $Mf = Mf_{opt} = 13,000$ Nm. Izquierda: desplazamiento relativo respecto al terreno. Derecha: aceleración absoluta. (a) Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. (b) Último nivel del marco de tres niveles con barras de arriostramiento axialmente rígidas. (c) Último nivel del marco de cinco niveles con barras de arriostramiento axialmente rígidas.	57

Figura 22 Convergencia del GA Para un edificio de 5 pisos	58
Figura 23 Convergencia del GA Para un edificio de 10 pisos	59
Figura 24 Convergencia del GA Para un edificio de 15 pisos	59
Figura 25 Distribución de numero de dispositivos en la región eficiente para N = 5, 10 y 15.....	60
Figura 26 Distribución de numero de dispositivos en la región eficiente para N = 5, 10 y 15 normalizado a la altura	61
Figura 27 Relación entre MF , nd en la región eficiente para N=5	62
Figura 28 Relación entre MF , nd en la región eficiente para N=10.....	62
Figura 29 Relación entre MF , nd en la región eficiente para N=15.....	63
Figura 30 Distribución de MF en región eficiente.....	64
Figura 31 Mapa de preferencia probabilística de RFD para N = 5	65
Figura 32 Mapa de preferencia probabilística de RFD para N = 10.....	65
Figura 33 Mapa de preferencia probabilística de RFD para N = 15.....	66
Figura 34 correlación media entre CR2 y nd	67
Figura 35 Comparación global del desempeño promedio CR2 mean.....	70
Figura 36 Comparación global del desempeño Fitness P90 CR2 P90	70
Figura 37 Comparación global del peor desempeño CR2 peor	70

II. Resumen

La implementación de amortiguadores de fricción rotacionales (RFD) constituye, por su naturaleza, un problema combinatorio: el desempeño sísmico depende simultáneamente de la cantidad, la ubicación y el momento máximo de fricción M_f , lo que dificulta su optimización y modelación. Adicionalmente, la literatura no presenta un esquema base de evaluación con métricas homogéneas, lo que limita la comparación directa y la transferencia de resultados entre investigaciones. En este contexto, esta tesis tiene como objetivo caracterizar configuraciones óptimas y de alto desempeño a partir de variables intrínsecas del sistema estructural evaluado. Para ello se reprodujo un modelo numérico parametrizable de edificio tipo cortante y se implementó un motor de análisis no lineal paso a paso que integra la dinámica no suave del RFD. Complementariamente, se desarrolló un algoritmo genético para identificar poblaciones de soluciones de alto desempeño y, mediante el ajuste de una superficie de respuesta, se obtuvieron ecuaciones gobernadoras que describen el diseño en función de variables globales asociadas a masa y rigidez. Como herramienta adicional, se formuló una regla de ubicación normalizada derivada del análisis probabilístico de las soluciones eficientes. La validación se realizó mediante muestreo Monte Carlo, un método iterativo secuencial de diseño y la confirmación por algoritmo genético en cinco estructuras independientes. Los resultados muestran que el diseño robusto (optimización sobre una suite de registros sísmicos) tiende a configuraciones de alta ocupación de dispositivos, mientras que la masa y la rigidez influyen principalmente en el valor recomendado de M_f . Finalmente, se evidencia que la optimización basada en un solo sismo es metodológicamente débil, ya que el desempeño queda dominado por el conjunto de registros utilizado en la evaluación más que por un diseño independiente por registro.

Palabras clave: amortiguadores de fricción rotacionales; dinámica no suave; optimización robusta; algoritmos genéticos; diseño sísmico

III. Abstract.

The implementation of rotational friction dampers (RFDs) constitutes, by its nature, a combinatorial problem: seismic performance depends simultaneously on the number, placement, and maximum friction moment (M_f), which complicates both optimization and modeling. In addition, the literature does not provide a baseline evaluation framework with homogeneous metrics, limiting direct comparison and the transferability of results across studies. In this context, this thesis aims to characterize optimal and high-performance configurations based on intrinsic variables of the structural system under evaluation. To this end, a parametrizable numerical shear-building model was reproduced, and a step-by-step nonlinear analysis engine integrating the non-smooth dynamics of the RFD was implemented. Complementarily, a genetic algorithm was developed to identify populations of high-performance solutions, and, through response-surface fitting, governing equations were obtained to describe the design as a function of global variables associated with mass and stiffness. As an additional tool, a normalized placement rule was formulated from the probabilistic analysis of efficient solutions. Validation was carried out via Monte Carlo sampling, a sequential iterative design method, and genetic-algorithm confirmation on five independent structures. Results show that robust design (optimization over a suite of seismic records) tends toward high-occupancy device configurations, while mass and stiffness primarily influence the recommended value of (M_f). Finally, it is shown that optimization based on a single earthquake record is methodologically weak, since performance becomes dominated by the set of records used in the evaluation rather than by a record-independent design.

Keywords: rotational friction dampers; non-smooth dynamics; robust optimization; genetic algorithms; seismic design.

I. Introducción

En el diseño estructural, los sismos son una de las variables más críticas a considerar y controlar en cualquier tipo de estructura. Estos imponen un riesgo debido a los altos costos económicos por conceptos de reparación, tiempos de inactividad, pérdidas económicas, y principalmente por poner en riesgo la vida de sus ocupantes. Por ello, se buscan estrategias que además de evitar el colapso, reduzcan el daño y permitan que los edificios sigan operando después de un evento de esta naturaleza.

Una estrategia ampliamente utilizada para mejorar el desempeño sísmico son los sistemas de control pasivo. Elementos capaces de reducir significativamente la respuesta sísmica de las estructuras sin requerir el uso de energía externa. Dentro de este conjunto de soluciones se encuentran los dispositivos de disipación de energía. En este contexto destacan los amortiguadores de fricción, principalmente por su simplicidad mecánica, eficiencia y costo.

Este trabajo estudia un tipo particular de amortiguador de fricción, los amortiguadores de fricción rotacionales (*Rotational Friction Dampers, RFD*), propuestos por Mualla y Belev en [1]. En términos simples, un RFD puede entenderse como un mecanismo similar a un freno, siendo que durante un sismo dos pisos consecutivos se desplazan uno respecto del otro, el RFD transforma parte de ese desplazamiento relativo en una rotación en una interfaz de fricción. En esa interfaz se desarrolla un momento resistente que se opone al giro generando fricción y disipando parte de la energía sísmica principalmente en forma de calor, lo que contribuye a reducir la respuesta del marco. Cuando estos dispositivos se integran en puntos estratégicos del sistema estructural mitigan significativamente la respuesta sísmica, disminuyendo el daño estructural, mejorando el desempeño global del sistema [2], [3].

El desempeño de un marco equipado con RFD depende principalmente de la ubicación del dispositivo dentro de la estructura; de la cantidad instalada y de su resistencia, la cual se representa mediante el momento máximo de fricción M_f [2], [3]. Estas variables controlan la respuesta sísmica del sistema y convierten el diseño en un problema complejo; debido al gran número de combinaciones posibles.

Aun y cuando existen múltiples estudios sobre optimización de amortiguadores por fricción [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], los resultados no siempre son directamente comparables. Esto se debe en gran medida a diferencias en la modelación y tipo de dispositivo; al tipo de análisis sísmico; a los registros utilizados y a las métricas de desempeño empleadas.

Asimismo, gran parte de la literatura se enfoca en identificar una solución óptima única, sin embargo, las investigaciones realizadas por Aydin [12] sugieren la existencia de soluciones equivalentes de alto desempeño, las cuales, en la práctica resulta más útiles o convenientes, en virtud de que ofrece alternativas de diseño, ante restricciones constructivas.

A su vez, los algoritmos genéticos, son una herramienta matemática, diseñada específicamente para aproximar soluciones óptimas, a problemas de carácter complejo con dominios de respuesta multivariables, donde las estrategias de tradicionales de análisis de optimización no son capaces de resolver[13].

Por ello desprende la pregunta de investigación que guía este trabajo:

¿Cómo se describe el conjunto de soluciones óptimas de los RFD en marcos de acero en función de la distribución de masa y rigidez del sistema?

I. I. Planteamiento del problema

El diseño de los marcos de acero equipados con RFD, suele abordarse a través de dos tipologías metodológicas ampliamente conocidas o principales.

La primera corresponde al procedimiento de integración iterativo, basado el cálculo de ciclos de análisis, ajuste y reanálisis. En este procedimiento, la ubicación y las propiedades del dispositivos se determinan a partir de un criterio de respuesta crítico y se integran mediante un algoritmo iterativo. Este enfoque ha sido ampliamente aceptado debido a su sencillez de implementación y a su costo computacional relativamente bajo [14].

No obstante, lo anterior, su alcance llega a ser limitado dado que únicamente evalúa el cortante máximo por piso en cada iteración, lo cual llega a ser contraproducente cuando se hace una análisis más complejo y abordando más variables de diseño.

La segunda -metodología- corresponde al uso de algoritmos metaheurísticos, capaces de explorar “espacios de búsqueda complejos” para identificar configuraciones de alto desempeño bajo objetivos y restricciones definidas. Estos métodos se han incorporado ampliamente en la literatura, para optimizar la ubicación, la cantidad y los parámetros del dispositivo. Una limitación frecuente es que los resultados quedan condicionados por el caso de estudio, incluyendo el modelo estructural, los registros sísmicos, la formulación del dispositivo y las métricas de desempeño. Esto dificulta generalizar o transferir configuraciones óptimas a sistemas con

propiedades globales distintas sin repetir el proceso completo de optimización [2], [3], [5], [7], [9], [10], [12], [15], [16], [17].

De tal situación desprende el problema relacionado con la caracterización del conjuntos de soluciones óptimas equivalentes; y la identificación de tendencias o patrones robustos en la ubicación, la cantidad y M_f respecto a la función de propiedades globales del marco, en particular la masa y rigidez de la estructura.

I. II. Justificación

Pese a existir múltiples estudios en la optimización de los amortiguadores de fricción, los resultados que desprenden son de carácter particular, e intransferibles a otros modelos estructurales. Por ello se propone estudiar el conjunto de soluciones optimas equivalentes y su relación con las propiedades globales del sistema, buscando aportar una base clara y transferible para el diseño de RFD.

Esta investigación pretende ser aplicable en orientar el diseño preliminar, al proporcionar tendencias y rangos de operación respecto a las condiciones iniciales de diseño, reduciendo la necesidad de repetir optimizaciones completas para cada caso y la consistencia de los criterios de diseño al momento de comparar alternativas estructurales.

Por tales motivos esta tesis analiza del comportamiento sísmico de marcos de acero equipados con RFD, considerando variaciones en masa y rigidez del sistema estructural, y explorando de forma sistemática las combinaciones de ubicación, cantidad y M_f .

Para ello, se hace uso de optimización con algoritmos genéticos, capaz de encontrar múltiples configuraciones óptimas en un problema naturalmente combinatorio. Unido al análisis estadístico para describir la distribución de dichas soluciones e identificar patrones o tendencias en las configuraciones óptimas en función de propiedades globales del marco.

Esta tesis se organiza de la siguiente forma: el Capítulo II presenta el estado del arte sobre control pasivo, dispositivos por fricción y RFD, así como enfoques de modelación y optimización. El Capítulo III desarrolla la fundamentación teórica. Los Capítulos IV y V establecen hipótesis y objetivos. El Capítulo VI describe la metodología. Finalmente, los Capítulos VII y VIII presentan resultados, discusión y conclusiones.

II. Estado del arte.

Este capítulo integra las investigaciones más relevantes para abordar el estudio del análisis del comportamiento sísmico de marcos de acero equipados con RFD y su optimización mediante algoritmos genéticos, abordando el tema en cinco bloques principales.

Iniciando con la ubicación de los RFD en el marco de referencia de los sistemas de control pasivo; continuando con una síntesis del estado del conocimiento sobre los disipadores por fricción, con énfasis en las variables dominantes y métricas de desempeño de los RFD; posteriormente se abordan los principales enfoques para su modelación matemática; seguidamente se describirán las metodologías de diseño y optimización reportadas en la literatura; por último se presenta una síntesis crítica que explica discrepancias y limita el problema que motiva esta tesis.

II. I. Control sísmico pasivo enfoque en disipadores de fricción rotacionales

En el marco del diseño estructural, los sistemas de control pasivo agrupan soluciones que atenúan la respuesta del sistema mediante disipación suplementaria o desacoplamiento, sin requerir suministro energético desde fuentes ajenas al propio movimiento estructural, y sin depender de dispositivos activos o de control [14], [18], [19].

En términos generales, las estrategias de control pasivo se agrupan en dos categorías principales; aislamiento de base y disipadores de energía [20]. Los aisladores de base mitigan la transferencia del movimiento de terreno hacia la superestructura [20], mientras que los disipadores de energía son elementos acoplados a la estructura principal, y son capaces de absorber y disipar la energía sísmica y reduciendo la demanda estructural en puntos críticos [14], [18], [19]. En la

Tabla 1 se presenta un resumen de estas categorías, así como algunas ventajas y desventajas de estos dispositivos.

Dentro de la categoría de disipadores de energía se ubican los amortiguadores de fricción rotacionales, los cuales basan su funcionamiento en el desarrollo de momentos resistentes resultado de la rotación relativa entre sus superficies de contacto causado las derivas entre piso de un marco de acero [21]. Se observa su configuración y funcionamiento en la figuras Figura 1 y Figura 2.

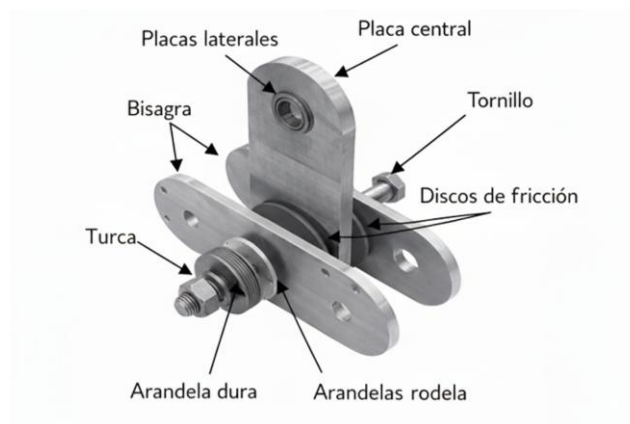


Figura 1 Amortiguador de fricción rotacional

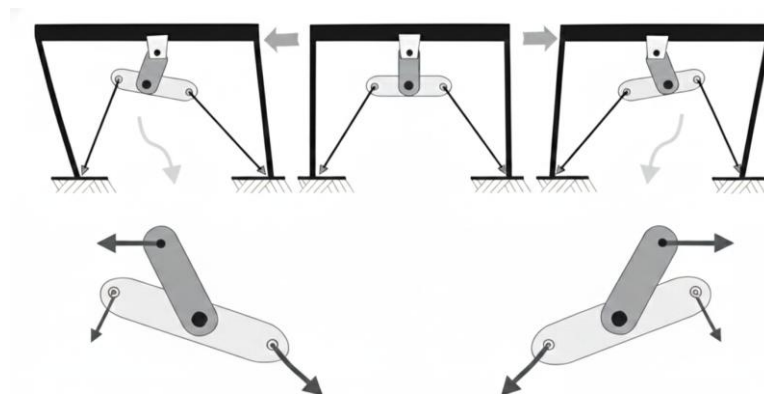


Figura 2 Mecanismo de amortiguador de fricción rotacional ante cargas laterales

Los RFD en particular han demostrado ser una solución competente respecto a otro tipo de amortiguadores, debido a las reducciones significativas en cuanto a la demanda estructural

calculada en las simulaciones realizadas por [2], [3], [21], [22]. Complementariamente la evidencia experimental reportada por Mualla en [21], respalda su viabilidad desde punto de vista constructivo al evidenciar un comportamiento estable con bajo desgaste de los elementos de fricción, así como ventajas asociadas a simplicidad de maquinabilidad e instalación.

Tabla 1 Sistemas de control pasivo y RFD

Categoría de control pasivo	Principio fundamental	Variables de diseño	Ventajas	Desventajas	Ref.
Aislamiento en base	Desacopla la estructura del movimiento del terreno	Rigidez del aislador, fuerza de deslizamiento/fricción	Reduce fuerzas sísmicas, protege la superestructura	Complejidad, costo, posibilidad de grandes desplazamientos	[20]
Disipación de energía	Disipa energía sísmica mediante amortiguamiento	Coeficiente de amortiguamiento, fuerza/momento de fricción, velocidad	Aumenta la absorción de energía, reduce el daño estructural	Posible desgaste, mantenimiento, recentrado limitado	[18], [19]
RFD	Disipan mediante el momento.	M_f , ubicación, cantidad.	Reducción de derivas, aceleraciones máximas y cortante basal	Carente consenso para su modelación matemática.	[1], [21], [23]

II. II. Estado del arte de amortiguadores de fricción, énfasis en RFD

Los amortiguadores de fricción rotacionales constituyen una solución de la familia de los sistemas de control pasivo, los cuales mediante el uso de una unión friccionante con rotación relativa y aprovechando los desplazamientos relativos entre piso, logran disminuir los efectos de fuerzas sísmicas.

El comportamiento de los RFD está gobernado por el fenómeno de fricción seca y cambios de régimen no lineales cíclicos, donde la respuesta alterna entre una fase de adherencia y una fase de deslizamiento, conocidos en la literatura como *stick-slip*, y en la cual se desarrolla la disipación de energía, la cual puede ser calculada mediante el uso de los ciclos histéricos del dispositivo.

La capacidad de mantener estos ciclos histeréticos estables a lo largo de toda la vida útil del dispositivo dependen en mayor medida del adecuado contacto y de la resistencia al desgaste de las superficies, del coeficiente de fricción del material, y a su vez de la fuerza normal efectiva, siendo estas las variables básicas del estudio de la tribología.

Sin embargo, las variables necesarias para su integración como solución estructural de los RFD se limitan únicamente a su momento resistente, ubicación y cantidad. Esta estructura de variables vuelve su optimización un problema combinatorio conforme crece el número de ubicaciones posibles.

En la literatura, el desempeño de disipadores por fricción se reporta mediante métricas de desempeño global entre las que destacan la deriva máxima, aceleración máximas, cortante basal y energía disipada por histéresis del dispositivo. Adicionalmente se han reportado índices de daño, probabilidad de excedencia o criterios de costo-beneficio, como se enfatiza en la revisión de Sujit Jaisee et al [6]. Sin embargo, el cambio de métrica resulta en alterar de manera significativa el criterio de configuración óptima, debido a que optimizar derivas no necesariamente produce la misma solución que optimizar desplazamientos residuales o energía disipada [6], [24].

La evidencia numérica reporta mejoras relevantes en el desempeño global de diferentes modelos tanto simulados como experimentales, cuando se seleccionan apropiadamente M_f , ubicación y cantidad [2], [3], [7], [21], [22]. Sin embargo, los resultados de estos estudios presentan ciertas limitantes al momento de comparar sus resultados debido los supuestos utilizados para su diseño experimental.

II. III. Principales enfoques para la modelación matemática de RFD

La modelación de los RFD dentro de un sistema estructural implica representar matemáticamente el movimiento del dispositivo, considerando fielmente la ley constitutiva que rige el comportamiento del momento friccionante y sus implicaciones en el sistema estructural, tal comportamiento es descriptible mediante la teoría de la ley de Coulomb.

Debido a que la respuesta del RFD es gobernada por el comportamiento no lineal, es necesario recurrir al análisis dinámico no lineal paso a paso, para de tal forma ser capaces de capturar su comportamiento, sin embargo, este comportamiento puede ser abordado desde dos perspectivas diferentes.

La primera y más aceptada en la literatura debido a su sencillez en la integración del análisis dinámico no lineal paso a paso, es el modelo de Mualla - Belev [21], el cual consiste en conceptualizar la conexión roto-friccionante como un resorte bilineal, definiendo un rango plástico acorde al M_f del dispositivo y limitando su rango de fluencia.

La segunda -técnica-, consiste en modelar explícitamente la fricción con su carácter de comportamiento no suave e integrando un algoritmo diseñado para evaluar tal no linealidad, a diferencia de la técnica anterior esta metodología aventaja en genera resultados más precisos, eliminando discontinuidades en el cálculo de velocidades y por lo mismo eliminando resultados con aceleraciones infinitas [22].

En la Tabla 2 se señalan las principales ventajas y desventajas de ambos modelos.

Tabla 2 Comparativa entre modelo equivalente y NSD

Enfoque	Representación	Ventajas	Limitaciones	Ref
Equivalente/regularizado	Transición suavizada adherencia-deslizamiento	Implementación directa, estabilidad numérica	Dependencia del parámetro de suavizado; posible pérdida de stick-slip	[1], [21], [23]
NSD	Fricción no suave con cambios de régimen	Captura stick-slip y activación consistente	Mayor complejidad conceptual/numérica	[22]

II. IV. Metodologías de diseño y optimización reportadas en la literatura

Las metodologías de diseño y optimización se entienden como el procedimiento sistemático para definir los parámetros clave de los elementos analizados, en el contexto de los RFD son momento resistente (M_f), cantidad y ubicación, de modo que cumplan los objetivos de desempeño previsto en su vida útil.

En la práctica estas metodologías combinan un modelo estructural, un marco de análisis, métricas de desempeño y un conjunto de restricciones de diseño o constructivas. Dado que la relación entre los parámetros de diseño de los RFD y su respuesta estructural es altamente no lineal el diseño de estos, raramente se reduce a un problema de resolución directa. Por ello se han desarrollado métodos de ajuste iterativo o búsqueda global, como es el uso de algoritmos genéticos o meta-heurísticos, para dar solución a este problema combinatorio.

II. IV. I. Método iterativo

El método iterativo, también conocido como procedimiento de búsqueda secuencial, propuesto por [25], plantea la incorporación de amortiguadores viscoelásticos mediante una estrategia iterativa. El método inicia evaluando la estructura sin disipadores e identificando una ubicación crítica a partir de la deriva entrepisos; con base en esta condición, es posible definir no solo la ubicación prioritaria del dispositivo, sino también la demanda de fuerza asociada a su desempeño en dicho nivel.

Una vez integrado el disipador de energía en la ubicación crítica, se reanaliza la estructura considerando la rigidez y el amortiguamiento añadidos por el dispositivo. A partir de la respuesta actualizada se vuelve a identificar una nueva ubicación crítica y el procedimiento se repite de forma secuencial hasta completar el conjunto de disipadores, o bien hasta que las iteraciones ya no produzcan mejoras significativas en la respuesta objetivo.

Este método pese a presentar resultados aceptables, bajo planteamiento simple considera despreciable la interacción entre amortiguadores, la cual de acuerdo con otras investigaciones puede resultar más crítica. Por ello sistemas de búsqueda avanzados son necesarios para abordar el problema de manera óptima.

II. IV. II. Algoritmos metaheurísticos énfasis en algoritmos genéticos

A diferencia del algoritmo de búsqueda secuencial el cual simplifica el problema de diseño para obtener una solución viable, y fácil de calcular, al costo de perder múltiples soluciones de mayor

impacto, los algoritmos metaheurísticos aplican técnicas de búsqueda avanzada a problemas combinatorios, permitiendo ubicar soluciones más cercanas al óptimo global [13].

Uno de los tantos algoritmos metaheurísticos que se han desarrollado son los algoritmos genéticos (GA), los cuales basan su estrategia de búsqueda de soluciones de la misma manera que la naturaleza ha desarrollado los procesos evolutivos [13], [26].

En términos simples los GA seleccionan una población inicial de soluciones, y mediante el uso de estrategias de búsqueda y explotación; cruce; mutación; selección, logra mejorar el desempeño de los individuos de manera holística. Tanto el uso de algoritmos metaheurísticos como GA, han sido utilizados como herramienta de optimización para el diseño de disipadores de energía, así como RFD específicamente, reportando convergencia a resultados óptimos.

