



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias en Ingeniería Matemática

**Aplicación del Método SPPS en la Simulación de la Transferencia de Calor en
Materiales Multicapa Asociada al Modelo Fotoacústico**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Matemática

Presenta:

Ing. Jesús Fernando Sedano Cruz

Dirigido por:

Dr. Ulises Velasco García

SINODALES

Dr. Ulises Velasco García

Presidente

Dra. Kira Khmelnytskaya Gerasimova

Secretario

Dr. Alberto Hernández Almada

Vocal

Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo

Suplente

Dr. Samuel Estala Arias

Suplente

Centro Universitario
Querétaro, QRO
México.
Septiembre 2026

La presente obra está bajo la licencia:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Bajo los siguientes términos:



Atribución — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#), brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#). Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.



NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con [propósitos comerciales](#).



SinDerivadas — Si [remezcla, transforma o crea a partir](#) del material, no podrá distribuir el material modificado.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una [excepción o limitación](#) aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como [publicidad, privacidad, o derechos morales](#) pueden limitar la forma en que utilice el material.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO



FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS

Aplicación del Método SPSS en la Simulación de la Transferencia de Calor en Materiales Multicapa Asociada al Modelo Fotoacústico

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Matemática

Presenta:

ING. JESÚS FERNANDO SEDANO CRUZ

Dirigido por:

DR. ULISES VELASCO GARCÍA

Secretario:

DRA. KIRA KHMELNYTSKAYA GERASIMOVA

Vocal:

DR. ALBERTO HERNÁNDEZ ALMADA

Suplente 1

DR. ROBERTO AUGUSTO GÓMEZ LOENZO

Suplente 2

DR. SAMUEL ESTALA ARIAS

Querétaro, Qro. a Septiembre de 2026

Dedicatoria

A mi padre, por ser mi ejemplo de perseverancia y enseñarme a luchar con firmeza por lo que realmente vale la pena. Gracias por tu guía oportuna y por impulsarme siempre a dar lo mejor de mí.

A mi madre, por su amor incondicional, sus sacrificios silenciosos y su fe inquebrantable en mí. Gracias por brindarme los cimientos emocionales necesarios para convertirme en la persona que soy el día de hoy. Este logro es, en gran medida, de ustedes.

A mis hermanos, por su respaldo incondicional a lo largo de cada etapa de mi vida. Su presencia ha sido un motor fundamental en mi camino.

A mis sobrinos, con el deseo de que en este logro vean testimonio de que, con dedicación, constancia y esfuerzo, cualquier meta es alcanzable. Que este trabajo les sirva de inspiración para perseguir sus propios sueños.

A mis amigos Gil, Luis y Jordan que se han vuelto como una familia, por su apoyo incondicional a lo largo de todos estos años, por demostrarme que la verdadera amistad se refleja en los momentos más determinantes.

A ti, Andrea, por ser mi compañera de aventuras durante todos estos años. Gracias por tu paciencia infinita en mis momentos más difíciles, por tu comprensión en los días de desvelo y por tu amor incondicional, que ha sido mi faro y mi mayor motivación en este viaje; te agradezco por recordarme siempre, cuando el cansancio pesaba el motivo por el cual decidí emprender este viaje.

A mis compañeros de maestría: Adriana, Carlos y Nayib, por los buenos momentos que compartimos durante nuestra estancia en la universidad. Cada oportunidad compartida enriqueció enormemente esta experiencia, transformando el rigor académico en un camino entrañable.

A mi entrañable Miahuatlán de Porfirio Díaz, Oaxaca, por ser la cuna de mis valores, el lugar que resguarda mi historia y la identidad que orgullosamente llevo conmigo a donde quiera que el camino profesional me dirija.

Y a todas las personas que, de manera directa o indirecta, me acompañaron en este viaje, creyeron en mí y dejaron una huella en mi vida. A todos ustedes, mi más sincera gratitud.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a la Universidad Autónoma de Querétaro, en especial a la Facultad de Ingeniería, por abrirme las puertas y brindarme la oportunidad de continuar con mi formación académica y profesional a través de los estudios de Posgrado en la Maestría en Ciencias (Ingeniería Matemática).

Asimismo, extendiendo mi gratitud a cada uno de los profesores que me acompañaron e impartieron cátedra a lo largo de este posgrado. Gracias por compartir su valioso conocimiento, su experiencia y sus consejos, los cuales fueron fundamentales para potenciar mi desarrollo tanto académico como personal.

Mi profundo agradecimiento a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo económico otorgado mediante la beca de estudios; el respaldo de esta institución fue una pieza indispensable para la total dedicación y culminación de este trabajo de investigación.

A mi director de tesis, el Dr. Ulises Velasco García, le agradezco sinceramente su constante apoyo, su guía acertada, sus valiosos consejos y su absoluta disposición. Su experiencia y acompañamiento técnico fueron pilares esenciales para el desarrollo y término de este proyecto.

De igual manera, expreso mi gratitud a mis sinodales, la Dra. Kira Khmelnytskaya Gerasimova, el Dr. Alberto Hernández Almada y el Dr. Samuel Estala Arias, por el tiempo invertido en la rigurosa revisión de este trabajo. Sus observaciones, críticas constructivas y sugerencias contribuyeron de manera significativa a elevar la calidad de esta investigación.

Finalmente, agradezco al Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo, coordinador del Programa de la Maestría en Ciencias (Ingeniería Matemática) y sinodal de este trabajo, por su invaluable apoyo, gestión y disposición a lo largo de todo mi proceso académico y administrativo.

Resumen

La modelación matemática de la transferencia de calor en medios no homogéneos es fundamental en diversas disciplinas. Este trabajo aborda la aplicación del método de Series de Potencias de Parámetro Espectral (SPPS) para simular la transferencia de calor en materiales multicapa asociada al modelo fotoacústico. El modelo considera la absorción de un haz láser modulado, cuya variación térmica se propaga a través de las capas del sistema. El proceso se modela mediante la ecuación de calor y se formula como un problema de Sturm Liouville, obteniendo soluciones analítico-numéricas para la distribución de temperatura en cada capa. Dado que las transformadas integrales son difíciles de invertir en múltiples capas o las diferencias finitas dependen de la malla, el método SPPS permite manejar coeficientes variables de forma analítico-numérica con bajo costo computacional, resolviendo problemas de valor inicial, frontera y espectrales. La investigación escala desde modelos de dos hasta configuraciones de cinco muestras de material, evaluando el impacto de parámetros como difusividad, conductividad y capacidad calorífica. La validación numérica mediante algoritmos en Python demuestra excelente concordancia con Diferencias Finitas (precisiones de 10^{-7}) y un enfoque semianalítico, alcanzando precisiones del orden de 10^{-11} . Finalmente, los resultados validan la viabilidad del SPPS para resolver problemas de transferencia de calor en áreas que impliquen fuentes fotoacústicas como caracterización de materiales, además de su flexibilidad para el estudio de sistemas de difusión con coeficientes variables.

Palabras clave: Problema de Sturm-Liouville, Series de Potencias de Parámetro Espectral, Valores Propios, Fotoacústica, Transferencia de Calor en Medios Multicapa.

Abstract

Mathematical modeling of heat transfer in non-homogeneous media is fundamental across various disciplines. This work addresses the application of the Spectral Parameter Power Series (SPPS) method to simulate heat transfer in multilayer materials associated with the photoacoustic model. The model considers the absorption of a modulated laser beam, generating a thermal variation that propagates through the system's layers. The process is modeled using the heat equation and formulated as a Sturm-Liouville problem, obtaining analytic-numerical solutions for the temperature distribution in each layer. Given that integral transforms are difficult to invert across multiple layers and finite difference methods are mesh-dependent, the SPPS method allows for handling variable coefficients in an analytic-numerical manner with low computational cost, successfully solving initial value, boundary value, and spectral problems. The research scales from two-layer models to configurations of five material samples, evaluating the impact of parameters such as thermal diffusivity, thermal conductivity, and heat capacity. Numerical validation through Python algorithms demonstrates excellent agreement with Finite Differences (accuracies of 10^{-7}) and a semi-analytical approach, achieving accuracies on the order of 10^{-11} . Finally, the results validate the feasibility of the SPPS method for solving heat transfer problems in fields involving photoacoustic sources, such as material characterization, as well as its flexibility for studying diffusion systems with variable coefficients.

Keywords: Sturm-Liouville Problem, Spectral Parameter Power Series, Eigenvalues, Photoacoustics, Heat Transfer in Multilayer Media.

Índice general

Introducción	1
1. Antecedentes	2
1.1. Justificación	5
1.2. Descripción del problema	5
1.3. Hipótesis	6
1.4. Objetivo general	6
1.5. Objetivos particulares	6
2. Fundamentación Teórica	7
2.1. Ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden	7
2.2. Espacio $L_r^2(a, b)$	8
2.3. Principio de superposición lineal	8
2.4. Método de separación de variables	9
2.5. Operador diferencial autoadjunto	10
2.6. Problema de Sturm-Liouville	10
2.6.1. Problema regular de Sturm-Liouville	11
2.7. Serie de Fourier Generalizada	11
2.8. Ecuación de Calor	13
2.8.1. Ecuación de calor unidimensional	14
2.9. Condiciones de frontera para la ecuación de calor	14
2.10. Efecto Fotoacústico	15
2.11. Modelo de Rosencwaig y Gersho (RG)	15
2.11.1. Generación de señal fotoacústica	16
2.11.2. Transferencia de calor en materiales multicapa	16
2.11.3. Ecuaciones de calor para el modelo de Rosencwaig-Gersho	17
2.12. Senoides y Fasores	18
2.12.1. Parámetros de la Señal Senoidal	18
2.12.2. El Concepto de Fasor mediante la Identidad de Euler	19
2.13. Método de Series de Potencias de Parámetro Espectral	20
2.13.1. Construcción de las potencias formales	21
2.14. Técnicas de Integración Numérica	21
2.15. Aproximación Polinomial por Tramos	22
2.15.1. Splines Cúbicos	22

2.15.2. Implementación Computacional y Resolución Numérica del SPPS	23
2.16. Métodos de búsqueda de Raíces	24
2.16.1. Métodos cerrados (o de intervalo)	24
2.16.2. Métodos abiertos	24
2.16.3. Método de Brent	25
2.17. Aritmética anidada y método de Horner	25
2.18. Errores numéricos	26
3. Metodología	27
3.1. Determinación de las variables a utilizar para la implementación numérica del método SPPS	27
3.1.1. Selección de muestra y casos representativos	28
3.2. Programación e Implementación del método SPPS al modelo de dos capas de muestra	29
3.3. Generación de resultados para materiales con dos capas de muestra	31
3.4. Generación de resultados para materiales con múltiples capas de muestra	32
3.5. Comparación de resultados con otros métodos	32
4. Método SPPS y el modelo de n capas	34
4.1. Modelo para n capas	34
4.1.1. EDP para el modelo de n capas	35
4.1.2. Condiciones de interfaz	36
4.1.3. Homogeneización de las condiciones de frontera	36
4.1.4. Caso homogéneo	37
4.1.5. Ecuación espacial mediante SPPS	38
4.1.6. Cálculo para n capas	40
4.2. Expansión de funciones propias del caso no homogéneo	42
4.3. Solución de la componente temporal bajo excitación modulada	44
4.4. Descomposición de la solución $u(x, t)$	44
4.4.1. Componente transitoria $u_{trans}(x, t)$	45
4.4.2. Componente estacionaria DC $u_{DC}(x, t)$	45
4.4.3. Componente oscilante AC $u_{AC}(x, t)$	45
4.5. Solución para el caso no homogéneo con fuente fotoacústica	46
4.6. Representación fasorial de la componente oscilante AC	46
5. Enfoques de Referencia para el Problema de Sturm-Liouville	48
5.1. Valores y funciones propias para el caso general homogéneo	48
5.1.1. Soluciones locales y condiciones de frontera	48
5.1.2. Condiciones en las interfaces	49
5.1.3. Construcción de matriz y ecuación característica	50
5.1.4. De la matriz global a la ecuación residual	51
5.2. Valores y funciones propias para muestra homogénea	52
5.2.1. Caso con una muestra homogénea	52
5.2.2. Extensión para sistemas de 2 a 5 capas de muestra homogéneas	53
5.3. Discretización del problema de Sturm-Liouville mediante el método de diferencias finitas centradas	54
5.3.1. Tratamiento de las interfaces térmicas y ecuación nodal	55

5.3.2.	Representación Matricial del Sistema Discretizado	55
5.4.	Definición de Propiedades Térmicas Variables	56
5.4.1.	Funciones para el modelo de 2 capas de muestra	57
5.4.2.	Funciones para el modelo de 3 capas de muestra	57
5.4.3.	Funciones para el modelo de 4 capas de muestra	57
5.4.4.	Funciones para el modelo de 5 capas de muestra	57
6.	Resultados	58
6.1.	Resultados de valores y funciones propias para el caso general homogéneo	59
6.1.1.	Resultados con 2 capas de muestra homogéneas	59
6.1.2.	Resultados con 3 capas de muestra homogéneas	61
6.1.3.	Resultados con 4 capas de muestra homogéneas	64
6.1.4.	Resultados con 5 capas de muestra homogéneas	66
6.2.	Resultados mediante el método de diferencias finitas centradas	68
6.3.	Resultados con término no homogéneo $f(x, t)$	71
6.4.	Amplitud y fase para la componente oscilante $u_{AC}(x, t)$	75
6.5.	Resultados con propiedades térmicas variables entre Método SPPS y DF	81
6.5.1.	Resultados de valores propios y funciones propias	81
6.6.	Resultados considerando el término $f(x, t)$	83
6.7.	Amplitud y fase para la componente oscilante $u_{AC}(x, t)$	85
7.	Conclusiones	90
A.	Propagación de Coeficientes Térmicos	91
A.1.	Caso de 2 muestras	91
B.	Implementación computacional	93
B.1.	Configuración Global y Parámetros del Sistema	93
B.2.	Enfoque Semianalítico Matricial y Búsqueda de Raíces	93
B.3.	Implementación Numérica mediante Diferencias Finitas	94
B.4.	Implementación del Método SPPS	95
B.5.	Método SPPS para coeficientes variables	97
	Referencias	102

Índice de figuras

2.1. Representación esquemática de un sistema, su frontera y sus alrededores.	13
2.2. Relación entre el signo del gradiente de temperatura y la dirección del flujo de calor.	13
2.3. Representación física del sistema sobre el cual se aplica el balance térmico.	14
2.4. Esquema representativo del Modelo de Rosencwaig y Gersho.	16
2.5. Senoides con diferente ángulo de fase.	19
2.6. Representación geométrica de un Fasor.	20
2.7. Esquema de un spline cúbico.	23
2.8. Representación del método cerrado y abierto	25
3.1. Metodología propuesta.	33
4.1. Geometría del modelo de n capas.	35
5.1. Esquema para el caso de N capas homogéneo.	48
5.2. Representación esquemática de la geometría y condiciones de frontera del modelo base conformado por una capa de muestra ($n = 1, N = 3$).	52
5.3. Representación esquemática de la geometría para el modelo con dos capas de muestra ($n = 2, N = 4$).	53
5.4. Configuración geométrica del modelo térmico con tres capas de muestra ($n = 3, N = 5$).	54
5.5. Geometría del modelo con cuatro capas de muestra ($n = 4, N = 6$).	54
5.6. Esquema geométrico del modelo con cinco capas de muestra ($n = 5, N = 7$).	54
6.1. Comparación de las primeras seis funciones propias (X_n) calculadas por SPPS y la solución de referencia para sistemas de dos capas de muestra.	60
6.2. Comparación de las primeras seis funciones propias (X_n) para sistemas de tres capas de muestra.	62
6.3. Comparación de las primeras seis funciones propias (X_n) para sistemas de cuatro capas de muestra.	64
6.4. Comparativa primeras seis funciones propias (X_n) sistemas de cinco capas de muestra.	66
6.5. Comparativa de las primeras seis (X_n) obtenidas mediante DF y la solución de referencia para sistemas de dos capas de muestra.	68
6.6. Comparativa de las primeras seis (X_n) obtenidas mediante DF y la solución de referencia para sistemas de tres capas de muestra.	69

6.7. Comparativa de las primeras seis (X_n) obtenidas mediante DF y la solución de referencia para sistemas de cuatro capas de muestra.	70
6.8. Comparativa de las primeras seis (X_n) obtenidas mediante DF y la solución de referencia para sistemas de cinco capas de muestra.	71
6.9. Componentes de la solución $u(x, t)$ para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	72
6.10. Componentes $u_{AC}(x, t)$ $\omega = 10, 100$ Hz para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	73
6.11. Componentes de la solución $u(x, t)$ para Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	73
6.12. Componentes de la solución $u(x, t)$ para Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	74
6.13. Componentes de solución $u(x, t)$ para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	74
6.14. Componentes $u_{AC}(x, t)$ $\omega = 10, 100$ Hz para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	75
6.15. Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	76
6.16. Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz para Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	77
6.17. Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz para Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	78
6.18. Amplitud y fase $\omega = 30$ Hz para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	78
6.19. Amplitud y fase $\omega = 10, 100$ Hz para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	79
6.20. Amplitud y fase $\omega = 10, 100$ Hz para Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	79
6.21. Amplitud y fase $\omega = 10, 100$ Hz para Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	80
6.22. Amplitud y fase $\omega = 10, 100$ Hz para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	80
6.23. Comparativa de las seis primeras funciones propias calculadas mediante SPPS y Diferencias Finitas para medios con propiedades variables en configuraciones de 2 a 5 capas de muestra.	81
6.24. Componentes de la solución $u(x, t)$ para el sistema con propiedades variables (Pt, Au).	83
6.25. Componentes de $u(x, t)$ para el sistema con propiedades variables (Cu, Au, Ni).	84
6.26. Componentes de $u(x, t)$ para el sistema con propiedades variables (Cu, Au, Al, Cr).	84
6.27. Componentes de $u(x, t)$ para el sistema con propiedades variables (Ti, Pt, Al, Au, Cu).	85
6.28. Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz del sistema con propiedades variables (Pt, Au).	85
6.29. Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz del sistema con propiedades variables (Cu, Au, Ni).	86
6.30. Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz del sistema con propiedades variables (Cu, Au, Al, Cr).	86
6.31. Sistema con propiedades variables (Ti, Pt, Al, Au, Cu) para $\omega = 30$ Hz.	87
6.32. Amplitud y fase para $\omega = 10, 100$ Hz del sistema con propiedades variables (Pt, Au).	87
6.33. Amplitud y fase para $\omega = 10, 100$ Hz (Cu, Au, Ni).	88
6.34. Amplitud y fase para $\omega = 10, 100$ Hz (Cu, Au, Al, Cr).	88
6.35. Amplitud y fase para $\omega = 10, 100$ Hz (Ti, Pt, Al, Au, Cu).	89

Índice de tablas

1.1. Resumen de Tesis sobre el método SPPS y desarrollo de sistema fotoacústico.	2
1.2. Resumen de Artículos sobre Estado del arte.	3
2.1. Fórmulas de integración cerrada de Newton-Cotes.	22
6.1. Coeficientes de absorción óptica β (mm^{-1}) para diferentes longitudes de onda. . . .	58
6.2. Propiedades térmicas para los diferentes materiales estudiados.	59
6.3. Dimensiones para los elementos considerados de la celda de dos capas de muestra. . .	59
6.4. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Cu, Pd</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	60
6.5. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Cu, Pd</i> (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	61
6.6. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Pt, Au</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	61
6.7. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Pt, Au</i> (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	61
6.8. Dimensiones para los elementos considerados de la celda de tres capas de muestra. .	62
6.9. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Ti, Al, Ag</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	63
6.10. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Ti, Al, Ag</i> (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	63
6.11. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Cu, Au, Ni</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	63
6.12. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Cu, Au, Ni</i> (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	63
6.13. Dimensiones para los elementos considerados de la celda de cuatro capas de muestra. .	64
6.14. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Ti, Pd, Al, Ag</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. . .	65
6.15. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Ti, Pd, Al, Ag</i> (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. . .	65
6.16. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Cu, Au, Al, Cr</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. . .	65
6.17. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Cu, Au, Al, Cr</i> (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. . .	65
6.18. Dimensiones para los elementos considerados de la celda de cinco capas de muestra. .	66
6.19. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Ti, Pt, Al, Au, Cu</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. .	67
6.20. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Ti, Pt, Al, Au, Cu</i> (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. .	67
6.21. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Ag, Au, Al, Cr, Ti</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. .	67
6.22. Comparativa de error en valores propios λ : <i>Ag, Au, Al, Cr, Ti</i> (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. .	67
6.23. Comparativa de error (DF vs. Referencia) para <i>Cu, Pd</i> (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	68
6.24. Comparativa de error (DF vs. Referencia) para <i>Pt, Au</i> (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.	68
6.25. Comparativa de error (DF vs. Referencia) para <i>Ti, Al, Ag</i> (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. . .	69
6.26. Comparativa de error (DF vs. Referencia) para <i>Cu, Au, Ni</i> (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm. . .	69
6.27. Comparativa de valores propios y análisis de error (Diferencias Finitas vs. Referencia) espesores $l_s = 2$ mm, <i>Titanio</i> = 1 mm, <i>Paladio</i> = 1 mm, <i>Aluminio</i> = 1 mm, <i>Plata</i> = 1 mm y $l_g = 2$ mm.	70

6.28. Comparativa de valores propios y análisis de error (Diferencias Finitas vs. Referencia)	
espesores $l_s = 2\text{ mm}$, $Cobre = 2\text{ mm}$, $Oro = 2\text{ mm}$, $Aluminio = 2\text{ mm}$, $Cromo =$	
2 mm y $l_g = 2\text{ mm}$	70
6.29. Comparativa error (DF vs. Referencia) para Ti, Pt, Al, Au, Cu (1 mm); $l_s, l_g = 2\text{ mm}$.	71
6.30. Comparativa error (DF vs. Referencia) para Ag, Au, Al, Cr, Ti (5 mm); $l_s, l_g = 2\text{ mm}$.	71
6.31. Regímenes térmicos para la configuración Pt, Au ($l = 1\text{ mm}$) a diferentes frecuencias.	75
6.32. Regímenes térmicos para la configuración $Cu - Au - Ni$ ($l = 5\text{ mm}$).	76
6.33. Regímenes térmicos para la configuración $Cu - Au - Al - Cr$ ($l = 1\text{ mm}$).	77
6.34. Regímenes térmicos para la configuración $Ti - Pt - Al - Au - Cu$ ($l = 2\text{ mm}$). . . .	77
6.35. Comparativa de error en valores propios λ para el sistema con propiedades variables	
Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2\text{ mm}$	82
6.36. Comparativa de error en valores propios λ para el sistema con propiedades variables	
Cu, Ni (0,5 mm); Au (1 mm); $l_s, l_g = 2\text{ mm}$	82
6.37. Comparativa de error en valores propios λ para el sistema con propiedades variables	
Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2\text{ mm}$	82
6.38. Comparativa error en valores propios λ para Ti, Pt, Al, Au, Cu (0,5 mm); $l_s, l_g = 2$	
mm.	83

Abreviaturas y siglas

- AC** Componente oscilante (señal alterna por sus siglas en inglés, *Alternating Current*) [1].
- CSC** Formato de columna dispersa comprimida (*Compressed Sparse Column*) [2].
- DC** Componente estacionaria (señal continua por sus siglas en inglés, *Direct Current*) [1].
- DF / FD** Diferencias Finitas / Diferencias Finitas Centradas (*Finite Differences*) [3, 4].
- EDO** Ecuación Diferencial Ordinaria [5].
- EDP** Ecuación Diferencial Parcial / Ecuación en Derivadas Parciales [6].
- ESIME** Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica [7].
- FDTR** Termorreflectancia en el dominio de la frecuencia (*Frequency-Domain Thermoreflectance*, clasificada como técnica fototérmica) [8].
- FEM** Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method*) [9].
- ICI** Interpolación Cuadrática Inversa [10].
- IPN** Instituto Politécnico Nacional [7].
- PAS** Espectroscopía Fotoacústica (*Photoacoustic Spectroscopy*) [8].
- PVF** Problemas con Valores en la Frontera / Problema de Valor de Frontera [11].
- RG / R-G** Modelo de Rosencwaig y Gersho [12, 13].
- SECIHTI** Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación [14].
- SL** Sturm-Liouville [15].
- SPPS** Series de Potencias de Parámetro Espectral (*Spectral Parameter Power Series*) [16].
- T.D.** Térmicamente Delgado (régimen térmico) [17].
- TDTR** Termorreflectancia en el dominio del tiempo (*Time-Domain Thermoreflectance*, clasificada como técnica fototérmica) [8].
- T.G.** Térmicamente Grueso (régimen térmico) [17].
- UAQ** Universidad Autónoma de Querétaro [18].
- UTM** Transformada Unificada de Fokas (*Unified Transform Method*) [19].

Introducción

La presente tesis se encuentra organizada en siete capítulos que detallan el desarrollo, implementación y validación del modelo propuesto:

En el Capítulo I: Antecedentes, se realiza una revisión del estado del arte sobre el método SPPS, técnicas de simulación en medios multicapa y aplicaciones en fotoacústica. Asimismo, se presentan la justificación, la hipótesis y los objetivos de esta investigación.

En el Capítulo II: Fundamentación Teórica, se detallan las herramientas matemáticas y físicas esenciales, abordando el problema de Sturm-Liouville y el modelo de Rosencwaig-Gersho (RG). Asimismo, se introduce el método de Series de Potencias de Parámetro Espectral (SPPS) y el soporte algorítmico necesario para la integración numérica y la búsqueda de raíces.

En el Capítulo III: Metodología, se describe el proceso de implementación computacional en Python. Se detalla la selección de variables y el proceso de programación para aplicar el método SPPS inicialmente a modelos de dos capas de muestra, permitiendo una primera comparación de resultados con otros enfoque de referencia.

En el Capítulo IV: Método SPPS y el modelo de n capas, se desarrolla la formulación para sistemas estratificados permitiendo la descomposición de la solución térmica $u(x, t)$ en sus componentes transitoria, estacionaria (DC) y oscilante (AC).

En el Capítulo V: Enfoques de referencia para el problema de Sturm-Liouville, se presentan los métodos utilizados para la validación del modelo. Esto incluye el enfoque semianalítico matricial para el caso homogéneo y la discretización mediante Diferencias Finitas Centradas (FD), así como la definición de propiedades térmicas variables.

En el Capítulo VI: Resultados, se presenta la validación exhaustiva del modelo mediante simulaciones numéricas. Se analizan los valores y funciones propias, la precisión frente a los enfoques de referencia y el comportamiento de la amplitud y fase de la señal fotoacústica en sistemas con propiedades térmicas variables y términos no homogéneos $f(x, t)$.

Finalmente, en el Capítulo VII: Conclusiones, se presentan las reflexiones finales del trabajo, destacando la precisión alcanzada por el método SPPS, la eficiencia en la supresión de modos altos y sugiriendo líneas de investigación futuras.

En los apéndices, se encuentran los scripts fuente en Python utilizados para la implementación del método SPPS, cálculo de valores propios y generación de las simulaciones presentadas.

El proposito central es desarrollar simulaciones numéricas mediante el método SPPS con el propósito de analizar la transferencia de calor en materiales multicapa dentro del modelo fotoacústico. Al integrar el análisis fasorial y un marco de validación numérica, este trabajo consolida una herramienta robusta y de libre acceso, para resolver problemas de difusión con coeficientes variables y múltiples discontinuidades.

Antecedentes

En la tabla 1.1 se presenta una recopilación de tesis en las que se ha utilizado el método SPPS para resolver problemas en contextos como telecomunicaciones, fibras ópticas y propagación de ondas electromagnéticas.

Tabla 1.1: Resumen de Tesis sobre el método SPPS y desarrollo de sistema fotoacústico.

Ref.	Título	Autor	Año	Institución	Grado	Descripción
[1]	Análisis de Problemas de Propagación en Fibra de Dispersión Plana Mediante el Método SPPS	N. R. Carreón Guzman	2018	ESIME Zacatenco (IPN)	Maestría en Ciencias	Análisis de fibras ópticas de dispersión plana. Cálculo de modos guiados, con tiempo de cómputo de alrededor de 0.68 minutos.
[2]	Análisis de medios no homogéneos para el diseño de filtros ópticos usando el método SPPS	S. Estevez Valdez	2018	ESIME Zacatenco (IPN)	Maestría en Ciencias	Se analiza método SPPS para estudiar la propagación de ondas en medios no homogéneos. Se comparan diseños sinusoidales y apodizados, la implementación numérica requirió tiempos computacionales en el rango de 9 a 35 segundos.
[3]	Método SPPS para el análisis de problemas de propagación de ondas en fibra óptica de compensación de dispersión	I. I. Alonzo Hernández	2017	ESIME Zacatenco (IPN)	Maestría en Ciencias	Se estudia la dispersión cromática e intermodal en fibras ópticas con perfiles parabólicos. El método SPPS permitió analizar perfiles arbitrariamente modificados de fibras destacándose por su precisión y tiempos de cómputo.
[4]	Análisis de Dispersión de Guía de Onda en Fibras de dispersión Desplazada no Nula Usando el Método de SPPS	L. Cano Osornio	2016	ESIME Zacatenco (IPN)	Maestría en Ciencias	Se utiliza el método SPPS aplicado a ecuaciones de Bessel perturbadas, evaluando perfiles de índice de refracción tanto continuos como con discontinuidades. Se obtuvieron errores absolutos menores a 10^{-6} en valores propios calculados.
[5]	Ecuación de Dispersión para el Operador de Sturm-Liouville Mediante el Método de Series de Potencias del Parámetro Espectral	E. Ortiz Caballero	2014	Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ)	Maestría en Ciencias	Se analiza la ecuación de Schrödinger con masa dependiente de la posición. El método SPPS permitió calcular eigenvalores con alta precisión, con errores absolutos inferiores a 10^{-12} , comparado con soluciones exactas y otras reportadas en la literatura.

La tabla 1.2 recopila artículos publicados en los últimos 10 años sobre la implementación del método SPPS, técnicas de simulación numérica en medios multicapa y aplicaciones basadas en el modelo fotoacústico.

Tabla 1.2: Resumen de Artículos sobre Estado del arte.

Ref.	Autores	Año	Método Utilizado	Aplicación	Contribución
[6]	S. M. Barma-gambetov, U. K. Koilyshov	2025	Método de Fourier (Separación de variables)	Solución a la ecuación de calor multicapa con coeficientes constantes discontinuos.	Reafirman los retos de la inversión numérica en las transformadas y el enfoque analítico conduce a un problema espectral de Sturm-Liouville.
[7]	R. Castillo Perez, J. R. Ek Ek, C. E. Jacome Peñaherrera, et al.	2023	Comparación de SPPS con Modos Exactos y FEM	Análisis modal en fibras ópticas micro/nano cónicas	Error relativo $< 5\%$ vs método exacto. Menor costo computacional que el método FEM para radios $> 2\ \mu\text{m}$ a $1550\ \text{nm}$.
[8]	W.-Y. Tsai, S. Breimann, T.-W. Shen, et al.	2023	Análisis de imagen fotoacústica y espectroscopía de absorción	Predicción de parámetros bioquímicos en sangre	Uso potencial de la imagen fotoacústica en para medir parámetros bioquímicos con correlación de $R^2 > 80$.
[9]	R. Vega, V. Rabinovitch Likhtman, R. Castillo-Pérez	2022	SPPS	Propagación de ondas de radio en medios estratificados	Determinación de números de onda en medios estratificados con precisión de 10^{-9} frente a solución analítica.
[10]	M. Farkas, B. Deconinck	2022	Transformada Unificada de Fokas (UTM)	Resolución de ecuación de calor con conductividad térmica variable	Valores propios con 4 decimales exactos y error absoluto de 10^{-3}
[11]	D. Rubio, D. A. Tarzia, G. F. Umbricht	2021	Método de Fourier y Sturm-Liouville	Transferencia de calor en sistemas sólido-sólido	Implementación de simulaciones numéricas para el problema de valores propios.
[12]	L. Zhou, M. Parhizi, A. Jain	2021	Series de Fourier y expansión en funciones propias.	Cálculo de temperatura en sistemas multicapa con flujo de calor variable	Desarrollo de un modelo que considera coeficiente convectivo variable en cuerpos multicapa.
[13]	M. Akel, H. M. Elshehabey, R. Ahmed	2021	Transformada integral generalizada	Difusión térmica en medios multicapa	Aplicación de un método de transformada integral para problemas problemas de difusión no homogéneos en medios multicapa.
[14]	N. G. March, E. J. Carr	2019	Método de volúmenes finitos	Análisis numérico de difusión multicapa con diferentes condiciones de interfaz	Método numérico general y eficiente, aplicable a condiciones de interfaz generales; validado con pruebas numéricas precisas con errores del orden de 10^{-5} .
[15]	J. A. López Toledo, H. Oviedo Galdeano	2018	SPPS	Modelado de reflexión y transmisión en medios estratificados	Valores propios con errores absolutos entre 10^{-7} y 10^{-8} .
[16]	E. J. Carr, N. G. March	2018	Método semianalítico (Capas homogéneas)	Difusión multicapa con condiciones de frontera dependientes del tiempo e interfaces generales.	Muestran que métodos clásicos y de transformadas fallan al intentar combinar fronteras dependientes del tiempo y un alto número de capas heterogéneas.
[17]	M. Isaiev, G. Musabek, P. Lishchuk, et al.	2022	Revisión de aplicaciones del efecto fotoacústico en caracterización de materiales	Evaluación de propiedades térmicas y elásticas de nanomateriales	Revisión de los principios de medición y diseño de sistemas fotoacústicos.
[18]	B. Abad, D.A. Borca Tasciuc, and M. S. Martin Gonzalez	2017	Técnicas fototérmicas (TDTR, FDTR, radiometría, fotoacústica)	Caracterización de nanomateriales para energías renovables	Medición sin contacto en nanoescala con incertidumbre de ($\sim 10\%$)
[19]	M. W. Sigrist	2017	Espectroscopía fotoacústica (PAS)	Aplicaciones en sólidos, líquidos y gases.	Exploración del uso de la espectroscopía fotoacústica en ciencia, medicina y medio ambiente.
[20]	S. Manohar, D. Razansky	2016	Revisión histórica del efecto fotoacústico	Imagen biomédica (vasculatura, retina, tumores), espectroscopía, monitoreo ambiental.	Revisión exhaustiva del desarrollo histórico, técnico y clínico del método fotoacústico a través de los años.

[21]	E. J. Carr, I. W. Turner	2016	Transformada de Laplace y expansión en funciones ortogonales	Modelado de difusión en medios compuestos con múltiples capas	Propuesta de un método semi-analítico eficiente para resolver la ecuación de difusión multicapa con errores del orden de 10^{-6} .
[22]	M. R. Rodrigo, A. L. Worthy	2016	Transformada de Laplace aplicada a difusión multicapa	Solución analítica de difusión multicapa sin expansión en series	Desarrollo de un método basado en transformadas de Laplace para múltiples capas con condiciones no homogéneas y funciones arbitrarias en el tiempo

Entre los trabajos revisados, [17], destaca la aplicación del enfoque fotoacústico para caracterizar nanomateriales, demostrando su capacidad para medir propiedades térmicas, ópticas y mecánicas de forma no destructiva. Por su parte, el método SPPS se ha validado como una alternativa eficiente frente a enfoques tales como modos exactos y el método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés), particularmente en el análisis modal de fibras ópticas [7]; en dichos estudios, se han obtenido resultados numéricos con una precisión del orden de 10^{-9} en comparación con soluciones analíticas [9]. Finalmente en [6] se establece que el problema de valores iniciales para la ecuación de calor con coeficientes discontinuos se reduce a un problema espectral de Sturm-Liouville.

En contraste, esquemas de volúmenes finitos [14] muestran limitaciones de estabilidad al resolver la ecuación de difusión en medios multicapa, ya que las condiciones de interfaz pueden restringir su aplicabilidad en simulaciones rápidas para sistemas con múltiples estratos. Asimismo, los enfoques basados en la transformada de Laplace [21, 22] reconocen la dificultad asociada a su inversión, lo cual puede resultar costoso en términos de tiempo computacional. De manera similar, en [13] se propone una solución que depende de la transformada $M_{p,m}$, cuya inversión puede volverse compleja ante funciones arbitrarias.

Otros estudios, como el de [10], logran resolver la ecuación de calor con conductividad variable mediante la transformada de Fokas; o bien, analizan soluciones analíticas y numéricas para la transferencia de calor en interfaces sólido-sólido [11], aunque sin incorporar los mecanismos de generación térmica propios del modelo fotoacústico.

El antecedente fundamental de esta investigación es el enfoque desarrollado por Khmelnytskaya y Serroukh [23], quienes establecieron las bases para aplicar el método SPPS a la simulación de la transferencia de calor dentro del modelo fotoacústico. En dicho trabajo, se resolvió rigurosamente el problema de conducción térmica para una configuración base, demostrando teóricamente que, sin pérdida de generalidad, el método puede extenderse para modelar materiales de naturaleza no homogénea y con características discontinuas.

Tomando como base este desarrollo teórico, la presente investigación extiende dicha fundamentación hacia la implementación computacional de sistemas con un mayor número de capas. La contribución principal de esta tesis radica en la implementación, en un entorno de código abierto (Python), de un algoritmo para múltiples estratos (de 2 a 5 capas de muestra), integrando un enfoque fasorial para el estudio de los componentes oscilantes en el dominio de la frecuencia.

Aunado a ello, se establece un marco de validación cruzada mediante la discretización por Diferencias Finitas Centradas (FD) y un enfoque semianalítico. El resultado es una herramienta computacional eficiente y de libre acceso que facilita el análisis térmico de materiales multicapa considerando fuentes fotoacústicas.

1.1. Justificación

La transferencia de calor en materiales multicapa es relevante en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería [11, 22]. Aplicaciones tales como medición de propiedades termofísicas en la piel y distribución de fármacos [24, 25]; análisis de fenómenos de contaminación de medios porosos [26], caracterización de nanomateriales [18], materiales semiconductores [17] y la transferencia de calor en envolventes en edificaciones [27]. Dichos fenómenos se modelan mediante la ecuación de calor, cuya resolución permite comprender el comportamiento térmico en estas estructuras [13, 14, 28].

Este trabajo adopta el modelo fotoacústico como escenario de estudio, fundamentándose en el marco teórico establecido por [23], quienes a partir del modelo clásico de [51], demuestran la viabilidad de aplicar el método SPPS en materiales no homogéneos. Las técnicas basadas en este modelo son relevantes en ciencia e ingeniería, al proporcionar métodos sin contacto que permiten caracterizar materiales de forma no destructiva, lo cual es útil en aplicaciones donde se requieren propiedades térmicas específicas [17, 18, 29, 30]. Este modelo permite analizar la respuesta térmica mediante la absorción de luz modulada; debido a la interdependencia entre las propiedades ópticas y térmicas, se ha estudiado mediante la resolución de las ecuaciones de difusión de calor [18, 29].

Esto permite el desarrollo de nuevas metodologías matemáticas para describir el proceso físico de manera eficiente. La importancia de esta investigación radica, por tanto, en crear herramientas de validación para simular la transferencia de calor en sistemas estratificados, donde el método SPPS ofrece una opción robusta para estudiar sistemas con coeficientes variables. El desarrollo íntegro en Python asegura que el algoritmo sea accesible y verificable. Adicionalmente, el uso de librerías científicas de libre acceso garantiza que la metodología pueda ser reproducida y ampliada en futuros desarrollos académicos, superando las barreras asociadas al software de licencia comercial.

1.2. Descripción del problema

La resolución de problemas de difusión de calor en medios multicapa se ha abordado tradicionalmente mediante la separación de variables y las transformadas integrales. Sin embargo, la separación de variables suele limitarse a condiciones de frontera homogéneas, mientras que las transformadas integrales presentan una alta complejidad en su inversión numérica, especialmente en sistemas de múltiples capas [22, 31, 32]. Emplear separación de variables conduce inherentemente a un problema de Sturm-Liouville con coeficientes variables o discontinuos [6]. Por lo cual, es de gran interés contar con un método para obtener una solución práctica ante estos escenarios [28, 33].

Entre los enfoques numéricos que aproximan soluciones a Problemas de Valor de Frontera (PVF) de segundo orden, métodos como el de Disparo y Diferencias Finitas pueden presentar limitaciones, ya sea por requerir múltiples cálculos para alcanzar una exactitud específica o por su sensibilidad numérica sujeta a la elección del paso h en las derivadas y de la necesidad del refinamiento en las transiciones entre materiales [13, 28, 34–36].

Ante estas restricciones, surge el problema de encontrar un método que combine la precisión de una solución cuasi-analítica con la eficiencia computacional de un algoritmo numérico. Dado que los problemas espectrales de Sturm-Liouville implican la obtención de valores propios λ_n , el método SPPS se propone para superar estas barreras, permitiendo el cálculo de valores propios λ_n y funciones propias [37, 38]. Su implementación en simulaciones numéricas permite analizar la distribución de temperatura en sistemas con fuentes fotoacústicas y establecer un marco analítico-numérico que sirva como base teórica para la validación de modelos con discontinuidades y coeficientes variables.

1.3. Hipótesis

Mediante la aplicación del método SPPS en la simulación de la transferencia de calor en materiales multicapa asociada al modelo fotoacústico, es posible obtener valores propios λ_n con un error absoluto menor a 10^{-5} , comparados con soluciones analíticas o con métodos numéricos de referencia.

1.4. Objetivo general

Desarrollar simulaciones numéricas de la distribución de temperatura mediante el método SPPS, para estimar los valores propios del sistema asociado y analizar la transferencia de calor en materiales multicapa dentro del modelo fotoacústico.

1.5. Objetivos particulares

- Determinar las variables utilizadas para la implementación numérica del método SPPS.
- Programar e implementar el método SPPS al modelo de dos capas.
- Generar resultados para materiales con dos capas.
- Generar resultados para materiales de hasta 5 capas.
- Comparar los resultados obtenidos con resultados de otros métodos.

Fundamentación Teórica

En esta sección se definen los conceptos teóricos fundamentales que sustentan la metodología empleada en esta tesis.

2.1. Ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

Sea $u = u(x, y)$ una función de dos variables independientes $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. La forma general de una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de segundo orden (EDP) con dos variables independientes, se expresa como:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (2.1)$$

donde los coeficientes y el término fuente G pueden ser constantes o funciones de las variables x e y . Si $G(x, y) = 0$ la ecuación es homogénea; de lo contrario, es no homogénea [31, 32, 39, 40].

La clasificación de una EDP lineal de segundo orden puede realizarse mediante el discriminante $B^2 - 4AC$:

- Parabólica: $B^2 - 4AC = 0$: Modela procesos de flujo y difusión del calor.
- Hiperbólica: $B^2 - 4AC > 0$: Modela fenómenos vibratorios y ondulatorios.
- Elípticas: $B^2 - 4AC < 0$: Modela fenómenos en estado estacionario.

