



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO

F1 | **FACULTAD**
DE INGENIERÍA

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Amplitudes de N puntos a un lazo mediante métodos Monte Carlo en el formalismo línea de mundo

T E S I S

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Ingeniero Físico

Presenta:

Omar Fabián Izquierdo Pérez

Director: Dr. Adolfo Huet Soto

Co-director: Dr. Christian Johannes Schubert Baumgartel

Agosto 2026

La presente obra está bajo la licencia:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Bajo los siguientes términos:



Atribución — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#), brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#). Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.



NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con [propósitos comerciales](#).



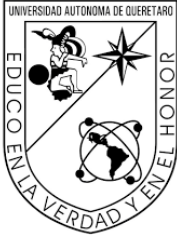
SinDerivadas — Si [remezcla, transforma o crea a partir](#) del material, no podrá distribuir el material modificado.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una [excepción o limitación](#) aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como [publicidad, privacidad, o derechos morales](#) pueden limitar la forma en que utilice el material.



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Ingeniería Física

Amplitudes de N puntos a un lazo mediante métodos Monte
Carlo en el formalismo línea de mundo

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Licenciado en Ingeniería Física

Presenta

Omar Fabián Izquierdo Pérez

Dirigido por

Dr. Adolfo Huet Soto

Dr. Adolfo Huet Soto

Presidente

Dr. Aldrin Melitón Cervantes Contreras

Secretario

Dr. Christian Johannes Schubert Baumgartel

Vocal

Dr. César Moctezuma Mata Zamora

Sinodal

Querétaro, Qro., a 17 de agosto de 2026

Este trabajo está dedicado a mi sobrina Itzamara

Agradecimientos

El desarrollo de esta tesis ha sido posible gracias al apoyo y la presencia de muchas personas a lo largo de mi vida universitaria. Quiero agradecer primeramente a mis padres por brindarme todo lo necesario para lograr mis objetivos y estar a mi lado en los momentos importantes. Agradezco a mis hermanos por el apoyo incondicional y por permanecer unidos a mí a través de estos años. Agradezco también a mis demás familiares que se han preocupado por mí y me han ofrecido su ayuda en todo momento. Quiero dar gracias a mis amigas, Andrea González y Andrea Quiroz, y a mi amigo Emiliano por ser mi compañía en la universidad y por todas las experiencias compartidas dentro y fuera de ella. Le doy gracias a mis profesores y profesoras quienes fueron parte fundamental en mi formación académica y especialmente le agradezco al Dr. Huet y al Dr. Schubert por adentrarme en el gran mundo de la teoría cuántica de campos y brindarme la confianza para la realización de esta tesis, gracias por permitirme trabajar con ustedes y por todo lo que me han aportado académicamente. Finalmente agradezco a la educación pública, con la cual trabajos como este son posibles.

Resumen

En la teoría cuántica de campos, uno de los objetos centrales de estudio son las amplitudes de dispersión, ya que están directamente relacionadas con cantidades físicas medibles en experimentos. Tradicionalmente, estas amplitudes se calculan mediante las reglas de Feynman, las cuales proporcionan un procedimiento sistemático para obtenerlas a partir de una representación diagramática de las expansiones perturbativas. El formalismo línea de mundo ofrece un método alternativo para el cálculo de amplitudes, donde estas se expresan como integrales de trayectoria de una sola partícula relativista, reduciendo la complejidad asociada con el tratamiento de múltiples diagramas de Feynman. No obstante, debido a la escasez de resultados analíticos cerrados y a la complejidad de las integrales involucradas, es necesario recurrir a métodos numéricos. En este trabajo se presenta la primera aplicación del formalismo Worldline Monte Carlo al cálculo numérico de amplitudes de N puntos a un lazo en el espacio de momentos, considerando la teoría escalar de interacción ϕ^3 y la electrodinámica cuántica escalar, con el objetivo de explorar su viabilidad como alternativa computacional al método perturbativo convencional. La implementación numérica reprodujo exitosamente los resultados conocidos para la teoría ϕ^3 y permitió estudiar amplitudes de cuatro fotones en la electrodinámica cuántica escalar en el régimen de bajas energías. Asimismo, se identificaron las principales limitaciones numéricas del método y los parámetros computacionales que proporcionan un buen equilibrio entre precisión y tiempo de ejecución.

Palabras clave: Formalismo de línea de mundo; Worldline Monte Carlo; Amplitudes de N puntos a un lazo; Electrodinámica cuántica escalar; Teoría ϕ^3 .

Abstract

In quantum field theory, scattering amplitudes are among the central objects of study, as they are directly related to physical quantities that can be measured experimentally. Traditionally, these amplitudes are calculated using Feynman rules, which provide a systematic procedure for obtaining them from a diagrammatic representation of perturbative expansions. The worldline formalism offers an alternative approach to the calculation of amplitudes, in which they are expressed as path integrals over a single relativistic particle, reducing the complexity associated with the treatment of multiple Feynman diagrams. However, due to the scarcity of closed-form analytical results and the complexity of the integrals involved, numerical methods are required. In this work we present the first application of the Worldline Monte Carlo formalism to the numerical calculation of one-loop N-point amplitudes in momentum space, considering scalar ϕ^3 theory and scalar quantum electrodynamics, with the aim of exploring its viability as a computational alternative to the conventional perturbative approach. The numerical implementation successfully reproduced known results for ϕ^3 theory and enabled the study of four-photon amplitudes in scalar quantum electrodynamics in the low-energy regime. Furthermore, the main numerical limitations of the method were identified, along with the computational parameters that provide a suitable balance between accuracy and computational cost.

Keywords: Worldline formalism; Worldline Monte Carlo; One-loop N-point amplitudes; Scalar quantum electrodynamics; ϕ^3 theory.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
1. Introducción	1
2. Antecedentes	4
3. Fundamentación teórica	7
3.1. Mecánica clásica y el principio de mínima acción	7
3.2. Integrales de camino en mecánica cuántica no relativista	8
3.2.1. Integral de camino	8
3.2.2. Conexión con el formalismo de la mecánica cuántica	9
3.2.3. Ejemplos de cálculo exacto de la integral de camino	11
3.2.4. Potenciales que dependen de la velocidad	13
3.3. Teoría cuántica de campos	14
3.3.1. Teoría clásica de campos	15
3.3.2. Integrales de camino en teoría cuántica de campos y funciones gene- radoras	17
3.3.3. Teorías libres y el propagador	19
3.3.4. Teorías de interacción y teoría de perturbaciones	21
3.3.5. Electrodinámica cuántica escalar	24
4. Formalismo línea de mundo	26
4.1. Acción efectiva y su expansión en lazos	26
4.2. Amplitudes de N puntos	30

4.2.1. Amplitudes de N puntos en la teoría de interacción ϕ^3	30
4.2.2. Amplitudes de N puntos en la electrodinámica cuántica escalar	34
4.3. Worldline Monte Carlo	36
4.3.1. Integración Monte Carlo	36
4.3.2. Extensión a integrales funcionales	37
5. Amplitudes de N puntos con WMC	39
5.1. Cálculo de las amplitudes con WMC	39
5.2. Teoría de interacción ϕ^3 con WMC	41
5.3. QED escalar con WMC	55
6. Conclusiones	71
A. Tiempo de cómputo	73
Referencias	78

Índice de figuras

3.1. Representación diagramática de la función de Green de cuatro puntos en la teoría libre.	21
3.2. Representación diagramática de la función de Green de dos puntos a segundo orden en la teoría de interacción ϕ^3	23
5.1. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.11.	42
5.2. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.11.	43
5.3. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.12.	44
5.4. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.12.	44
5.5. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.13.	45
5.6. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.13.	46
5.7. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.14.	47

5.8. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.14.	47
5.9. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.15 para $E = 0.01$	48
5.10. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.15 para $E = 0.1$	49
5.11. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.15 para $E = 0.5$	50
5.12. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.15 para $E = 0.9$	51
5.13. Comparación entre el método WMC y la expresión analítica para la amplitud de $N = 4$ puntos <i>on-shell</i> . Se usó la configuración 5.15 con $E = 0.1$	52
5.14. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.16.	53
5.15. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.16.	53
5.16. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.17.	54
5.17. Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.17.	55
5.18. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20.	57
5.19. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del integrando de la amplitud con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20.	57

5.20. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías de la amplitud para distintas masas con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20.	58
5.21. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.21.	59
5.22. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del integrando de la amplitud con la configuración de momentos y polarizaciones 5.21.	59
5.23. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías de la amplitud para distintas masas con la configuración de momentos y polarizaciones 5.21.	60
5.24. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.22.	61
5.25. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del integrando de la amplitud con la configuración de momentos y polarizaciones 5.22.	61
5.26. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías de la amplitud para distintas masas con la configuración de momentos y polarizaciones 5.22.	62
5.27. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.23.	63
5.28. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del integrando de la amplitud con la configuración de momentos y polarizaciones 5.23.	63
5.29. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías de la amplitud para distintas masas con la configuración de momentos y polarizaciones 5.23.	64
5.30. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$	65

5.31. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20 para cuatro ensambles distintos. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$	66
5.32. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.21 para cuatro ensambles distintos. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$	67
5.33. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.22 para cuatro ensambles distintos. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$	68
5.34. Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.23 para cuatro ensambles distintos. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$	69
A.1. Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la teoría ϕ^3 en función del número de partículas externas. Para cada N se utilizó una configuración de momentos aleatoria y se usó el mismo ensamble de lazos con $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$	74
A.2. Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la teoría ϕ^3 en función del parámetro N_p . Se usó la configuración de momentos 5.11 y se fijó $N_l = 5000$	74
A.3. Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la teoría ϕ^3 en función del parámetro N_l . Se usó la configuración de momentos 5.11 y se fijó $N_p = 1000$	75
A.4. Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice para distintos T en la teoría ϕ^3 en función del número de partículas externas. Para cada N se usó una configuración de momentos aleatoria y se usó el mismo ensamble de lazos con $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$	75
A.5. Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la QED escalar en función del número de partículas externas. Para cada N se utilizó una configuración de momentos aleatoria, la misma polarización y se usó el mismo ensamble de lazos con $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$	76

- A.6. Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la QED escalar en función del parámetro N_p . Se usó la configuración de momentos y polarizaciones 5.20 y se fijó $N_l = 5000$ 76
- A.7. Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la QED escalar en función del parámetro N_l . Se usó la configuración de momentos y polarizaciones 5.20 y se fijó $N_p = 1000$ 77
- A.8. Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice para distintos T en la QED escalar en función del número de partículas externas. Para cada N se usó una configuración de momentos aleatoria, la misma polarización y se usó el mismo ensamble de lazos con $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$. 77

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica nace del estudio de fenómenos que viven en el mundo microscópico, donde la descripción matemática de los sistemas es totalmente distinta a la mecánica clásica. Fenómenos como la radiación de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico o las líneas de emisión del átomo de hidrógeno, fueron el punto de partida para la formulación de esta teoría. Los trabajos de Heisenberg, Schrödinger y Dirac, entre otros físicos del momento, son el pilar del formalismo matemático que conocemos hoy en día. A pesar del éxito que tuvo la mecánica cuántica, el intento de crear una teoría unificada con la relatividad especial manteniendo el mismo formalismo no fue suficiente para explicar otros fenómenos relacionados a la interacción de partículas elementales. Esta nueva teoría tenía algunas inconsistencias importantes, como problemas en la interpretación probabilística de la densidad de probabilidad y la incapacidad de explicar procesos donde el número de partículas no se conservaba, ya que la relatividad especial permite procesos con creación y aniquilación de partículas. Sin embargo, este intento de unificación brindó grandes logros como el desarrollo de la teoría cuántica del electrón (Dirac, 1928a), con la ecuación de Dirac, donde el espín de esta partícula surgía de manera natural, además predijo la existencia de antipartículas y sirvió como base para el desarrollo de la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés) (Dirac, 1928b), siendo esta la primer teoría cuántica de campos.

El objetivo central de estudio de la teoría cuántica de campos es la interacción fundamental de las partículas elementales. Esta teoría posee una formulación extensa y abarca la descripción e interacción de todas las partículas del modelo estándar. Los experimentos de dispersión son los que se realizan principalmente en este contexto, donde cantidades como la sección eficaz juegan un papel importante en la descripción de las interacciones entre partículas. La formulación de la teoría cuántica de campos permite obtener una metodología bien establecida

para el cálculo de secciones eficaces a través de cantidades llamadas amplitudes de dispersión. Las amplitudes son de suma importancia ya que constituyen los bloques fundamentales en la construcción de observables físicos.

Los diagramas de Feynman son la técnica estándar en cuanto al cálculo de amplitudes de dispersión. Estos diagramas fueron introducidos por el físico R. Feynman y son una manera gráfica de entender la propagación e interacción entre partículas, así como la teoría cuántica de campos perturbativa. La interacción entre partículas viene dada por términos que acoplan a los campos dentro del lagrangiano de la teoría. Dado que, en general, no es posible calcular amplitudes de manera exacta en las teorías de interacción, se recurre a la teoría de perturbaciones la cual permite expresar estas cantidades como series de potencias de la constante de acoplamiento. Cuando se quiere estudiar algún proceso de dispersión, se dibujan los diagramas que contribuyen al proceso al orden deseado, para después aplicar las reglas correspondientes a la teoría y construir la amplitud deseada.

A pesar de que las reglas de Feynman ofrecen un procedimiento sistemático para calcular amplitudes de dispersión, el número de diagramas que se deben considerar crece rápidamente al tomar órdenes más altos en el acoplamiento o un mayor número de partículas externas. Esto hace que los cálculos de amplitudes se vuelvan cada vez más complejos para muchos procesos de dispersión. El formalismo línea de mundo ofrece una alternativa para el cálculo de algunas amplitudes, reescribiéndolas como integrales de trayectoria de una sola partícula relativista. La gran ventaja de este formalismo es que brinda expresiones integrales de las amplitudes, conocidas como fórmulas maestras, las cuales ya incluyen todos los diagramas que contribuyen al proceso. Esto es ideal para procesos con muchas partículas externas.

Incluso con la ventaja que ofrece el formalismo línea de mundo para calcular amplitudes, resolver las integrales involucradas no es una tarea fácil en general. Existen algunos resultados analíticos para casos específicos, como cierto número de puntos o cierto régimen de energía. De esta forma, se puede recurrir a los métodos numéricos para aproximar los cálculos y explorar configuraciones que son intratables de forma analítica.

La integración Monte Carlo es un método numérico que se basa en conjuntos de variables aleatorias. Es muy útil para integrales múltiples porque reduce considerablemente el tiempo de cómputo. En el contexto del formalismo línea de mundo, la integración Monte Carlo se puede extender a integrales funcionales, lo cual es en esencia la integral de trayectoria, de modo que la base del método es la generación de caminos aleatorios sobre los cuales se realiza la suma.

En este trabajo se estudian las amplitudes de N puntos a un lazo en las teorías ϕ^3 y QED escalar a través del formalismo línea de mundo y los métodos Monte Carlo. Estas teorías

constituyen escenarios adecuados para el desarrollo de este trabajo debido a que poseen una estructura física y matemática de interés para teorías más complejas.

La teoría ϕ^3 describe un campo escalar real con auto-interacción de espín cero. Aunque es una teoría simplificada debido a que las interacciones presentes en las teorías fundamentales son más complejas, desempeña un papel importante como punto de partida para el estudio de métodos perturbativos, ya que permite analizar de manera sencilla la estructura de amplitudes de dispersión así como los diagramas de Feynman. Además, los campos escalares aparecen de forma natural en teorías físicas relevantes, como ocurre con el campo de Higgs en el modelo estándar.

Por otra parte, la QED escalar describe un campo escalar complejo de espín cero acoplado al campo electromagnético. Esta teoría incorpora conceptos fundamentales de las teorías de norma, tales como la derivada covariante, constituyendo un paso intermedio natural entre las teorías escalares simples y la electrodinámica cuántica de fermiones.

Estas teorías constituyen un escenario apropiado para la validación del método Monte Carlo. Además, a diferencia de algunas de las aplicaciones más conocidas de Worldline Monte Carlo, como el cálculo de energías de Casimir o la producción de pares en campos externos, el cálculo de amplitudes de N puntos a un lazo constituye un problema en el que las técnicas perturbativas convencionales, basadas en diagramas de Feynman, se encuentran bien establecidas. Por ello, la aplicación de Worldline Monte Carlo a este tipo de amplitudes permite explorar el formalismo como una alternativa computacional a los métodos convencionales, en un contexto donde ambos enfoques pueden ser comparados directamente. En este trabajo se realiza la primera aplicación de Worldline Monte Carlo al cálculo de amplitudes de N puntos a un lazo en el espacio de momentos y se pretende verificar los resultados numéricos con resultados analíticos conocidos, así como explorar configuraciones más complejas.

Capítulo 2

Antecedentes

El cálculo de amplitudes de dispersión constituye uno de los problemas y objetivos centrales en la teoría cuántica de campos, ya que estas cantidades permiten establecer una conexión directa entre la teoría y los observables experimentales en procesos de dispersión de partículas. El enfoque estándar para su cálculo se basa en las reglas de Feynman, donde las amplitudes se obtienen a partir de una expansión perturbativa en términos de diagramas (Schwartz, 2013). Si bien este método ha demostrado ser exitoso, el número de diagramas y la complejidad algebraica crecen rápidamente con el número de puntos externos y el orden en la expansión en lazos, lo que dificulta su aplicación en algunos casos.

Como alternativa a este enfoque, el formalismo línea de mundo reformula las amplitudes como integrales de trayectoria de partículas relativistas, proporcionando representaciones compactas conocidas como fórmulas maestras. El desarrollo de este formalismo puede remontarse a los trabajos de Feynman sobre la formulación de la mecánica cuántica mediante integrales de camino (Feynman, 1948). Posteriormente, en 1950 Feynman formuló una representación de la matriz S de la QED en términos de integrales de camino de partículas relativistas (Feynman, 1950). Esta formulación encontró aplicaciones posteriores como el trabajo de Affleck, Alvarez y Manton, quienes en 1982 emplearon una integral de trayectoria para estudiar la producción de pares en campos externos (Affleck, Alvarez, y Manton, 1982). Durante la década de 1990 Bern y Kosower desarrollaron reglas eficientes para el cálculo de amplitudes de un lazo en teorías de norma a partir de técnicas inspiradas en teoría de cuerdas (Bern y Kosower, 1992). Poco después, Strassler mostró cómo obtener estas reglas directamente a partir de integrales de trayectoria de una sola partícula, sin recurrir a teoría de cuerdas ni a diagramas de Feynman, estableciendo una formulación de las acciones efectivas a un lazo (Strassler, 1992).

Estos desarrollos constituyen la base del formalismo línea de mundo que se conoce en la actualidad. Gracias a esto, el formalismo ha sido aplicado exitosamente a diversas teorías, como la teoría de interacción ϕ^3 , la QED escalar y espinorial (Schubert, 2001) (Edwards, Mata, y Schubert, 2022), la cromodinámica cuántica (QCD) (Schubert, 2001) y la gravedad cuántica (Bastianelli y Zirotti, 2002), permitiendo en algunos casos obtener expresiones más eficientes que las derivadas mediante diagramas de Feynman. No obstante, los resultados analíticos conocidos son limitados y, en general, se restringen a casos particulares, como amplitudes de bajo número de puntos, por ejemplo $N = 4$, o a aproximaciones de baja energía en el contexto de la QED escalar (Ahmadinia, Lopez-Arcos, Lopez-Lopez, y Schubert, 2023).

Debido a la complejidad de las integrales funcionales que aparecen en el formalismo de línea de mundo, se han desarrollado métodos numéricos basados en técnicas Monte Carlo, conocidos como Worldline Monte Carlo. La extensión de la integración Monte Carlo a integrales funcionales parte de la generación de lazos aleatorios con los cuales se realiza la suma sobre distintas trayectorias. Estos lazos siguen una distribución de probabilidad específica y están además discretizados en un número finito de puntos. Existen distintos algoritmos para la creación de estos ensambles y las aplicaciones del método son extensas.

A principios de la década del 2000, Gies y Langfeld desarrollaron una técnica numérica para la evaluación de acciones efectivas mediante el formalismo de línea de mundo (Gies y Langfeld, 2001, 2002). Posteriormente, Gies, Langfeld y Moyaerts aplicaron estas técnicas al cálculo del efecto Casimir en geometrías arbitrarias (Gies, Langfeld, y Moyaerts, 2003), mientras que Gies y Klingmüller las emplearon en el estudio de la producción de pares en campos inhomogéneos (Gies y Klingmüller, 2005). Desde entonces, estos métodos se han aplicado con éxito en distintos contextos. En mecánica cuántica no relativista se han calculado propagadores y algunos niveles de energía para distintos sistemas (Edwards y cols., 2019; Ahumada y Edwards, 2023), así como integrales de camino en espacios curvos (Corradini y Muratori, 2020). En teoría cuántica de campos, además de las aplicaciones mencionadas, han sido empleados en el estudio de acciones efectivas (Gies, Sánchez-Guillén, y Vázquez, 2005) y modelos fermiónicos fuertemente acoplados con N grande (Dunne, Gies, Klingmüller, y Langfeld, 2009). Sin embargo, la aplicación sistemática de estas técnicas al cálculo numérico de amplitudes de N puntos no ha sido explorada.

En este sentido, el presente trabajo se sitúa en la intersección entre el formalismo línea de mundo y los métodos numéricos Monte Carlo, con el objetivo de explorar el cálculo de amplitudes de N puntos a un lazo en las teorías ya mencionadas. De este modo, se busca contribuir al estudio de herramientas computacionales alternativas que permitan extender el

análisis más allá de los casos que pueden ser estudiados analíticamente.

Capítulo 3

Fundamentación teórica

3.1. Mecánica clásica y el principio de mínima acción

Los sistemas clásicos pueden describirse a través del formalismo lagrangiano. Este formalismo sirve como punto de partida en la transición hacia la mecánica cuántica en su formulación de integrales de camino e incluso a teorías de campo cuántico. La dinámica de los sistemas queda descrita por el principio de mínima acción ([Landau y Lifshitz, 1976](#)), cantidad que es de suma importancia.

