

**Miguel Ramón  
Chávez Toriz**

**Constricción de modelos cosmológicos  
usando ráfagas rápidas de radio**

**2026**



**Universidad Autónoma de  
Querétaro**

**Facultad de Ingeniería**

**Constricción de modelos  
cosmológicos usando ráfagas rápidas  
de radio**

**Tesis**

Que como parte de los requisitos para obtener el  
Grado de

**Licenciado en**

**Ingeniería Física**

Presenta

**Miguel Ramón Chávez Toriz**

**Dirigido por:**

**Dr. Alberto Hernández Almada**

**Querétaro, Qro., a Enero de 2026**

La presente obra está bajo la licencia:  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

### Usted es libre de:

**Compartir** — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

### Bajo los siguientes términos:



**Atribución** — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#), brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#). Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.



**NoComercial** — Usted no puede hacer uso del material con [propósitos comerciales](#).



**SinDerivadas** — Si [remezcla, transforma o crea a partir](#) del material, no podrá distribuir el material modificado.

**No hay restricciones adicionales** — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

### Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una [excepción o limitación](#) aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como [publicidad, privacidad, o derechos morales](#) pueden limitar la forma en que utilice el material.



**Universidad Autónoma de Querétaro**

**Facultad de Ingeniería**

**Licenciatura Ingeniería Física**

## **Constricción de modelos cosmológicos usando ráfagas rápidas de radio**

### **Tesis**

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

**Licenciado en Ingeniería Física**

Presenta

**Miguel Ramón Chávez Toriz**

Dirigido por

**Dr. Alberto Hernández Almada**

---

Dr. Alberto Hernández Almada

Presidente

---

Dr. Josué de Jesús Trejo Alonso

Secretario

---

Dr. Octavio Cornejo Pérez

Vocal

---

Dr. Aldrin Melitón Cervantes Contreras

Suplente

---

Dr. Ulises Velasco García

Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro. México

Fecha de aprobación por el Consejo Universitario: Agosto de 2025

Dedicatorias: A mi papá, mi mamá y mi hermana por su apoyo incondicional; y a mí mismo, por la determinación para seguir mis metas y sueños.

## Agradecimientos

Quiero agradecer inmensamente a mi familia por estar siempre presente en los momentos en que estuve a punto de desistir y mostrarme lo que puedo lograr. Al Dr. Alberto Hernández Almada por brindarme, paso a paso, la experiencia de lo que significa una investigación real. A mis profesores, pues de cada experiencia —favorable o no— aprendí qué clase de académico deseo ser y comprendí la importancia del rigor en el estudio. De igual forma, agradezco a todas aquellas almas que, con o sin saberlo, me acompañaron en mis mejores y peores momentos durante la carrera; a quienes hoy puedo llamar amigos, sin importar si compartimos la misma disciplina.

También a los espacios de divulgación y entretenimiento, como los podcasts Las Alucines y Ciencia Simplificada, y a creadores como Daniela Rodrice, que me hicieron sentir acompañado durante las largas noches de trabajo.

Por último, pero no menos importante, a mí mismo; porque a pesar de las dudas e inseguridades, logré perseguir grandes metas personales y profesionales durante la carrera, siendo la conclusión de esta tesis una de las más significativas.