Para simplificar la escritura, se suele utilizar la notación con subíndices para representar las derivadas parciales:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

permitiendo escribir la ecuación (2.1) como:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \quad (2.2)$$

De esta forma, es posible definir el operador lineal diferencial L asociado como:

$$L = A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F \quad (2.3)$$

de modo que la ecuación (2.1) puede reescribirse de forma compacta como:

$$L[u] = G \quad (2.4)$$

2.2. Espacio $L_r^2(a, b)$

Para introducir correctamente los conceptos de producto interno, norma y ortogonalidad, es necesario especificar el espacio funcional sobre el cual se definen. En este trabajo se considera el espacio $L_r^2(a, b)$.

Este espacio se define como el conjunto de funciones reales o complejas definidas en el intervalo (a, b) , que son cuadrado-integrables con respecto a una función peso $r(x) > 0$. Es decir, son aquellas funciones f para las cuales se cumple que:

$$L_r^2(a, b) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \left| \int_a^b |f(x)|^2 r(x) dx < \infty \right. \right\}. \quad (2.5)$$

Si $r(x)$ es una función continua en (a, b) , se define el producto interno de dos funciones $f, g \in C(a, b)$ con respecto a la función peso por:

$$\langle f, g \rangle_r = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} r(x) dx, \quad (2.6)$$

el cual induce una norma asociada dada por:

$$\|f\|_r = \left(\int_a^b |f(x)|^2 r(x) dx \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

El intervalo (a, b) puede ser finito o infinito, tal que $\|f\|_r < \infty$. El espacio $L_r^2(a, b)$ es por definición, un espacio con producto interno, y contiene como caso particular al espacio $L^2(a, b)$ cuando la función peso es constante, es decir, cuando $r(x) \equiv 1$.

Por otro lado, dos funciones f y g en $L_r^2(a, b)$ se dicen ortogonales si su producto interno es cero:

$$\langle f, g \rangle_r = 0. \quad (2.8)$$

Cuando además se cumple que $\|f\|_r = \|g\|_r = 1$, las funciones se consideran ortonormales [41–43].

2.3. Principio de superposición lineal

El principio de superposición es una propiedad fundamental de las ecuaciones diferenciales lineales. Establece que si el operador L es lineal, entonces cualquier suma de soluciones individuales también es una solución. En particular, si $u_1, u_2, \dots, u_k$ son soluciones de la ecuación homogénea $L[u] = 0$, entonces cualquier combinación lineal

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_k u_k(x), \quad (2.9)$$

con constantes arbitrarias $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$, también es una solución.

Este resultado puede extenderse al caso de series infinitas, bajo ciertas condiciones de regularidad. Si existe un conjunto infinito de soluciones $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ de la ecuación $L[u] = 0$, y los coeficientes c_k son constantes, es posible construir una solución mediante la serie:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x). \quad (2.10)$$

Esta expresión representa una combinación lineal infinita de soluciones particulares y se conoce como el principio de superposición generalizado.

Para que dicha serie defina una solución válida para el operador L , se requiere que converja adecuadamente, lo cual implica que:

- La serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x)$ debe converger uniformemente en el intervalo $I \subset \mathbb{C}$ de interés.
- Además, las series obtenidas al derivar término a término (hasta el orden requerido por el operador L) también deben ser uniformemente convergentes.

Estas condiciones analizadas con mayor detalle en [33], garantizan que la función definida por la serie como sus derivadas existan y sean continuas. Bajo estas premisas, es válido aplicar el operador término a término:

$$L \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k L[u_k(x)]. \quad (2.11)$$

Asimismo, si $v_1, v_2, \dots, v_n$ son soluciones particulares de una ecuación no homogénea $L[v_j] = G_j$, y $w_1, w_2, \dots, w_n$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada $L[w_j] = 0$, entonces al definir $u_j = v_j + w_j$, se cumple que:

$$u(x) = \sum_{j=1}^n u_j(x) \quad (2.12)$$

es solución de la ecuación

$$L[u] = \sum_{j=1}^n G_j. \quad (2.13)$$

El principio de superposición lineal constituye una herramienta esencial para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, particularmente mediante el método de separación de variables [32, 39, 43].

2.4. Método de separación de variables

Este método consiste que la solución de una EDP puede expresarse como el producto de funciones que dependen de una sola variable independiente. Esta suposición permite transformar la EDP original en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), cada una acompañada de sus respectivas condiciones de frontera. En el caso de la ecuación de conducción de calor unidimensional para la temperatura $u(x, t)$, se propone:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.14)$$

Al sustituir esta expresión en la EDP, se obtiene una igualdad vinculada por una constante de separación $-\lambda$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda. \quad (2.15)$$

Esta relación reduce el problema original a dos ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs):

- Componente temporal: $T'(t) + \alpha\lambda T(t) = 0$

- Componente espacial: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

La solución general se obtiene mediante una combinación lineal de las funciones resultantes, fundamentada en el principio de superposición. Este enfoque es ampliamente utilizado para resolver problemas con valores en la frontera (PVF), siendo particularmente útil cuando el problema es lineal y homogéneo [31, 32, 43]. La estructura de este proceso analítico requiere que el operador diferencial posea propiedades específicas para garantizar la existencia de soluciones ortogonales y valores propios reales..

2.5. Operador diferencial autoadjunto

En álgebra lineal, un operador lineal $A : X \rightarrow X$ definido en un espacio vectorial X sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ se dice autoadjunto si existe un operador adjunto A^* tal que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall x, y \in X,$$

y se cumple que $A = A^*$. Esta propiedad garantiza que los valores propios de A sean reales, y que los vectores propios distintos sean ortogonales entre sí. En este trabajo se adopta directamente la forma autoadjunta del operador diferencial de segundo orden:

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \quad (2.16)$$

el cual actúa sobre funciones $u \in C^2(I) \cap L_r^2(I)$, donde $r(x)$ es una función peso positiva y continua en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Este operador es formalmente autoadjunto con respecto al producto interno de $L_r^2(I)$, siempre que se cumplan condiciones de frontera adecuadas que satisfagan [42, 43]:

$$\langle Lf, g \rangle_r = \langle f, Lg \rangle_r, \quad \forall f, g \in C^2(I) \cap L_r^2(I).$$

.

2.6. Problema de Sturm-Liouville

Los conjuntos ortogonales completos de funciones en el espacio $L_r^2(a, b)$, surgen de manera natural como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con condiciones de frontera apropiadas, conocidas como problemas de Sturm-Liouville (SL).

Sea L un operador formalmente autoadjunto definido como en la ecuación (2.16), el problema SL se plantea mediante la ecuación de valores propios:

$$L[u] + \lambda r(x)u = 0, \quad x \in (a, b), \quad (2.17)$$

sujeta a condiciones de frontera homogéneas separadas:

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, \quad (2.18)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0, \quad (2.19)$$

donde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. En este contexto, p , q y r pueden ser funciones complejo-valuadas de la variable x , donde $r(x)$ se denomina función peso y la constante arbitraria $\lambda \in \mathbb{C}$ es el parámetro espectral.

Los valores de λ para los cuales el sistema posee una solución no trivial se denominan valores propios, mientras que las soluciones correspondientes se llaman funciones propias [32, 43].

2.6.1. Problema regular de Sturm-Liouville

El problema de Sturm-Liouville definido por las ecuaciones (2.17)-(2.19) se denomina problema SL regular si se cumplen las siguiente condiciones:

- El intervalo $[a, b]$ es acotado,
- $p(x)$ es real y continuamente diferenciable ($C^1[a, b]$),
- $q(x)$ y $r(x)$ son reales y continuas ($C^0[a, b]$) para todo $x \in [a, b]$,
- $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$,
- Las condiciones de frontera son homogéneas y separadas como en (2.18) y (2.19).

De acuerdo con el Teorema 2.14 de [42], si el operador L es formalmente autoadjunto y se satisfacen las condiciones de regularidad ($p \in C^2(a, b)$, $q \in C^1(a, b)$ y $r \in C(a, b)$ con $p(x) > 0$, $r(x) > 0$), entonces L es autoadjunto. En tal caso, los valores propios de la ecuación (2.17) son reales y las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales en el espacio $L_r^2(a, b)$ [39, 42, 43].

2.7. Serie de Fourier Generalizada

En esta sección se presenta la representación de funciones mediante combinaciones lineales infinitas de funciones ortogonales, conocidas como series de Fourier generalizadas.

Expansión de funciones propias

Sea $\phi(x)$ una función real definida en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, cuadrado-integrable con respecto a una función peso $r(x) > 0$. Es decir, cumple con la condición:

$$\int_I \phi^2(x)r(x)dx < \infty. \quad (2.20)$$

Si $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortogonal de funciones cuadrado-integrables y $f(x)$ es una función que puede representarse como una combinación lineal de estas, se tiene la expansión:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x). \quad (2.21)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (2.21) por $\phi_m(x)r(x)$ e integrar sobre el intervalo I , se obtiene:

$$\int_I f(x)\phi_m(x)r(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_I \phi_n(x)\phi_m(x)r(x)dx. \quad (2.22)$$

Por la propiedad de ortogonalidad, todos los términos de la suma se anulan salvo cuando $n = m$, por lo tanto:

$$\int_I f(x)\phi_m(x)r(x)dx = c_m \int_I \phi_m^2(x)r(x)dx. \quad (2.23)$$

De aquí se despejan los coeficientes de Fourier Generalizados:

$$c_n = \frac{\int_I f(x) \phi_n(x) r(x) dx}{\int_I \phi_n^2(x) r(x) dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

En términos del producto interno y la norma definida previamente, esta expansión puede escribirse de forma compacta como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n \rangle_r}{\|\phi_n\|_r^2} \phi_n(x) \quad (2.25)$$

donde $\langle f, \phi_n \rangle_r = \int_I f(x) \phi_n(x) r(x) dx$ y $\|\phi_n\|_r^2 = \int_I \phi_n^2(x) r(x) dx$. A partir de lo anterior, se establece la siguiente definición:

Definición 2.7.1. Si f puede representarse mediante una serie que converge uniformemente en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad (2.26)$$

donde $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones cuadrado-integrables respecto a una función peso $r(x) > 0$, entonces los coeficientes c_n vienen dados por:

$$c_n = \frac{\int_I f(x) \phi_n(x) r(x) dx}{\int_I \phi_n^2(x) r(x) dx}. \quad (2.27)$$

La expansión (2.21), cuyos coeficientes se determinan mediante la ecuación (2.24), se denomina serie de Fourier generalizada. Su validez se fundamenta en el siguiente teorema de convergencia [39, 40, 43]:

Teorema 2.7.1. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones propias de un problema regular de Sturm-Liouville sobre el intervalo $[a, b]$, con función peso $r(x) > 0$. Entonces se cumple que:

1. *Convergencia en norma:* Si $f \in L_r^2(a, b)$, la serie de Fourier generalizada converge a f en la norma de $L_r^2(a, b)$, es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x) \right)^2 r(x) dx = 0.$$

2. *Convergencia uniforme:* Si $f \in C^2[a, b]$ y satisface las condiciones de frontera del problema, entonces la serie anterior converge uniformemente a $f(x)$ en todo $[a, b]$.
3. *Convergencia puntual:* Si f es continua por partes en $[a, b]$ y cumple las condiciones de frontera, la serie converge puntualmente a $f(x)$ en los puntos de continuidad, y al promedio de los límites laterales en los puntos de discontinuidad.

2.8. Ecuación de Calor

Un sistema se define como una porción delimitada de materia o una región específica seleccionada para su análisis. La masa o región situada fuera de este se conoce como alrededores, mientras que la superficie que separa al sistema de sus alrededores recibe el nombre de frontera, tal y como se ilustra en la Figura 2.1 [28, 44].

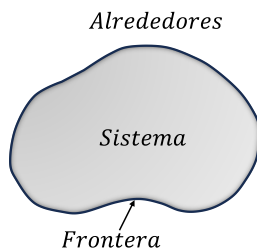


Figura 2.1: Representación esquemática de un sistema, su frontera y sus alrededores.

Físicamente, el calor es la transferencia de energía térmica entre sistemas debido a una diferencia de temperatura. La temperatura, por su parte, se considera una propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros; se dice que dos sistemas están en equilibrio térmico si, y solo si, comparten la misma temperatura [28, 45–47].

El requisito esencial para este proceso es la existencia de un gradiente de temperatura, el cual representa la razón de cambio de la temperatura en una dirección espacial determinada. El flujo de calor siempre se dirige de la región de mayor temperatura hacia la de menor temperatura [28, 45–47].

La Figura 2.2 muestra la relación entre el signo del gradiente $u_x(x_0, t)$ y la dirección del flujo: si $u_x(x_0, t) < 0$, el calor fluye hacia la derecha; si $u_x(x_0, t) > 0$, el flujo se dirige hacia la izquierda. Estos fenómenos se modelan comúnmente mediante la ecuación de calor o de difusión, la cual describe la evolución temporal de la densidad u de una cantidad física [39, 48, 49].

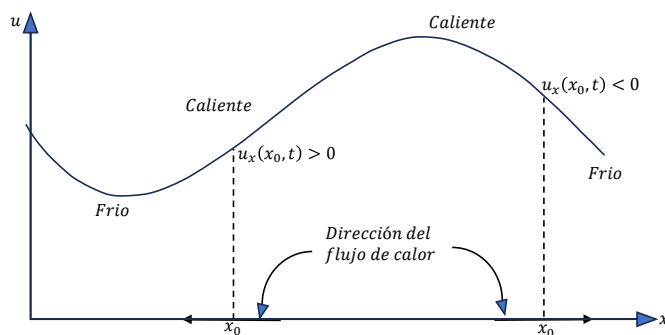


Figura 2.2: Relación entre el signo del gradiente de temperatura y la dirección del flujo de calor.

Para derivar matemáticamente esta ecuación, se aplica la ley de conservación de la energía sobre un volumen de control, como se muestra en la Figura 2.3 [31, 32, 49].

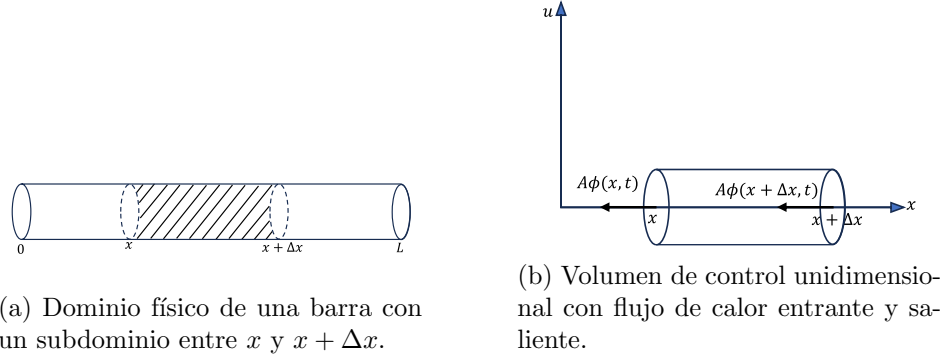


Figura 2.3: Representación física del sistema sobre el cual se aplica el balance térmico.

La formulación completa de este problema físico requiere de tres componentes fundamentales: La EDP que describe el fenómeno físico de la difusión de calor, las condiciones de contorno que detallan la naturaleza física en las fronteras y las condiciones iniciales que describen el estado del sistema al comienzo del experimento.

2.8.1. Ecuación de calor unidimensional

La ecuación de calor unidimensional es una ecuación de tipo parabólica y está dada por:

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q(x, t) \quad (2.28)$$

donde: $u(x, t)$ es la temperatura, $\rho(x)$ es la densidad del material (kg/m^3), $c(x)$ es la capacidad calorífica específica [$J/(kg \cdot ^\circ C)$], $\kappa(x)$ es la conductividad térmica [$W/(m \cdot ^\circ C)$], y $Q(x, t)$ es una fuente de calor interna [W/m^3]. Cuando ρ , c , k son constantes, la ecuación se simplifica a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c} Q(x, t) \quad (2.29)$$

Donde la difusividad térmica $\alpha = \kappa/(\rho c)$ representa la razón entre el calor conducido a través del material y el calor almacenado por unidad de volumen [31, 39, 40, 49, 50].

2.9. Condiciones de frontera para la ecuación de calor

Para la formulación completa de un problema físico, la EDP debe acompañarse de un conjunto de condiciones que describan el comportamiento de la solución en el dominio espacial y temporal. Cuando se combinan, se denomina problema de valor inicial y de contorno. Dependiendo de la naturaleza del sistema, se definen los siguientes tipos de problemas: [32, 39, 40, 50]:

- Problema de Cauchy: Consiste en conocer la distribución de temperatura en todo el dominio espacial al tiempo $t = 0$:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.30)$$

donde f es una función conocida. Esta condición se denomina condición inicial o problema de valores iniciales.

- Problema de Dirichlet: En este caso, se prescribe el valor de la temperatura en los extremos del dominio:

$$\begin{cases} u(a, t) = f(t) \\ u(b, t) = g(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

donde $f(t)$ y $g(t)$ son funciones conocidas para $t \geq 0$. Este tipo de condición especifica el valor de la solución en la frontera y se denomina condición de frontera de primer tipo.

- Problema de Neumann: En este caso, se prescribe el valor de la derivada normal de la temperatura en los extremos, lo cual equivale a especificar el flujo de calor en la frontera:

$$\begin{cases} u_x(a, t) = f(t) \\ u_x(b, t) = g(t). \end{cases} \quad (2.32)$$

Esta condición se conoce como condición de frontera de segundo tipo. En el contexto físico, indica cómo fluye el calor a través de los bordes del sistema.

- Problema de Robin: Este problema generaliza los anteriores al combinar de tipo Dirichlet y Neumann:

$$\begin{cases} A_1 u(a, t) + B_1 u_x(a, t) = f(t) \\ A_2 u(b, t) + B_2 u_x(b, t) = g(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

donde $A_i, B_i \in \mathbb{R}$ y $f(t), g(t)$ son funciones conocidas. Este tipo de condición se denomina condición de frontera de tercer tipo. Físicamente, describe situaciones en las que la frontera está en contacto con un medio exterior cuya temperatura influye sobre el sistema.

2.10. Efecto Fotoacústico

El efecto fotoacústico consiste en la generación de ondas sonoras mediante la absorción de radiación electromagnética por parte de un material. La teoría más aceptada para explicar este fenómeno fue enunciada en 1976 cuando Rosencwaig y Gersho [51], propusieron un modelo teórico para describir el comportamiento térmico de sólidos sometidos a luz modulada mediante la ecuación de difusión de calor.

Al iluminar una muestra con luz modulada, parte de la energía luminosa se absorbe y transforma en calor. Esta transferencia ocurre desde la superficie hacia el gas circundante, calentando una región delgada denominada capa límite (típicamente de 1 a 2 mm). El calentamiento y enfriamiento cíclico genera expansiones y contracciones térmicas en dicha capa, la cual actúa como un pistón acústico que da origen a la señal detectable [20, 52–54].

2.11. Modelo de Rosencwaig y Gersho (RG)

Este modelo teórico considera la difusión térmica como el mecanismo principal responsable de la generación de la señal fotoacústica. Se asume una celda cilíndrica cerrada donde la muestra, en forma de disco con espesor l_s , se encuentra en contacto con un material de respaldo (soporte) de espesor l_b , considerado usualmente un mal conductor térmico. En la Figura 2.4 se presenta un esquema representativo de este modelo [51, 55–57].

La generación de la señal depende de la cantidad de calor generado, el coeficiente de absorción óptica, la eficacia de conversión luz-calor y la dinámica de difusión térmica del material [51, 58].

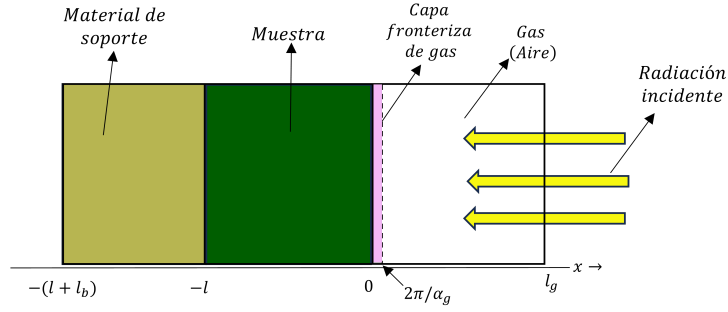


Figura 2.4: Esquema representativo del Modelo de Rosencwaig y Gersho.

2.11.1. Generación de señal fotoacústica

La generación de la señal fotoacústica consta de tres procesos fundamentales [52]: absorción de energía (depende de las propiedades ópticas de la muestra), transformación en calor (condicionado por las propiedades térmicas del material) y propagación de ondas térmicas (condicionada por la difusividad α , conductividad κ , efusividad ϵ y capacidad calorífica c). Un parámetro crítico es la longitud de difusión térmica (μ), que define la distancia de atenuación de la onda térmica:

$$\mu = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}} \quad (2.34)$$

donde α es la difusividad térmica y ω es la frecuencia de modulación angular. Según la relación entre el espesor físico de la muestra (l) y su longitud de difusión (μ), el sistema se puede clasificar en dos regímenes principales:

- Sólidos térmicamente delgados ($\mu \gg l$): el calor atraviesa completamente la muestra y la señal resultante depende de las propiedades térmicas tanto del material como de su soporte.
- Sólidos térmicamente gruesos ($\mu < l$): solo la energía absorbida dentro de la primera longitud de difusión contribuye a la señal. En este régimen, la amplitud decae típicamente como ω^{-1} o $\omega^{-3/2}$, lo que explica la atenuación a altas frecuencias.

La propagación térmica se sintetiza en el número de onda complejo $\sigma = (1+j)/\mu$. El término $1/\mu$ define simultáneamente la razón en la atenuación de la amplitud y el factor de desfase, vinculando la temperatura compleja calculada en la interfaz muestra-gas con la señal medida experimentalmente.

2.11.2. Transferencia de calor en materiales multicapa

En diversas aplicaciones prácticas, los cuerpos no están constituidos por un solo material, sino por capas sucesivas de materiales distintos. Estos sistemas multicapa requieren un análisis térmico específico, debido a que cada capa posee propiedades térmicas propias (conductividad, densidad o calor específico). La resolución de este tipo de problemas exige analizar por separado cada capa y establecer condiciones de acoplamiento en las interfaces de contacto [28].

En una interfaz térmica entre dos materiales diferentes bajo contacto perfecto, se imponen dos condiciones fundamentales:

- Continuidad de la temperatura: La temperatura debe ser la misma a ambos lados del contacto para evitar saltos térmicos físicamente imposibles.
- Conservación del flujo de calor: Dado que la energía no puede acumularse en una superficie sin espesor, el flujo de calor normal también debe ser continuo a través de la interfaz.

Matemáticamente, para dos cuerpos A y B en contacto perfecto en $x = x_0$, estas condiciones se expresan como:

$$T_A(x_0, t) = T_B(x_0, t) \quad (2.35)$$

$$-\kappa_A \frac{\partial T_A(x_0, t)}{\partial x} = -\kappa_B \frac{\partial T_B(x_0, t)}{\partial x} \quad (2.36)$$

donde κ_A y κ_B representan las conductividades térmicas de las capas correspondientes [28].

2.11.3. Ecuaciones de calor para el modelo de Rosencwaig-Gersho

En este modelo se asume que el gas y el material de soporte no absorben la luz. La fuente de luz monocromática modulada incide sobre la muestra con una intensidad dada por:

$$I = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos \omega t) \quad (2.37)$$

donde I_0 es el flujo luminoso monocromático incidente (W/cm^2) y ω la frecuencia de modulación del haz de luz (rad/s). La densidad de calor producida en cualquier punto x del sólido, fundamentada en la ley de Beer-Lambert, se expresa como:

$$Q(\beta(x))I(t) = \frac{1}{2} I_0 \beta e^{\beta x} (1 + \cos \omega t) \quad (2.38)$$

para el intervalo $-l < x < 0$, siendo $\beta > 0$ el valor constante del coeficiente de absorción óptico de la muestra (cm^{-1}) para la longitud de onda dada [51,55]. Bajo estas consideraciones, las ecuaciones de difusión térmica para las tres regiones (respaldo, muestra y gas) se plantean como:

- Para el material de respaldo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_b} \frac{\partial T}{\partial t} \quad -l_b - l_s \leq x \leq -l_s \quad (2.39)$$

- Para la muestra

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\beta I_0 \eta}{2\kappa_s} e^{\beta x} (1 + e^{i\omega t}) \quad -l_s \leq x \leq 0 \quad (2.40)$$

- Para el gas

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq l_g \quad (2.41)$$

Aquí, α_i representa la difusividad térmica (m^2/s), κ_s la conductividad térmica ($W/m \cdot ^\circ C$), η es la eficiencia de conversión luz-calor y T es la temperatura en la región correspondiente.

La coordenada x toma valores negativos en el interior de la muestra, con la radiación incidiendo en $x = 0$ como se ilustra en la Figura 2.4. La temperatura en el sistema está dada por:

$$T(x, t) = Re[T(x, t)] + \Phi \quad (2.42)$$

donde Re denota la parte real y Φ es la temperatura ambiente [51, 55].

El modelo propone la continuidad de la temperatura y del flujo de calor en las interfaces del sistema:

- Entre muestra y gas ($x = 0$)

$$T_s(0, t) = T_g(0, t), \quad (2.43)$$

$$\kappa_s \frac{\partial T_s(0, t)}{\partial x} = \kappa_g \frac{\partial T_g(0, t)}{\partial x}. \quad (2.44)$$

- Entre muestra y respaldo ($x = -l_s$)

$$T_s(-l_s, t) = T_b(-l_s, t), \quad (2.45)$$

$$\kappa_s \frac{\partial T_s(-l_s, t)}{\partial x} = \kappa_b \frac{\partial T_b(-l_s, t)}{\partial x}. \quad (2.46)$$

Finalmente, en los extremos del dominio ($x = l_g$ y $x = -l_s - l_b$), la temperatura corresponde a la ambiental Φ . Debido a las dimensiones reducidas de la celda y al estado estacionario, se desprecia el flujo de calor por convección en el gas [51, 55].

2.12. Senoides y Fasores

Una senoide es una señal cuya evolución temporal sigue la forma de una función seno o coseno. Estas señales son fundamentales en ingeniería, ya que cualquier señal periódica puede descomponerse en una suma de senoides mediante el análisis de Fourier, lo cual resulta de utilidad para el estudio de la transferencia de calor bajo iluminación modulada [59].

Cuando un sistema es excitado por una función senoidal, se produce una respuesta que consta de una componente natural (transitoria) y una respuesta en estado estable. Dado que la respuesta natural se extingue con el tiempo, el análisis suele centrarse en el estado estable remanente. La Figura 2.5 ilustra visualmente cómo estas señales varían en función de su ángulo de fase.

2.12.1. Parámetros de la Señal Senoidal

Matemáticamente, una senoide se representa como:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi). \quad (2.47)$$

El comportamiento de esta señal está determinado por los siguientes parámetros [46, 59]:

- Amplitud (V_m): Valor máximo de la oscilación respecto al equilibrio.

- Frecuencia angular (ω): Indica la rapidez de las oscilaciones expresada en radianes por segundo (rad/s), y se relaciona con la frecuencia cíclica mediante $\omega = 2\pi f$.
- Fase (ϕ): También denominada constante de fase, es el ángulo que define el desplazamiento horizontal de la senoide respecto al origen del tiempo.
- Periodo (T): Intervalo de tiempo necesario para completar un ciclo completo, definido como $T = 2\pi/\omega$.
- Frecuencia (f): Número de ciclos por segundo, medida en hertz (Hz), donde $f = 1/T$.

Mediante el uso de identidades trigonométricas, es posible transformar una senoide de la forma seno a la forma coseno o viceversa.

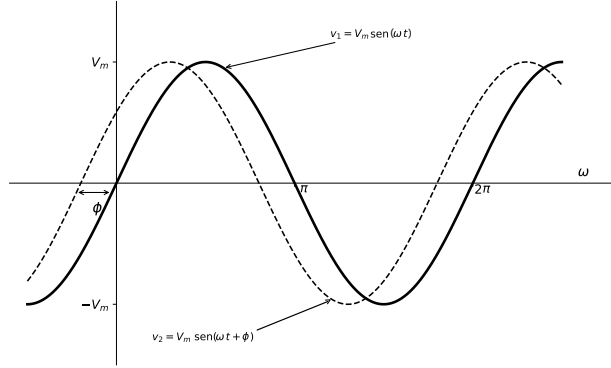


Figura 2.5: Senoides con diferente ángulo de fase.

2.12.2. El Concepto de Fasor mediante la Identidad de Euler

El análisis de señales senoidales se simplifica mediante el uso de fasores, los cuales permiten trabajar con magnitudes complejas en lugar de funciones trigonométricas dependientes del tiempo. Un fasor es un número complejo que representa la amplitud y la fase de una senoide. Este concepto se fundamenta en la identidad de Euler:

$$e^{\pm i\phi} = \cos \phi \pm i \sin \phi. \quad (2.48)$$

Dada una señal de la forma $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, su representación fasorial se obtiene al suprimir el factor temporal $e^{i\omega t}$ de la parte real de una exponencial compleja.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(V_m e^{i(\omega t + \phi)}) = \text{Re}(V_m e^{i\phi} e^{i\omega t}). \quad (2.49)$$

El fasor resultante $\mathbf{V}$ se define en forma polar o exponencial como:

$$\mathbf{V} = V_m e^{i\phi} = V_m \angle \phi. \quad (2.50)$$

Geométricamente, el fasor puede visualizarse como un vector giratorio en el plano complejo con una velocidad angular constante ω . Esta transformación geométrica se visualiza en la Figura 2.6. Esta estrategia convierte el análisis de sistemas dinámicos en problemas algebraicos más sencillos mediante la relación:

$$V_m \cos(\omega t + \phi) \iff \mathbf{V} = V_m \angle \phi. \quad (2.51)$$

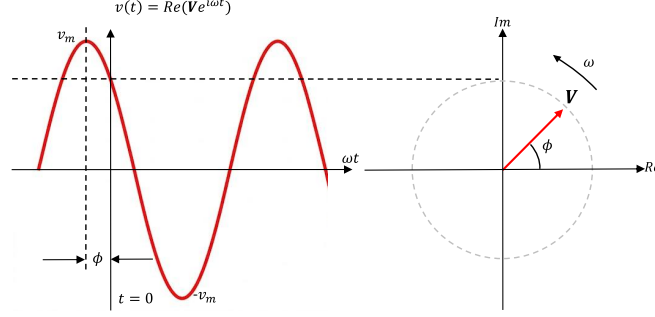


Figura 2.6: Representación geométrica de un Fasor.

2.13. Método de Series de Potencias de Parámetro Espectral

El método de Series de Potencias de Parámetro Espectral (SPPS, por sus siglas en inglés), es una técnica analítico-numérica introducida por V. V. Kravchenko y R. M. Porter [37] que permite obtener una solución general de la ecuación de Sturm-Liouville definida previamente en (2.17).

La idea central del método SPPS radica en construir dicha solución general mediante una expansion en serie de potencias con respecto al parámetro espectral λ . Para lograr esto, se requiere conocer una solución no trivial, denotada como u_0 de la ecuación homogénea asociada (cuando el parámetro espectral es nulo, $\lambda = 0$):

$$(p(x)u_0')' + q(x)u_0 = 0. \quad (2.52)$$

Donde u_0 es una función complejo-valuada que satisface las condiciones de suavidad requeridas en el intervalo de interés $[a, b]$.

Cabe aclarar que este método no es únicamente una técnica numérica. Por el contrario es un enfoque analítico que da resultados analíticos que al mismo tiempo permite por si mismo dar un calculo numérico. Es un método poderoso para obtener una solución numérica de problemas de valor inicial, problemas de frontera y problemas espectrales, ya que se reduce al cálculo de las raíces de una función analítica definida por su serie de Taylor [4, 37, 60].

Teorema 2.13.1. [37] *Asuma que en un intervalo finito $[a, b]$, la ecuación (2.52) posee una solución particular u_0 tal que las funciones $u_0^2 r$ y $\frac{1}{u_0^2 p}$ son continuas en $[a, b]$. Entonces, la solución general de la ecuación (2.17) en el intervalo (a, b) tiene la forma:*

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \quad (2.53)$$

donde c_1 y c_2 son constantes complejas arbitrarias y las funciones u_1 y u_2 se definen mediante las siguientes series de potencias:

$$u_1 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tilde{X}^{(2k)}, \quad u_2 = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X^{(2k+1)} \quad (2.54)$$

2.13.1. Construcción de las potencias formales

Para que la solución general planteada en el Teorema 2.13.1 esté completamente definida, es necesario construir los coeficientes de la serie de potencias. Estos se construyen a partir de funciones denominadas potencias formales ($\tilde{X}^{(n)}$ y $X^{(n)}$), las cuales se obtienen mediante un proceso de integración recursiva [33,37] de la siguiente manera:

$$\tilde{X}^{(0)} \equiv 1, \quad X^{(0)} \equiv 1 \quad (2.55)$$

$$\tilde{X}^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(n-1)}(s) u_0^2(s) r(s) ds, & n \text{ impar}, \\ \int_{x_0}^x \tilde{X}^{(n-1)}(s) \frac{1}{u_0^2(s) p(s)} ds, & n \text{ par}, \end{cases} \quad (2.56)$$

$$X^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x X^{(n-1)}(s) \frac{1}{u_0^2(s) p(s)} ds, & n \text{ impar}, \\ \int_{x_0}^x X^{(n-1)}(s) u_0^2(s) r(s) ds, & n \text{ par}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Aquí, x_0 representa un punto arbitrario en $[a, b]$ tal que p es continua en x_0 y $p(x_0) \neq 0$. Es importante destacar que ambas series presentadas en (2.54) convergen uniformemente en $[a, b]$. La demostración detallada de este teorema, basada en la prueba M de Weierstrass, puede consultarse en [37].

Por definición de las potencias formales todas las $\tilde{X}^{(n)}(x_0)$ y $X^{(n)}(x_0)$ se anulan excepto por $\tilde{X}^{(0)}(x_0)$ y $X^{(0)}(x_0)$ que son iguales a 1. Por lo tanto:

$$u_1(x_0) = u_0(x_0), \quad u_1'(x_0) = u_0'(x_0) \quad (2.58)$$

$$u_2(x_0) = 0, \quad u_2'(x_0) = \frac{1}{u_0(x_0) p(x_0)} \quad (2.59)$$

y el Wronskiano de u_1 y u_2 en x_0 es igual a $\frac{1}{p(x_0)} \neq 0$.

2.14. Técnicas de Integración Numérica

En la implementación del método SPPS descrito anteriormente, es necesario calcular de forma iterativa las integrales definidas para construir las funciones $\tilde{X}^{(n)}(x)$ y $X^{(n)}(x)$. Debido a que estas integrales involucran productos y cocientes de funciones cuya antiderivada es difícil de obtener analíticamente, se recurre a técnicas de integración numérica.

Las fórmulas de *Newton-Cotes* son los esquemas de integración numérica más comunes y se basan en reemplazar una función compleja por un polinomio de aproximación de grado n que sea fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_n(x) dx \quad (2.60)$$

donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma $f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ [34,61].

Existen dos categorías principales de estas fórmulas:

- Formas cerradas: Utilizan los valores de la función en los extremos del intervalo de integración.
- Formas abiertas: No incluyen los valores en los extremos del intervalo.

En la tabla 2.1 se resumen algunas de las fórmulas de Newton–Cotes cerradas, donde $h = (b - a)/n$ representa el tamaño del paso o subintervalo, y los errores se expresan en función de derivadas superiores evaluadas en algún punto $\xi \in (a, b)$ [34, 61, 62].

Tabla 2.1: Fórmulas de integración cerrada de Newton-Cotes.

Segmento (n)	Puntos	Nombre	Fórmula	Error
1	2	Trapezio	$\frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$	$-\frac{h^3 f''(\xi)}{12}$
2	3	Simpson 1/3	$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$	$-\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}$
3	4	Simpson 3/8	$\frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$	$-\frac{3h^5 f^{(4)}(\xi)}{80}$
4	5	Regla de Boole	$\frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$	$-\frac{8h^7 f^{(6)}(\xi)}{945}$
5	6	Newton-Cotes de 6 puntos	$\frac{5h}{288} [19f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) + 19f(x_5)]$	$-\frac{275h^7 f^{(6)}(\xi)}{12096}$
6	7	Newton-Cotes de 7 puntos	$\frac{h}{140} [41f(x_0) + 216f(x_1) + 27f(x_2) + 272f(x_3) + 27f(x_4) + 216f(x_5) + 41f(x_6)]$	$-\frac{9h^9 f^{(8)}(\xi)}{1400}$

2.15. Aproximación Polinomial por Tramos

Una alternativa útil a las fórmulas de Newton-Cotes es la aproximación polinomial por tramos. Esta técnica consiste en dividir un intervalo $[a, b]$ en subintervalos y construir un polinomio diferente en cada uno, permitiendo un mayor ajuste local a la geometría de la función, especialmente ante cambios bruscos de curvatura [34, 61].

2.15.1. Splines Cúbicos

Los splines cúbicos constituyen la técnica de aproximación polinomial por tramos más común. Utilizan polinomios de tercer grado entre cada par de nodos sucesivos, lo cual asegura que tanto la primera como la segunda derivada sean continuas [34, 61].

Definición 2.15.1. Sea una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Un spline cúbico S para f es una función que satisface las siguientes condiciones:

- En cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, la función $S(x)$ es un polinomio cúbico $S_j(x)$ para todo $j = 0, 1, \dots, n - 1$.
- El spline interpola a f en los nodos: $S_j(x_j) = f(x_j)$ y $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$.
- Continuidad Global: En cada unión (nodo), la función, su pendiente y su curvatura deben ser iguales para ambos polinomios adyacentes. Matemáticamente, esto implica que:

$$S_j = S_{j+1}, \quad S'_j = S'_{j+1}, \quad S''_j = S''_{j+1} \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

■ Además, debe cumplirse una de las siguientes condiciones de frontera:

1. *Frontera natural o libre:* $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.
2. *Frontera condicionada:* $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$.

La Figura 2.7 muestra una representación gráfica de un spline cúbico. Bajo la condición de frontera natural, el spline adopta la forma de una varilla flexible que pasa por todos los puntos $(x_j, f(x_j))$ sin presentar cambios abruptos de curvatura. Por otro lado, el uso de condiciones de frontera condicionada (tipo 2) permite obtener una aproximación de mayor precisión cuando se dispone de información adicional sobre la derivada de f en los extremos [34, 61].

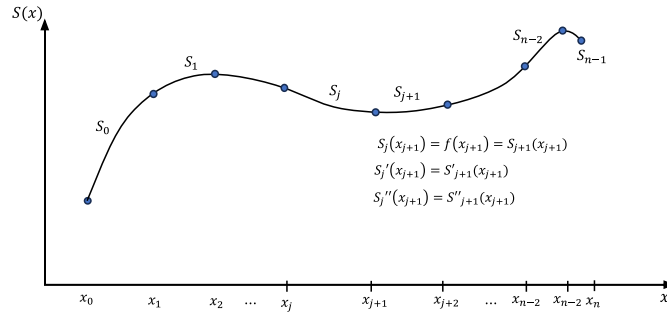


Figura 2.7: Esquema de un spline cúbico.

2.15.2. Implementación Computacional y Resolución Numérica del SPPS

Dado que las potencias formales rara vez admiten una expresión analítica cerrada, su cálculo iterativo requiere de un enfoque numérico. Esta integración se implementa de manera robusta y eficiente mediante la conversión de los resultados de cada paso en splines. Como la integración de un spline es una operación matemáticamente exacta, este enfoque minimiza la acumulación de imprecisiones. Entornos de programación científica disponen de rutinas optimizadas que permiten calcular estas potencias con excelente precisión y bajo costo computacional [33, 37].

Esta representación reduce el problema de Sturm-Liouville a la búsqueda algebraica de los ceros de una función analítica definida por su serie de Taylor. Al truncar la serie infinita a un número N de términos, se obtiene un polinomio característico de la forma:

$$\sum_{k=0}^N \lambda^k A_k = 0. \quad (2.61)$$

De este modo, los valores propios λ del sistema corresponden a las raíces de dicho polinomio. En la práctica, este truncamiento aproxima con gran exactitud los primeros valores propios (aquellos relativamente cercanos al origen). Aunque la literatura sugiere emplear técnicas de desplazamiento espectral para calcular valores de λ muy grandes [33], el cálculo directo resulta ser una herramienta suficientemente precisa para los modos de interés en este estudio. Finalmente, cabe destacar que el método SPPS puede aplicarse de manera universal a problemas que admiten valores propios complejos, problemas singulares y de orden superior [33].

2.16. Métodos de búsqueda de Raíces

En el desarrollo de los modelos numéricos, se requiere hallar los valores de una variable que satisfacen una ecuación de la forma $f(x) = 0$. Debido a que en muchas ocasiones no es posible hallar una solución analítica directa, se recurre a técnicas de aproximación numérica que se dividen en dos categorías principales [34, 61]:

2.16.1. Métodos cerrados (o de intervalo)

Requieren dos valores iniciales que encierren la raíz. Son robustos y garantizan convergencia, pero requieren un alto número de iteraciones. Su fundamento principal establece que si una función $f(x)$ es real y continua en un intervalo cerrado que va desde un límite inferior x_l hasta un límite superior x_u , y los valores de la función en esos límites tienen signos opuestos, entonces existe al menos una raíz real dentro de dicho intervalo. Matemáticamente expresado como: $f(x_l) \cdot f(x_u) < 0$:

- Método de bisección: Divide sistemáticamente el intervalo a la mitad:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}.$$

- Método de la falsa posición: Une los puntos $f(x_l)$ y $f(x_u)$ con una línea recta, cuya intersección con el eje x proporciona un estimado más refinado que el punto medio:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}.$$

2.16.2. Métodos abiertos

Se basan en fórmulas que requieren solo un valor de inicio o un par de puntos que no necesariamente deben encerrar la raíz. Aunque suelen ser más veloces, no garantizan la convergencia en todos los casos:

- Método de Newton-Raphson: Utiliza la recta tangente a la función en un punto dado para proyectar la siguiente aproximación:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

- Método de la secante: Sustituye la derivada del método de Newton por una aproximación basada en dos puntos previos:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

En la Figura 2.8 se ilustra visualmente como trabajan este tipo de métodos.