La acción S se define como el siguiente funcional

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t), \quad (3.1)$$

donde L es el lagrangiano del sistema y depende de las coordenadas generalizadas q , de las derivadas temporales $\dot{q}$ y a veces del tiempo. La dinámica del sistema entre dos puntos (q_1, t_1) , (q_2, t_2) se obtiene imponiendo que la acción sea estacionaria en la trayectoria $q(t)$ manteniendo los extremos fijos, en otras palabras $\delta S[q] = 0$.

La variación de la acción es

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right), \quad (3.2)$$

integrando por partes y aplicando las condiciones de frontera adecuadas

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q. \quad (3.3)$$

Imponiendo la condición $\delta S = 0$ y debido a que δq es arbitraria llegamos a

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (3.4)$$

Estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange y determinan la dinámica de los sistemas clásicos. Como se puede observar, la trayectoria que siguen las partículas es aquella que hace que la acción sea estacionaria, esto es en esencia el principio de mínima acción.

3.2. Integrales de camino en mecánica cuántica no relativista

3.2.1. Integral de camino

La evolución de los sistemas clásicos queda determinada por las ecuaciones de Euler-Lagrange y las condiciones iniciales. Esto permite conocer de manera determinista las trayectorias y otras propiedades de las partículas a estudiar, siendo estas objetos macroscópicos. Por otro lado, la evolución de los sistemas microscópicos y sus propiedades ya no puede ser descrita con la misma teoría y se tiene que recurrir a la mecánica cuántica para reproducir los resultados experimentales. Los objetos microscópicos no tienen trayectorias definidas pero poseen propiedades como energía o momento, las cuales son de interés.

En el formalismo de integrales de camino, la dinámica de los sistemas cuánticos puede ser descrita a través de una cantidad que se llama propagador. Este representa la amplitud de probabilidad de una transición de estado, o bien, una propagación entre dos puntos del espacio tiempo. Se puede denotar como $K(A \rightarrow B)$ y su módulo cuadrado está relacionado con la probabilidad de que el proceso ocurra (Feynman, 1948).

La idea principal de este formalismo es que el propagador se calcula a través de una suma sobre todas las trayectorias posibles entre dos puntos fijos. De manera esquemática se representa así

$$K(A \rightarrow B) \sim \sum_{\text{paths}} e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (3.5)$$

siendo S la acción clásica de cada trayectoria. Se entiende de la ecuación anterior que todos los caminos contribuyen a través de una fase relacionada con la acción.

Se puede dar una representación más precisa discretizando las trayectorias entre los puntos iniciales y finales. En esta discretización, el intervalo de tiempo $(t' - t)$ se divide en pequeños intervalos iguales ε . Al variar todos los puntos intermedios se toman en cuenta todas las

trayectorias y el propagador se aproxima a una sucesión de varias integrales (Feynman y Hibbs, 1965)

$$K(q, t; q', t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (3.6)$$

Al tomar el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos el valor exacto del propagador. Para asegurar la convergencia del cálculo se deben introducir factores de normalización adecuados.

En el límite continuo se escribe

$$K(q, t; q', t') = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (3.7)$$

donde el diferencial $\mathcal{D}q$ indica una suma sobre todas las trayectorias $q(t)$ y es la expresión corta del límite que se tenía antes.

Este formalismo ofrece una alternativa a la formulación estándar de la mecánica cuántica y se puede extender a teorías cuánticas de campo.

3.2.2. Conexión con el formalismo de la mecánica cuántica

En el formalismo estándar de la mecánica cuántica el estado de un sistema se representa por un vector en el espacio de Hilbert llamado *ket* y denotado como $|\psi\rangle$ (Zettili, 2009). La evolución del sistema viene dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar|\dot{\psi}\rangle = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (3.8)$$

siendo $\hat{H}$ el operador Hamiltoniano y en la notación utilizada $|\dot{\psi}\rangle = \frac{d}{dt}|\psi\rangle$.

La solución más general de la ecuación de Schrödinger (suponiendo que el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo) es

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')}|\psi(t')\rangle, \quad (3.9)$$

donde $\hat{U}(t, t') = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')}$ es el operador de evolución.

Una cantidad de interés es el elemento de matriz del operador de evolución en la base coordenada $\langle q|\hat{U}(t, t')|q'\rangle$. La conexión entre ambos formalismos viene dada por la siguiente relación (Shankar, 1980)

$$\langle q|\hat{U}(t, t')|q'\rangle = K(q, t; q', t') = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (3.10)$$

Para establecer esta conexión considérese una división de N intervalos de tiempo dt tal que $Ndt = t - t'$, la amplitud $\langle q|\hat{U}(t, t')|q'\rangle$ puede expresarse así

$$\langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')}|q'\rangle = \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt}|q'\rangle. \quad (3.11)$$

Tomando un conjunto de puntos $\{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}\}$ e insertando el operador identidad entre cada exponencial de la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \langle q|\hat{U}(t, t')|q'\rangle &= \int dq_1 \int dq_2 \dots \int dq_{N-1} \\ &\times \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt}|q_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt}|q_{N-2}\rangle \dots \langle q_2|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt}|q_1\rangle \langle q_1|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt}|q'\rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$, en general $\exp\{\hat{A} + \hat{B}\} \neq \exp\{\hat{A}\}\exp\{\hat{B}\}$, sin embargo, la expansión en serie de Taylor de $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)dt\right\}$ y $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}dt\right\}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}dt\right\}$ coinciden a primer orden en dt , de esta forma cada elemento de matriz puede ser aproximado de la siguiente manera

$$\langle q_{i+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt}|q_i\rangle = \langle q_{i+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}\right)dt}|q_i\rangle \approx \langle q_{i+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}dt}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}dt}|q_i\rangle. \quad (3.13)$$

Insertemos el operador identidad usando la base del momento en 3.13 y recordemos el hecho de que $|q_i\rangle$ es eigenvector de cualquier función del operador $\hat{q}$, así como $|p\rangle$ lo es del operador $\hat{p}$. Asimismo recordemos la forma de las eigenfunciones del momento en la base coordenada $\langle q|p\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}pq}/\sqrt{2\pi\hbar}$.

$$\begin{aligned} \langle q_{i+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}dt}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}dt}|q_i\rangle &= \int dp \langle q_{i+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}dt}|p\rangle \langle p|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}dt}|q_i\rangle \\ &= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}V(q_i)dt}}{2\pi\hbar} \int dp e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}dt} e^{\frac{i}{\hbar}p(q_{i+1}-q_i)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

La integral resultante tiene forma gaussiana y puede ser evaluada. El resultado adquiere siguiente forma

$$\langle q_{i+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hat{p}^2}{2m}dt}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}dt}|q_i\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar dt}} e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{q_{i+1}-q_i}{dt}\right)^2 - V(q_i)\right)dt}. \quad (3.15)$$

Juntando todas las contribuciones y tomando $q = q_N$, $q' = q_0$

$$\langle q | \hat{U}(t, t') | q' \rangle = \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}^N e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t} \right)^2 - V(q_i) \right) \Delta t}, \quad (3.16)$$

en el límite $N \rightarrow \infty$, la integral sobre los puntos intermedios se vuelve la medida de la integral de trayectoria y el argumento de la exponencial imaginaria se convierte en la integral en el tiempo del Lagrangiano, es decir, la acción clásica

$$\int dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}^N \rightarrow \int \mathcal{D}q, \quad (3.17)$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t} \right)^2 - V(q_i) \right) \Delta t} \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}. \quad (3.18)$$

De esta forma queda establecida la ecuación 3.10.

Se concluye que el elemento de matriz del operador de evolución en la base coordenada corresponde al propagador, y dada esta relación, la dinámica del sistema queda descrita por esta cantidad (Dittrich y Reuter, 2001)

$$\psi(q, t) = \int dq' K(q, t; q', t') \psi(q', t'). \quad (3.19)$$

Ambos formalismos resuelven la dinámica de los sistemas cuánticos y su conexión se establece a través del propagador, el cual puede calcularse a través de la suma sobre trayectorias.

3.2.3. Ejemplos de cálculo exacto de la integral de camino

El propagador más simple corresponde al de una partícula libre, cuyo Lagrangiano es $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$. En este Lagrangiano m es la masa de la partícula y $\dot{q}$ representa la velocidad. En conjunto, todo este término corresponde a la energía cinética del sistema. Este propagador se puede calcular directamente del elemento de matriz del operador de evolución o también a través de la integral de camino (Feynman y Hibbs, 1965). Tiene la siguiente forma

$$K_0(q, t; q', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(q - q')^2}{t - t'}}. \quad (3.20)$$

Para ejemplificar el cálculo de la integral de camino considérese el propagador del oscilador armónico cuántico. El Lagrangiano es $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$ y se desea calcular

$$K(q, t; q', t') = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\tilde{t} (\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2)}. \quad (3.21)$$

Se puede realizar el siguiente cambio de variable en la integral

$$q(\tilde{t}) = q_{\text{cl}}(\tilde{t}) + y(\tilde{t}), \quad (3.22)$$

donde $q_{\text{cl}}(\tilde{t})$ es el camino clásico, es decir, la solución a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Se puede mostrar que

$$K(q, t; q', t') = e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{\text{cl}}]} \int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\tilde{t} (\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 y^2)}, \quad (3.23)$$

con condiciones de frontera de Dirichlet $y(t') = y(t) = 0$.

Consideremos ahora la amplitud de una partícula libre de ir de $y' = 0$ a $y = 0$ en el intervalo $t - t'$, es decir $K_0(0, t; 0, t')$. Se puede multiplicar y dividir por esta cantidad la ecuación 3.21, esto permite eliminar las divergencias en la integral de camino

$$K(q, t; q', t') = e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{\text{cl}}]} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} \frac{\int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\tilde{t} (\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 y^2)}}{\int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\tilde{t} \frac{1}{2} m \dot{y}^2}}. \quad (3.24)$$

El argumento de la exponencial del numerador y denominador puede ser integrado por partes para escribir las integrales de camino en forma gaussiana

$$K(q, t; q', t') = e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{\text{cl}}]} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} \frac{\int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\tilde{t} \left[\frac{1}{2} m y \left(-\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} - \omega^2 \right) y \right]}}{\int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t d\tilde{t} \frac{1}{2} m y \left(-\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \right) y}}. \quad (3.25)$$

Teniendo la forma gaussiana, las integrales pueden realizarse de forma exacta (Zee, 2010).

$$K(q, t; q', t') = e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{\text{cl}}]} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} \sqrt{\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} - \omega^2 \right)}}. \quad (3.26)$$

Los determinantes correspondientes pueden ser calculados a través de la resolución del problema de eigenvalores usando las condiciones de frontera de Dirichlet

$$K(q, t; q', t') = e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{\text{cl}}]} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} \sqrt{\frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2}{\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right]}}, \quad (3.27)$$

con $T = t - t'$. Se tiene finalmente el propagador del oscilador armónico cuántico.

$$K(q, t; q', t') = e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{cl}]} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}}, \quad (3.28)$$

donde la acción clásica es

$$S[q_{cl}] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(q^2 + q'^2) \cos \omega T - 2qq']. \quad (3.29)$$

3.2.4. Potenciales que dependen de la velocidad

Este trabajo no tiene como objetivo profundizar en el cálculo de propagadores y sus propiedades para distintos sistemas. Sin embargo, es conveniente presentar brevemente el acoplamiento de una partícula cargada eléctricamente a un campo magnético externo, con el fin de ilustrar algunas de las dificultades que pueden surgir en el tratamiento de integrales de camino cuando la interacción depende explícitamente de la velocidad.

Los ejemplos presentados anteriormente tenían la particularidad de que el potencial de interacción no dependía de la velocidad. Al considerar una partícula cargada en presencia de un campo magnético externo, esta situación cambia, ya que la fuerza de Lorentz depende de la velocidad de la partícula. Esta dependencia debe reflejarse a nivel más fundamental en el lagrangiano, a través del acoplamiento de la partícula con el potencial de interacción. En este caso, el lagrangiano puede escribirse como ([Dittrich y Reuter, 2001](#))

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}, \quad (3.30)$$

donde q es la carga de la partícula y $\mathbf{A}$ se conoce como el potencial vectorial, definido mediante $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

La integral de trayectoria que corresponde a este sistema puede escribirse, de acuerdo a [3.7](#), como

$$K(\mathbf{r}', t', \mathbf{r}, t) = \int \mathcal{D}\mathbf{r} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t} d\tilde{t} (\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})}. \quad (3.31)$$

Para ciertos casos particulares del potencial $\mathbf{A}$, esta integral puede resolverse mediante la integración gaussiana presentada anteriormente. Sin embargo, la forma del acoplamiento resulta especialmente interesante al considerar su discretización y la libertad de norma.

La libertad de norma proviene de la transformación ([Griffiths, 2013](#))

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad (3.32)$$

donde χ es una función arbitraria. Esta transformación no modifica el campo magnético, ya que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\chi = \mathbf{B}, \quad (3.33)$$

donde se utilizó que el rotacional de un gradiente es cero. Por lo tanto, los potenciales relacionados mediante esta transformación describen el mismo campo magnético. Al construir el propagador mediante una integral de trayectoria, se espera que esta libertad de norma se preserve también en la formulación cuántica.

Al discretizar la integral de trayectoria, una elección posible para cada intervalo de tiempo es la que se muestra en la ecuación 3.15. Para una interacción que depende únicamente de la posición, la elección del punto en el que se evalúa el potencial no afecta el hecho de que el propagador sea solución a la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, esta propiedad cambia para el caso que se presenta en esta sección.

Para obtener una formulación consistente con la libertad de norma, al discretizar la integral de camino de la ecuación 3.31 la evaluación del potencial vectorial debe hacerse de acuerdo a (Dittrich y Reuter, 2001)

$$\langle \mathbf{r}_{i+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} dt} | \mathbf{r}_i \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar dt} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 + q \frac{(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)}{dt} \cdot \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_i}{2} \right) \right) dt}. \quad (3.34)$$

Esta elección se conoce como regla del punto medio (*midpoint rule*) y permite que el propagador sea solución a la ecuación Schrödinger de preservando la libertad de norma. De esta manera, mientras que para interacciones que dependen únicamente de la posición la elección de la discretización no resulta esencial, los términos que dependen de la velocidad requieren un tratamiento más cuidadoso.

3.3. Teoría cuántica de campos

La teoría cuántica de campos unifica la mecánica cuántica y la relatividad especial. Uno de los objetos centrales de estudio es la predicción de las probabilidades de transición entre estados asintóticos libres. Estas probabilidades resultan en una gran herramienta para conocer las partículas elementales y sus interacciones. Si consideramos un estado inicial $|i\rangle$ en el pasado remoto ($t \rightarrow -\infty$) y un estado final $|f\rangle$ en el futuro lejano ($t \rightarrow +\infty$), la amplitud de

transición entre ambos viene dada por los elementos de la matriz de dispersión o Matriz S , denotados como $\langle f|S|i \rangle$ (Schwartz, 2013).

En general, esta amplitud se puede descomponer en una parte trivial, donde las partículas no interactúan, y una parte asociada estrictamente al proceso de interacción (matriz T) (Peskin y Schroeder, 1995)

$$\langle f|S|i \rangle = \langle f|i \rangle + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) i\mathcal{M}, \quad (3.35)$$

donde $\delta^{(4)}(P_i - P_f)$ asegura la conservación del momento entre los estados inicial y final, mientras que $\mathcal{M}$ representa el elemento invariante de matriz, el cual codifica toda la física de interés del proceso y se asocia directamente a la suma de las amplitudes de los diagramas de Feynman.

Para conectar estas amplitudes observables con el formalismo matemático de la teoría, se recurre al Teorema de Reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ). Este teorema establece un puente riguroso entre los elementos de la matriz S y las funciones de correlación de vacío en el espacio de posiciones (o funciones de Green de n puntos). Cualitativamente, el formalismo de LSZ permite extraer la amplitud de dispersión aplicando operadores diferenciales sobre las funciones de Green y tomando el límite cuando las partículas externas se encuentran en su capa de masa (*on-shell*).

De este modo, el problema físico de calcular amplitudes de dispersión se reduce al problema matemático de evaluar funciones de Green. Las funciones de Green contienen toda la información dinámica de la teoría y constituyen los objetos fundamentales a partir de los cuales pueden reconstruirse los observables físicos.

En las siguientes secciones se abordará cómo la formulación por integrales de camino proporciona una herramienta sistemática y elegante para generar dichas funciones a través de funcionales generadores.

3.3.1. Teoría clásica de campos

Un campo es un objeto con una o más componentes que toman valores definidos en cada punto del espacio. Existen distintos tipos de campos y dependiendo de la naturaleza del sistema pueden ser escalares, vectoriales, tensoriales o de otro tipo. Por ejemplo, la temperatura constituye un campo escalar mientras que el campo eléctrico y magnético son campos vectoriales.

La dinámica de los campos es descrita utilizando el mismo principio que se utilizó en

mecánica clásica (Susskind y Friedman, 2017). La acción de un campo se define como

$$S = \int dt L, \quad (3.36)$$

donde L es el lagrangiano del sistema y corresponde a la integración en todo el espacio de lo que se conoce como densidad lagrangiana $\mathcal{L}$

$$L = \int d^3x \mathcal{L}. \quad (3.37)$$

Así, se puede escribir $S = \int d^4x \mathcal{L}$

La variable dinámica de los campos es el campo en sí, de esta forma la densidad lagrangiana va a depender del campo y sus derivadas espacio-temporales. Por ejemplo, para un campo escalar ϕ la densidad lagrangiana tiene la siguiente dependencia $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. En este sentido las coordenadas espacio-temporales x^μ pasan a ser solamente etiquetas, por lo que se dice que la teoría de campos es una teoría con infinitos grados de libertad, uno por cada posible coordenada x^μ .

Las ecuaciones de movimiento se obtienen variando la acción e imponiendo la condición de que sea estacionaria. La variación en este caso es

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right], \quad (3.38)$$

integrando por partes y utilizando las condiciones de frontera llegamos a

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0. \quad (3.39)$$

Debido a que la variación es arbitraria obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (3.40)$$

Las cuales son las ecuaciones de movimiento del sistema y determinan la dinámica de los campos. Como en el caso de la mecánica clásica en la ecuación 3.4, a estas ecuaciones se le conocen como ecuaciones de Euler-Lagrange.

Algunas teorías que son descritas por los principios mencionados arriba son, por ejemplo, el campo real escalar libre, cuya densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (3.41)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan en la ecuación de Klein-Gordon¹

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0. \quad (3.42)$$

Otro ejemplo es el campo electromagnético sin fuentes, este es un campo tensorial cuya densidad Lagrangiana es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (3.43)$$

y las ecuaciones de movimiento resultan en las ecuaciones de Maxwell sin fuentes

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.44)$$

Para estos casos y para lo que resta del trabajo se utilizan unidades naturales $\hbar = c = 1$.

3.3.2. Integrales de camino en teoría cuántica de campos y funciones generadoras

En mecánica cuántica no relativista, la cuantización a través del formalismo de integrales de camino consistió en la obtención del propagador del sistema, con el cual la evolución de la función de onda quedaba determinada a partir de una condición inicial. De manera general, se partió de un lagrangiano clásico L y se construyó la integral de camino

$$L(q, \dot{q}) \rightarrow \int \mathcal{D}q e^{iS[q, \dot{q}]}. \quad (3.45)$$

Se puede extender la idea anterior en el contexto de la teoría de campos. Si se tiene un sistema con densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ se puede construir la siguiente integral de camino (Zee, 2010)

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, \partial_\mu \phi]}. \quad (3.46)$$

Para obtener sistemáticamente las funciones de Green resulta conveniente introducir una fuente externa clásica $J(x)$ acoplada linealmente al campo en la integral de camino. Las derivadas funcionales respecto a esta fuente permitirán generar las funciones de correlación de la teoría. De esta forma definimos el funcional $Z[J]$

¹En esta sección se emplea la convención con métrica $(+, -, -, -)$, la cual es ampliamente utilizada en la literatura de teoría cuántica de campos.

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + i \int d^4x J(x)\phi(x)}, \quad (3.47)$$

con la condición de normalización $Z[0] = 1$.

El funcional de la ecuación 3.47 se conoce como función generadora de las funciones de Green. Al estudiar algún proceso de dispersión que involucra N partículas nos preguntamos por la función de Green de n puntos $G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y todas las contribuciones se derivan del funcional $Z[J]$ a partir de derivadas funcionales respecto a la fuente externa (Cheng y Li, 1984)

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}. \quad (3.48)$$

Estas funciones de Green pueden ser representadas en formas de diagramas, los cuales se conocen como diagramas de Feynman. Las funciones de Green obtenidas con la ecuación 3.48 corresponden a diagramas de Feynman conectados y desconectados.

A partir de $Z[J]$ se pueden definir otras funciones generadoras de tipos específicos de funciones de Green, las cuales corresponden a ciertos diagramas de Feynman. Por ejemplo, los diagramas conectados se obtienen a partir de la función generadora $W[J]$ la cual está definida por la siguiente relación

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (3.49)$$

Las funciones de Green conectadas se obtienen también a partir de derivadas funcionales respecto a la fuente

$$G_C^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}. \quad (3.50)$$

Además de las funciones generadoras $Z[J]$ y $W[J]$, resulta útil definir una tercera función generadora asociada a los diagramas irreducibles de una partícula (*one-particle irreducible*, 1PI). Estos diagramas corresponden a aquellos que no pueden separarse en dos diagramas desconectados al cortar una sola línea interna (si desea saber más sobre estos diagramas consulte (Zinn-Justin, 2002)).

La función generadora de los diagramas 1PI se conoce como acción efectiva y se denota por $\Gamma[\phi_c]$, donde ϕ_c representa el campo clásico definido por (Peskin y Schroeder, 1995)

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (3.51)$$

La acción efectiva se obtiene mediante una transformada de Legendre del funcional $W[J]$,

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x), \quad (3.52)$$

y constituye un objeto fundamental en teoría cuántica de campos, ya que sus derivadas funcionales generan los vértices efectivos de la teoría. Muchas amplitudes físicas pueden obtenerse a partir de la acción efectiva y el formalismo línea de mundo proporciona una forma eficiente de calcularla.

3.3.3. Teorías libres y el propagador

Las teorías libres constituyen el punto de partida para el estudio de teorías cuánticas de campo más complejas. Resulta conveniente estudiar estas teorías antes que una teoría de interacción ya que, aunque no describen procesos de dispersión entre partículas, permiten introducir de manera exacta conceptos fundamentales como el propagador, las funciones de Green y el teorema de Wick. Estos resultados servirán como base para desarrollar posteriormente la teoría de perturbaciones y la representación diagramática de las funciones de correlación mediante diagramas de Feynman.