Es así como, para disipadores por fricción, la literatura reporta formulaciones donde las variables de diseño incluyen parámetros geométricos del dispositivo como también su distribución y capacidad resistente. Fallah y Honarparast [5] plantean el uso de un GA especializado conocido como NSGA-II, para obtener diseños que satisfagan simultáneamente varios objetivos de respuesta y, además, abordar la colocación óptima de disipadores Pall bajo un enfoque multiobjetivo.

En el caso específico de los RFD, se han propuesto diferentes condiciones de optimización, tanto para sus propiedades geométricas, como sus variables de diseño, evaluados con análisis dinámicos y criterios ligados al desempeño. Destacan en el estudio de esta línea los trabajos realizados por Jarrahi et al. [2], [3], [7], donde la ubicación y parámetros del RFD se tratan como variables de diseño y se minimiza una razón asociada a la energía de entrada y energía disipada por los dispositivos.

A su vez los trabajos realizados por Moghaddam et al [9] reportan soluciones prácticamente idénticas entre algoritmos metaheurísticos, validando el uso de cualquiera de estos considerando como criterio su convergencia, sin embargo, presentan diferencias marcadas en el número de análisis no lineales requeridos, lo cual es crítico cuando los recursos computacionales son limitados.

En la Tabla 3 se presenta una síntesis de las principales investigaciones relativas a la optimización de disipadores de energía.

Tabla 3 Síntesis de estudios realizados donde se aplican Algoritmos Metaheurísticos para el diseño de disipadores de energía

Algoritmo usado	Variable optimizada	Resultados principales	Limitaciones	Referencia
Búsqueda global y verificación iterativa	Coeficientes de amortiguamiento;	Cumple IDR; distribución depende de rigidez por nivel	1 sismo de diseño; verificación lineal; modelo simplificado	[12]
NSGA-II	Marco 10 niveles con Pall FD, F_{slip} y ubicación	Reducción de demanda global	Requiere selección final; sensible a objetivos/registros; costo computacional	[5]
Múltiples (GA/PSO/SA)	Distribución + F_{slip} con objetivo/restricción IDR	Calidad similar; AOT mucho más eficiente (menos análisis)	Depende de IDR objetivo y convergencia; sensible a conjunto sísmico	[9]
BRPSO	Ubicación, M_f , h_a	Aumento en Energía disipada; mejoría capada respecto a cantidad de RFD	TH no lineal costoso; dependencia de registros	[3]

II. V. Síntesis crítica: discrepancias, comparabilidad y delimitación del problema

Pese a los múltiples estudios realizados respecto a los disipadores de energía y en particular RFD, los resultados reportados no son directamente comparables. Esto debido principalmente a la formulación y limitaciones representativas del modelo; el marco de análisis para su evaluación; el modelo estructural; las consideraciones de este; y principalmente las métricas de desempeño

utilizadas para su evaluación. Tal situación ha derivado en la imposibilidad de identificar tendencias entre investigaciones y el desarrollo de soluciones sesgadas de acuerdo con los criterios propuestos sin abordar un punto en común entre ellas

En la Tabla 4, se presenta una síntesis de las principales diferencias entre los estudios realizados, señalando las diferencias entre los modelos estructurales utilizados para el análisis, los criterios de evaluación, la técnica de modelación, y sus hallazgos principales.

Tabla 4 Comparativa de estudios respecto a la optimización de RFD y otros disipadores

Dispositivo	Variables de diseño consideradas	Estructura estudiada	Modelado de fricción	Análisis sísmico	Métricas reportadas	Hallazgo principal	Ref
RFD	M_f y h_a	SMRF inelástico de 1 nivel	Hinge zeroLength elasto-plástico en OpenSees (Modelo equivalente)	Ajuste con registro artificial y evaluación con cuatro sismos reales	Desplazamiento máximo y residual, energía histórica acumulada	Reducciones 54% desplazamiento, 75% residual, 97% energía histórica	[3]
RFD	Ubicación y M_f	SMRF de 10 niveles	Hinge zeroLength elasto-plástico en OpenSees (Modelo equivalente)	Historia-tiempo no lineal con 10 sismos artificiales	Energía de entrada vs histórica, respuesta global	Integra ubicación y parámetros en una sola búsqueda global	[7]
RFD	Parámetros RFD dentro	SMRF de 6 niveles	Hinge zeroLength elasto-plástico en OpenSees (Modelo equivalente)	SSI con método directo, 4 sismos reales	Energía, demanda global, deriva máxima	SSI modificar de forma importante la demanda	[2]

RFD	Rango óptimo de M_f	Marcos de 1, 3 y 5 niveles	NSD con midpoint	Excitación armónica y registro El Centro	Desplazamientos relativos, aceleraciones absolutas, criterios cr1 cr2	Rango óptimo amplio y casi independiente del número de niveles	[22]
Disipadores	Coeficientes de amortiguamiento	SMRF de 6 niveles	Fricción por parámetros de deslizamiento	Historia-tiempo lineal	ζ añadido, IDR	Método simple con búsqueda global y verificación iterativa	[12]
Disipadores de fricción	Drift máximo y slip threshold force	SMRF de 4, 8 y 16 niveles	Fricción por parámetros de deslizamiento	Análisis dinámico no lineal paso a paso	Deriva entrepiso, distribución de fuerzas de deslizamiento	El enfoque adaptativo reduce peso computacional	[9]

III. Fundamentación teórica.

A continuación, se presentan los fundamentos teóricos que conforman la estructura metodológica de la presente investigación. Se inicia explicando el concepto y técnica implementada para la elaboración del Análisis Dinámico No lineal Paso a Paso, la discretización mediante la regla del punto medios, la evaluación de la respuesta máxima del modelo.

Posteriormente se aclaran en tres secciones el funcionamiento, a nivel mecánico de los RFD, seguidamente de los criterios de desempeño para evaluar la calidad de las soluciones estructurales integradas para el RFD y las estrategias actuales para su modelación y calculo.

Por último se presentan los conceptos esenciales de los algoritmos genéticos, explicando su funcionamiento basado en su bio-inspiración y a nivel lógico matemático, además de las funciones de exploración y explotación que definen su comportamiento.

III. I. Análisis dinámico no lineal paso a paso

El análisis no lineal tiempo historia o por sus siglas en ingles NLTHA (*Nonlinear time-history analysis*), es un algoritmo matemático capaz de calcular el comportamiento dinámico de una estructura en cualquier instante dada una condición inicial y una excitación externa y dependiente del tiempo, comúnmente un registro sísmico aplicado como una aceleración en la base de la estructura.

Su funcionamiento versa en la actualización constante a cada paso de tiempo de las variables de desplazamiento, velocidad y aceleración de los nodos de interés, unido al conocimiento del comportamiento elástico y/o plástico de los materiales que describen la interacción entre los nodos analizados.

III. I. I. Análisis tiempo historia regla del punto medio.

Para la resolución del NLTHA, se parte de la ecuación general del movimiento descrita en la ecuación (1)

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = M R \ddot{s}(t) \quad (1)$$

Donde M, C, K son las matrices de Masa, Amortiguamiento y Rigidez respectivamente, así como $\ddot{u}, \dot{u}, u$ son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento respectivamente, y

$R \ddot{s}(t)$ representa el registro de aceleraciones utilizado para este análisis. La regla del punto medio implícita se formula imponiendo equilibrio y cinemática evaluados en el punto medio temporal $t_{k+1/2} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$.

De tal forma que, a cada paso de tiempo en el NLTHA, sea $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Se definen los promedios de acuerdo con la ecuación (2) y (3):

$$\mathbf{x}_{k+1/2} = \frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2} \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{k+1/2} = \frac{\dot{\mathbf{x}}_{k+1} + \dot{\mathbf{x}}_k}{2}. \quad (3)$$

A su vez la regla del punto medio introduce las siguientes relaciones cinemáticas de acuerdo con las ecuaciones (4) y (5):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_{k+1/2} \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{k+1} = \dot{\mathbf{x}}_k + \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_{k+1/2} \quad (5)$$

Generando de tal forma el equilibrio dinámico que se impone en el punto medio de acuerdo con la ecuación (6):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{k+1/2} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_{k+1/2} + \mathbf{K} \mathbf{x}_{k+1/2} = \mathbf{p}_{k+1/2}. \quad (6)$$

III. I. II. Resultados de NLTHA, máximos, historias y energía

El resultado de utilizar NLTHA como herramienta de análisis es el conjunto de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en el dominio del tiempo del análisis, para cada uno de los grados de libertad definidos en el modelo, y comúnmente presentados y sintetizados como histogramas de respuesta.

Es mediante este conjunto de respuestas que se deriva el cálculo de criterios de desempeño global en el dominio del tiempo, como son las derivas entrepiso, aceleraciones de azotea y

cortante basal, además de criterios de desempeño local como son las fuerzas internas, deformaciones y rotaciones. Es así como el NLTHA aventaja a otros tipos de análisis en precisión no solo de estimar con mayor certeza valores máximos de los criterios ya mencionados anteriormente, sino en permitir identificar el cuándo y cómo se desarrollan estas concentraciones de demanda.

Dado que el uso de este análisis genera cantidades masivas de información es habitual únicamente concentrarse la síntesis de los resultados máximos absolutos, no obstante, son de igual importancia las condiciones finales del modelo, conocidas como valores residuales, y en el cálculo de energía soportado por el modelo, ya que en la evaluación de modelos con sistemas disipadores de energía este último criterio nos permite evaluar la eficiencia de la solución implementada.

III. II. Amortiguadores de fricción rotacionales (RFD)

III. II. I. RFD, mecanismo rotacional y variable resistente M_f

El RFD es un mecanismo capaz de convertir el desplazamiento relativo entre dos niveles de un marco en una rotación relativa en una articulación friccionante. En el esquema de análisis planteado por Namorado et al. en [22], la articulación friccionante, representada en la Figura 3 en el punto C, es el elemento encargado de disipar energía.

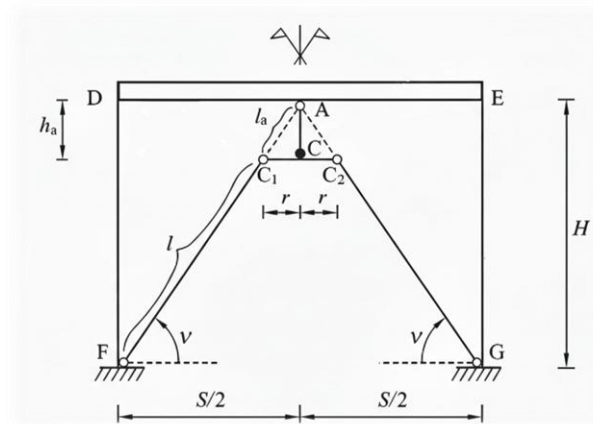


Figura 3 Esquema de análisis geométrico de un marco integrando un RFD

Para su modelación se deben considerar la variable resistente clave del RFD, el momento máximo de fricción M_f , el cual representa el momento par mínimo necesario para generar

rotación relativa en la articulación friccionante. En este método de modelación de fricción seca tipo Coulomb, esta resistencia se idealiza como independiente de la velocidad.

Namorado et al. [22] expresan la ley momento-velocidad angular del dispositivo mediante una inclusión algebraica de la ecuación:

$$M(\dot{\theta}) \in -M_f \text{Sign}(\dot{\theta}) \quad (7)$$

Donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular relativa en la articulación friccionante y $\text{Sign}(\cdot)$ es la función signo multivaluada. Y es mediante esta función que se captura de manera directa el cambio de régimen adherencia-deslizamiento (stick-slip) mediante el uso de las ecuaciones no lineales :

$$\text{Sign}(\dot{\theta}) = \begin{cases} -1, & \dot{\theta} < 0 \\ [-1, +1], & \dot{\theta} = 0 \\ +1, & \dot{\theta} > 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$M(\dot{\theta}) = \begin{cases} +M_f, & \dot{\theta} < 0 \\ [-M_f, +M_f], & \dot{\theta} = 0 \\ -M_f, & \dot{\theta} > 0 \end{cases} \quad (9)$$

Esta representación del fenómeno stick-slip interpreta que cuando $\dot{\theta} \neq 0$ se presenta una rotación relativa, de tal manera que el momento toma magnitud constante $|M| = M_f$, mientras que cuando $\dot{\theta} = 0$, se presenta la adherencia, y el momento puede tomar cualquier valor dentro del rango $[-M_f, +M_f]$ lo cual representa un estado de “stick” donde el dispositivo transmite momento hasta alcanzar el M_f .

III. II. II. Criterios de evaluación del desempeño de RFD

La integración de RFD en marcos de acero apunta a la reducción de desplazamientos laterales de la estructura en cuestión, de igual manera incrementa el desempeño de la estructura con reducciones significativas de la aceleración y los esfuerzos a cortante resistidos por la estructura principal. De tal forma que los criterios de evaluación apuntan a medir estas reducciones,

respecto a la estructura sin amortiguadores, para ello se definen los criterios $R1, R2, R3$, descrito en las ecuaciones (10), (11) y (12) :

$$R1 = \left| \frac{X_{Nfmax}}{X_{0fmax}} \right| \quad (10)$$

$$R1 = \left| \frac{\ddot{X}_{Nfmax}}{\ddot{X}_{0fmax}} \right| \quad (11)$$

$$R1 = \left| \frac{F_{bf}}{F_{b0}} \right| \quad (12)$$

Siendo X_{Nfmax} y X_{0fmax} , el desplazamiento máximo relativo al terreno del piso superior N con y sin dispositivos RFD respectivamente; $\ddot{X}_{Nfmax}$ y $\ddot{X}_{0fmax}$, la aceleración absoluta máxima del piso superior N con y sin RFD respectivamente ; F_{bf} y F_{b0} siendo el cortante basal sísmico máximo con y sin RFD respectivamente.

Para sintetizar todos estos índices se definen los criterios globales de desempeño descritos como $CR1$ y $CR2$ en la ecuación (13) y (14):

$$CR1 = \sqrt{R1^2 + R2^2} \quad (13)$$

$$CR1 = \sqrt{R1^2 + R2^2 + R3^2} \quad (14)$$

Siendo una normalización Gaussiana de los criterios base y permitiendo comparar de manera simple y directa la evaluación de diferentes soluciones estructurales.

III. II. III. Modelos constitutivo en dinámica no suaves

Cuando un sistema estructural integra amortiguadores de fricción rotacionales su análisis debe incorporar un comportamiento no lineal, el cual se rige por la ley de Coulomb. Mualla en [21] señala ciertas estrategias de equivalencia para la inclusión de este tipo de dispositivos como un amortiguador visco elástico, sin embargo estrategia pese a ser una buena aproximación se aleja

de la precisión respecto aumenta la resistencia (M_f) del dispositivo, en la Figura 4 se observa la diferencia entre el comportamiento de elementos friccionantes regidos por la ley de Coulomb, el modelo de elementos viscoelásticos y la aproximación de Mualla.

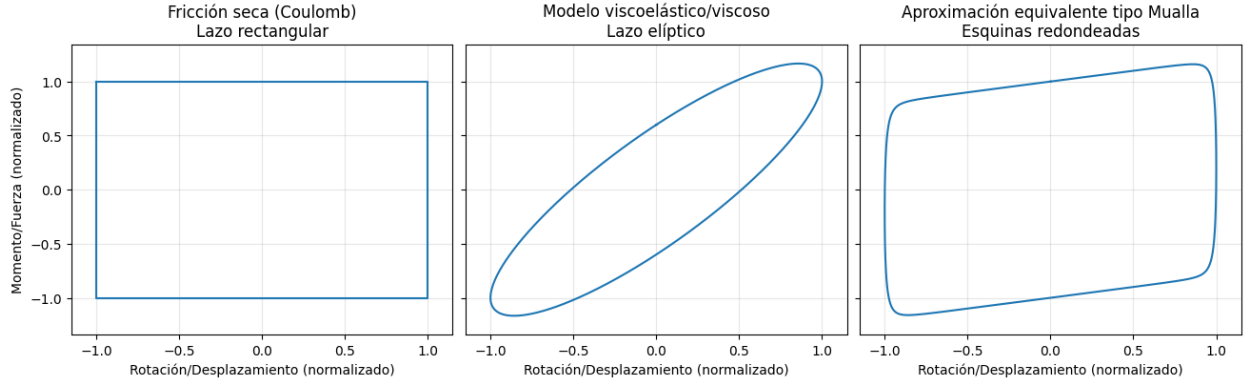


Figura 4 Comparación entre ciclos histereticos y modelación aproximada por Mualla [21]

Por este motivo Namorado en [22] propone la integración de la dinámica no suave como descriptor del comportamiento característicos de los RFD, (*stick-slip*), para ello propone la integración de una matriz de acoplamiento W y un vector que agrupa las acciones del RFD conocido como Q_f , convirtiendo la ecuación (1) en la ecuación (15)

$$M \Delta a + C \Delta v + K \Delta u + W Q_f = -MR \ddot{s}(t) \quad (15)$$

Donde Q_f es de la forma descrita en la ecuación (16).

$$Q_f = \begin{cases} -M_{f1} \text{Sign}(\dot{\theta}_1) \\ -M_{f2} \text{Sign}(\dot{\theta}_2) \\ \vdots \\ -M_{fn} \text{Sign}(\dot{\theta}_n) \end{cases} \quad (16)$$

En este contexto M_f representa el momento máximo de fricción del dispositivo y $\dot{\theta}$ la velocidad angular relativa. La forma en que Namorado resuelve esta inclusión es mediante el uso de una ecuación algebraica equivalente basada en el operador proyección. Mediante este proceso se trabaja con el impulso friccionante, el cual es la integral de la fuerza friccional en un incremento Δt . En términos algebraicos se entiende como la ecuación (17).

$$z \in a \text{ Sign}(v) \Leftrightarrow z = \text{proj}_{[-a,a]}(z - \alpha v), \alpha > 0 \quad (17)$$

Donde v es la velocidad relativa al desplazamiento angular, z el impulso, y a es el limite del impulso impuesto por la fricción y α es un parámetro positivo que afecta la rapidez de convergencia, Namorado recomienda $\alpha = 1$.

El operador queda definido en la ecuación (18) como:

$$\text{proj}_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} -a, & x \leq -a \\ x, & -a < x < a \\ a, & x \geq a \end{cases} \quad (18)$$

De tal forma que el impulso a cada paso queda acotado por construcción matemática en el rango $[-a, a]$.

La implementación de este método basa su integración mediante la regla de punto medio, y se describe a continuación.

- i) Para cada paso $t_i \rightarrow t_{i+k}$ definir la matriz $\tilde{M}$ mediante la ecuación (19) así como el vector efectivo $\tilde{F}$ con la ecuación (20).

$$\tilde{M} = M + \frac{\Delta t}{2} C + \frac{\Delta t^2}{4} K, \quad (19)$$

$$\tilde{F} = \left[M - \frac{\Delta t}{2} C - \frac{\Delta t^2}{4} K \right] \dot{x}_k - \Delta t K x_k - \frac{\Delta t}{2} M \ddot{d}_{k+1} + \ddot{d}_k \quad (20)$$

- ii) Se calcula el impulso de fricción i_f mediante la ecuación (21)

$$i_{fj}^{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} q_{f,j}(t) dt \quad (21)$$

Los cuales deben mantenerse en un rango definido por la cota de Coulomb en la ecuación (22):

$$i_{fj}^{k+1} = \epsilon [-F_{fj}\Delta t, F_{fj}\Delta t] \quad (22)$$

iii) Posteriormente se define una predicción de la velocidad sin la presencia del amortiguador, mediante la ecuación (23).

$$\dot{x}_{k+1}^0 = \tilde{M}^{-1} \tilde{F} \quad (23)$$

iv) Continuando se realiza una iteración interna evaluando el predictor mencionado en el paso anterior respecto a un corrector, Namorado define que el vector Q_f a partir del dispositivo $j \geq 2$ depende de la ecuación (24).

$$v_j^{rel} = x_j - \dot{x}_{j-1}, v_1^{rel} = \dot{x}_1 \quad (24)$$

De forma que para el caso de cada dispositivo define un predictor que describirá un impulso tentativo mediante la ecuación (25).

$$p_{f,j}^{i+1} = i_{f,j}^i - \alpha v_j^{rel}(\dot{x}_{k+1}^i), \alpha > 0 \quad (25)$$

Posteriormente se proyecta el valor del predictor al intervalo del rango admisible descrito en 7 mediante la ecuación (26).

$$i_{f,j}^i = proj_{[-F_{f,j}\Delta t, F_{f,j}\Delta t]}(p_{f,j}^{i+1}) \quad (26)$$

v) Una vez recalculado $i_{f,j}^i$ se corrige la velocidad mediante la ecuación (27).

$$x_{k+1}^{l+1} = \tilde{M}^{-1}(\tilde{F} + W l_f^{l+1}) \quad (27)$$

Para asegurar la convergencia de este modelo se considera como criterio de parada el error absoluto del orden de 10^8 , su calculo se define en la ecuación (28).

$$abserror = \max\{\|\dot{x}_{k+1}^{i+1} - \dot{x}_{k+1}^i\|, \|i_f^{i+1} - i_f^i\| \} \quad (28)$$

vi) Por último, se actualiza mediante la regla del punto medio el desplazamiento mediante las velocidades con la ecuación (29).

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{2}(\dot{x}_{k+1} + \dot{x}_k) \quad (29)$$

Todo el proceso se repite para cada paso del registro sísmico ingresado.

III. III. Algoritmos genéticos.

Los algoritmos genéticos son una herramienta especializada para la búsqueda y optimización de problemas no lineales, su mecanismo está inspirado en la evolución biológica, específicamente en la selección natural y la transmisión de información genética. Su desarrollo se atribuye a los estudios realizados por Holland [27].

El principio operativo de estos algoritmos consiste en trabajar en un conjunto de soluciones candidatas, denominadas población, y conformadas por individuos, las cuales mediante las mismas estrategias que encontramos en la naturaleza evolucionan generando así nuevas generaciones de soluciones.

En cada generación de soluciones, los individuos se evalúan mediante una medida cuantitativa denominada aptitud o función Fitness, y es en base a esta aptitud que se generan los individuos de la siguiente generación, utilizando operadores de selección, cruza y mutación.

El objetivo de estas estrategias es dirigir a las nuevas generaciones hacia regiones del espacio de soluciones con mejor desempeño, procurando la diversidad genética entre los individuos y así evitar el estancamiento en óptimos locales.

En el siguiente diagrama se observa el ciclo completo de un GA, y su funcionamiento.

1. Generación de una población inicial
2. Evaluación de la adaptación de cada individuo
3. Selección de padres respecto a su desempeño
4. Recombinación y mutación de descendientes
5. Formación de una siguiente generación. Repetir hasta cumplir criterio de termino.

III. III. I. Representación, genotipo, fenotipo y función fitness

La interpretación material de los algoritmos genéticos se describe mediante un conjunto ordenado de valores, denominado genes y en su conjunto se denomina cromosomas. Siendo los cromosomas el objeto a manipular por el algoritmo genético mediante los operadores de selección, cruce y mutación.

De cada individuo se desprenden dos conceptos el Genotipo, el cual es la codificación de variables o el cromosoma como ya mencionamos, y el fenotipo, el cual es la solución en el dominio del problema, y que se conoce como la interpretación del cromosoma.

Para cada conjunto de genotipo y fenotipo se desprende la función objetivo y representa la adaptación del individuo, esta función se debe diseñar con el objetivo de indicar al algoritmo el desempeño de la respuesta, comúnmente son funciones de maximizar o minimizar un valor en específico, sin embargo, se puede adaptar la respuesta objetivo mediante el uso de penalizaciones, de igual manera las funciones objetivos pueden ser únicas o múltiples, dependiendo la naturaleza del problema.

El uso de penalizaciones permite imponer restricciones al dominio de respuestas, permitiendo de tal forma que la aptitud efectiva del individuo sea calculada a partir del desempeño del fenotipo y del grado de violación de restricciones, de modo que soluciones inviables resulten sistemáticamente menos competitivas que las viables.