## Abreviaturas y siglas

$H_0$	Constante de Hubble (tasa de expansión del Universo en la época actual).
$h$	Constante de Hubble adimensional ( $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ).
$\Omega_m$	Densidad de materia total (fracción de la densidad crítica).
$\Omega_b$	Densidad de materia bariónica (fracción de la densidad crítica).
$\Omega_{dm}$	Densidad de materia oscura (fracción de la densidad crítica).
$\Omega_\Lambda$	Densidad de energía oscura.
$a(t)$	Factor de escala cósmico en función del tiempo.
$z$	Corrimiento al rojo ( <i>redshift</i> ).
$z_t$	Redshift de transición (paso de desaceleración a aceleración).
$w(z)$	Parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura.
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (métrica del espacio-tiempo).
$\Lambda$ CDM	Modelo estándar ( $\Lambda$ Cold Dark Matter).
CPL	Chevallier-Polarski-Linder (parametrización de energía oscura).
PEDE	<i>Phenomenologically Emergent Dark Energy</i> .
FRB(s)	<i>Fast Radio Burst(s)</i> , Ráfagas Rápidas de Radio.
DM	<i>Dispersion Measure</i> , Medida de dispersión de una señal de radio.
$DM_{\text{IGM}}$	Medida de dispersión atribuible al medio intergaláctico.
$DM_{\text{host}}$	Medida de dispersión atribuible a la galaxia anfitriona.
IGM	<i>Intergalactic Medium</i> , medio intergaláctico.
ISM	<i>Interstellar Medium</i> , medio interestelar.
MW	<i>Milky Way</i> , Vía Láctea.
NE2001	Modelo de distribución de electrones libres en la Vía Láctea.
MCMC	<i>Markov Chain Monte Carlo</i> , Cadenas de Markov de Monte Carlo.
BAO	<i>Baryon Acoustic Oscillations</i> , Oscilaciones Acústicas de Bariones.
CMB	<i>Cosmic Microwave Background</i> , Fondo Cósmico de Microondas.
SN Ia	Supernovas tipo Ia.

## Resumen

En este trabajo de tesis se estudia el problema de la estimación de los valores de los parámetros cosmológicos utilizando Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) para el universo tardío, en conjunto con datos de Cronómetros Cósmicos ( $H(z)$ ). El objetivo principal consistió en evaluar la capacidad de los FRBs para restringir la ecuación de estado de la energía oscura y la densidad de bariones en tres modelos: el modelo estándar  $\Lambda$ CDM, la parametrización CPL y el modelo de Energía Oscura Emergente (PEDE). La metodología empleada se fundamentó en un análisis estadístico bayesiano con Cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC) para explorar el espacio de parámetros, utilizando una muestra de 92 FRBs localizados y 31 datos de  $H(z)$ . Los resultados demuestran que los FRBs constituyen trazadores eficaces del contenido bariónico del Universo, logrando restringir la densidad de materia bariónica ( $\Omega_b$ ) con una precisión de aproximadamente 3.5 %, lo cual supera a las sondas geométricas convencionales. Para el modelo  $\Lambda$ CDM, se obtuvieron valores de  $H_0 \approx 67.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  y  $\Omega_m \approx 0.31$ , evidenciando que los priors resultan cruciales para acotar adecuadamente el espacio de parámetros. En el caso de la CPL, se observó una degeneración significativa al utilizar exclusivamente datos de FRBs, lo que derivó en soluciones físicas inestables; no obstante, esta limitación se resolvió satisfactoriamente mediante el análisis conjunto. Por último, el modelo PEDE resultó ser una opción competitiva, con un ajuste comparable al modelo estándar ( $\chi^2_\nu \approx 2.39$ ), aunque se distingue por su dinámica cinemática, presentando un parámetro *jerk* actual de  $j_0 \approx 1.45$ . Se concluye que la inclusión de los FRBs resulta fundamental para romper las degeneraciones en el sector bariónico y que, en combinación con datos de expansión, permiten poner a prueba la naturaleza de la energía oscura.

**Palabras clave:** Cosmología, Ráfagas Rápidas de Radio, Energía Oscura, Inferencia Bayesiana, Parámetros Cosmológicos.



## Abstract

In this thesis work, the problem of estimating cosmological parameter values using Fast Radio Bursts (FRBs) for the late universe is studied, along with Cosmic Chronometer data ( $H(z)$ ). The main objective was to evaluate the capacity of FRBs to constrain the dark energy equation of state and baryon density in three models: the standard  $\Lambda$ CDM model, the CPL parametrization, and the Phenomenologically Emergent Dark Energy (PEDE) model. The methodology employed consisted of a Bayesian statistical analysis with Markov Chain Monte Carlo (MCMC) to explore the parameter space using a sample of 92 localized FRBs and 31  $H(z)$  data points. Results demonstrate that FRBs are effective tracers of the baryonic content of the Universe, achieving a constraint on the baryon density ( $\Omega_b$ ) with a precision of approximately 3.5 %, which improves upon standard geometric probes. For the  $\Lambda$ CDM model, values of  $H_0 \approx 67.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  and  $\Omega_m \approx 0.31$  were obtained, highlighting that priors are crucial to adequately bound the parameter space. In the case of CPL, significant degeneracy was observed when using FRB data exclusively, yielding unstable physical solutions; however, this was effectively resolved through joint analysis. Finally, the PEDE model proved to be a competitive option, with a fit comparable to the standard model ( $\chi^2_\nu \approx 2.39$ ) but distinguished by its kinematic dynamics, presenting a current *jerk* parameter of  $j_0 \approx 1.45$ . It is concluded that the inclusion of FRBs is fundamental to break degeneracies in the baryonic sector and that, together with expansion data, they serve to test the nature of dark energy.