La teoría cuántica de campo más sencilla es aquella que describe una partícula escalar de espín cero sin carga. La densidad lagrangiana de esta teoría tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.53)$$

La función generadora que corresponde a la teoría libre se denota como $Z_0[J]$, reservando la notación $Z[J]$ para teorías más generales. Se tiene entonces para la teoría libre

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right)}. \quad (3.54)$$

A diferencia de las teorías con interacción, la acción de una teoría libre es cuadrática en el campo. Como consecuencia, la integral de camino puede escribirse en forma gaussiana, permitiendo la evaluación exacta de la función generadora. Integrando por partes el término cinético y utilizando las condiciones de frontera adecuadas se obtiene

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \phi \cdot A \cdot \phi + i J \cdot \phi}, \quad (3.55)$$

donde $A = -(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$ y hemos adoptado la notación $\int d^4x f(x)g(x) = f \cdot g$. Usando la integración gaussiana conocida, la función generadora adopta la siguiente expresión (Zee, 2010)

$$Z_0[J] = C e^{-\frac{i}{2} J \cdot D \cdot J}, \quad (3.56)$$

siendo $C = Z_0[0]$ una constante que no juega ningún papel en la evaluación de las funciones de Green.

Usando la ecuación 3.48 se puede calcular la función de Green de dos puntos

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2) e^{\frac{i}{2}\phi \cdot A \cdot \phi + iJ \cdot \phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2}\phi \cdot A \cdot \phi}} = D(x_1 - x_2), \quad (3.57)$$

donde $D(x_1 - x_2)$ es el propagador de Feynman de la teoría libre y corresponde a la función de Green del operador de $A = -(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$, es decir, se cumple que

$$-(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)D(x_1 - x_2) = \delta^{(4)}(x_1 - x_2), \quad (3.58)$$

Utilizando la transformada de Fourier se puede encontrar una expresión para el propagador

$$D(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.59)$$

Para funciones de Green de más puntos la evaluación de las derivadas funcionales se vuelve más compleja, sin embargo no es necesario calcularlas debido al teorema de Wick. Este teorema nos permite escribir cualquier función de N puntos en términos de funciones de Green de dos puntos. Las funciones de Green con un número impar de campos se anulan. Para un número par de campos, el teorema de Wick establece que

$$G_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\text{pairings}} G_0^{(2)}(x_1, x_2) \cdots G_0^{(2)}(x_{n-1}, x_n). \quad (3.60)$$

Como ejemplo, la función de Green de cuatro puntos puede escribirse como

$$G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_0^{(2)}(x_1, x_2)G_0^{(2)}(x_3, x_4) + G_0^{(2)}(x_1, x_3)G_0^{(2)}(x_2, x_4) + G_0^{(2)}(x_1, x_4)G_0^{(2)}(x_2, x_3), \quad (3.61)$$

o en notación más corta

$$G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = D_{12}D_{34} + D_{13}D_{24} + D_{14}D_{23}, \quad (3.62)$$

con $D_{ij} = D(x_i - x_j)$.

El teorema de Wick nos permite también entender las funciones de Green de forma diagramática. Recordemos que D_{ij} representa la propagación de una partícula entre el punto x_i y x_j . Para representar cualquier función de Green en forma de diagrama colocamos un punto por cada punto del espacio tiempo involucrado x_i , después dibujamos una línea entre dos puntos por cada D_{ij} . Por ejemplo, la ecuación 3.62 tiene la siguiente representación en forma de diagramas



Figura 3.1: Representación diagramática de la función de Green de cuatro puntos en la teoría libre.

La ausencia de interacción en la teoría libre se ve reflejada en la ausencia de vértices en los diagramas. En consecuencia, las partículas únicamente se propagan entre distintos puntos del espacio-tiempo sin experimentar procesos de dispersión o auto-interacción.

3.3.4. Teorías de interacción y teoría de perturbaciones

Aunque las teorías libres pueden ser resueltas de forma exacta, no logran describir la mayoría de los procesos de dispersión observados en la naturaleza. Para describir estos procesos es necesario introducir términos de interacción en la densidad lagrangiana, dando lugar a teorías que generalmente no pueden resolverse de forma exacta y requieren métodos perturbativos.

Para ilustrar estas ideas consideraremos la teoría escalar de interacción ϕ^3 . Aunque se trata de un modelo simplificado que no describe partículas fundamentales conocidas, contiene los elementos esenciales de una teoría interactuante y permite introducir los diagramas de Feynman mediante la expansión perturbativa de las funciones de Green, lo cual se puede extender a teorías más complejas.

La teoría ϕ^3 describe partículas escalares de espín cero con auto-interacción, su densidad lagrangiana tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{3!} \phi^3, \quad (3.63)$$

siendo λ la constante de acoplamiento de la teoría.

A partir de la ecuación 3.63 se puede construir la función generadora de esta teoría

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \phi \cdot A \cdot \phi + i J \cdot \phi - i \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \phi^3}. \quad (3.64)$$

No es posible escribir la integral de camino en forma gaussiana, debido a la naturaleza de la teoría. A diferencia de las teorías libres, no podemos evaluar de forma exacta la función generadora y tampoco las funciones de Green. Hay varias formas de proceder a partir de aquí, sin embargo en este trabajo nos enfocamos únicamente a la evaluación de las funciones de Green. Para ello, podemos analizar el propagador de la teoría, este es $G^{(2)}(x_1, x_2)$ y tiene la siguiente forma

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) e^{\frac{i}{2} \phi \cdot A \cdot \phi - i \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \phi^3}}{\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \phi \cdot A \cdot \phi - i \frac{\lambda}{3!} \int d^4x \phi^3}}. \quad (3.65)$$

En este punto es cuando recurrimos a la teoría de perturbaciones para aproximar el propagador, y en general las funciones de Green. Si el acoplamiento es débil, es decir $\lambda \ll 1$ podemos expandir el término que corresponde a la interacción

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \int d^4x \phi^3 \right)^n e^{\frac{i}{2} \phi \cdot A \cdot \phi + i J \cdot \phi}}{\int \mathcal{D}\phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \int d^4x \phi^3 \right)^n e^{\frac{i}{2} \phi \cdot A \cdot \phi}}. \quad (3.66)$$

Observando con detenimiento, al realizar la expansión se puede escribir el numerador y el denominador como funciones de Green de la teoría libre

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \right)^n \int d^4y_1 \cdots \int d^4y_n G_0^{(3n+2)}(x_1, x_2, y_1^3, \dots, y_n^3)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \right)^n \int d^4y_1 \cdots \int d^4y_n G_0^{(3n)}(y_1^3, \dots, y_n^3)}. \quad (3.67)$$

Las funciones de Green del denominador corresponden a diagramas llamados burbujas de vacío, los cuales no poseen puntos externos. Al realizar la división estas burbujas se cancelan, dejando solamente diagramas con puntos externos (Schwartz, 2013).

Como ejemplo, podemos realizar la expansión a segundo orden en 3.67. Veamos que por el teorema de Wick las funciones de Green que correspondan al primer orden se anulan. En el segundo orden tenemos

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(x_1, x_2) \approx & G_0^{(2)}(x_1, x_2) \\
 & + \frac{1}{2} \left(-\frac{i\lambda}{3!} \right)^2 \int d^4 z_1 d^4 z_2 \left[36 G_0^{(2)}(x_1, z_1) G_0^{(2)}(x_2, z_1) G_0^{(2)}(z_1, z_2) G_0^{(2)}(z_2, z_2) \right. \\
 & + 18 G_0^{(2)}(x_1, z_1) G_0^{(2)}(x_2, z_2) G_0^{(2)}(z_1, z_1) G_0^{(2)}(z_2, z_2) \\
 & \left. + 36 G_0^{(2)}(x_1, z_1) G_0^{(2)}(x_2, z_2) G_0^{(2)}(z_1, z_2)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

La ecuación 3.68 muestra de manera explícita cómo la interacción modifica el propagador libre de la teoría. Mientras que el término de orden cero corresponde únicamente a la propagación libre entre los puntos x_1 y x_2 , los términos de orden superior incorporan contribuciones provenientes de los puntos de integración z_1 y z_2 asociados a la interacción.

Al aplicar el teorema de Wick, cada producto de funciones de Green de dos puntos puede representarse mediante un diagrama. En esta representación, cada propagador corresponde a una línea y cada punto de integración asociado al término de interacción corresponde a un vértice donde tres líneas se unen. De esta forma, la estructura algebraica de la expansión perturbativa adquiere una interpretación geométrica en términos de diagramas de Feynman.

La figura 3.2 muestra los diagramas asociados a los términos que contribuyen hasta segundo orden de la expansión. A diferencia de la teoría libre, aparecen vértices de interacción que permiten conectar distintas líneas de propagación, reflejando la posibilidad de que las partículas interactúen entre sí.

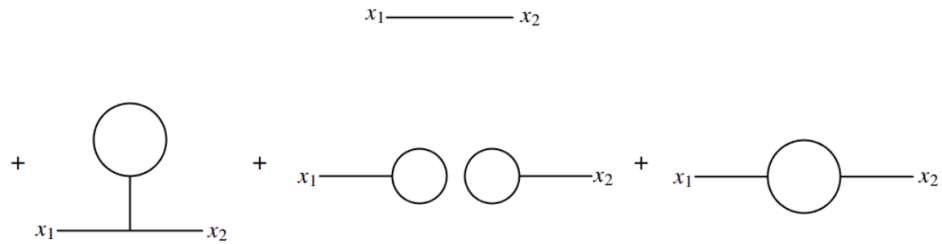


Figura 3.2: Representación diagramática de la función de Green de dos puntos a segundo orden en la teoría de interacción ϕ^3 .

Aunque la expansión perturbativa permite calcular sistemáticamente las funciones de Green, la aplicación directa del teorema de Wick se vuelve rápidamente impráctica debido al gran número de contracciones posibles. Afortunadamente, toda la información contenida en la expansión perturbativa puede resumirse mediante un conjunto de reglas diagramáticas conocidas como reglas de Feynman.

Estas reglas permiten asociar un factor algebraico a cada elemento del diagrama, evitando realizar explícitamente todas las contracciones. De esta manera, el cálculo de amplitudes de dispersión puede llevarse a cabo directamente a partir de los diagramas de Feynman correspondientes al proceso físico considerado.

Entre los procesos de dispersión de interés se encuentran aquellos en los que se producen nuevas partículas. En particular, se tienen procesos del tipo $2 \rightarrow N$, en los cuales dos partículas iniciales producen un estado final formado por N partículas. La cinemática de estos procesos se describe mediante el invariante de Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$ (Peskin y Schroeder, 1995), cuyo valor corresponde al cuadrado de la energía disponible en el sistema de centro de masa $s = E_{\text{CM}}^2$. En consecuencia, la producción de partículas sólo es posible cuando la energía del sistema satisface $\sqrt{s} \geq \sum_i m_i$, donde el mínimo de energía necesario corresponde a la producción de partículas en reposo en el sistema de centro de masa. Esta condición define el umbral cinemático del proceso. Por debajo del umbral, los estados correspondientes únicamente pueden contribuir como partículas virtuales. Cuando el umbral es superado es posible que ciertos estados intermedios satisfagan simultáneamente las condiciones *on-shell*. De acuerdo con el criterio de Cutkosky, la existencia de estos estados produce una discontinuidad en la amplitud de dispersión, la cual se manifiesta mediante la aparición de una parte imaginaria (Zee, 2010). En consecuencia, mientras el proceso permanezca por debajo del umbral cinemático, se espera que la amplitud permanezca completamente real.

3.3.5. Electrodinámica cuántica escalar

La QED escalar describe el acoplamiento entre un campo escalar complejo y el campo electromagnético. Esta teoría permite introducir conceptos fundamentales previo al estudio de la electrodinámica cuántica espinorial (Schwartz, 2013).

La densidad lagrangiana de esta teoría es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - m^2\phi\phi^*, \quad (3.69)$$

donde

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi, \quad (3.70)$$

se conoce como la derivada covariante.

Los elementos de la densidad lagrangiana son los que se han visto a lo largo de este capítulo. Se tiene la parte libre que describen a los campos por separado, mientras que el acoplamiento está en el término $(D_\mu \phi)(D^\mu \phi)^*$.

El campo escalar complejo implica la existencia de antipartículas. Los campos ϕ y ϕ^* se tratan como independientes y ϕ^* describe a las antipartículas de ϕ . Las antipartículas poseen las mismas propiedades que las partículas a excepción de la carga, su propiedad es que tienen la carga opuesta. Por ejemplo, en la QED espinorial la antipartícula del electrón es el positrón y las partículas sin carga juegan el papel de antipartículas en sus respectivas teorías, como lo es el fotón.

Capítulo 4

Formalismo línea de mundo

En este capítulo se presentan los elementos del formalismo línea de mundo (*worldline formalism*) que serán empleados en el desarrollo de esta tesis. A diferencia de los conceptos introducidos en los capítulos anteriores, los temas abordados a continuación corresponden a un área de investigación activa en el contexto de teoría cuántica de campos, y permiten establecer la conexión entre la formulación teórica y el cálculo numérico de amplitudes de dispersión. En específico, se introduce el formalismo de línea de mundo para el cálculo de amplitudes de N puntos a un lazo y su implementación numérica mediante métodos Monte Carlo, lo cual constituye la base de los capítulos posteriores de este trabajo.

4.1. Acción efectiva y su expansión en lazos

En el capítulo anterior se introdujo la acción efectiva $\Gamma[\phi]$ como la función generadora de diagramas irreducibles de una partícula (1PI), los cuales constituyen los bloques fundamentales en la construcción de funciones de Green completas. Debido a que las amplitudes de N puntos en el formalismo línea de mundo se construye a partir de la acción efectiva de un lazo, resulta conveniente estudiar con mayor detalle su estructura y su expansión semiclásica.

Para ello trabajaremos en el espacio euclideo, donde las integrales funcionales presentan mejores propiedades de convergencia y la expansión alrededor de configuraciones clásicas adquiere una interpretación particular. El espacio euclideo es un espacio plano y se caracteriza por la definición de su producto interno. En el espacio de Minkowski¹ el producto interno es $x_1 \cdot x_2 = -x_1^0 x_2^0 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$ y, por otro lado, en el espacio euclideo se tiene $x_1 \cdot x_2 = x_1^0 x_2^0 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$.

¹A partir de este capítulo se adopta la convención $(-, +, +, +)$ para mantener consistencia con la literatura del formalismo de línea de mundo.

Esto debido al cambio de la métrica $(-, +, +, +) \rightarrow (+, +, +, +)$.

Para trabajar en el espacio euclideo se realiza una rotación de Wick, esto implica rotar el eje correspondiente al tiempo en el plano imaginario. La rotación de Wick transforma la acción de Minkowski en una acción euclidea según la relación

$$iS = -S_E. \quad (4.1)$$

Como consecuencia, el factor oscilatorio e^{iS} se convierte en el factor exponencial decreciente e^{-S_E} , mejorando las propiedades de convergencia de la integral funcional.

Para una teoría escalar con potencial $V(\phi)$, la acción euclidea adquiere la forma

$$S_E = \int d^4x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (4.2)$$

donde $x_E = (\tau, x^1, x^2, x^3)$ y la coordenada temporal cambia según la relación $x^0 = -i\tau$. La función generadora es entonces

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E + J \cdot \phi}. \quad (4.3)$$

Recordemos que la acción efectiva se define como la transformada de Legendre del funcional generador de diagramas conectados $W[J]$ a través de las ecuaciones 3.51 y 3.52. En esta sección buscamos obtener una expresión aproximada para $\Gamma[\phi]$ mediante una expansión alrededor de la configuración clásica dominante de la integral funcional. Es conveniente traer de vuelta el factor $1/\hbar$ en la integral de camino, ya que esto nos permite expresar las cantidades deseadas en series de potencias de $\hbar$.

Para esta expansión tomemos el funcional $\mathcal{A}[\phi] = S[\phi] - J \cdot \phi$ y considérese ϕ_c tal que

$$\left. \frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_c} = 0. \quad (4.4)$$

Realizamos el siguiente cambio de variable

$$\phi = \phi_c + \sqrt{\hbar} \chi, \quad (4.5)$$

y expandimos en serie de Taylor alrededor de ϕ_c (Zinn-Justin, 2002)

$$\mathcal{A}[\phi] = \mathcal{A}[\phi_c + \sqrt{\hbar} \chi] \approx \mathcal{A}[\phi_c] + \frac{1}{2} \hbar \int d^4x d^4y \frac{\delta^2 \mathcal{A}[\phi_c]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \chi(x) \chi(y). \quad (4.6)$$

Sustituyendo en la función generadora nos queda

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\chi e^{-\frac{1}{\hbar} \left(S[\phi_c] - J \cdot \phi_c + \frac{1}{2} \hbar \int d^4x d^4y \frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \chi(x) \chi(y) \right)}, \quad (4.7)$$

definimos ahora

$$S^{(2)}(x, y; \phi_c) = \frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}, \quad (4.8)$$

reescribiendo tenemos

$$Z[J] = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{\hbar} (S[\phi_c] - J \cdot \phi_c)} \int \mathcal{D}\chi e^{-\frac{1}{2} \left(\int d^4x d^4y S^{(2)}(x, y; \phi_c) \chi(x) \chi(y) \right)}. \quad (4.9)$$

Queremos que $Z[0] = 1$, suponiendo que $\phi_c(J = 0) = 0$ la constante de normalización debe de ser

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\int \mathcal{D}\chi e^{-\frac{1}{2} \left(\int d^4x d^4y S^{(2)}(x, y; 0) \chi(x) \chi(y) \right)}}. \quad (4.10)$$

Ambas integrales tienen forma gaussiana, por lo que pueden evaluarse de forma exacta

$$Z[J] = e^{-\frac{1}{\hbar} (S[\phi_c] - J \cdot \phi_c)} \left[\frac{\det S^{(2)}[\phi_c]}{\det S^{(2)}[0]} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.11)$$

Con esta aproximación, la función generadora de los diagramas conectados $W[J]$ adquiere la siguiente forma

$$W[J] = \hbar \ln Z[J] = -S[\phi_c] + J \cdot \phi_c - \frac{\hbar}{2} \left\{ \ln [\det S^{(2)}[\phi_c]] - \ln [\det S^{(2)}[0]] \right\}. \quad (4.12)$$

La expresión anterior muestra que el funcional $W[J]$ puede organizarse como una expansión alrededor de la configuración clásica ϕ_c . El término dominante corresponde a la contribución clásica de la teoría, mientras que las correcciones restantes provienen de las fluctuaciones cuánticas descritas por el campo χ . Esta estructura permite escribir $W[J]$ como una serie ordenada según el número de lazos de los diagramas de Feynman de acuerdo a la teoría de perturbaciones.

$$W[J] = W_0[J] + \hbar W_1[J] + \dots, \quad (4.13)$$

con

$$W_0[J] = -S[\phi_c] + J \cdot \phi_c, \quad (4.14)$$

$$W_1[J] = -\frac{1}{2} \left\{ \ln [\det S^{(2)}[\phi_c]] - \ln [\det S^{(2)}[0]] \right\}. \quad (4.15)$$

Usando las definiciones de la acción efectiva, la contribución de los primeros órdenes tiene la siguiente forma

$$\Gamma_0[\phi] = S[\phi], \quad (4.16)$$

$$\Gamma_1[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln S^{(2)}[\phi] - \ln S^{(2)}[0]]. \quad (4.17)$$

La expansión anterior posee una interpretación diagramática directa. El término $\Gamma_0[\phi]$ corresponde a la aproximación clásica o de árbol, mientras que $\Gamma_1[\phi]$ contiene las contribuciones provenientes de diagramas con un lazo. De manera general, los términos de orden superior en la expansión de la acción efectiva generan diagramas con un número creciente de lazos.

En particular, la contribución de un lazo desempeña un papel central en el formalismo línea de mundo. Como se mostrará a continuación, la representación funcional de $\Gamma_1[\phi]$ puede transformarse en una integral de camino sobre trayectorias cerradas mediante la representación de tiempo propio de Schwinger.

Tomando el primer orden de la acción efectiva

$$\Gamma_1[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} \right) - \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} \right)_{\phi=0} \right], \quad (4.18)$$

donde hemos considerado un campo escalar ϕ con potencial de auto-interacción $U(\phi)$. Normalmente la acción S es tal que $S^{(2)} = -\square + m^2 + U''(\phi)$. Entonces podemos escribir el logaritmo que involucra a los operadores usando la representación de tiempo propio de Schwinger de la siguiente forma

$$\text{Tr} \ln \left(\frac{A}{B} \right) = - \int_0^\infty \frac{dT}{T} \text{Tr} \left(e^{-AT} - e^{-BT} \right). \quad (4.19)$$

Sustituyendo esta expresión e ignorando los términos que no son dependientes de ϕ tenemos la siguiente representación de la acción efectiva

$$\Gamma_1[\phi] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int d^D x \langle x | \exp \{ -T [-\square + m^2 + U''(\phi)] \} | x \rangle. \quad (4.20)$$

Observemos que esta última ecuación es parecida a una integral de trayectoria, en este caso tendríamos a una partícula ficticia con masa $\tilde{m} = 1/2$ moviéndose en un potencial ficticio $\tilde{V} = m^2 + U''(\phi(x))$ en un lapso de tiempo de $i(t_f - t_i) = T$, entonces tenemos la siguiente integral de camino (Schubert, 2001)

$$\langle x | \exp \{ -T [-\square + m^2 + U''(\phi)] \} | x \rangle = \int_{x(0)=x}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau [\frac{1}{4}\dot{x}^2 + m^2 + U''(\phi(x(\tau)))]}, \quad (4.21)$$

con $\tau = it$. Tenemos la representación final de la acción efectiva en el formalismo línea de mundo

$$\Gamma_1[\phi] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4}\dot{x}^2 + U''(\phi(x(\tau))))}, \quad (4.22)$$

donde el subíndice en la integral de camino significa que tenemos que integrar sobre todos los caminos cerrados en el intervalo de tiempo $(0, T)$.