III. III. II. Selección

Dada una población con su fenotipo evaluado se realiza una selección de los mejores individuos mediante una selección aleatoria, sin embargo, los mejores individuos poseen mayores rangos de selección. Para ello se utiliza tradicionalmente una asignación de la forma descrita en la ecuación (30).

$$p_{j,t}^{prop\%} = \frac{g(I_{i,t})}{\sum_{j=1}^{\lambda} g(I_{i,t})} \quad (30)$$

Siendo:

$p_{j,t}^{prop\%}$: La probabilidad de un individuo de ser seleccionado

$g(I_{i,t})$: El valor numérico de la función fitness, o el fenotipo

λ : La población de la generación evaluado

Se debe considera que este tipo de selección puede generar una fuerte selección a un tipo de genotipos en las etapas tempranas de la evaluación, por lo que se recomienda el uso de una selección por rango, mediante la ecuación (31)

$$p_{j,t}^{prop} = \frac{rango(g(I_{i,t}))}{\lambda(\lambda + 1)/2} \quad (31)$$

Es uso de la selección por rango premia el comportamiento exploratorio del algoritmo, lo cual lleva mantiene los niveles de diversidad a costa de mayores tiempo de convergencia. Ambas estrategias de selección pueden ser integradas en un modelo dinámico, y más complejo

III. III. III. Cruce

El cruce de soluciones consiste en generar un nueva individuo basado en los genotipos de la generación pasada, mediante la selección complementaria de una porción del genotipo de dos individuos padres, de tal forma que se describan como:

Sea el conjunto de cromosomas padres,

$$(I_{i,t})_{P1} = (x_1, x_2, \dots, x_l) \text{ y } (I_{i,t})_{P2} = (y_1, y_2, \dots, y_l)$$

y un punto de corte $k \in \{1, 2, \dots, l-1\}$, sean los hijos

$$(I_{i,t})_{H1} = \begin{cases} x_i, & 1 \leq i \leq k \\ y_i, & k < i \leq l \end{cases} \text{ y } (I_{i,t})_{H2} = \begin{cases} y_i, & 1 \leq i \leq k \\ x_i, & k < i \leq l \end{cases}$$

III. III. IV. Mutación

La mutación es una operación de carácter multiplicativo o sumatorio de bajo orden de magnitud, a un cromosoma aleatorio, esta acción se realiza con el objetivo preservar la diversidad y asegurar que todas las regiones del espacio de búsqueda mantengan la probabilidad de ser exploradas.

III. III. V. Reemplazo

El reemplazo define la población de la siguiente generación. El modelo más simple de reemplazo sustituye completamente a los padres por los descendientes. Sin embargo, existen estrategias más avanzadas de selección, como el elitismo, donde una fracción de los mejores individuos se preserva para garantizar que el mejor desempeño encontrado no se pierda por efectos aleatorios de cruce o mutación.

III. III. I. Manejo de restricciones

Los GA manejan restricciones al problema en forma de penalizaciones a la respuesta fitness, es decir que la aptitud que puede llegar a tener una solución se ve modificada de acuerdo con el nivel de violación. Tal situación se puede definir de como:

Sea una función objetivo $J(I)$ y $v(I)$ cuantifica la violación de restricciones, se define una función penalizada $J_p(I) = J(I) + \Phi(v(I))$, donde $\Phi(\cdot)$ es una función contraria al objetivo de la función objetivo (Negativa - Maximizar, Positiva - Minimizar) que crece respecto al criterio de violación. Tal penalización puede ser lineal, cuadrática o con crecimiento más severo, y puede ser estática o ajustarse dinámicamente durante la evolución para equilibrar exploración y explotación.

Algoritmo 1 Pseudocódigo de algoritmo genético

Generar la población inicial $P = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ mediante muestreo aleatorio uniforme dentro del dominio acotado por $bounds \in \mathbb{R}^{d \times 2}$.

Definir el operador de aptitud (función objetivo) $\varphi(x) = fitness(x)$, donde $\varphi(x)$ es un escalar por minimizar.

Identificar la mejor solución inicial: $x^* = \arg \min\{x \in P\} \varphi(x)$

Inicializar el registro de convergencia: $H = \emptyset$

Mientras $gen \leq G_max$ hacer

Identificar el subconjunto $Elite \subset P$ compuesto por los E individuos con menor valor de $\varphi(x)$.

Inicializar el conjunto de descendencia: $Q = \emptyset$.

mientras $|Q| < (N - E)$ hacer

Seleccionar progenitores $p_1, p_2 \in P$ mediante el operador de selección $S(P)$.

Si $rand(0, 1) \leq p_c$, **entonces** aplicar cruce:

$$(h_1, h_2) = \text{cruza}(p_1, p_2)$$

Si no realizar clonación: $h_1 = p_1$ $h_2 = p_2$

Si $rand(0, 1) \leq p_m$, **entonces** mutar : $h_1 = \text{mutacion}(h_1)$.

Si $rand(0, 1) \leq p_m$, **entonces** mutar : $h_2 = \text{mutacion}(h_2)$.

Actualizar descendencia: $Q \leftarrow Q \cup \{h^1\}$

Si $|Q| < (N - E)$, **entonces**: $Q \leftarrow Q \cup \{h_2\}$

fin mientras

Definir la nueva generación: $P \leftarrow Elite \cup Q$.

Determinar el óptimo de la generación: $x_gen = \arg \min\{x \in P\} \varphi(x)$.

Si $\varphi(x_{gen}) < \varphi(x^*)$,

actualizar: $x^* \leftarrow x_{gen}$.

Si no actualizar registro de convergencia:

$H \leftarrow H \cup \{\varphi(x^*)\}$.

Si *criterio de paro*(H) = Verdadero,

entonces romper.

Si no incrementar contador: $gen \leftarrow gen + 1$.

fin mientras

fin

Retornar x^* como el vector solución óptimo aproximado.

IV. Hipótesis.

La ubicación óptima de amortiguadores de fricción rotacional en estructuras de marcos de acero constituye una familia de soluciones, regida por un patrón matemático dependiente de la masa y la rigidez de la estructura, y cuya caracterización es descriptible mediante el análisis de poblaciones generadas por algoritmos genéticos.

V. Objetivos.

V. I. Objetivo general.

Desarrolla un patrón matemático que rige la distribución óptima de amortiguadores de fricción rotacional en estructuras de marcos de acero, mediante el análisis estadístico de poblaciones generadas por algoritmos genéticos, estableciendo su dependencia respecto a la masa y la rigidez de la estructura.

V. II. Objetivos específicos.

1. Implementar un modelo numérico parametrizable de una estructura de marcos de acero que integre el comportamiento de los RFD para su simulación dinámica.
2. Desarrollar un proceso de optimización mediante algoritmos genéticos orientado a MINIMIZAR el coeficiente CR1 y CR2, capaz de identificar conjuntos de soluciones eficientes.
3. Analizar estadísticamente la dispersión y convergencia de las soluciones generadas para delimitar la zona de eficiencia óptima.
4. Establecer la correlación entre la ubicación de los dispositivos y los coeficientes CR1 y CR2 respecto a las propiedades de la estructura (masa y rigidez).
5. Validar la eficiencia de la metodología de optimización propuesta respecto a los resultados obtenidos mediante el algoritmo de búsqueda secuencial y muestra estadística.

VI. Metodología.

La presente investigación es de tipo básico en la línea de modelación de elementos físicos, tal forma se caracteriza por ser de tipo cuantitativa, computacional y explicativa, siendo así que mediante la simulación numérica de la respuesta dinámica no lineal de múltiples estructuras y el análisis estadístico para identificar la relación entre la configuración topológica de los RFD en las diferentes estructuras y las métricas de desempeño sísmico CR1 y CR2, el objetivo final sea de carácter comparativo entre la metodología propuesta y el método de integración iterativa propuesto en [14].

El objeto de estudio o unidad de análisis son las configuraciones topológicas de los RFD instalados en estructuras de marcos de acero y modelados como edificios a cortante. Por lo mismo se consideran las siguientes condiciones de la estructura:

1. Masa concentrada por nivel
2. Rigidez lateral equivalente por piso
3. Diafragma rígido.

Y la población está definida por el conjunto de configuraciones posibles al cual nos referiremos de ahora en adelante como Ω donde cada configuración se describe como el vector binario de la ecuación (32):

$$d = [d_1, \dots, d_n], \quad d_i \in \{1, 0\} \quad (32)$$

Donde para cada d se evalúa un conjunto representativo de escenarios estructurales variando su rigidez, masa y número de pisos, y respecto a un conjunto de ocho sismos representativos, produciendo como salida las métricas CR1 Y CR2.

Para análisis profundo del fenómeno estudiado se propone el uso de dos muestras complementarias, con un propósito distinto para cada una:

Muestreo aleatorio (Monte Carlo)

Siendo el subconjunto Ω_{MC} , de un tamaño definido por la ecuación (33)

$$n = \frac{N * z^2 * p (1 - p)}{e^2 * (N - 1) + z^2 * p (1 - p)} \quad (33)$$

Donde:

n	=	Tamaño de la muestra
N	=	Tamaño de la población o universo
Z	=	Parámetro estadístico dependiente del nivel de confianza
e	=	Error de estimación máximo aceptado
p	=	Probabilidad del evento ocurra (suposición al 50%)

Se define una población para cada edificio como:

N	=	<i>Numero de pisos!</i>
e	=	5%
z	=	1.96
p	=	0.5

Donde se seleccionan los vectores **d**, de manera aleatoria mediante la representación de un numero binario de dimensión *Numero de pisos!*. Tal muestra es definida con el objetivo de capturar los efectos principales de los efectos de RFD por nivel sobre los coeficientes CR1 y CR2 de manera estadística y global.

Muestra filtrada mediante algoritmos genéticos: Siendo el subconjunto Ω_{ga} conformado por las configuraciones concentradas en el cumulo de soluciones de alto desempeño, tal muestra es definida con el objetivo de identificar las familias de soluciones equivalentes y sus patrones de colocación.

Siendo las soluciones de alto desempeño aquellas dentro del rango del 5% menor a la respuesta optima CR_m identificado. Y definido en la ecuación (34) :

$$\Omega_{ga} = \{d \in \Omega: CR_m(b) \leq (1 + \delta)CR_m^{min}\}, \delta = 0.05 \quad (34)$$

El procedimiento elaborado para este trabajo consta de cinco etapas principales y sus subetapas, los cuales son definidas de acuerdo con los objetivos particulares expuestos en el capítulo 3.

VI. I. Implementación del modelo parametrizable

Siendo el primer objetivo específico de esta investigación “Implementar un modelo numérico parametrizable de una estructura de marcos de acero que integre el comportamiento de los RFD para su simulación dinámica”. Se desarrollo como elemento base una estructura tipo Benchmark extraída de la literatura y presente en diferentes investigaciones, [2], [14], [25], esto con el objetivo de tener un punto de referencia comparable y reproducible con otras investigaciones y modelaciones.

Tal modelo base se describe como un edificio a cortante (*Shear building*), de múltiples grados de libertad (*Multiple Degrees of Freedom*, MDOF), bidimensional, de igual manera se asume masas contradas en el centro de cada piso, de diafragma rígidos, y a su vez que la rigidez lateral es únicamente soportada por los elementos tipo columna, despreciando el efecto de rotulas plásticas y $P - \Delta$. A continuación, se presenta en la figura Figura 5, la configuración estructural del modelo base.

$$Rigidez (K_5 Pisos) = \begin{bmatrix} 7.07 * 10^5 \\ 4.09 * 10^5 \\ 2.77 * 10^5 \\ 2.49 * 10^5 \\ 1.41 * 10^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.01 * 10^6 \\ 5.84 * 10^5 \\ 3.96 * 10^5 \\ 3.55 * 10^5 \\ 2.02 * 10^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.31 * 10^6 \\ 7.59 * 10^5 \\ 5.15 * 10^5 \\ 4.62 * 10^5 \\ 2.36 * 10^5 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$Rigidez (K_{10 Pisos}) = \begin{bmatrix} 7.07 * 10^5 \\ 7.07 * 10^5 \\ 4.09 * 10^5 \\ 4.09 * 10^5 \\ 2.77 * 10^5 \\ 2.77 * 10^5 \\ 2.49 * 10^5 \\ 2.49 * 10^5 \\ 1.41 * 10^5 \\ 1.41 * 10^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.01 * 10^6 \\ 1.01 * 10^6 \\ 5.84 * 10^5 \\ 5.84 * 10^5 \\ 3.96 * 10^5 \\ 3.96 * 10^5 \\ 3.55 * 10^5 \\ 3.55 * 10^5 \\ 2.02 * 10^5 \\ 2.02 * 10^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.31 * 10^6 \\ 1.31 * 10^6 \\ 7.59 * 10^5 \\ 7.59 * 10^5 \\ 5.15 * 10^5 \\ 5.15 * 10^5 \\ 4.62 * 10^5 \\ 4.62 * 10^5 \\ 2.63 * 10^5 \\ 2.63 * 10^5 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$Rigidez (K_{15 Pisos}) = \begin{bmatrix} 7.07 * 10^5 \\ 7.07 * 10^5 \\ 6.05 * 10^5 \\ 4.25 * 10^5 \\ 4.09 * 10^5 \\ 3.76 * 10^5 \\ 2.93 * 10^5 \\ 2.77 * 10^5 \\ 2.73 * 10^5 \\ 2.54 * 10^5 \\ 2.49 * 10^5 \\ 2.39 * 10^5 \\ 1.66 * 10^5 \\ 1.41 * 10^5 \\ 1.41 * 10^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.01 * 10^6 \\ 1.01 * 10^6 \\ 8.64 * 10^5 \\ 6.07 * 10^5 \\ 5.84 * 10^5 \\ 5.37 * 10^5 \\ 4.19 * 10^5 \\ 3.96 * 10^5 \\ 3.90 * 10^5 \\ 3.63 * 10^5 \\ 3.55 * 10^5 \\ 3.41 * 10^5 \\ 2.37 * 10^5 \\ 2.02 * 10^5 \\ 2.02 * 10^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.31 * 10^6 \\ 1.31 * 10^6 \\ 1.12 * 10^6 \\ 7.89 * 10^5 \\ 7.59 * 10^5 \\ 6.98 * 10^5 \\ 5.45 * 10^5 \\ 5.15 * 10^5 \\ 5.07 * 10^5 \\ 4.72 * 10^5 \\ 4.62 * 10^5 \\ 4.43 * 10^5 \\ 3.08 * 10^5 \\ 2.63 * 10^5 \\ 2.63 * 10^5 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

El elemento original rescatado de la literatura corresponde a la configuración de 10 pisos con una masa por piso de 218 toneladas y una rigidez lateral al arreglo descrito en la $Rigidez (K_{10 Pisos})[N] = [2]$, de la cual se generaron dos modelos estructuras conservando su masa, pero modificando mediante interpolación logarítmica su rigidez, normalizada respecto a su altura. En la Figura 6 se presenta el modelo de rigidez en vista lineal, y a su vez en la Figura 7 el modelo logarítmico normalizado por alturas.

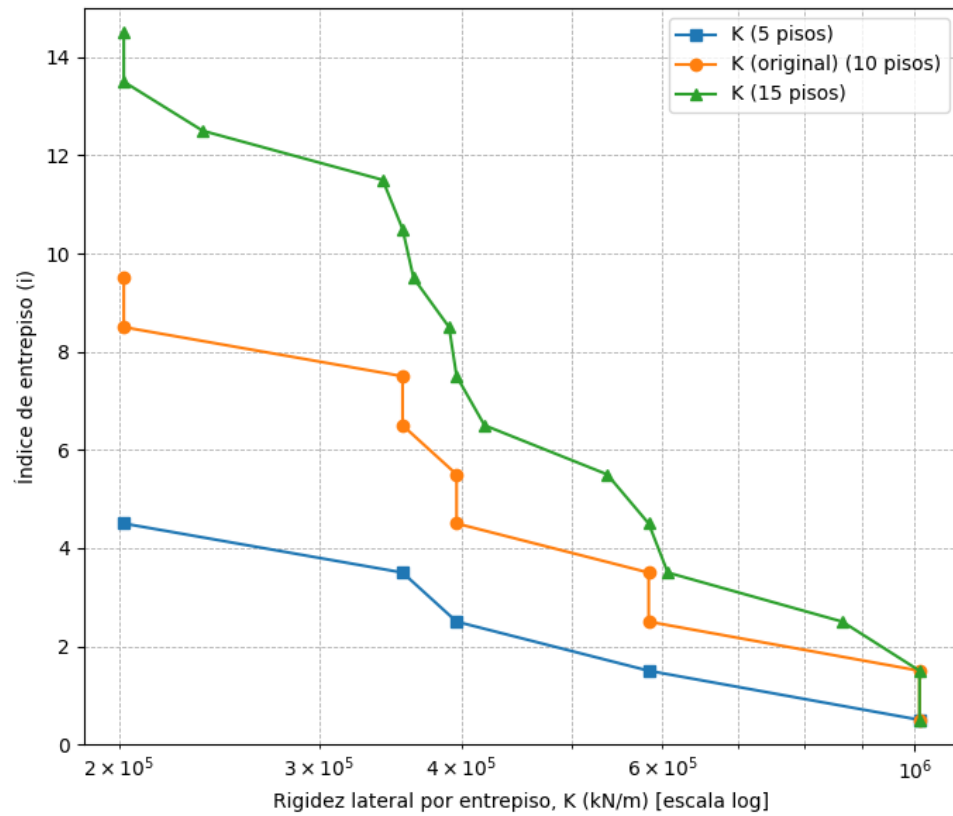


Figura 6 Perfil de rigidez en por piso en escala semilogarítmica

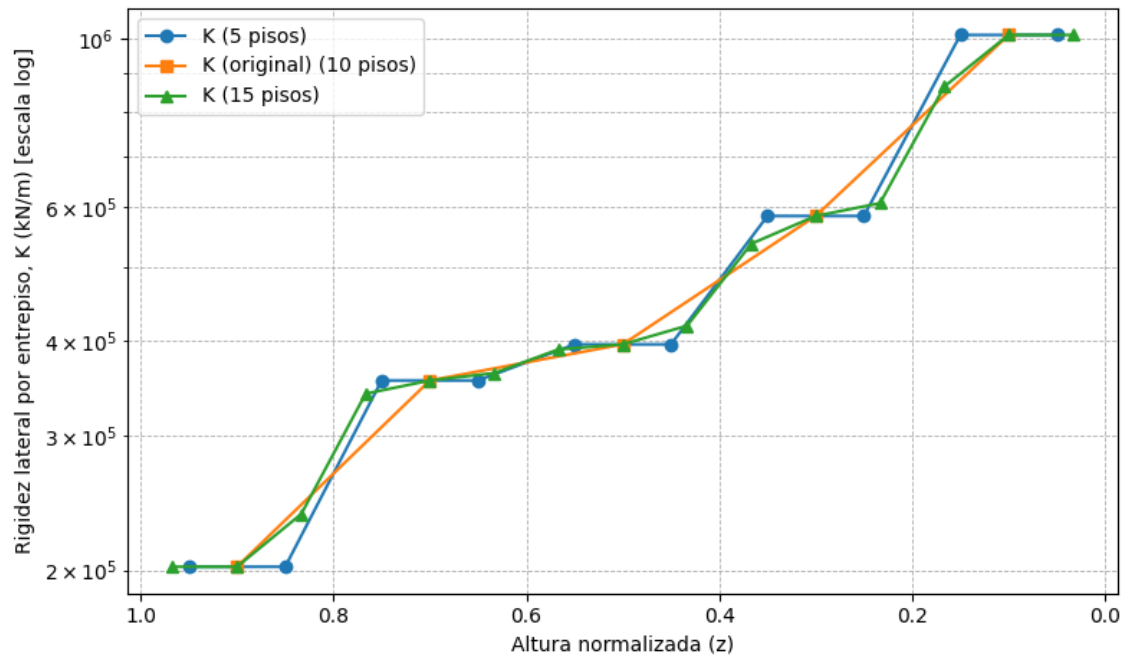


Figura 7 Perfil de rigidez normalizado por alturas

Se opta por un planteamiento normalizado por altura con el fin de mantener sobre la misma línea de referencia la relación rigidez/altura. A su vez con el fin de capturar los efectos debidos a la variación en masa y rigidez se con un aumento y disminución del 30% para poder capturar los efectos relativos a estas variables, el rango de variación se escogió con un margen suficiente para observar los efectos de percolación de la estructura.

Mediante *Python 3.10* [28] se abstraio un vector de fuerzas relativo al comportamiento de los RFD, el cual se nombró como $f_{RFD}(t)$, el cual se conforma de la tupla de valores referentes a la topología, descrito como un vector binario, de igual dimensión que la cantidad de pisos de la estructura evaluada y donde un valor igual a 1 equivale a la existencia de un RFD instalado en esa ubicación, y de la capacidad del momento de fluencia del dispositivo (M_F).

Por último, se replicó el motor de cálculo conformado por el NLTHA utilizando la regla del punto medio e integrando el algoritmo NSD para capturar el comportamiento del modelo estructural de referencia. A continuación, se presenta el meta código de tal motor de cálculo. Y el cual se puede consultar en [22].

Algoritmo 2 Algoritmo NSD aplicado al cómputo de la evolución dinámica de sistemas forzados con amortiguamiento por fricción y barras de arriostramiento axialmente rígidas. Discretización temporal de la evolución dinámica de un sistema amortiguado por fricción.

Mientras $t^{k+1} + \Delta t \leq T_{final}$ **hacer**

Definir $\tilde{M} = M + \frac{\Delta t}{2}C + \frac{\Delta t^2}{4}K$ y $\tilde{F} = \left[M - \frac{\Delta t}{2}C - \frac{\Delta t^2}{4}K\right]\dot{x}^k - \Delta t K x^k - \frac{\Delta t}{2}M\mathbf{1}(\ddot{d}^{k+1} + \ddot{d}^k);$

$x^0 = 0$ y $\dot{x}^0 = 0$, donde $0 = \{0, \dots, 0\}^T \in \mathbb{R}^N$ es el vector nulo de dimensión N ;

Calcular $\dot{x}^{k+1,i} = \tilde{M}^{-1}\tilde{F};$

mientras $error_{abs} > 10^{-8}$ **hacer**

Calcular los $N_{impulsos\ angulars}$ $i_f^{j,k+1,i+1}$ en los dispositivos de amortiguamiento por fricción $j = 1, \dots, N$:

para $j \leftarrow 1$ **hasta** N **hacer**

Predictor: $p_f^{j,k+1,i+1} = i_f^{j,k+1,i} - \alpha(\dot{x}_j^{k+1,i} - \dot{x}_{j+1}^{k+1,i}),$ donde $\alpha > (i_f^{1,1,1} = 0);$

$$\text{Corrector: } i_f^{j,k+1,i+1} = \text{proj}_{[-F_f\Delta t, F_f\Delta t]}(p_f^{j,k+1,i+1});$$

fin mientras

$$\text{Actualizar: } \dot{x}^{k+1,i+1} = \tilde{M}^{-1}(\tilde{F} + W i_f^{k+1,i+1}); 1$$

$$abseerror \leftarrow \max \left\{ \left| \dot{x}^{k+1,i+1} - \dot{x}^{k+1,i} \right|, \left| i_f^{k+1,i+1} - i_f^{k+1,i} \right| \right\}; i \leftarrow i + 1$$

fin mientras

$$\text{Calcular: } x^{k+1} = x^k + \frac{\Delta t}{2} (\dot{x}^{k+1} + \dot{x}^k);$$

$$k \leftarrow k + 1$$

fin mientras

Para asegurar el correcto funcionamiento del algoritmo utilizado se realizó la evaluación del modelo reproducido respecto a la fuente original del modelo, el cual resulto en una reproducción idéntica de resultados al modelo base descrito en [22], y se presentan en la sección de Resultados y discusión.

Durante toda la modelación se integró el uso de ocho sismos en total, seleccionados en respecto a los sismos más comunes en la literatura [2] y de interés personal por la relevancia en el contexto local. A continuación, se presenta de la Figura 8 a la Figura 15 el set de registros sísmicos utilizados para el NLTHA .