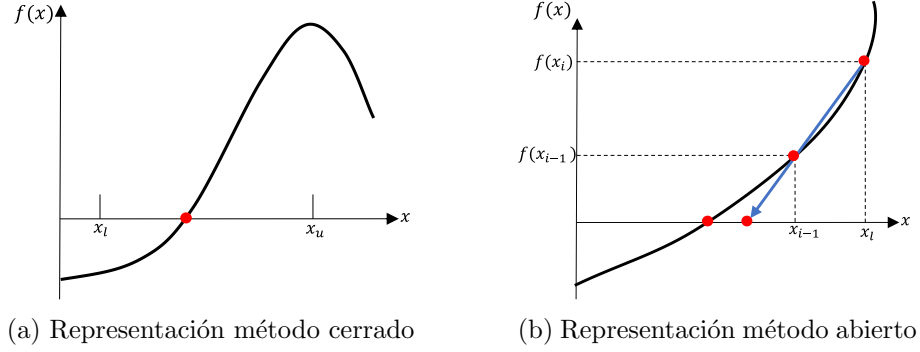


Figura 2.8: Representación del método cerrado y abierto

2.16.3. Método de Brent

El método de Brent es un algoritmo híbrido que combina la robustez de los métodos cerrados con la eficiencia de los métodos abiertos, integrando bisección, el método de la secante e interpolación cuadrática inversa (ICI). Esta última se emplea cuando se dispone de tres puntos distintos. A diferencia de una interpolación estándar en x , la ICI ajusta una parábola en función de y (es decir, $x = f(y)$), lo cual evita el problema de obtener raíces complejas. La ecuación que define este proceso es:

$$x = \frac{y_{i-1}y_i}{(y_{i-2} - y_{i-1})(y_{i-2} - y_i)}x_{i-2} + \frac{y_{i-2}y_i}{(y_{i-1} - y_{i-2})(y_{i-1} - y_i)}x_{i-1} + \frac{y_{i-2}y_{i-1}}{(y_i - y_{i-2})(y_i - y_{i-1})}x_i.$$

La principal ventaja del método de Brent radica en su lógica de control. El algoritmo intenta utilizar los métodos rápidos (secante o ICI) siempre que sea posible; sin embargo, si el nuevo estimado cae fuera del intervalo o si la convergencia es demasiado lenta, el algoritmo detecta el riesgo y cambia automáticamente al método de bisección [34, 61].

2.17. Aritmética anidada y método de Horner

En los métodos numéricos, es frecuente la evaluación de polinomios en distintos valores de la variable. En general, para un polinomio de orden n , el método tradicional requiere $n(n+1)/2$ multiplicaciones y n sumas. Cuando estas evaluaciones se realizan bajo condiciones de aritmética de precisión finita, los errores de redondeo pueden acumularse si el número de operaciones aritméticas es elevado. Por ello, resulta conveniente reorganizar las expresiones algebraicas para reducir el conteo de operaciones y mejorar la estabilidad numérica.

Una estrategia ampliamente utilizada consiste en expresar los polinomios en forma anidada. Dado el polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Es posible reescribirlo de manera equivalente como:

$$P(x) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0. \quad (2.62)$$

Esta representación permite evaluar la función mediante una secuencia de operaciones básicas sucesivas, reduciendo drásticamente el número total de multiplicaciones requeridas. El algoritmo

sistemático para implementar esta técnica se conoce como método de Horner, el cual define la evaluación de forma recursiva mediante:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_k &= a_k + b_{k+1}x, \quad \text{para } k = n-1, n-2, \dots, 0. \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene

$$P(x) = b_0.$$

El método de Horner requiere únicamente n multiplicaciones y n sumas para evaluar un polinomio de grado n . En contraste con el método tradicional, esta eficiencia lo convierte en uno de los algoritmos más estables para realizar esta tarea bajo precisión finita [34, 61].

2.18. Errores numéricos

Las aproximaciones numéricas generan diferencias entre el valor verdadero (V_{real}) y el calculado (V_{aprox}), provenientes de errores de truncamiento (por reemplazar una operación matemática exacta por una aproximación) y errores de redondeo (por el límite de cifras significativas para representar números exactos). La relación entre el resultado verdadero y el valor aproximado puede expresarse como:

$$V_{real} = V_{aprox} + error \quad (2.63)$$

donde V_{real} es el valor exacto y V_{aprox} es el aproximado. A partir de esta relación, se definen los siguientes tipos de error [39, 61]:

- Error absoluto:

$$E_a = |V_{real} - V_{aprox}|. \quad (2.64)$$

- Error relativo (porcentual)

$$E_r = \frac{E_a}{V_{real}} \times 100 \% = \frac{|V_{real} - V_{aprox}|}{V_{real}} \times 100 \%. \quad (2.65)$$

Metodología

En este capítulo se describe el procedimiento metodológico seguido para alcanzar los objetivos de la investigación y evaluar la hipótesis formulada. La metodología integra la implementación numérica del método SPPS para resolver el problema de Sturm–Liouville asociado a la ecuación de conducción de calor en medios multicapa.

Las simulaciones se desarrollaron en Python, empleando un equipo Lenovo® con procesador AMD Ryzen™ 7 5700U, con 16 GB de RAM y sistema operativo Windows® 11. El procedimiento general se divide en cinco etapas:

1. Modelado físico mediante la ecuación del calor.
2. Formulación del problema de Sturm–Liouville con coeficientes variables.
3. Aplicación del método SPPS para obtener valores y funciones propias.
4. Simulación de perfiles térmicos de amplitud y fase en medios heterogéneos.
5. Validación frente a soluciones semianalíticas y Diferencias Finitas.

La metodología adoptada corresponde a un enfoque numérico-computacional, en el cual se analizan diferentes escenarios de configuraciones multicapa. En la Figura 3.1 se muestra el diagrama de flujo general del proyecto.

3.1. Determinación de las variables a utilizar para la implementación numérica del método SPPS

El primer paso consistió en identificar las variables físicas y térmicas involucradas en el modelo, con base en la ecuación de conducción de calor descrita en [23]. Los parámetros fundamentales identificados son: conductividad térmica κ , difusividad térmica α , densidad ρ , calor específico c y coeficientes de absorción óptica β . El análisis se dividió en dos escenarios para evaluar la versatilidad del método:

1. Propiedades constantes por capa, permitiendo una validación directa frente a soluciones de enfoque semianalítico.

2. Caso de Propiedades Térmicas Variables: Se introducen variaciones espaciales continuas mediante funciones de perturbación suave, definidas como $\kappa(x) = \kappa_j \cdot f(x)$ y $(c\rho)(x) = (c\rho)_j \cdot g(x)$, para evaluar la robustez del método ante la heterogeneidad del medio.

Propiedades térmicas y ópticas

Para los coeficientes de absorción óptica, se consideró una longitud de onda de 632.8 nm, con datos obtenidos de la base de datos especializada *RefractiveIndex-info* [63] la cual compila constantes ópticas de una amplia gama de materiales, extrayendo directamente datos de publicaciones científicas y libros de referencia. De manera similar, para las propiedades térmicas, se emplearon datos obtenidos de *MatWeb* [64], una extensa base de datos de propiedades de materiales que recopila información proveniente de fabricantes, estándares industriales y libros de referencia, proporcionando datos validados y frecuentemente utilizados.

Conversión de unidades y consistencia dimensional

Para las dimensiones de las capas del sistema, se consideró un modelo con espesores expresados en milímetros, como en [65, 66]. Posteriormente, se realizó la conversión de unidades necesaria para garantizar consistencia en los resultados del modelo matemático.

La difusividad térmica (α), y efusividad térmica ϵ al ser propiedades derivadas, se calcularon manualmente mediante las relaciones: $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$ y $\sqrt{\kappa c \rho} = \kappa / \sqrt{\alpha}$. En el caso de algunos materiales reportados en [65], se cuenta directamente con valores de conductividad y difusividad térmica, lo cual permitió validar el proceso de conversión empleado.

3.1.1. Selección de muestra y casos representativos

Se consideraron los siguientes materiales para cubrir un amplio espectro de configuraciones:

- nueve metales: aluminio, cobre, cromo, níquel, oro, paladio, plata, platino y titanio (abarcando conductividades altas, intermedias y bajas).
- un material dieléctrico para soporte: vidrio.
- una capa gaseosa: aire, empleada como frontera superior del sistema.

Tanto en [65] como en [67] se ha trabajado con algunos de estos materiales, lo cual valida el empleo de los mismos en el presente estudio.

La selección de configuraciones respondió a un muestreo basado en contrastes térmicos. Debido a que el orden de los materiales afecta el resultado, las permutaciones posibles de N materiales elegidos de entre los 9 metales se definen como:

$$P(9, N) = \frac{9!}{(9 - N)!}. \quad (3.1)$$

Ante la inviabilidad computacional de analizar todas las permutaciones, se seleccionaron escenarios para $N = 2, 3, 4$ y 5 capas de material bajo el criterio de Gradientes térmicos (ascendentes y descendentes de $\kappa(x)$). El propósito de esta selección no es realizar una caracterización exhaustiva de materiales, sino evaluar el desempeño y robustez del método SPPS ante variaciones sustanciales en las propiedades físicas del sistema y en la cantidad de capas consideradas.

Para cada configuración, se resolvió el problema de Sturm–Liouville para obtener los valores λ y las funciones propias $X_n(x)$, que constituyen la base de las simulaciones del Capítulo 6.

3.2. Programación e Implementación del método SPPS al modelo de dos capas de muestra

Se implementó el método SPPS iniciando con un sistema base constituido por dos capas de muestra $n = 2$, lo que reesulta en un sistema total de cuatro regiones al considerar las capas adicionales de soporte y gas ($N=4$). La elección de este esquema se fundamenta en el trabajo previo de [23], donde se establece el análisis de conducción de calor mediante el método SPPS para modelos multicapa. Se toma como pilar fundamental dicho antecedente, el cual considera el caso de tres capas físicas (soporte, una capa de muestra y gas) y demuestra que, sin pérdida de generalidad, el método permite modelar muestras de naturaleza no homogénea y en particular con características discontinuas.

Es importante aclarar que, a lo largo de este trabajo, las referencias a "1, 2 o n capas" se refieren exclusivamente a las capas que conforman la muestra de estudio; en todos los casos, el modelo integra dos capas adicionales constantes, el soporte y el gas. De este modo al adoptar el enfoque de [23] y acoplarlo a una estructura inicial de dos capas de material, se valida el algoritmo antes de extenderlo a configuraciones con múltiples capas y condiciones no homogéneas ($f(x, t) \neq 0$).

Debido a la extensión de este procedimiento, su derivación completa se presenta de manera detallada en el Capítulo 4. El procedimiento se resume en las siguientes etapas:

1) Formulación del modelo físico y construcción de la EDP

Se modeló una celda fotoacústica compuesta por un material de soporte, dos capas sólidas de muestra y una capa de gas. Cada región presenta propiedades térmicas definidas por tramos. Con esta estructura, se formuló la ecuación de conducción de calor con condiciones de frontera e iniciales no homogéneas. Mediante un proceso de homogeneización, se transformaron las condiciones de frontera para permitir una formulación compatible con el método SPPS.

2) Transformación a un problema de Sturm–Liouville

Se aplicó separación de variables para obtener un problema de Sturm–Liouville con coeficientes variables, incorporando las condiciones de continuidad de temperatura y flujo térmico en las interfaces. El problema resultante consistió en determinar los valores propios λ y las funciones propias $X_n(x)$ asociadas al comportamiento térmico del sistema, bajo las condiciones propuestas en el modelo fotoacústico de [51]. La solución se obtuvo mediante el método SPPS, empleando una solución particular no trivial para construir la solución general en términos de series, conforme al Teorema 2.13.1.

3) Tratamiento del término no homogéneo usando expansión de funciones propias

Para los casos donde existe una fuente de calor excitada por láser ($f(x, t) \neq 0$), se empleó una estrategia de expansión en funciones propias. A partir de las consideraciones tomadas de [31] la solución se descompone como:

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Los coeficientes temporales $T_n(t)$ se obtuvieron resolviendo el sistema de EDOs asociado:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \lambda_n T_n(t) = F_n(t).$$

donde $F_n(t)$ es la proyección de la fuente de calor sobre la base ortogonal $X_n(x)$. Esto permite separar la solución en componentes transitoria, estacionaria (DC) y oscilante (AC).

4) Análisis en el dominio complejo y representación fasorial

Para analizar el comportamiento térmico en estado estacionario, se realizó la transición al dominio de la frecuencia. A partir de la identidad de Euler, se definió el fasor térmico $\hat{u}(x)$:

$$\hat{u}(x) = \frac{I_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_n X_n(x)}{\lambda_n + i\omega}.$$

Mediante el uso de la librería **numpy**, se extrajeron la amplitud ($|\hat{u}(x)|$) y la fase ($\phi(x)$) de la respuesta, descomponiendo la señal en sus componentes real e imaginaria de acuerdo con los principios de detección lock-in [68]. Se configuró el cálculo para obtener un rango de fase que cubra los cuatro cuadrantes, es decir, $(-\pi, \pi]$, haciendo uso de la función **numpy.angle()**.

Debido a que la fase calculada se limita al intervalo $(-\pi, \pi]$, pueden aparecer saltos bruscos en las gráficas. Esto ocurre cuando la fase supera los $\pm 180^\circ$: el programa la repliega automáticamente al rango permitido, generando un salto artificial de aproximadamente 360° . Para corregir este efecto visual, se implementó un filtro de detección: si entre dos puntos consecutivos se observa un cambio mayor a 250° , el programa lo identifica como un salto numérico y traza una línea vertical discontinua, representando así la continuidad real de la fase.

5) Implementación del algoritmo en Python y discretización

El algoritmo se desarrolló íntegramente en Python, aprovechando la versatilidad de las librerías **numpy**, **pandas**, **scipy** y **matplotlib**. Esta etapa constituye una aportación adicional del trabajo, pues los reportes previos de implementaciones del método se han concentrado en MATLAB (software de paga). La versión desarrollada en Python permite una herramienta abierta, reproducible y de libre acceso, facilitando su uso. El código se estructuró para poder extenderse a las configuraciones de mas capas, iniciando con el caso base homogéneo de dos capas, para finalmente extender a considerar propiedades térmicas variables.

Para el cálculo de integrales recursivas, se empleó la interpolación mediante Splines Cúbicos de tipo Natural, mediante la implementación **scipy.interpolate.CubicSpline** con **bc_type='natural'**. Los criterios de discretización fueron:

- Escenario Homogéneo: Se empleó una malla de 4,000 puntos por capa, densidad suficiente para alcanzar los resultados obtenidos.
- Ante la complejidad de las funciones de perturbación, se optó por duplicar la resolución a 8,000 puntos por capa.

6) Cálculo de potencias formales mediante integración

Partiendo del valor base $Y(0) = 1$, se generaron las potencias formales para construir el polinomio característico. Se utilizó una integración exacta por tramos:

1. Antiderivada Analítica: Se aprovechó la estructura polinomial del spline para calcular su antiderivada exacta mediante el método `.antiderivative()`.
2. Continuidad en interfaces: Para garantizar la continuidad matemática a través de las interfaces, la constante de integración de cada capa se definió igualando el valor evaluado en la frontera final de la capa predecesora.

Debido a que para la implementación numérica del método SPPS, es necesario un truncamiento de la serie, un parámetro crítico es el grado de truncamiento, denotado por M . Tras realizar una serie de prueba y error para el estudio de la precisión en la obtención de los valores propios, se determinó un orden de $M = 40$ potencias formales. Se observó que incrementar este valor no producía mejoras significativas en la precisión de los valores propios, indicando que la serie alcanza una convergencia uniforme en este punto. Por el contrario, un valor inferior a 40 derivaba en una pérdida de precisión en los modos superiores, por lo que $M = 40$ se estableció como el valor empleado en este trabajo para garantizar la robustez del método sin incurrir en costos computacionales excesivos.

7) Localización de raíces y validación

Tras normalizar el polinomio característico, se identificaron las raíces mediante un barrido numérico de cambios de signo. Se empleó el método de Brent `scipy.optimize.brentq`, el cual al ser un método híbrido garantiza una convergencia rápida y segura hacia los valores λ_n . Este procedimiento permitió extraer los primeros ocho valores propios con una precisión necesaria para alcanzar la hipótesis establecida.

3.3. Generación de resultados para materiales con dos capas de muestra

Tras verificar que el diseño del programa funcionaba correctamente, se generaron resultados numéricos para diversas configuraciones de materiales con el fin de evaluar la hipótesis de precisión, la cual busca obtener valores propios con un error absoluto menor a 10^{-5} en comparación con soluciones conocidas.

Se trabajó con la población de materiales definida previamente en la sección 3.1 (metales con distintos niveles de conductividad, soporte de vidrio y aire). El uso de este conjunto permitió evaluar el desempeño del método ante contrastes térmicos importantes, desde metales de alta conducción (como plata y cobre) hasta materiales con conducción baja (como titanio o platino). Todos los cálculos se realizaron considerando una luz láser con longitud de onda de 632.8 nm, utilizando las propiedades reportadas en las Tablas 6.1 y 6.2.

Para el manejo y visualización de datos, se emplearon las librerías `matplotlib` y `pandas`. Los resultados se dividieron de la siguiente forma:

1. Evaluación cuantitativa (Tablas): Se empleó la librería `pandas` para crear tablas comparativas. El criterio principal fue calcular el error absoluto y relativo en los valores propios (λ_n) frente a los valores analíticos, verificando numéricamente la precisión del método.

2. Funciones propias (X_n): Se reconstruyeron las primeras 6 funciones propias de la serie SPPS. Estas funciones pasaron por un proceso de normalización para simplificar los resultados y poder compararlas posteriormente.
3. Representación en Matriz de Resultados: Para facilitar la interpretación física, se diseñó una visualización que agrupa las cuatro respuestas del sistema en una sola imagen mediante una matriz de 2×2 (`subplots(2, 2)`):
 - Parte transitoria (u_{trans}): Se graficó su evolución usando 16 tiempos diferentes, desde el inicio hasta el equilibrio. Se utilizó el mapa de colores `coolwarm` para diferenciar cronológicamente cada curva.
 - Parte estacionaria (u_{DC}): Se muestra el nivel de calor base que se queda fijo una vez que el sistema se estabiliza.
 - Parte oscilante (u_{AC}): Se tomaron 25 intervalos dentro de un solo periodo para capturar la oscilación térmica.
 - Solución total ($u(x, t)$): Se aplicó el gradiente `coolwarm` para mostrar cómo la señal evoluciona hacia el equilibrio.
4. Análisis fasorial de Amplitud y Fase: Finalmente, se generó una visualización comparativa de la respuesta en el dominio de la frecuencia, organizada en una gráfica de dos paneles verticales (`subplots(2, 1)`). Se calculó el fasor térmico complejo utilizando las funciones `np.abs` para la amplitud y `np.angle` para la fase (confinada al intervalo $[-\pi, \pi]$ y convertida a grados).

3.4. Generación de resultados para materiales con múltiples capas de muestra

Tras validar el modelo de muestra bicapa, la metodología se extendió sistemáticamente a configuraciones de hasta cinco capas de muestra. Esta generalización no requirió un nuevo esquema numérico, sino la aplicación directa del método SPPS adaptado para el manejo de múltiples interfaces térmicas, partiendo del marco teórico establecido por Khmelnytskaya y Serroukh [23]. La principal ventaja de esta extensión radica en la capacidad del algoritmo para tratar adecuadamente las discontinuidades físicas que ocurren en la unión de los diferentes materiales.

Para evaluar el comportamiento térmico del sistema bajo distintos escenarios, se plantearon configuraciones que incluyeron tanto estratos con propiedades homogéneas y variables por capa. Este análisis permitió validar la flexibilidad del método en contextos físicos más realistas, donde las propiedades termofísicas pueden variar considerablemente entre capas.

3.5. Comparación de resultados con otros métodos

En la literatura, la aplicación del método SPPS a la ecuación de calor tiene como antecedente principal el trabajo de [23], el cual reporta un margen de error absoluto del orden de 1×10^{-5} para una configuración base de tres regiones (soporte, una capa de muestra y gas). Por tal motivo, esta validación resulta fundamental para demostrar la viabilidad del algoritmo desarrollado en configuraciones de mayor complejidad (multiple capas).

Para asegurar la confiabilidad de los resultados ante el aumento de complejidad, se mantuvo la métrica de evaluación basada en el cálculo del error absoluto y relativo de los valores propios (λ_n), verificando el cumplimiento de la hipótesis de precisión de 10^{-5} . El procedimiento de comparación se estructuró en dos niveles:

- Se contrastaron los resultados del SPPS contra un enfoque semianalítico matricial (basado en la lógica de matrices globales) para el caso homogéneo, donde existen soluciones exactas.
- Para los casos heterogéneos donde no se cuenta con una solución analítica exacta, se utilizó un esquema de Diferencias Finitas como referencia de comparación.

Para el esquema de Diferencias Finitas Centradas en Python, las características técnicas de esta validación incluyen:

- Se empleó una malla ultra-fina de 200,000 puntos, utilizando la media armónica para el manejo de las interfaces entre materiales con base en [69].
- Para garantizar la viabilidad computacional, se utilizaron las librerías `scipy.sparse.diags` y `eigsh`, permitiendo el manejo eficiente de matrices dispersas de gran tamaño.

Al ser la base de las simulaciones, el desempeño del método SPPS se evaluó empleando como métrica principal el error absoluto y relativo en los valores propios del problema de Sturm–Liouville.

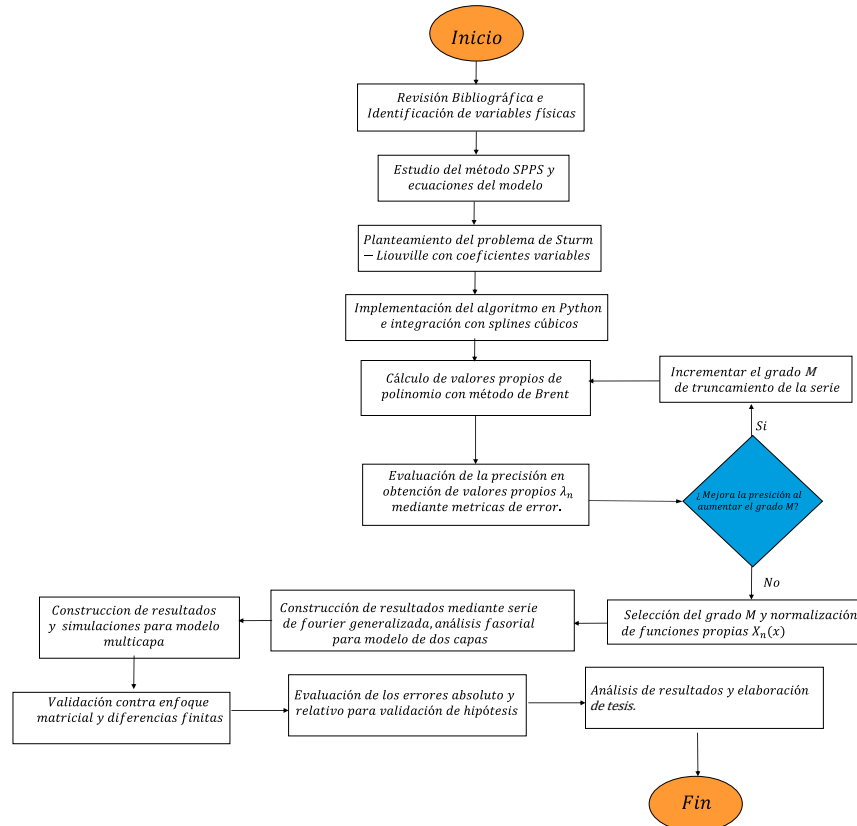


Figura 3.1: Metodología propuesta.

Método SPSP y el modelo de n capas

El objetivo de este capítulo es derivar la solución general para la ecuación de conducción de calor asociada al modelo fotoacústico de múltiples capas de material. A continuación, se presenta el procedimiento analítico y numérico desarrollado a partir de la fundamentación teórica previa.

4.1. Modelo para n capas

A partir del esquema físico propuesto por [51] y tomando como base fundamental el modelo analítico desarrollado por Khmelnytskaya y Serroukh [23], se considera una celda fotoacústica modelada unidimensionalmente a lo largo del eje x . De acuerdo con dicho antecedente, el sistema físico consta de tres regiones principales: un material de soporte, la muestra en estudio y una capa de gas que actúa como detector acústico. Tal como demuestran en [23], este enfoque permite analizar la conducción de calor sin pérdida de generalidad, ya que la región de la muestra puede albergar materiales de naturaleza no homogénea y con características discontinuas.

Para extender esta viabilidad teórica y desarrollar la formulación matemática explícita para un mayor número de capas, en la presente investigación la región central correspondiente a la muestra se subdivide en n estratos con propiedades térmicas y espesores variables. Por consiguiente, el sistema total se modela como una estructura de $N = n + 2$ regiones claramente diferenciadas.

El dominio espacial del problema se define en el intervalo $x \in [x_0, x_N]$, donde $a = x_0 = -(l_s + l)$ y $b = x_N = l_g$ representan los límites externos del sistema. Las posiciones de las interfaces internas se denotan por x_i , con $i = 1, \dots, n + 1$. La configuración geométrica se detalla a continuación:

1. Material de soporte: Ubicado en el intervalo $x \in [x_0, x_1]$, con espesor l_s . La interfaz $x_1 = -l$ separa el soporte del primer material.
2. Muestra multicapa: Ocupa la región central $x \in [x_1, x_{n+1}]$, con un espesor total l . Esta región se subdivide en n capas de material, donde la j -ésima capa del material se ubica en el intervalo $x \in [x_j, x_{j+1}]$ para $j = 1, \dots, n$. El espesor total de la muestra está dado por

$$l = \sum_{j=1}^n l_{m_j}. \quad (4.1)$$

3. Capa de gas (aire): Ubicada en el intervalo $x \in [x_{n+1}, x_N]$, con espesor l_g . La interfaz $x_{n+1} = 0$ marca la frontera entre la muestra y el gas.

La longitud total del sistema es $L = l_s + l + l_g$. El intervalo $-l < x < 0$, que corresponde a la región ocupada por la muestra, se subdivide en n subintervalos finitos (las n capas de material) mediante la definición de las interfaces internas:

$$-l = x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_{N-2} < x_{N-1} = 0. \quad (4.2)$$

En la Figura 4.1 se muestra la geometría del sistema.

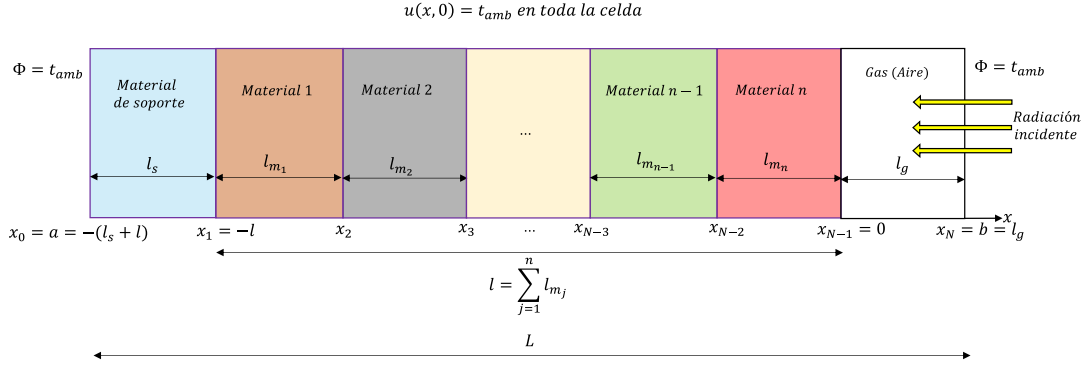


Figura 4.1: Geometría del modelo de n capas.

El gas recibe la radiación incidente sobre su superficie en la interfaz $x_{N-1} = 0$, lo que genera una perturbación térmica periódica que se difunde hacia las capas interiores del sistema. De acuerdo con las consideraciones de [23, 51], se establece que en las fronteras externas y al inicio del experimento ($t = 0$), la temperatura en todo el sistema es uniforme e igual a la temperatura ambiente Φ .

4.1.1. EDP para el modelo de n capas

Partiendo de la ecuación de conducción de calor unidimensional (2.28), se define el siguiente problema de valores iniciales y de frontera en el intervalo $a < x < b$:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (4.3)$$

$$u(a, t) = u(b, t) = \Phi, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

$$u(x, 0) = \Phi, \quad a < x < b. \quad (4.5)$$

Dado que el medio es no homogéneo, las propiedades térmicas dependen de la posición y se definen como funciones por tramos para cada región física:

$$c(x), \rho(x), k(x) = \begin{cases} c_s(x), \rho_s(x), \kappa_s(x) & x_0 < x < x_1, \\ c_{m_j}(x), \rho_{m_j}(x), \kappa_{m_j}(x) & x_j < x < x_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n \\ c_g(x), \rho_g(x), \kappa_g(x) & x_{n+1} < x < x_N. \end{cases} \quad (4.6)$$

Asimismo, se establece que las funciones $c(x)$, $\rho(x)$ y $\kappa(x)$ satisfacen las condiciones de regularidad requeridas por el problema de Sturm-Liouville, al ser funciones positivas y continuas por tramos

en todo el dominio. En consecuencia, la solución general de la temperatura $u(x, t)$ se construye acoplando las soluciones parciales de cada región:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_s(x, t), & x_0 \leq x < x_1, & \text{(Soporte)} \\ u_{m_j}(x, t), & x_j \leq x < x_{j+1}, & j = 1, \dots, n \text{ (Capas de Material)} \\ u_g(x, t), & x_{n+1} \leq x \leq x_N, & \text{(Gas)} \end{cases} \quad (4.7)$$

donde u_s , u_{m_j} y u_g corresponden a las soluciones en el soporte, en la j -ésima capa de la muestra y en el gas, respectivamente. El término no homogéneo $f(x, t)$ proviene de la ecuación (2.38) y se expresa como $f(x, t) = Q(\beta(x))I(t)$.

4.1.2. Condiciones de interfaz

Para garantizar la compatibilidad física y la conservación de la energía entre las N capas, en cada interfaz interna x_i ($i = 1, \dots, n+1$) deben cumplirse las siguientes condiciones [28].

Continuidad de temperatura:

$$u_s(x_1, t) = u_{m_1}(x_1, t), \text{ Interfaz Soporte-Muestra} \quad (4.8)$$

$$u_{m_{i-1}}(x_i, t) = u_{m_i}(x_i, t), \quad i = 2, \dots, n, \text{ Interfaces Inter-materiales} \quad (4.9)$$

$$u_{m_n}(x_{n+1}, t) = u_g(x_{n+1}, t). \text{ Interfaz Muestra-Gas} \quad (4.10)$$

Conservación de flujo de calor:

$$\kappa_s \frac{\partial u_s}{\partial x}(x_1, t) = \kappa_{m_1} \frac{\partial u_{m_1}}{\partial x}(x_1, t), \text{ Interfaz Soporte-Muestra} \quad (4.11)$$

$$\kappa_{m_{i-1}} \frac{\partial u_{m_{i-1}}}{\partial x}(x_i, t) = \kappa_{m_i} \frac{\partial u_{m_i}}{\partial x}(x_i, t), \quad i = 2, \dots, n, \text{ Interfaces Inter-materiales} \quad (4.12)$$

$$\kappa_{m_n} \frac{\partial u_{m_n}}{\partial x}(x_{n+1}, t) = \kappa_g \frac{\partial u_g}{\partial x}(x_{n+1}, t). \text{ Interfaz Muestra-Gas} \quad (4.13)$$

4.1.3. Homogeneización de las condiciones de frontera

Se observa que las condiciones de frontera definidas en (4.4) no son homogéneas. Siguiendo el procedimiento descrito en [39], para aplicar el método de separación de variables, se introduce el cambio de variable $u(x, t) = z(x, t) + \Phi$. Dado que Φ es una constante espacial y temporal, sus derivadas son nulas. Esto reformula el problema original en términos de $z(x, t)$ como un sistema completamente homogéneo:

De este modo, el problema original se reformula en términos de $z(x, t)$ como un sistema completamente homogéneo en sus condiciones de contorno e inicial:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial z}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad a < x < b, \quad t > 0, \quad (4.14)$$

$$z(a, t) = z(b, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.15)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad a < x < b. \quad (4.16)$$

Es importante notar que tanto la EDP como las condiciones de continuidad en las interfaces permanecen inalteradas. Finalmente, la temperatura total del sistema se recupera mediante:

$$u(x, t) = z(x, t) + \Phi. \quad (4.17)$$

4.1.4. Caso homogéneo

Para determinar los valores y funciones propias del problema de Sturm-Liouville asociado, se considera primero el caso homogéneo, es decir, donde la fuente de calor es nula ($f(x, t) = 0$) [31, 41]. Al proponer una solución del tipo:

$$z(x, t) = X(x)T(t), \quad (4.18)$$

y sustituirla en la ecuación (4.14), con las derivadas parciales expresadas como:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = X(x) \frac{dT(t)}{dt}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = T(t) \frac{dX(x)}{dx}. \quad (4.19)$$

resulta la siguiente expresión:

$$c(x)\rho(x)X(x) \frac{dT(t)}{dt} = \frac{d}{dx} \left(\kappa(x)T(t) \frac{dX(x)}{dx} \right). \quad (4.20)$$

Bajo la suposición de que $\kappa(x) > 0$ y $X(x)T(t) \neq 0$ en el intervalo $a < x < b$, se dividen ambos miembros de la ecuación por este producto, para obtener:

$$\frac{c(x)\rho(x)X(x)}{X(x)T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)T(t)} \frac{d}{dx} \left(\kappa(x)T(t) \frac{dX(x)}{dx} \right). \quad (4.21)$$

Dado que la derivada del lado derecho es respecto a x , se puede extraer $T(t)$ del operador diferencial. Al simplificar, se obtiene la separación de variables:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{c(x)\rho(x)X(x)} \frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX(x)}{dx} \right). \quad (4.22)$$

Puesto que el miembro izquierdo depende únicamente de t , mientras que el derecho solo de la variable espacial x , ambos términos deben ser iguales a una constante de separación, la cual se denota por $-\lambda$, (con $\lambda > 0$). Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias [39]:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{c(x)\rho(x)X(x)} \frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX(x)}{dx} \right) = -\lambda. \quad (4.23)$$

Ecuación temporal

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda T(t) \quad (4.24)$$

la cual describe un comportamiento de decaimiento exponencial, coherente con la disipación de calor en el sistema.

Ecuación espacial

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX(x)}{dx} \right) = -\lambda c(x)\rho(x)X(x) \quad (4.25)$$

que define el problema espacial de Sturm-Liouville correspondiente al sistema multicapa, donde λ_n representan los valores propios y $X_n(x)$ son las funciones propias ortogonales con respecto a la función peso $r(x) = c(x)\rho(x)$.

4.1.5. Ecuación espacial mediante SPSS

La ecuación (4.25) puede reescribirse en la forma regular de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX(x)}{dx} \right) + \lambda c(x) \rho(x) X(x) = 0, \quad a < x < b \quad (4.26)$$

sujeta a condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas:

$$X(a) = X(b) = 0. \quad (4.27)$$

Y a las condiciones de acoplamiento térmico en cada interfaz x_i , las cuales aseguran la compatibilidad física entre capas adyacentes:

$$X_s(x_1) = X_{m_1}(x_1), \quad (\text{Interfaz Soporte-muestra}) \quad (4.28)$$

$$X_{m_{i-1}}(x_i) = X_{m_i}(x_i), \quad i = 2, \dots, n \quad (\text{Interfaz Inter-materiales}) \quad (4.29)$$

$$X_{m_n}(x_{n+1}) = X_g(x_{n+1}). \quad (\text{Interfaz Muestra-Gas}) \quad (4.30)$$

Asimismo, debe cumplirse la conservación del flujo de calor en cada interfaz:

$$\kappa_s X'_s(x_1) = \kappa_{m_1} X'_{m_1}(x_1), \quad (\text{Interfaz Soporte-muestra}) \quad (4.31)$$

$$\kappa_{m_{i-1}} X'_{m_{i-1}}(x_i) = \kappa_{m_i} X'_{m_i}(x_i), \quad i = 2, \dots, n \quad (\text{Interfaz Inter-materiales}) \quad (4.32)$$

$$\kappa_{m_n} X'_{m_n}(x_{n+1}) = \kappa_g X'_g(x_{n+1}). \quad (\text{Interfaz Muestra-Gas}) \quad (4.33)$$

De este modo, la función propia $X_n(x)$ para cada capa se expresa como:

$$X(x) = \begin{cases} X_s(x) & x_0 < x < x_1, \quad (\text{Soporte}) \\ X_{m_j}(x) & x_j < x < x_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{Capas de material}) \\ X_g(x) & x_{n+1} < x < x_N. \quad (\text{Gas}) \end{cases} \quad (4.34)$$

De acuerdo con el Teorema 2.13.1, la solución general se construye a partir de una solución particular no trivial para el caso base $\lambda = 0$. Reescribiendo la ecuación (4.26):

$$-\frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX(x)}{dx} \right) = \lambda c(x) \rho(x) X(x) = \frac{d}{dx} \left(-\kappa(x) \frac{dX(x)}{dx} \right). \quad (4.35)$$

Al tomar dicho valor $\lambda = 0$, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left(-\kappa(x) \frac{dX(x)}{dx} \right) = 0. \quad (4.36)$$

Considerando $p = -\kappa(x)$, $q = 0$, y $r(x) = c(x)\rho(x)$, con $p(x) \neq 0$ y $r(x) > 0$, Es inmediato comprobar que la función $X_0(x) = 1$ satisface la ecuación (4.36) en todo el intervalo, constituyendo así una solución particular válida. A partir de X_0 , se construye la solución general como una combinación lineal de dos series de potencias del parámetro espectral λ [37]:

$$X(x) = c_1 X_1(x) + c_2 X_2(x). \quad (4.37)$$

Donde las funciones X_1 y X_2 se definen formalmente como:

$$X_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \tilde{Y}^{(2m)}(x), \quad (4.38)$$

$$X_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m Y^{(2m+1)}(x). \quad (4.39)$$

Las funciones $\tilde{Y}^{(m)}$ y $Y^{(m)}$ se definen de manera recursiva a partir de un punto base $x_0 \in [a, b]$ mediante:

$$\tilde{Y}^{(0)} \equiv 1, \quad Y^{(0)} \equiv 1, \quad (4.40)$$

y para $m \geq 1$:

$$\tilde{Y}^{(m)}(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^x \tilde{Y}^{(m-1)}(s) c(s) \rho(s) ds, & m \text{ impar}, \\ - \int_{x_0}^x \frac{\tilde{Y}^{(m-1)}(s)}{\kappa(s)} ds, & m \text{ par}, \end{cases} \quad (4.41)$$

$$Y^{(m)}(x) = \begin{cases} - \int_{x_0}^x \frac{Y^{(m-1)}(s)}{\kappa(s)} ds, & m \text{ impar}, \\ \int_{x_0}^x Y^{(m-1)}(s) c(s) \rho(s) ds, & m \text{ par}. \end{cases} \quad (4.42)$$

Un aspecto importante de esta formulación es que, aunque las propiedades térmicas $\kappa(x)$, $c(x)$ y $\rho(x)$ presenten discontinuidades de salto en las interfaces, las funciones obtenidas mediante integración resultan continuas en todo el dominio [23]. Esto debido a que el operador integral suaviza las discontinuidades, garantizando que las soluciones generadas mediante el método SPPS sean continuas. A partir de las definiciones anteriores, se tiene para $X_1(x)$:

$$X_1(x) = \tilde{Y}^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \tilde{Y}^{(2m)}(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \tilde{Y}^{(2m)}(x). \quad (4.43)$$

Según el Teorema 2.13.1, el punto base x_0 puede elegirse arbitrariamente en $[a, b]$, siempre que la función de conductividad $\kappa(x)$ sea continua y no nula en dicho punto. Por conveniencia, se elige $x_0 = a$, lo que simplifica las integraciones y cumple con las hipótesis del teorema. Al evaluar la solución general en las condiciones de frontera se tiene:

$$X(a) = c_1 X_1(a) + c_2 X_2(a). \quad (4.44)$$

De acuerdo con las propiedades de las funciones recursivas, al evaluar en $x = a$ con el punto base $x_0 = a$, resulta que:

$$\tilde{Y}^{(m)}(a) = \begin{cases} \int_a^a \tilde{Y}^{(m-1)}(s) c(s) \rho(s) ds = 0 \\ - \int_a^a \frac{\tilde{Y}^{(m-1)}(s)}{\kappa(s)} ds = 0 \end{cases}, \quad Y^{(m)}(a) = \begin{cases} - \int_a^a \frac{Y^{(m-1)}(s)}{\kappa(s)} ds = 0 \\ \int_a^a Y^{(m-1)}(s) c(s) \rho(s) ds = 0. \end{cases} \quad (4.45)$$

Es decir, todas las integrales son de la forma:

$$\int_a^a F(s) ds = 0. \quad (4.46)$$

Bajo estas consideraciones, se tiene entonces

$$X_1(a) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \tilde{Y}^{(2m)}(a) = 1, \quad X_2(a) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m Y^{(2m+1)}(a) = 0. \quad (4.47)$$

Por lo tanto, la primera condición de frontera homogénea $X(a) = 0$ se cumple si y solo si:

$$X(a) = c_1(1) + c_2(0) = c_1 = 0. \quad (4.48)$$

La solución general del sistema se reduce entonces a una sola familia de funciones:

$$X(x) = c_2 X_2(x). \quad (4.49)$$

Aplicando la segunda condición de frontera $X(b) = 0$, se obtiene la ecuación característica que determina los valores propios λ_n :

$$X(b) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m Y^{(2m+1)}(b) = 0. \quad (4.50)$$

Para la implementación numérica, los valores λ del problema de Sturm-Liouville están determinados aproximadamente por los ceros de un polinomio $P_M(\lambda)$, truncado en un orden finito M :

$$P_M(\lambda) = \sum_{m=0}^M a_m \lambda^m, \quad (4.51)$$

donde los coeficientes a_m se obtienen a partir de

$$a_m = Y^{(2m+1)}(b), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.52)$$

4.1.6. Cálculo para n capas

Los coeficientes de la serie se obtienen de manera recursiva. Para el caso de una muestra compuesta por n capas, la expresión integral se reescribe como una suma de integrales evaluadas en cada subintervalo definido por las interfaces térmicas:

$$Y^{(m)}(b) = \begin{cases} -\int_a^{x_1} \frac{Y^{(m-1)}(\tau)}{\kappa_s(\tau)} d\tau - \sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{Y^{(m-1)}(\tau)}{\kappa_j(\tau)} d\tau - \int_{x_{n+1}}^b \frac{Y^{(m-1)}(\tau)}{\kappa_g(\tau)} d\tau, & \text{m impar,} \\ \int_a^{x_1} Y^{(m-1)}(\tau) c_s \rho_s d\tau + \sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} Y^{(m-1)}(\tau) c_j \rho_j d\tau + \int_{x_{n+1}}^b Y^{(m-1)}(\tau) c_g \rho_g d\tau, & \text{m par.} \end{cases} \quad (4.53)$$

Con $j = 1, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_1 = -l$, $x_{n+1} = 0$ y $x_N = b$.

Esta formulación no requiere condiciones adicionales en los puntos de discontinuidad; las condiciones físicas ya están incluidas de forma natural por las integrales definidas por tramos.

Al trabajar con las integrales de la forma $\int_{x_0}^x f(\tau) d\tau$, estas se interpretan como funciones del punto de evaluación x . Para obtener el valor numérico de $Y^{(m)}(b)$, se calcula la antiderivada de la función integrando y se evalúa en los límites superior b e inferior x_0 , según el Teorema Fundamental del Cálculo.