4.2. Amplitudes de N puntos

Las amplitudes de N puntos describen procesos en los que intervienen N partículas externas y constituyen de interés en la teoría cuántica de campos. En el formalismo perturbativo convencional estas amplitudes se obtienen mediante la suma de diagramas de Feynman, mientras que en el formalismo línea de mundo pueden representarse mediante integrales de camino de partículas puntuales.

En esta sección nos enfocaremos en algunas amplitudes específicas que serán estudiadas numéricamente más adelante. El objetivo no será derivarlas desde la teoría de perturbaciones convencional, sino presentar sus representaciones en el formalismo línea de mundo, las cuales servirán como punto de partida para los cálculos posteriores.

4.2.1. Amplitudes de N puntos en la teoría de interacción ϕ^3

El caso más simple a estudiar es el de la teoría ϕ^3 la cual se describe mediante la densidad lagrangiana 3.63. Como se mencionó antes, esta es una teoría con un potencial de auto-interacción

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{3!} \phi^3. \quad (4.23)$$

Partiendo de la ecuación 4.20, la acción efectiva a un lazo en esta teoría es

$$\Gamma_1[\phi] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4} \dot{x}^2 + \lambda \phi(x(\tau)))}. \quad (4.24)$$

Estamos interesados específicamente en el cálculo de las amplitudes de N puntos. Estas amplitudes pueden obtenerse de forma estándar mediante la aplicación de derivadas funcionales sobre 4.18. Por otro lado, en el formalismo línea de mundo podemos escribir estas amplitudes en el espacio de momentos partiendo de 4.24 (Schubert, 2001).

Expresamos el campo de fondo como una suma de ondas planas

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^N e^{ip_i \cdot x}, \quad (4.25)$$

después se expande en serie de Taylor el término correspondiente a la interacción hasta el orden deseado.

Escribiendo todas las trayectorias alrededor de un centro de masa, la forma resultante de las amplitudes es la siguiente

$$\Gamma_1[p_1, \dots, p_N] = \frac{1}{2} (-\lambda)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum p_i\right) \int_0^\infty \frac{dT}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} T^{1+\frac{D}{2}}} e^{-m^2 T} \times \langle V^\phi[p_1] \cdots V^\phi[p_N] \rangle, \quad (4.26)$$

donde m es la masa de la partícula en el lazo cerrado, D representa las dimensiones del espacio, N el número de puntos del diagrama y

$$\langle V^\phi[p_1] \cdots V^\phi[p_N] \rangle = \frac{\int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2} \times V^\phi[p_1] \cdots V^\phi[p_N]}{\int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2}}. \quad (4.27)$$

La integración sobre el centro de masa resulta en la conservación del momento con el factor $(2\pi)^D \delta(\sum p_i)$, además se han introducido los operadores de vértice escalares $V^\phi[p_i]$, definidos por

$$V^\phi[p_i] = \int_0^T d\tau_i e^{ip_i \cdot x(\tau_i)}, \quad (4.28)$$

siendo p_i el momento de la partícula externa i -ésima.

Los operadores de vértice representan la integración de la partícula con trayectoria cerrada en el lazo con las partículas externas.

La integral de camino puede evaluarse exactamente debido a su forma gaussiana, esto nos lleva a la fórmula maestra para esta teoría

$$\begin{aligned} \Gamma_1[p_1, \dots, p_N] = & \frac{1}{2}(-\lambda)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum p_i\right) \int_0^\infty \frac{dT}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} T^{1+\frac{D}{2}}} e^{-m^2 T} \\ & \times \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N G_B(\tau_i, \tau_j) p_i \cdot p_j \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $G_B(\tau_i, \tau_j)$ es la función de Green bosónica

$$G_B(\tau_i, \tau_j) = |\tau_i - \tau_j| - \frac{(\tau_i - \tau_j)^2}{T}. \quad (4.30)$$

A pesar de que la integral de camino pudo realizarse de forma exacta, en general, las amplitudes de N puntos no tienen una forma cerrada debido a la complejidad de las integrales involucradas. Existen algunas formas cerradas para casos específicos como el que se mostrará a continuación.

Consideremos la amplitud de $N = 4$ puntos *on-shell* de partículas externas con masa cero. Estas amplitudes son descritas por la teoría escalar de Yukawa cuya acción es

$$S_{\text{Yuk}}[\phi, \chi] = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{\lambda}{2!} \phi^2 \chi \right). \quad (4.31)$$

Nótese que esta teoría describe dos campos interactuantes y aunque se vea distinta a la teoría ϕ^3 los vértices en los diagramas de Feynman son del mismo tipo, lo cual puede verse desde el término de acoplamiento $\phi^2 \chi$.

La amplitud que mencionamos antes tiene la siguiente forma en el formalismo línea de mundo

$$\Gamma_{\text{Yuk}}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^4}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \times \prod_{i=1}^4 \int_0^T d\tau_i \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 G_B(\tau_i, \tau_j) p_i \cdot p_j \right], \quad (4.32)$$

para $N = D = 4$.

Para las partículas externas *on-shell* las integrales pueden evaluarse para llegar a la siguiente forma compacta

$$\Gamma_{\text{Yuk}}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^4}{(4\pi)^2} I_4, \quad (4.33)$$

donde

$$I_4 = 2\text{Re} \left(\bar{I}_{4-}^{(s,t,u)} + \bar{I}_{4-}^{(t,s,u)} + \bar{I}_{4-}^{(t,u,s)} + \bar{I}_{4-}^{(u,t,s)} + \bar{I}_{4-}^{(u,s,t)} + \bar{I}_{4-}^{(s,u,t)} \right),$$

$$\bar{I}_{4-}^{(s,t,u)} = \frac{1}{8m^4 \hat{t} \hat{u} \beta_{\hat{t}\hat{u}}} \left\{ \ln(-4\hat{u}) \ln\left(\frac{\beta_{\hat{t}\hat{u}} + 1}{\beta_{\hat{t}\hat{u}} - 1}\right) + \text{bi}\left(\frac{\beta_{\hat{t}\hat{u}}}{2}, \frac{\beta_{\hat{u}}}{2}\right) - \text{bi}\left(-\frac{\beta_{\hat{t}\hat{u}}}{2}, \frac{\beta_{\hat{u}}}{2}\right) \right\},$$

$$\beta_{\hat{u}} \equiv \sqrt{1 - \frac{1}{\hat{u}}}, \quad \beta_{\hat{t}\hat{u}} \equiv \sqrt{1 + \frac{\hat{s}}{\hat{t}\hat{u}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\hat{t}} - \frac{1}{\hat{u}}},$$

$$\begin{aligned} \text{bi}(c, d) \equiv \int_0^1 du_2 \frac{\ln(u_2 - \frac{1}{2} + d)}{u_2 - \frac{1}{2} + c} &= \log\left(d + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{c + \frac{1}{2}}{c - d}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{d + \frac{1}{2}}{d - c}\right) \\ &\quad - \log\left(d - \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{c - \frac{1}{2}}{c - d}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{d - \frac{1}{2}}{d - c}\right), \end{aligned}$$

y se tienen los invariantes de Mandelstam

$$\begin{aligned}
s &= -(p_1 + p_2)^2, \\
t &= -(p_1 + p_3)^2, \\
u &= -(p_1 + p_4)^2.
\end{aligned}$$

4.2.2. Amplitudes de N puntos en la electrodinámica cuántica escalar

Recordemos que la QED escalar describe un campo complejo masivo acoplado al campo electromagnético mediante la densidad lagrangiana 3.69. El caso de la QED no solo es más relevante físicamente, sino también más interesante desde el punto de vista matemático, pues el operador de vértice involucra derivadas. Esta característica, como vimos en la sección dedicada a la mecánica cuántica, hace más delicada la construcción de la integral de caminos. La acción efectiva 4.22 adopta la siguiente expresión en este formalismo

$$\Gamma_{\text{scal}}[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie \dot{x} \cdot A(x(\tau)) \right)}. \quad (4.34)$$

El procedimiento para el cálculo de las amplitudes de N fotones es análogo al caso anterior. Ahora escribimos el campo de fondo como la suma de ondas planas con polarización

$$A^\mu = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^\mu e^{ik_i \cdot x}. \quad (4.35)$$

Siguiendo los mismos pasos que antes obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{scal}}(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N) &= -(ie)^N (2\pi)^D \delta\left(\sum p_i\right) \int_0^\infty \frac{dT}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} T^{1+\frac{D}{2}}} e^{-m^2 T} \\
&\times \langle V_{\text{scal}}^\gamma[k_1, \varepsilon_1] \cdots V_{\text{scal}}^\gamma[k_N, \varepsilon_N] \rangle,
\end{aligned} \quad (4.36)$$

donde

$$\langle V_{\text{scal}}^\gamma[k_1, \varepsilon_1] \cdots V_{\text{scal}}^\gamma[k_N, \varepsilon_N] \rangle = \frac{\int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2} \times V_{\text{scal}}^\gamma[k_1, \varepsilon_1] \cdots V_{\text{scal}}^\gamma[k_N, \varepsilon_N]}{\int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2}}. \quad (4.37)$$

Se ha introducido ahora el operador de vértice del fotón

$$V_{\text{scal}}^\gamma[k, \varepsilon] = \int_0^T d\tau \varepsilon \cdot \dot{x}(\tau) e^{ik \cdot x(\tau)}, \quad (4.38)$$

siendo k_i y ε_i el momento y la polarización del fotón i -ésimo.

La expresión más general se puede encontrar en algunas referencias del trabajo (Schubert, 2001), por ahora nos vamos a enfocar en el resultado analítico en el límite de bajas energías. Para fotones *on-shell*, este límite se define mediante la condición $\omega_i \ll m$, donde ω_i corresponde a la energía del i -ésimo fotón y m es la masa de la partícula escalar que circula en el lazo. Para fotones *off-shell*, además se requiere $|\mathbf{k}_i| \ll m$ (Ahmadiniaz y cols., 2023). Estas condiciones corresponden a un régimen de energías muy por debajo de los umbrales cinemáticos para la producción de partículas reales. De esta forma el valor esperado de los operadores de vértice es proporcional a T^N , como muestra la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \left\langle V_{\text{scal}}^{\gamma(\text{LE})}[f_1] \cdots V_{\text{scal}}^{\gamma(\text{LE})}[f_N] \right\rangle \\ &= i^N T^N \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sum_{\{i_1 \cdots i_{2m}\}} Z_{2m}^{\text{dist}}(\{i_1 \cdots i_{2m}\}) \right\}_{f_1 \cdots f_N}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Realizando finalmente la integral sobre T tenemos la amplitud final

$$\Gamma_{\text{scal}}^{(\text{LE})}(k_1, \varepsilon_1; \cdots; k_N, \varepsilon_N) = \frac{e^N \Gamma(N - \frac{D}{2})}{(4\pi)^2 m^{2N-D}} \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{2m}}{4m} \text{tr}(f_{\text{tot}}^{2m}) \right\}_{f_1 \cdots f_N}. \quad (4.40)$$

En especial, para el caso de cuatro fotones en cuatro dimensiones ($N = D = 4$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{scal}}^{(\text{LE})}(k_1, \varepsilon_1; \cdots; k_4, \varepsilon_4) &= \frac{e^4}{(4\pi)^2 m^4} \{ b_4 [Z_4(1234) + Z_4(1243) + Z_4(1324)] \\ &\quad b_2^2 [Z_2(12)Z_2(34) + Z_2(13)Z_2(24) + Z_2(14)Z_2(23)] \}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde

$$Z_2(ij) \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(f_i f_j) = \varepsilon_i \cdot k_j \varepsilon_j \cdot k_i - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j k_i \cdot k_j,$$

$$Z_n(i_1 \cdots i_n) \equiv \text{tr}\left(\prod_{j=1}^n f_{i_j}\right), \quad (n \geq 3),$$

$$f_i^{\mu\nu} \equiv k_i^\mu \varepsilon_i^\nu - \varepsilon_i^\mu k_i^\nu,$$

$$b_n = \begin{cases} -2^n \frac{\mathcal{B}_n}{n!} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases},$$

siendo $\mathcal{B}_n$ los números de Bernoulli.

4.3. Worldline Monte Carlo

4.3.1. Integración Monte Carlo

La integración Monte Carlo es un método para aproximar integrales, el cual resulta muy útil cuando se trabaja con muchas dimensiones. Si se tiene la integral multidimensional de la función $f(x)$ sobre una región del espacio Ω , es decir $\int_{\Omega} f(x) dx$, la idea central de la integración Monte Carlo es tomar una muestra aleatoria de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ distribuidos uniformemente en Ω , así se puede estimar la integral de la siguiente manera (Newman, 2012)

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \frac{V}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i), \quad (4.42)$$

donde V es el volumen de la región Ω .

Se puede escribir lo anterior de la siguiente forma

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{\Omega} f(x) dx}{\int_{\Omega} dx} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i), \quad (4.43)$$

donde se dice que $\langle f \rangle$ es el valor esperado de la función sobre la región Ω .

A diferencia de la integración por suma de Riemann, por ejemplo, donde se tiene que hacer un barrido por cada dimensión de la integral, en la integración Monte Carlo solo se

necesita de una suma independientemente de la dimensión, lo cual es una gran ventaja sobre otros métodos.

De manera más general, se pueden tener valores esperados respecto a otras funciones de distribución, como se muestra en la siguiente ecuación

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{\Omega} f(x) p(x) dx}{\int_{\Omega} p(x) dx}, \quad (4.44)$$

siendo $p(x)$ una distribución de probabilidad.

La estimación Monte Carlo permanece igual y lo único que cambia es la distribución de la muestra $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$. En el caso anterior estos puntos estaban distribuidos uniformemente, ahora deben estar distribuidos de acuerdo a la función $p(x)$. Con esta nueva distribución tenemos

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{\Omega} f(x) p(x) dx}{\int_{\Omega} p(x) dx} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i). \quad (4.45)$$

Otra característica importante de la integración Monte Carlo es que el error estadístico decrece como $1/\sqrt{N}$, independientemente de la dimensión de la integral.

4.3.2. Extensión a integrales funcionales

El formalismo Worldline Monte Carlo (WMC) permite extender los conceptos de la integración Monte Carlo a integrales funcionales, como lo es la integral de trayectoria. Este tipo de integrales pueden ser aproximadas por sumas sobre un número finito de trayectorias, permitiendo un cálculo numérico directo.

En la integración Monte Carlo usual, se elegía una muestra aleatoria de puntos para aproximar las integrales, para una integral de camino, donde el dominio de integración corresponde a funciones, se elige una muestra aleatoria de N_l trayectorias $\{x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_{N_l}(\tau)\}$ y, a través de una discretización del tiempo propio $\tau \rightarrow \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N_p}\}$, cada trayectoria es discretizada en $N_p + 1$ puntos $x_i(\tau) \rightarrow \{x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{N_p}\}$ (Klingmüller, 2004).

A partir de esta discretización, de forma análoga a 4.45, la integral de camino puede ser aproximada mediante

$$\langle (\dots) \rangle = \frac{\mathcal{D}x (\dots) \mathcal{P}[x]}{\mathcal{D}x \mathcal{P}[x]} \approx \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} (\dots)_i, \quad (4.46)$$

donde, en el contexto de este trabajo, $P[x] = -\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2$ y el promedio se hace sobre trayectorias distribuidas acorde a $P[x]$. Para el cálculo de amplitudes de N puntos, las trayectorias cumplen con $x_i^0 = x_i^{N_p} = 0$ y su generación se realiza mediante distintos algoritmos especializados (Gies y cols., 2003).

En este trabajo se utilizará la estimación del error de acuerdo a (Klingmüller, 2004), en la cual se debe de tomar N_L lo suficientemente grande para que el error sistemático pueda ser despreciado. Se tomará entonces

$$\Delta\langle(\dots)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_L}} \sqrt{\langle(\dots)^2\rangle - \langle(\dots)\rangle^2}. \quad (4.47)$$

Este acercamiento ofrece grandes ventajas frente a otros métodos numéricos, como la preservación de las simetrías continuas así como de las simetrías de norma (Trejo Espinosa, 2017). A través de este método se ha estudiado el cálculo de propagadores en el contexto de mecánica cuántica no relativista (Edwards y cols., 2019) y diversos fenómenos relacionados a teoría cuántica de campos como el cálculo de acciones efectivas (Gies y cols., 2005), la creación de pares en campos inhomogéneos (Gies y Klingmüller, 2005), el estudio del efecto Casimir (Gies y cols., 2003), entre otros fenómenos. En este trabajo se extenderán las ideas principales de este método para la estimación de amplitudes de N puntos a un lazo.

Capítulo 5

Amplitudes de N puntos con WMC

5.1. Cálculo de las amplitudes con WMC

Como se mencionó antes, el formalismo WMC pretende extender la integración Monte Carlo a integrales funcionales, las cuales tienen la siguiente forma en general

$$\langle \mathcal{F}[x] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}x \mathcal{F}[x] \mathcal{P}[x]}{\int \mathcal{D}x \mathcal{P}[x]}, \quad (5.1)$$

donde $\mathcal{P}[x]$ actúa como una distribución de probabilidad en el espacio de trayectorias y $\mathcal{F}[x]$ el funcional de interés.

En el contexto de las amplitudes de N puntos a un lazo, los funcionales tienen la siguiente forma general

$$\mathcal{P}[x] = e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \quad \mathcal{F}[x] = \prod_{k=1}^N \int_0^T d\tau V_k(x), \quad (5.2)$$

donde V_i representan los operadores de vértice de la teoría y dependen de los momentos de las partículas externas en la amplitud.

Es conveniente introducir un lazo unitario $y(t)$, el cual es la base del método WMC y ofrece muchas ventajas. Haciendo el cambio de variable $\tau = Tt$ y definiendo

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} x(Tt), \quad (5.3)$$

los funcionales adquieren la siguiente forma

$$\mathcal{P}[y] = e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 dt \dot{y}^2(t)} \quad \mathcal{F}[y] = T^N \prod_{k=1}^N \int_0^1 dt V_k \left(\sqrt{T} y(t) \right). \quad (5.4)$$

Con estos lazos unitarios, la función de distribución $\mathcal{P}[y]$ es independiente de T , lo cual permite estimar $\langle \mathcal{F}[y] \rangle$ para cualquier T con un solo ensamble de lazos, reduciendo significativamente el costo computacional.

El valor esperado que se busca estimar adquiere la siguiente forma con este cambio de variable

$$\langle \mathcal{F}[y] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 dt \dot{y}^2(t)} T^N \prod_{k=1}^N \int_0^1 d\tau V_k \left(\sqrt{T} y(t) \right)}{\int \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 dt \dot{y}^2(t)}}. \quad (5.5)$$

De acuerdo a 4.46, para la estimación del valor esperado se generan N_l trayectorias aleatorias $y_i(t)$ distribuidas de acuerdo a $\mathcal{P}[y]$ y se calcula el promedio sobre el ensamble

$$\langle \mathcal{F}[y] \rangle \approx \frac{T^N}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \prod_{k=1}^N \int_0^1 dt V_k \left(\sqrt{T} y_i(t) \right). \quad (5.6)$$

Recordemos también que las trayectorias $y_i(t)$ son discretizadas en puntos finitos. Para cada trayectoria hacemos $y_i(t) \rightarrow \{y_i^0, y_i^1, \dots, y_i^{N_p}\}$, es decir, se dividió el intervalo $(0, 1)$ en N_p partes iguales.

Entonces las integrales de los operadores de vértice se aproximan mediante una suma de Riemann

$$\int_0^1 dt V_k \left(\sqrt{T} y_i(t) \right) \approx \frac{1}{N_p} \sum_{j=0}^{N_p-1} V_k \left(\sqrt{T} y_i^j \right). \quad (5.7)$$

Finalmente, el valor esperado de los operadores de vértice adquiere la siguiente forma general

$$\langle \mathcal{F}[y] \rangle \approx \frac{T^N}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{N_p} \sum_{j=0}^{N_p-1} V_k \left(\sqrt{T} y_i^j \right) \right). \quad (5.8)$$

La generación de las trayectorias $y_i(t)$ se realiza mediante algoritmos especializados que producen lazos distribuidos de acuerdo con la medida gaussiana. Ejemplos de estos métodos incluyen el uso de descomposición en modos de Fourier o algoritmos tipo “v-loop”,

ampliamente utilizados en la literatura.

Este procedimiento permite aproximar el cálculo de integrales de camino y constituye la base del método WMC empleado en este trabajo.

5.2. Teoría de interacción ϕ^3 con WMC

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para amplitudes de N puntos a un lazo en la teoría escalar con interacción ϕ^3 , utilizando el método WMC descrito en la sección anterior.

El punto de partida es la representación de las amplitudes de N puntos en el formalismo línea de mundo 4.26. La cantidad central a evaluar numéricamente es 4.27, una vez obtenido este valor para distintos valores del parámetro T , la integral sobre T se evalúa numéricamente.

Para los operadores de vértice de esta teoría descritos por 4.28, la aproximación de su valor esperado adquiere la siguiente forma específica partiendo de 5.8

$$\langle V^\phi[p_1] \cdots V^\phi[p_N] \rangle \approx \frac{T^N}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{N_p} \sum_{j=0}^{N_p-1} e^{ip_k \cdot \sqrt{T} y_i^j} \right). \quad (5.9)$$

Con el fin de validar los resultados obtenidos mediante el método WMC, se realiza una comparación con la fórmula maestra 4.29 de la amplitud, la cual puede evaluarse por integración numérica directa con 4.42.

Como primer caso de estudio, se consideran configuraciones *off-shell*. Los momentos externos se eligen siempre asegurando la conservación del momento

$$\sum_{i=1}^N p_i = 0, \quad (5.10)$$

y se trabajará siempre en dimensión $D = 4$. Por ahora se fijará la masa en $m = 1$. Para la evaluación Monte Carlo se utilizan $N_l = 5000$ trayectorias y una discretización de $N_p = 1000$ puntos por lazo como se hace en (Klingmüller, 2004). En todos los cálculos se utilizará el algoritmo LSOL para la creación de lazos cerrados, el cual se describe en (Edwards y cols., 2019).