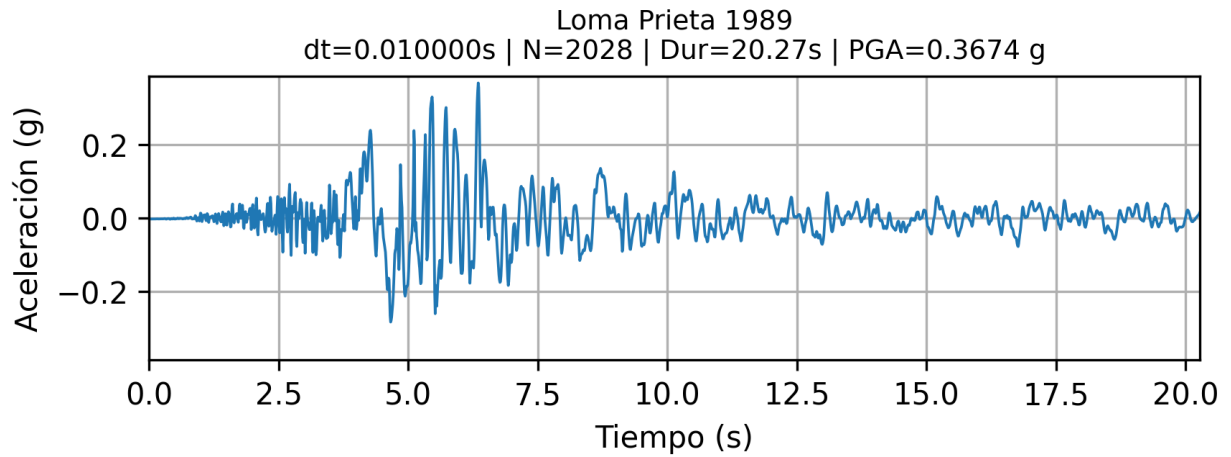


Figura 8 Registro Sísmico Loma Prieta 1989 [29]

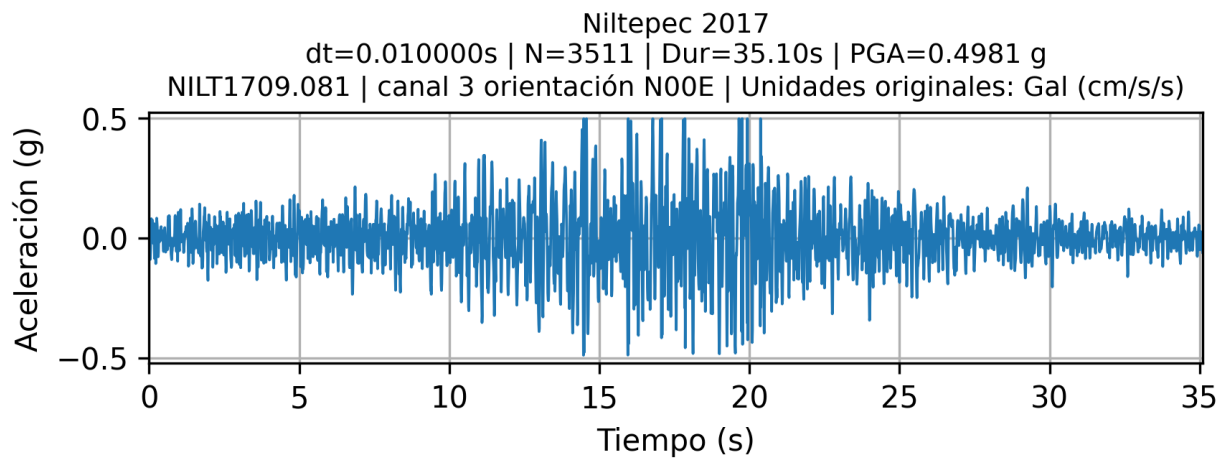


Figura 9 Registro Sísmico Niltepec 2017 [30]

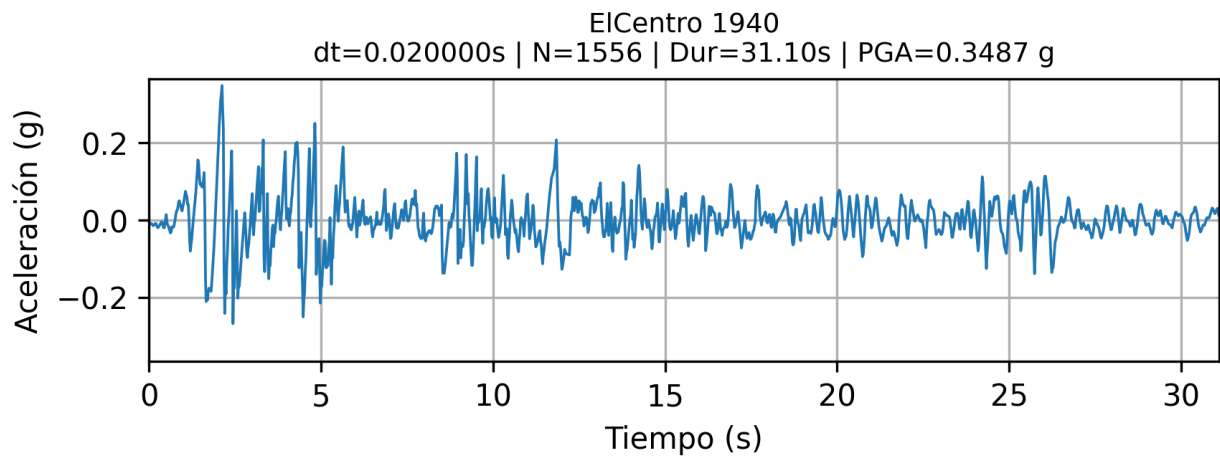


Figura 10 Registro Sísmico El Centro 1940 [29]

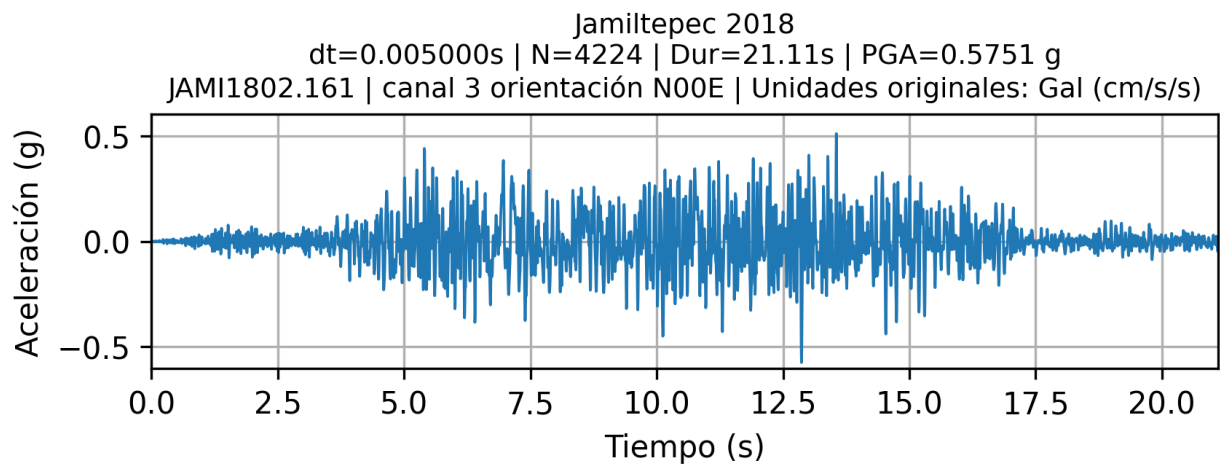


Figura 11 Registro Sísmico Jamiltepec 2018 [30]

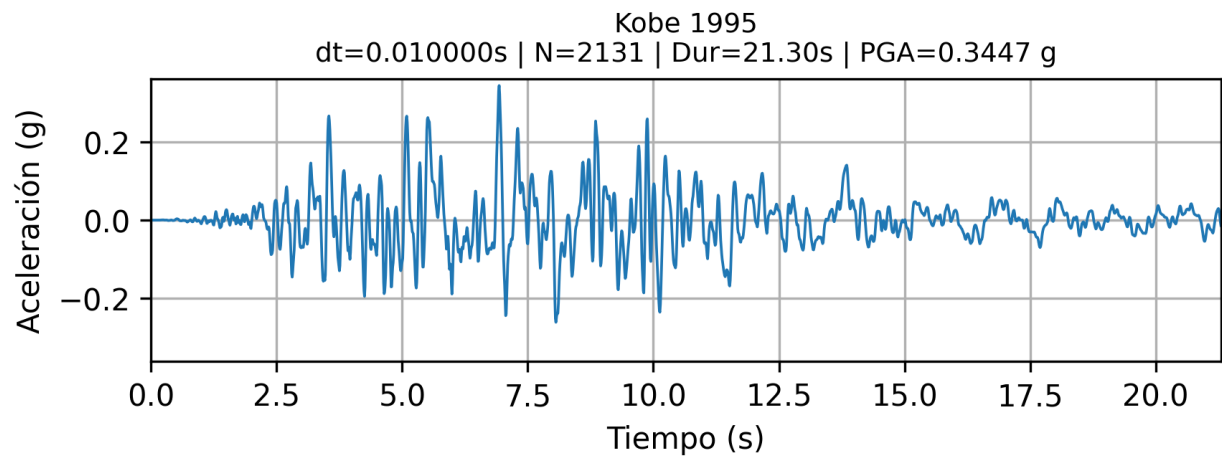


Figura 12 Registro Sísmico Kobe 1995 [29]

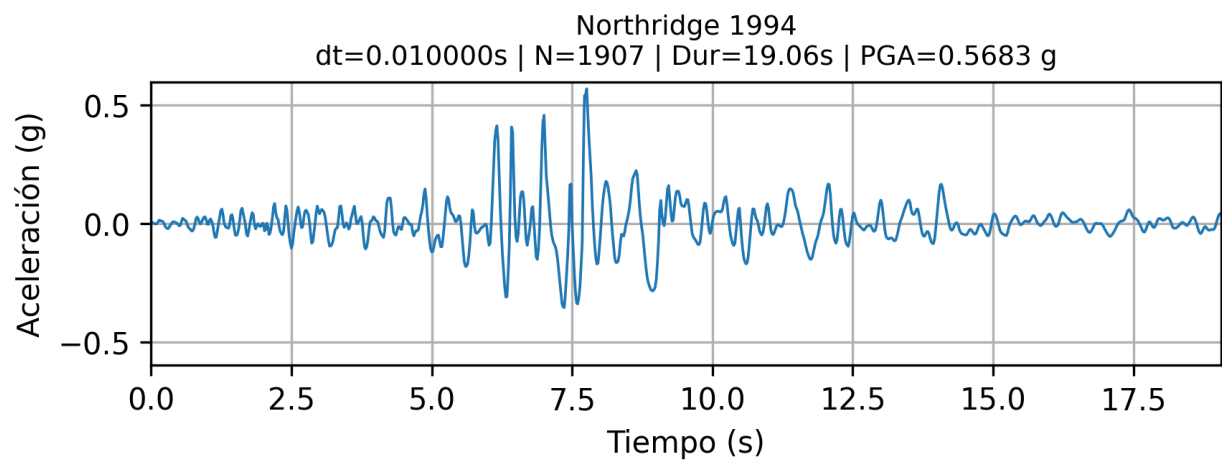


Figura 13 Registro Sísmico Northridge 1994 [29]

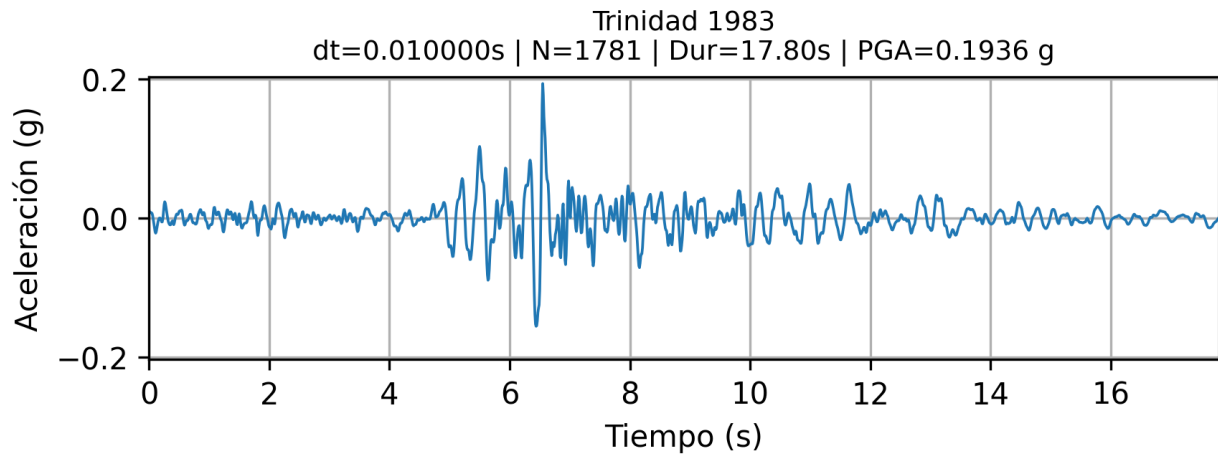


Figura 14 Registro Sísmico Trinidad 1983 [29]

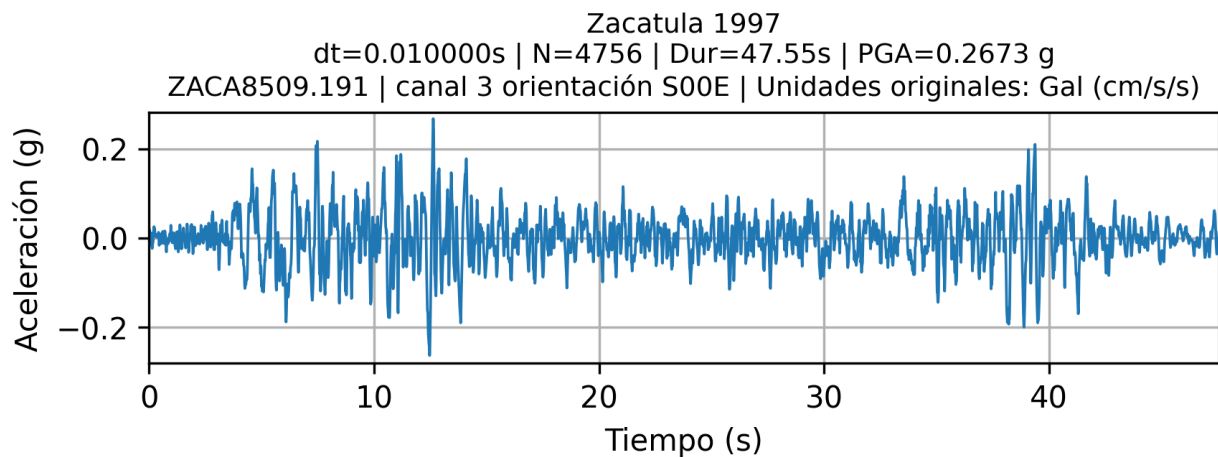


Figura 15 Registro Sísmico Zacatula 1997 [30]

Para confirmar el funcionamiento del motor de calculo se realizo una verificacion mediante la reproduccion de los resultados reportados por Namorado [22]. Para ello se seleccionaron el la evaluacion ante excitaciones sinteticas y homogenas como la evaluacion ante el sismo El Centro, dentro del mismo esquema estructural. A continuacion se presentan las hasta , comparando los resultados graficos generados por Namorado [22] y esta investigacion.

VI. II. Desarrollo de algoritmo genético

Para el desarrollo y cumplimiento del segundo objetivo específico -“Desarrollar un proceso de optimización mediante algoritmos genéticos orientado a MINIMIZAR el coeficiente CR1 y CR2, capaz de identificar conjuntos de soluciones eficientes.”- Se desarrollo un algoritmo genético con manejo de variables hibrido (Discreto y continuo), con el objetico de explorar múltiples configuraciones topológicas en los modelos descritos anteriormente.

El GA se configuro con el fin de optimizar el coeficiente de desempeño CR2, ya que engloba de manera simplificada tanto el coeficiente CR1, como sus elementos R1, R2 y R3, como se puede ver descrito en las ecuaciones previamente explicadas en la sección de Criterios de evaluación del desempeño de RFD.

La ejecución del GA se realiza de forma sistemática para los modelos descritos en Metodología.- **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y los ocho registros sísmicos.

La representación del individuo y sus variables de decisión se formuló describiendo cada individuo mediante una parte discreta conformado por un vector binario de longitud N descrito en la ecuación (35).

$$\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}, b_i \in \{0,1\} \quad (35)$$

donde $b_i = 1$ indica la activación de un RFD en el entrepiso i .

A su vez se definió una variable de carácter continúa representando el momento friccionante en forma de escalar, definido en un rango desde los $0 \text{ } N - m$ hasta $50,000 \text{ } kN - m$

Siendo de igual manera estas variables de decisión las encargadas de mantener las restricciones del problema, limitando la a la existencia de al menos un dispositivo en el sistema, y generando valores únicamente en el rango de valores permitidos. Esto con el objetivo de directamente evaluar únicamente soluciones viables.

De manera que fuera posible compara la mejora en la respuesta dinámica de las estructuras se evalúa un modelo inicial sin RFD mediante el mismo motor de integración descrito anteriormente, para lo cual se calculan los valores de desplazamiento máximo del último piso ($R1$), aceleración absoluta máxima del ultimo piso ($R2$) y el cortante basal máximo ($R3$).

Finalmente, se calculan las métricas de desempeño:

$$CR1 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}, CR2 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}$$

Para la configuración del algoritmo genético se implementaron los siguientes valores de diseño:

1. Población: $P = 50$
2. Generaciones máximas: $G_{\max} = 80$
3. Elitismo: $E = 2$ individuos pasan directo a la siguiente generación
4. Tasa de mutación: $p_m = 0.15$
5. Paro por estancamiento: se detiene si no hay mejora mayor que 10^{-4} durante 15 generaciones
6. Selección:

En cada generación se ordena la población por fitness ($CR2$ ascendente) y los padres se eligen aleatoriamente del 50% superior.

7. Cruce:

Bits: cruce uniforme por gen mediante una máscara aleatoria.

M_f : recombinación por mezcla lineal:

$$M_f^{(h)} = \alpha M_f^{(p1)} + (1 - \alpha) M_f^{(p2)}, \alpha \sim U(0,1)$$

8. Mutación:

Bits: inversión bit-flip con probabilidad p_m por gen, revalidando $\sum b_i \geq 1$.

M_f : con probabilidad p_m , se agrega ruido gaussiano y se proyecta al rango:

$$M_f \leftarrow \text{clip}(M_f + \mathcal{N}(0,200), M_{f,\min}, M_{f,\max})$$

Para cada generación mediante la estrategia de elitismo se aísla el 50% de las soluciones encontradas, registrando: topología $\mathbf{b}$, M_f , $CR1$, $CR2$, R_1 , R_2 , R_3 y número de dispositivos activos.

Al finalizar el algoritmo GA, se filtran duplicados por (b, M_f) y se conservan las un 15 % de las soluciones generadas o un máximo de 2000 configuraciones optimas de acuerdo con CR2 para cada combinación (edificio-escenario-sismo).

VI. III. Análisis Estadístico

En aras de dar cumplimiento al tercer objetivo específico -“Analizar estadísticamente la dispersión y convergencia de las soluciones generadas para delimitar la zona de eficiencia óptima.”- se efectuó un posprocesamiento estadístico de los resultados emanados por el algoritmo genético, con miras de identificar el subconjunto de soluciones con un alto desempeño, y a la sazón de identificar patrones dominantes inherentes a la estructura analizada como a su vez a la cantidad, ubicación y M_f .

VI. III. I. Variables compactas

Por lo tanto, se definieron variables compactas derivadas de b de tal forma que sean comparables los resultados entre las diferentes estructuras de forma directa y simple, a renglón continuo se describen dichas variables compactas:

1. Número total de dispositivos

$$n_d = \sum_{i=1}^N b_i \quad (36)$$

2. Centroide de colocación y forma normalizada:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N i b_i}{n_d}, \mu_n = \frac{\mu}{N} \quad (37)$$

3. Dispersión de colocación y forma normalizada:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (i - \mu)^2 b_i}{n_d}}, \sigma_n = \frac{\sigma}{N} \quad (38)$$

Adicionalmente, y de forma complementario se definieron descriptores complementarios para capturar patrones de concentración y continuidad de la topología:

4. Fracciones por terciles:

Sea N el número de pisos y $b_i \in \{0,1\}$ la presencia de RFD en el piso i . Se define los cortes de terciles como:

$$t_1 = \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor, t_2 = \left\lfloor \frac{2N}{3} \right\rfloor \quad (39)$$

y los conjuntos de índices:

$$\mathcal{J}_{\text{low}} = \{1, \dots, t_1\}, \mathcal{J}_{\text{mid}} = \{t_1 + 1, \dots, t_2\}, \mathcal{J}_{\text{up}} = \{t_2 + 1, \dots, N\} \quad (40)$$

Número de dispositivos en cada tercil:

$$n_{\text{low}} = \sum_{i \in \mathcal{J}_{\text{low}}} b_i, n_{\text{mid}} = \sum_{i \in \mathcal{J}_{\text{mid}}} b_i, n_{\text{up}} = \sum_{i \in \mathcal{J}_{\text{up}}} b_i \quad (41)$$

y las fracciones:

$$f_{\text{low}} = \frac{n_{\text{low}}}{n_d}, f_{\text{mid}} = \frac{n_{\text{mid}}}{n_d}, f_{\text{up}} = \frac{n_{\text{up}}}{n_d} \quad (42)$$

De manera que se permite identificar con mayor facilidad la concentración por secciones en la estructura.

5. Elemento continuos “Runs”

Siendo un escalar, que define la cantidad de huecos en la estructura.

Estas variables compactas permiten describir de manera simple patrones dominantes (distribución, concentración, continuidad), facilitando la identificación de regularidades sin depender de la dimensión completa del vector $\mathbf{b}$.

VI. III. II. Zonas de eficiencia

Para el conjunto de resultados emanados de la optimización por GA se definió una zona de eficiencia Ω^* , siendo el subconjunto superior del percentil 5%, y reflejando las soluciones con menor CR2 de toda la optimización realizada, esto con el objetivo de identificar la convergencia a ciertas topologías y valores de M_F .

VI. III. III. Probabilidad por piso.

Respecto al subconjunto Ω^* se estimó, para cada combinación la probabilidad por piso de poseer un RFD instalado, como a su vez la probabilidad de poseer un RFD condicionado al número de dispositivos descritos en las ecuaciones (43) y (44) respectivamente.

$$P(b_i = 1 \mid \Omega^*) \quad (43)$$

$$P(b_i = 1 \mid \Omega^*, n_d) \quad (44)$$

A su vez se evaluó la interacción entre el coeficiente de desempeño CR2 y la cantidad de dispositivos, para lo cual se evaluó la media de CR2 respecto a n_d y se implementó una regla de codo para obtener el mínimo n_d^* , cuyo incremento resulte en ganancias marginales, descrito a renglón seguido en la ecuación

$$n_d^* = \min \{n_d: \widetilde{CR2}(n_d) \leq (1 + \Delta) \widetilde{CR2}_{top}\} \quad (45)$$

donde $\widetilde{CR2}(\cdot)$ es la mediana por n_d y Δ es una tolerancia.

VI. III. IV. Cuantificación de efectos (ANOVA)

Finalmente, se implementó un modelo estadístico **ANOVA** para cuantificar la contribución relativa de variables N , M , K , $\ddot{u}_g$, n_d , M_f , μ_n y σ_n sobre CR2 mediante un modelo lineal con factores discretizados. Este análisis permitió ordenar qué factores afectan en mayor o menor medida el coeficiente CR2.