**Keywords:** Cosmology, Fast Radio Bursts, Dark Energy, Bayesian Inference, Cosmological Parameters.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
I	Planteamiento del problema . . . . .	1
II	Justificación . . . . .	2
III	Hipótesis . . . . .	3
IV	Objetivo general . . . . .	3
V	Objetivos específicos . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Antecedentes</b>	<b>5</b>
I	Antecedentes históricos . . . . .	5
a	La cosmología del Siglo de las Luces . . . . .	7
II	Newton y Einstein en la relatividad . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Fundamentos teóricos de la cosmología</b>	<b>12</b>
I	Introducción a la cosmología moderna . . . . .	12
II	Ley de Hubble . . . . .	12
III	Tipos de materia . . . . .	14
a	Materia bariónica . . . . .	14
b	Materia oscura . . . . .	14
IV	Energía oscura . . . . .	15
a	Evidencia de su presencia . . . . .	16
V	La métrica FLRW . . . . .	17
VI	Tipos de universo . . . . .	19
a	Universo esférico ( $k > 0$ ) . . . . .	20

b	Universo plano ( $k = 0$ ) . . . . .	20
c	Universo hiperbólico ( $k < 0$ ) . . . . .	21
d	Universo observable . . . . .	22
VII	Ecuación de estado del universo . . . . .	23
VIII	Leyes de Friedmann . . . . .	24
IX	Evolución general de la densidad en un modelo cosmológico . . . . .	25
X	Parámetros Cinemáticos Cosmográficos . . . . .	27
a	Parámetro de Desaceleración $q(z)$ . . . . .	27
b	Parámetro Jerk $j(z)$ . . . . .	28
XI	Modelo $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter) . . . . .	30
a	Análisis de los parámetros cinemáticos en $\Lambda$ CDM . . . . .	32
XII	Modelo CPL (Chevallier–Polarski–Linder) . . . . .	32
a	Análisis de los parámetros cinemáticos en CPL . . . . .	33
XIII	Modelo PEDE (Phenomenological Emergent Dark Energy) . . . . .	34
a	Análisis de los parámetros cinemáticos en PEDE . . . . .	36
XIV	Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) . . . . .	37
a	La Relación Medida de Dispersión-Redshift ( $DM - z$ ) . . . . .	39
b	Posibles orígenes y progenitores . . . . .	41
c	Evidencia observacional fundamental . . . . .	42
XV	Cronómetros Cósmicos: Relojes Estándar . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Material y Métodos o Metodología</b>	<b>45</b>
I	Metodología de estimación de parámetros . . . . .	45
a	Inferencia Estadística Bayesiana . . . . .	45
b	Modelado Cosmológico Computacional . . . . .	46
c	Muestreo MCMC y Análisis Cinemático . . . . .	47
d	Criterios de Selección de Modelos . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>50</b>
I	Resultados para el Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	50