Para la primera configuración se tomará $N = 4$ con los siguientes momentos

$$\begin{aligned}
p_1 &= (0, 1, 1, 0), \\
p_2 &= (0, -1, 1, 0), \\
p_3 &= (0, -1, -1, 0), \\
p_4 &= (0, 1, -1, 0).
\end{aligned}
\tag{5.11}$$

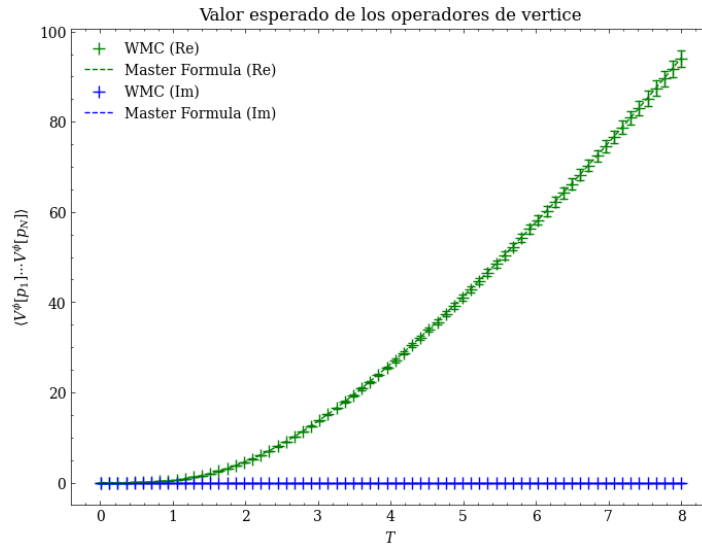


Figura 5.1: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.11.

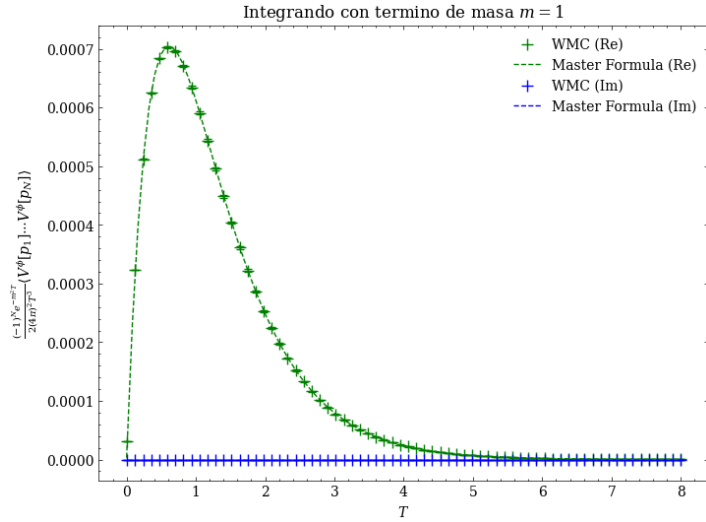


Figura 5.2: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.11.

Para esta configuración de momentos simple 5.11, el método WMC ofrece una buena estimación del valor esperado de los operadores de vértice y del integrando de la amplitud. En las figuras 5.1 y 5.2 se observa que los puntos correspondientes al método WMC coinciden de forma precisa con la integración directa de la fórmula maestra 4.27.

Podemos tomar otras configuraciones para $N = 4$ generando momentos aleatorios que satisfagan 5.10, por ejemplo

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (0.43, -0.73, 0.22, -0.41), \\
 p_2 &= (0.40, 0.21, -0.47, 0.81), \\
 p_3 &= (-0.57, -0.26, 0.66, 0.07), \\
 p_4 &= (-0.26, 0.78, -0.40, -0.47).
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

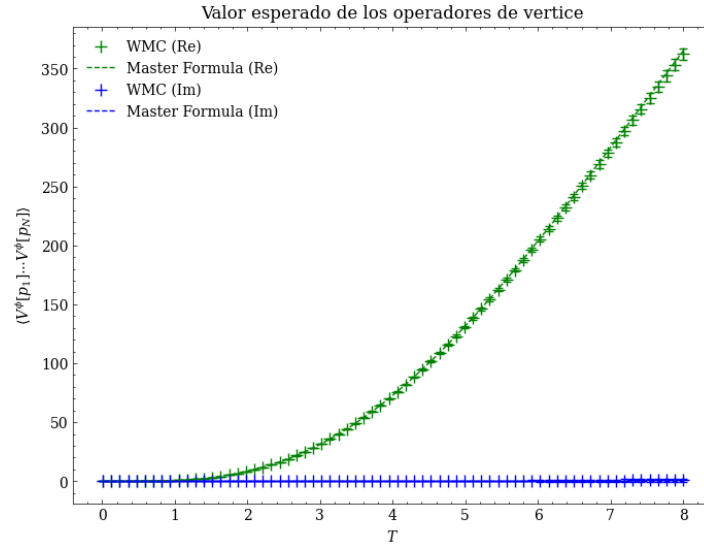


Figura 5.3: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.12.

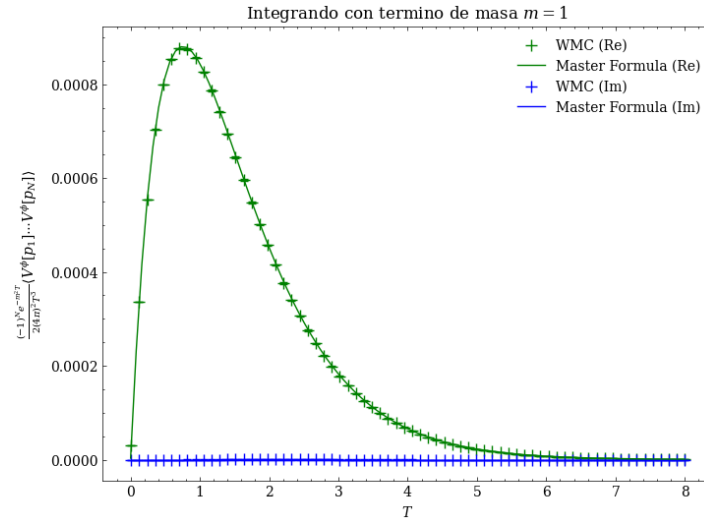


Figura 5.4: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.12.

Nuevamente observamos en las figuras 5.3 y 5.4 que la estimación WMC es precisa con la integración directa de la fórmula maestra.

Podemos ahora aumentar el número de partículas externas, para $N = 5$ generamos otra configuración de momentos aleatorios que cumplan 5.10, tenemos

$$\begin{aligned}
p_1 &= (0.17, 0.50, 0.13, -0.28), \\
p_2 &= (0.08, -0.41, 0.50, 0.03), \\
p_3 &= (-0.21, -0.43, -0.47, -0.59), \\
p_4 &= (-0.38, 0.86, 0.66, 0.63), \\
p_5 &= (0.34, -0.51, -0.81, 0.21).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

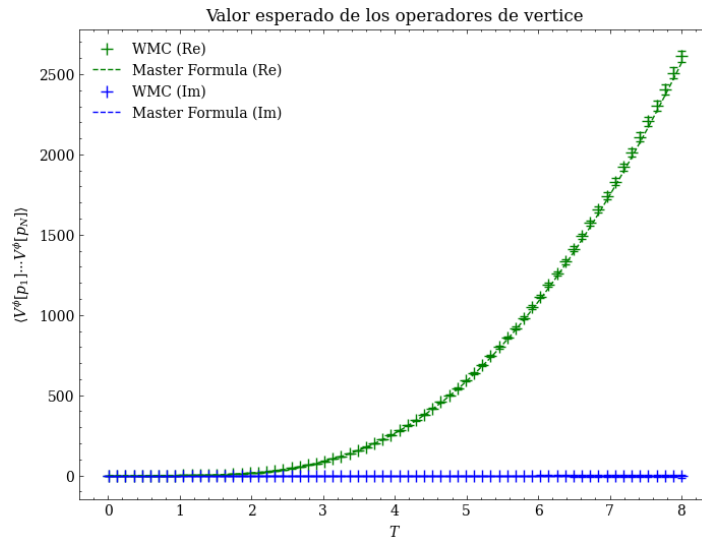


Figura 5.5: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.13.

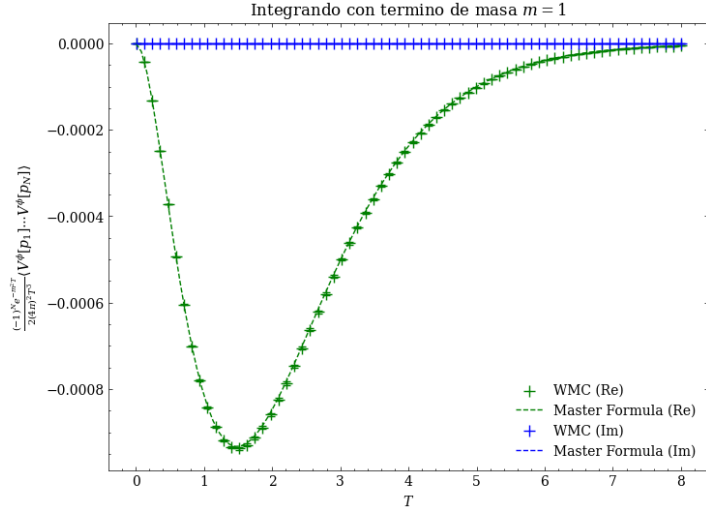


Figura 5.6: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.13.

Finalmente para las configuraciones *off-shell* aumentamos el número de puntos a $N = 6$ con la siguiente configuración de momentos

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (0.18, 0.92, -0.78, -0.49), \\
 p_2 &= (0.84, -0.98, 0.06, -0.31), \\
 p_3 &= (-0.68, 0.89, 0.99, 0.82), \\
 p_4 &= (-0.35, 0.09, 0.53, -0.85), \\
 p_5 &= (-0.91, 0.99, -0.85, -0.09), \\
 p_6 &= (0.90, -1.92, 0.06, 0.92).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

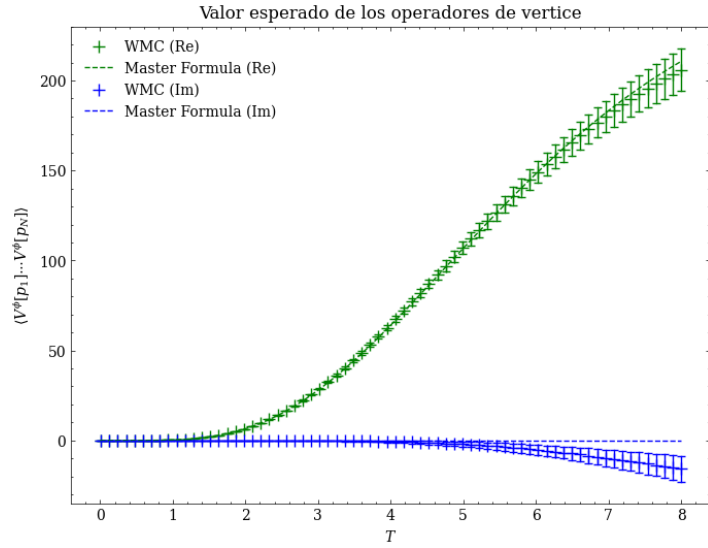


Figura 5.7: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.14.

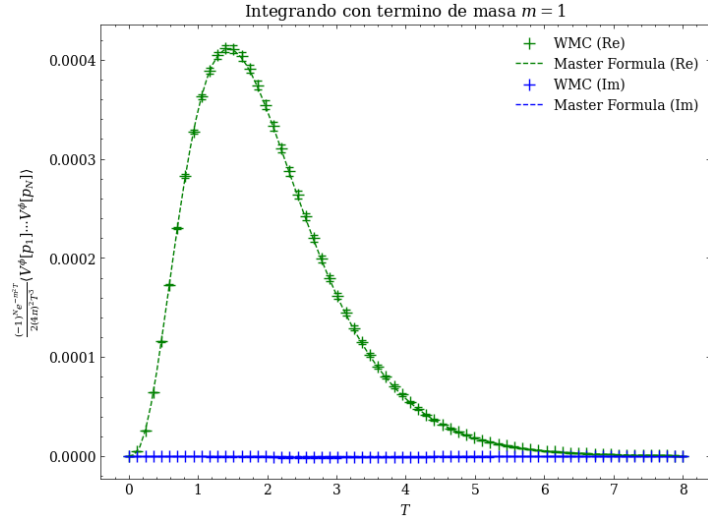


Figura 5.8: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.14.

En todas las configuraciones *off-shell* que se usaron, la estimación WMC se acerca de manera precisa a la integración directa de 4.27. Esto valida hasta ahora la fiabilidad del método utilizado en este trabajo y nos invita a utilizar otro tipo de configuraciones.

Para el caso *on-shell* comenzaremos con $N = 4$ y compararemos la amplitud resultante con la amplitud de la teoría escalar de Yukawa descrita en el capítulo anterior por la ecuación

4.31. Vamos a tomar entonces los momentos externos *on-shell* sin masa.

Se usará la siguiente configuración para distintos valores de E y tomaremos la masa $m = 1$.

$$\begin{aligned} p_1 &= (-iE, E, 0, 0), \\ p_2 &= (-iE, -E, 0, 0), \\ p_3 &= (iE, 0, E, 0), \\ p_4 &= (iE, 0, -E, 0). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Vamos a graficar el integrando de la amplitud para obtener un rango de integración adecuado y así comparar con el resultado analítico. El integrando lo compararemos de nuevo con el resultante de la fórmula maestra.

Comenzamos con $E = 0.01$.

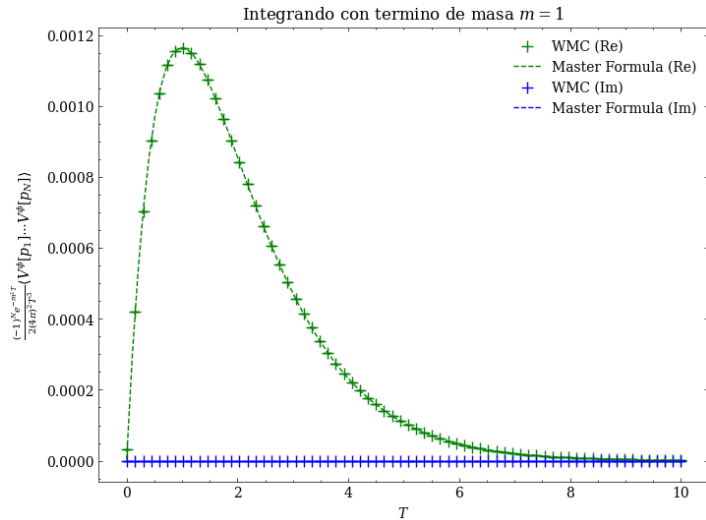


Figura 5.9: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.15 para $E = 0.01$.

Realizando la integración numérica podemos comparar con el resultado analítico:

$$\frac{\Gamma_{\text{Yuk}}}{\lambda^4} = 0.0031662869905887798 \qquad \frac{\Gamma_{\text{1PI}}}{\lambda^4} = 0.0031591292246268593.$$

Observamos en la figura 5.9 que el integrando calculado con WMC coincide de forma precisa con la integración directa de 4.27 para una configuración *on-shell*. Además la evalua-

ción numérica de la integral en 5.9, resulta una buena aproximación de la amplitud que se estaba buscando al comparar con 4.31

Podemos aumentar la energía a $E = 0.1$

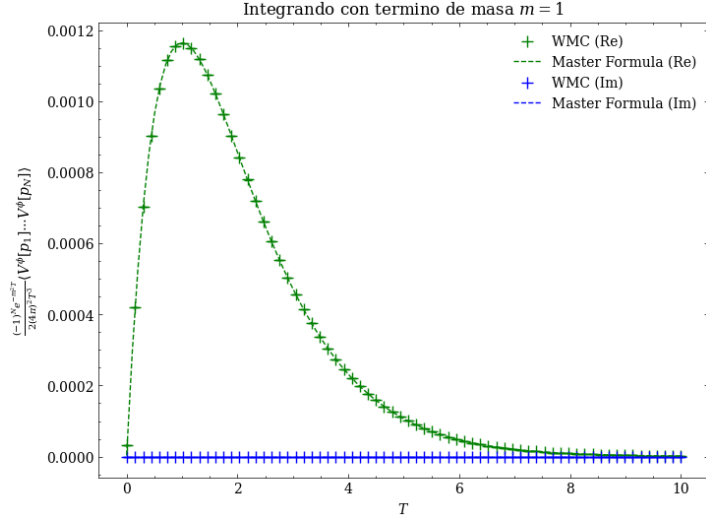


Figura 5.10: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.15 para $E = 0.1$.

Realizando la integración numérica podemos comparar con el resultado analítico:

$$\frac{\Gamma_{\text{Yuk}}}{\lambda^4} = 0.003166350518023595 \qquad \frac{\Gamma_{\text{1PI}}}{\lambda^4} = 0.0031591984495015816.$$

Ahora usamos $E = 0.5$

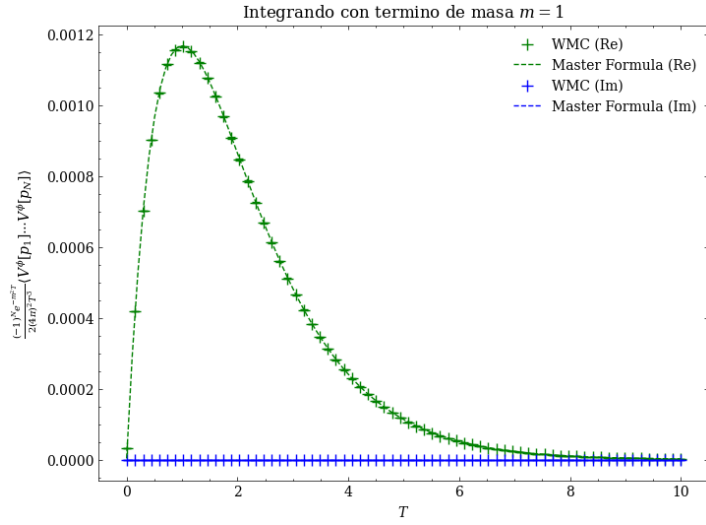


Figura 5.11: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.15 para $E = 0.5$.

Realizando la integración numérica podemos comparar con el resultado analítico:

$$\frac{\Gamma_{\text{Yuk}}}{\lambda^4} = 0.0032101413062782438 \quad \frac{\Gamma_{\text{1PI}}}{\lambda^4} = 0.0031940569370614326.$$

Ahora nos colocamos cerca del umbral tomando $E = 0.9$.

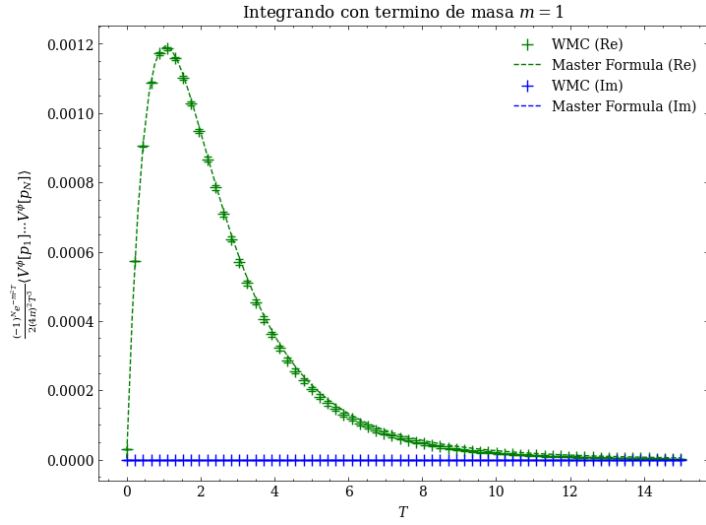


Figura 5.12: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.15 para $E = 0.9$.

Realizando la integración numérica podemos comparar con el resultado analítico:

$$\frac{\Gamma_{\text{Yuk}}}{\lambda^4} = 0.003971841312647103 \quad \frac{\Gamma_{\text{1PI}}}{\lambda^4} = 0.0038197880755716797.$$

Para la configuración de momentos 5.15 con distintas energías E , se puede validar la fiabilidad del método WMC para el caso *on-shell* a partir de los resultados mostrados.

Para finalizar con esta configuración podemos calcular la amplitud en función de la masa. Tomaremos $E = 0.1$ y haremos variar la masa de $m = 1$ a $m = 2$.

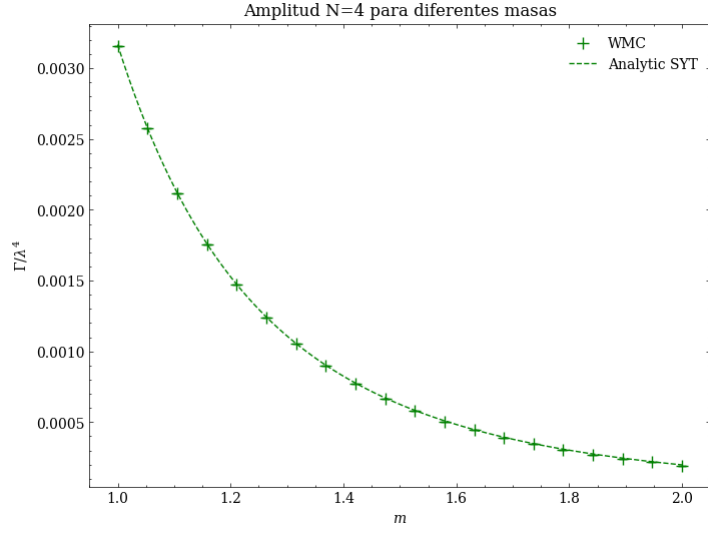


Figura 5.13: Comparación entre el método WMC y la expresión analítica para la amplitud de $N = 4$ puntos *on-shell*. Se usó la configuración 5.15 con $E = 0.1$.

Para $N \geq 4$ usaremos configuraciones de momentos análogas a (Nagy y Soper, 2006) y mantendremos $m = 1$.