Una vez determinados los valores propios λ_n , las funciones propias $X_n(x)$ se expresan como:

$$X_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n^m Y^{(2m+1)}(x). \quad (4.54)$$

Derivando respecto a x y aplicando nuevamente el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{dX_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n^m Y^{(2m+1)}(x) \right). \quad (4.55)$$

Dada la convergencia uniforme de la serie, es posible intercambiar el orden de la suma y la derivada, reescribiendo la expresión como:

$$\frac{dX_n(x)}{dx} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n^m \frac{d}{dx} \left(Y^{(2m+1)}(x) \right). \quad (4.56)$$

De la definición recursiva de $Y^{(m)}(x)$:

$$Y^{(m)}(x) = \begin{cases} -\int_{x_0}^x \frac{Y^{(m-1)}(s)}{\kappa(s)} ds, & n \text{ impar}, \\ \int_{x_0}^x Y^{(m-1)}(s) c(s) \rho(s) ds, & n \text{ par}. \end{cases} \quad (4.57)$$

En particular, para $Y^{(2m+1)}(x)$ se cumple que $2m+1$ es siempre un número impar para $m \geq 0$, por lo que:

$$Y^{(2m+1)}(x) = -\int_{x_0}^x \frac{Y^{(2m+1-1)}(s)}{\kappa(s)} ds = -\int_{x_0}^x \frac{Y^{(2m)}(s)}{\kappa(s)} ds. \quad (4.58)$$

La aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo produce:

$$\frac{d}{dx} \left(Y^{(2m+1)}(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(-\int_{x_0}^x \frac{Y^{(2m)}(s)}{\kappa(s)} ds \right) = -\frac{Y^{(2m)}(x)}{\kappa(x)}. \quad (4.59)$$

Sustituyendo este resultado en (4.56), la derivada de la función propia se describe como:

$$\frac{dX_n(x)}{dx} = \frac{1}{\kappa(x)} \left(-\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n^m Y^{(2m)}(x) \right). \quad (4.60)$$

Finalmente, para el problema de Sturm-Liouville la condición de regularidad se satisface mediante la continuidad del flujo térmico. Aunque la conductividad $\kappa(x)$ es discontinua en las interfaces y, por ende, la derivada $X'_n(x)$ presenta saltos finitos en dichos puntos, la expresión:

$$\kappa(x) X'_n(x) = -\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_n^m Y^{(2m)}(x) \quad (4.61)$$

garantiza la continuidad del producto $\kappa(x) X'_n(x)$ en todo el intervalo. asegurando la conservación del flujo de calor a través de las interfaces del sistema. Por lo tanto, las series obtenidas mediante el método SPSS son soluciones válidas y físicamente consistentes para el modelo de n capas.

4.2. Expansión de funciones propias del caso no homogéneo

Siguiendo lo establecido en [41], las funciones obtenidas se emplean para resolver la ecuación no homogénea. La estrategia consiste en descomponer la solución $z(x, t)$ en términos de estas funciones ortogonales [31]:

$$f(x, t) = f_1(t)X_1(x) + f_2(t)X_2(x) + \cdots + f_n(t)X_n(x) + \dots \quad (4.62)$$

Como el conjunto $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal en el espacio $L_r^2(a, b)$, la solución general se expresa como la serie:

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \quad (4.63)$$

donde $T_n(t)$ son los coeficientes temporales a determinar. Bajo las condiciones del Teorema 2.7.1, la convergencia uniforme permite realizar la derivación término a término. Al sustituir la expansión en la EDP y aplicar el operador diferencial, el miembro izquierdo se convierte en:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial z}{\partial t} = c(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \right) = c(x)\rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dT_n(t)}{dt} X_n(x). \quad (4.64)$$

Por otro lado, al aplicar el operador diferencial espacial al miembro derecho, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX_n(x)}{dx} \right) \quad (4.65)$$

Dado que los coeficientes $T_n(t)$, dependen unicamente del tiempo, pueden extraerse de la derivada respecto a x . Así la ecuación (4.14) queda finalmente expresada como:

$$c(x)\rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dT_n(t)}{dt} X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX_n(x)}{dx} \right) + f(x, t). \quad (4.66)$$

Multiplicando la ecuación (4.66) por una función propia arbitraria $X_m(x)$, e integrando sobre el intervalo $[a, b]$ respecto a la variable espacial:

$$\int_a^b X_m(x) \left[c(x)\rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dT_n(t)}{dt} X_n(x) \right] dx = \int_a^b X_m(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX_n(x)}{dx} \right) + f(x, t) \right] dx. \quad (4.67)$$

Separando términos, el lado izquierdo se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dT_n(t)}{dt} \int_a^b c(x)\rho(x) X_n(x) X_m(x) dx \quad (4.68)$$

mientras que el lado derecho resulta en:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \int_a^b X_m(x) \frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX_n(x)}{dx} \right) dx + \int_a^b f(x, t) X_m(x) dx. \quad (4.69)$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones propias con peso $r(x) = c(x)\rho(x)$, se cumple que:

$$\int_a^b r(x)X_n(x)X_m(x)dx = \begin{cases} ||X_n||_r^2 & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (4.70)$$

donde la norma al cuadrado está definida por:

$$||X_n||_r^2 = \int_a^b c(x)\rho(x)X_n^2(x)dx. \quad (4.71)$$

De este modo, el lado izquierdo se simplifica a:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} ||X_n||_r^2. \quad (4.72)$$

Para el lado derecho, las funciones propias satisfacen la ecuación de Sturm-Liouville: (4.26):

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa(x) \frac{dX_n(x)}{dx} \right) = -\lambda c(x)\rho(x)X_n(x) \quad (4.73)$$

de donde se obtiene por sustitución en la integral:

$$\int_a^b X_m(x)[- \lambda_n c(x)\rho(x)X_n(x)]dx = -\lambda_n ||X_n||_r^2. \quad (4.74)$$

Así, para cada n , la ecuación diferencial en $T_n(t)$ resulta:

$$\frac{dT_n}{dt} \cdot ||X_n||_r^2 = -\lambda_n T_n(t) \cdot ||X_n||_r^2 + \int_a^b f(x,t)X_n(x)dx. \quad (4.75)$$

Dividiendo entre la norma al cuadrado se obtiene:

$$\frac{dT_n}{dt} + \lambda_n T_n(t) = \frac{1}{||X_n||_r^2} \int_a^b f(x,t)X_n(x)dx. \quad (4.76)$$

Para simplificar, se define la proyección de la fuente sobre la función propia como:

$$F_n(t) := \frac{1}{||X_n||_r^2} \int_a^b f(x,t)X_n(x)dx. \quad (4.77)$$

Transformando así la EDP en un sistema de EDOs de primer orden:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \lambda_n T_n(t) = F_n(t). \quad (4.78)$$

Para una fuente modulada según el modelo de [51] puede expresarse como:

$$f(x,t) = Q(\beta(x))I(t), \quad a < x < b \quad (4.79)$$

donde $Q(\beta(x)) = \beta e^{\beta x}$ y $I(t) = \frac{1}{2}I_0(1 + \cos(\omega t))$. Los coeficientes $F_n(t)$ pueden reescribirse como:

$$F_n(t) = \frac{1}{||X_n||_r^2} \int_a^b \beta e^{\beta x} I(t) X_n(x) dx. \quad (4.80)$$

Factorizando $I(t)$ de la integral:

$$F_n(t) = I(t) \cdot \frac{1}{\|X_n\|_r^2} \int_a^b \beta e^{\beta x} X_n(x) dx. \quad (4.81)$$

Finalmente, se introduce el coeficiente de acoplamiento térmico Θ_n como:

$$\Theta_n := \frac{1}{\|X_n\|_r^2} \int_a^b \beta e^{\beta x} X_n(x) dx. \quad (4.82)$$

obteniendo finalmente $F_n(t) = \Theta_n I(t)$.

4.3. Solución de la componente temporal bajo excitación modulada

Sustituyendo $F_n(t)$ en (4.78) se obtiene la EDO para cada coeficiente temporal $T_n(t)$:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \lambda_n T_n(t) = \frac{1}{2} I_0 \Theta_n (1 + \cos(\omega t)) \quad (4.83)$$

donde λ_n es el valor propio asociado a X_n , Θ_n corresponde a la proyección del término espacial, I_0 es la intensidad máxima de la radiación incidente y ω es la frecuencia de modulación.

Esta es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. A partir del procedimiento de homogeneización, se sabe que $z(x, 0) = 0$. Dado que las funciones propias $X_n(x)$ son linealmente independientes, la única forma en que la serie (4.63), se anule para todo x en $t = 0$ es que cada coeficiente verifique $T_n(0) = 0$.

Resolviendo la ecuación (4.83) y aplicando esta condición inicial, se deduce directamente la solución para los coeficientes temporales:

$$T_n(t) = \frac{1}{2} I_0 \Theta_n e^{-\lambda_n t} \left[\int_0^t (1 + \cos(\omega \tau)) e^{\lambda_n \tau} d\tau \right]. \quad (4.84)$$

En consecuencia la solución $z(x, t)$ se escribe como

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) e^{-\lambda_n t} \left[\frac{1}{2} I_0 \Theta_n \int_0^t (1 + \cos(\omega \tau)) e^{\lambda_n \tau} d\tau \right] \quad (4.85)$$

y la solución del problema original es finalmente:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) e^{-\lambda_n t} \left[\frac{1}{2} I_0 \Theta_n \int_0^t (1 + \cos(\omega \tau)) e^{\lambda_n \tau} d\tau \right] + \Phi. \quad (4.86)$$

4.4. Descomposición de la solución $u(x, t)$

Para analizar la solución obtenida, resulta conveniente descomponer la integral en (4.86):

$$\int_0^t (1 + \cos(\omega \tau)) e^{\lambda_n \tau} d\tau = \int_0^t e^{\lambda_n \tau} d\tau + \int_0^t \cos(\omega \tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau. \quad (4.87)$$

La primera integral se evalúa directamente como:

$$\int_0^t e^{\lambda_n \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda_n} (e^{\lambda_n t} - 1). \quad (4.88)$$

Para la segunda integral aplicando integración por partes se obtiene:

$$\int_0^t \cos(\omega \tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau = \frac{e^{\lambda_n t} [\lambda_n \cos(\omega t) + \omega \sen(\omega t)] - \lambda_n}{\lambda_n^2 + \omega^2}. \quad (4.89)$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión de $T_n(t)$ en la ecuación (4.84):

$$T_n(t) = \frac{1}{2} I_0 \Theta_n e^{-\lambda_n t} \left[\left(\frac{1}{\lambda_n} (e^{\lambda_n t} - 1) + \frac{e^{\lambda_n t} [\lambda_n \cos(\omega t) + \omega \sen(\omega t)] - \lambda_n}{\lambda_n^2 + \omega^2} \right) \right] \quad (4.90)$$

Finalmente, al distribuir el término exponencial y agrupando algunos términos se tiene:

$$T_n(t) = \frac{1}{2} I_0 \Theta_n \left[\frac{1}{\lambda_n} - \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \omega^2} \right) e^{-\lambda_n t} + \frac{\lambda_n \cos(\omega t) + \omega \sen(\omega t)}{\lambda_n^2 + \omega^2} \right]. \quad (4.91)$$

A partir de esta forma conveniente de expresar $T_n(t)$ y de las consideraciones de [31, 51] la solución $u(x, t)$ de la ecuación puede descomponerse en tres componentes:

4.4.1. Componente transitoria $u_{trans}(x, t)$

Decae exponencialmente con el tiempo y está asociada a la respuesta inicial del sistema ante el encendido de la fuente:

$$u_{trans}(x, t) = -\frac{I_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \omega^2} \right) e^{-\lambda_n t} X_n(x). \quad (4.92)$$

Esta componente tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$.

4.4.2. Componente estacionaria DC $u_{DC}(x, t)$

Es la parte constante de la solución, que permanece en el tiempo y corresponde al efecto promedio de la fuente modulada:

$$u_{DC}(x) = \frac{I_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Theta_n}{\lambda_n} \right) X_n(x) + \Phi. \quad (4.93)$$

Esta componente depende únicamente de la variable espacial.

4.4.3. Componente oscilante AC $u_{AC}(x, t)$

Es la contribución periódica asociada a la modulación de la fuente con frecuencia ω . En un dispositivo fotoacústico, únicamente esta componente oscilante puede medirse experimentalmente:

$$u_{AC}(x, t) = \frac{I_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n X_n(x) \left[\frac{\lambda_n \cos(\omega t) + \omega \sen(\omega t)}{\lambda_n^2 + \omega^2} \right]. \quad (4.94)$$

En conjunto, la solución puede escribirse como la superposición de las tres componentes:

$$u(x, t) = u_{trans}(x, t) + u_{DC}(x) + u_{AC}(x, t). \quad (4.95)$$

4.5. Solución para el caso no homogéneo con fuente fotoacústica

De acuerdo con [51], el soporte y el gas no absorben luz, por lo que el término fuente se define según la Fig 4.1:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}I_0\beta e^{\beta x}(1 + \cos(\omega t)), & -l < x < 0 \\ 0, & -(l_s + l) < x < -l \cup 0 < x < l_g \end{cases} \quad (4.96)$$

donde $t > 0$, por lo tanto solo se requiere integrar la función en el intervalo $-l < x < 0$.

$$Y^{(m)}(x_{n+1}) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{Y^{(m-1)}(\tau)}{\kappa_j(\tau)} d\tau & \text{m impar,} \\ \sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} Y^{(m-1)}(\tau) c_j \rho_j d\tau & \text{m par.} \end{cases} \quad (4.97)$$

Con $j = 1, \dots, n$, $x_1 = -l$ y $x_{n+1} = 0$.

4.6. Representación fasorial de la componente oscilante AC

En esta sección se desarrolla la componente oscilante de la temperatura $u_{AC}(x, t)$, la cual surge como respuesta del sistema a la excitación periódica del haz de luz modulado a una frecuencia angular $\omega = 2\pi f$.

A partir de la solución general, se definen los coeficientes espaciales $A_n(x)$ y $B_n(x)$ asociados a la n -ésima componente del sistema:

$$A_n(x) = \frac{I_0}{2} \Theta_n X_n(x) \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \omega^2} \right), \quad B_n(x) = \frac{I_0}{2} \Theta_n X_n(x) \left(\frac{\omega}{\lambda_n^2 + \omega^2} \right). \quad (4.98)$$

De este modo, la contribución oscilante total se expresa como la serie:

$$u_{AC}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(x) \cos(\omega t) + B_n(x) \sin(\omega t)]. \quad (4.99)$$

Transformación al dominio complejo (Fasores)

Al aplicar la identidad de Euler ($e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$) y expresar las funciones trigonométricas en términos de exponenciales complejas se obtiene:

$$u_{AC}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(x) \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) + B_n(x) \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) \right]. \quad (4.100)$$

Multiplicando y dividiendo por i el término de $B_n(x)$, la expresión se reordena como:

$$u_{AC}(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(x) - iB_n(x)] e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(x) + iB_n(x)] e^{-i\omega t}. \quad (4.101)$$

Lo anterior permite definir el fasor térmico $\hat{u}(x)$ y su conjugado $\hat{u}^*(x)$, de modo que

$$u_{AC}(x, t) = \frac{1}{2} \hat{u}(x) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \hat{u}^*(x) e^{-i\omega t} = \text{Re}\{\hat{u}(x) e^{i\omega t}\} \quad (4.102)$$

donde el fasor térmico $\hat{u}(x)$ se define explícitamente como:

$$\hat{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(x) - iB_n(x)] = \frac{I_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n X_n(x)}{\lambda_n + i\omega}. \quad (4.103)$$

Finalmente, la respuesta senoidal en estado estable se caracteriza mediante su magnitud (amplitud) y fase a partir de la parte real e imaginaria del fasor:

$$\hat{u}(x) = \text{Re}\{\hat{u}(x)\} + i \text{Im}\{\hat{u}(x)\}. \quad (4.104)$$

La temperatura oscilante en términos de estos parámetros es:

$$u_{AC}(x, t) = |\hat{u}(x)| \cos[\omega t + \phi(x)]. \quad (4.105)$$

Donde la magnitud $|\hat{u}(x)|$ representa la amplitud de la oscilación térmica, y el argumento $\phi(x)$ representa el desfase respecto a la excitación, calculados mediante:

$$|\hat{u}(x)| = \sqrt{\text{Re}\{\hat{u}(x)\}^2 + \text{Im}\{\hat{u}(x)\}^2} \quad (4.106)$$

$$\phi(x) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}\{\hat{u}(x)\}}{\text{Re}\{\hat{u}(x)\}} \right). \quad (4.107)$$

A diferencia del dominio del tiempo, donde se observa el movimiento dinámico de la oscilación térmica, la transición al dominio de la frecuencia mediante el fasor térmico $\hat{u}(x)$ proporciona una visión estacionaria y sintética del sistema. Este procesamiento es análogo al funcionamiento de un amplificador lock-in, instrumento diseñado para extraer la magnitud y el desfase de una señal respecto a una referencia conocida.

Enfoques de Referencia para el Problema de Sturm-Liouville

5.1. Valores y funciones propias para el caso general homogéneo

En esta sección se desarrolla el enfoque semianalítico para un sistema de N capas con propiedades homogéneas por tramos. Para cada capa j , la ecuación de Sturm-Liouville (4.26) se reduce a la de un oscilador armónico simple:

$$\phi_j''(x) + \nu_j^2 \phi_j(x) = 0, \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.1)$$

donde se definen los parámetros espectrales y térmicos como:

$$\nu_j^2 = \frac{\lambda}{\alpha_j}, \quad \alpha_j = \frac{\kappa_j}{c_j \rho_j}. \quad (5.2)$$

El sistema está sujeto a condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas en los extremos del dominio, $X(a) = X(b) = 0$, y el dominio total (a, b) se divide en N subintervalos finitos como se esquematiza en la Figura 5.1:

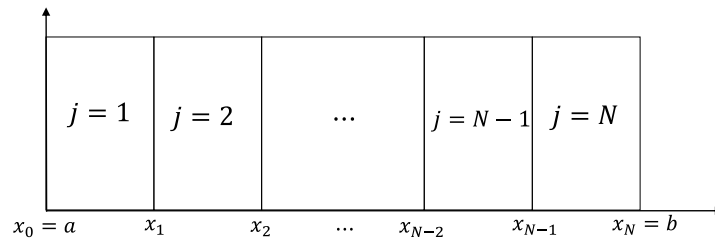


Figura 5.1: Esquema para el caso de N capas homogéneo.

5.1.1. Soluciones locales y condiciones de frontera

La solución general en cada capa j se expresa en términos de funciones trigonométricas, que utilizan corrimientos respecto a las interfaces i :

- Capas intermedias ($j = 1, \dots, N - 1$):

$$\phi_j(x) = A_j \cos[\nu_j(x - x_{j-1})] + B_j \sin[\nu_j(x - x_{j-1})] \quad (5.3)$$

- Última capa ($j = N$):

$$\phi_N(x) = A_N \cos[\nu_N(x - x_N)] + B_N \sin[\nu_N(x - x_N)] \quad (5.4)$$

donde A_j y B_j son constantes. Al aplicar las condiciones de frontera ($X(a) = 0$ y $X(b) = 0$), se obtiene de manera inmediata que $A_1 = 0$ y $A_N = 0$. Esto simplifica las soluciones en los extremos a:

$$\phi_1(x) = B_1 \sin[\nu_1(x - x_0)], \quad x_0 < x < x_1 \quad (5.5)$$

$$\phi_N(x) = B_N \sin[\nu_N(x - x_N)], \quad x_{N-1} < x < x_N \quad (5.6)$$

5.1.2. Condiciones en las interfaces

Para un sistema de N capas, existen $N - 1$ interfaces internas denotadas por x_i (donde $i = 1, \dots, N - 1$), las cuales imponen las condiciones de continuidad:

$$\phi_j(x_i) = \phi_{j+1}(x_i) \quad (5.7)$$

$$\kappa_j \phi'_j(x_i) = \kappa_{j+1} \phi'_{j+1}(x_i). \quad (5.8)$$

Al evaluar la solución de la capa j en su interfaz derecha x_i , y dado que $l_j = x_i - x_{j-1}$, se tiene:

$$\phi_j(x_i) = A_j \cos[\nu_j(l_j)] + B_j \sin[\nu_j(l_j)]. \quad (5.9)$$

Para la capa siguiente es $(j + 1)$, la evaluación en el mismo punto x_i resulta en:

$$\phi_{j+1}(x_i) = A_{j+1} \cos[\nu_{j+1}(x_i - x_i)] + B_{j+1} \sin[\nu_{j+1}(x_i - x_i)] = A_{j+1} \quad (5.10)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.7), se obtiene la relación de continuidad de temperatura para las interfaces $i = 1, \dots, N - 2$:

$$A_j \cos[\nu_j(l_j)] + B_j \sin[\nu_j(l_j)] - A_{j+1} = 0 \quad (5.11)$$

Para la última interfaz ($i = N - 1$), considerando la forma de $\phi_N(x)$ y la naturaleza impar de la función seno, la condición resulta en:

$$\phi_{N-1}(x_{N-1}) = A_{N-1} \cos[\nu_{N-1}(x_{N-1} - x_{N-2})] + B_{N-1} \sin[\nu_{N-1}(x_{N-1} - x_{N-2})] \quad (5.12)$$

$$\phi_{N-1}(x_{N-1}) = A_{N-1} \cos[\nu_{N-1}(l_{N-1})] + B_{N-1} \sin[\nu_{N-1}(l_{N-1})] \quad (5.13)$$

y para la capa siguiente ($j = N$):

$$\phi_N(x_{N-1}) = B_N \sin[\nu_N(x_{N-1} - x_N)] = B_N \sin[-\nu_N(l_N)] \quad (5.14)$$

$$\phi_N(x_{N-1}) = -B_N \sin[\nu_N(l_N)]. \quad (5.15)$$

De esta forma, la relación de continuidad de temperatura en la última interfaz resulta:

$$A_{N-1}\cos[\nu_{N-1}(l_{N-1})] + B_{N-1}\sen[\nu_{N-1}(l_{N-1})] + B_N\sen[\nu_N(l_N)] = 0. \quad (5.16)$$

Análogamente, para la continuidad de flujo de calor, la derivada de la solución en la capa j es:

$$\phi'_j(x) = -\nu_j A_j \sen[\nu_j(x - x_{i-1})] + \nu_j B_j \cos[\nu_j(x - x_{i-1})] \quad (5.17)$$

$$\phi'_j(x_i) = -\nu_j A_j \sen[\nu_j(l_j)] + \nu_j B_j \cos[\nu_j(l_j)] \quad (5.18)$$

Para la capa siguiente ($j + 1$):

$$\phi'_{j+1}(x) = -\nu_{j+1} A_{j+1} \sen[\nu_{j+1}(x - x_i)] + \nu_{j+1} B_{j+1} \cos[\nu_{j+1}(x - x_i)] \quad (5.19)$$

$$\phi'_{j+1}(x_i) = \nu_{j+1} B_{j+1}. \quad (5.20)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (5.8) se obtiene la relación de continuidad del flujo para las interfaces $i = 1, \dots, N - 2$:

$$\kappa_j[-\nu_j A_j \sen[\nu_j(l_j)] + \nu_j B_j \cos[\nu_j(l_j)]] - \kappa_{j+1}[\nu_{j+1} B_{j+1}] = 0, \quad (5.21)$$

Para la interfaz $i = N - 1$, dado que el coseno es una función par:

$$\phi'_{N-1}(x_{N-1}) = -\nu_{N-1} A_{N-1} \sen[\nu_{N-1}(l_{N-1})] + \nu_{N-1} B_{N-1} \cos[\nu_{N-1}(l_{N-1})] \quad (5.22)$$

y para la capa siguiente ($j = N$):

$$\phi'_N(x_{N-1}) = \nu_N B_N \cos[\nu_N(-l_N)] = \nu_N B_N \cos[\nu_N(l_N)] \quad (5.23)$$

por tanto, la relación de continuidad de flujo en la última interfaz se expresa como:

$$\kappa_{N-1}\nu_{N-1}[-A_{N-1}\sen(\nu_{N-1}l_{N-1}) + B_{N-1}\cos(\nu_{N-1}l_{N-1})] - \kappa_N[\nu_N B_N \cos(\nu_N(l_N))] = 0 \quad (5.24)$$

5.1.3. Construcción de matriz y ecuación característica

El conjunto de condiciones de interfaz se organiza en un sistema matricial de la forma $M(\lambda)A = 0$, donde el vector $A = (B_1, A_2, B_2, \dots, A_{N-1}, B_{N-1}, B_N)^T$ contiene las $2N - 2$ constantes independientes.

Para cada interfaz interna x_i , el acoplamiento entre las capas adyacentes j y $j + 1$ genera un bloque matricial M_j . De acuerdo con las ecuaciones de continuidad (5.7) y (5.8), los bloques para las interfaces intermedias ($i = 1, \dots, N - 2$):

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos(\nu_i l_i) & \sen(\nu_i l_i) & -1 & 0 \\ -\kappa_i \nu_i \sen(\nu_i l_i) & \kappa_i \nu_i \cos(\nu_i l_i) & 0 & -\kappa_{i+1} \nu_{i+1} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Para la interfaz final ($i = N - 1$), que vincula la penúltima capa con la última, el bloque matricial toma la forma:

$$M_{N-1} = \begin{pmatrix} \cos(\nu_{N-1} l_{N-1}) & \sen(\nu_{N-1} l_{N-1}) & 0 & \sen(\nu_N l_N) \\ -\kappa_{N-1} \nu_{N-1} \sen(\nu_{N-1} l_{N-1}) & \kappa_{N-1} \nu_{N-1} \cos(\nu_{N-1} l_{N-1}) & 0 & -\kappa_N \nu_N \cos(\nu_N l_N) \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

La matriz completa $M(\lambda)$ se construye ensamblando estos bloques de manera solapada, ya que cada bloque M_i involucra simultáneamente los coeficientes (A_j, B_j) y (A_{j+1}, B_{j+1}) . Esta estructura escalonada se esquematiza a continuación:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

cuyo determinante define la ecuación característica del problema:

$$\det M(\lambda) = 0 \quad (5.28)$$

Las raíces de esta ecuación proporcionan los valores propios λ_n . Es importante notar que la dependencia de $M(\lambda)$ con respecto a λ no es lineal, debido a la presencia de funciones trigonométricas en los argumentos $\nu_j l_j$.

Ya determinados los valores propios, los coeficientes A_j, B_j se obtienen resolviendo el sistema para cada valor propio λ_n , la función propia $X(x)$ se define por tramos en el intervalo (a, b) :

$$X(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = B_1 \sin[\nu_1(x - x_0)], & a = x_0 < x < x_1, \\ \phi_2(x) = A_2 \cos[\nu_2(x - x_1)] + B_2 \sin[\nu_2(x - x_1)], & x_1 < x < x_2, \\ \vdots & \\ \phi_j(x) = A_j \cos[\nu_j(x - x_{j-1})] + B_j \sin[\nu_j(x - x_{j-1})], & x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \vdots & \\ \phi_N(x) = B_N \sin[\nu_N(x - x_N)], & x_{N-1} < x < b \end{cases} \quad (5.29)$$

5.1.4. De la matriz global a la ecuación residual

Aunque teóricamente los valores propios se obtiene mediante el determinante de la matriz global, para la implementación en Python se optó por un enfoque que aprovecha la continuidad térmica entre capas. Al arrastrar la información desde la frontera izquierda hasta la derecha, el problema se simplifica de un sistema matricial pesado al problema de resolver una única ecuación en la interfaz final ($i = N - 1$). La validación de la existencia de los valores propios λ_n recae en la continuidad del flujo de calor evaluada en esta última interfaz, definiendo la siguiente ecuación cracterística generalizada:

$$-A_{N-1} \kappa_{N-1} \nu_{N-1} \sin(\nu_{N-1} l_{N-1}) + B_{N-1} \kappa_{N-1} \nu_{N-1} \cos(\nu_{N-1} l_{N-1}) - B_N \kappa_N \nu_N \cos(\nu_N l_N) = 0 \quad (5.30)$$

El desarrollo algebraico completo para la deducción de esta expresión se detalla en el Apéndice A.

Estas expresiones generalizadas constituyen el núcleo algorítmico del código desarrollado en Python. Este enfoque recursivo no solo sintetiza el álgebra requerida para los sistemas de multiples muestras, sino que garantiza una estabilidad numérica superior frente al cálculo tradicional de determinantes de gran escala, proporcionando un aporte respecto a la optimización computacional de esta investigación.

5.2. Valores y funciones propias para muestra homogénea

En esta sección se analizan los valores y funciones propias para el caso particular de un sistema con propiedades térmicas homogéneas por tramos. El objetivo es verificar que el enfoque semi-analítico matricial proporciona una solución de referencia. Esto permitirá validar el desempeño del algoritmo basado en el método SPPS, núcleo metodológico de esta investigación, previo a su escalamiento a sistemas con múltiples capas de muestra.

La validación inicia abordando el modelo base con una única capa de muestra ($n = 1$), conformando un sistema de tres regiones ($N = 3$) al incluir el soporte y el gas. Este esquema inicial se fundamenta en [23], donde se establece la base para la conducción térmica del modelo fotoacústico sin pérdida de generalidad bajo esta estructura.

5.2.1. Caso con una muestra homogénea

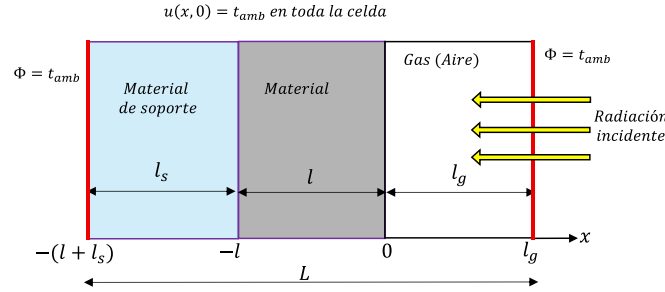


Figura 5.2: Representación esquemática de la geometría y condiciones de frontera del modelo base conformado por una capa de muestra ($n = 1$, $N = 3$).

Al aplicar las condiciones de continuidad de temperatura y flujo en las interfaces e incorporar las condiciones de Dirichlet en los extremos del dominio, el producto matricial $M(\lambda)A$ es:

$$\begin{pmatrix} \cos(\nu_1 l_1) & \text{sen}(\nu_1 l_1) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 \nu_1 \text{sen}(\nu_1 l_1) & \kappa_1 \nu_1 \cos(\nu_1 l_1) & 0 & -\kappa_2 \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\nu_2 l_2) & \text{sen}(\nu_2 l_2) & 0 & \text{sen}(\nu_3 l_3) \\ 0 & 0 & -\kappa_2 \nu_2 \text{sen}(\nu_2 l_2) & \kappa_2 \nu_2 \cos(\nu_2 l_2) & 0 & -\kappa_3 \nu_3 \cos(\nu_3 l_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Al simplificar el sistema anterior, se obtiene el siguiente vector de resultados:

$$\begin{pmatrix} B_1 \text{sen}(\nu_1 l_1) - A_2 \\ B_1 \kappa_1 \nu_1 \cos(\nu_1 l_1) - B_2 \kappa_2 \nu_2 \\ A_2 \cos(\nu_2 l_2) + B_2 \text{sen}(\nu_2 l_2) + B_3 \text{sen}(\nu_3 l_3) \\ -A_2 \kappa_2 \nu_2 \text{sen}(\nu_2 l_2) + B_2 \kappa_2 \nu_2 \cos(\nu_2 l_2) - B_3 \kappa_3 \nu_3 \cos(\nu_3 l_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando las condiciones de frontera ($A_1 = A_3 = 0$) y asumiendo la normalización $B_1 = 1$, las constantes restantes se calculan recursivamente:

$$\text{sen}(\nu_1 l_1) - A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \text{sen}(\nu_1 l_1) \quad (5.31)$$

$$\kappa_1 \nu_1 \cos(\nu_1 l_1) - B_2 \kappa_2 \nu_2 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{\kappa_1 \nu_1}{\kappa_2 \nu_2} \cos(\nu_1 l_1) \quad (5.32)$$

$$A_2 \cos(\nu_2 l_2) + B_2 \sin(\nu_2 l_2) + B_3 \sin(\nu_3 l_3) = 0$$

$$B_3 = -\frac{[A_2 \cos(\nu_2 l_2) + B_2 \sin(\nu_2 l_2)]}{\sin(\nu_3 l_3)} \quad (5.33)$$

Con los coeficientes definidos en función de los parámetros térmicos y λ , la última expresión establece la ecuación característica:

$$-A_2 \kappa_2 \nu_2 \sin(\nu_2 l_2) + B_2 \kappa_2 \nu_2 \cos(\nu_2 l_2) - B_3 \kappa_3 \nu_3 \cos(\nu_3 l_3) = 0 \quad (5.34)$$

Sus raíces dependen exclusivamente de λ , definiendo los valores propios. Al sustituirlos junto con los coeficientes, la función global $X(x)$ se define por tramos en el intervalo (a, b) como:

$$X(x) = \begin{cases} \phi_1(x) = \sin[\nu_1(x + l_s + l)], & -(l_s + l) < x < -l, \\ \phi_2(x) = A_2 \cos[\nu_2(x + l)] + B_2 \sin[\nu_2(x + l)], & -l < x < 0, \\ \phi_3(x) = B_3 \sin[\nu_3(x - l_g)], & 0 < x < l_g \end{cases} \quad (5.35)$$

Estos resultados coinciden con las expresiones planteadas en [23], validando la consistencia y exactitud del enfoque desarrollado.

5.2.2. Extensión para sistemas de 2 a 5 capas de muestra homogéneas

El análisis del modelo base se extiende a configuraciones multicapa de 2 a 5 muestras (ilustradas geoméricamente en las Figuras 5.3 a 5.6). Aplicando la estrategia de propagación secuencial descrita en la Sección 5.1.4 y asumiendo la normalización $B_1 = 1$, la información de temperatura y flujo de calor se transfiere recursivamente a través de las interfaces internas.

Al evaluar la última condición de frontera de Dirichlet en el límite sólido-gas, el sistema se reduce a la siguiente ecuación característica residual:

$$-A_m \kappa_m \nu_m \sin(\nu_m l_m) + B_m \kappa_m \nu_m \cos(\nu_m l_m) - B_g \kappa_g \nu_g \cos(\nu_g l_g) = 0 \quad (5.36)$$

donde m indica la última capa sólida y g la región del gas. Las raíces λ_n de esta ecuación definen exclusivamente los valores propios para cualquier configuración de N capas. El desarrollo algebraico completo para aislar los coeficientes A_j y B_j en cada interfaz se detalla en el Apéndice A.

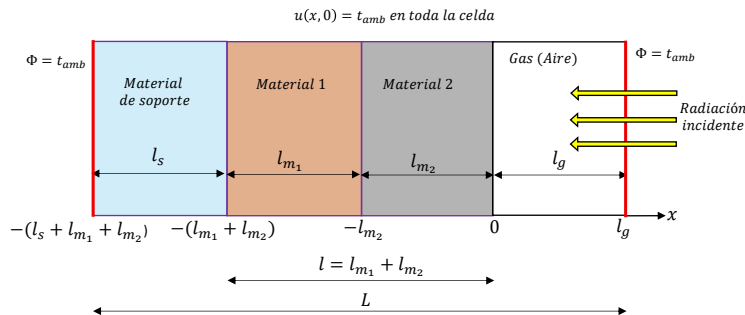


Figura 5.3: Representación esquemática de la geometría para el modelo con dos capas de muestra ($n = 2$, $N = 4$).

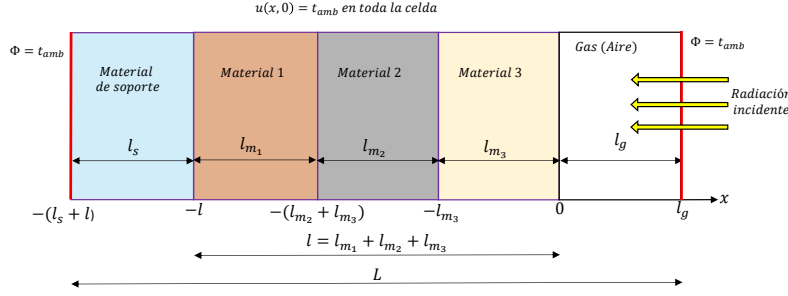


Figura 5.4: Configuración geométrica del modelo térmico con tres capas de muestra ($n = 3$, $N = 5$).

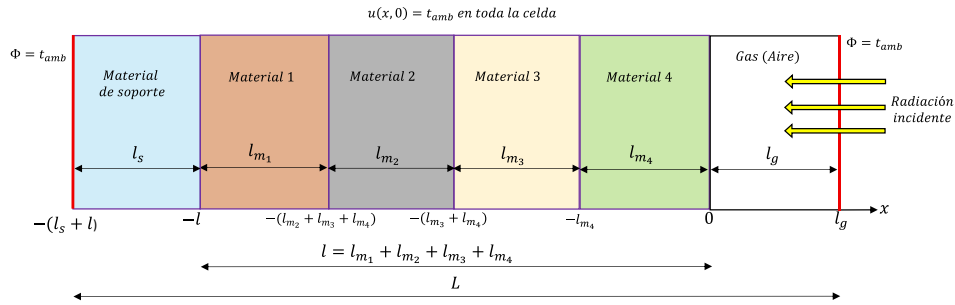


Figura 5.5: Geometría del modelo con cuatro capas de muestra ($n = 4$, $N = 6$).

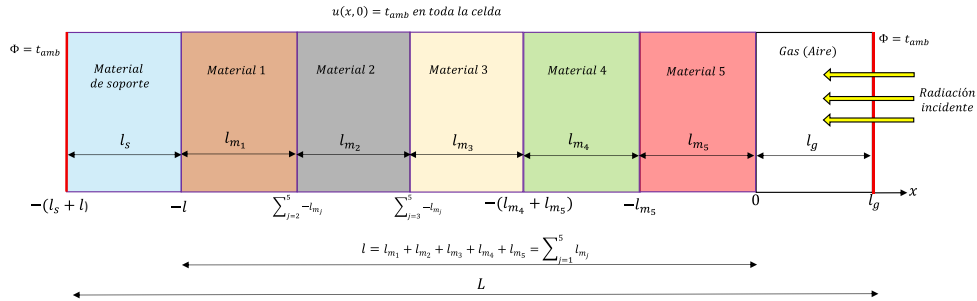


Figura 5.6: Esquema geométrico del modelo con cinco capas de muestra ($n = 5$, $N = 7$).

5.3. Discretización del problema de Sturm-Liouville mediante el método de diferencias finitas centradas

Para validar los resultados obtenidos mediante el método SPPS, se implementa una solución numérica adicional basada en el Método de Diferencias Finitas (DF), partiendo de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville (4.26).

El dominio $[a, b]$ se divide en una malla unidimensional de N nodos (x_i) , separados por un tamaño de paso constante $h = (b - a)/(N - 1)$. Debido a que las propiedades térmicas presentan cambios bruscos en las interfaces de los materiales, la técnica empleada se basa en el uso de

diferencias centradas, las cuales ofrecen un error de truncamiento del orden de h^2 [61].

Se aproxima la primera derivada en los puntos medios de cada intervalo ($x_{i\pm 1/2}$) mediante:

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{i+1/2} \approx \frac{X_{i+1} - X_i}{h} \quad (5.37)$$

Al multiplicar por la conductividad térmica evaluada en dicho punto medio, $\kappa_{i+1/2}$, se obtiene la expresión:

$$\kappa(x) \frac{dX}{dx} \approx \kappa_{i+1/2} \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{h} \right) \quad (5.38)$$

5.3.1. Tratamiento de las interfaces térmicas y ecuación nodal

Para evaluar correctamente la primera derivada multiplicada por la conductividad térmica ($\kappa(x) \frac{dX}{dx}$) en los puntos medios de la malla ($x_{i\pm 1/2}$), es importante no sobreestimar el flujo de calor. Por ello, la conductividad efectiva en la interfaz se calcula mediante la media armónica siguiendo la formula establecida en [69]:

$$\kappa_{i+1/2} = \frac{2\kappa_i \kappa_{i+1}}{\kappa_i + \kappa_{i+1}} \quad (5.39)$$

A diferencia de la media aritmética, que tiende a sobreestimar el flujo de calor al verse influenciada por los valores más altos de conductividad, la media armónica es físicamente consistente con la continuidad del flujo de calor y el concepto de resistencias térmicas en serie.

Aplicando nuevamente una diferencia centrada para la derivada exterior respecto a x en el nodo central i :

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dX}{dx} \right)_i \approx \frac{1}{h} \left[\kappa_{i+1/2} \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{h} \right) - \kappa_{i-1/2} \left(\frac{X_i - X_{i-1}}{h} \right) \right] \quad (5.40)$$

Al agrupar los coeficientes para cada valor nodal X_j , se obtiene la ecuación discreta completa para el nodo i :

$$\frac{\kappa_{i-1/2}}{h^2} X_{i-1} - \left(\frac{\kappa_{i-1/2} + \kappa_{i+1/2}}{h^2} \right) X_i + \frac{\kappa_{i+1/2}}{h^2} X_{i+1} + \lambda(c\rho)_i X_i = 0 \quad (5.41)$$

5.3.2. Representación Matricial del Sistema Discretizado

Para resolver el sistema acoplado de ecuaciones nodales, se aplican las condiciones de frontera de Dirichlet explícitas ($X_0 = 0$ y $X_{N-1} = 0$). Al ser valores conocidos, estos nodos se eliminan del vector de incógnitas, reduciendo la dimensión del problema a un sistema de $(N - 2) \times (N - 2)$ siguiendo lo establecido en [34].

El conjunto de ecuaciones resultantes se estructura de manera compacta como un problema algebraico de valores propios generalizado de la forma $\mathbf{A}X = \lambda \mathbf{B}X$. De la ecuación (5.41), se despeja el término que contiene a λ hacia el lado derecho multiplicado por (-1) :

$$-\frac{\kappa_{i-1/2}}{h^2} X_{i-1} + \left(\frac{\kappa_{i-1/2} + \kappa_{i+1/2}}{h^2} \right) X_i - \frac{\kappa_{i+1/2}}{h^2} X_{i+1} = \lambda(c\rho)_i X_i \quad (5.42)$$

A partir de los coeficientes de la ecuación (5.41), la Matriz A se define como una matriz tridigonal y simétrica, cuyas entradas están dadas por los acoplamientos térmicos adyacentes donde:

- Diagonal Principal ($A_{i,i}$): Es el coeficiente que multiplica a X_i .

$$A_{i,i} = \frac{\kappa_{i-1/2} + \kappa_{i+1/2}}{h^2}$$

- Entrada de la Diagonal Superior ($A_{i,i+1}$): Es el coeficiente que multiplica al vecino de la derecha, X_{i+1} .

$$A_{i,i+1} = -\frac{\kappa_{i+1/2}}{h^2}$$

- Entrada de la Diagonal Inferior ($A_{i,i-1}$): Es el coeficiente que multiplica al vecino de la izquierda, X_{i-1} .

$$A_{i,i-1} = -\frac{\kappa_{i-1/2}}{h^2}$$

La matriz resultante es simétrica y presenta la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} (\kappa_{1/2} + \kappa_{3/2}) & -\kappa_{3/2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa_{3/2} & (\kappa_{3/2} + \kappa_{5/2}) & -\kappa_{5/2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\kappa_{5/2} & (\kappa_{5/2} + \kappa_{7/2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\kappa_{N-3/2} \\ 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{N-3/2} & (\kappa_{N-3/2} + \kappa_{N-1/2}) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Por otro lado, la Matriz de Masa B contiene los términos de capacidad calorífica volumétrica $(c\rho)_i$. Al depender únicamente del nodo local, resulta en una matriz estrictamente diagonal:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (c\rho)_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (c\rho)_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (c\rho)_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (c\rho)_{N-2} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Finalmente, el vector propio X contiene las amplitudes de temperatura en los nodos interiores $X = [X_1, X_2, \dots, X_{N-2}]^T$. La resolución numérica de este sistema matricial permite extraer los valores propios λ , obteniendo un conjunto discreto de números reales y positivos que sirven como validación directa frente al método SPSS.