a	Discusión de resultados para $\Lambda$ CDM . . . . .	53
II	Resultados para la Parametrización CPL . . . . .	55
a	Discusión de resultados de CPL . . . . .	58
III	Resultados para el Modelo PEDE . . . . .	59
a	Discusión de resultados de PEDE . . . . .	63
IV	Comparación de Modelos por Conjunto de Datos . . . . .	65
a	Análisis con Cronómetros Cósmicos (Hz) . . . . .	65
b	Análisis con Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) . . . . .	66
c	Análisis Conjunto (Hz + FRBs) . . . . .	66
d	Discusión del análisis con Cronómetros Cósmicos (Hz) . . . . .	69
e	Discusión del análisis con Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) . . . . .	69
f	Discusión del análisis Conjunto (Hz + FRBs) . . . . .	70
g	Selección de modelos con AIC y BIC . . . . .	70
V	Conclusiones . . . . .	71
a	Verificación de la Hipótesis . . . . .	72
b	Justificación de la inclusión de FRBs . . . . .	73
c	Cumplimiento de Objetivos . . . . .	73
d	Conclusiones Físicas y Perspectivas . . . . .	74
e	Perspectivas y Trabajo a Futuro . . . . .	75
<b>A</b>	<b>Catálogos de Datos Observacionales</b>	<b>83</b>
I	Cronómetros Cósmicos (Hz) . . . . .	84
II	Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) . . . . .	86
<b>B</b>	<b>Códigos de Análisis</b>	<b>90</b>
I	Algoritmo de Ajuste Bayesiano . . . . .	91
II	Generación de Gráficas y Cinemática . . . . .	93

# Índice de cuadros

- 3.1 Un esquema de subclasificación universal para FRBs propuesto en Guo y Wei (2024). . . . . 38
- 5.1 Resultados para el modelo  $\Lambda$ CDM. . . . . 53
- 5.2 Resultados para el modelo CPL. . . . . 57
- 5.3 Resultados para el modelo PEDE. . . . . 63
- 5.4 Comparación global de parámetros cosmológicos. . . . . 68
- A.1 Datos observacionales de Cronómetros Cósmicos ( $H(z)$ ) utilizados en el análisis. . . . . 84
- A.2 Catálogo de 92 Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) localizadas utilizadas en el análisis. Se muestran: nombre, redshift ( $z$ ), medida de dispersión observada ( $DM_{\text{obs}}$ ) y la contribución de la Vía Láctea ( $DM_{\text{MW}}$ ) según el modelo NE2001. . . . . 86

# Índice de figuras

2.1	Diagrama esquemático de las tres leyes de Kepler. . . . .	8
3.1	Ilustración de la expansión acelerada del universo. . . . .	16
3.2	Historia de la expansión del Universo. . . . .	17
3.3	Representación esquemática de los tres tipos principales de geometría del universo. . . . .	19
3.4	Cinemática del modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	32
3.5	Cinemática del modelo CPL ( $w_0 = -0.9, w_a = 0.2$ ). . . . .	34
3.6	Cinemática del modelo PEDE. . . . .	36
3.7	Visualización de los datos de FRBs. . . . .	39
5.1	Posteriores para el modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	51
5.2	Comparación entre las predicciones del modelo $\Lambda$ CDM y los datos observacionales. Las incertidumbres y barras de error mostradas corresponden a $1\sigma$ . . . . .	52
5.3	Evolución cinemática para $\Lambda$ CDM. . . . .	52
5.4	Posteriores para el modelo CPL. . . . .	55
5.5	Comparación entre las predicciones del modelo CPL y los datos observacionales. . . . .	56
5.6	Evolución cinemática para CPL. . . . .	56
5.7	Posteriores para el modelo PEDE. . . . .	60
5.8	Comparación entre las predicciones del modelo PEDE y los datos observacionales. . . . .	61

5.9 Evolución cinemática para PEDE. . . . .	62
5.10 Comparativa utilizando solo datos de Cronómetros Cósmicos (Hz). . .	65
5.11 Comparativa utilizando solo datos de FRBs. . . . .	66
5.12 Comparativa global (Joint). . . . .	67

# Capítulo 1

## Introducción

### I. Planteamiento del problema

El estudio del Universo ha avanzado significativamente gracias a la mejora en la precisión con la que se estiman parámetros cosmológicos fundamentales, como la constante de Hubble  $H_0$ , la densidad de materia  $\Omega_m$  y el factor de escala  $a(t)$ , entre otros (Planck Collaboration, 2020; Weinberg, 2008).