Comenzando con $N = 5$ tenemos los siguientes momentos

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (-i0.549041, 0, 0, -0.549041), \\
 p_2 &= (-i0.549041, 0, 0, 0.549041), \\
 p_3 &= (i0.44722, 0.335, 0.159, 0.25), \\
 p_4 &= (i0.197593, -0.125, 0.153, 0.003), \\
 p_5 &= (i0.453269, -0.21, -0.312, -0.253).
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

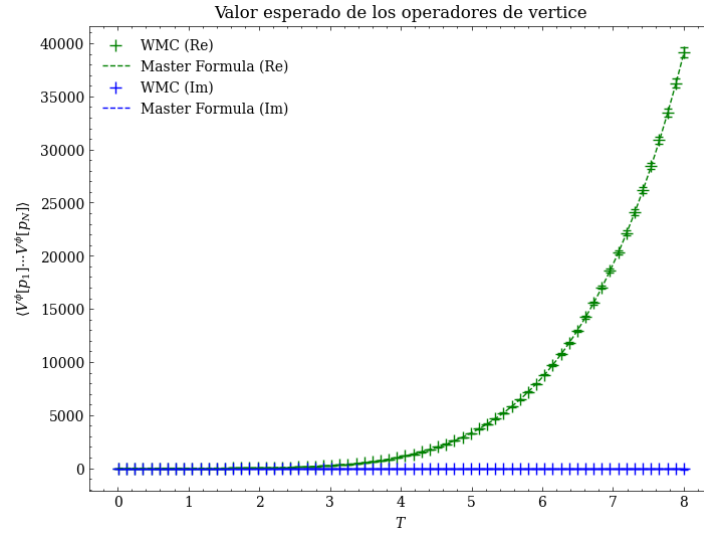


Figura 5.14: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.16.

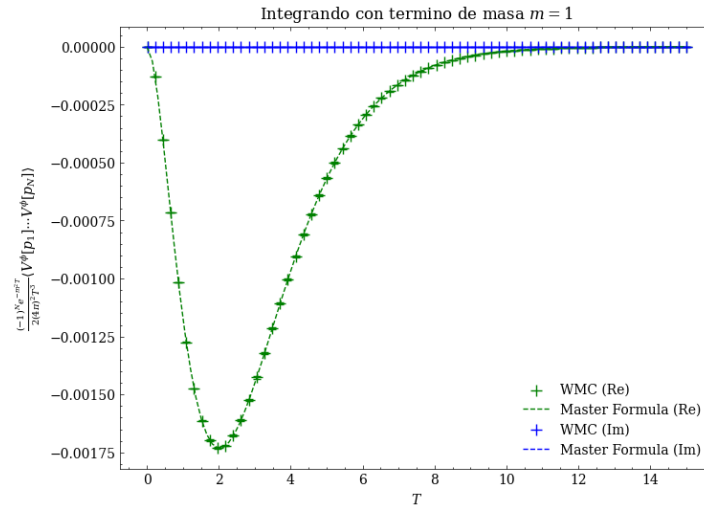


Figura 5.15: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.16.

Para $N = 6$ vamos a usar la siguiente configuración

$$\begin{aligned}
p_1 &= (-i0.566251, 0, 0, -0.566251), \\
p_2 &= (-i0.566251, 0, 0, 0.566251), \\
p_3 &= (i0.44722, 0.335, 0.159, 0.25), \\
p_4 &= (i0.197593, -0.125, 0.153, 0.003), \\
p_5 &= (i0.20854, -0.10, -0.18, -0.033), \\
p_6 &= (i0.279149, -0.11, -0.132, -0.22).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

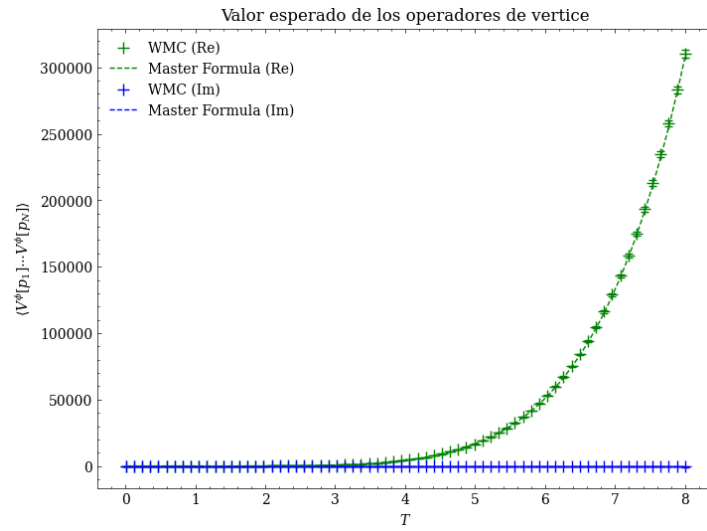


Figura 5.16: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos 5.17.

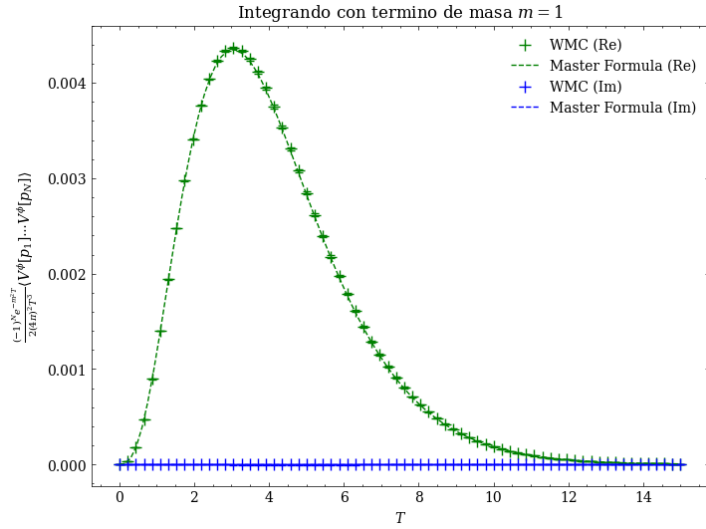


Figura 5.17: Comparación entre el método WMC y la evaluación numérica de la fórmula maestra para el integrando de la amplitud con la configuración de momentos 5.17.

Con los últimos resultados mostrados en esta sección, en adición a los iniciales, podemos validar el método WMC para el cálculo de amplitudes de N puntos en la teoría escalar ϕ^3 para configuraciones *off-shell* y *on-shell*. A partir de los parámetros utilizados para la creación de lazos aleatorios, los cuales no son tan demandantes computacionalmente, se obtuvo una gran estimación a los resultados estándar y conocidos en el formalismo línea de mundo.

5.3. QED escalar con WMC

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para amplitudes de N puntos a un lazo en la QED Escalar, utilizando el método WMC descrito en la sección anterior.

Ahora el punto de partida es la representación worldline de la amplitud de N fotones dada por la ecuación 4.36. La cantidad central a evaluar numéricamente es el valor esperado de los operadores de vértice 4.37. Nuevamente se calculará este valor esperado para distintos valores de T para evaluar numéricamente la integral sobre T .

La aproximación del valor esperado de los operadores de vértices, partiendo de 4.38 y 5.8, es

$$\langle V_{\text{scal}}^\gamma[k_1, \varepsilon_1] \cdots V_{\text{scal}}^\gamma[k_N, \varepsilon_N] \rangle \approx \frac{T^{\frac{N}{2}}}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \prod_{m=1}^N \left(\sum_{j=0}^{N_p-1} \varepsilon_m \cdot (y_i^{j+1} - y_i^j) e^{ik_m \cdot \sqrt{T} y_i^j} \right). \quad (5.18)$$

Podemos aprovechar la aproximación a bajas energías como se hace en (Ahmadinia y cols., 2023), expandiendo la exponencial imaginaria hasta primer orden. Esto ofrece una gran ventaja computacional, ya que permite calcular el valor esperado de los operadores de vértice independientemente de T , como se muestra en la siguiente ecuación

$$\langle V_{\text{scal}}^\gamma[k_1, \varepsilon_1] \cdots V_{\text{scal}}^\gamma[k_N, \varepsilon_N] \rangle \approx \frac{T^N}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \prod_{m=1}^N \left(\sum_{j=0}^{N_p-1} \varepsilon_m \cdot (y_i^{j+1} - y_i^j) (ik_m \cdot y_i^j) \right). \quad (5.19)$$

Notemos que la suma sobre distintos ensambles ya no depende de T por lo que se puede realizar solamente una vez. Finalmente el valor esperado tendrá un factor de T^N .

Para validar los resultados obtenidos mediante el método WMC, se realiza una comparación con los resultados analíticos de la amplitud de $N = 4$ fotones en el régimen de bajas energías dados por 4.39 4.40 y 4.41. Se utilizarán nuevamente los parámetros $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$.

Como primer caso se usará la siguiente configuración de momentos y polarizaciones

$$\begin{aligned} k_1 &= (0.03, 0, 0, 0.02) & \varepsilon_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ k_2 &= (0.04, 0.01, 0, 0) & \varepsilon_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ k_3 &= (0.05, 0, 0.01, 0) & \varepsilon_3 &= (0, 0, 0, 1), \\ k_4 &= (-0.12, -0.01, -0.01, -0.02) & \varepsilon_4 &= (0, 1, 1, 0)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

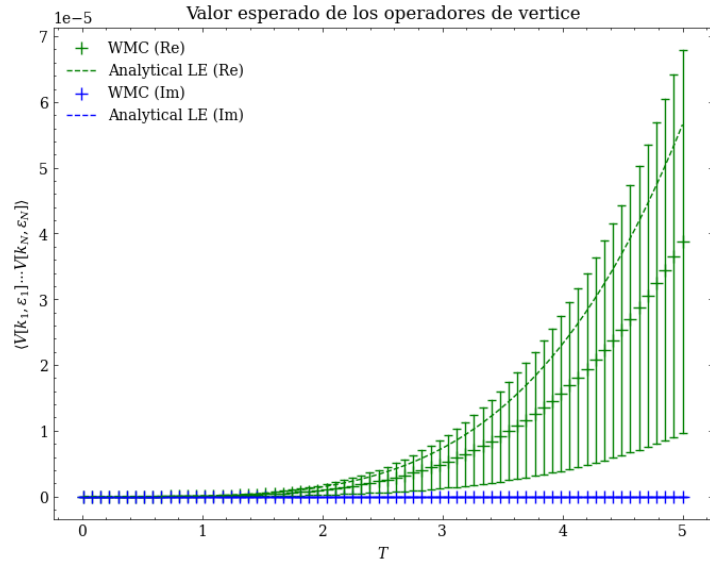


Figura 5.18: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20.

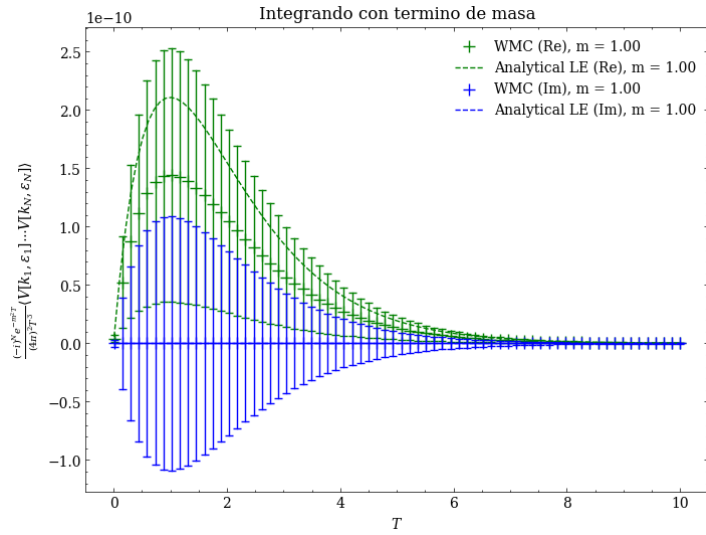


Figura 5.19: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del integrando de la amplitud con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20.

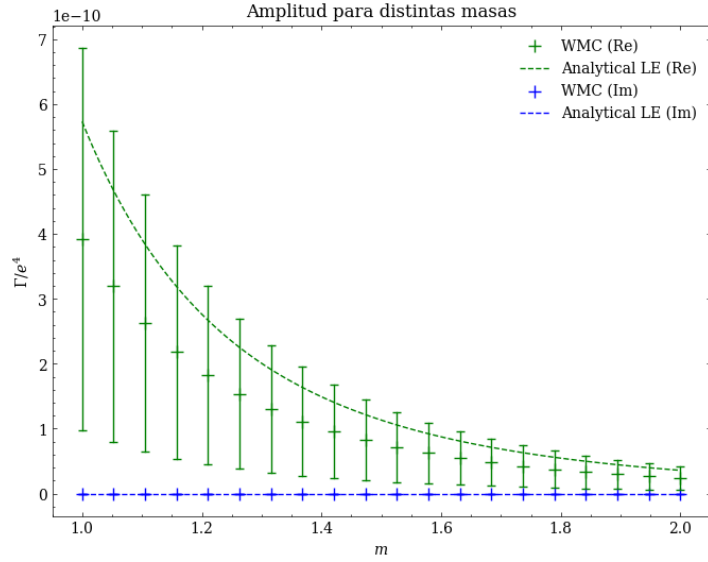


Figura 5.20: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías de la amplitud para distintas masas con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20.

Observamos que para la configuración 5.20, el método WMC muestra una discrepancia notable en comparación al resultado analítico en el régimen de bajas energías. Si bien, el resultado numérico es un poco acertado, no se tiene la precisión que se esperaría como en el caso de la teoría ϕ^3 .

Para continuar con la exploración del método numérico, podemos usar otras configuraciones de momentos y polarizaciones, por ejemplo

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (0.03, 0, 0, 0.02) & \varepsilon_1 &= (0, 1, 1, 0)/\sqrt{2}, \\
 k_2 &= (0.04, 0.01, 0, 0) & \varepsilon_2 &= (0, 1, -1, 0)/\sqrt{2}, \\
 k_3 &= (0.05, 0, 0.01, 0) & \varepsilon_3 &= (0, 0, 1, 1)/\sqrt{2}, \\
 k_4 &= (-0.12, -0.01, -0.01, -0.02) & \varepsilon_4 &= (0, 1, 0, 1)/\sqrt{2}.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

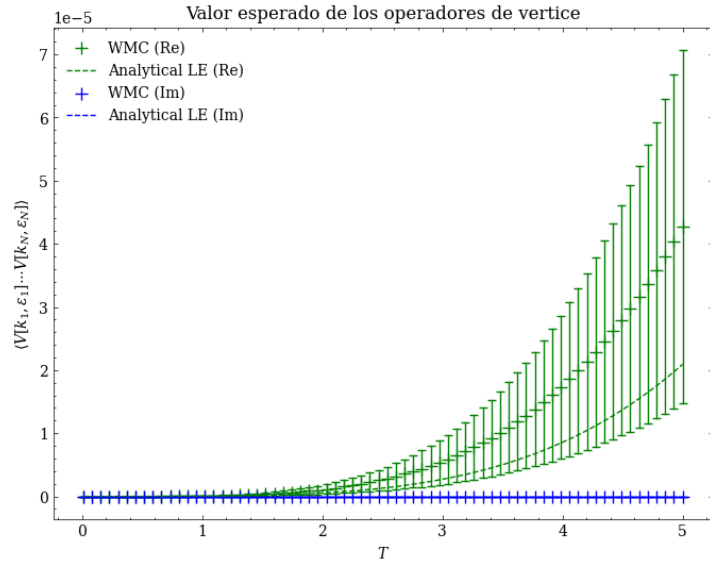


Figura 5.21: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.21.

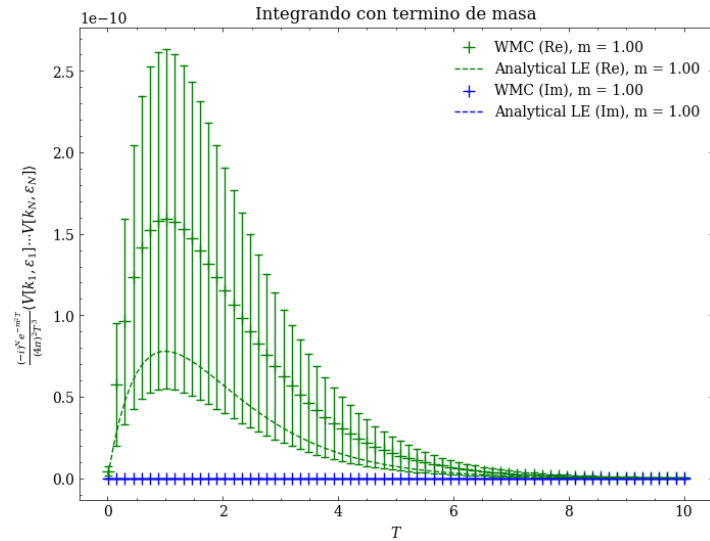


Figura 5.22: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del integrando de la amplitud con la configuración de momentos y polarizaciones 5.21.

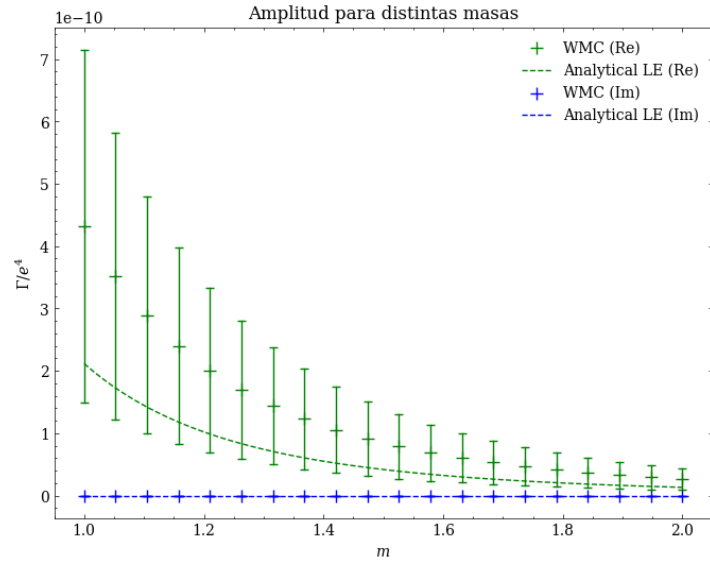


Figura 5.23: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías de la amplitud para distintas masas con la configuración de momentos y polarizaciones 5.21.

Para estas configuraciones *off-shell* el resultado numérico no muestra precisión como en la teoría anterior. Observamos en las figuras que los resultados no son acertados y el error es muy grande.

Probemos ahora algunas configuraciones *on-shell*. Tomaremos $\omega = 0.01$ con la siguiente configuración

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (i\omega, 0, 0, \omega) & \varepsilon_1 &= (0, 1, 0, 0), \\
 k_2 &= (i\omega, 0, 0, -\omega) & \varepsilon_2 &= (0, 1, 0, 0), \\
 k_3 &= (-i\omega, \omega, 0, 0) & \varepsilon_3 &= (0, 0, 1, 0), \\
 k_4 &= (-i\omega, -\omega, 0, 0) & \varepsilon_4 &= (0, 0, 1, 0).
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

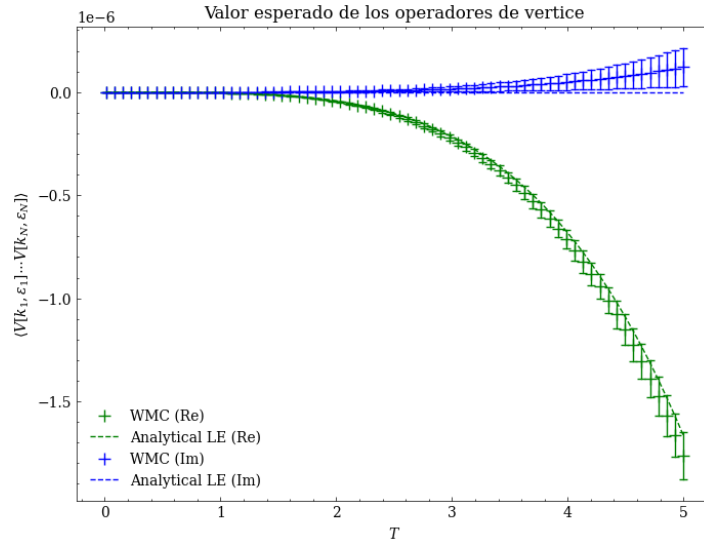


Figura 5.24: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.22.

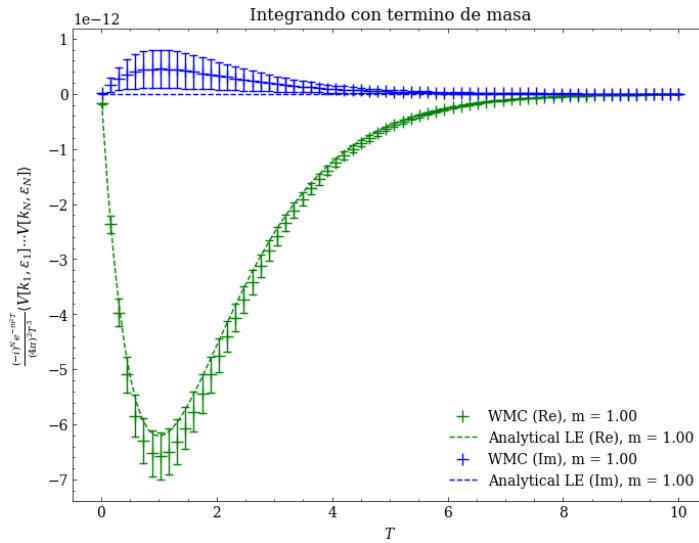


Figura 5.25: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del integrando de la amplitud con la configuración de momentos y polarizaciones 5.22.

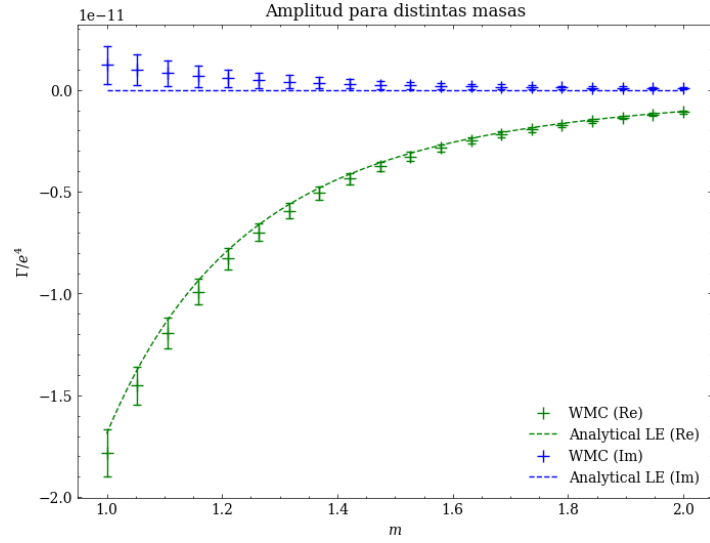


Figura 5.26: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías de la amplitud para distintas masas con la configuración de momentos y polarizaciones 5.22.