VI. IV. Correlación ubicación-desempeño y formulación de ecuaciones gobernadoras de diseño

Así como en los casos anteriores con el fin de exponer la elaboración del cuarto objetivo específico -“Establecer la correlación entre la ubicación de los dispositivos y los coeficientes CR1 y CR2 respecto a las propiedades de la estructura.”- se desarrolló un modelo estadístico de tipo superficie de respuesta, utilizando como base los resultados obtenidos por la optimización mediante GA.

El objetivo de esta etapa fue convertir los resultados estadísticos del paso anterior en un conjunto de ecuaciones gobernadoras capaces de estimar de manera directa los parámetros de diseño de los RFD (número mínimo de dispositivos, M_F , y ubicación) en función de las variables intrínsecas a la estructura analizada (número de pisos, perfil de rigidez, perfil de masas). Lo cual permitiría construir propuestas de diseño de manera precisa y rápida.

VI. IV. I. Superficie de respuesta

De forma tal que el conjunto de resultados obtenidos mediante la optimización GA se conviertan en guías de diseño para la implementación de RFD, se desarrolló un modelo tipo superficie de respuesta, este modelo busca describir la relación directa entre las propiedades globales del edificio en parámetros de diseño óptimos de los RFD.

VI. IV. II. Datos de calibración y variable objetivo

Para tal desarrollo se usan como punto de referencia los valores desprendidos de la muestra planteada al inicio; tres estructuras con propiedades normalizadas como se explica a continuación:

$$(m, k) \in \{0.7, 1.0, 1.3\}^2, N \in \{5, 10, 15\}$$

lo cual produce un total de veintisiete combinaciones estructurales. Es así como para cada combinación se generaban los valores recomendados de $n_d^*(N, m, k)$ y $M_f^*(N, m, k)$

VI. IV. III. Forma del modelo

Se adoptó un modelo polinomial compacto, deliberadamente suave, debido que permite capturar tendencias globales, capturar los efectos principales de la masa y rigidez, como a su vez sus interacción, además de su dependencia respecto a la cantidad de pisos.

En consecuencia, se definió un vector de términos base:

$$\phi(N, m, k) = \begin{bmatrix} C \\ N \\ m \\ k \\ m k \\ N m \\ N k \end{bmatrix}$$

y se postularon las aproximaciones:

$$\widehat{n}_d^*(N, m, k) = \beta^{(nd)} * \phi(N, m, k)$$

$$\widehat{M}_f^*(N, m, k) = \beta^{(mf)} * \phi(N, m, k)$$

donde $\beta^{(nd)}$ y $\beta^{(mf)}$ son vectores de coeficientes obtenidos por regresión.

VI. IV. IV. Estimación de coeficientes

Los coeficientes β se estimaron por mínimos cuadrados ordinarios, minimizando el error cuadrático entre la predicción y el valor de regla observado:

$$\min_{\beta} \sum_{j=1}^{27} (y_j - \beta \cdot \phi(N_j, m_j, k_j))^2$$

donde y_j corresponde a n_d^* o a M_f^* para el caso j . Posteriormente, la predicción de n_d^* se redondea y se restringe al rango físicamente posible:

$$n_d^* = \text{clip}(\text{round}(\widehat{n}_d^*), 1, N)$$

mientras que M_f^* se restringe al rango de diseño:

$$M_f^* = \text{clip}(\widehat{M}_f^*, M_{f,\min}, M_{f,\max})$$

Con ello, el modelo entrega los parámetros respectivos a la interpolación de la superficie de respuesta.

VI. IV. V. Extrapolación y generación de múltiples soluciones

Una vez calibradas, las ecuaciones permiten calcular (n_d^*, M_f^*) para un edificio nuevo dadas la variable N y las variables normalizadas m y k . Para la definición de ubicaciones se define un vector de preferencia resultado de las probabilidades empíricas observadas en la zona eficiente dependiente de su versión condicionada, así como se planteó en la ecuación (44)

Debido a que los vectores de preferencia se definieron en base a las estructuras con $N = 5, 10, 15$, se transfiere a N_α mediante una coordenada normalizada en altura $z = \frac{i}{N}$, y el mapeo por interpolación $p(z) \rightarrow p_\alpha(z)$, evaluado en $z_i = \frac{i}{N_\alpha}$. Esto con el objetivo de permitir una distribución ah doc sobre los pisos de edificios fuera de los puntos de análisis.

A renglón seguido se explican las tres estrategias que implementa el modelo con base en los planteamientos previamente expuestos:

Solución determinista: Dada una estructura de con propiedades N_α, m, k definidas, se calcula n_d^* optimo y a su vez el M_F optimo, se procede a desarrollar el perfil de probabilidad y se seleccionan las n_d^* soluciones con mayor probabilidad de activación.

Swap controlado: Dada la solución determinista se selecciona la ubicación con menor probabilidad de activación y se reubica dada la dispersión de colocación a la siguiente ubicación con igual o mayor probabilidad de activación.

Muestreo ponderado sin reemplazo: Se generan configuraciones adicionales basadas en una selección proporcional a $p_{new}(i)$ cambiando la estrategia determinista a una selección más representativa.

De tal forma que se desarrolla una estrategia de búsqueda capaz de identificar diferentes soluciones en el conjunto de soluciones factibles, heredando el criterio estadístico de selección.

VI. V. Validación frente a Monte Carlo y confirmación mediante GA

Para cumplimiento del quinto y último objetivo específico –“Validar la eficiencia de la metodología de optimización propuesta respecto a los resultados obtenidos mediante el algoritmo de búsqueda secuencial y muestra estadística.”– se codifico una etapa de verificación y comparación, cuyo objetivo fue determinar si las reglas de diseño y ecuaciones gobernadoras obtenidas a partir del análisis estadístico de soluciones generadas por GA son competitivas frente

a una muestra estadística más amplia, un método clásico de búsqueda secuencial reportado en la literatura, y una optimización por GA.

VI. V. I. Repetición con Monte Carlo

Para validar el análisis estadístico realizado con los resultados generados por el GA se realizó una evaluación de confirmación mediante una muestra aleatoria mediante un procedimiento de tipo Monte Carlo, considerando de esta forma un datos con menos sesgo a la optimización en el espacio de soluciones.

Para ello se evaluó de la misma manera que en el análisis sísmico evaluado mediante NSD ante un set de sismos representativos, de los cuales se extrajeron los mismo indicadores de eficiencia que, en el caso de GA, esto con el objetivo de mantener la evaluación entre ambos conjuntos de datos idéntico.

VI. V. II. Comparación directa de reglas: GA vs MC

De igual manera para comparar de manera directa los resultados se desarrolló mediante el mismo método ANOVA con el mismo uso de variables compactas un set de reglas de diseño para las variables n_d^* , M_f^* obtenidas por cada enfoque en los mismos casos base comparables N, m, k.

De las reglas de diseño desprendidas se realizó una comparación cuantificando discrepancias con el propósito de responder si ambos métodos convergen hacia configuraciones similares en n_d^* , M_f^* , y de igual manera evaluar la estabilidad de las soluciones. Esta etapa busca compara la consistencia entre ambos modelos más que evaluar la eficiencia de uno sobre el otro.

VI. V. III. Validación final

Con el objetivo de evaluar la calidad de las soluciones generadas por el modelo principal de la tesis se compararon los resultados de cinco estructuras independientes a los propuestos en la modelación inicial, respecto al modelo estadístico generado a partir de los resultados obtenidos mediante Monte Carlo, el proceso de diseño iterativo propuesto por Ampiah [4] y el mismo proceso de optimización GA.

Las estructuras analizadas se presentan a continuación con escalares normalizados a la masa y rigidez base:

Tabla 5 Elementos de análisis de validación del modelo final

# Pisos	Masa	Rigidez
6	0.543	1.048
8	1.055	1.073
12	1.110	2.146
16	1.364	1.066
20	0.879	1.832

VII. Resultados y discusión.

Durante la siguiente sección se abordarán los resultados obtenidos en cada una de las etapas descritas previamente, divididas en la misma estructura segmentada por objetivo específico.

VII. I. Implementación del modelo parametrizable

Durante la primera etapa consistente en implementar el modelo numérico parametrizable de una estructura de marcos de acero que integren el comportamiento de los RFD para su simulación dinámica, se implementó el modelo de cálculo propuesto por Namorado en [22], el cual se evaluó y comparo con los resultado principales de su modelación y sirven como punto de referencia para nuestra modelación, en la Figura 16 se observa el comportamiento de un marco a un nivel sometido a un frecuencia de extinción de 1 Hz con RFD equivalente a una fuerza de fricción de 200, 500 y 800 N, modelo que replicamos en la Figura 17, implementando los mismo parámetros y condiciones, lo cual resulto de manera idéntica, apreciable a simple vista.

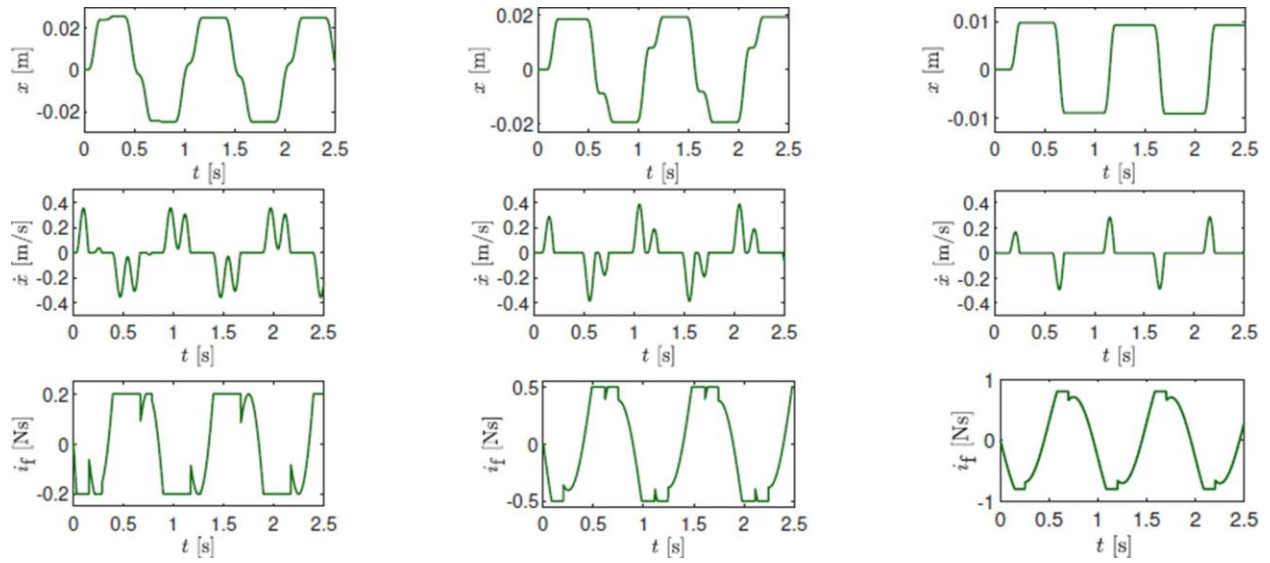


Figura 16 Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. Histograma de desplazamiento $x(t)$ (arriba); velocidad $\dot{x}(t)$ (centro) e impulso friccional $i_f(t)$ (abajo). Sometido a excitación armónica con frecuencia $f = 1$ Hz. Fuerza máxima de fricción F_f : 200 N (izquierda), 500 N (centro) y 800 N (derecha). [22]

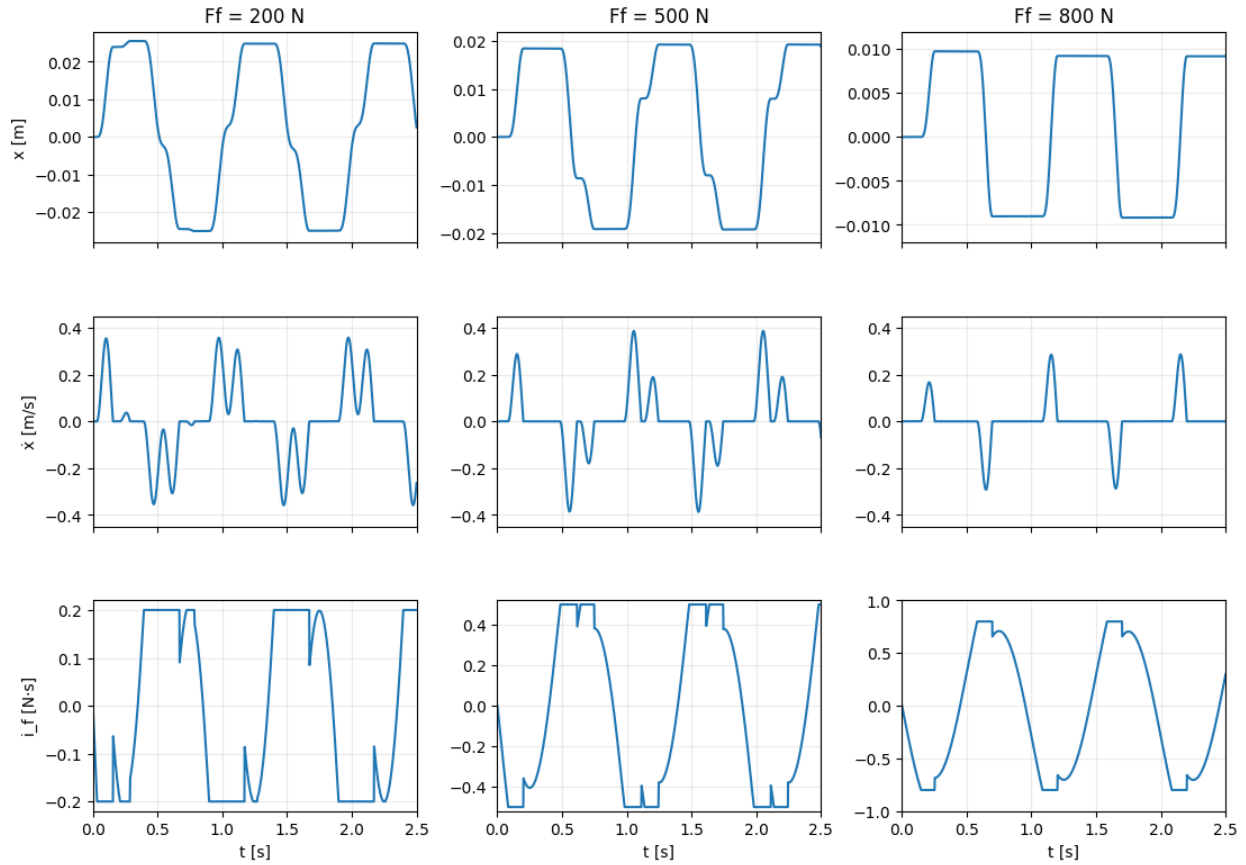


Figura 17 Reproducción mediante algoritmo desarrollado de un marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. Histograma de desplazamiento $x(t)$ (arriba); velocidad $\dot{x}(t)$ (centro) e impulso friccional $i_f(t)$ (abajo). Sometido a excitación armónica con frecuencia $f = 1$ Hz. Fuerza máxima de fricción F_f : 200 N (izquierda), 500 N (centro) y 800 N (derecha).

El mismo modelo se evaluó bajo las condiciones de una frecuencia de excitación de 5 Hz, bajo un RFD equivalente de 200, 500 y 800 N, y de igual manera obteniendo resultados idénticos a los presentados en la referencia. Estos se pueden apreciar en las Figura 18 y Figura 19.

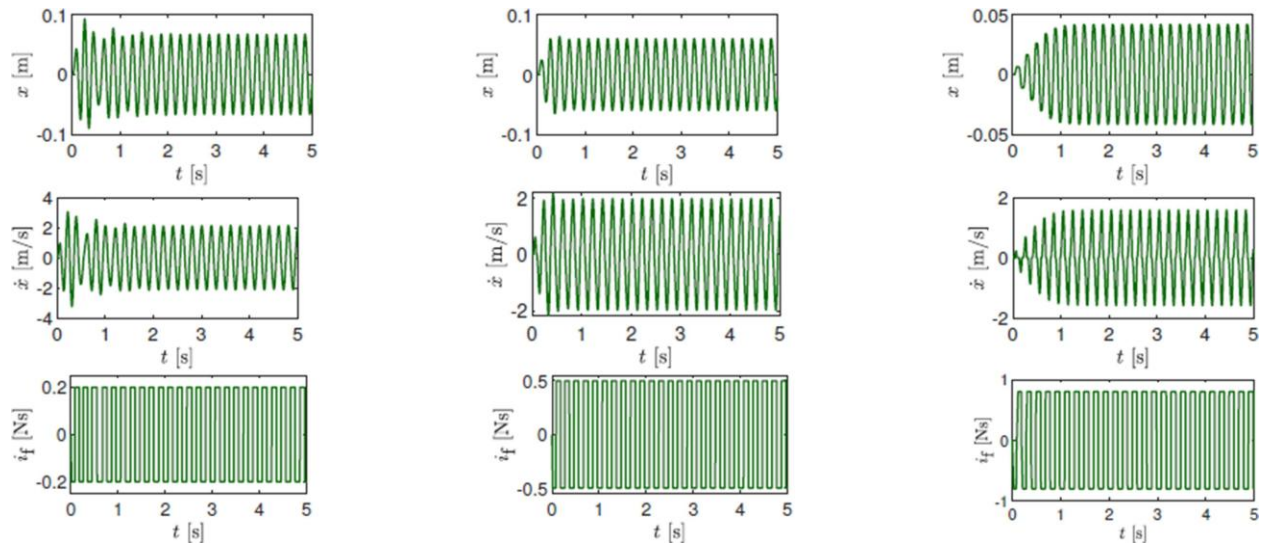


Figura 18 Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. Histogramas de desplazamiento $x(t)$ (arriba), velocidad $\dot{x}(t)$ (centro) e impulso friccional $i_f(t)$ (abajo). Excitación armónica con frecuencia $f = 5$ Hz. Fuerza máxima de fricción F_f : 200 N (izquierda), 500 N (centro) y 800 N (derecha).

Seguidamente y con el objetivo de comprobar el escalamiento a excitaciones diferentes a las constantes y estructuras de diferentes cantidades de niveles, se replicó modelo descrito en la referencia, usando como aceleración de base el sismo El Centro [29], y utilizado de igual manera el algoritmo NSD [22], así como en las anteriores evaluaciones se obtuvieron resultados idénticos. Estos se aprecian en las Figura 20 y Figura 21.

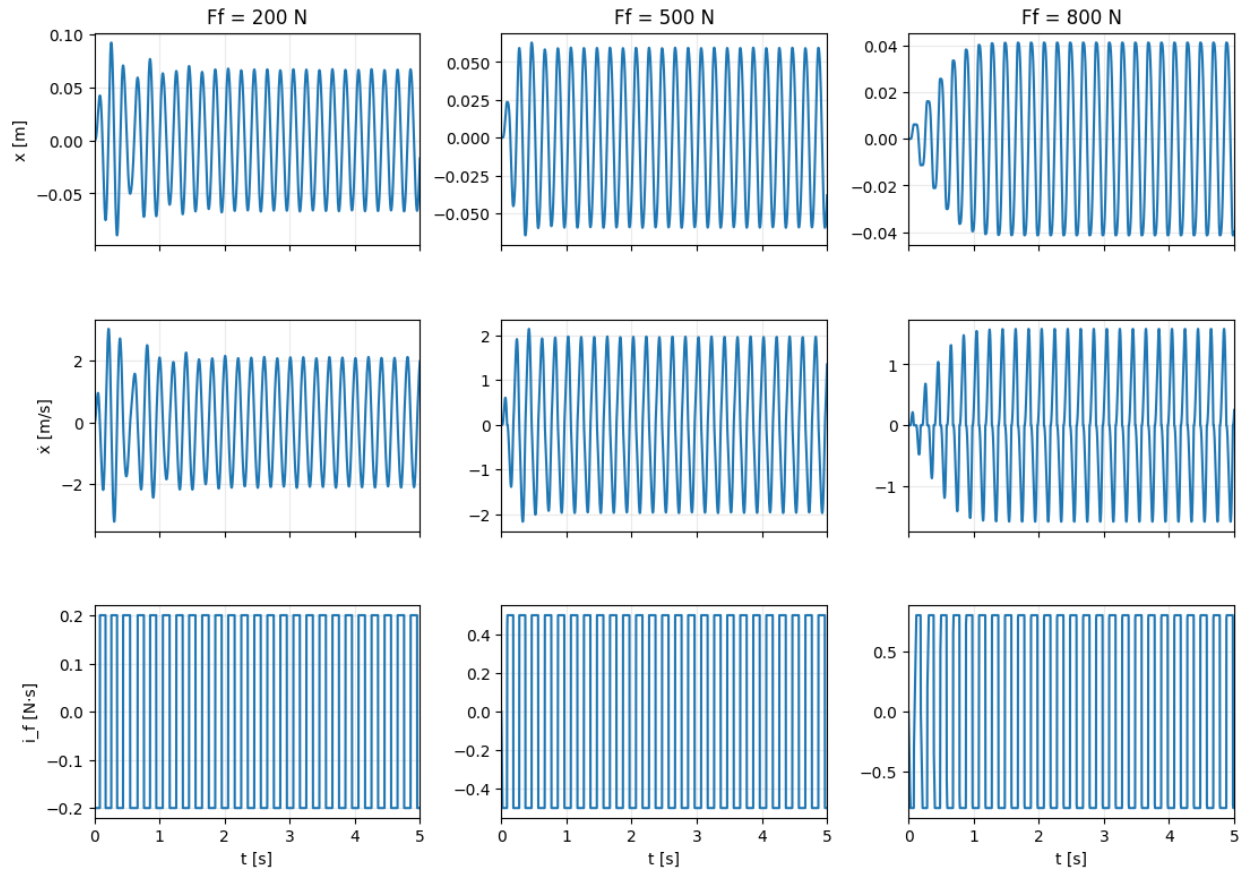


Figura 19 Reproducción mediante algoritmo desarrollado Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. Histogramas de desplazamiento $x(t)$ (arriba), velocidad $\dot{x}(t)$ (centro) e impulso friccional $i_f(t)$ (abajo). Excitación armónica con frecuencia $f = 5$ Hz(cercana a la frecuencia natural de 6.8 Hz). Fuerza máxima de fricción F_f : 200 N (izquierda), 500 N (centro) y 800 N (derecha).