5.4. Definición de Propiedades Térmicas Variables

A menudo, la realidad física de los materiales multicapa suele presentar pequeñas variaciones en su conductividad y capacidad calorífica. Con el objetivo de evaluar la estabilidad y precisión del método SPSS ante heterogeneidades en el medio, se introducen variaciones espaciales continuas en la conductividad térmica $\kappa(x)$ y la capacidad calorífica volumétrica $(c\rho)(x)$. Estas variaciones se modelan mediante funciones de perturbación senoidales y de tipo tangente hiperbólica, definidas de forma general como:

$$\kappa(x) = \kappa_j [1 + \epsilon_{\kappa,j} \cdot f_j(x)], \quad (c\rho)(x) = (c\rho)_j [1 + \epsilon_{c,j} \cdot g_j(x)] \quad (5.45)$$

donde j representa la región del sistema (soporte, capas de muestra o gas). Los parámetros específicos considerados para cada configuración se detallan a continuación:

5.4.1. Funciones para el modelo de 2 capas de muestra

Se utilizan funciones de tipo senoidal y tangente hiperbólica para revisar la estabilidad inicial de los cálculos:

$$\kappa(x), (c\rho)(x) = \begin{cases} \kappa_s[1 + 0.03 \sin(x)], & (c\rho)_s[1 + 0.03 \cos(x)], & -4.0 \leq x < -2.0 \\ \kappa_{m1}[1 + 0.08 \cos(4x)], & (c\rho)_{m1}[1 + 0.08 \sin(4x)], & -2.0 \leq x < -1.0 \\ \kappa_{m2}[1 + 0.1 \tanh(x)], & (c\rho)_{m2}[1 + 0.1 \tanh(x)], & -1.0 \leq x < 0.0 \\ \kappa_g[1 + 0.02 \sin(2x)], & (c\rho)_g[1 + 0.02 \cos(2x)], & 0.0 \leq x \leq 2.0 \end{cases} \quad (5.46)$$

5.4.2. Funciones para el modelo de 3 capas de muestra

Se incluyen tres muestras para observar la respuesta del método ante un incremento en el número de interfaces:

$$\kappa(x), (c\rho)(x) = \begin{cases} \kappa_s[1 + 0.05 \sin(x)], & (c\rho)_s[1 + 0.05 \cos(x)], & -4.0 \leq x < -2.0 \\ \kappa_{m1}[1 + 0.08 \cos(4x)], & (c\rho)_{m1}[1 + 0.08 \sin(4x)], & -2.0 \leq x < -1.5 \\ \kappa_{m2}[1 + 0.1 \tanh(2x)], & (c\rho)_{m2}[1 + 0.1 \tanh(2x)], & -1.5 \leq x < -0.5 \\ \kappa_{m3}[1 + 0.1 \sin(4x)], & (c\rho)_{m3}[1 + 0.1 \cos(4x)], & -0.5 \leq x < 0.0 \\ \kappa_g[1 + 0.02 \sin(x)], & (c\rho)_g[1 + 0.02 \cos(x)], & 0.0 \leq x \leq 2.0 \end{cases} \quad (5.47)$$

5.4.3. Funciones para el modelo de 4 capas de muestra

Se proponen espesores más delgados para asegurar que el método mantiene su precisión en dominios reducidos:

$$\kappa(x), (c\rho)(x) = \begin{cases} \kappa_s[1 + 0.05 \sin(x)], & (c\rho)_s[1 + 0.05 \cos(x)], & -6.0 \leq x < -4.0 \\ \kappa_{m1}[1 + 0.08 \cos(2x)], & (c\rho)_{m1}[1 + 0.08 \sin(2x)], & -4.0 \leq x < -3.0 \\ \kappa_{m2}[1 + 0.1 \tanh(4x)], & (c\rho)_{m2}[1 + 0.1 \tanh(4x)], & -3.0 \leq x < -2.0 \\ \kappa_{m3}[1 + 0.1 \cos(2x)], & (c\rho)_{m3}[1 + 0.1 \sin(x)], & -2.0 \leq x < -1.0 \\ \kappa_{m4}[1 + 0.01 \cos(4x)], & (c\rho)_{m4}[1 + 0.01 \sin(2x)], & -1.0 \leq x < 0.0 \\ \kappa_g[1 + 0.05 \sin(x)], & (c\rho)_g[1 + 0.05 \cos(x)], & 0.0 \leq x \leq 2.0 \end{cases} \quad (5.48)$$

5.4.4. Funciones para el modelo de 5 capas de muestra

Para el caso con cinco metales, se implementan variaciones de mayor frecuencia ($8x$) para probar el límite de resolución numérica del algoritmo:

$$\kappa(x), (c\rho)(x) = \begin{cases} \kappa_s[1 + 0.05 \sin(x)], & (c\rho)_s[1 + 0.05 \cos(x)], & -4.5 \leq x < -2.5 \\ \kappa_{m1}[1 + 0.08 \cos(2x)], & (c\rho)_{m1}[1 + 0.08 \sin(2x)], & -2.5 \leq x < -2.0 \\ \kappa_{m2}[1 + 0.25 \tanh(2x)], & (c\rho)_{m2}[1 + 0.25 \tanh(2x)], & -2.0 \leq x < -1.5 \\ \kappa_{m3}[1 + 0.1 \sin(x)], & (c\rho)_{m3}[1 + 0.1 \cos(x)], & -1.5 \leq x < -1.0 \\ \kappa_{m4}[1 + 0.05 \sin(8x)], & (c\rho)_{m4}[1 + 0.05 \cos(8x)], & -1.0 \leq x < -0.5 \\ \kappa_{m5}[1 + 0.1 \sin(4x)], & (c\rho)_{m5}[1 + 0.1 \cos(4x)], & -0.5 \leq x < 0.0 \\ \kappa_g[1 + 0.05 \sin(x)], & (c\rho)_g[1 + 0.05 \cos(x)], & 0.0 \leq x \leq 2.0 \end{cases} \quad (5.49)$$

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos mediante el método SPPS, cuya validación principal reside en la precisión de los valores propios λ_n encontrados. Para evaluar el desempeño del método en los casos homogéneos, se comparan los resultados del SPPS y de DF directamente contra la solución exacta, permitiendo cuantificar el error debido a la discretización en DF frente al enfoque propuesto.

En las tablas 6.1 y 6.2 se detallan los coeficientes de absorción óptica (β) y las propiedades térmicas de los materiales empleados. Cabe destacar que, aunque se presentan valores para distintos espectros, para el desarrollo de los resultados de este trabajo se utilizó exclusivamente una longitud de onda de 632.8 nm.

Tabla 6.1: Coeficientes de absorción óptica β (mm^{-1}) para diferentes longitudes de onda.

Ref.	Material	450 nm	532 nm	632.8 nm	830 nm
[70]	Aluminio	1.5231×10^5	1.5164×10^5	1.4967×10^5	1.2433×10^5
[71]	Cobre	6.6824×10^4	6.1310×10^4	6.7679×10^4	7.9544×10^4
[71]	Cromo	8.7546×10^4	7.8658×10^4	6.5831×10^4	5.2765×10^4
[71]	Níquel	8.2198×10^4	8.2547×10^4	8.1624×10^4	7.5746×10^4
[71]	Oro	5.3491×10^4	5.2695×10^4	6.8139×10^4	7.8060×10^4
[72]	Paladio	9.0869×10^4	8.8410×10^4	8.5173×10^4	7.9713×10^4
[71]	Plata	7.3957×10^4	8.0996×10^4	8.4915×10^4	8.7820×10^4
[73]	Platino	1.0467×10^5	1.1505×10^5	1.2170×10^5	1.2749×10^5
[71]	Titanio	8.4851×10^4	7.9156×10^4	1.0131×10^5	6.0616×10^4
[51]	Vidrio	N/A ¹	N/A ¹	N/A ¹	N/A ¹
[51]	Aire	N/A ¹	N/A ¹	N/A ¹	N/A ¹

¹En el modelo R-G, se considera que el material de soporte y el gas no absorben luz.

²Los datos de la conductividad y difusividad se dan directos.

Tabla 6.2: Propiedades térmicas para los diferentes materiales estudiados.

Ref.	Material	$\kappa = (W/mm \cdot C)$	$c = (J/g \cdot C)$	$\rho = (g/cm^3)$	$\alpha = (mm^2/s)$	$e = J/(mm^2 \cdot C \cdot s^{1/2})$
[64]	Aluminio	0.210	0.900	2.699	86.452	2.258×10^{-2}
[64]	Cobre	0.401	0.385	8.930	116.636	3.713×10^{-2}
[64]	Cromo	0.069	0.461	7.190	20.847	1.512×10^{-2}
[64]	Níquel	0.061	0.460	8.880	14.860	1.578×10^{-2}
[64]	Oro	0.301	0.128	19.320	121.716	2.728×10^{-2}
[64]	Paladio	0.071	0.247	12.020	23.982	1.452×10^{-2}
[64]	Plata	0.419	0.234	10.491	170.679	3.207×10^{-2}
[64]	Platino	0.069	0.134	21.450	24.041	1.408×10^{-2}
[64]	Titanio	0.017	0.528	4.500	7.155	6.355×10^{-3}
[65]	Vidrio	1.1×10^{-3}	N/A ²	N/A ²	6.29×10^{-1}	1.387×10^{-3}
[65]	Aire	2.6×10^{-5}	N/A ²	N/A ²	21.8	5.569×10^{-6}

6.1. Resultados de valores y funciones propias para el caso general homogéneo

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el método SPPS en sistemas donde cada capa posee propiedades térmicas constantes. El objetivo es validar la precisión del algoritmo en la identificación de los valores propios (λ_n), los cuales constituyen la base de la solución para la componente no homogénea $f(x, t)$.

6.1.1. Resultados con 2 capas de muestra homogéneas

Para el desarrollo de los cálculos numéricos se emplean las propiedades térmicas y dimensiones mostradas en la Tabla 6.3. Estas configuraciones permiten evaluar el desempeño del método ante diferentes materiales y variaciones en los espesores de las capas.

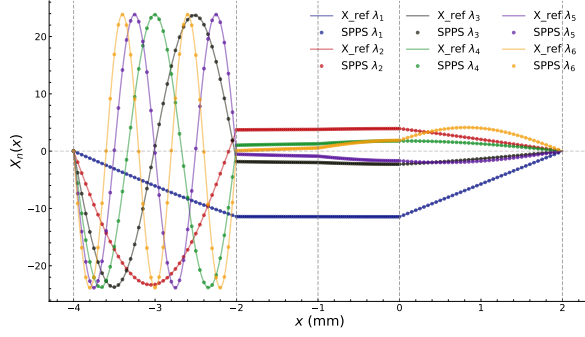
Material	Espesor (mm)	$\kappa(W/mm \cdot ^\circ C)$	$\alpha(mm^2/s)$
Vidrio	$l_s = 2$	$k_s = 1.1 \times 10^{-3}$	$\alpha_s = 6.29 \times 10^{-1}$
Cobre	1, 2	$k = 0.401$	$\alpha = 116.636$
Paladio	1, 2	$k = 0.071$	$\alpha = 23.982$
Platino	1, 5	$k = 0.069$	$\alpha = 24.041$
Oro	1, 5	$k = 0.301$	$\alpha = 121.716$
Aire	$l_g = 2$	$k_g = 2.6 \times 10^{-5}$	$\alpha_g = 21.8$

Tabla 6.3: Dimensiones para los elementos considerados de la celda de dos capas de muestra.

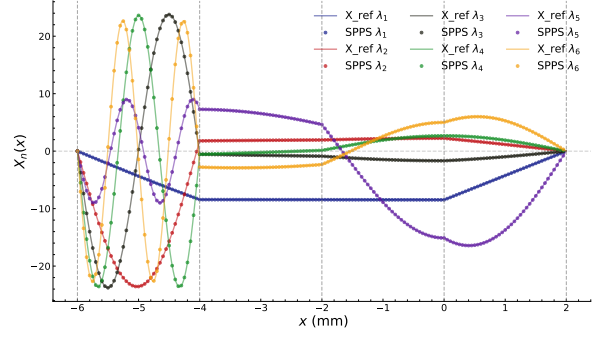
En las Tablas 6.4 a la 6.6 se reportan los primeros ocho valores obtenidos en cada simulación, donde pueden observarse errores absolutos del orden de 10^{-11} en los primeros modos.

Estos resultados se reflejan visualmente en la Figura 6.1, donde las funciones $X_n(x)$ reconstruidas mediante SPPS (puntos) se superponen con exactitud sobre las soluciones de referencia (lineas)

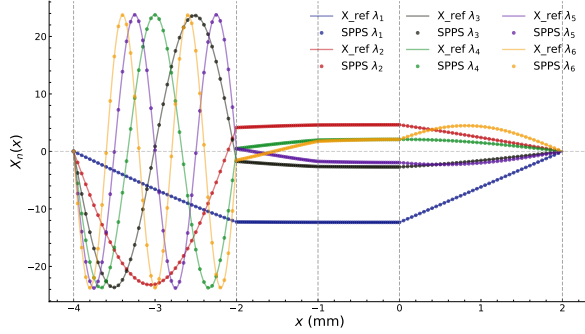
En los incisos (a) y (b) se muestra el comportamiento para el sistema de Cobre y Paladio, mientras que en los incisos (c) y (d) se presentan los resultados para Platino y Oro. En todos los casos, la coincidencia entre ambos métodos confirma que el algoritmo identifica correctamente las frecuencias espaciales y respeta las condiciones de continuidad en las interfaces, aun cuando el método SPSS no requiere considerar estas condiciones.



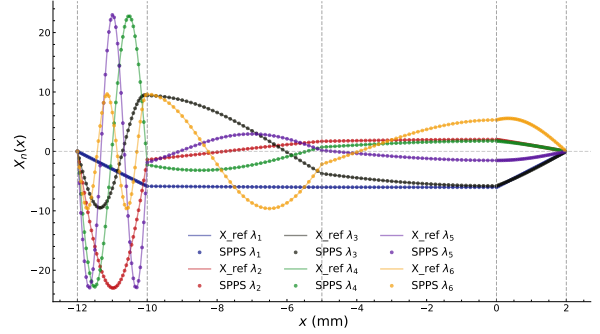
(a) Primeras 6 $X_n(x)$ para $l_s = 2 \text{ mm}$, $\text{Cobre} = 1 \text{ mm}$, $\text{Paladio} = 1 \text{ mm}$ y $l_g = 2 \text{ mm}$.



(b) Primeras 6 $X_n(x)$ para $l_s = 2 \text{ mm}$, $\text{Cobre} = 2 \text{ mm}$, $\text{Paladio} = 2 \text{ mm}$ y $l_g = 2 \text{ mm}$.



(c) Primeras 6 $X_n(x)$ para $l_s = 2 \text{ mm}$, $\text{Platino} = 1 \text{ mm}$, $\text{Oro} = 1 \text{ mm}$ y $l_g = 2 \text{ mm}$.



(d) Primeras 6 $X_n(x)$ para $l_s = 2 \text{ mm}$, $\text{Platino} = 5 \text{ mm}$, $\text{Oro} = 5 \text{ mm}$ y $l_g = 2 \text{ mm}$.

Figura 6.1: Comparación de las primeras seis funciones propias (X_n) calculadas por SPSS y la solución de referencia para sistemas de dos capas de muestra.

n	λ_{ref}	λ_{SPSS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0739813474	0.0739813474	2.95×10^{-11}	3.99×10^{-8}
2	1.7140645352	1.7140645352	4.69×10^{-11}	2.73×10^{-9}
3	6.3610573241	6.3610573245	3.74×10^{-10}	5.88×10^{-9}
4	14.0976598129	14.0976598142	1.34×10^{-9}	9.49×10^{-9}
5	24.9210140449	24.9210140485	3.64×10^{-9}	1.46×10^{-8}
6	38.8164100567	38.8164107383	6.82×10^{-7}	1.76×10^{-6}
7	53.7621760447	53.7621239960	5.20×10^{-5}	9.68×10^{-5}
8	55.7343759246	55.7344223265	4.64×10^{-5}	8.33×10^{-5}

Tabla 6.4: Comparativa de error en valores propios λ : Cu, Pd (1 mm); $l_s, l_g = 2 \text{ mm}$.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0401779768	0.0401779768	1.00×10^{-11}	2.49×10^{-8}
2	1.6279183716	1.6279183716	4.70×10^{-11}	2.89×10^{-9}
3	6.2523447823	6.2523447827	3.57×10^{-10}	5.71×10^{-9}
4	13.8975234847	13.8975234855	8.24×10^{-10}	5.93×10^{-9}
5	21.2456851170	21.2456851469	2.99×10^{-8}	1.41×10^{-7}
6	25.3201569271	25.3201568757	5.14×10^{-8}	2.03×10^{-7}
7	38.9467545033	38.9467518534	2.65×10^{-6}	6.80×10^{-6}
8	53.7918748875	53.7930838566	1.21×10^{-3}	2.25×10^{-3}

Tabla 6.5: Comparativa de error en valores propios λ : Cu, Pd (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0856491897	0.0856491897	4.90×10^{-11}	5.72×10^{-8}
2	1.7348707252	1.7348707252	2.93×10^{-11}	1.69×10^{-9}
3	6.3516014131	6.3516014135	4.24×10^{-10}	6.68×10^{-9}
4	14.0292093866	14.0292093886	1.99×10^{-9}	1.42×10^{-8}
5	24.7538692925	24.7538692746	1.79×10^{-8}	7.23×10^{-8}
6	38.4822180476	38.4822185034	4.56×10^{-7}	1.18×10^{-6}
7	53.7782125481	53.7784268038	2.14×10^{-4}	3.98×10^{-4}
8	55.0889670581	55.0886709846	2.96×10^{-4}	5.37×10^{-4}

Tabla 6.6: Comparativa de error en valores propios λ : Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0197849840	0.0197849840	1.92×10^{-11}	9.72×10^{-8}
2	1.4928976934	1.4928976934	2.15×10^{-11}	1.44×10^{-9}
3	3.7115380307	3.7115380308	5.08×10^{-11}	1.37×10^{-9}
4	6.4052212782	6.4052212789	7.46×10^{-10}	1.16×10^{-8}
5	13.7271322019	13.7271321933	8.64×10^{-9}	6.30×10^{-8}
6	19.2867834140	19.2867834373	2.33×10^{-8}	1.21×10^{-7}
7	25.1961676000	25.1961652278	2.37×10^{-6}	9.41×10^{-6}
8	38.0913386504	38.0937718113	2.43×10^{-3}	6.39×10^{-3}

Tabla 6.7: Comparativa de error en valores propios λ : Pt, Au (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

6.1.2. Resultados con 3 capas de muestra homogéneas

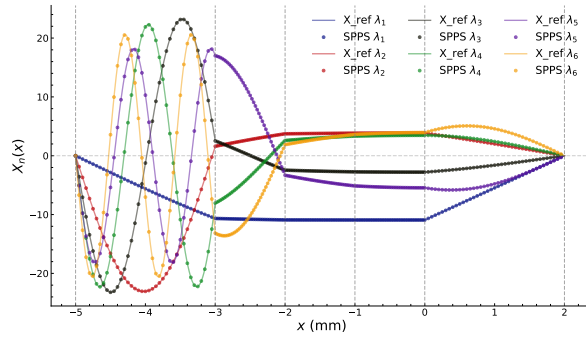
Para los resultados de las simulaciones con tres muestras homogéneas, se utilizan las propiedades y dimensiones detalladas en la Tabla 6.8.

La validación numérica de los valores propios se presenta de la tabla 6.9 a la 6.12. Al igual que en el caso de dos capas, los errores absolutos se mantienen en rangos muy bajos, con valores cercanos a 10^{-11} y 10^{-12} para los primeros modos. Estos datos confirman que el incremento en el número de capas de material no degrada la precisión del método SPPS.

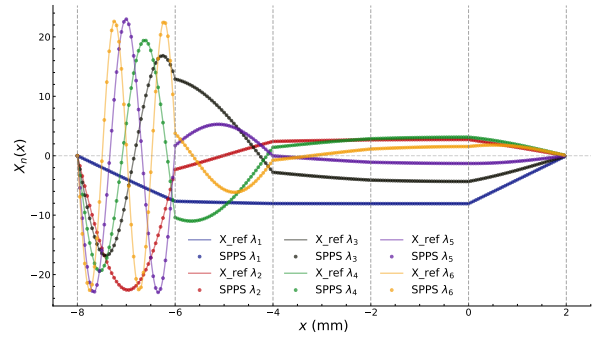
En la Figura 6.2, se presentan las primeras 6 funciones propias (X_n) para cada variante: a) y (b): corresponden al sistema de Titanio, Aluminio y Plata con espesores de 1.0 mm y 2.0 mm, respectivamente, mientras que (c) y (d): presentan los resultados para el sistema de Cobre, Oro y Níquel, con espesores de 1.0 mm y 5.0 mm.

Material	Espesor (mm)	$\kappa(W/mm \cdot ^\circ C)$	$\alpha(mm^2/s)$
Vidrio	$l_s = 2$	$k_s = 1.1 \times 10^{-3}$	$\alpha_s = 6.29 \times 10^{-1}$
Titanio	1, 2	$k = 0.017$	$\alpha = 7.155$
Aluminio	1, 2	$k = 0.210$	$\alpha = 86.452$
Plata	1, 2	$k = 0.419$	$\alpha = 170.679$
Cobre	1, 5	$k = 0.401$	$\alpha = 116.636$
Oro	1, 5	$k = 0.301$	$\alpha = 121.716$
Níquel	1, 5	$k = 0.061$	$\alpha = 14.860$
Aire	$l_g = 2$	$k_g = 2.6 \times 10^{-5}$	$\alpha_g = 21.8$

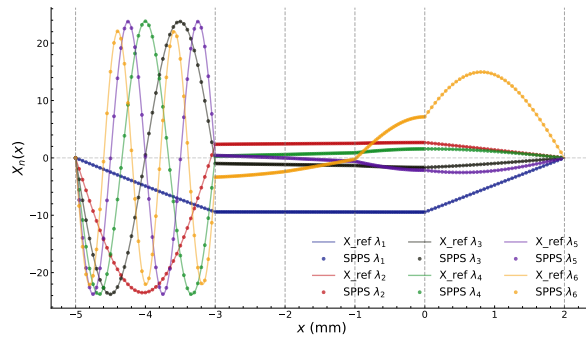
Tabla 6.8: Dimensiones para los elementos considerados de la celda de tres capas de muestra.



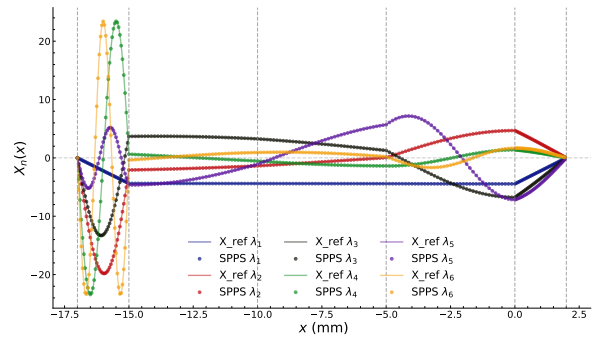
(a) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para $l_s = 2$ mm, *Titanio* = 1 mm, *Aluminio* = 1 mm, *Plata* = 1 mm y $l_g = 2$ mm.



(b) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para $l_s = 2$ mm, *Titanio* = 2 mm, *Aluminio* = 2 mm, *Plata* = 2 mm y $l_g = 2$ mm.



(c) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para $l_s = 2$ mm, *Cobre* = 1 mm, *Oro* = 1 mm, *Níquel* = 1 mm y $l_g = 2$ mm.



(d) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para $l_s = 2$ mm, *Cobre* = 5 mm, *Oro* = 5 mm, *Níquel* = 5 mm y $l_g = 2$ mm.

Figura 6.2: Comparación de las primeras seis funciones propias (X_n) para sistemas de tres capas de muestra.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0654482073	0.0654482073	2.94×10^{-11}	4.50×10^{-8}
2	1.6214632815	1.6214632815	4.98×10^{-11}	3.07×10^{-9}
3	5.9947638179	5.9947638183	3.55×10^{-10}	5.92×10^{-9}
4	12.8926928550	12.8926928565	1.46×10^{-9}	1.13×10^{-8}
5	20.2904373619	20.2904373637	1.81×10^{-9}	8.94×10^{-9}
6	27.6531594346	27.6531594587	2.41×10^{-8}	8.70×10^{-8}
7	40.0079837343	40.0079815860	2.15×10^{-6}	5.37×10^{-6}
8	53.7915586372	53.7918656792	3.07×10^{-4}	5.71×10^{-4}

Tabla 6.9: Comparativa de error en valores propios λ : Ti, Al, Ag (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0344980665	0.0344980665	1.66×10^{-11}	4.82×10^{-8}
2	1.4519551481	1.4519551481	2.35×10^{-11}	1.62×10^{-9}
3	4.6031854303	4.6031854303	4.43×10^{-11}	9.62×10^{-10}
4	7.3728749421	7.3728749428	7.25×10^{-10}	9.84×10^{-9}
5	14.1894652470	14.1894652452	1.81×10^{-9}	1.28×10^{-8}
6	24.1765441181	24.1765440840	3.41×10^{-8}	1.41×10^{-7}
7	33.7445858193	33.7445881497	2.33×10^{-6}	6.91×10^{-6}
8	40.9791002795	40.9790581961	4.21×10^{-5}	1.03×10^{-4}

Tabla 6.10: Comparativa de error en valores propios λ : Ti, Al, Ag (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0501573802	0.0501573802	8.28×10^{-12}	1.65×10^{-8}
2	1.6532169834	1.6532169835	6.03×10^{-11}	3.65×10^{-9}
3	6.2897963229	6.2897963233	3.74×10^{-10}	5.94×10^{-9}
4	14.0052606157	14.0052606172	1.54×10^{-9}	1.10×10^{-8}
5	24.7609012146	24.7609012322	1.76×10^{-8}	7.12×10^{-8}
6	38.0499215751	38.0499128322	8.74×10^{-6}	2.30×10^{-5}
7	43.5287118710	43.5287841299	7.23×10^{-5}	1.66×10^{-4}
8	53.8225251872	53.8206796057	1.85×10^{-3}	3.43×10^{-3}

Tabla 6.11: Comparativa de error en valores propios λ : Cu, Au, Ni (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0108883930	0.0108883930	3.78×10^{-11}	3.47×10^{-7}
2	1.4500642624	1.4500642624	1.96×10^{-11}	1.35×10^{-9}
3	1.8408898423	1.8408898424	5.67×10^{-11}	3.08×10^{-9}
4	6.1549866345	6.1549866324	2.14×10^{-9}	3.48×10^{-8}
5	8.5651221541	8.5651221756	2.15×10^{-8}	2.51×10^{-7}
6	13.9201117321	13.9201112427	4.89×10^{-7}	3.52×10^{-6}
7	17.5177804828	17.5177839082	3.43×10^{-6}	1.96×10^{-5}
8	24.8160300186	24.8158745087	1.56×10^{-4}	6.27×10^{-4}

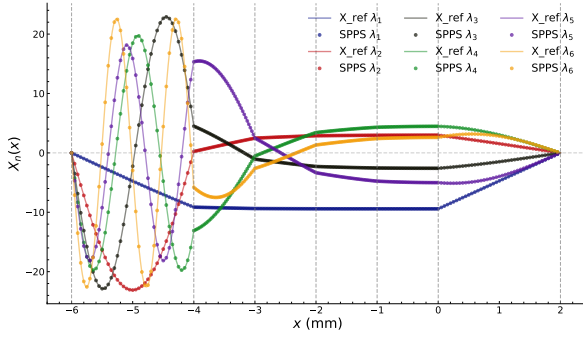
Tabla 6.12: Comparativa de error en valores propios λ : Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

6.1.3. Resultados con 4 capas de muestra homogéneas

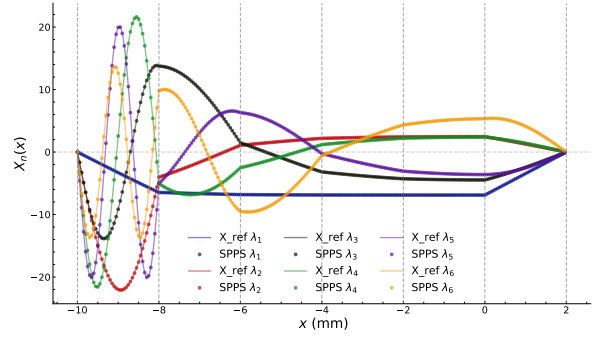
Análogamente para un sistema compuesto por cuatro capas. Las dimensiones y materiales utilizados se detallan en la Tabla 6.13. La validación numérica se presenta en las tablas 6.14 a la 6.17. Se observa que, incluso con cuatro capas de muestra, el error absoluto sigue manteniendo valores muy bajos, manteniéndose en el orden de 10^{-11} . Mientras que la figura 6.3 presenta la comparativa visual de las primeras seis funciones propias (X_n).

Material	Espesor (mm)	$\kappa(W/mm \cdot ^\circ C)$	$\alpha(mm^2/s)$
Vidrio	$l_s = 2$	$k_s = 1.1 \times 10^{-3}$	$\alpha_s = 6.29 \times 10^{-1}$
Titanio	1, 2	$k = 0.017$	$\alpha = 7.155$
Paladio	1, 2	$k = 0.071$	$\alpha = 23.982$
Aluminio	1, 2, 5	$k = 0.210$	$\alpha = 86.452$
Plata	1, 2	$k = 0.419$	$\alpha = 170.679$
Cobre	1, 5	$k = 0.401$	$\alpha = 116.636$
Oro	1, 5	$k = 0.301$	$\alpha = 121.716$
Cromo	1, 5	$k = 0.069$	$\alpha = 20.847$
Aire	$l_g = 2$	$k_g = 2.6 \times 10^{-5}$	$\alpha_g = 21.8$

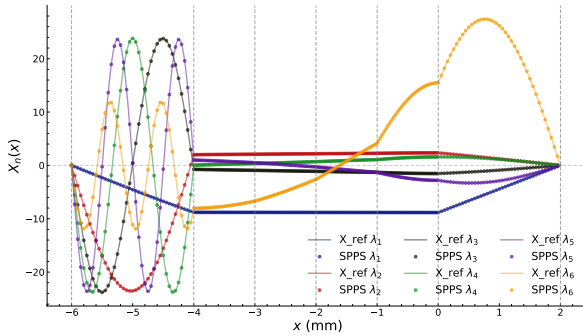
Tabla 6.13: Dimensiones para los elementos considerados de la celda de cuatro capas de muestra.



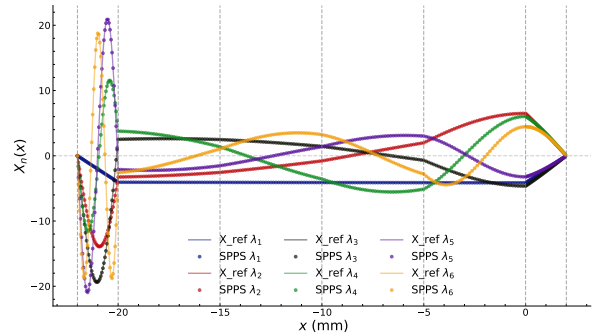
(a) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para *Ti, Pd, Al, Ag* (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.



(b) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para *Ti, Pd, Al, Ag* (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.



(c) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para *Cu, Au, Al, Cr* (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.



(d) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para *Cu, Au, Al, Cr* (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Figura 6.3: Comparación de las primeras seis funciones propias (X_n) para sistemas de cuatro capas de muestra.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0482568001	0.0482568001	3.21×10^{-11}	6.65×10^{-8}
2	1.5618638092	1.5618638092	3.24×10^{-11}	2.07×10^{-9}
3	5.8232313363	5.8232313365	2.45×10^{-10}	4.20×10^{-9}
4	11.9026537204	11.9026537227	2.33×10^{-9}	1.96×10^{-8}
5	17.1075032962	17.1075032867	9.53×10^{-9}	5.57×10^{-8}
6	25.8698380236	25.8698382286	2.05×10^{-7}	7.93×10^{-7}
7	38.9059461870	38.9059309943	1.52×10^{-5}	3.90×10^{-5}
8	53.7192409125	53.7722214796	5.30×10^{-2}	9.86×10^{-2}

Tabla 6.14: Comparativa de error en valores propios λ : Ti, Pd, Al, Ag (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0247992146	0.0247992146	4.69×10^{-11}	1.89×10^{-7}
2	1.3765219958	1.3765219959	6.36×10^{-11}	4.62×10^{-9}
3	3.6827598142	3.6827598142	5.82×10^{-12}	1.58×10^{-10}
4	6.6818760305	6.6818760312	6.81×10^{-10}	1.02×10^{-8}
5	13.2324997441	13.2324997602	1.61×10^{-8}	1.21×10^{-7}
6	16.4285441065	16.4285438982	2.08×10^{-7}	1.27×10^{-6}
7	24.7156989138	24.7157069156	8.00×10^{-6}	3.24×10^{-5}
8	35.7778561909	35.7763499317	1.51×10^{-3}	4.21×10^{-3}

Tabla 6.15: Comparativa de error en valores propios λ : Ti, Pd, Al, Ag (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0437748179	0.0437748179	3.68×10^{-11}	8.41×10^{-8}
2	1.6374105509	1.6374105510	6.24×10^{-11}	3.81×10^{-9}
3	6.2697443706	6.2697443710	4.39×10^{-10}	7.00×10^{-9}
4	13.9732476299	13.9732476309	1.01×10^{-9}	7.19×10^{-9}
5	24.6644657582	24.6644657279	3.03×10^{-8}	1.23×10^{-7}
6	35.2177507096	35.2177538929	3.18×10^{-6}	9.04×10^{-6}
7	39.7994645504	39.7994580894	6.46×10^{-6}	1.62×10^{-5}
8	53.8059679605	53.8057765968	1.91×10^{-4}	3.56×10^{-4}

Tabla 6.16: Comparativa de error en valores propios λ : Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0093781591	0.0093781591	4.87×10^{-15}	5.19×10^{-11}
2	1.3271721413	1.3271721413	4.81×10^{-11}	3.63×10^{-9}
3	1.6833324186	1.6833324187	6.86×10^{-11}	4.08×10^{-9}
4	5.5681322419	5.5681322360	5.91×10^{-9}	1.06×10^{-7}
5	6.4077507291	6.4077507437	1.46×10^{-8}	2.28×10^{-7}
6	13.5627727536	13.5627708348	1.92×10^{-6}	1.41×10^{-5}
7	14.6292471515	14.6292501013	2.95×10^{-6}	2.02×10^{-5}
8	23.5241687264	23.5242812733	1.13×10^{-4}	4.78×10^{-4}

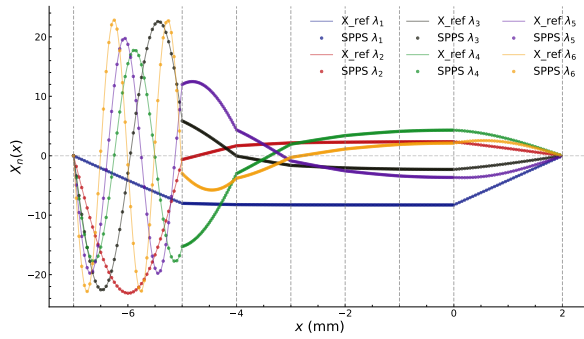
Tabla 6.17: Comparativa de error en valores propios λ : Cu, Au, Al, Cr (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

6.1.4. Resultados con 5 capas de muestra homogéneas

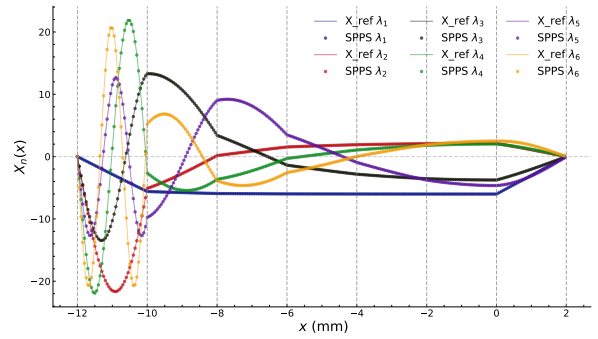
Finalmente, se analiza el sistema de cinco capas. Esta configuración permite validar el método SPPS ante una acumulación considerable de interfaces y condiciones de continuidad. Las propiedades y dimensiones para este caso se detallan en la Tabla 6.18. Los resultados en las tablas 6.19 a la 6.22 muestran errores absolutos de 10^{-11} a 10^{-12} en los primeros modos, confirmando que la precisión del método SPPS no se degrada ante el incremento de capas. De igual forma, la Figura 6.4 presenta la comparativa visual de las primeras seis funciones propias (X_n).

Material	Espesor (mm)	$\kappa(W/mm \cdot ^\circ C)$	$\alpha(mm^2/s)$
Vidrio	$l_s = 2$	$k_s = 1.1 \times 10^{-3}$	$\alpha_s = 6.29 \times 10^{-1}$
Titanio	1, 2, 5	$k = 0.017$	$\alpha = 7.155$
Platino	1, 2, 5	$k = 0.069$	$\alpha = 24.041$
Aluminio	1, 2, 5	$k = 0.210$	$\alpha = 86.452$
Oro	1, 2, 5	$k = 0.301$	$\alpha = 121.716$
Cobre	1, 2, 5	$k = 0.401$	$\alpha = 116.636$
Plata	1, 2, 5	$k = 0.419$	$\alpha = 170.679$
Cromo	1, 2, 5	$k = 0.069$	$\alpha = 20.847$
Aire	$l_g = 2$	$k_g = 2.6 \times 10^{-5}$	$\alpha_g = 21.8$

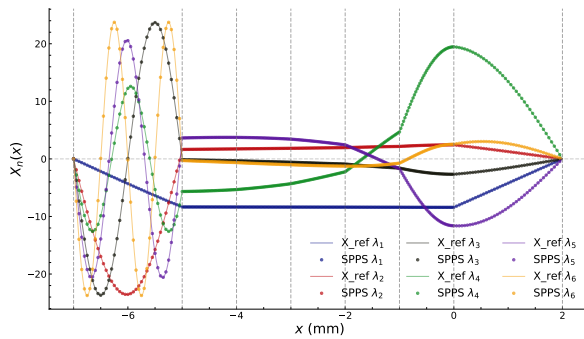
Tabla 6.18: Dimensiones para los elementos considerados de la celda de cinco capas de muestra.



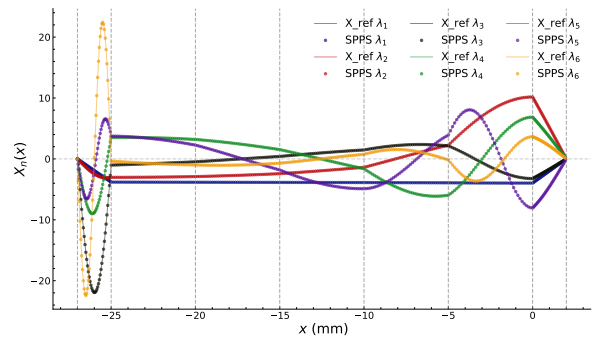
(a) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Ti, Pt, Al, Au, Cu (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.



(b) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.



(c) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Ag, Au, Al, Cr, Ti (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.



(d) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Ag, Au, Al, Cr, Ti (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Figura 6.4: Comparativa primeras seis funciones propias (X_n) sistemas de cinco capas de muestra.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0371354116	0.0371354116	2.74×10^{-11}	7.39×10^{-8}
2	1.5248017925	1.5248017925	2.55×10^{-11}	1.67×10^{-9}
3	5.7007087820	5.7007087822	1.87×10^{-10}	3.27×10^{-9}
4	11.0773286174	11.0773286196	2.20×10^{-9}	1.99×10^{-8}
5	15.9653350282	15.9653350240	4.24×10^{-9}	2.66×10^{-8}
6	25.3522251581	25.3522250721	8.60×10^{-8}	3.39×10^{-7}
7	38.0110231758	38.0110259841	2.81×10^{-6}	7.39×10^{-6}
8	47.7719432459	47.7724621479	5.19×10^{-4}	1.09×10^{-3}

Tabla 6.19: Comparativa de error en valores propios λ : Ti, Pt, Al, Au, Cu (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0187813735	0.0187813735	3.64×10^{-11}	1.94×10^{-7}
2	1.3260671859	1.3260671859	1.13×10^{-11}	8.48×10^{-10}
3	3.2505134827	3.2505134828	5.86×10^{-11}	1.80×10^{-9}
4	6.4482847101	6.4482847105	3.86×10^{-10}	5.98×10^{-9}
5	11.4980593663	11.4980593514	1.49×10^{-8}	1.30×10^{-7}
6	14.7345825439	14.7345826816	1.38×10^{-7}	9.35×10^{-7}
7	24.2507192604	24.2507061225	1.31×10^{-5}	5.42×10^{-5}
8	31.1672679405	31.1675852414	3.17×10^{-4}	1.02×10^{-3}

Tabla 6.20: Comparativa de error en valores propios λ : Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0394473888	0.0394473888	2.91×10^{-11}	7.37×10^{-8}
2	1.6217573705	1.6217573706	5.31×10^{-11}	3.28×10^{-9}
3	6.2193093278	6.2193093281	3.01×10^{-10}	4.85×10^{-9}
4	12.6189099947	12.6189099945	1.71×10^{-10}	1.35×10^{-9}
5	14.4982255951	14.4982255993	4.25×10^{-9}	2.93×10^{-8}
6	24.8783655344	24.8783653427	1.92×10^{-7}	7.71×10^{-8}
7	38.5333476306	38.5334299819	8.24×10^{-5}	2.14×10^{-4}
8	47.5503625850	47.5462713983	4.09×10^{-3}	8.60×10^{-3}

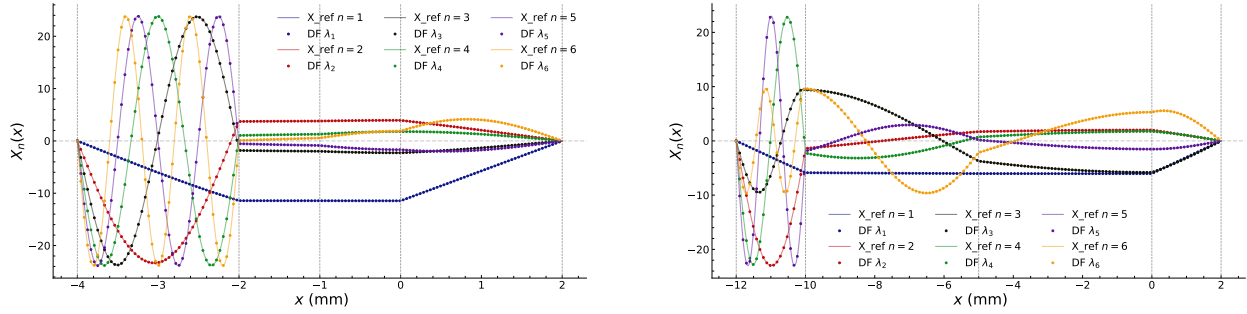
Tabla 6.21: Comparativa de error en valores propios λ : Ag, Au, Al, Cr, Ti (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0083351146	0.0083351146	4.14×10^{-11}	4.97×10^{-7}
2	0.5217225296	0.5217225296	1.90×10^{-11}	3.65×10^{-9}
3	1.5064794336	1.5064794336	2.18×10^{-11}	1.45×10^{-9}
4	1.9724986452	1.9724986452	7.03×10^{-12}	3.56×10^{-10}
5	5.0653826910	5.0653827561	6.51×10^{-8}	1.28×10^{-6}
6	6.2397954068	6.2397948181	5.89×10^{-7}	9.43×10^{-6}
7	7.6959154865	7.6959175053	2.02×10^{-6}	2.62×10^{-5}
8	13.4685140390	13.4680310890	4.83×10^{-4}	3.59×10^{-3}

Tabla 6.22: Comparativa de error en valores propios λ : Ag, Au, Al, Cr, Ti (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

6.2. Resultados mediante el método de diferencias finitas centradas

En esta sección se presentan los resultados obtenidos mediante el esquema de Diferencias Finitas. En las tablas 6.23 y 6.24 se reportan los errores obtenidos para el caso de dos capas, donde se observa que el error absoluto (Ea) se sitúa predominantemente en el orden de 10^{-4} a 10^{-6} . Estos resultados se complementan con la Figura 6.5, donde se aprecia la reconstrucción de las funciones propias.