Para la configuración 5.22 se puede observar en las figuras que los resultados son más acertados y el error disminuye de forma notoria. Aunque los resultados no son igual de precisos que en la teoría anterior, se muestra una mejora en comparación a las dos configuraciones anteriores.

Otra configuración *on-shell* que podemos tomar es la siguiente con polarizaciones circulares

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (i\omega, 0, 0, \omega) & \varepsilon_1 &= (0, 1, i, 0)/\sqrt{2}, \\
 k_2 &= (i\omega, 0, 0, -\omega) & \varepsilon_2 &= (0, 1, -i, 0)/\sqrt{2}, \\
 k_3 &= (-i\omega, \omega, 0, 0) & \varepsilon_3 &= (0, 0, 1, -i)/\sqrt{2}, \\
 k_4 &= (-i\omega, -\omega, 0, 0) & \varepsilon_4 &= (0, 0, 1, i)/\sqrt{2}.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

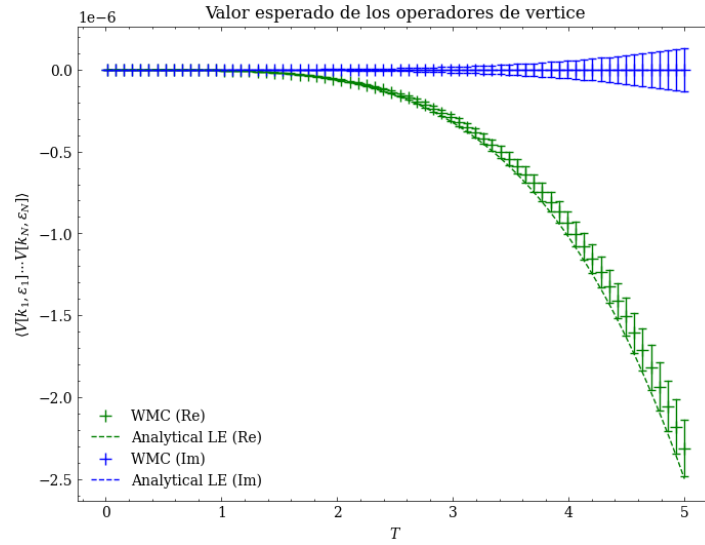


Figura 5.27: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.23.

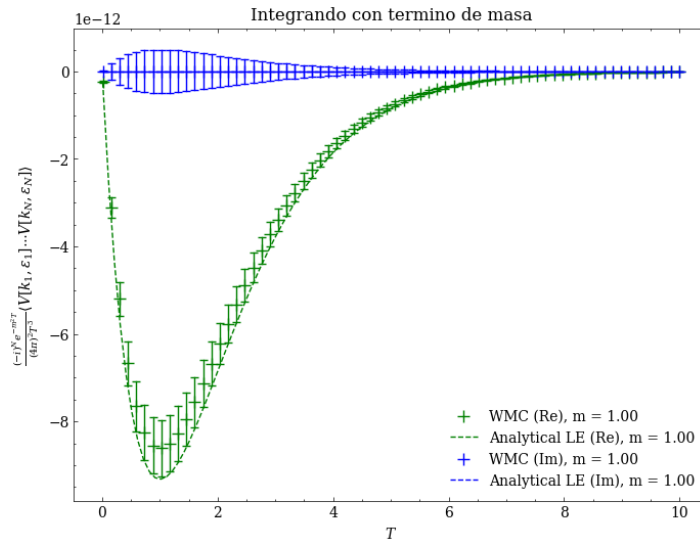


Figura 5.28: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del integrando de la amplitud con la configuración de momentos y polarizaciones 5.23.

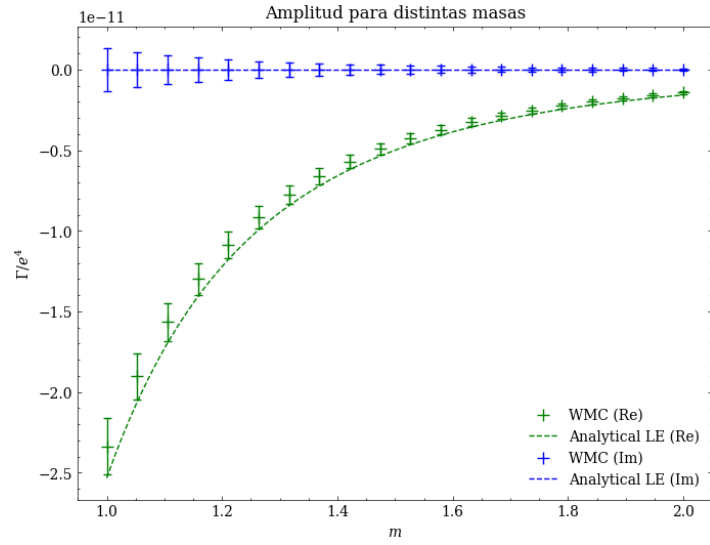


Figura 5.29: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías de la amplitud para distintas masas con la configuración de momentos y polarizaciones 5.23.

Nuevamente vemos que para la configuración 5.23 los resultados son más acertados. Se tiene un comportamiento similar al mostrado por la configuración 5.22 y la precisión falla por muy poco de nuevo.

Se podría pensar que para lograr una mayor precisión se tiene que aumentar el valor de los parámetros N_l y N_p , algo que nos dice el método Monte Carlo. Para poner en perspectiva una de las limitaciones de este método, específicamente en esta teoría, volvamos a usar la configuración 5.20 con los nuevos parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$. Concentrémonos solamente en el valor esperado de los operadores de vértice.

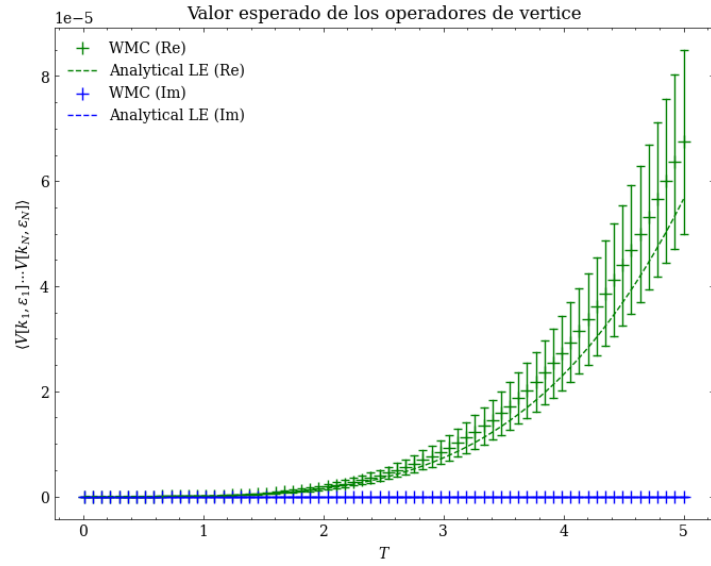
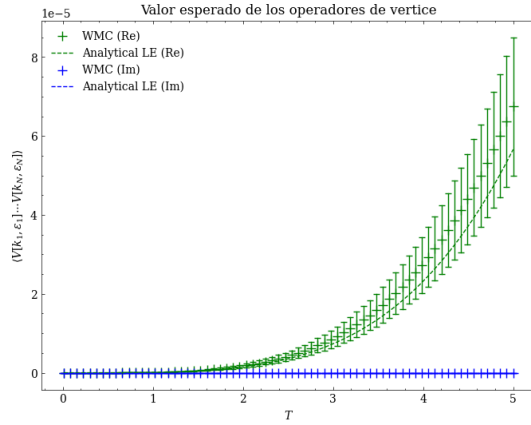
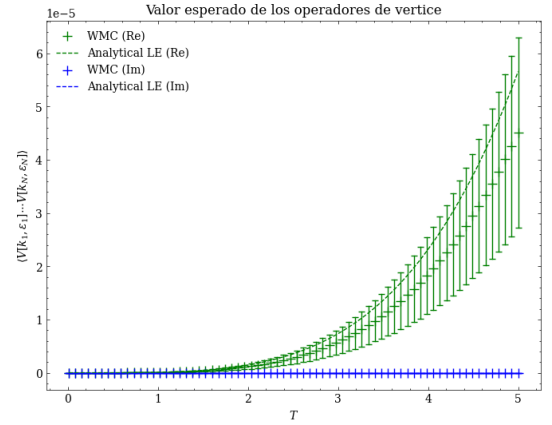


Figura 5.30: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$.

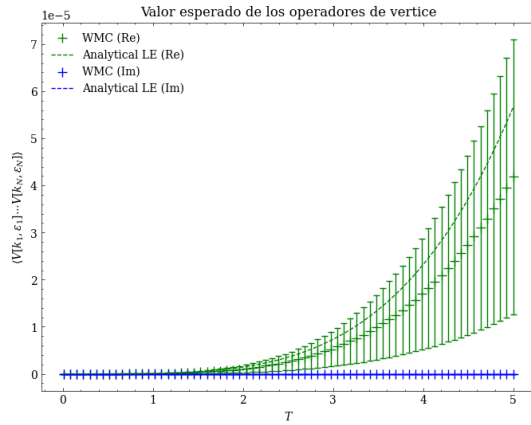
Si repetimos este cálculo para varios ensambles, usando los mismos parámetros, obtenemos resultados muy diferentes, como lo muestra la siguiente imagen.



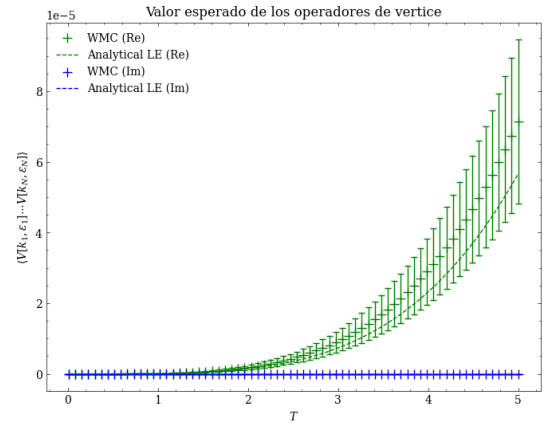
(a) Valor esperado de los operadores de vértice para el primer ensamble.



(b) Valor esperado de los operadores de vértice para el segundo ensamble.



(c) Valor esperado de los operadores de vértice para el tercer ensamble.

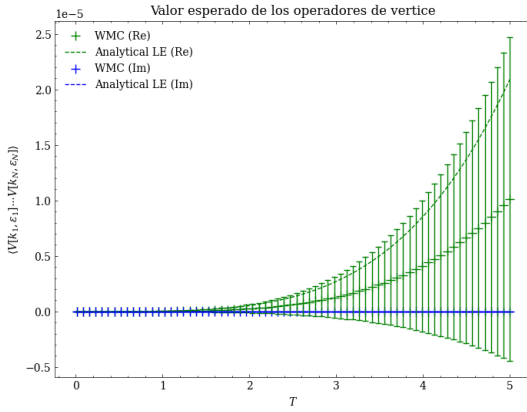


(d) Valor esperado de los operadores de vértice para el cuarto ensamble.

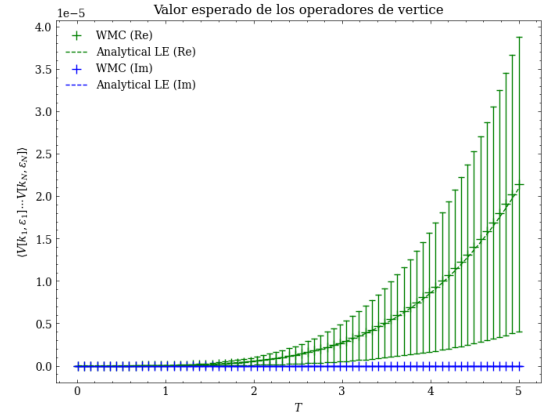
Figura 5.31: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.20 para cuatro ensambles distintos. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$.

A partir de la figura 5.31 se puede observar que los resultados varían considerablemente con cada ensamble que se toma.

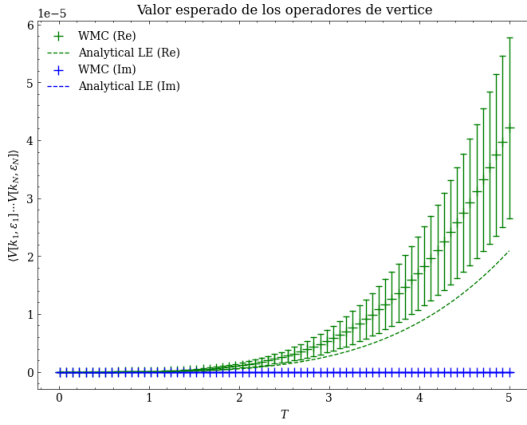
Podemos hacer el mismo análisis para las otras configuraciones de momentos y polarizaciones, con el objetivo de ver cuales ofrecen una buena estabilidad.



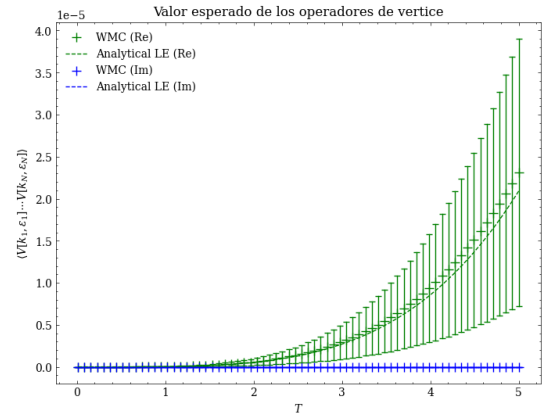
(a) Valor esperado de los operadores de vértice para el primer ensamble.



(b) Valor esperado de los operadores de vértice para el segundo ensamble.

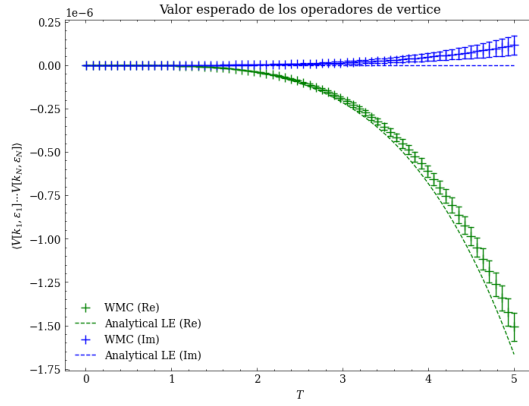


(c) Valor esperado de los operadores de vértice para el tercer ensamble.

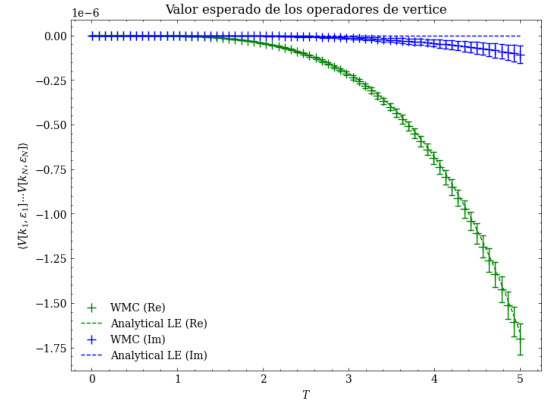


(d) Valor esperado de los operadores de vértice para el cuarto ensamble.

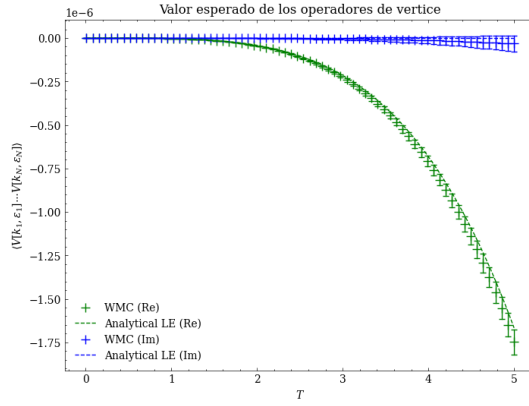
Figura 5.32: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.21 para cuatro ensambles distintos. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$.



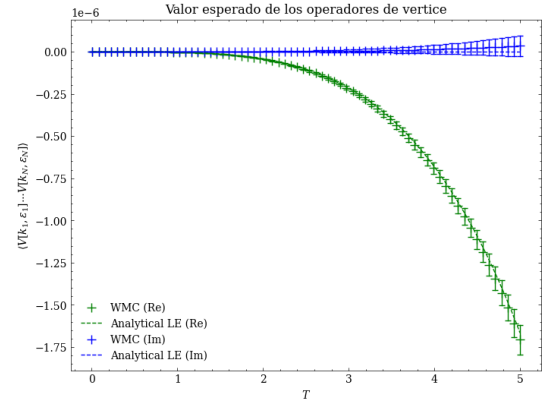
(a) Valor esperado de los operadores de vértice para el primer ensamble.



(b) Valor esperado de los operadores de vértice para el segundo ensamble.

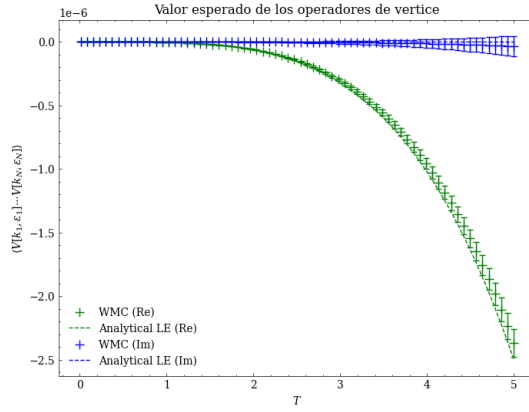


(c) Valor esperado de los operadores de vértice para el tercer ensamble.

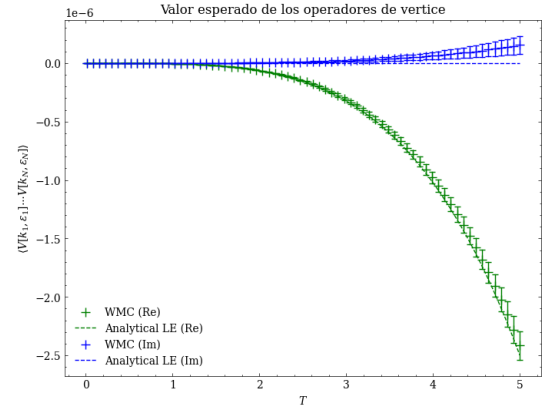


(d) Valor esperado de los operadores de vértice para el cuarto ensamble.

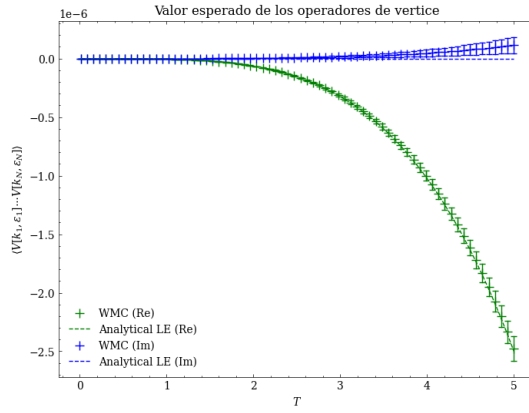
Figura 5.33: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.22 para cuatro ensambles distintos. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$.



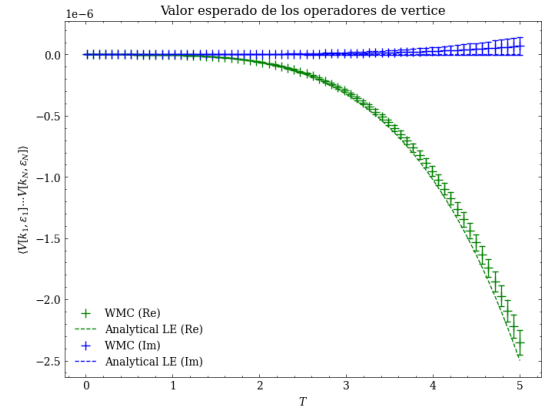
(a) Valor esperado de los operadores de vértice para el primer ensamble.



(b) Valor esperado de los operadores de vértice para el segundo ensamble.



(c) Valor esperado de los operadores de vértice para el tercer ensamble.



(d) Valor esperado de los operadores de vértice para el cuarto ensamble.

Figura 5.34: Comparación entre el método WMC y el resultado analítico en el régimen de bajas energías del valor esperado de los operadores de vértice con la configuración de momentos y polarizaciones 5.23 para cuatro ensambles distintos. Se utilizaron los parámetros $N_l = 10000$ y $N_p = 5000$.

A partir de estas imágenes, observamos que el método numérico ofrece estabilidad con las configuraciones 5.22 y 5.23.

Se sospecha que la gran variación de los resultados usando distintos ensambles viene del término $\dot{\gamma} \cdot \epsilon$ en los operadores de vértice. Este término es el que marca la diferencia de los operadores de vértice de fotones y los utilizados en la teoría ϕ^3 , en la cual los resultados no presentaban esta variación. Su tratamiento numérico resulta delicado en el contexto de WMC, ya que el uso de caminos aleatorios para el cálculo numérico dificulta la evaluación de términos que dependen explícitamente de sus derivadas.

Podemos extraer propiedades específicas de las configuraciones que presentaron buena

estabilidad para establecer algunos criterios para la elección de momentos y polarizaciones. En dichas configuraciones se utilizaron polarizaciones transversales y se cumplió $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ y $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$. Además, en cada operador de vértice no aparecieron términos cruzados del tipo $\dot{y}_i + \dot{y}_j$, de modo que el integrando correspondiente contenía términos de la forma $\dot{y}_i(iy \cdot k)$ o $(\dot{y}_i + i\dot{y}_j)(iy \cdot k)$.

El mejor comportamiento observado para las configuraciones con polarizaciones transversales resulta interesante al considerar que, para fotones *on-shell*, las polarizaciones físicas corresponden a componentes transversales respecto a la dirección de propagación de la onda plana. Esto sugiere que la eliminación de las componentes longitudinales podría estar relacionada con una mayor estabilidad numérica en estas configuraciones. Sin embargo, esta interpretación no es concluyente y sería necesario un estudio específico del tratamiento de los términos dependientes de las derivadas de los caminos para establecer esta relación de manera precisa.