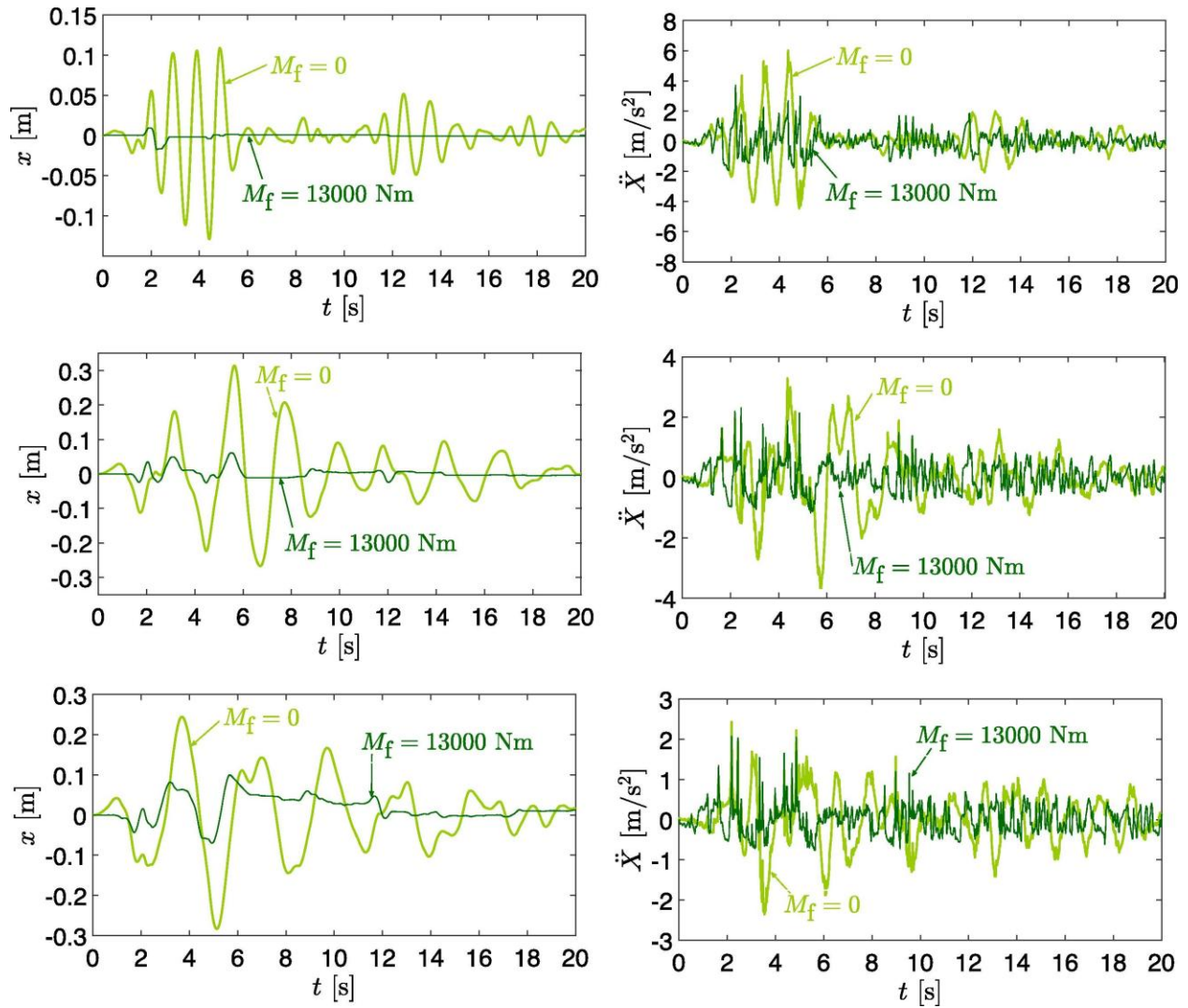


Figura 20 Casos $M_f = 0$ y $M_f = M_f^{\text{opt}} = 13,000$ Nm. Izquierda: desplazamiento relativo respecto al terreno. Derecha: aceleración absoluta. (a) Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. (b) Último nivel del marco de tres niveles con barras de arriostramiento axialmente rígidas. (c) Último nivel del marco de cinco niveles con barras de arriostramiento axialmente rígidas.

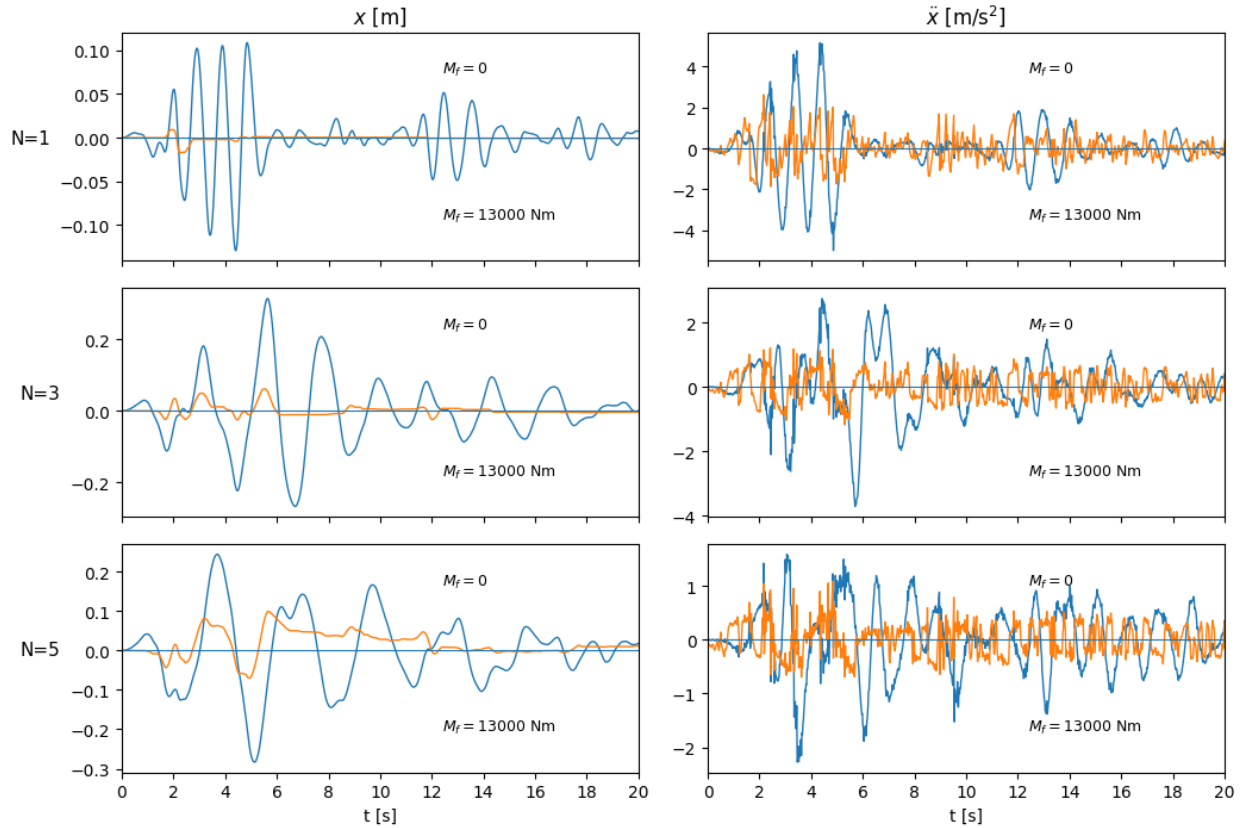


Figura 21 Reproducción mediante algoritmo desarrollado Casos $M_f = 0$ y $M_f = M_f^{\text{opt}} = 13,000$ Nm. Izquierda: desplazamiento relativo respecto al terreno. Derecha: aceleración absoluta. (a) Marco de un nivel con barras de arriostramiento axialmente rígidas. (b) Último nivel del marco de tres niveles con barras de arriostramiento axialmente rígidas. (c) Último nivel del marco de cinco niveles con barras de arriostramiento axialmente rígidas.

El mismo modelo es descrito en el código del Anexo A, implementando el diseño paramétrico para el modelo base de análisis y sus diseños normalizados.

VII. II. Desarrollo de algoritmo genético

En el cumplimiento del segundo objetivo, -“Desarrollar un proceso de optimización mediante algoritmos genéticos orientado a MINIMIZAR el coeficiente CR1 y CR2, capaz de identificar conjuntos de soluciones eficientes.”- se obtuvieron los siguientes resultados.

La optimización mediante algoritmos genéticos fue llevada a cabo con el objetivo de reducir el coeficiente de desempeño CR2, sin embargo, el cálculo de CR2 depende directamente del sismo propuesto, por lo que como métrica de desempeño se evaluó el percentil 90 de los resultados

por grupo de sismos evaluados. Es así que obtenemos la convergencia de resultados para cada edificio en los nueve escenarios diferentes descritos en la Figura 22, Figura 23 y Figura 24. Las cuales presenta una reducción escalonada, y abrupta en las primeras generaciones seguido de poca o nula convergencia. Destaca principalmente la poca reducción entre las primeras generaciones y ultimas siendo que no se reportan reducciones mayores un 18% , sin embargo la reducción respecto a modelos sin RFD, donde las mejoras se mantienen en un rango entre 24 y 55% lo cual indica conlleva a dos conclusiones posibles; la integración de RFD mejora significativamente la respuesta estructural independientemente de sus variables de diseño o; las soluciones iniciales consistentemente se generaron en el rango optimo, lo cual resulta improbable de suceder.

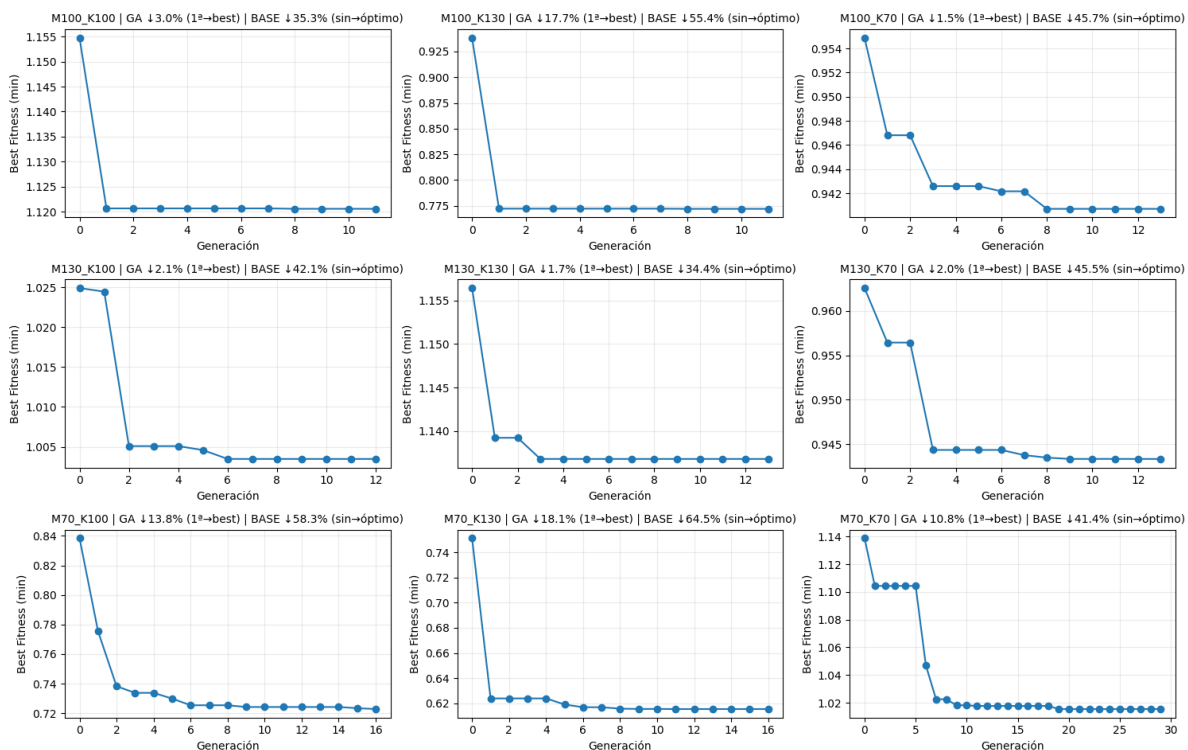


Figura 22 Convergencia del GA Para un edificio de 5 pisos

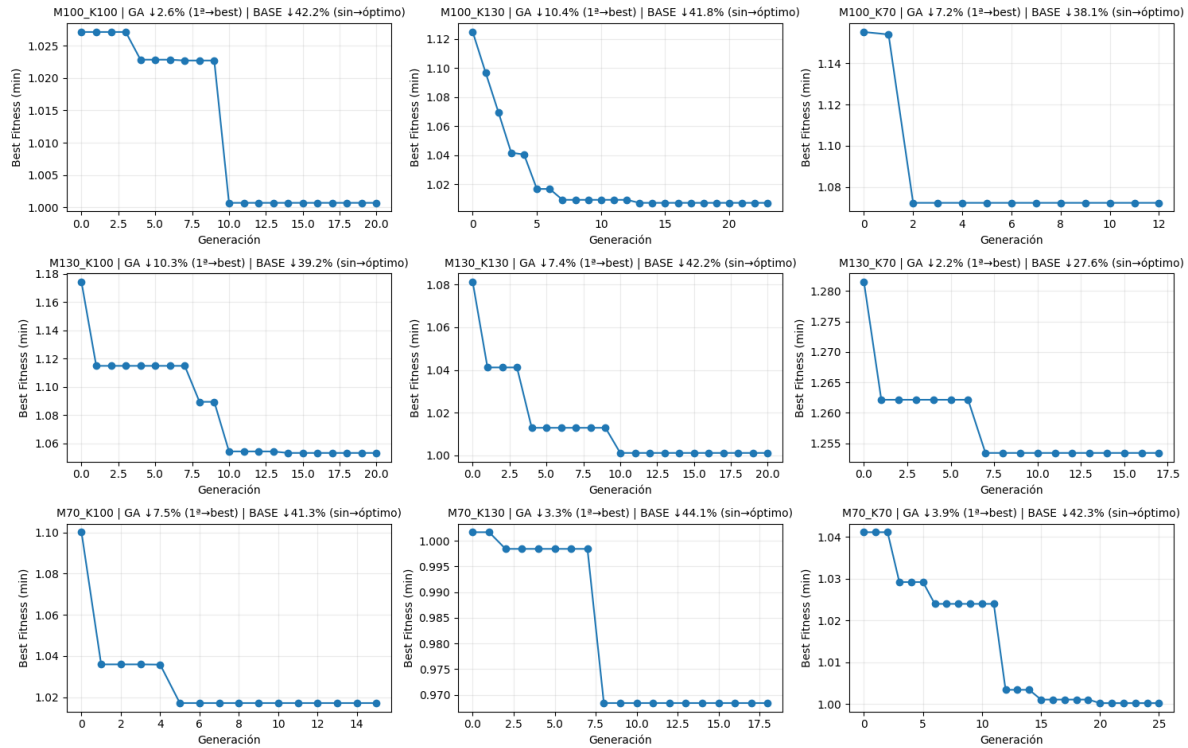


Figura 23 Convergencia del GA Para un edificio de 10 pisos

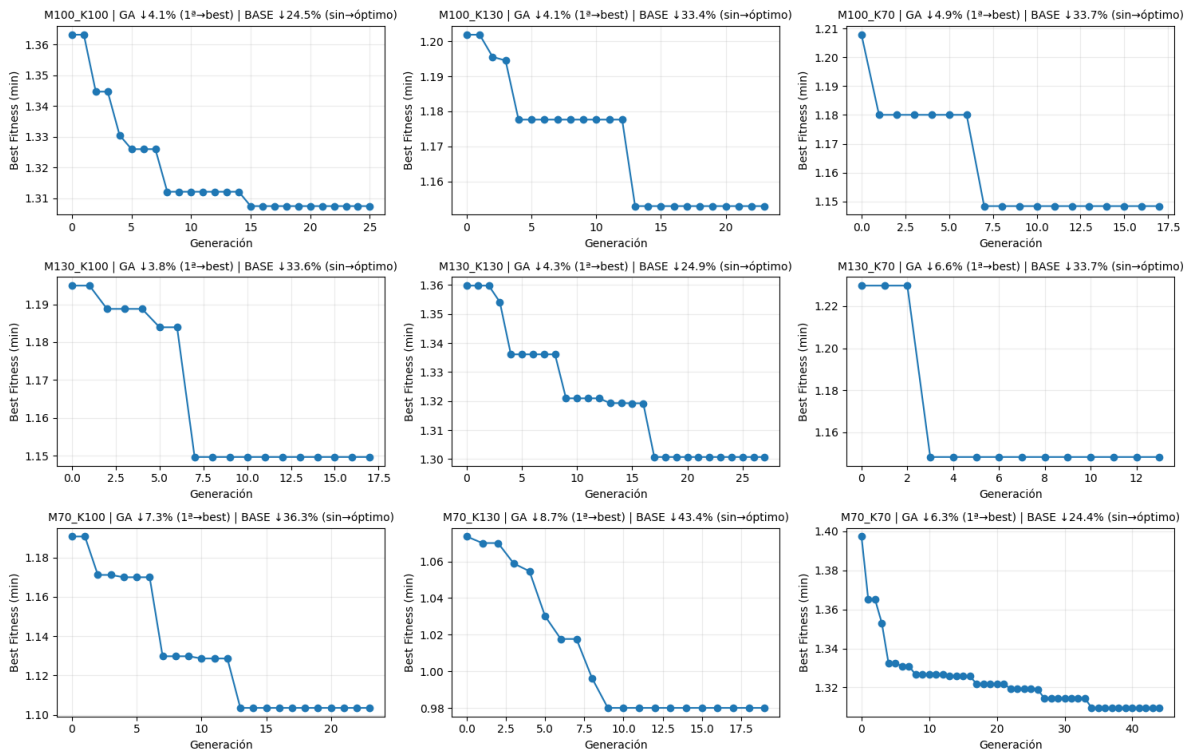


Figura 24 Convergencia del GA Para un edificio de 15 pisos

Mediante los resultados obtenidos de esta etapa se procedió a evaluar y caracterizar el conjunto de soluciones eficientes, con el fin de identificar la convergencia hacia ciertas topologías en particular, el rango de funcionamiento del M_F óptimo, para con ello delimitar formalmente la zona eficiente Ω^* .

VII. III. Análisis Estadístico

Con el fin de cumplir el tercer objetivo se postprocesaron los resultados de las soluciones elite en el modelo GA, permitiendo identificar patrones dominantes, tendencias a ciertas configuraciones, y presentar un preámbulo del modelo de superficie de respuesta necesario para implementar esta información.

VII. III. I. Distribución de n_d en Ω^*

A continuación, se observa que en la Figura 25 y Figura 26 la frecuencia con la que se presenta el número de dispositivos instalados en la zona eficiente del análisis (*Top 5%*), podemos inferir de estos resultados que las estrategias de saturación de RFD presenta mejores resultados en general a configuraciones estratégicas.

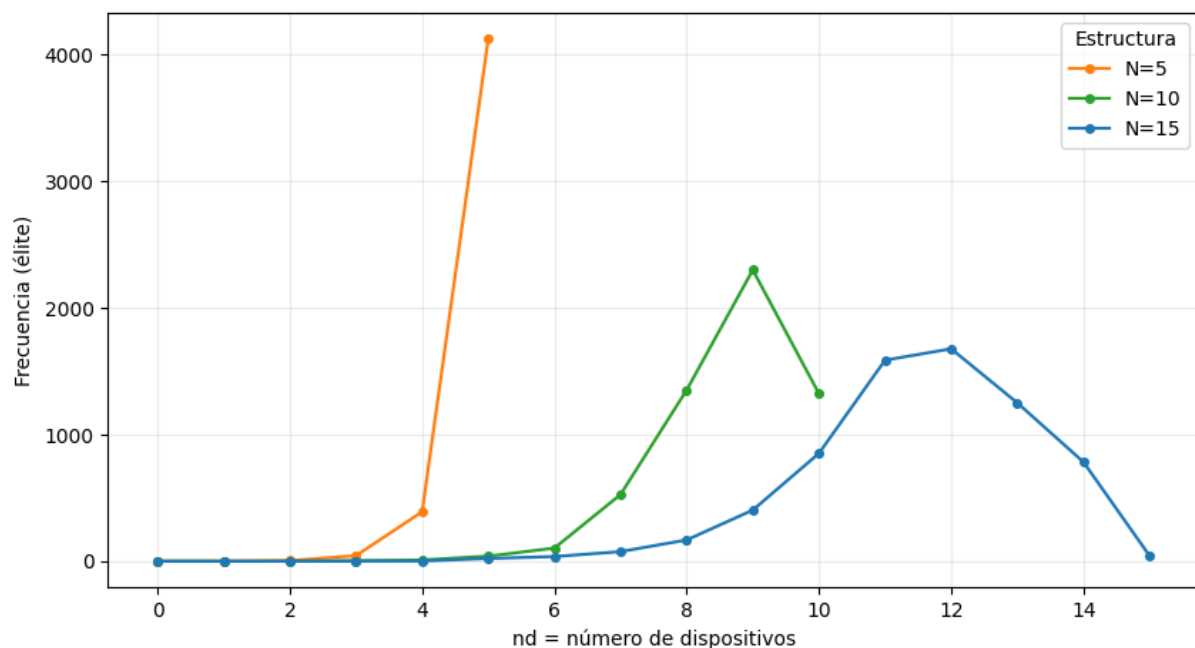


Figura 25 Distribución de numero de dispositivos en la región eficiente para N = 5, 10 y 15

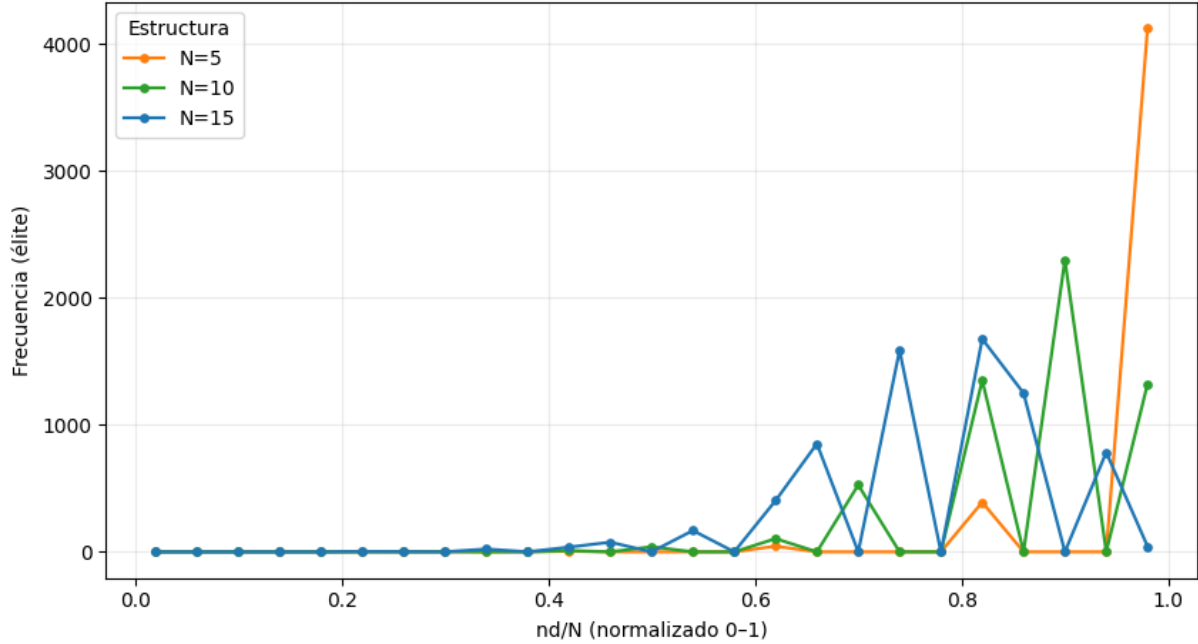


Figura 26 Distribución de numero de dispositivos en la región eficiente para N = 5, 10 y 15 normalizado a la altura

VII. III. II. Distribución de n_d en Ω^*

Las observaciones previamente mencionadas se complementan con los resultados desprendidos del análisis de la relación entre M_F y n_d en la región eficiente de soluciones, presentado en la Figura 27, Figura 28 y Figura 29 en forma de diagramas de dispersión por grupos. Se observa que para las estructuras de 5 pisos la mediana de M_F aumenta proporcionalmente respecto a n_d , sin embargo, la dispersión de soluciones es igualmente creciente, indicando que existen combinaciones altamente eficientes en prácticamente cualquier rango de M_F .

Para el caso de 10 y 15 pisos observamos un patrón similar exceptuando la necesidad de saturación absoluta de la estructura, revelando que una rigidez total de la estructura no es ideal para la reducción del criterio CR2, es necesario mantener cierto grado de elasticidad en la estructura.