Sin embargo, existían importantes retos relacionados con la precisión de estas mediciones, como la discrepancia en los valores obtenidos para la constante de Hubble (Warren, 2023) y la comprensión de la naturaleza de la energía oscura (Frieman et al., 2008), lo que limitaba la capacidad para modelar con exactitud la expansión y evolución del Universo. Una parte crucial de estos avances fue el desarrollo de herramientas observacionales capaces de explorar distintas etapas de la expansión cósmica. En este proyecto, el trabajo se enfocó en la medición y prueba de tres modelos cosmológicos: el modelo estándar Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM), la parametrización Chevallier-Polarski-Linder (CPL) (Chevallier & Polarski, 2001; Linder, 2003) y el modelo Phenomenologically Emergent Dark Energy (PEDE) (Li & Shafieloo, 2019) a partir de datos observacionales.

En particular, se utilizaron FRBs como herramienta para restringir dichos mode-



los (Guo & Wei, 2024). Estas señales de radio de origen extragaláctico permitieron relacionar la Medida de Dispersión ( $DM$ ) de la señal con el corrimiento al rojo ( $z$ ), lo cual abrió la posibilidad de usarlas como sondas cosmológicas (Petroff et al., 2019). En el presente análisis se consideraron tanto FRBs repetitivos como no repetitivos, siempre que estuvieran bien localizados; es decir, que su posición en el cielo permitiera asociarlos de forma confiable con una galaxia anfitriona y obtener su redshift. Para ello, se empleó el conjunto de datos presentado en (Wang et al., 2025), que incluyó FRBs con información detallada sobre  $DM$  y  $z$ . La estimación de los parámetros cosmológicos se realizó mediante técnicas de inferencia bayesiana utilizando cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC).

## II. Justificación

La creciente disponibilidad de datos observacionales provenientes de Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) abrió una nueva vía para investigar la expansión del Universo. En particular, su capacidad para relacionar la medida de dispersión ( $DM$ ) con el corrimiento al rojo ( $z$ ) permitió emplearlas como sondas independientes y complementarias en la estimación de parámetros cosmológicos.

Este proyecto se enfocó en probar y comparar diferentes modelos cosmológicos a partir de datos de FRBs bien localizados, entendidos como aquellos cuya posición permitió asociarlos con una galaxia anfitriona y conocer su redshift. El análisis se centró en parámetros clave como la constante de Hubble ( $H_0$ ), la densidad de materia bariónica ( $\Omega_b$ ) y la densidad de materia oscura ( $\Omega_{dm}$ ).

El uso de técnicas bayesianas mediante MCMC permitió realizar una inferencia estadística robusta, así como optimizar el tratamiento computacional de los datos. Esta doble contribución —en el ámbito de la cosmología y en el desarrollo metodológico— sustenta la relevancia científica y técnica del presente estudio.

### III. Hipótesis

Se plantea que el análisis de la Medida de Dispersión intergaláctica ( $DM_{\text{IGM}}$ ) de la señal de radio proveniente de Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) permite restringir con precisión los parámetros cosmológicos que describen la expansión del Universo.

Bajo esta premisa, se postula que la inclusión de estos datos en el análisis estadístico proporciona la evidencia suficiente para discriminar si la energía oscura se comporta como una constante cosmológica o si presenta una evolución dinámica en el tiempo, consolidando así a los FRBs como sondas cosmológicas efectivas y complementarias a las observaciones tradicionales.

### IV. Objetivo general

Analizar el potencial de las Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) como herramienta observacional para restringir modelos cosmológicos, utilizando el conjunto de datos de 92 eventos bien localizados presentado por Wang et al. (Wang et al., 2025). Se busca evaluar la capacidad de estas señales para estimar con precisión parámetros fundamentales como la densidad de materia bariónica ( $\Omega_b$ ), la densidad de materia total ( $\Omega_m$ ) y la constante de Hubble ( $H_0$ ), así como los parámetros asociados a la ecuación de estado de la energía oscura ( $w_0, w_a$ ), mediante la implementación de un ajuste estadístico bayesiano sobre el modelo estándar  $\Lambda$ CDM y escenarios de energía oscura dinámica.

### V. Objetivos específicos

- Ajustar los modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM, CPL y PEDE mediante técnicas de inferencia bayesiana, con el fin de analizar el comportamiento de los datos observacionales bajo estos diferentes escenarios teóricos.