Capítulo 6

Conclusiones

Este trabajo tuvo como objetivo el cálculo numérico de amplitudes de N puntos a un lazo en las teorías ϕ^3 y QED Escalar a través del formalismo línea de mundo y métodos Monte Carlo, constituyendo la primera aplicación del formalismo WMC a este tipo de amplitudes. El método numérico se implementó de manera exitosa y permitió explorar su viabilidad como una alternativa computacional al método convencional de diagramas de Feynman. Se analizó su comportamiento numérico y se comparó con los resultados conocidos.

Los resultados correspondientes a la teoría ϕ^3 lograron reproducir correctamente lo esperado con la fórmula maestra y algunos resultados analíticos conocidos, validando la implementación numérica y mostrando que el método permite obtener resultados consistentes con los cálculos convencionales. Se pudieron explorar distintas configuraciones de momentos *on-shell* y *off-shell* para distintos valores de N . En el caso de la QED Escalar se exploraron distintas configuraciones específicamente para $N = 4$ en el régimen de bajas energías. A diferencia de la teoría anterior, algunas configuraciones presentaron discrepancias notables con los resultados analíticos. El análisis de estas configuraciones permitió identificar la relación entre la discrepancia de resultados y la presencia de derivadas en los operadores de vértice, constituyendo una de las limitaciones del método. A pesar de ello, algunas configuraciones mostraron buenos resultados y se remarcaron las propiedades específicas que estas tenían en común. Estas observaciones sugieren que la mayor estabilidad del método viene de las configuraciones *on-shell* con polarizaciones transversales gracias a la eliminación de las componentes longitudinales de la onda plana. Sin embargo, esta interpretación no es concluyente y sería necesario un estudio específico del tratamiento de los términos dependientes de las derivadas de los caminos para establecer esta relación de manera precisa.

Computacionalmente se verificó que la elección de parámetros $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$ para

la creación de lazos fue suficiente para reproducir los resultados conocidos. Estos parámetros son considerablemente menores a los que se utilizan en otros trabajos en el ámbito de este formalismo, lo cual nos permite hacer este tipo de implementaciones sin poseer un gran equipo computacional.

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que el formalismo WMC es una alternativa viable para el cálculo de amplitudes de N puntos a un lazo para distintas configuraciones. La reproducción de resultados conocidos en la teoría ϕ^3 demuestra que el método puede competir con el cálculo convencional basado en diagramas de Feynman desde el punto de vista de la obtención de amplitudes, aunque las discrepancias encontradas en algunas configuraciones de la QED escalar muestran que existen limitaciones que deben ser más estudiadas. La implementación puede extenderse a otras teorías aun no exploradas, mediante equipos de cómputo más potentes se podrían hacer cálculos para cinemáticas más complejas y finalmente este trabajo puede ser el punto de partida para la exploración más a fondo de los términos con derivadas en los operadores de vértice.

Apéndice A

Tiempo de cómputo

Se analizará el tiempo de cómputo de los códigos utilizados en esta tesis. Se pretende analizar principalmente cómo crece el tiempo de cómputo en función del número de puntos de la amplitud, así como en función de los parámetros para la discretización.

El cálculo principal del método WMC es el del valor esperado de los operadores de vértice $\langle V \cdots V \rangle$, ya que es aquí cuando se hace el cálculo numérico de la integral de trayectoria. Para analizar los tiempos de cómputo se fijará $T = 1$ y se van a variar otros parámetros.

Los cálculos numéricos presentados en esta tesis fueron realizados en una computadora portátil equipada con un procesador AMD Ryzen 5 7520U con Radeon Graphics, de 4 núcleos físicos y 8 hilos de ejecución, con una frecuencia máxima de 4.39 GHz, y 14 GiB de memoria RAM. El sistema operativo utilizado fue Ubuntu 24.04 LTS (64 bits).

Los algoritmos fueron implementados en Python 3.12.2, empleando las librerías NumPy 1.26.4 para el manejo de arreglos y operaciones numéricas, Numba 0.64.0 para la compilación Just-In-Time (JIT) de las rutinas críticas y la aceleración de los cálculos, y Matplotlib 3.9.2 para la generación de las figuras. Se pueden encontrar los códigos en: <https://github.com/oizquierdo03/worldline-monte-carlo>.

Los tiempos de ejecución reportados en este apéndice corresponden a esta configuración de hardware y software. En los algoritmos acelerados mediante Numba, los tiempos fueron medidos una vez finalizada la compilación JIT inicial, por lo que no incluyen el costo asociado a la primera compilación.

Comenzaremos con la teoría ϕ^3 .

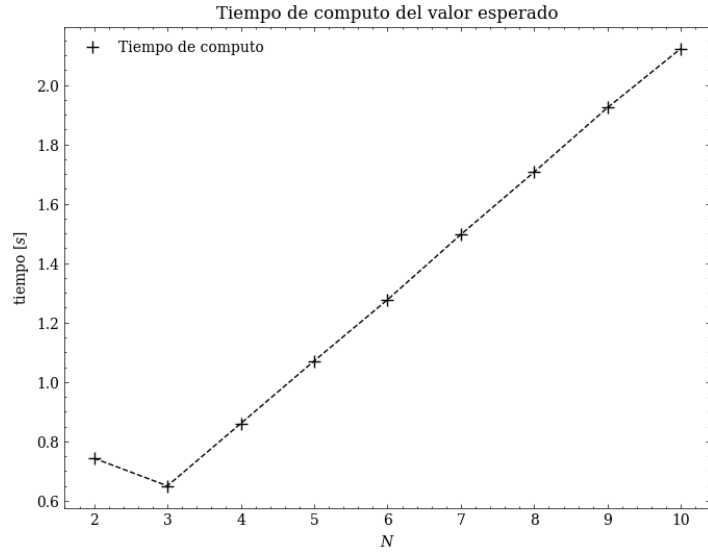


Figura A.1: Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la teoría ϕ^3 en función del número de partículas externas. Para cada N se utilizó una configuración de momentos aleatoria y se usó el mismo ensamble de lazos con $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$.

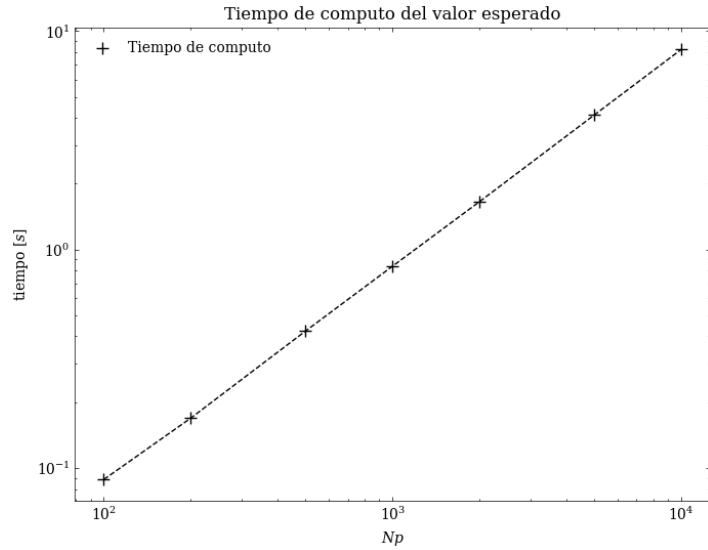


Figura A.2: Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la teoría ϕ^3 en función del parámetro N_p . Se usó la configuración de momentos 5.11 y se fijó $N_l = 5000$.

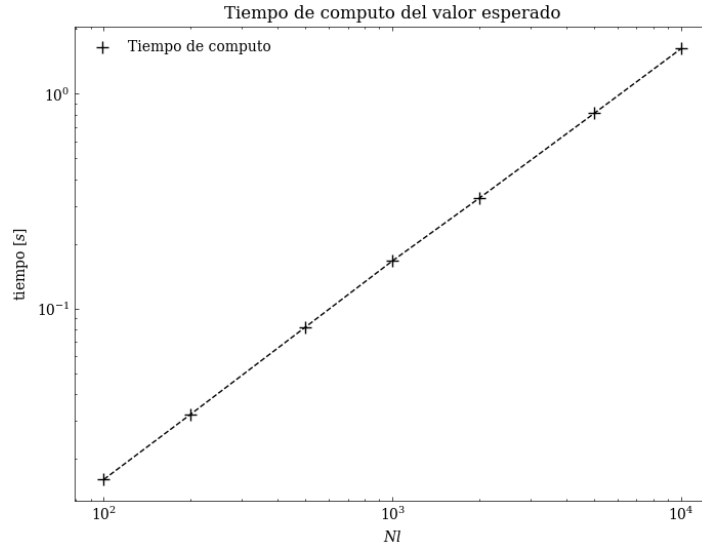


Figura A.3: Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la teoría ϕ^3 en función del parámetro N_l . Se usó la configuración de momentos 5.11 y se fijó $N_p = 1000$.

Otro cálculo importante es el del valor esperado de los operadores de vértice para distintos valores de T , el cual permite trazar la curva del integrando de la amplitud para calcular esta cantidad.

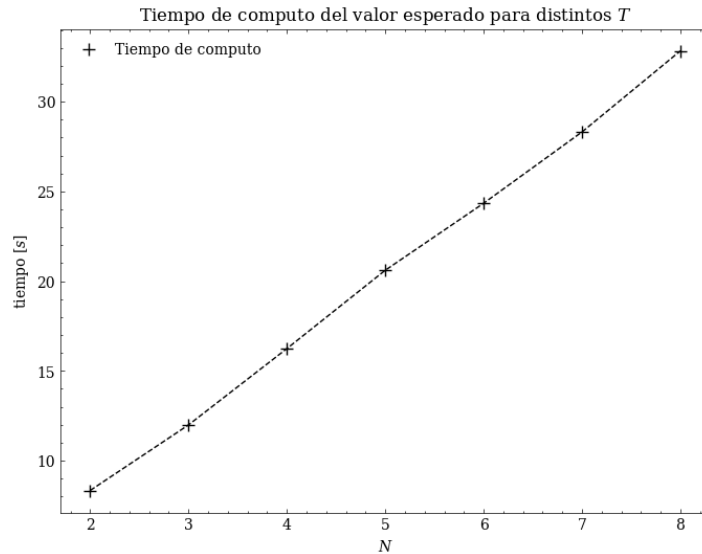


Figura A.4: Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice para distintos T en la teoría ϕ^3 en función del número de partículas externas. Para cada N se usó una configuración de momentos aleatoria y se usó el mismo ensamble de lazos con $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$.

Para la QED escalar se tienen los siguientes tiempos de cómputo.

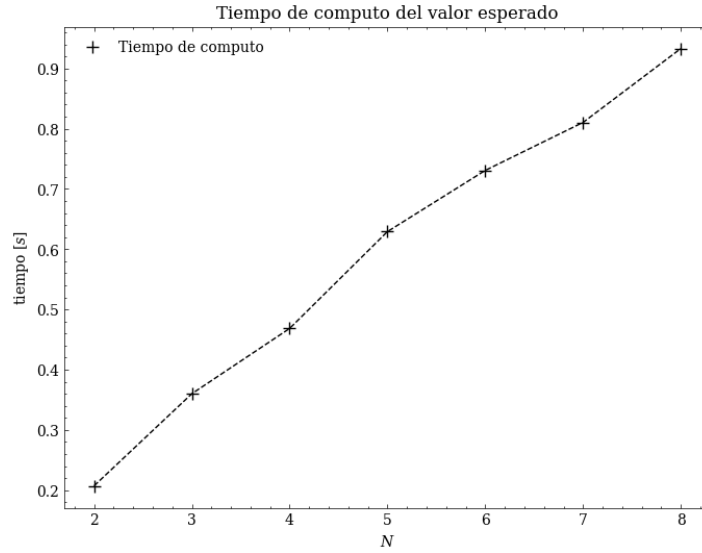


Figura A.5: Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la QED escalar en función del número de partículas externas. Para cada N se utilizó una configuración de momentos aleatoria, la misma polarización y se usó el mismo ensamble de lazos con $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$.

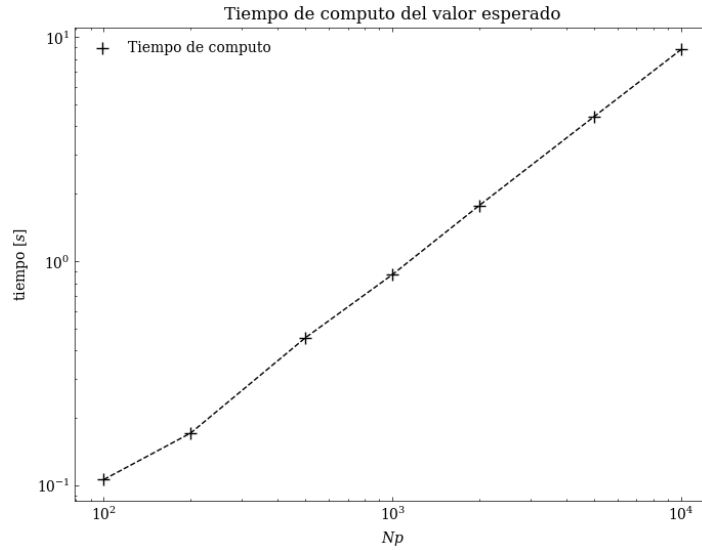


Figura A.6: Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la QED escalar en función del parámetro N_p . Se usó la configuración de momentos y polarizaciones 5.20 y se fijó $N_l = 5000$.

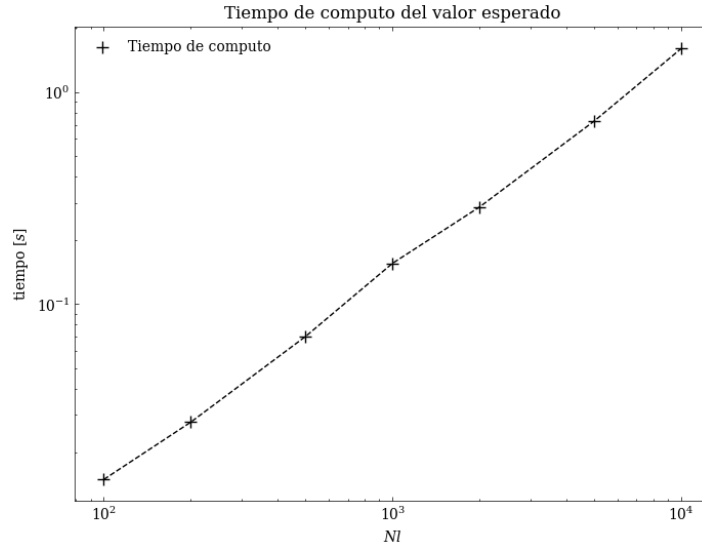


Figura A.7: Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice en la QED escalar en función del parámetro N_l . Se usó la configuración de momentos y polarizaciones 5.20 y se fijó $N_p = 1000$.

Finalmente tenemos el del valor esperado de los operadores de vértice para distintos valores de T .

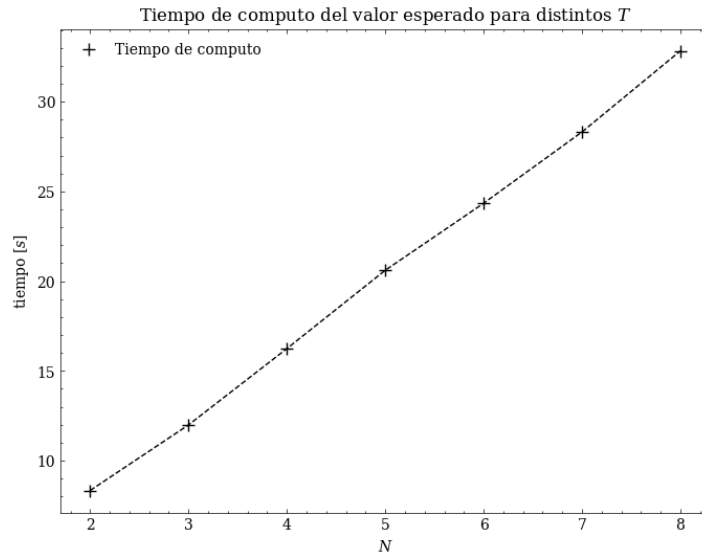


Figura A.8: Tiempo de cómputo del valor esperado de los operadores de vértice para distintos T en la QED escalar en función del número de partículas externas. Para cada N se usó una configuración de momentos aleatoria, la misma polarización y se usó el mismo ensamble de lazos con $N_l = 5000$ y $N_p = 1000$.

Referencias

- Affleck, I. K., Alvarez, O., y Manton, N. S. (1982). Pair production at strong coupling in weak external fields. *Nuclear Physics B*, 197, 509–519. doi: 10.1016/0550-3213(82)90455-2
- Ahmadinia, N., Lopez-Arcos, C., Lopez-Lopez, M. A., y Schubert, C. (2023). The qed four-photon amplitudes off-shell: Part 1. *Nuclear Physics B*, 991, 116216. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2023.116216
- Ahumada, I., y Edwards, J. P. (2023). Monte carlo generation of localized particle trajectories. *Physical Review E*, 108(6), 065306. doi: 10.1103/PhysRevE.108.065306
- Bastianelli, F., y Zirotti, A. (2002). Worldline formalism in a gravitational background. *Nuclear Physics B*, 642(1), 372–388. doi: [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(02\)00683-1](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(02)00683-1)
- Bern, Z., y Kosower, D. A. (1992). The computation of loop amplitudes in gauge theories. *Nuclear Physics B*, 379, 451–561. doi: 10.1016/0550-3213(92)90134-W
- Cheng, T.-P., y Li, L.-F. (1984). *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Corradini, O., y Muratori, M. (2020). A monte carlo approach to the worldline formalism in curved space. *Journal of High Energy Physics*, 2020(11), 169. doi: 10.1007/JHEP11(2020)169
- Dirac, P. A. M. (1928a). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778), 610-624. doi: 10.1098/rspa.1928.0023
- Dirac, P. A. M. (1928b). The quantum theory of the electron. part ii. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 118(779), 351-361. doi: 10.1098/rspa.1928.0056
- Dittrich, W., y Reuter, M. (2001). *Classical and quantum dynamics: From classical paths to path integrals* (4.^a ed.). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Dunne, G. V., Gies, H., Klingmüller, K., y Langfeld, K. (2009). Worldline monte carlo for

- fermion models at large N_f . *Journal of High Energy Physics*, 2009(08), 010. doi: 10.1088/1126-6708/2009/08/010
- Edwards, J. P., Gerber, U., Schubert, C., Trejo, M. A., Tsiftsi, T., y Weber, A. (2019). Applications of the worldline monte carlo formalism in quantum mechanics. *Annals of Physics*, 411, 167966. doi: 10.1016/j.aop.2019.167966
- Edwards, J. P., Mata, C. M., y Schubert, C. (2022). One-loop amplitudes in the worldline formalism. *Physica Scripta*, 97(6), 064002. doi: <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac6a1e>
- Feynman, R. P. (1948). Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 20(2), 367–387. doi: 10.1103/RevModPhys.20.367
- Feynman, R. P. (1950). Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. *Physical Review*, 80, 440–457. doi: 10.1103/PhysRev.80.440
- Feynman, R. P., y Hibbs, A. R. (1965). *Quantum mechanics and path integrals*. New York, NY: McGraw-Hill.
- Gies, H., y Klingmüller, K. (2005). Pair production in inhomogeneous fields. *Physical Review D*, 72, 065001. doi: 10.1103/PhysRevD.72.065001
- Gies, H., y Langfeld, K. (2001). Quantum diffusion of magnetic fields in a numerical worldline approach. *Nuclear Physics B*, 613, 353–365. doi: 10.1016/S0550-3213(01)00377-7
- Gies, H., y Langfeld, K. (2002). Loops and loop clouds – a numerical approach to the worldline formalism in qed. *International Journal of Modern Physics A*, 17, 966–978. doi: 10.1142/S0217751X02010388
- Gies, H., Langfeld, K., y Moyaerts, L. (2003). Casimir effect on the worldline. *Journal of High Energy Physics*, 2003(06), 018. doi: 10.1088/1126-6708/2003/06/018
- Gies, H., Sánchez-Guillén, J., y Vázquez, R. A. (2005). Quantum effective actions from nonperturbative worldline dynamics. *Journal of High Energy Physics*, 2005(08), 067. doi: 10.1088/1126-6708/2005/08/067
- Griffiths, D. J. (2013). *Introduction to electrodynamics* (4th ed.). Pearson.
- Klingmüller, K. (2004). *Pair production on the worldline* (Tesis de Master no publicada). University of Heidelberg, Heidelberg, Germany.
- Landau, L. D., y Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics* (3.^a ed., Vol. 1). Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Nagy, Z., y Soper, D. E. (2006). Numerical integration of one-loop feynman diagrams for N -photon amplitudes. *Physical Review D*, 74(9), 093006. doi: 10.1103/PhysRevD.74.093006
- Newman, M. E. J. (2012). *Computational physics*. CreateSpace Independent Publishing

Platform.

- Peskin, M. E., y Schroeder, D. V. (1995). *An introduction to quantum field theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Schubert, C. (2001). Perturbative quantum field theory in the string-inspired formalism. *Physics Reports*, 355(2-3), 73–234. doi: 10.1016/S0370-1573(01)00013-8
- Schwartz, M. D. (2013). *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press.
- Shankar, R. (1980). *Principles of quantum mechanics*. New York, NY: Plenum Press.
- Strassler, M. J. (1992). Field theory without feynman diagrams: One-loop effective actions. *Nuclear Physics B*, 385, 145–184. doi: 10.1016/0550-3213(92)90098-V
- Susskind, L., y Friedman, A. (2017). *Special relativity and classical field theory: The theoretical minimum*. Basic Books.
- Trejo Espinosa, M. A. (2017). *Estados ligados en el formalismo línea de mundo* (Tesis doctoral). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Instituto de Física y Matemáticas.
- Zee, A. (2010). *Quantum field theory in a nutshell* (2nd ed.). Princeton University Press.
- Zettili, N. (2009). *Quantum mechanics: Concepts and applications* (2.^a ed.). Chichester, UK: John Wiley & Sons.
- Zinn-Justin, J. (2002). *Quantum field theory and critical phenomena*. Oxford, UK: Clarendon Press.