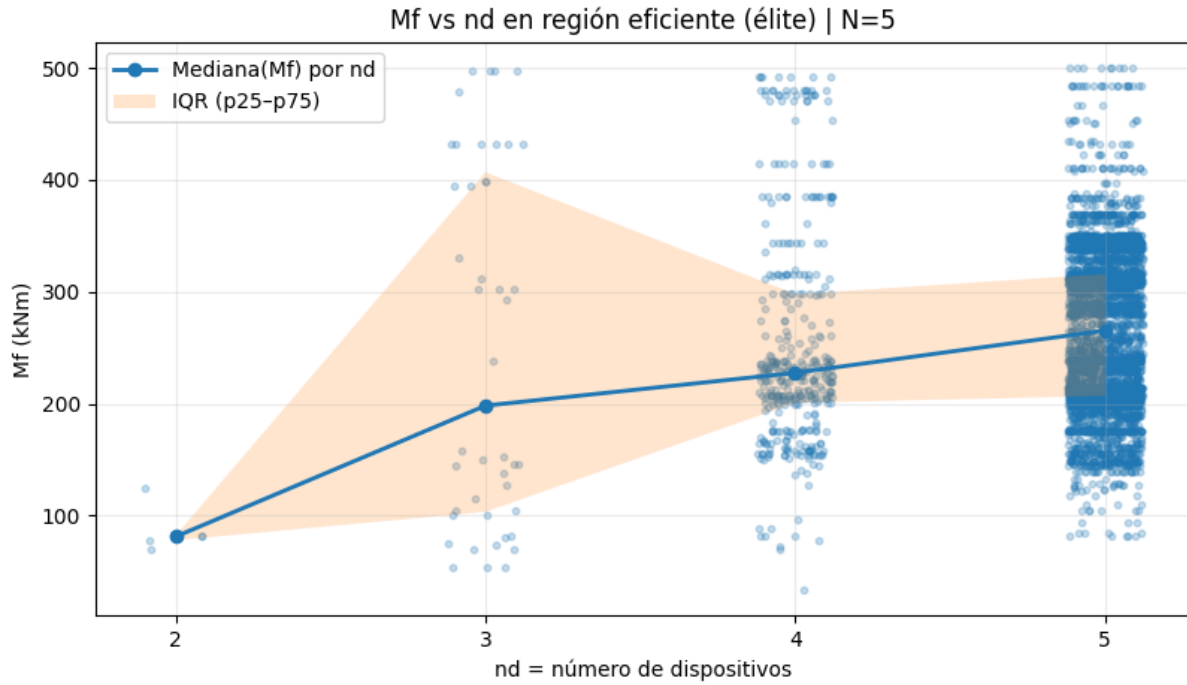


Figura 27 Relación entre M_F , n_d en la región eficiente para N=5

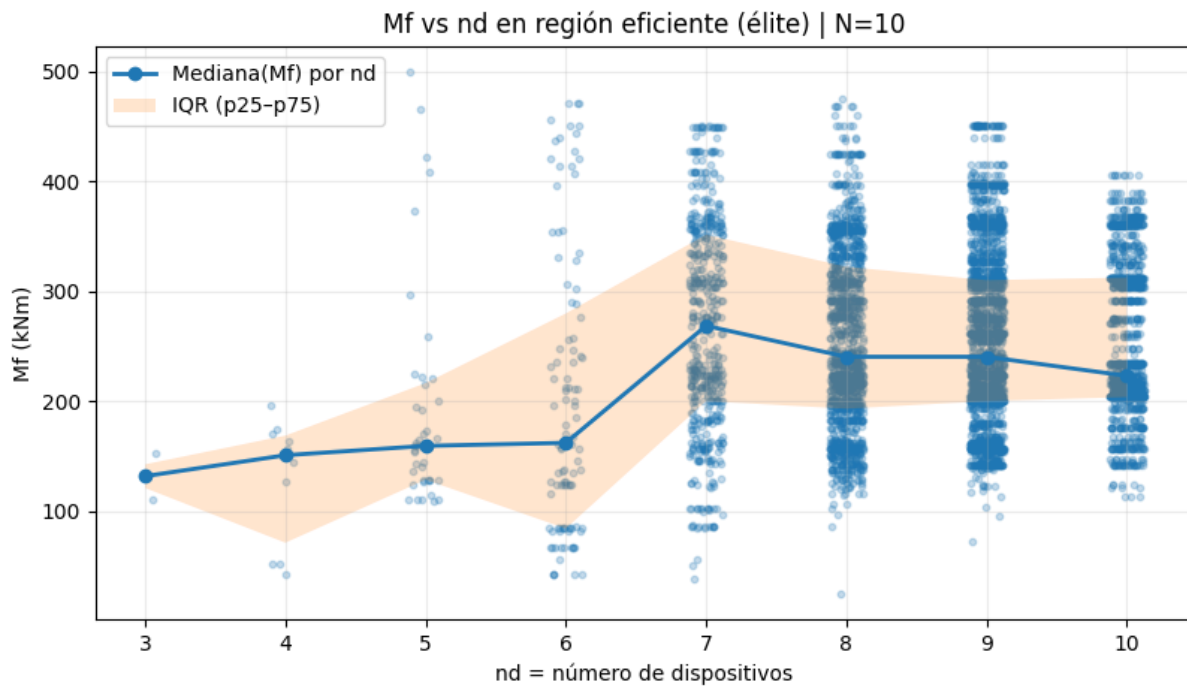


Figura 28 Relación entre M_F , n_d en la región eficiente para N=10

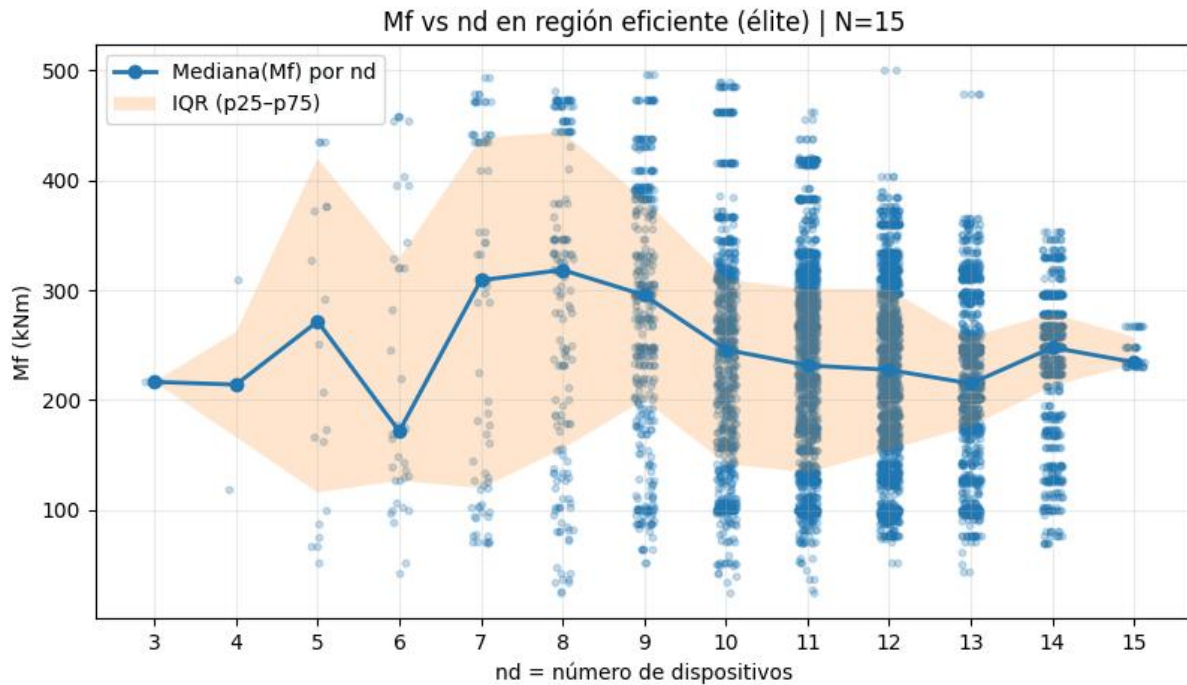


Figura 29 Relación entre M_F , n_d en la región eficiente para N=15

Para el caso del M_F se observa en forma de histograma en la Figura 30 la preferencia a ciertas configuraciones las cuales se ven correlacionadas directamente a la masa por piso definida en la estructura al inicio de la modelación, esto es particularmente notorio en configuraciones de $200\text{ KN} - m$.

VII. III. III. Distribución de M_F en región eficiente.

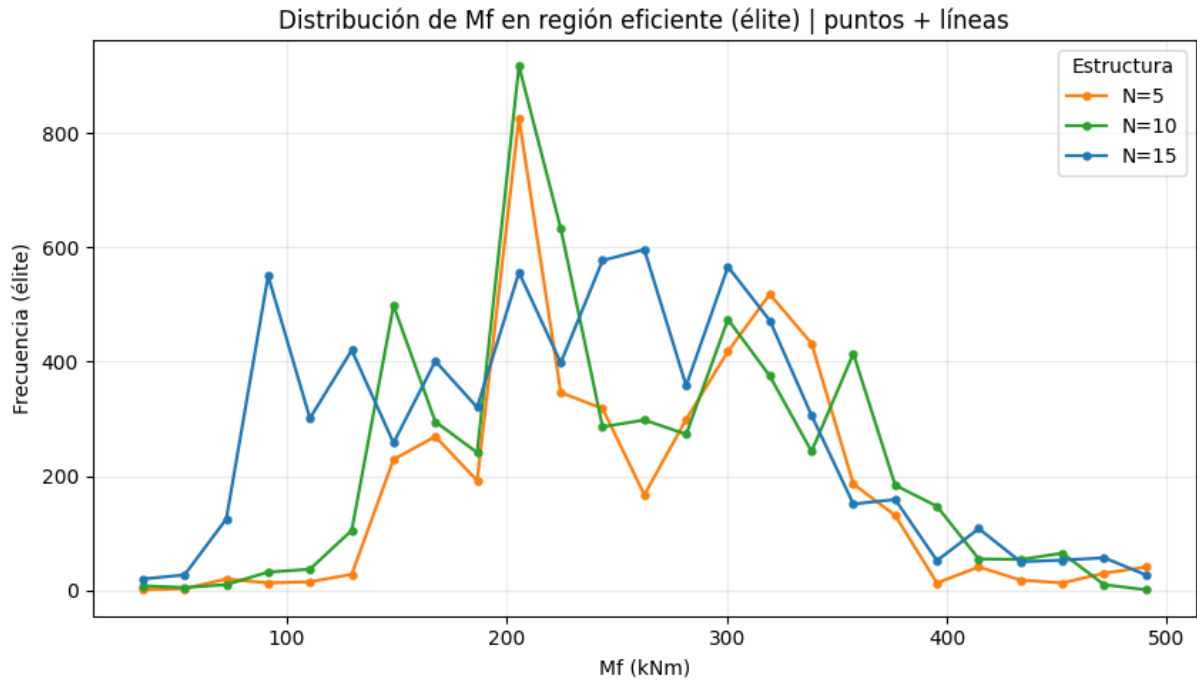


Figura 30 Distribución de M_F en región eficiente.

VII. III. IV. Convergencia topológica: probabilidad por piso

A su vez se analizó la preferencia por ubicación dentro de la estructura de los RFD, los cuales describimos mediante de mapas de calor en la Figura 31, Figura 32 y Figura 33 revelando la preferencia a ciertas ubicaciones en el conjunto de las soluciones en región óptima, para el caso de la estructura con cinco niveles, observamos como satura la estructura acorde a los resultados previamente planteados, sin embargo podemos observar cómo en estructuras de diez niveles existe una clara preferencia por evitar instalar amortiguadores al centro de la estructura, de manera contrastante podemos observar como la estructura de quince niveles presenta igualmente preferencia por ciertas secciones de la estructura, sin embargo de manera más heterogénea que los modelos de menor nivel.



Figura 31 Mapa de preferencia probabilística de RFD para N = 5



Figura 32 Mapa de preferencia probabilística de RFD para N = 10

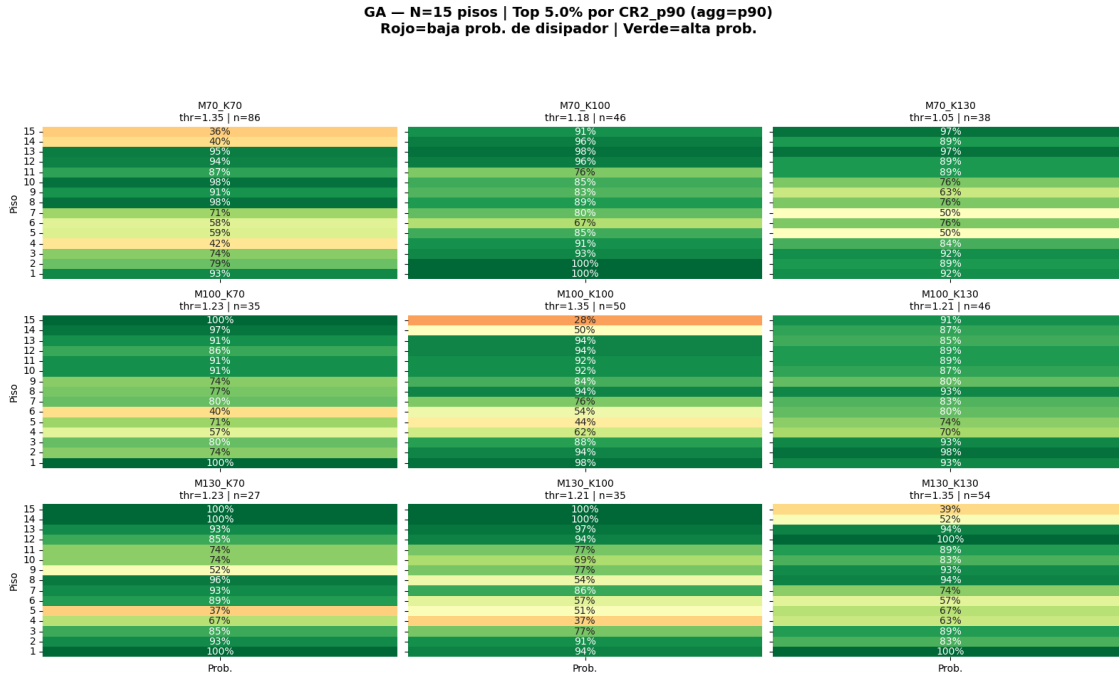


Figura 33 Mapa de preferencia probabilística de RFD para N = 15

Siendo estos los resultados capturados de la optimización por GA, podemos evaluar su comportamiento de manera estadística mediante un análisis tipo ANOVA, el cual nos permitirá entender las principales influencias da cada uno de los elementos que conforman el fenómeno dinámico de la estructura.

VII. IV. Correlación ubicación-desempeño y formulación de ecuaciones gobernadoras de diseño

Continuando con la cuarta etapa de la metodología realizada se llegó al planteamiento de la correlación cuantitativa entre las variables de diseño propias del RFD y las variables intrínsecas del marco estructural analizado, para la reducción del coeficiente de desempeño CR2, basado en el subconjunto Ω^* , generando así la superficie de respuesta y a su vez las fórmulas gobernadoras para la propuesta de n_d^* y M_f^* , así como mediante los perfiles probabilísticos una propuesta de ubicación optimizada.

VII. IV. I. Evaluación analítica de Ω^*

Previo a la definición de las ecuaciones descriptoras de las variables de diseño, se analizó el comportamiento del conjunto de soluciones Ω^* , se analizó de primera instancia la cantidad mínima de dispositivos, originalmente se planteó la búsqueda de un punto “Codo” dentro de las gráficas, sin embargo, la Figura 34, señaló una clara tendencia para $\widetilde{CR2}(n_d)$, decreciendo de manera prácticamente lineal constante, contrastante con los resultados observados en diferentes referencia donde únicamente se optimiza para un único sismo, y no presenta un punto de inflexión pronunciado.

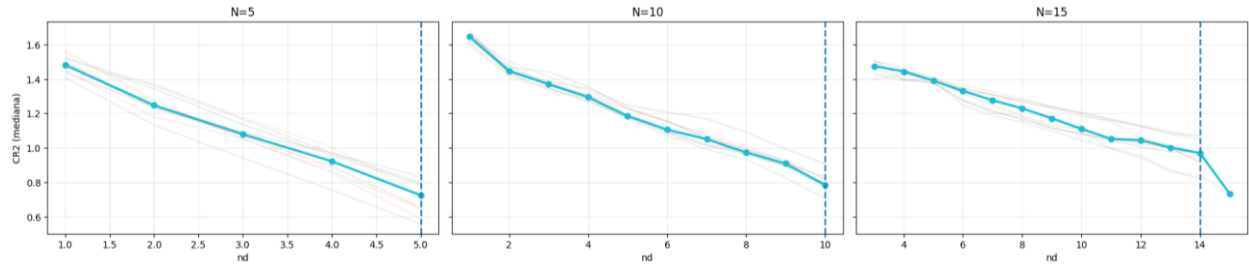


Figura 34 Correlación media entre $CR2$ y n_d

VII. IV. II. Correlación de propiedades intrínsecas y cantidad y fricción

Mediante los resultados capturados del GA, se calibro un modelo de superficie de respuesta para estimar n_d^* y M_f^* en función de las propiedades intrínsecas a la estructura. Para ello se adoptó un modelo polinomial, incluyendo términos principales y de interacción, y se estimaron coeficientes por mínimos cuadrados. Para mantener dentro de un rango discreto n_d^* , el resultado se redondea y se restringe al intervalo $[1, N]$, mientras que M_f^* se restringe al rango de diseño $[M_{f,min}, M_{f,max}]$.

VII. IV. III. Reglas gobernadoras finales

A partir de la superficie de respuesta se calibran las ecuaciones gobernadoras que permiten estimar las propiedades de diseño de los RFD en función de las variables intrínsecas de la estructura. Para tales ecuaciones se definen dos modelos, el primero y más simple define n_d^* con la ecuación

$$\frac{\widehat{n_d^*}}{N} = 0.9753 - 0.0370 N - 0.0074m + 0.0037 k + 0.0056 mk \quad (46)$$

Complementariamente se define el M_f^* de acuerdo con la ecuación

$$\widehat{M}_F^* = 239.5636 - 10.8113 N - 5.2467 m + 30.8625 k + 20.1765 mk \quad (47)$$

De estas ecuaciones podemos inferir que la cantidad de amortiguadores necesaria para que cualquier estructura trabaje en el rango de lo óptimo o en una zona de eficiencia requiere estar saturado de amortiguadores, lo cual es concordante con los resultados obtenidos en la Figura 34. La cantidad de pisos, masa y rigidez son prácticamente despreciables al momento de definir este parámetro.

Análogamente el $\widehat{M}_F^*$ óptimo tomando como base la estructura de diez pisos descrita en Figura 5 considera un M_F de $239.5636 KN - m$, y es principalmente afectado por la rigidez de la estructura, y de la interacción masa – rigidez, además de ello, la masa y el número de pisos presenta bajos niveles de influencia, mas no despreciables.

VII. V. Validación frente a Monte Carlo, confirmación mediante GA y comparación contra algoritmo secuencial.

De manera que fuese posible comprobar la validez del modelo propuesto en el paso anterior se repitió el tratamiento estadístico, pero desde una búsqueda aleatoria Monte Carlo, capaz de capturar los efectos continuos del fenómeno analizado y así mismo, considerando los efectos en $CR2$ en todo el rango de valores óptimos dispersos de cada una de las variables de entrada y diseño, siendo analizados bajo el mismo esquema de métricas implementados en GA en zona óptima, diferenciándose principalmente una mayor densidad y cantidad de soluciones generadas en zona óptima.

Seguidamente se desarrolló una superficie de respuesta basada en estos resultados y se evaluó la concordancia de ambos modelos, permitiendo evaluar la similitud de los mismos, así como la calidad de resultados entregados por ambos modelos.

A continuación, se presentan las ecuaciones desarrolladas mediante la muestra Montecarlo.

$$\frac{\widehat{n}_d^*}{N} = 0.9284 - 0.0630 N - 0.0056m + 0.0056 k + 0.0083 mk \quad (48)$$

$$\widehat{M}_F^* = 320.3704 + 8.3333 N + 18.0556 m + 9.7222 k + 4.1667 mk \quad (49)$$

Podemos observar que el termino independiente de la muestra aleatoria Monte Carlo tiende a ligeramente reducir en un 5% la cantidad de RFD necesario para funcionar operar en la zona eficiente, además de mantener las misma tendencias en cuanto a los elementos de N , m y k .

Sin embargo, el $\widehat{M}_F^*$ sufre cambios significativos en cuanto a los valores propuestos, ya que su termino independiente tiene un aumento del 33%, respecto al modelo propuesto por GA, además de presentar cambios en las términos e interacciones N , m y k . Esto se debe a la reducción de amortiguadores como elemento base, a la discretización del M_F , y al tamaño de la muestra utilizado para la definición de la superficie de respuesta.

De forma tal de comparar la calidad del modelo propuesto descriptivo formado a partir de una muestra estadística resultado de una optimización de algoritmos genéticos se realizo una comparación en la calidad de resultados entre 4 diferentes herramientas; los dos modelos de superficie de respuesta obtenidos mediante GA y MC; una optimización mediante GA; y el método de diseño iterativo adaptado por [4].

A continuación, se presenta una evaluación de calidad entre los 4 modelos conformantes de esta investigación en 5 estructuras diferentes, variando cantidad de pisos, masa y rigidez dentro y fuera de los rangos previstos en la muestra inicial.