(a) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Cu,Pd (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

(b) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Pt,Au (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Figura 6.5: Comparativa de las primeras seis (X_n) obtenidas mediante DF y la solución de referencia para sistemas de dos capas de muestra.

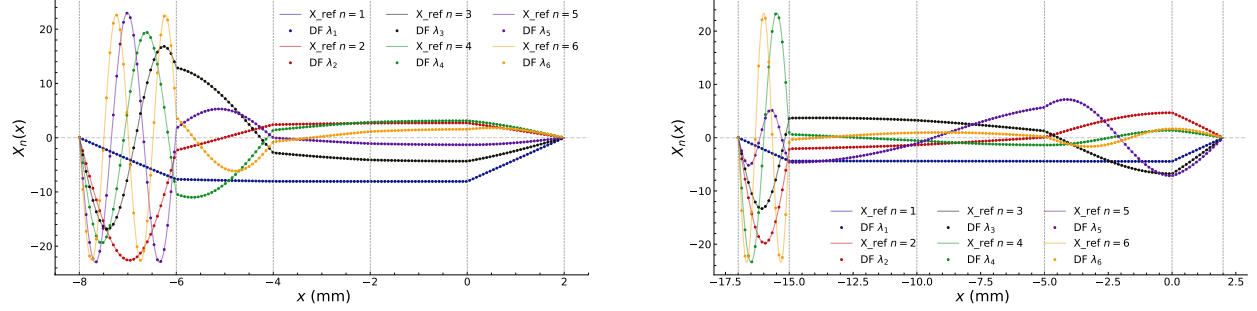
n	λ_{ref}	λ_{DF}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0739813474	0.0739832235	1.88×10^{-6}	2.54×10^{-3}
2	1.7140645352	1.7141062075	4.17×10^{-5}	2.43×10^{-3}
3	6.3610573241	6.3612149551	1.58×10^{-4}	2.48×10^{-3}
4	14.0976598129	14.0980105727	3.51×10^{-4}	2.49×10^{-3}
5	24.9210140449	24.9216347579	6.21×10^{-4}	2.49×10^{-3}
6	38.8164100567	38.8173764102	9.66×10^{-4}	2.49×10^{-3}
7	53.7621760447	53.7603052787	1.87×10^{-3}	3.48×10^{-3}
8	55.7343759246	55.7357498429	1.37×10^{-3}	2.47×10^{-3}

Tabla 6.23: Comparativa de error (DF vs. Referencia) para Cu,Pd (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{DF}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0197849840	0.0197855180	5.34×10^{-7}	2.70×10^{-3}
2	1.4928976934	1.4929742875	7.66×10^{-5}	5.13×10^{-3}
3	3.7115380307	3.7115888726	5.08×10^{-5}	1.37×10^{-3}
4	6.4052212782	6.4055449071	3.24×10^{-4}	5.05×10^{-3}
5	13.7271322019	13.7278359395	7.04×10^{-4}	5.13×10^{-3}
6	19.2867834140	19.2870528168	2.69×10^{-4}	1.40×10^{-3}
7	25.1961676000	25.1974423279	1.27×10^{-3}	5.06×10^{-3}
8	38.0913386504	38.0931154440	1.78×10^{-3}	4.66×10^{-3}

Tabla 6.24: Comparativa de error (DF vs. Referencia) para Pt, Au (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Al incrementar la complejidad al sistema de tres capas, los resultados se detallan en las tablas 6.25 y 6.26, junto con la Figura 6.6. Se puede notar que a diferencia del método SPPS, el error en DF tiende a ser más sensible a la ubicación de las interfaces y a la densidad de la malla, lo que se refleja en el valor de los errores.



(a) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Ti, Al, Ag (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

(b) Comparativa de las 6 primeras funciones propias Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Figura 6.6: Comparativa de las primeras seis (X_n) obtenidas mediante DF y la solución de referencia para sistemas de tres capas de muestra.

n	λ_{ref}	λ_{DF}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0344980665	0.0344978037	2.63×10^{-7}	7.62×10^{-4}
2	1.4519551481	1.4519730099	1.79×10^{-5}	1.23×10^{-3}
3	4.6031854303	4.6031962850	1.09×10^{-5}	2.36×10^{-4}
4	7.3728749421	7.3729230011	4.81×10^{-5}	6.52×10^{-4}
5	14.1894652470	14.1896510778	1.86×10^{-4}	1.31×10^{-3}
6	24.1765441181	24.1768434975	2.99×10^{-4}	1.24×10^{-3}
7	33.7445858193	33.7446177423	3.19×10^{-5}	9.46×10^{-5}
8	40.9791002795	40.9794277054	3.27×10^{-4}	7.99×10^{-4}

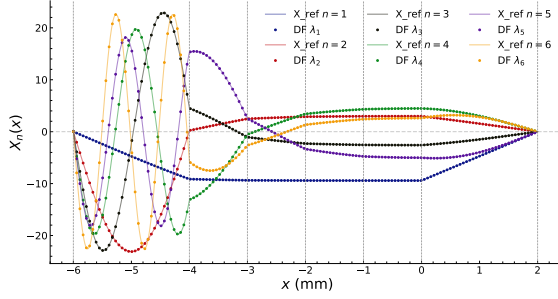
Tabla 6.25: Comparativa de error (DF vs. Referencia) para Ti, Al, Ag (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{DF}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0108883930	0.0108885728	1.80×10^{-7}	1.65×10^{-3}
2	1.4500642624	1.4500721950	7.93×10^{-6}	5.47×10^{-4}
3	1.8408898423	1.8409065484	1.67×10^{-5}	9.08×10^{-4}
4	6.1549866345	6.1550043918	1.78×10^{-5}	2.89×10^{-4}
5	8.5651221541	8.5652210878	9.89×10^{-5}	1.16×10^{-3}
6	13.9201117321	13.9201518532	4.01×10^{-5}	2.88×10^{-4}
7	17.5177804828	17.5179835437	2.03×10^{-4}	1.16×10^{-3}
8	24.8160300186	24.8160969410	6.69×10^{-5}	2.70×10^{-4}

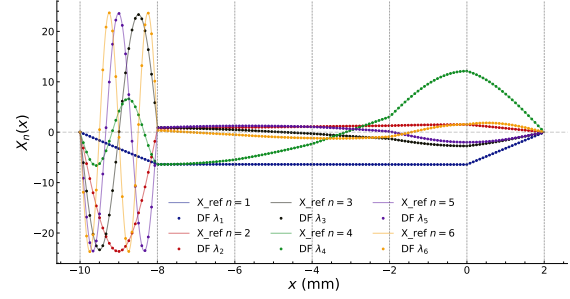
Tabla 6.26: Comparativa de error (DF vs. Referencia) para Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Finalmente, se presentan los resultados para los sistemas con mayor numero de capas. En las tablas 6.27 y 6.28 (correspondientes a la Figura 6.7 para cuatro capas), y las tablas 6.29 y 6.30 (correspondientes a la Figura 6.8 para cinco capas).

Aunque el método de Diferencias Finitas logra seguir la tendencia de la solución de referencia, la precisión obtenida es inferior a la del método SPSS. Mientras que el SPSS reportó errores del orden de 10^{-11} , el método de DF se mantiene en el rango de 10^{-4} y 10^{-6} .



(a) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Ti-Pd-Al-Ag (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.



(b) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Cu-Au-Al-Cr (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

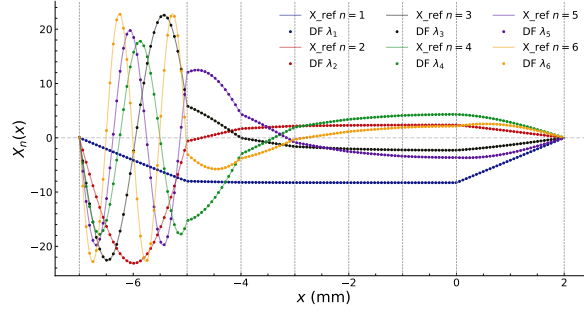
Figura 6.7: Comparativa de las primeras seis (X_n) obtenidas mediante DF y la solución de referencia para sistemas de cuatro capas de muestra.

n	λ_{ref}	λ_{DF}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0482568001	0.0482572667	4.67×10^{-7}	9.67×10^{-4}
2	1.5618638092	1.5618773879	1.36×10^{-5}	8.69×10^{-4}
3	5.8232313363	5.8232798965	4.86×10^{-5}	8.34×10^{-4}
4	11.9026537204	11.9026970018	4.33×10^{-5}	3.64×10^{-4}
5	17.1075032962	17.1075292555	2.60×10^{-5}	1.52×10^{-4}
6	25.8698380236	25.8700402573	2.02×10^{-4}	7.82×10^{-4}
7	38.9059461870	38.9062850021	3.39×10^{-4}	8.71×10^{-4}
8	53.7192409125	53.7197394789	4.99×10^{-4}	9.28×10^{-4}

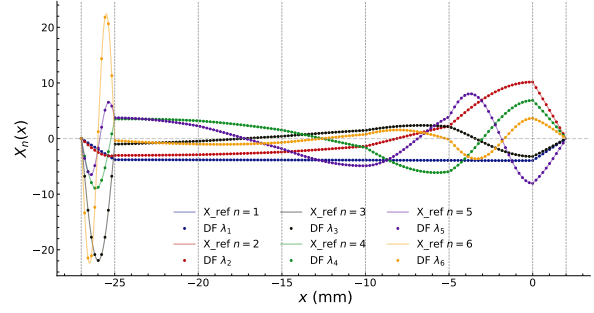
Tabla 6.27: Comparativa de valores propios y análisis de error (Diferencias Finitas vs. Referencia) espesores $l_s = 2$ mm, *Titanio* = 1 mm, *Paladio* = 1 mm, *Aluminio* = 1 mm, *Plata* = 1 mm y $l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{DF}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0229116163	0.0229121646	5.48×10^{-7}	2.39×10^{-3}
2	1.5826422254	1.5827045292	6.23×10^{-5}	3.94×10^{-3}
3	6.1265444593	6.1267806709	2.36×10^{-4}	3.86×10^{-3}
4	9.0556832652	9.0557943803	1.11×10^{-4}	1.23×10^{-3}
5	14.0803316295	14.0808834387	5.52×10^{-4}	3.92×10^{-3}
6	24.7721640413	24.7731408683	9.77×10^{-4}	3.94×10^{-3}
7	35.4466987507	35.4472312847	5.33×10^{-4}	1.50×10^{-3}
8	39.3892196878	39.3906245196	1.40×10^{-3}	3.57×10^{-3}

Tabla 6.28: Comparativa de valores propios y análisis de error (Diferencias Finitas vs. Referencia) espesores $l_s = 2$ mm, *Cobre* = 2 mm, *Oro* = 2 mm, *Aluminio* = 2 mm, *Cromo* = 2 mm y $l_g = 2$ mm.



(a) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Ti, Pt, Al, Au, Cu (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.



(b) Comparativa de las 6 primeras funciones propias para Ag, Au, Al, Cr, Ti (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Figura 6.8: Comparativa de las primeras seis (X_n) obtenidas mediante DF y la solución de referencia para sistemas de cinco capas de muestra.

n	λ_{ref}	λ_{DF}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0371354116	0.0371362643	8.53×10^{-7}	2.30×10^{-3}
2	1.5248017925	1.5248491254	4.73×10^{-5}	3.10×10^{-3}
3	5.7007087820	5.7008802429	1.71×10^{-4}	3.01×10^{-3}
4	11.0773286174	11.0775772930	2.49×10^{-4}	2.24×10^{-3}
5	15.9653350282	15.9657404609	4.05×10^{-4}	2.54×10^{-3}
6	25.3522251581	25.3529984361	7.73×10^{-4}	3.05×10^{-3}
7	38.0110231758	38.0121392766	1.12×10^{-3}	2.94×10^{-3}
8	47.7719432459	47.7727789808	8.36×10^{-4}	1.75×10^{-3}

Tabla 6.29: Comparativa error (DF vs. Referencia) para Ti, Pt, Al, Au, Cu (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{ref}	λ_{DF}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0083351146	0.0083353381	2.24×10^{-7}	2.68×10^{-3}
2	0.5217225296	0.5217110761	1.15×10^{-5}	2.20×10^{-3}
3	1.5064794336	1.5065719732	9.25×10^{-5}	6.14×10^{-3}
4	1.9724986452	1.9724797025	1.89×10^{-5}	9.60×10^{-4}
5	5.0653826910	5.0652999057	8.28×10^{-5}	1.63×10^{-3}
6	6.2397954068	6.2402028303	4.07×10^{-4}	6.53×10^{-3}
7	7.6959154865	7.6957692854	1.46×10^{-4}	1.90×10^{-3}
8	13.4685140390	13.4688330536	3.19×10^{-4}	2.37×10^{-3}

Tabla 6.30: Comparativa error (DF vs. Referencia) para Ag, Au, Al, Cr, Ti (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

6.3. Resultados con término no homogéneo $f(x, t)$

Una vez validada la precisión del método SPPS en el cálculo de los valores propios, se procede a obtener la solución para la temperatura ante una fuente de calor externa. Para asegurar la validez física de las simulaciones y evitar inconsistencias derivadas de la potencia absoluta de la fuente, los resultados se expresan en términos de la temperatura normalizada $u(x, t)/I_0$ con un valor de $I_0 = 0.01 \text{ W/mm}^2$ para todas las simulaciones presentadas a continuación.

En la Figura 6.9 se presentan las componentes que integran la solución completa para un sistema de dos capas. La solución total es el resultado de la superposición de tres partes: la transitoria (u_{trans}), donde las curvas azules representan los primeros instantes de tiempo, donde el material comienza a absorber energía, evolucionando gradualmente hacia una estabilización (curvas rojas) conforme el término transitorio se desvanece, la estacionaria (u_{DC}), que representa el calentamiento promedio; y la oscilante (u_{AC}), que responde a la modulación de la fuente.

Es importante notar la forma característica de la componente u_{AC} . Esta representa una onda térmica que se propaga a través de los materiales. Su forma se debe a dos factores físicos principales:

- Amortiguamiento: Al ser un proceso difusivo, la amplitud de la oscilación disminuye a medida que el calor se aleja de la superficie iluminada. Esto se observa como una pérdida de fuerza en las ondas conforme avanzan en el eje x .
- Continuidad en interfaces: En los puntos donde los materiales cambian (interfaces), la curva cambia de pendiente pero se mantiene continua. Esto ocurre porque el flujo de calor y la temperatura deben ser los mismos en ambos lados de la unión para respetar las leyes de la termodinámica.

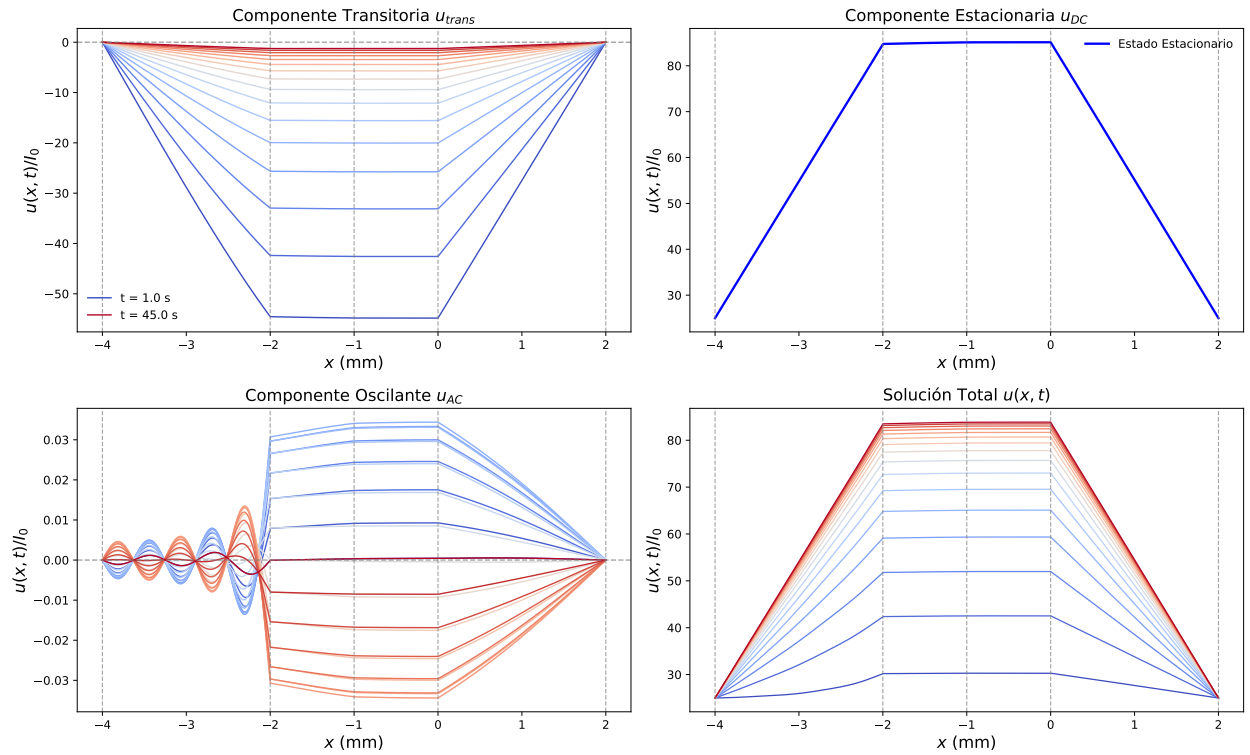


Figura 6.9: Componentes de la solución $u(x, t)$ para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Adicionalmente, en la Figura 6.10 se compara esta componente a 10 Hz y 100 Hz. Se observa que a 100 Hz la oscilación se apaga mucho más rápido y muestra más ciclos dentro de las capas. Esto se debe a que la longitud de difusión térmica es menor a altas frecuencias, confinando el calor cerca de la superficie.

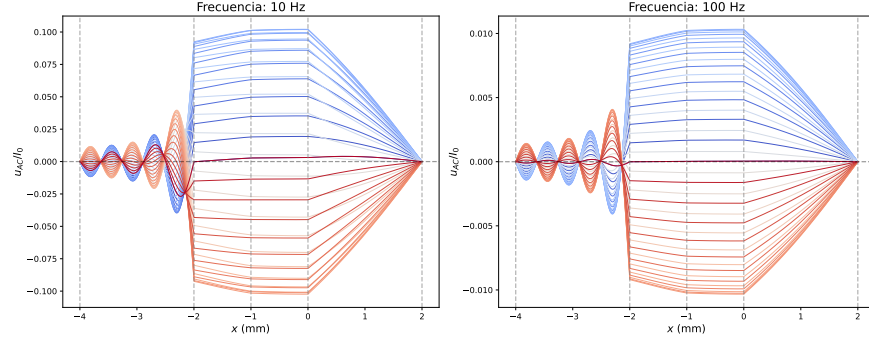


Figura 6.10: Componentes $u_{AC}(x, t)$ $\omega = 10, 100$ Hz para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Se presentan los perfiles de temperatura para los sistemas de 3 capas (Figura 6.11) y 4 capas (Figura 6.12). En ambos casos, el método SPPS permite identificar como el calor atraviesa cada interfaces. A pesar de que el número de materiales aumenta, las componentes de la solución mantienen una transición suave en cada frontera interna.

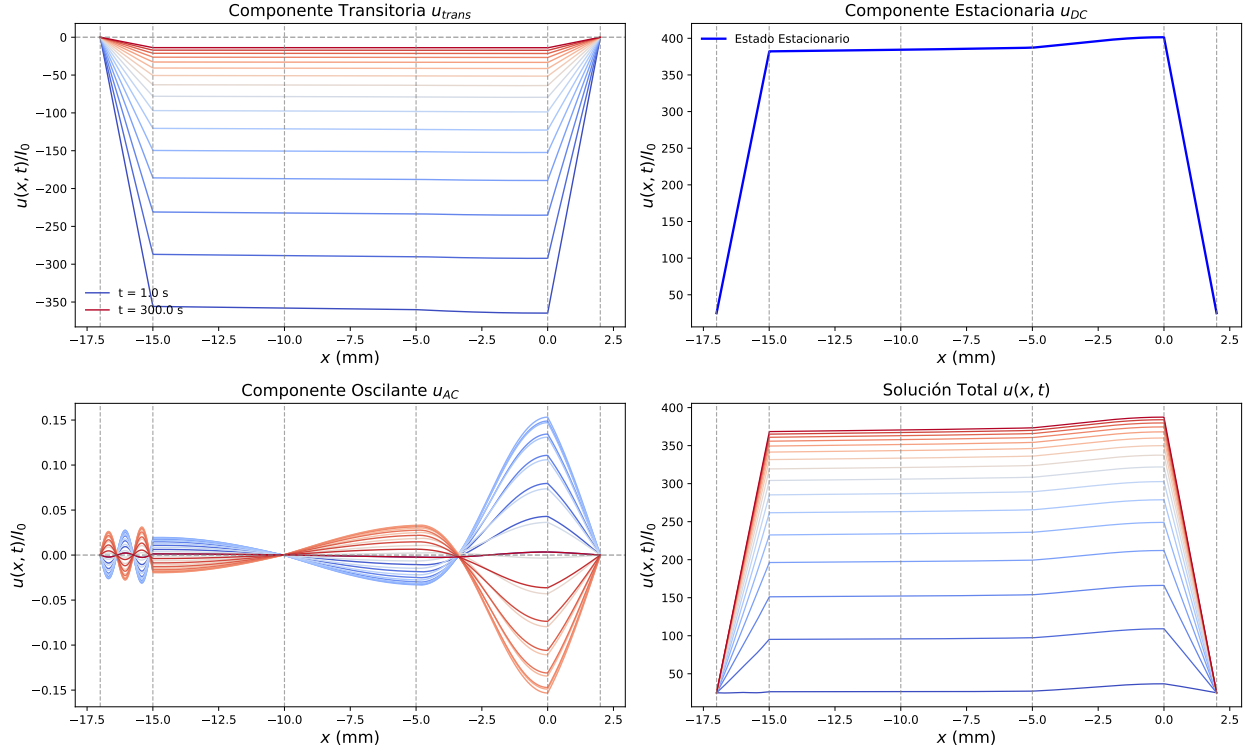


Figura 6.11: Componentes de la solución $u(x, t)$ para Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Finalmente, en la Figura 6.13 se presentan las componentes de la solución para el sistema de cinco capas donde la suavidad de las curvas confirma la estabilidad del método ante un mayor número de interfaces. Al comparar la componente oscilante a 10 Hz y 100 Hz (Figura 6.14), se ratifica el comportamiento físico esperado: a frecuencias bajas el calor logra penetrar a través de más capas, mientras que a frecuencias altas la señal se confina cerca de la frontera del material.

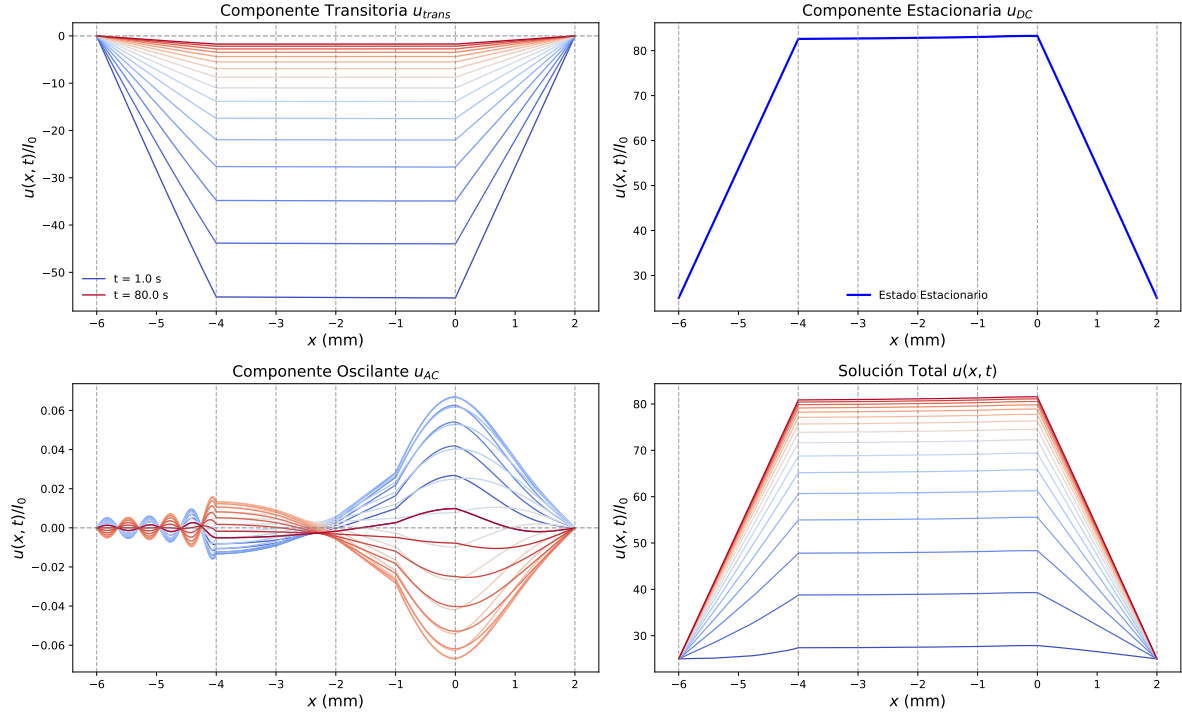


Figura 6.12: Componentes de la solución $u(x, t)$ para Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

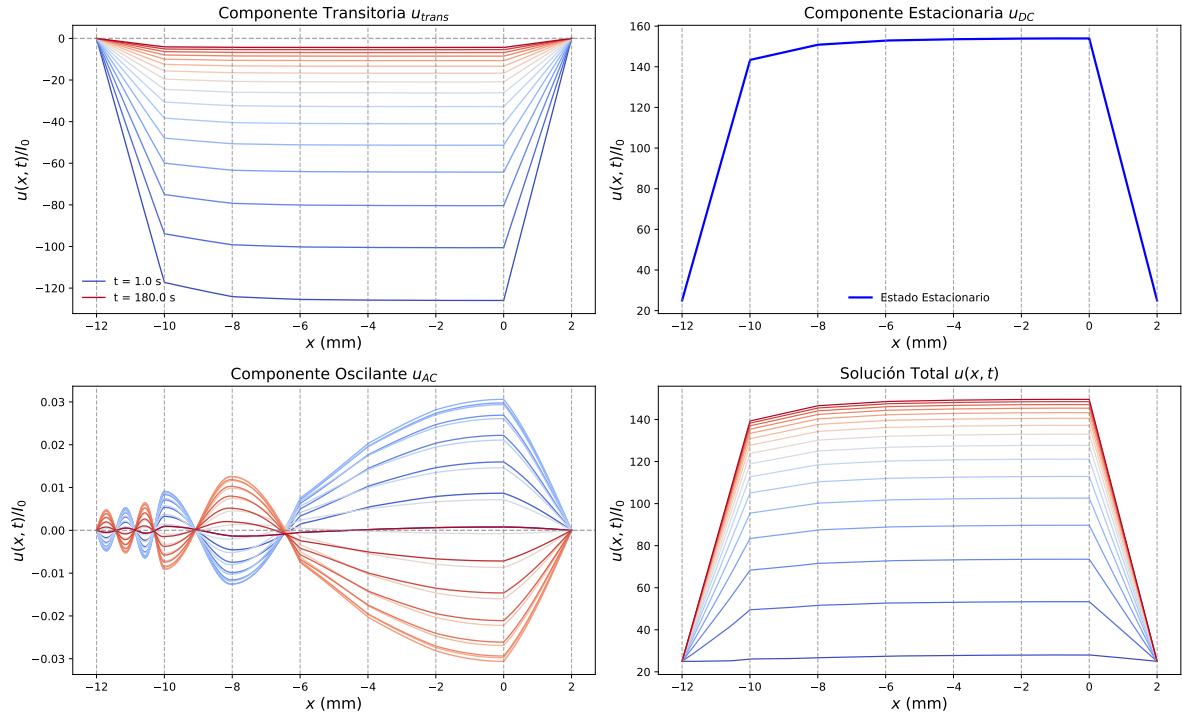


Figura 6.13: Componentes de solución $u(x, t)$ para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

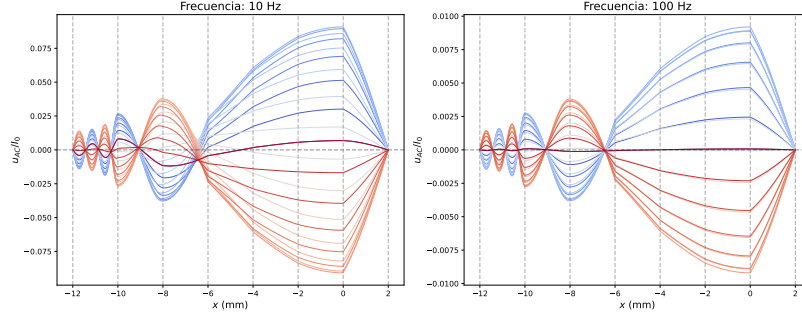


Figura 6.14: Componentes $u_{AC}(x, t)$ $\omega = 10, 100$ Hz para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

6.4. Amplitud y fase para la componente oscilante $u_{AC}(x, t)$

En un experimento fotoacústico, el lock-in mide la amplitud y la fase de la presión acústica generada en la celda. Siguiendo el modelo de [51], dicha presión es proporcional a la componente oscilante de la temperatura en la capa límite del gas (con un espesor de $2\pi\mu_g$), distancia a partir de la cual la variación periódica de temperatura es prácticamente nula. El lock-in convierte la presión en una señal de voltaje proporcional, por lo que la amplitud $|\hat{u}(x)|$ y la fase $\phi(x)$ del fasor térmico son equivalentes (salvo constante de calibración) a las señales experimentales.

La obtención de estos parámetros se fundamenta en la analogía entre el desarrollo matemático de $\hat{u}(x)$ y el proceso de extracción de datos de la oscilación. En este esquema, $u_{AC}(x, t)$ actúa como la señal de entrada, mientras que la modulación del láser (frecuencia ω) funciona como la referencia periódica. Matemáticamente, la señal se descompone en sus componentes en fase (parte real) y en cuadratura (parte imaginaria), lo que permite calcular la intensidad de la oscilación y el tiempo de propagación del calor a través del medio.

Para fundamentar el análisis físico de los perfiles obtenidos, se introduce la longitud de difusión térmica (μ) como el parámetro que define el alcance y el régimen de la onda. En las tablas siguientes se detallan los valores de μ para frecuencias de 10 Hz, 30 Hz y 100 Hz, clasificando para fines prácticos el régimen como Térmicamente Delgado (T.D.) si $\mu > l$ y Térmicamente Grueso (T.G.) si $\mu < l$. Para el caso de dos capas detallado en la Tabla 6.31, se observa que a 30 Hz el Platino (*Pt*) se comporta como un sólido térmicamente grueso, mientras que el Oro (*Au*) se mantiene en un régimen térmicamente delgado.

Material	l (mm)	10 Hz		30 Hz		100 Hz	
		μ (mm)	Régimen	μ (mm)	Régimen	μ (mm)	Régimen
Vidrio	2.0	0.141	T.G.	0.081	T.G.	0.044	T.G.
Platino (<i>Pt</i>)	1.0	0.874	T.G.	0.504	T.G.	0.276	T.G.
Oro (<i>Au</i>)	1.0	1.968	T.D.	1.136	T.D.	0.622	T.G.
Gas	2.0	0.833	T.G.	0.480	T.G.	0.263	T.G.

Tabla 6.31: Regímenes térmicos para la configuración *Pt, Au* ($l = 1$ mm) a diferentes frecuencias.

La Figura 6.15, presenta los perfiles de amplitud y fase a 30 Hz. Se observa una concordancia entre el método SPSS y la referencia analítica. En la amplitud, los cambios de pendiente en las interfaces reflejan el decaimiento en el régimen grueso del Pt frente a la mayor penetración del Au.

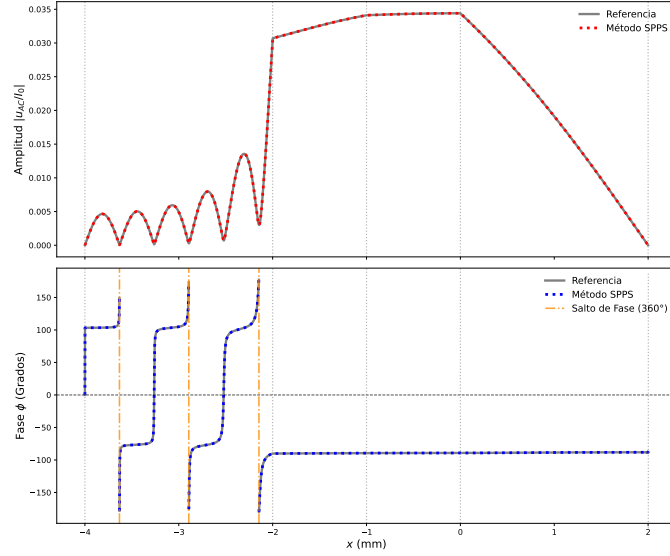


Figura 6.15: Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Un aspecto importante en estas representaciones es el comportamiento de la fase, donde se aprecian saltos verticales entre π y $-\pi$ (de 180° a -180°). Estos saltos derivan de la naturaleza periódica de la fase; se emplea la función `atan2` para identificar la posición exacta del vector de temperatura en cualquier cuadrante del plano complejo. Este comportamiento es consistente al incrementar el número de capas, como se ilustra en las gráficas posteriores.

Para la muestra de tres capas, la Tabla 6.32 confirma que al aumentar el espesor físico a 5 mm, todos los materiales operan en régimen térmicamente grueso en todo el espectro analizado. Esto justifica la notable disminución de la oscilación térmica en la zona central de la muestra que se observa en la Figura 6.18.

Material	l (mm)	10 Hz		30 Hz		100 Hz	
		μ (mm)	Régimen	μ (mm)	Régimen	μ (mm)	Régimen
Vidrio	2.0	0.141	T.G.	0.081	T.G.	0.044	T.G.
Cobre (<i>Cu</i>)	5.0	1.874	T.G.	1.082	T.G.	0.593	T.G.
Oro (<i>Au</i>)	5.0	1.968	T.G.	1.136	T.G.	0.622	T.G.
Níquel (<i>Ni</i>)	5.0	0.850	T.G.	0.491	T.G.	0.269	T.G.
Gas	2.0	0.833	T.G.	0.480	T.G.	0.263	T.G.

Tabla 6.32: Regímenes térmicos para la configuración *Cu – Au – Ni* ($l = 5$ mm).

Siguiendo con el análisis, se examina el sistema de cuatro capas con espesor de 1 mm. En la Tabla 6.33 se aprecia cómo materiales con propiedades similares (*Cu, Au, Al*) comparten la transición de T.D. a T.G. al subir la frecuencia, mientras que el Cromo (*Cr*) actúa como una barrera térmica constante debido a su baja difusividad. La Figura 6.17 ilustra cómo la reducción de μ confina el calor cerca de la superficie a medida que aumenta la frecuencia,

Finalmente, se presenta la muestra de mayor complejidad, con cinco capas de 2 mm de espesor. Como se detalla en la Tabla 6.34, el incremento del espesor sitúa a la mayoría de los metales en el límite del régimen térmicamente grueso, afectando significativamente la propagación térmica como se muestra en la Figura 6.18.

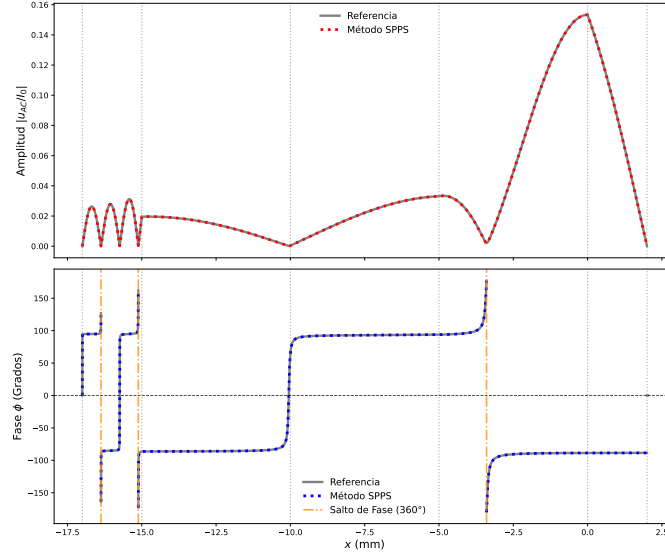


Figura 6.16: Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz para Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

El desfase representa el tiempo de viaje de la onda térmica a través de los materiales. Un retraso de 360° indica que el calor ha tardado un periodo completo en propagarse; es decir, mientras la superficie recibe un nuevo ciclo de excitación, la capa profunda apenas reacciona al anterior. Los saltos en la gráfica son la representación matemática de que la onda ha acumulado un ciclo más de retraso, aunque físicamente la penetración del calor ocurra de manera fluida y continua.

Material	l (mm)	10 Hz		30 Hz		100 Hz	
		μ (mm)	Régimen	μ (mm)	Régimen	μ (mm)	Régimen
Vidrio	2.0	0.141	T.G.	0.081	T.G.	0.044	T.G.
Cobre (Cu)	1.0	1.874	T.D.	1.082	T.D.	0.593	T.G.
Oro (Au)	1.0	1.968	T.D.	1.136	T.D.	0.622	T.G.
Aluminio (Al)	1.0	1.668	T.D.	0.963	T.G.	0.527	T.G.
Cromo (Cr)	1.0	0.665	T.G.	0.384	T.G.	0.210	T.G.
Gas	2.0	0.833	T.G.	0.480	T.G.	0.263	T.G.

Tabla 6.33: Regímenes térmicos para la configuración $Cu - Au - Al - Cr$ ($l = 1$ mm).

Material	l (mm)	10 Hz		30 Hz		100 Hz	
		μ (mm)	Régimen	μ (mm)	Régimen	μ (mm)	Régimen
Vidrio	2.0	0.141	T.G.	0.081	T.G.	0.044	T.G.
Titanio (Ti)	2.0	0.547	T.G.	0.316	T.G.	0.173	T.G.
Platino (Pt)	2.0	0.874	T.G.	0.504	T.G.	0.276	T.G.
Aluminio (Al)	2.0	1.668	T.G.	0.963	T.G.	0.527	T.G.
Oro (Au)	2.0	1.968	T.G.	1.136	T.G.	0.622	T.G.
Cobre (Cu)	2.0	1.874	T.G.	1.082	T.G.	0.593	T.G.
Gas	2.0	0.833	T.G.	0.480	T.G.	0.263	T.G.

Tabla 6.34: Regímenes térmicos para la configuración $Ti - Pt - Al - Au - Cu$ ($l = 2$ mm).

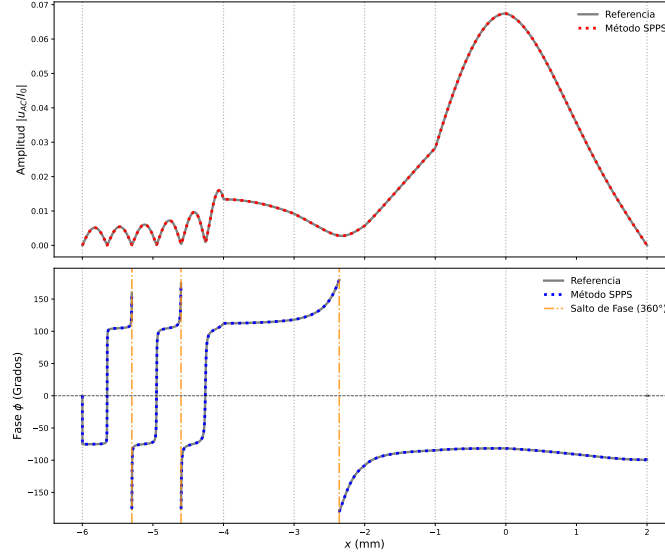


Figura 6.17: Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz para Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

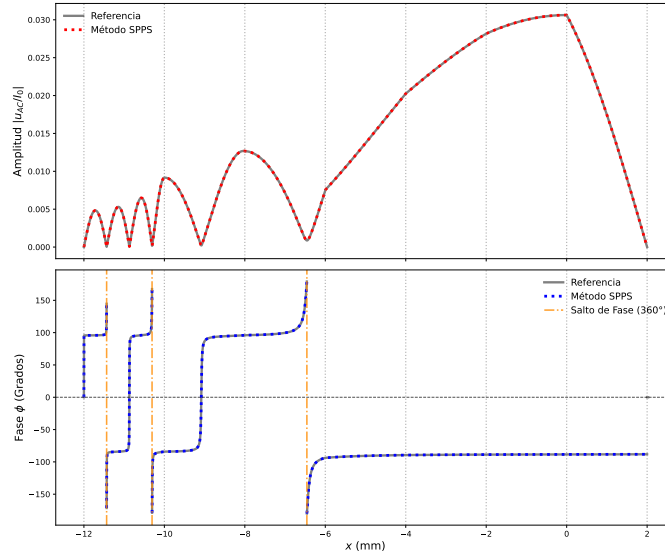


Figura 6.18: Amplitud y fase $\omega = 30$ Hz para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

Para analizar la influencia de la modulación, en las Figuras 6.19 a la 6.22 se comparan las respuestas a 10 Hz y 100 Hz. Se observa que a baja frecuencia (10 Hz), la onda térmica penetra profundamente. Por el contrario, a 100 Hz, el calor se confina cerca de la superficie debido a la reducción drástica de la longitud μ . Este comportamiento ratifica que el método SPPS detecta fielmente cada transición de material, sin importar la frecuencia o el número de interfaces.