- Estimar el valor actual de la constante de Hubble ( $H_0$ ) y otros parámetros cosmológicos clave a partir del conjunto de FRBs localizados.
- Evaluar la contribución de los FRBs como trazadores cosmológicos independientes, comparando su efectividad y complementariedad frente a sondas tradicionales como las Supernovas tipo Ia y las Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO).
- Optimizar el desempeño computacional del análisis estadístico mediante la implementación eficiente de cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC), logrando una reducción significativa en los tiempos de cómputo.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### I. Antecedentes históricos

En la actualidad, se experimenta una etapa crucial para la exploración espacial, frecuentemente denominada como la segunda carrera espacial, cuyo objetivo es llevar al ser humano a Marte y privatizar el espacio (Allnutt, 1985). Este fenómeno implica una gran mejora tecnológica y científica en la mayoría de los ámbitos, siendo uno de los más impactados el astronómico. Aunque la astronomía se ha visto afectada de manera directa en términos observacionales, también ha mejorado gracias a la implementación de mejores telescopios, que permiten registrar diferentes frecuencias de la luz y, con ello, observar diversas regiones del espacio (Spitzer, 2004).

El estudio del cosmos siempre ha suscitado un gran interés a lo largo de la historia de la humanidad, ya que, desde los primeros tiempos, al no existir contaminación lumínica, las personas podían observar una gran diversidad de cuerpos celestes, tales como estrellas, planetas y cúmulos en el firmamento. Esto, por un lado, dio origen a grandiosos mitos y leyendas sobre diferentes deidades en diversas culturas alrededor del mundo (Nuttall, 1901). Por otro lado, también cautivó a grandes civilizaciones, que realizaron observaciones precisas para describir los cuerpos

celestes basándose en leyes matemáticas (Van Brummelen, 2009).

Durante la época precolombina, existieron varias culturas importantes en México, pero una de las más misteriosas e interesantes es la maya, no solo por su amplio poder militar y conocimiento médico, sino también por su saber acerca de los cuerpos celestes y su interés por desentrañar los ciclos de los mismos (especialmente del Sol y la Luna) (Tedlock, 1992). Por ello, integraron sus conocimientos astronómicos en la planificación y orientación de su arquitectura religiosa, convirtiendo a sus edificaciones en marcadores precisos de eventos celestes (Stross, 2007). Estas observaciones fueron registradas a través de pliegos basados en aritmética, lo cual llevó a establecer un calendario de 260 días (usado para fines religiosos) y otro de 360 días (usado de forma cotidiana). El primer calendario estuvo influenciado por sus ritos religiosos, a tal punto que hoy en día se siguen estudiando los ciclos de 260 días en las culturas derivadas de la maya, así como en la cultura maya actual (Brady & Prufer, 2005). Por otro lado, el calendario de 360 días todavía se utiliza y se considera un gran avance al tomar en cuenta que un año terrestre es de aproximadamente 365.25 días (Stuart, 1987).

De forma paralela, en la antigua Grecia, el primero en crear una cosmovisión más informada e importante fue Tales de Mileto, quien tenía un gran interés en la astronomía (Vassallo, 2021). Logró recopilar los conocimientos astronómicos de las culturas babilónica y egipcia, lo que le permitió predecir eclipses y generar su propia cosmovisión del universo (Kirk, 1951). Tales propuso que el origen de los cuerpos celestes estaba relacionado con un gran cuerpo de agua, en el que la Tierra se encontraba de forma tangencial, lo que explicaba fenómenos naturales como la lluvia (Heilbron, 2003). Sin embargo, esta idea no fue suficiente para su época, pues también existía la escuela de Platón y Pitágoras, que creía que todo en el universo tenía una razón matemática de existir (Heilbron, 2003). Esta escuela, en conjunto con la cosmovisión de Aristóteles, proponía que la Tierra era el centro del universo (Aristotle, 1996).