Tabla 6 Modelos post analizados

N	Escala respecto m_{base}	Escala respecto k_{base}
6	0.5431552643008606	1.0475549103161177
8	1.0545817026309503	1.072877071061055
12	1.1102496007480516	2.14592054
16	1.3644735890299635	1.0655618445942865
20	0.8789192556553753	1.8321799157161685

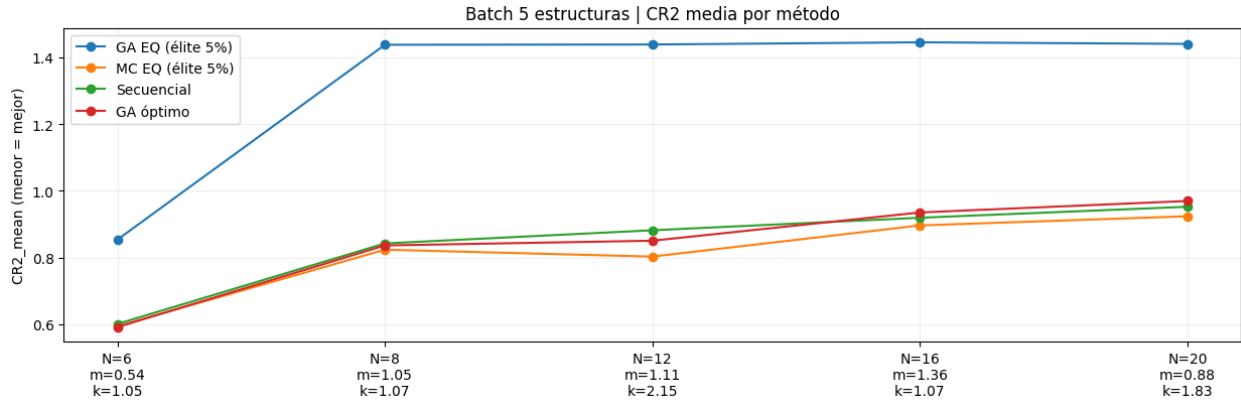


Figura 35 Comparación global del desempeño promedio $CR2_{mean}$

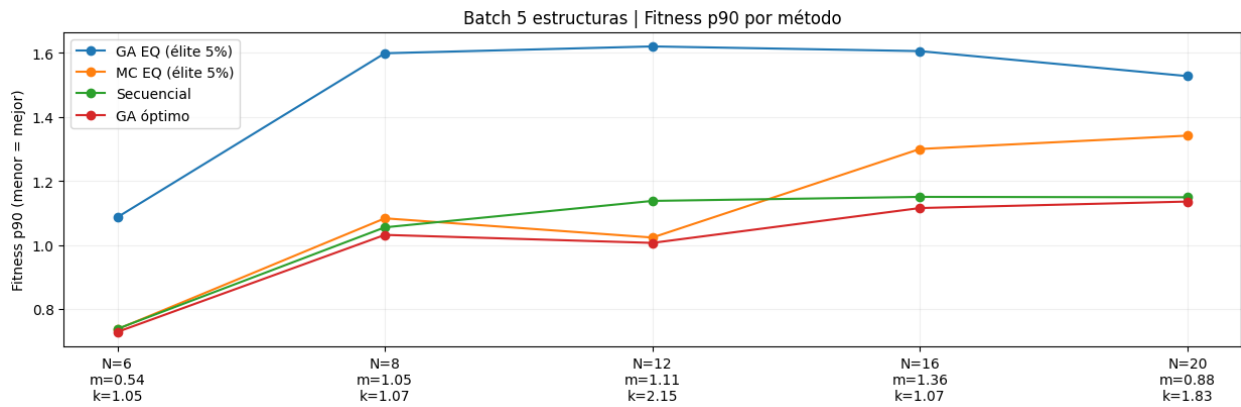


Figura 36 Comparación global del desempeño Fitness P90 $CR2_{p90}$

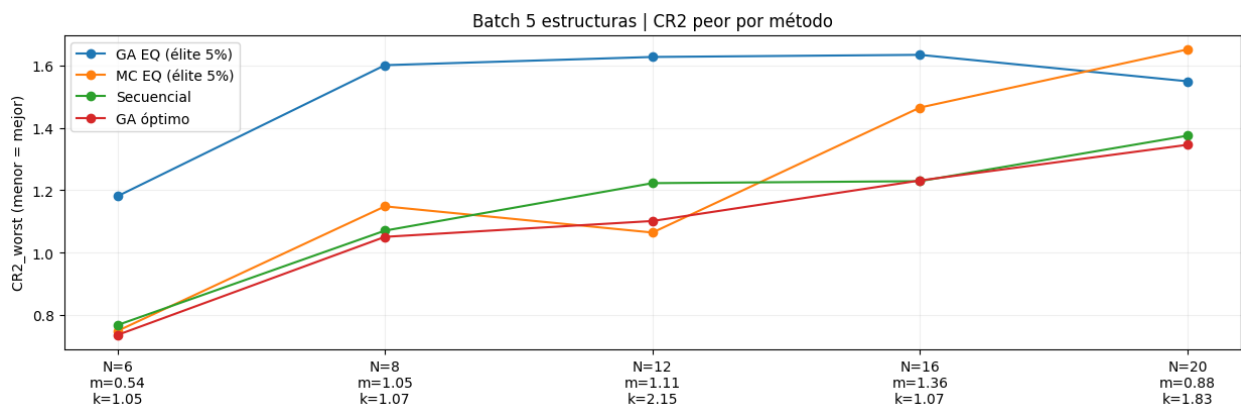


Figura 37 Comparación global del peor desempeño $CR2_{peor}$

Se puede observar en la

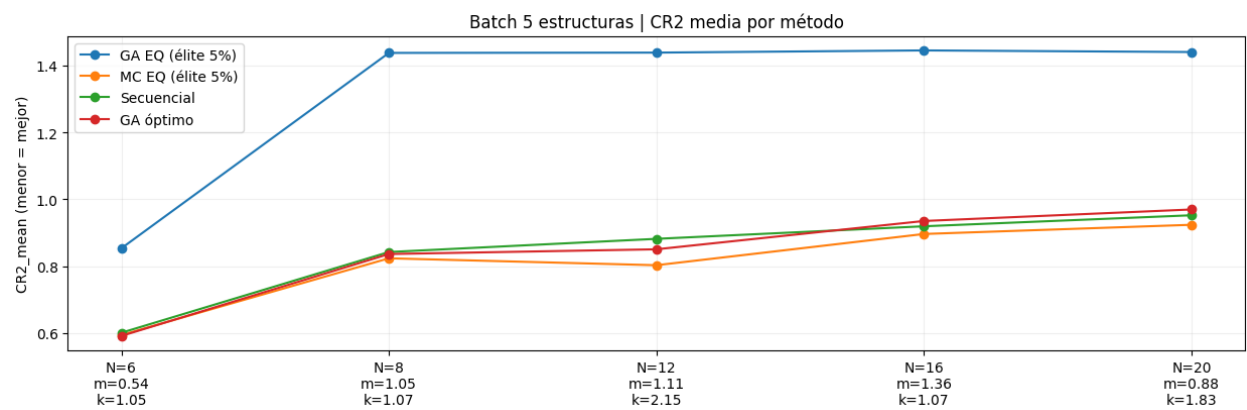


Figura 35,

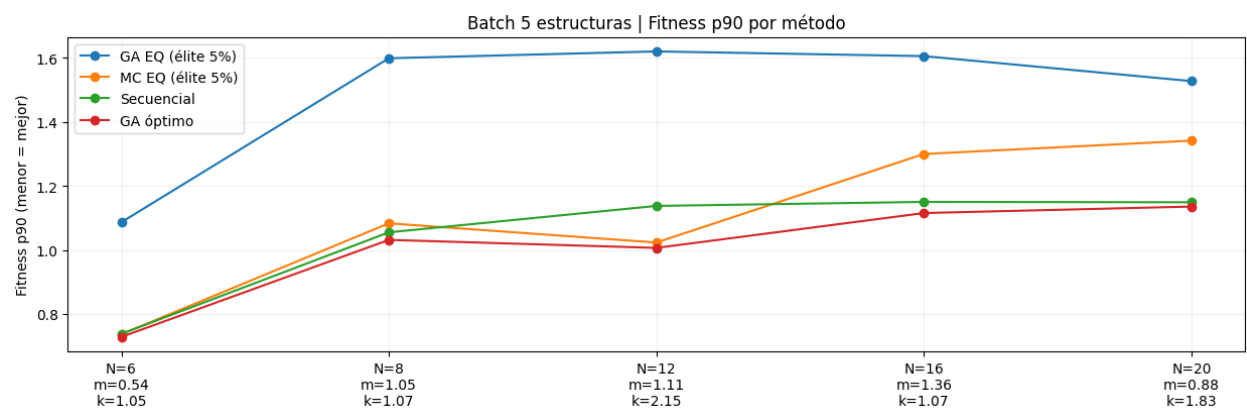
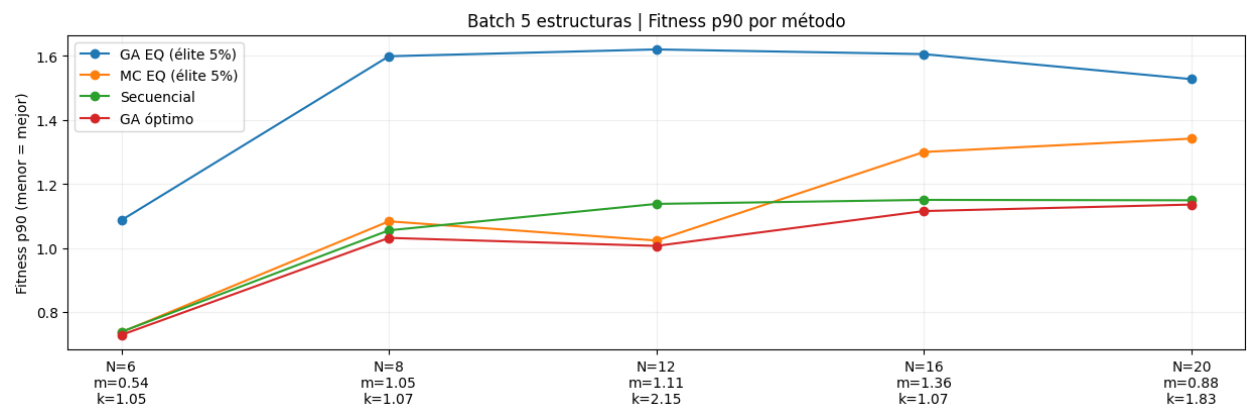


Figura 36 y



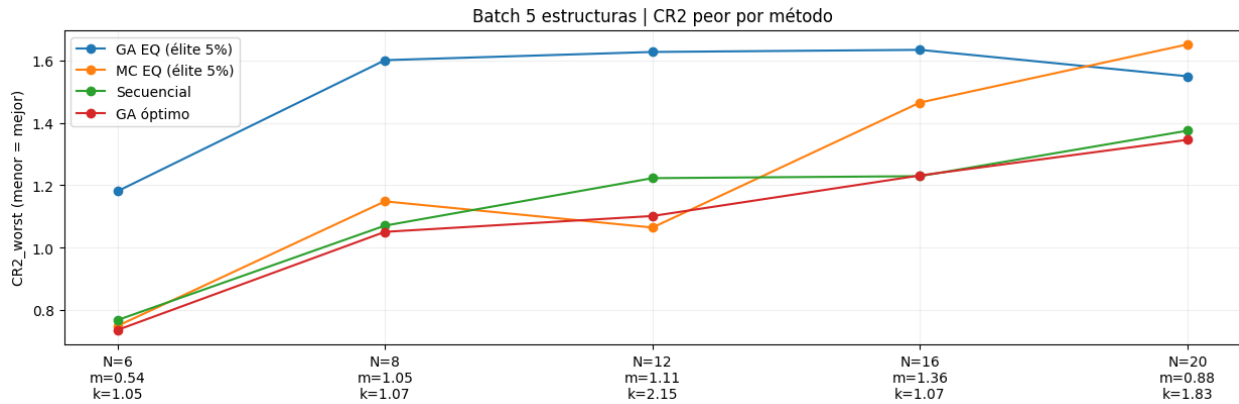


Figura 37, el desempeño general de cada uno de los modelos, la Media de CR2, la evaluación Fitness en P90, y el peor caso analizado respectivamente. En cada una de las figuras se observa un crecimiento estable en cuanto al deterioro de la calidad de las respuestas dependiente de la cantidad de pisos que posee la estructura y ligeramente dependiente de la masa y rigidez.

De igual manera se puede inferir a simple vista que el modelo propuesto en esta investigación presenta las soluciones con menor calidad de los cuatro modelos exceptuando el peor escenario de la estructura de 20 pisos.

Podemos confirmar de igual manera que el modelo estadístico elaborado mediante Monte Carlo presenta resultados altamente convergentes a soluciones optimas, comparables a la optimización mediante GA y el método de diseño iterativo principalmente en la evaluación promedio, sin embargo, desviándose ligeramente en cuanto a P90 y peor escenario.

Así mismo podemos definir la caracterización de las ecuaciones generada por Monte Carlo y GA, siendo sus variables M y K como un escalar

La validez de las ecuaciones generadas y dominio de soluciones queda limitada a la modelación de edificios de tipo cortante, y los intervalos descritos a continuación:

$$5 \leq N \leq 15 \quad (50)$$

$$K_0 = [k_i]_{1 \times 10}, \text{ donde } k_1 = 1.346 \times 10^9 e^{-0.3717 \left[\frac{L}{2} \right]} \quad (51)$$

$$M_0 = [m_i]_{10 \times 1}, \text{ donde } m_i = 218.9 \text{ ton} \quad (52)$$

$$0.7 \leq \alpha \leq 1.3 \quad (53)$$

Siendo que únicamente se evaluó el espacio de soluciones comprendido por:

$$M = \alpha * M_0(N) \quad (54)$$

$$K = \alpha * K_0(N) \quad (55)$$

Sin embargo, es de particular interés recalcar la convergencia de resultados aun fuera de este rango de valores descritos, para N, M y K .

VIII. Conclusiones.

- Los resultados presentados con anterioridad revelan que estrictamente la hipótesis es nula, sin embargo es parcialmente cierta, se demostró que las configuraciones de alto desempeño constituyen un familia de soluciones y no un arreglo inmutable, tal familia de soluciones es descriptible mediante un modelo matemático, específicamente una superficie de respuesta, sin embargo, la dependencia de la masa y rigidez únicamente afecta al M_F de manera significativa, además su caracterización no es obtenible mediante el análisis de poblaciones generadas por algoritmos genéticos, es necesario una muestra estadística de mayor significancia para ser posible representar su comportamiento de manera adecuada mediante el desarrollo de una superficie de respuesta.
- La optimización para un único registro sísmico es metodológicamente débil, ya que soluciones optimas en un registro sísmico pueden resultar significativamente perjudiciales en otro registro sísmico, siendo incluso posible resultados aun peores a una estructuración sin amortiguadores.
- Los resultados obtenidos reafirman las consideraciones propuestas por el código de construcción de la Ciudad de Mexico (Normas técnicas complementarias) donde se

indica específicamente la necesidad de instalar al menos dos dispositivos por sentido por piso en la estructura diseñada. Análogamente al diseño propuesto donde se señala que la zona de alta eficiencia se encuentra precisamente en la misma condición de saturación estructural.

- El método iterativo mostro ser un método altamente competitivo, rivalizando directamente con todo los modelos analizados y siendo el modelo computacionalmente más económico.
- El uso de RFD en una estructura de marcos debe ser evaluado mediante coeficiente de desempeño robustos, capaces de integrar la confiabilidad en el sistema y el desempeño de los mismo.

IX. Bibliografía o Referencias.

- [1] Imad H. Mualla, "FRICTIONAL DAMPER FOR DAMPING MOVEMENT OF STRUCTURES". el 13 de noviembre de 2012.
- [2] H. Jarrahi, A. Asadi, M. Khatibinia, y S. Etedali, "Optimal design of rotational friction dampers for improving seismic performance of inelastic structures", *Journal of Building Engineering*, vol. 27, p. 100960, ene. 2020, doi: 10.1016/j.jobbe.2019.100960.
- [3] H. Jarrahi, A. Asadi, M. Khatibinia, S. Etedali, y A. Samadi, "Simultaneous optimization of placement and parameters of rotational friction dampers for seismic-excited steel moment-resisting frames", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 136, p. 106193, sep. 2020, doi: 10.1016/j.soildyn.2020.106193.
- [4] A. Ampiah y X. Zhao, "Optimal Placement of Friction Dampers in High Rise Buildings Under Seismic Excitation", en *Computational and Experimental Simulations in Engineering*, vol. 75, H. Okada y S. N. Atluri, Eds., en Mechanisms and Machine Science, vol. 75. , Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 547–556. doi: 10.1007/978-3-030-27053-7_47.
- [5] N. Fallah y S. Honarparast, "NSGA-II based multi-objective optimization in design of Pall friction dampers", *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 89, pp. 75–85, oct. 2013, doi: 10.1016/j.jcsr.2013.06.008.
- [6] S. Jaisee, F. Yue, L. Chen, W. Yin, H. Gong, y C. Wang, "Shaking table investigations on the seismic performance of a steel frame with optimized passive energy dissipation devices", *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, vol. 330, núm. 2, p. 022081, oct. 2019, doi: 10.1088/1755-1315/330/2/022081.
- [7] H. Jarrahi, A. Asadi, M. Khatibinia, S. Etedali, y S. Paknehad, "Soil-structure interaction effects on the seismic performance of steel moment-resisting frames equipped with optimal rotational friction dampers", *Structures*, vol. 43, pp. 449–464, sep. 2022, doi: 10.1016/j.istruc.2022.05.118.
- [8] L. F. F. Miguel, L. F. F. Miguel, y R. H. Lopez, "Simultaneous optimization of force and placement of friction dampers under seismic loading", *Engineering Optimization*, vol. 48, núm. 4, pp. 582–602, abr. 2016, doi: 10.1080/0305215X.2015.1025774.
- [9] H. Moghaddam, F. Afzalnia, y I. Hajirasouliha, "Optimal distribution of friction dampers to improve the seismic performance of steel moment resisting frames", *Structures*, vol. 37, pp. 624–644, mar. 2022, doi: 10.1016/j.istruc.2022.01.007.
- [10] L. M. Moreschi, "Seismic Design of Energy Dissipation Systems for Optimal Structural Performance".
- [11] S. P. Ontiveros-Pérez, L. F. F. Miguel, y J. D. Riera, "Reliability-based optimum design of passive friction dampers in buildings in seismic regions", *Engineering Structures*, vol. 190, pp. 276–284, jul. 2019, doi: 10.1016/j.engstruct.2019.04.021.
- [12] E. Aydin, "A simple damper optimization algorithm for both target added damping ratio and interstorey drift ratio", *Earthquakes and Structures*, vol. 5, núm. 1, pp. 83–109, jul. 2013, doi: 10.12989/EAS.2013.5.1.083.
- [13] David E. Goldberg, "Genetic Algorithms in search optimization & Machine Learning". Addison-Wesley Publishing company, INC., enero de 1989.
- [14] Y. Ribakov y G. Agranovich, "A method for design of seismic resistant structures with viscoelastic dampers", *Structural Design Tall Build*, vol. 20, núm. 5, pp. 566–578, ago. 2011, doi: 10.1002/tal.578.
- [15] M. Artar y S. Carbas, "Optimum sizing design of steel frame structures through maximum energy dissipation of friction dampers under seismic excitations", *Structures*, vol. 44, pp. 1928–1944, oct. 2022, doi: 10.1016/j.istruc.2022.08.119.

- [16] M. M. Gharagoz, M. Noureldin, y J. Kim, "Machine learning-based design of a seismic retrofit frame with spring-rotational friction dampers", *Engineering Structures*, vol. 292, p. 116053, oct. 2023, doi: 10.1016/j.engstruct.2023.116053.
- [17] M. Noureldin, S. A. Memon, M. Gharagoz, y J. Kim, "Performance-based seismic retrofit of RC structures using concentric braced frames equipped with friction dampers and disc springs", *Engineering Structures*, vol. 243, p. 112555, sep. 2021, doi: 10.1016/j.engstruct.2021.112555.
- [18] M. Algamati, A. Al-Sakkaf, y A. Bagchi, "Energy Dissipation Technologies in Seismic Retrofitting: A Review", *CivilEng*, vol. 6, núm. 2, p. 23, abr. 2025, doi: 10.3390/civileng6020023.
- [19] S. Jaisee, F. Yue, y Y. H. Ooi, "A state-of-the-art review on passive friction dampers and their applications", *Engineering Structures*, vol. 235, p. 112022, may 2021, doi: 10.1016/j.engstruct.2021.112022.
- [20] A. Habib, A. Al Hourri, Z. A. Al-Sadoon, S. Barakat, y M. Saatcioglu, "Seismic isolation of buildings with multi-stage friction pendulum bearings: design, analysis, and energy dissipation perspectives", *Int. J. Dynam. Control*, vol. 13, núm. 2, p. 48, feb. 2025, doi: 10.1007/s40435-024-01555-9.
- [21] I. H. Mualla y B. Belev, "Performance of steel frames with a new friction damper device under earthquake excitation", *Engineering Structures*, vol. 24, núm. 3, pp. 365–371, mar. 2002, doi: 10.1016/S0141-0296(01)00102-X.
- [22] B. Namorado, A. Pinto Da Costa, y F. M. F. Simões, "Modelling rotational friction damping devices using the Non-Smooth Dynamics method", *Engineering Structures*, vol. 259, p. 114118, may 2022, doi: 10.1016/j.engstruct.2022.114118.
- [23] I. H. Mualla, "EXPERIMENTAL EVALUATION OF NEW FRICTION DAMPER DEVICE".
- [24] L. M. Moreschi y M. P. Singh, "Design of yielding metallic and friction dampers for optimal seismic performance", *Earthq Engng Struct Dyn*, vol. 32, núm. 8, pp. 1291–1311, jul. 2003, doi: 10.1002/eqe.275.
- [25] R. Zhang y T. T. Soong, "Seismic Design of Viscoelastic Dampers for Structural Applications", *J. Struct. Eng.*, vol. 118, núm. 5, pp. 1375–1392, may 1992, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:5(1375).
- [26] D. E. Goldberg, "The Design of Innovation: Lessons from Genetic Algorithms, Lessons for the Real World".
- [27] F. Hayes-Roth, "Review of 'Adaptation in Natural and Artificial Systems by John H. Holland', The U. of Michigan Press, 1975", *SIGART Bull.*, núm. 53, pp. 15–15, ago. 1975, doi: 10.1145/1216504.1216510.
- [28] Python Software Foundation, *Python*. Python Software Foundation. [En línea]. Disponible en: <https://www.python.org/>
- [29] SeismoSoft Ltd., *SeismoSignal*. (2024).
- [30] Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, "Base de datos de registros acelerográficos de la RAI-UNAM". Sistema de Base de Datos Acelerográficos en web (Acelerogramas RSM). Consultado: el 4 de julio de 2025. [En línea]. Disponible en: <https://aplicaciones.iingen.unam.mx/AcelerogramasRSM/Consultas/Filtro.aspx>

Anexo A Código de integración NSD en NLTHA

```
def _proj_scalar(z, a):
    if z <= -a:
        return -a
    if z >= a:
        return a
    return z

def _compute_Wi_from_i(i_f, Wi):
    N = len(i_f)
    if N == 1:
        Wi[0] = i_f[0]
        return
    for j in range(N-1):
        Wi[j] = i_f[j] - i_f[j+1]
    Wi[N-1] = i_f[N-1]

def nsd_midpoint_rigid_history(
    dt, ag, P,
    Mtilde_inv, A, K, m_vec,
    damper_mask, Ff_vec,
    alpha=1.0, max_iter=80, tol=1e-8
):
    n_steps = len(ag)
    N = len(m_vec)
    x = np.zeros((n_steps, N), dtype=np.float64)
    v = np.zeros((n_steps, N), dtype=np.float64)
    i_hist = np.zeros((n_steps, N), dtype=np.float64)
    E = np.zeros(N, dtype=np.float64)
```

```

Ftilde = np.zeros(N, dtype=np.float64)
Av = np.zeros(N, dtype=np.float64)
Kx = np.zeros(N, dtype=np.float64)
i_f = np.zeros(N, dtype=np.float64)
i_old = np.zeros(N, dtype=np.float64)
Wi = np.zeros(N, dtype=np.float64)
v_new = np.zeros(N, dtype=np.float64)
v_old = np.zeros(N, dtype=np.float64)
for k in range(n_steps - 1):
    ag_avg = 0.5*(ag[k] + ag[k+1])
    for i in range(N):
        s = 0.0
        for j in range(N):
            s += A[i, j]*v[k, j]
        Av[i] = s
    for i in range(N):
        s = 0.0
        for j in range(N):
            s += K[i, j]*x[k, j]
        Kx[i] = s
    for i in range(N):
        Ftilde[i] = Av[i] - dt*Kx[i] - dt*m_vec[i]*ag_avg + dt*0.5*(P[k, i] + P[k+1, i])
    for j in range(N):
        if damper_mask[j] == 0:
            i_f[j] = 0.0
    _compute_Wi_from_i(i_f, Wi)
    for i in range(N):
        s = 0.0

```

```

for j in range(N):
    s += Mtilde_inv[i, j]*(Ftilde[j] + Wi[j])
v_new[i] = s
for _ in range(max_iter):
    for i in range(N):
        v_old[i] = v_new[i]
    for j in range(N):
        i_old[j] = i_f[j]
    for j in range(N):
        if damper_mask[j] == 0:
            i_f[j] = 0.0
            continue
        v_rel = v_old[0] if j == 0 else (v_old[j] - v_old[j-1])
        a = Ff_vec[j]*dt
        i_f[j] = _proj_scalar(i_old[j] - alpha*v_rel, a)
    _compute_Wi_from_i(i_f, Wi)
    for i in range(N):
        s = 0.0
        for j in range(N):
            s += Mtilde_inv[i, j]*(Ftilde[j] + Wi[j])
        v_new[i] = s
    err = 0.0
    for i in range(N):
        dv = abs(v_new[i] - v_old[i])
        if dv > err:
            err = dv
    for j in range(N):
        di = abs(i_f[j] - i_old[j])

```

```

        if di > err:
            err = di
    if err < tol:
        break
for j in range(N):
    x[k+1, j] = x[k, j] + 0.5*dt*(v_new[j] + v[k, j])
    v[k+1, j] = v_new[j]
    i_hist[k+1, j] = i_f[j]
for j in range(N):
    if damper_mask[j] == 0:
        continue
    if j == 0:
        xrel_k = x[k, 0]
        xrel_k1 = x[k+1, 0]
    else:
        xrel_k = x[k, j] - x[k, j-1]
        xrel_k1 = x[k+1, j] - x[k+1, j-1]
    dx_rel = xrel_k1 - xrel_k
    F_avg = i_f[j] / dt
    E[j] += abs(F_avg * dx_rel)
return x, v, i_hist, E

```