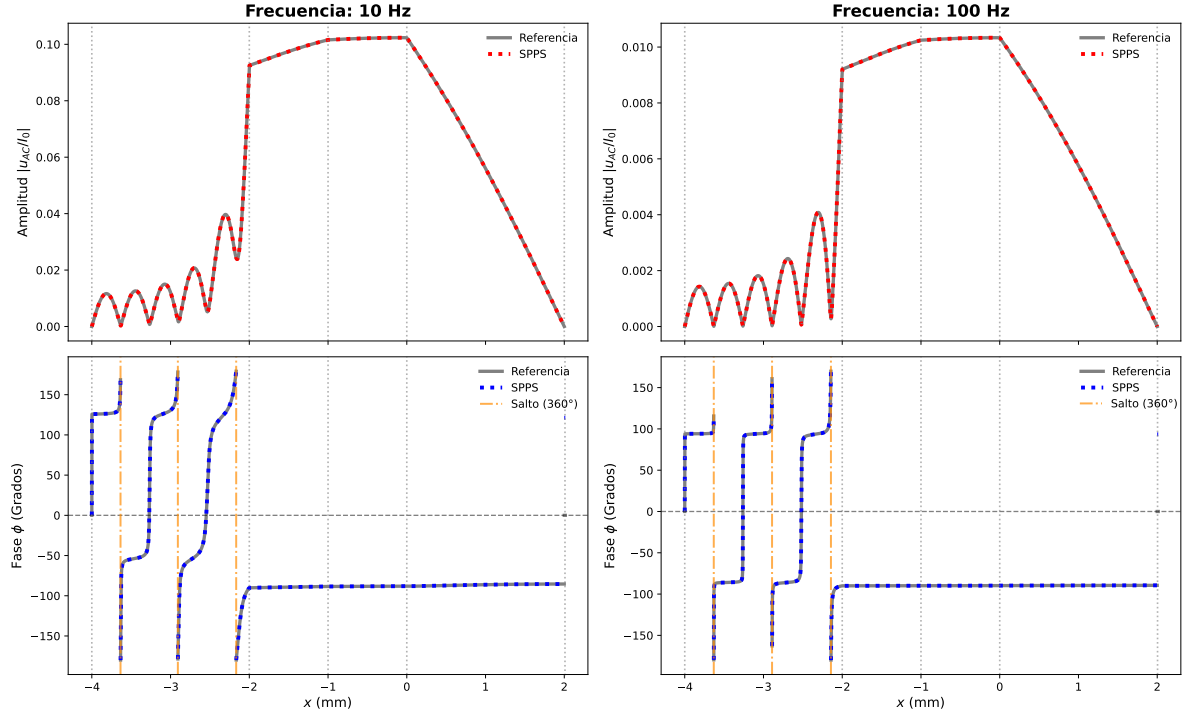


Figura 6.19: Amplitud y fase $\omega = 10, 100$ Hz para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

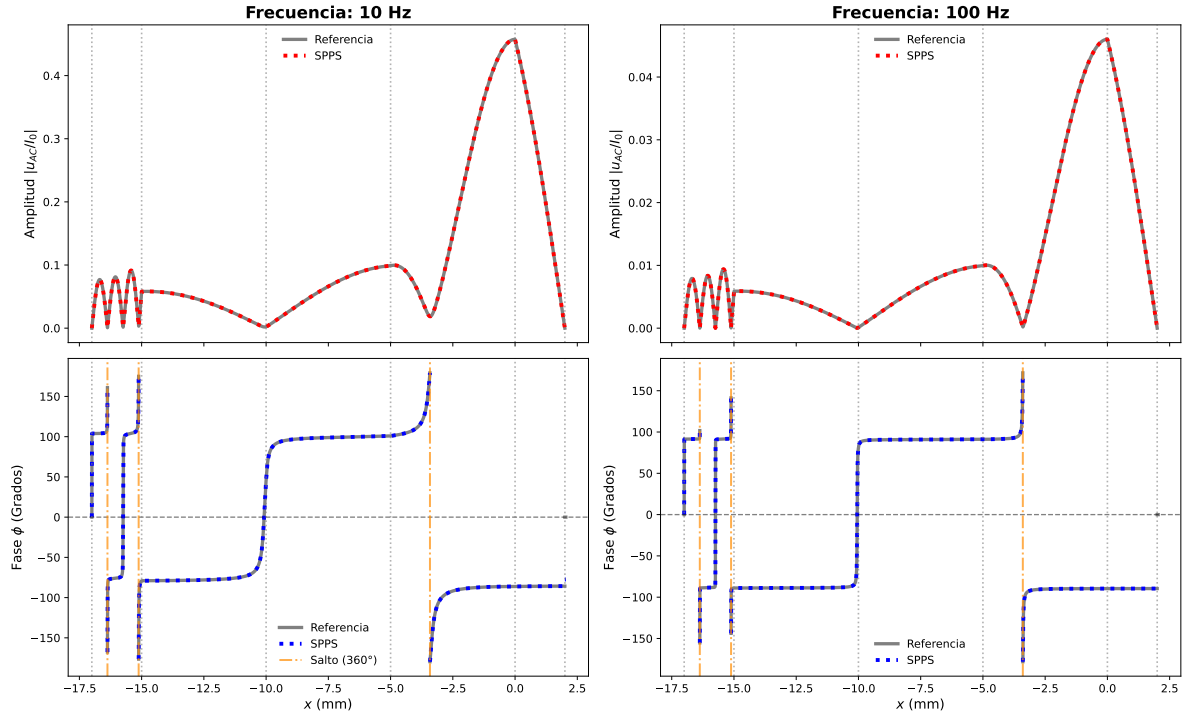


Figura 6.20: Amplitud y fase $\omega = 10, 100$ Hz para Cu, Au, Ni (5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

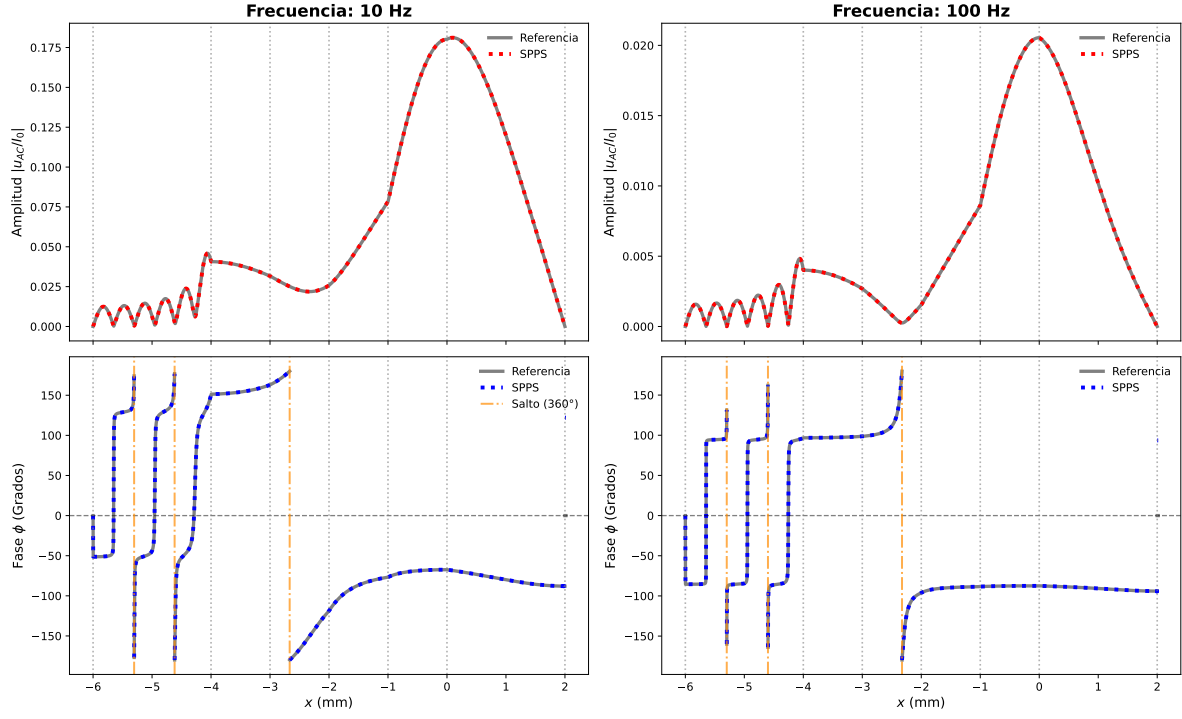


Figura 6.21: Amplitud y fase $\omega = 10, 100$ Hz para Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

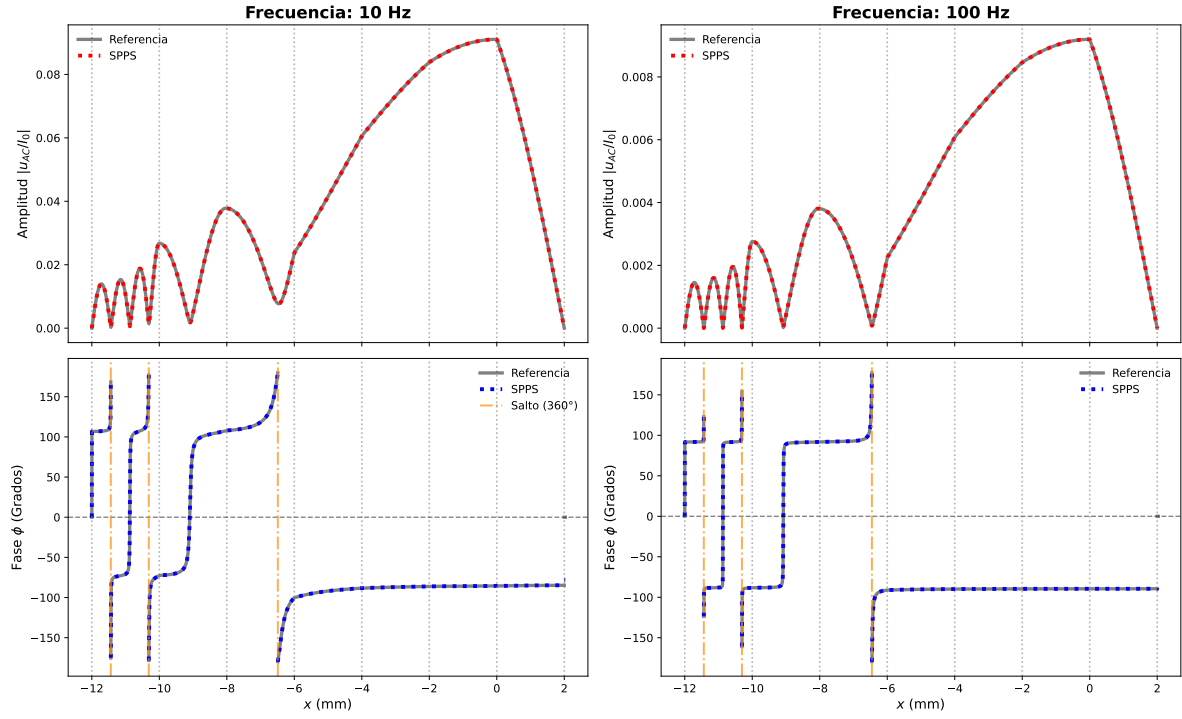


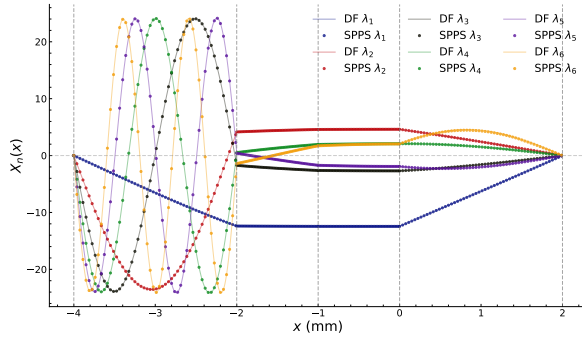
Figura 6.22: Amplitud y fase $\omega = 10, 100$ Hz para Ti, Pt, Al, Au, Cu (2 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

6.5. Resultados con propiedades térmicas variables entre Método SPPS y DF

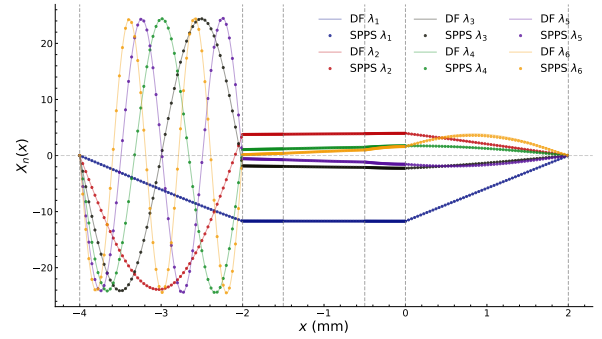
En esta sección se evalúa el desempeño del método SPPS frente a variaciones espaciales en las propiedades térmicas. Al no contar con soluciones analíticas para coeficientes variables en sistemas multicapa, se utiliza el método de Diferencias Finitas como referencia numérica para validar la precisión de los resultados.

La Figura 6.23, presenta la comparativa de las primeras seis funciones propias para configuraciones que van desde 2 hasta 5 capas de material con los perfiles variables definidos en el Capítulo 5. el método SPPS logra capturar las oscilaciones de las funciones propias incluso en las zonas donde las propiedades térmicas varían rápidamente, como en el caso de las funciones senoidales.

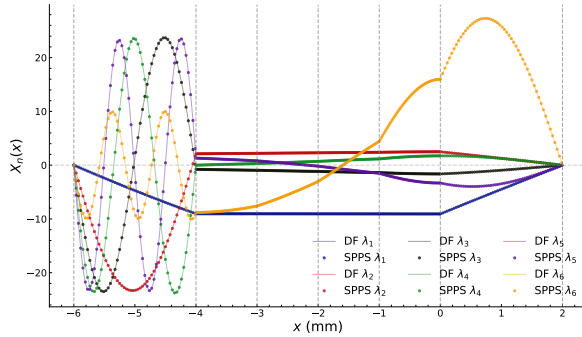
6.5.1. Resultados de valores propios y funciones propias



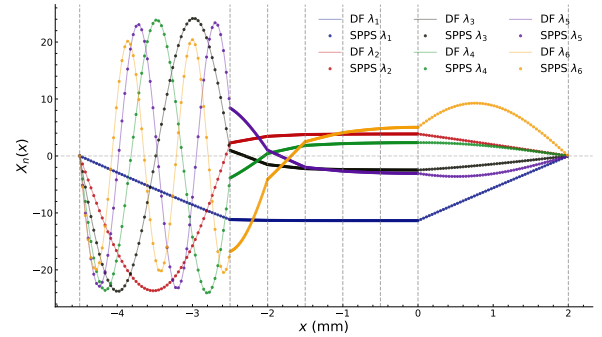
(a) Comparativa 6 primeras $X_n(x)$ para Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm con factor variable.



(b) Comparativa 6 primeras $X_n(x)$ para Cu, Ni (0.5 mm); Au (1 mm) con factor variable.



(c) Comparativa 6 primeras $X_n(x)$ para Cu, Au, Al, Cr (1 mm) con factor variable.



(d) Comparativa 6 primeras $X_n(x)$ Ti, Pt, Al, Au, Cu (0.5 mm) factor variable.

Figura 6.23: Comparativa de las seis primeras funciones propias calculadas mediante SPPS y Diferencias Finitas para medios con propiedades variables en configuraciones de 2 a 5 capas de muestra.

Para cuantificar esta precisión, se presentan las Tablas 6.35 a 6.38, donde se comparan los primeros ocho valores propios calculados por ambos métodos. Los resultados arrojan las siguientes observaciones: En todos los modelos (2 a 5 capas), el error absoluto se mantiene predominantemente en el orden de 10^{-6} , alcanzando en los primeros niveles valores de hasta 10^{-7} .

Se puede observar que incluso incorporando variaciones en los coeficientes, el incremento en el número de interfaces y la reducción en el espesor de las capas (como en los modelo de 4 y 5 capas) no degradan la precisión del método SPPS, lo que confirma su aplicabilidad en materiales compuestos con variaciones más complejas.

n	λ_{DF}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0869598878	0.0869599170	2.92×10^{-8}	3.35×10^{-5}
2	1.7745875668	1.7745950639	7.50×10^{-6}	4.22×10^{-4}
3	6.4936794455	6.4937104720	3.10×10^{-5}	4.78×10^{-4}
4	14.3425424558	14.3426125846	7.01×10^{-5}	4.89×10^{-4}
5	25.3092116594	25.3093357342	1.24×10^{-4}	4.90×10^{-4}
6	39.3558415482	39.3560436798	2.02×10^{-4}	5.14×10^{-4}
7	54.2646913559	54.2622570939	2.43×10^{-3}	4.49×10^{-3}
8	56.3757240479	56.3802028858	4.48×10^{-3}	7.94×10^{-3}

Tabla 6.35: Comparativa de error en valores propios λ para el sistema con propiedades variables Pt, Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{DF}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0769201469	0.0769190009	1.15×10^{-6}	1.49×10^{-3}
2	1.7831978077	1.7832042224	6.41×10^{-6}	3.60×10^{-4}
3	6.6007133962	6.6007443253	3.09×10^{-5}	4.69×10^{-4}
4	14.6219336146	14.6220054001	7.18×10^{-5}	4.91×10^{-4}
5	25.8456891407	25.8458174543	1.28×10^{-4}	4.96×10^{-4}
6	40.2635873204	40.2638056455	2.18×10^{-4}	5.42×10^{-4}
7	53.9033568273	53.9029628666	3.94×10^{-4}	7.31×10^{-4}
8	57.8549257298	57.8562162851	1.29×10^{-3}	2.23×10^{-3}

Tabla 6.36: Comparativa de error en valores propios λ para el sistema con propiedades variables Cu, Ni (0.5 mm); Au (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{DF}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0479754224	0.0479755174	9.49×10^{-8}	1.98×10^{-4}
2	1.6781835197	1.6781680532	1.55×10^{-5}	9.22×10^{-4}
3	6.4390394208	6.4389777906	6.16×10^{-5}	9.57×10^{-4}
4	14.3517213191	14.3515838790	1.37×10^{-4}	9.58×10^{-4}
5	25.2961362746	25.2959066458	2.30×10^{-4}	9.08×10^{-4}
6	34.6670097138	34.6672016422	1.92×10^{-4}	5.54×10^{-4}
7	40.6613849432	40.6612550121	1.30×10^{-4}	3.20×10^{-4}
8	54.1042454877	54.0999265855	4.32×10^{-3}	7.98×10^{-3}

Tabla 6.37: Comparativa de error en valores propios λ para el sistema con propiedades variables Cu, Au, Al, Cr (1 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

n	λ_{DF}	λ_{SPPS}	Ea	$Er(\%)$
1	0.0724622191	0.0724620290	1.90×10^{-7}	2.62×10^{-4}
2	1.7449861171	1.7450018624	1.57×10^{-5}	9.02×10^{-4}
3	6.4770695946	6.4771335219	6.39×10^{-5}	9.87×10^{-4}
4	14.2560286722	14.2561615461	1.33×10^{-4}	9.32×10^{-4}
5	24.7144372779	24.7146017384	1.64×10^{-4}	6.65×10^{-4}
6	36.1239095357	36.1237923771	1.17×10^{-4}	3.24×10^{-4}
7	46.4650416851	46.4650022461	3.94×10^{-5}	8.49×10^{-5}
8	54.0939134738	54.0936630100	2.50×10^{-4}	4.63×10^{-4}

Tabla 6.38: Comparativa error en valores propios λ para Ti, Pt, Al, Au, Cu (0.5 mm); $l_s, l_g = 2$ mm.

6.6. Resultados considerando el término $f(x, t)$

Análogamente a los casos con materiales homogéneos, las Figuras 6.24 a 6.27 desglosan la solución $u(x, t)$ en sus tres componentes para las configuraciones de 2 a 5 capas. Las oscilaciones de la componente u_{AC} son más intensas cerca de la fuente de calor y se atenúan conforme penetran en las capas profundas, evidenciando el fenómeno de difusión térmica.

Un aspecto relevante es que, a medida que aumenta el número de capas (como se ve en la Figura 6.24), el método sigue siendo numéricamente estable, permitiendo visualizar cómo la energía se distribuye de manera compleja a través de múltiples interfaces.

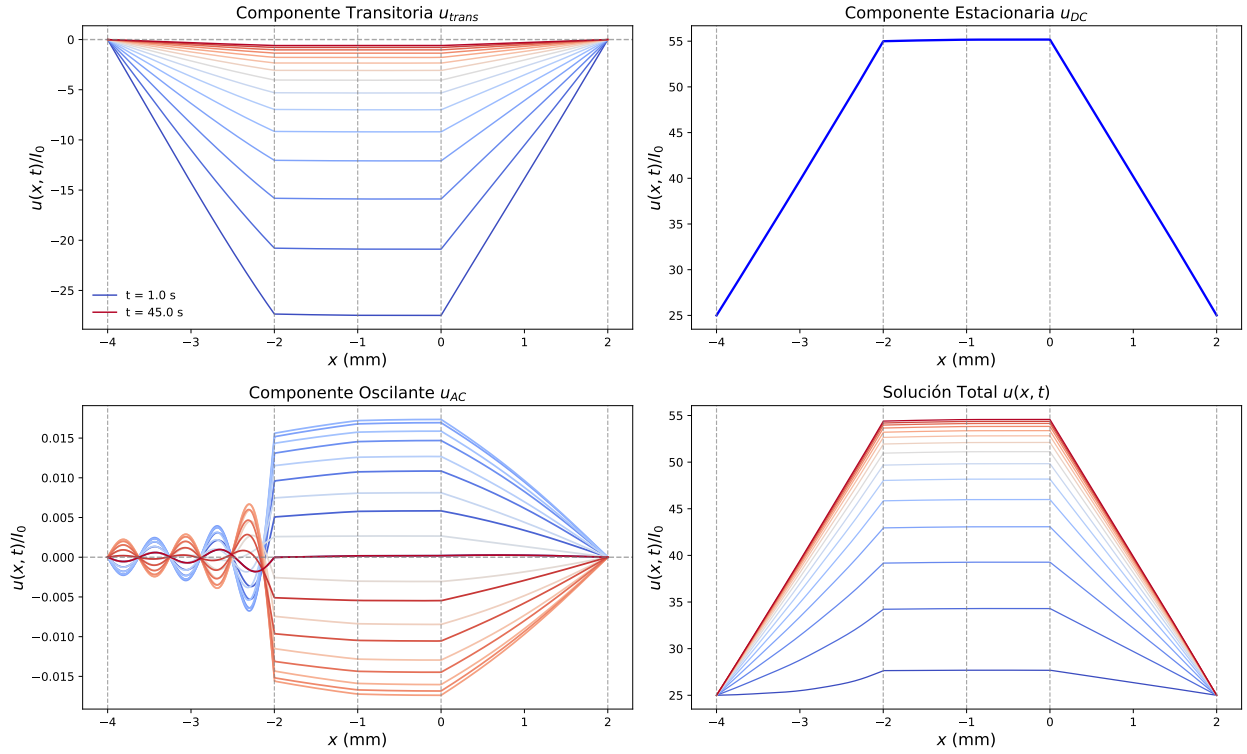


Figura 6.24: Componentes de la solución $u(x, t)$ para el sistema con propiedades variables (Pt, Au).

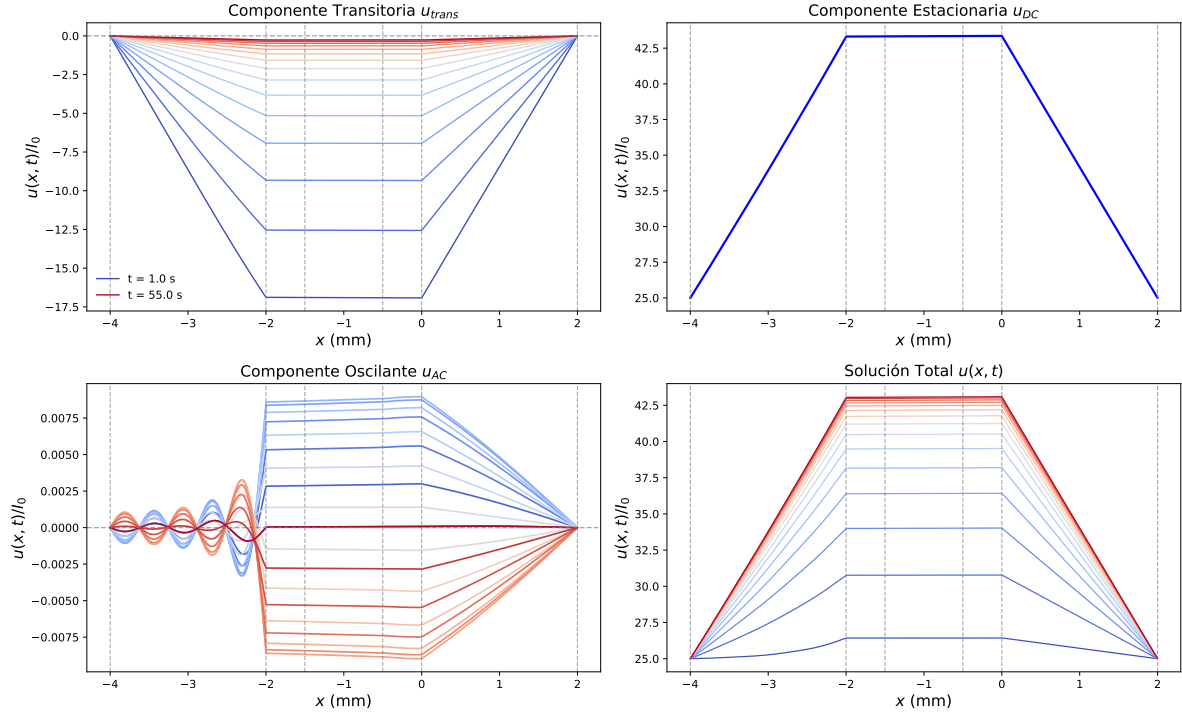


Figura 6.25: Componentes de $u(x, t)$ para el sistema con propiedades variables (Cu, Au, Ni).

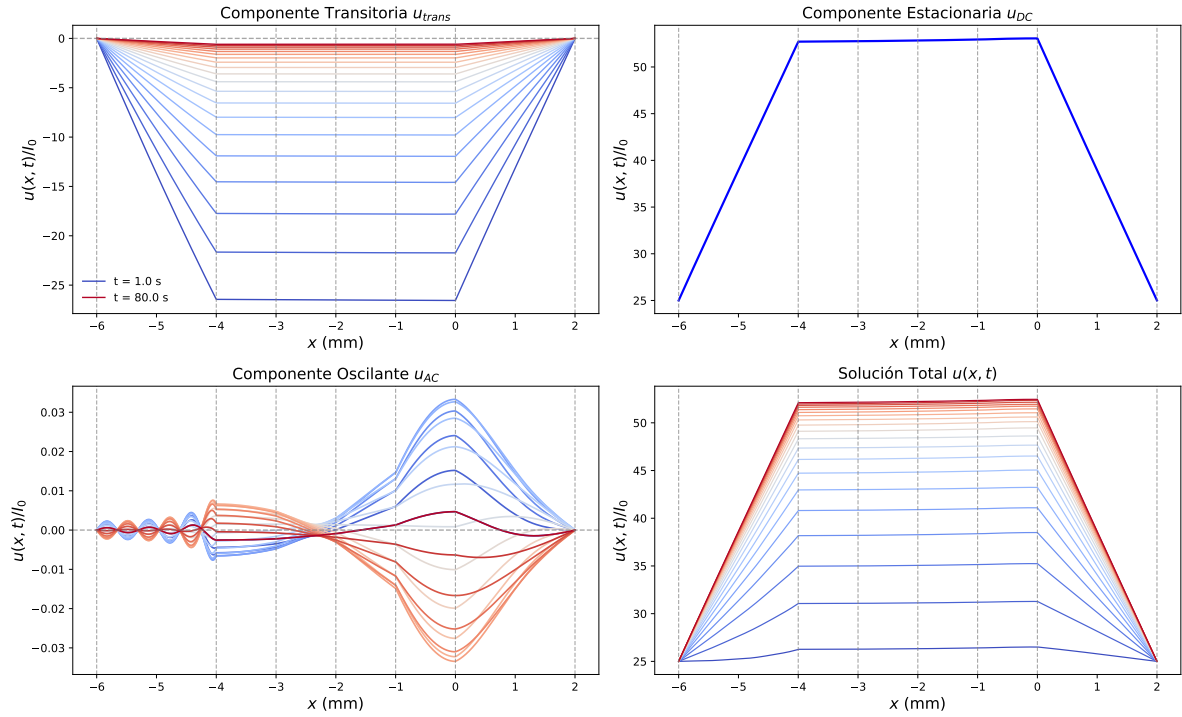


Figura 6.26: Componentes de $u(x, t)$ para el sistema con propiedades variables (Cu, Au, Al, Cr).

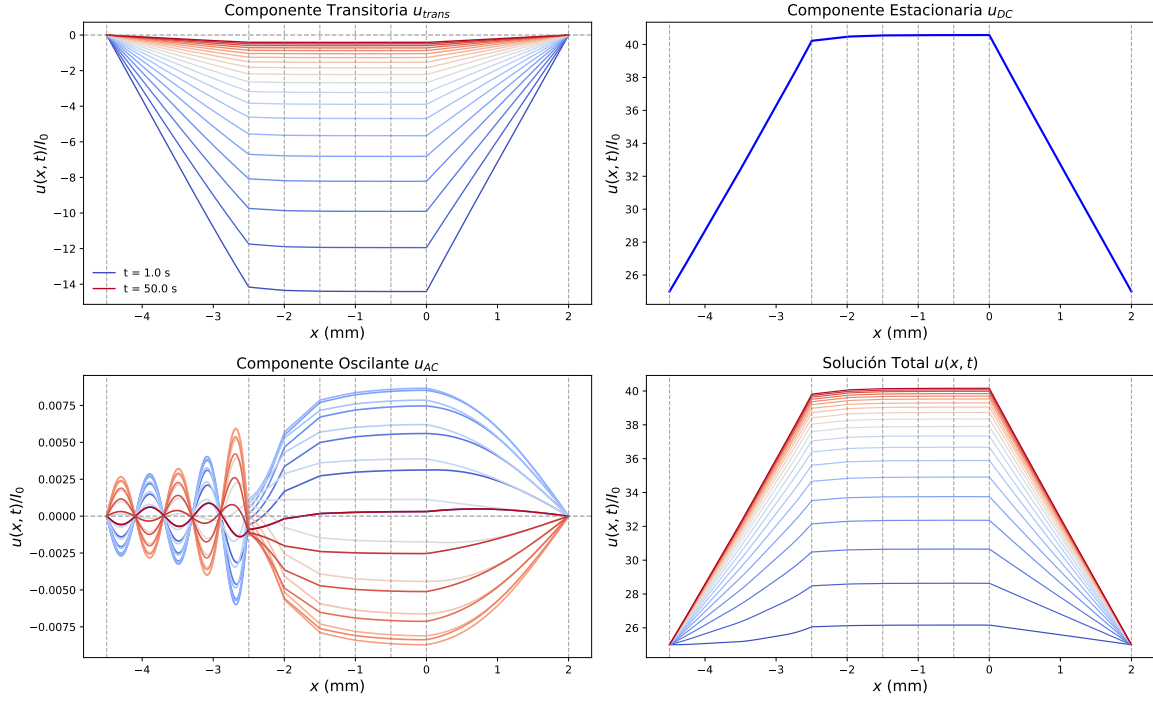


Figura 6.27: Componentes de $u(x, t)$ para el sistema con propiedades variables (Ti, Pt, Al, Au, Cu).

6.7. Amplitud y fase para la componente oscilante $u_{AC}(x, t)$

En las Figuras 6.28 a 6.31, se presentan los resultados para los perfiles de amplitud y fase a una frecuencia de modulación de 30 Hz en configuraciones de 2, 3, 4 y 5 capas, respectivamente.

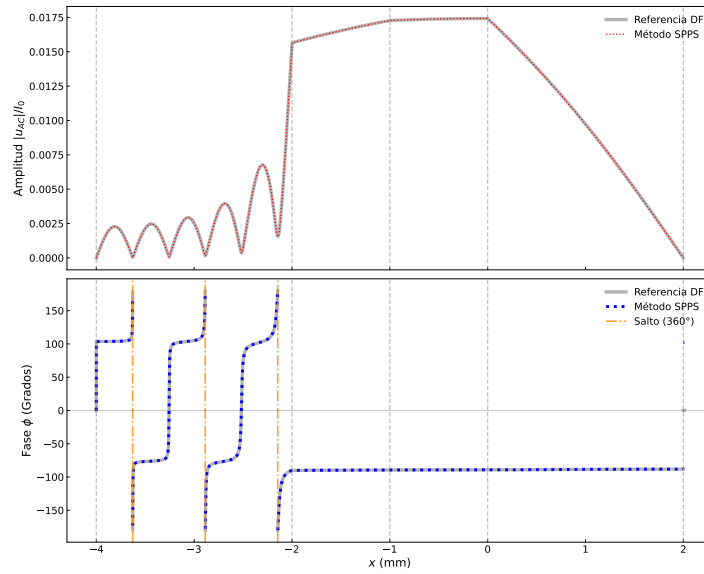


Figura 6.28: Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz del sistema con propiedades variables (Pt, Au).

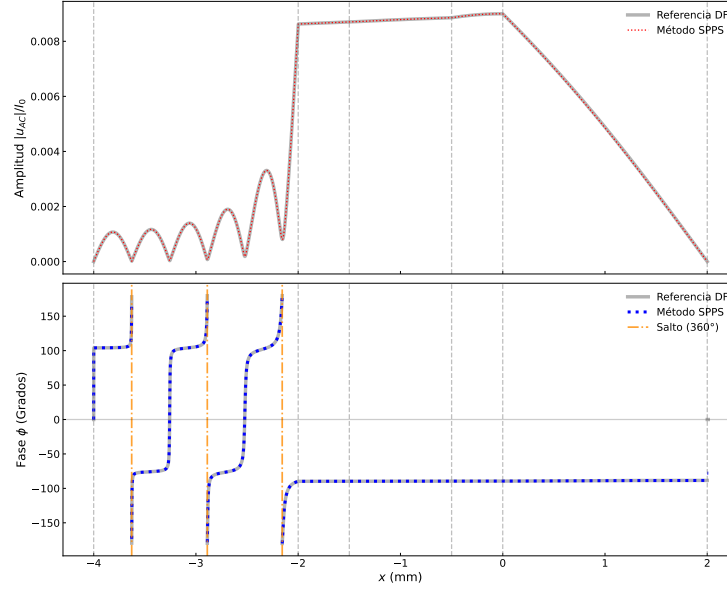


Figura 6.29: Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz del sistema con propiedades variables (Cu, Au, Ni).

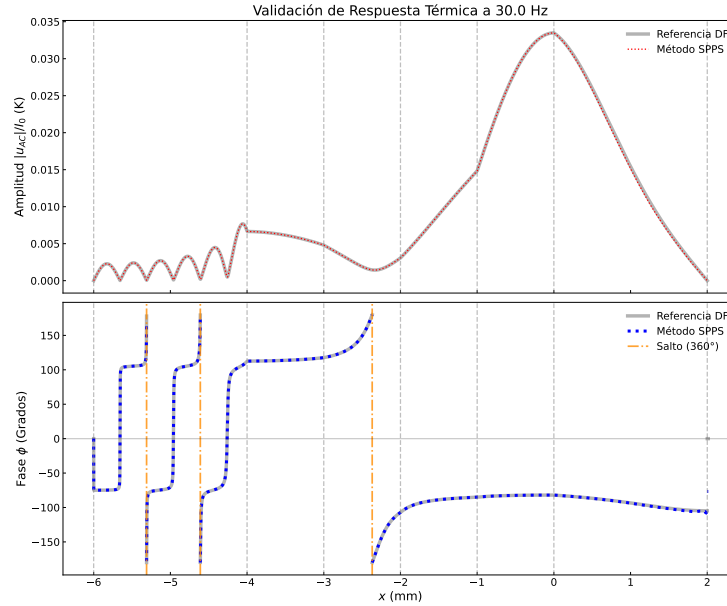


Figura 6.30: Amplitud y fase para $\omega = 30$ Hz del sistema con propiedades variables (Cu, Au, Al, Cr).

Se observa una coincidencia visual entre la referencia DF (líneas negras) y los puntos calculados mediante SPPS (puntos rojos y azules). Es notable que, a pesar de las variaciones espaciales en las propiedades térmicas, la amplitud muestra un comportamiento donde los cambios en la pendiente de la curva reflejan las variaciones en las funciones de conductividad $k(x)$ aplicadas en cada capa. Posteriormente, en las Figuras 6.32 a 6.35, se comparan las respuestas a 10 Hz y 100 Hz para los sistemas de 2 a 5 capas.

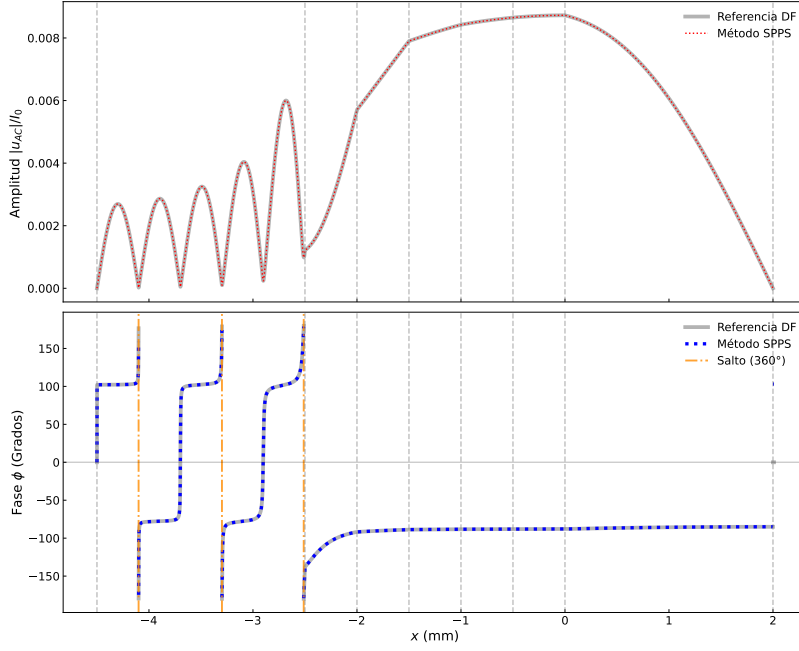


Figura 6.31: Sistema con propiedades variables (Ti, Pt, Al, Au, Cu) para $\omega = 30$ Hz.

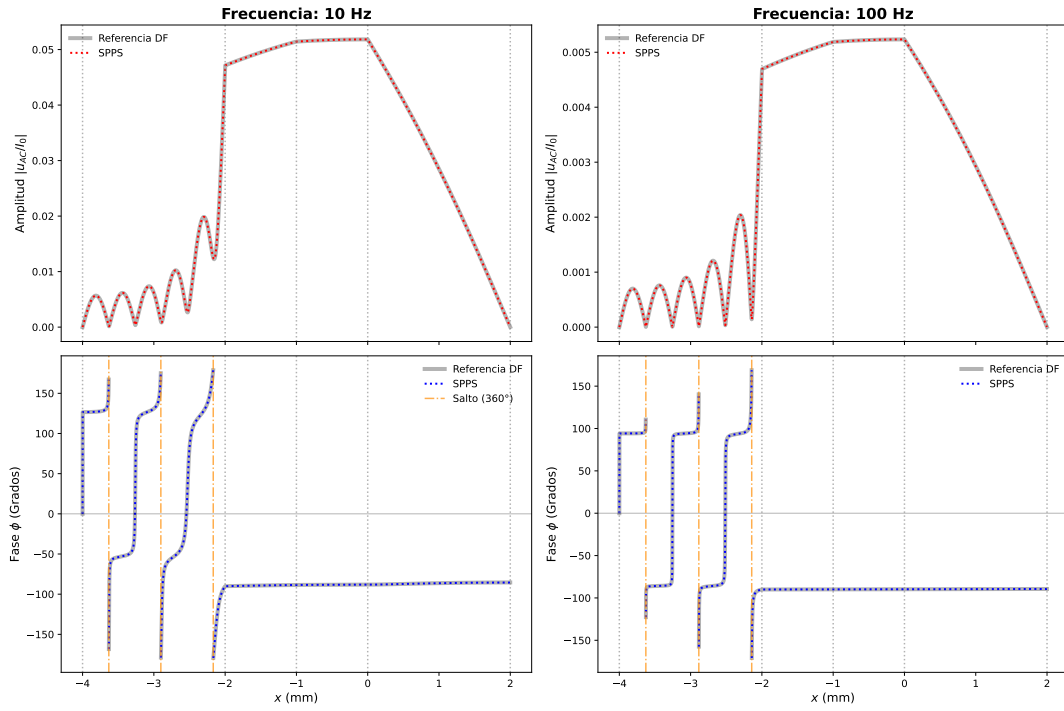


Figura 6.32: Amplitud y fase para $\omega = 10, 100$ Hz del sistema con propiedades variables (Pt, Au).

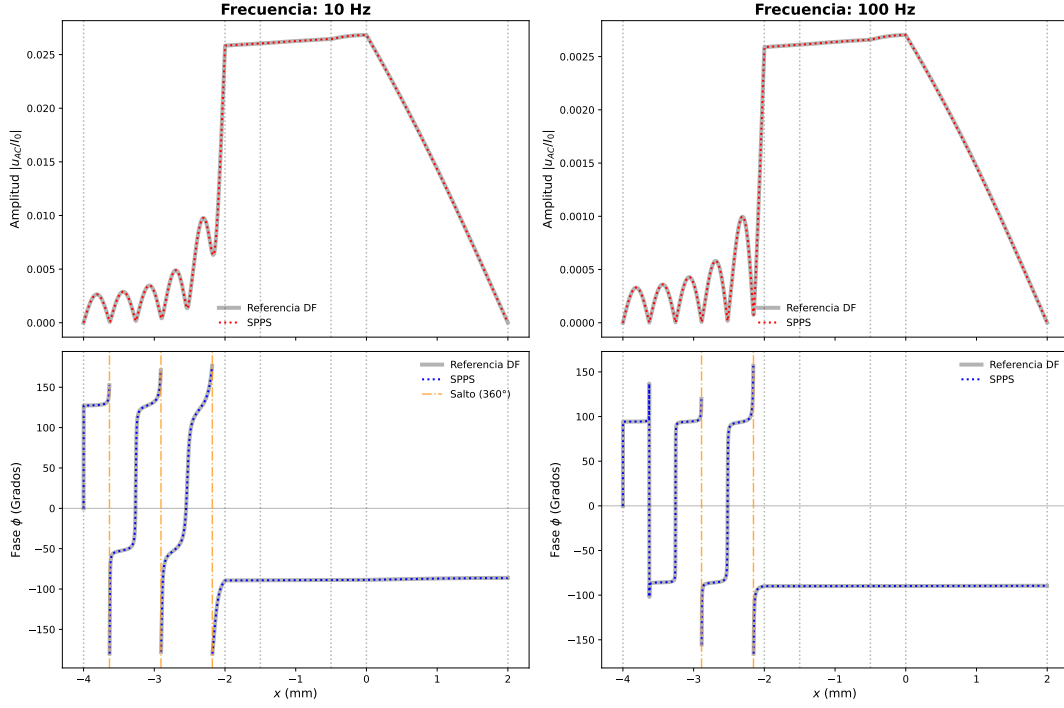


Figura 6.33: Amplitud y fase para $\omega = 10, 100$ Hz (Cu, Au, Ni).

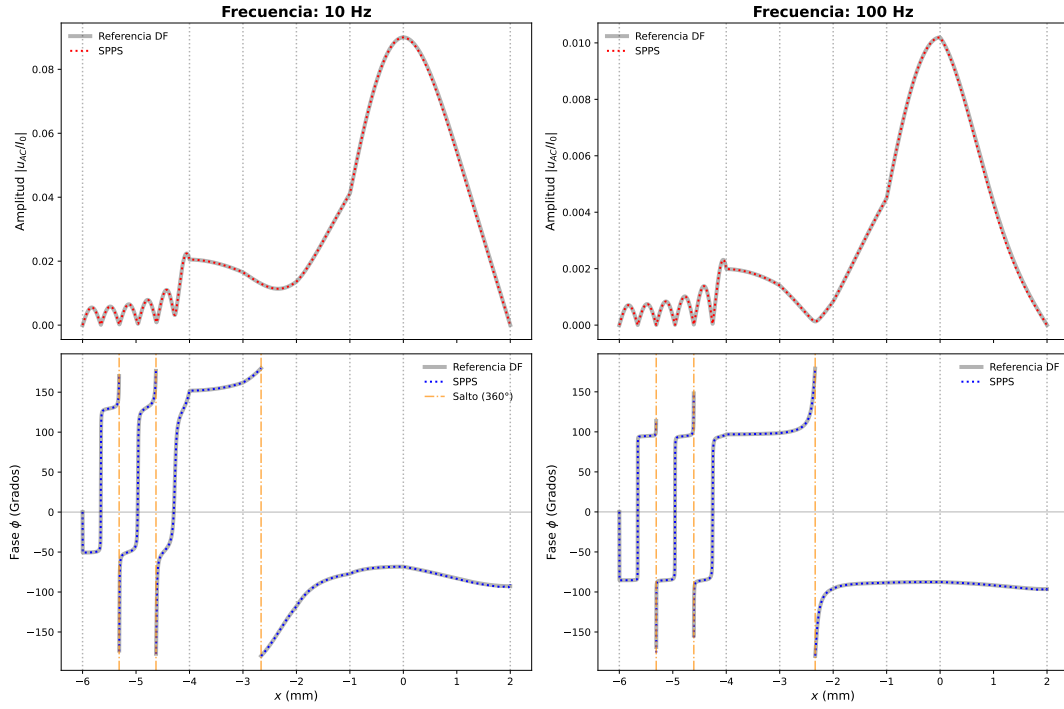


Figura 6.34: Amplitud y fase para $\omega = 10, 100$ Hz (Cu, Au, Al, Cr).

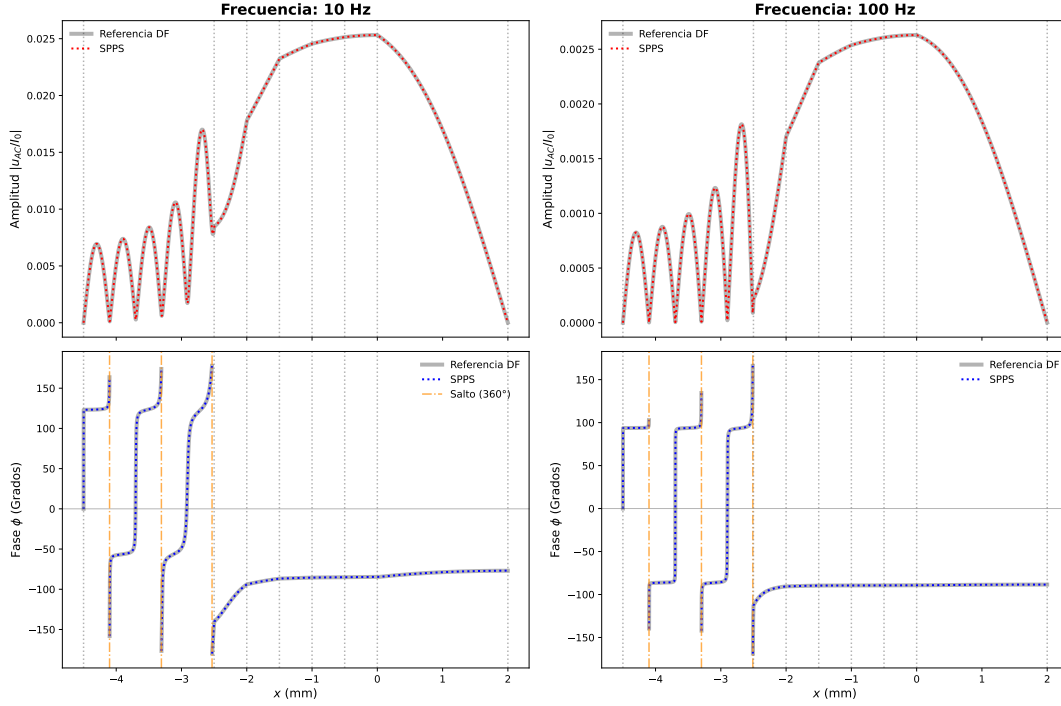


Figura 6.35: Amplitud y fase para $\omega = 10, 100$ Hz (Ti, Pt, Al, Au, Cu).

A 10 Hz la amplitud presenta un decaimiento gradual, lo que permite que la onda térmica penetre profundamente y detecte las variaciones de las propiedades en todas las capas del material. A 100 Hz la amplitud cae de forma mucho más agresiva y el calor se confina cerca de la superficie, confirmando que la longitud de difusión térmica se reduce conforme aumenta la frecuencia.

A diferencia del caso homogéneo, donde las funciones de base siguen un comportamiento sinusoidal predecible, aquí se observa cómo el algoritmo SPPS adapta la curvatura de las funciones $X_n(x)$ para satisfacer las condiciones de interfaz y la heterogeneidad interna de cada material. La coincidencia visual entre los resultados del SPPS (puntos) y la solución por Diferencias Finitas (línea continua) ratifica la robustez del método para construir la base de la solución incluso cuando los parámetros térmicos no son constantes.

Conclusiones

1. Se verificó de manera satisfactoria la hipótesis planteada. El método SPPS permitió obtener los primeros valores propios del problema de Sturm-Liouville con una precisión menor a 10^{-5} . En los casos con propiedades homogéneas, se alcanzaron errores del orden de 10^{-11} , comparando con los resultados del enfoque semianalítico. El uso de un orden de truncamiento $M = 40$ resultó ser el equilibrio entre precisión y carga computacional.
2. En la solución transitoria u_{trans} , la componente exponencial $e^{-\lambda_n t}$ suprime los modos espaciales altos (valores propios más grandes), permitiendo que la respuesta térmica sea dominada rápidamente por los modos fundamentales. Este comportamiento físico, sumado a la convergencia uniforme de la serie, justifica plenamente el truncamiento de la serie (como en el caso de $M = 40$), y otorga estabilidad numérica al algoritmo, evitando el fenómeno de oscilaciones ficticias al representar el fenómeno.
3. El algoritmo demostró estabilidad al escalar de 2 a 5 capas de muestra, cumpliendo explícitamente con el objetivo de escalabilidad planteado en el modelo. Para la validación, se desarrolló una estrategia de propagación secuencial recursiva para el modelo semianalítico de referencia. Esta aportación metodológica permitió reducir la complejidad del sistema de ecuaciones asociadas al cálculo de determinantes globales. Asimismo, para los casos con propiedades heterogéneas, la implementación de la conductividad efectiva mediante la media armónica en el esquema DF confirmó que el método SPPS es capaz de mantener su precisión con múltiples discontinuidades y coeficientes variables.
4. La transición al dominio de la frecuencia mediante el análisis fasorial permitió capturar la amplitud y fase de la señal térmica. La detección de saltos de fase y la implementación íntegra en Python mediante el uso de librerías como NumPy y SciPy satisfizo la necesidad de crear una herramienta de acceso abierto, superando las limitaciones de flexibilidad y costos del software comercial.
5. Esta investigación confirma que el método SPPS es una alternativa robusta para el modelado de sistemas multicapa asociados al modelo fotoacústico. Como trabajo futuro, además de la extensión bidimensional (2D), se propone su aplicación en la inversión de datos experimentales para recuperar propiedades térmicas desconocidas a partir de sus señales reales, motivando el estudio de fenómenos físicos concretos y relevantes para otras comunidades científicas dedicadas al análisis de materiales.

Propagación de Coeficientes Térmicos

En este apartado se presenta de forma explícita el sistema de ecuaciones y los vectores de coeficientes resultantes de la aplicación de las condiciones de interfaz para los modelos térmicos. Este desarrollo complementa la estrategia de propagación secuencial descrita en el Capítulo 5 y muestra el origen de la relación de recurrencia utilizada para las configuraciones del escalamiento hasta 5 muestras de material.

Para todos los casos expuestos, el acoplamiento de temperatura y flujo en cada interfaz asume la normalización del coeficiente correspondiente al material de soporte, estableciendo la condición inicial $B_1 = 1$. Asimismo, debido a la condición de frontera de Dirichlet impuesta en el extremo izquierdo del sistema ($x = a$), se define estrictamente que $A_1 = 0$. Las funciones locales se definen en términos del espesor de cada capa, denotado por l_j .

A.1. Caso de 2 muestras

Para validar el ensamble analítico, se presenta el desarrollo explícito del modelo de 4 regiones. El vector de incógnitas del sistema es $A = (B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, B_4)^T$. Partiendo de las consideraciones iniciales, los coeficientes se determinan secuencialmente resolviendo las condiciones de continuidad en cada interfaz:

- Interfaz Soporte / Muestra 1:

$$A_2 = \text{sen}(\nu_1 l_1), \quad B_2 = \frac{k_1 \nu_1}{k_2 \nu_2} \cos(\nu_1 l_1)$$

- Interfaz Muestra 1 / Muestra 2:

$$A_3 = A_2 \cos(\nu_2 l_2) + B_2 \text{sen}(\nu_2 l_2), \quad B_3 = \frac{k_2 \nu_2}{k_3 \nu_3} [-A_2 \text{sen}(\nu_2 l_2) + B_2 \cos(\nu_2 l_2)]$$

- Interfaz Muestra 2 / Gas:

$$B_4 = -\frac{[A_3 \cos(\nu_3 l_3) + B_3 \text{sen}(\nu_3 l_3)]}{\text{sen}(\nu_4 l_4)}$$

Finalmente, al sustituir estos términos en la condición de continuidad de flujo de la última interfaz, se obtiene la ecuación característica del sistema de muestra bicapa:

$$-A_3 k_3 \nu_3 \sin(\nu_3 l_3) + B_3 k_3 \nu_3 \cos(\nu_3 l_3) - B_4 k_4 \nu_4 \cos(\nu_4 l_4) = 0$$

Generalización recursiva para sistemas de N capas

El desarrollo explícito del caso anterior revela un patrón algebraico constante en la propagación de las propiedades térmicas. En lugar de resolver el sistema matricial completo para los modelos extendidos de 3, 4 y 5 muestras, el comportamiento de las interfaces se abstrae en una relación de recurrencia generalizada. Para un sistema total de N capas (donde $j = 1$ corresponde al soporte y $j = N$ al gas), el algoritmo requiere definir las condiciones iniciales en la frontera izquierda:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 1$$

A partir de estos valores, los coeficientes de cualquier capa subsecuente se calculan iterativamente utilizando exclusivamente la información de la capa anterior.

Regla de propagación para interfaces $i = 1, 2, \dots, N - 2$:

Al evaluar esta regla iterativa hasta $i = N - 2$, se obtienen los coeficientes A_{N-1} y B_{N-1} correspondientes a la última muestra de material:

$$A_{i+1} = A_i \cos(\nu_i l_i) + B_i \sin(\nu_i l_i), \quad B_{i+1} = \frac{k_i \nu_i}{k_{i+1} \nu_{i+1}} [-A_i \sin(\nu_i l_i) + B_i \cos(\nu_i l_i)] \quad (\text{A.1})$$

Al evaluar en $i = 1$, el sistema reproduce de forma exacta las expresiones obtenidas para el acoplamiento entre el soporte y la primera muestra del caso de muestra bicapa.

Condición final en la interfaz Sólido-Gas $i = N - 1$:

Al llegar a la última interfaz ($x = 0$), la condición de frontera en el extremo derecho impone que $A_N = 0$. Por lo tanto, la continuidad de temperatura en esta interfaz define el coeficiente de la capa de Gas (N): $x = 0$:

$$B_N = -\frac{A_{N-1} \cos(\nu_{N-1} l_{N-1}) + B_{N-1} \sin(\nu_{N-1} l_{N-1})}{\sin(\nu_N l_N)}$$

Ecuación Característica Generalizada:

Finalmente, la validación de la existencia de valores propios λ_n recae en la continuidad del flujo de calor evaluada en esta misma interfaz ($i = N - 1$):

$$-A_{N-1} k_{N-1} \nu_{N-1} \sin(\nu_{N-1} l_{N-1}) + B_{N-1} k_{N-1} \nu_{N-1} \cos(\nu_{N-1} l_{N-1}) - B_N k_N \nu_N \cos(\nu_N l_N) = 0$$

Estas expresiones generalizadas constituyen el núcleo algorítmico del código desarrollado en Python. Este enfoque recursivo permite sintetizar el álgebra requerida para los sistemas de múltiples muestras.

Implementación computacional

En este apéndice se presentan los algoritmos centrales desarrollados en el lenguaje Python para la resolución del modelo fotoacústico multicapa. Para optimizar el espacio y garantizar la legibilidad técnica, se omiten las rutinas de inicialización gráfica y generación de mallas, enfocándose exclusivamente en los núcleos de cálculo. Todo el código fuente está diseñado para operar con arreglos vectorizados mediante la biblioteca NumPy y rutinas de optimización de SciPy.

B.1. Configuración Global y Parámetros del Sistema

Este bloque contiene las dependencias y las constantes físicas empleadas a lo largo de todos los enfoques. La estructuración en listas facilita la iteración algorítmica sobre los dominios de cada capa.

```

1 import numpy as np
2 from math import sin, cos, sqrt
3 from scipy.optimize import brentq
4 from scipy.interpolate import CubicSpline
5 from scipy.sparse import diags
6 from scipy.sparse.linalg import eigsh
7
8 # Geometría y Propiedades Térmicas (mm, W/mm*K, mm2/s)
9 ls, lm1, lm2, lg = 2.0, 1.0, 1.0, 2.0
10 l_total = lm1 + lm2
11 ks, km1, km2, kg = 1.1e-3, 0.069, 0.301, 2.6e-5
12 alp_s, alp_m1, alp_m2, alp_g = 0.629, 24.041, 121.716, 21.8
13
14 # Propiedades Derivadas, Puntos de Interfaz y Parámetros Láser
15 cr_vals = [ks/alp_s, km1/alp_m1, km2/alp_m2, kg/alp_g]
16 k_vals = [ks, km1, km2, kg]
17 pto_corte = [-(ls + l_total), -l_total, -lm2, 0.0, lg]
18 IO, f_mod, Phi = 0.01, 30.0, 25.0
19 omega = 2 * np.pi * f_mod
20 betas_capas = [0.0, 1.2170e5, 6.8139e4, 0.0]

```

B.2. Enfoque Semianalítico Matricial y Búsqueda de Raíces

La ecuación característica se evalúa propagando los coeficientes térmicos entre interfaces. Para manejar los polos de la función seno en la capa de gas, se implementó un algoritmo que aísla subintervalos mediante el Teorema de Bolzano y refina la raíz exacta con el Método de Brent.

```

1 pto_corte = [-(ls + 1), -1, -lm2, 0.0, lg]; a, b = -(ls + 1), lg
2
3 def nu(lam):
4     lam = abs(lam)
5     return sqrt(lam/alp_s), sqrt(lam/alp_m1), sqrt(lam/alp_m2), sqrt(lam/alp_g)
6
7 def F(lam):#Ecuación característica mediante propagación secuencial
8     vs, vm1, vm2, vg = nu(lam)
9
10    A2, B2 = sin(vs * ls), (ks * vs / (km1 * vm1)) * cos(vs * ls)
11    A3 = A2 * cos(vm1 * lm1) + B2 * sin(vm1 * lm1)
12    B3 = (km1 * vm1 / (km2 * vm2)) * (-A2 * sin(vm1 * lm1) + B2 * cos(vm1 * lm1))
13    den = sin(nu_g * lg) # Manejo de singularidades
14    if abs(den) < 1e-12: return np.nan
15    B4 = -(A3 * cos(vm2 * lm2) + B3 * sin(vm2 * lm2)) / den
16    return (-A3 * km2 * vm2 * sin(vm2 * lm2) + B3 * km2 * vm2 * cos(vm2 * lm2) - B4 * kg *
17           vg * cos(vg * lg))
18
19 def eigval(n_roots=8, lam_max=1e3):
20     roots, m, l_izq = [], 1, 0.0
21     while len(roots) < n_roots and l_izq < lam_max:
22         lam_pole = (m * np.pi / lg)**2 * alp_g
23         l_izq, l_der, subN = l_izq + 1e-10, lam_pole - 1e-10, 150000
24         xs = np.linspace(l_izq, l_der, subN + 1) # Subintervalos de Bolzano
25         vals = []
26         for x in xs:
27             try: vals.append(F(x))
28             except ZeroDivisionError: vals.append(np.nan)
29         for i in range(subN):
30             f1, f2 = vals[i], vals[i+1]
31             if not (np.isfinite(f1) and np.isfinite(f2)): continue
32             if f1 * f2 < 0:
33                 try:
34                     r = brentq(F, xs[i], xs[i+1])
35                     if all(abs(r - rp) > 1e-6 for rp in roots):
36                         roots.append(r)
37                         if len(roots) >= n_roots: return sorted(roots)
38                     except ValueError: pass
39             m += 1; l_izq = lam_pole
40     return sorted(roots)
41 vals = eigval(n_roots=8)

```

B.3. Implementación Numérica mediante Diferencias Finitas

El ensamblaje de la matriz tridiagonal se optimizó empleando la media armónica para la conductividad en las interfaces y formato disperso (CSC).

```

1 pto_corte = [-(ls + 1), -1, -lm2, 0.0, lg]; a, b = -(ls + 1), lg
2
3 # Discretización del dominio
4 N = 200000; x = np.linspace(a, b, N); h = x[1] - x[0]
5
6 k_vals, cr_vals, esp = [ks, km1, km2, kg], [cr_s, cr_m1, cr_m2, cr_g], [ls, lm1, lm2, lg]
7
8 n_puntos = []
9 for i in esp:
10     calculo = int(round(i / h))
11     n_puntos.append(calculo)
12 n_puntos[-1] = N - sum(n_puntos[:-1])
13
14 n_puntos = [int(round(i / h)) for i in esp] # Asignación de puntos por cada capa
15 n_puntos[-1] = N - sum(n_puntos[:-1]) # Ajuste de cierre de malla

```

```

16
17 # Vectores de propiedades en cada nodo
18 kx = np.repeat(k_vals, n_puntos)
19 crx = np.repeat(cr_vals, n_puntos)
20
21 k_mid = (2 * kx[:-1] * kx[1:]) / (kx[:-1] + kx[1:]) # Media armónica
22 main_diag = (k_mid[:-1] + k_mid[1:]) / h**2 #Diagonal principal
23 off_diag = -k_mid[1:-1] / h**2 #Diagonal secundaria
24
25 # Formato CSC (Compressed Sparse Column)
26 A = diags([off_diag, main_diag, off_diag], [-1, 0, 1], format='csc')
27 # Matriz B: Masa termica
28 B_diag = crx[1:-1]
29 B = diags([B_diag], [0], format='csc')
30
31 num_eigs = 8
32
33 eigvals, eigfunc = eigsh(A, k=num_eigs, M=B, sigma=0, which='LM')

```

B.4. Implementación del Método SPSS

Este apéndice detalla el núcleo algorítmico desarrollado en Python para la resolución del problema espectral y la reconstrucción de la señal fotoacústica (amplitud y fase).

```

1 pto_corte = [-(ls + 1), -1, -lm2, 0.0, lg]
2 N_capa, M = 4000, 40 # Puntos por capa y numero de potencias
3 k_vals, cr_vals = [ks, km1, km2, kg], [cr_s, cr_m1, cr_m2, cr_g]
4
5 def integrar_spps(Y_prev, n):
6     Y_total, const_int = [], 0.0
7     for i in range(len(pto_corte)-1):
8         x_capa = np.linspace(pto_corte[i], pto_corte[i+1], N_capa)
9         if n % 2 == 1: integrando = -Y_prev[i] / k_vals[i] # n impar
10        else: integrando = Y_prev[i] * cr_vals[i] # n par
11
12        cs = CubicSpline(x_capa, integrando, bc_type='natural')
13        cs_int = cs.antiderivative()
14        res_int = (cs_int(x_capa) - cs_int(x_capa[0])) + const_int
15        const_int = res_int[-1]
16        Y_total.append(res_int)
17    return Y_total
18
19 # Construccion de la serie Truncada
20 Y_inicial = []
21 for i in range(4):
22     Y_0 = np.ones(N_capa)
23     Y_inicial.append(Y_0)
24
25 Y_2 = [Y_inicial] #Creamos lista para integrar las potencias con el caso base Y(0) = 1
26 for n in range(1, 2*M + 2):
27     Y_siguiete = integrar_spps(Y_2[-1], n)
28     Y_2.append(Y_siguiete)
29
30 #Coeficiente del polinomio
31 a_m = []
32 for m in range(M+1):
33     m_impar = 2 * m + 1
34     termino_serie = Y_2[m_impar]
35     Y_b = termino_serie[-1][-1]
36     a_m.append(Y_b)
37
38 a_m_orden = np.array(a_m[::-1], dtype=float)

```

```

39 scale = np.max(np.abs(a_m_orden))
40 a_norm = a_m_orden / scale # Normalizacion para estabilidad numerica
41
42 # Búsqueda de raíces del polinomio característico (Brent)
43 malla = np.linspace(1e-7, 100, 10000)
44 valores = np.polyval(a_norm, malla) # Metodo de Horner
45 posible_raiz = np.where(np.sign(valores[:-1]) * np.sign(valores[1:]) < 0)[0]
46
47 raices = []
48 for i in posible_raiz:
49     r = brentq(lambda z: np.polyval(a_norm, z), malla[i], malla[i+1], xtol=1e-14)
50     raices.append(r)
51
52 lambda_vals = np.array(sorted(set(raices))[:8])

```

Reconstrucción de las componentes de la solución final

```

1 # Funcion para definir theta con X_n normalizada
2 def unif(lambda_vals, Y_2, M, pto_corte, cr_vals, betas_capas):
3     th_list, Xn_list = [], []
4     for n in range(min(6, len(lambda_vals))):
5         lam_n = lambda_vals[n]
6         X_capas = X_eig_norm(lam_n, Y_2, M, pto_corte, cr_vals)
7         Xn_list.append(np.concatenate(X_capas))
8         theta_n = 0.0
9         for i in [1, 2]:
10             beta_actual, x_c = betas_capas[i], np.linspace(pto_corte[i], pto_corte[i+1],
11                 N_capa)
12             Q_x = beta_actual * np.exp(beta_actual * x_c)
13             cs = CubicSpline(x_c, Q_x * X_capas[i], bc_type='natural')
14             cs_int = cs.antiderivative()
15             theta_n += cs_int(x_c[-1]) - cs_int(x_c[0])
16             th_list.append(theta_n)
17     return np.array(th_list), Xn_list
18
19 # Definir funcion de temperatura por componentes
20 def u_comp(x_u, t, lambda_vals, th, Xn, I0, omega, Phi):
21     u_trans, u_dc, u_ac = np.zeros_like(x_u), np.zeros_like(x_u), np.zeros_like(x_u)
22     for n in range(min(6, len(lambda_vals))):
23         lam_n, th_n, X_n = lambda_vals[n], th[n], Xn[n]
24         comun = (I0 / 2.0) * th_n
25         term_t = (1/lam_n + lam_n/(lam_n**2 + omega**2)) * np.exp(-lam_n * t)
26         u_trans -= comun * term_t * X_n
27         u_dc += comun * (1/lam_n) * X_n
28         num_ac, den_ac = lam_n * np.cos(omega * t) + omega * np.sin(omega * t), lam_n**2 +
29             omega**2
30         u_ac += comun * (num_ac / den_ac) * X_n
31     u_dc += Phi
32     return u_trans, u_dc, u_ac
33
34 #amplitud y fase del fasor complejo.
35 def calcular_amp_fase(lambda_vals, th, Xn, I0, omega):
36     u_compleja = np.zeros_like(Xn[0], dtype=complex)
37     for n in range(len(lambda_vals)):
38         lam_n, th_n, X_n = lambda_vals[n], th[n], Xn[n]
39         denominador = lam_n + 1j * omega
40         u_compleja += (I0 / 2.0) * th_n * X_n / denominador
41
42     amplitud, fase = np.abs(u_compleja), np.degrees(np.angle(u_compleja))
43
44     return amplitud, fase

```

B.5. Método SPSS para coeficientes variables

Para los escenarios con perfiles térmicos heterogéneos, la función de integración se adapta de forma directa reemplazando las constantes del material por la evaluación local continua de las propiedades físicas $k(x)$ y $c\rho(x)$. El resto de la rutina de empalme con Splines Cúbicos se mantiene estructuralmente idéntica al caso homogéneo de la sección anterior.

```
1 pto_corte = [-(ls + 1), -1, -lm2, 0.0, lg]
2 N_capa, M = 8000, 40 # Puntos por capa y numero de potencias
3
4 def k_S(x): return ks * (1 + 0.03 * np.sin(x))
5 def c_S(x): return cr_s * (1 + 0.03 * np.cos(x))
6 def k_M1(x): return km1 * (1 + 0.08 * np.cos(4*x))
7 def c_M1(x): return cr_m1 * (1 + 0.08 * np.sin(4*x))
8 def k_M2(x): return km2 * (1 + 0.1 * np.tanh(x))
9 def c_M2(x): return cr_m2 * (1 + 0.1 * np.tanh(x))
10 def k_G(x): return kg * (1 + 0.02 * np.sin(2 * x))
11 def c_G(x): return cr_g * (1 + 0.02 * np.cos(2 * x))
12
13 # Pre-cálculo de mallas y perfiles para eficiencia en SPSS
14 mallas_x = [np.linspace(pto_corte[i], pto_corte[i+1], N_capa) for i in range(len(pto_corte)
15 -1)]
16 funcs_k, funcs_c = [k_S, k_M1, k_M2, k_G], [c_S, c_M1, c_M2, c_G]
17 k_perfiles = [funcs_k[i](mallas_x[i]) for i in range(len(mallas_x))]
18 cr_perfiles = [funcs_c[i](mallas_x[i]) for i in range(len(mallas_x))]
19
20 def integrar_spps(Y_prev, n):
21     Y_total, const_int = [], 0.0
22     for i, x_capa in enumerate(mallas_x):
23         integrando = -Y_prev[i]/k_perfiles[i] if n % 2 == 1 else Y_prev[i] * cr_perfiles[i]
24         cs_spline = CubicSpline(x_capa, integrando, bc_type='natural')
25         cs_int = cs_spline.antiderivative()
26         res_int = (cs_int(x_capa) - cs_int(x_capa[0])) + const_int
27         const_int = res_int[-1]; Y_total.append(res_int)
28     return Y_total
29
30 # Serie recursiva y Polinomio característico
31 Y_inicial = [np.ones(N_capa) for _ in range(len(pto_corte)-1)]; Y_2 = [Y_inicial]
32 for n in range(1, 2*M + 2): Y_2.append(integrar_spps(Y_2[-1], n))
33 a_m = [Y_2[2*m+1][-1][-1] for m in range(M+1)]
34 a_norm = np.array(a_m[:-1], dtype=float) / np.max(np.abs(a_m))
35
36 # Búsqueda de Raíces mediante Bolzano y Brent
37 malla_root = np.linspace(1e-7, 100, 20000); valores = np.polyval(a_norm, malla_root)
38 posible_raiz = np.where(np.sign(valores[:-1]) * np.sign(valores[1:]) < 0)[0]
39 lambda_vals = np.array([brentq(lambda z: np.polyval(a_norm, z), malla_root[i], malla_root[i
40 +1], xtol=1e-14) for i in posible_raiz])[8]
```

Bibliografía

- [1] N. R. C. Guzman, “Análisis de problemas de propagación en fibra de dispersión plana mediante el método spps,” tesis de maestría, ESIME-Zacatenco, IPN, Ciudad de México, CDMX, Ene. 2018.
- [2] S. E. Valdez, “Análisis de medios no homogéneos para el diseño de filtros ópticos usando el método spps,” tesis de maestría, ESIME-Zacatenco, IPN, Ciudad de México, CDMX, Ene. 2018.
- [3] I. I. A. Hernández, “Método spps para el análisis de problemas de propagación de ondas en fibra óptica de compensación de dispersión,” tesis de maestría, ESIME-Zacatenco, IPN, Ciudad de México, CDMX, Dic. 2017.
- [4] L. C. Osornio, “Análisis de dispersión de guía de onda en fibras de dispersión desplazada no nula usando el método de spps,” tesis de maestría, ESIME-Zacatenco, IPN, Ciudad de México, CDMX, Ene. 2016.
- [5] E. O. Caballero, “Ecuación de dispersión para el operador de sturm-liouville mediante el método de series de potencias del parámetro espectral,” tesis de maestría, Facultad de Ingeniería, UAQ, Queretaro, Qro, Nov. 2014.
- [6] S. Barmagambetov and U. Koilyshov, “Solution of multilayer problems for the heat equation by the fourier method,” *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, vol. 127, no. 3, 2025.
- [7] R. Castillo-Perez, J. Ek-Ek, C. Jacome-Peñaherrera, D. Jauregui-Vazquez, R. Sanchez-Lara, H. Offerhaus, and J. Alvarez-Chavez, “Comparative modal analysis in micro–nano-optical fiber tapers using spectral parameter power series method and exact modes method,” *Journal of Computational Electronics*, vol. 22, no. 2, pp. 690–697, 2023.
- [8] W.-Y. Tsai, S. Breimann, T.-W. Shen, and D. Frishman, “Photoacoustic and absorption spectroscopy imaging analysis of human blood,” *Plos one*, vol. 18, no. 8, p. e0289704, 2023.
- [9] R. Vega, V. Rabinovitch-Likhtman, and R. Castillo-Pérez, “Aplicación del método de Series de Potencias del Parámetro Espectral para el análisis numérico de la propagación de ondas de radio en la ionosfera no homogénea estratificada sin aplicación de fuerzas a las cargas,” *Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica*, vol. 10, no. 59, pp. 66–81, 2022.

- [10] M. Farkas and B. Deconinck, “Solving the heat equation with variable thermal conductivity,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 135, p. 108395, 2023.
- [11] D. Rubio, D. A. Tarzia, and G. F. Umbricht, “Heat transfer process with solid-solid interface: Analytical and numerical solutions,” *WSEAS Transactions on Mathematics*, 2021.
- [12] L. Zhou, M. Parhizi, and A. Jain, “Theoretical modeling of heat transfer in a multilayer rectangular body with spatially-varying convective heat transfer boundary condition,” *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 170, p. 107156, 2021.
- [13] M. Akel, H. M. Elshehabey, and R. Ahmed, “Generalized integral transform method for solving multilayer diffusion problems,” *arXiv preprint arXiv:2109.06641*, 2021.
- [14] N. G. March and E. J. Carr, “Finite volume schemes for multilayer diffusion,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 345, pp. 206–223, 2019.
- [15] J. López-Toledo and H. Oviedo-Galdeano, “Reflection and transmission of a gaussian beam for an inhomogeneous layered medium using spps method,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 32, no. 17, pp. 2210–2227, 2018.
- [16] E. J. Carr and N. G. March, “Semi-analytical solution of multilayer diffusion problems with time-varying boundary conditions and general interface conditions,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 333, pp. 286–303, 2018.
- [17] M. Isaiev, G. Mussabek, P. Lishchuk, K. Dubyk, N. Zhylybayeva, G. Yar-Mukhamedova, D. Lacroix, and V. Lysenko, “Application of the photoacoustic approach in the characterization of nanostructured materials,” *Nanomaterials*, vol. 12, no. 4, p. 708, 2022.
- [18] B. Abad, D.-A. Borca-Tasciuc, and M. Martin-Gonzalez, “Non-contact methods for thermal properties measurement,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 76, pp. 1348–1370, 2017.
- [19] M. W. Sigrist, “Photoacoustic spectroscopy, applications,” in *Encyclopedia of Spectroscopy and Spectrometry*, pp. 2137–2145, Elsevier, 3rd ed., 2017.
- [20] S. Manohar and D. Razansky, “Photoacoustics: a historical review,” *Advances in optics and photonics*, vol. 8, no. 4, pp. 586–617, 2016.
- [21] E. J. Carr and I. W. Turner, “A semi-analytical solution for multilayer diffusion in a composite medium consisting of a large number of layers,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 40, no. 15-16, pp. 7034–7050, 2016.
- [22] M. R. Rodrigo and A. L. Worthy, “Solution of multilayer diffusion problems via the laplace transform,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 444, no. 1, pp. 475–502, 2016.
- [23] K. V. Khmelnytskaya and I. Serroukh, “The heat transfer problem for inhomogeneous materials in photoacoustic applications and spectral parameter power series,” *Mathematical methods in the applied sciences*, vol. 36, no. 14, pp. 1878–1891, 2013.

- [24] A. Yoshida, K. Kagata, and T. Yamada, “Measurement of thermal effusivity of human skin using the photoacoustic method,” *International Journal of Thermophysics*, vol. 31, pp. 2019–2029, 2010.
- [25] L. Simon and N. Loney, “An analytical solution for percutaneous drug absorption: application and removal of the vehicle,” *Mathematical biosciences*, vol. 197, no. 2, pp. 119–139, 2005.
- [26] C. Liu and W. P. Ball, “Analytical modeling of diffusion-limited contamination and decontamination in a two-layer porous medium,” *Advances in Water Resources*, vol. 21, no. 4, pp. 297–313, 1998.
- [27] N. Jannat, A. Hussien, B. Abdullah, and A. Cotgrave, “A comparative simulation study of the thermal performances of the building envelope wall materials in the tropics,” *Sustainability*, vol. 12, no. 12, p. 4892, 2020.
- [28] Y. A. Cengel and A. J. Ghajar, *Transferencia de calor y masa*, vol. 53. McGraw-Hill Interamericana, 2007.
- [29] S. Krishnaswamy, “Photoacoustic characterization of materials,” in *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics* (W. Sharpe, ed.), pp. 769–800, Boston, MA, USA: Springer, 2008.
- [30] A. Tajaldeem, M. Alrashidi, M. J. Alsaadi, S. S. Alghamdi, H. Alshammari, H. Alsleem, M. Jaffer, R. Aljondi, S. Alqahtani, A. Alotaibi, *et al.*, “Photoacoustic imaging in prostate cancer: A new paradigm for diagnosis and management,” *Photodiagnosis and Photodynamic Therapy*, vol. 47, p. 104225, 2024.
- [31] S. J. Farlow, *Partial differential equations for scientists and engineers*. Courier Corporation, 1993.
- [32] A. Zamora Ramos, “Notas para el curso: ecuaciones diferenciales parciales,” 2011.
- [33] A. N. Karapetyants and V. V. Kravchenko, *Methods of mathematical physics: classical and modern*. Springer Nature, 2022.
- [34] R. L. Burden *et al.*, *Análisis numérico*. Biblioteca Hernán Malo González, 2017.
- [35] R. Hickson, S. I. Barry, G. N. Mercer, and H. S. Sidhu, “Finite difference schemes for multilayer diffusion,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 54, no. 1-2, pp. 210–220, 2011.
- [36] A. P. de Almeida, C. P. Naveira-Cotta, and R. M. Cotta, “Transient three-dimensional heat conduction in heterogeneous media: Integral transforms and single domain formulation,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 117, p. 104792, 2020.
- [37] V. V. Kravchenko and R. M. Porter, “Spectral parameter power series for sturm–liouville problems,” *Mathematical methods in the applied sciences*, vol. 33, no. 4, pp. 459–468, 2010.
- [38] K. V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko, and J. A. Baldenebro-Obeso, “Spectral parameter power series for fourth-order sturm–liouville problems,” *Applied mathematics and computation*, vol. 219, no. 8, pp. 3610–3624, 2012.
- [39] D. G. Zill and M. R. Cullen, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. Belmont, CA, USA: Brooks/Cole, Cengage Learning, 7 ed., 2009.

- [40] N. H. Asmar, *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*. Courier Dover Publications, 2016.
- [41] G. B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, vol. 4. Cole mathematics series, 1992.
- [42] M. A. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville theory and its applications*, vol. 264. Springer, 2008.
- [43] T. Myint-U and L. Debnath, “Linear partial differential equations for scientists and engineers,” *Springer Science & Business Media*, 2007.
- [44] Y. A. Cengel and M. A. Boles, *Termodinámica (8a)*. McGraw Hill Mexico, 2015.
- [45] H. D. Young and R. A. Freedman, *Sears y Zemansky Física universitaria, décimo tercera edición: volumen 1*. Pearson, 2013.
- [46] R. Serway, *Física para Ciencias e Ingeniería Vol I*. Cengage Learning Editores, 2014.
- [47] F. Kreith, M. S. Bohn, *et al.*, *Principios de transferencia de calor*. México: Thomson Learning, 2012.
- [48] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19. American Mathematical Society, 2022.
- [49] P. V. O’neil *et al.*, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. México Cengage Learning, 1994.
- [50] G. L. Garza and F. Martinez Ortiz, “Ecuaciones diferenciales parciales,” 2013.
- [51] A. Rosencwaig and A. Gersho, “Theory of the photoacoustic effect with solids,” *Journal of Applied Physics*, vol. 47, no. 1, pp. 64–69, 1976.
- [52] E. Marín, “Escuchando la luz: breve historia y aplicaciones del efecto fotoacústico,” *Latin-American Journal of Physics Education*, vol. 2, no. 2, p. 17, 2008.
- [53] C. Haisch, “Photoacoustic spectroscopy for analytical measurements,” *Measurement Science and Technology*, vol. 23, no. 1, p. 012001, 2011.
- [54] P. Grosse and R. Wynands, “Simulation of photoacoustic ir spectra of multilayer structures,” *Applied Physics B*, vol. 48, pp. 59–65, 1989.
- [55] J. J. Reyes Salgado, *Propiedades térmicas de bicapas de materiales compuestos con estructura fractal*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.
- [56] D. G. Figueroa, M. G. B. Sánchez, A. G. López, J. G. Z. Villalpando, and F. J. G. Rodríguez, “Mejoramiento de la respuesta fotoacústica en mediciones de difusividad térmica,” *Revista de Ciencias Tecnológicas*, vol. 3, no. 4, pp. 196–205, 2020.
- [57] G. Peña Rodríguez, A. Calderón, and R. Muñoz Hernandez, “Determinación de la difusividad térmica en sólidos usando técnica fotoacústica,” *Revista Colombiana de Física*, 2006.
- [58] R. C. G. Gómez, “Espectroscopia fotoacústica: Una teoría antigua con nuevas aplicaciones,” *Conciencia Tecnológica*, no. 24, p. 2, 2004.
- [59] M. A. Sadiku, *Fundamentos de circuitos eléctricos*. Mc Graw Hill, 2006.

- [60] K. V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko, and H. C. Rosu, “Eigenvalue problems, spectral parameter power series, and modern applications,” *Mathematical methods in the applied sciences*, vol. 38, no. 10, pp. 1945–1969, 2015.
- [61] S. C. Chapra, R. P. Canale, R. S. G. Ruiz, V. H. I. Mercado, E. M. Díaz, and G. E. Benites, *Métodos numéricos para ingenieros*, vol. 5. McGraw-Hill New York, NY, USA, 2011.
- [62] P. J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration*. Courier Corporation, 2007.
- [63] M. N. Polyanskiy, “Refractive index database.” <https://refractiveindex.info/>, 2026. Accedido el 9 de abril de 2026.
- [64] MatWeb, “Material property data.” <https://www.matweb.com/>, 2026. Accedido el 9 de abril de 2026.
- [65] A. Domanowska and R. J. Bukowski, “Theoretical analysis of pulsed photoacoustic effect in solids,” *International Journal of Thermophysics*, vol. 30, pp. 1536–1556, 2009.
- [66] R. Díaz Fuentes, S. Stolik, A. Valor, and J. de la Rosa, “Desarrollo de un sistema fotoacústico para la determinación de coeficientes de absorción ópticos,” *Revista Cubana de Física*, vol. 40, no. 1, 2023.
- [67] D. G. Figueroa, M. G. B. Sánchez, F. J. G. Rodríguez, M. A. E. Álvarez, and J. G. Z. Villalpando, “Fabricación de un prototipo para la medición de propiedades térmicas basado en el efecto fotoacústico,” *Revista de Ciencias Tecnológicas*, vol. 1, no. 1, pp. 44–53, 2018.
- [68] Zurich Instruments, “Principles of lock-in detection and the state of the art,” white paper, Zurich Instruments, Zurich, Switzerland, Apr. 2023.
- [69] S. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC press, 2018.
- [70] A. D. Rakić, “Algorithm for the determination of intrinsic optical constants of metal films: application to aluminum,” *Applied optics*, vol. 34, no. 22, pp. 4755–4767, 1995.
- [71] P. B. Johnson and R. W. Christy, “Optical constants of the noble metals,” *Phys. Rev. B*, vol. 6, pp. 4370–4379, Dec 1972.
- [72] P. B. Johnson and R. W. Christy, “Optical constants of transition metals: Ti, v, cr, mn, fe, co, ni, and pd,” *Phys. Rev. B*, vol. 9, pp. 5056–5070, Jun 1974.
- [73] W. S. Werner, K. Glantschnig, and C. Ambrosch-Draxl, “Optical constants and inelastic electron-scattering data for 17 elemental metals,” *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 38, no. 4, pp. 1013–1092, 2009.