Siglos más tarde, debido a las disputas religiosas y al dominio del cristianismo,

que promovía las ideas de los pensadores griegos (principalmente Aristóteles), la astronomía se desarrolló estrechamente ligada a la astrología, dado el fuerte vínculo religioso en la promoción y aceptación de dichas ideas (Dear, 2006). Las observaciones y explicaciones intentaban fundamentar la cosmovisión aristotélica, la cual, desde sus inicios, tuvo detractores como Aristarco de Samos, quien observó que la Tierra no era el centro del universo y propuso al Sol como tal (Evans, 1998). No fue hasta la llegada de Nicolás Copérnico que la teoría heliocéntrica adquirió mayor fuerza (Copernicus, 1543).

### **a. La cosmología del Siglo de las Luces**

No es posible hablar de la historia de la cosmología sin mencionar el Siglo de las Luces, pero para ello se debe primero abordar las ideas precursoras que marcaron dicho siglo.

Se comienza con Nicolás Copérnico, quien fue un importante detractor de la teoría geocéntrica, ya que fue el primero en seguir las ideas de Aristarco y promover una teoría heliocéntrica de manera coherente, alejándose progresivamente de las ideas religiosas (algo impensable en esa época). Copérnico propuso que los planetas eran esferas que describían un movimiento circular alrededor del Sol.

A pesar de sus argumentos, estos no fueron del todo aceptados hasta la intervención de Johannes Kepler e Isaac Newton. Johannes Kepler fue una de las figuras centrales del Siglo de las Luces, no solo debido a su historia personal de éxito, sino también por sus aportes académicos. Kepler terminó sus estudios en astronomía, lo que le permitió realizar observaciones y publicar sus descubrimientos. Su carrera fue tan destacada que publicó varios artículos y libros de astronomía que fueron reconocidos por Tycho Brahe, quien tenía acceso a los mejores observatorios de la época. Las observaciones de Brahe eran incluso mejores que las de Copérnico, pero el problema que enfrentaba Kepler era su mala relación con Brahe. Tycho Brahe defendía una teoría geocéntrica que proponía que la Tierra tenía al Sol y a la Luna

girando a su alrededor, mientras que el Sol tenía a los demás planetas orbitando en torno a él. Kepler no estaba de acuerdo con esta teoría, ya que apoyaba las ideas de Copérnico. Kepler tuvo que esperar a la muerte de Brahe para acceder a sus observaciones, lo que le permitió publicar sus tres leyes del movimiento planetario.

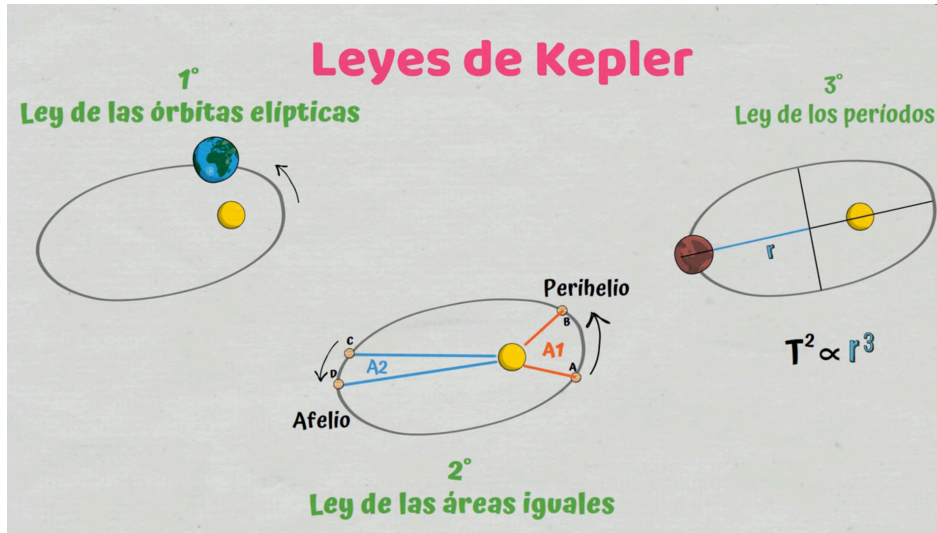


Figura 2.1: Diagrama esquemático de las tres leyes de Kepler. Imagen adaptada del canal Es Ciencia: <https://www.youtube.com/watch?v=xzmmuJEIZC8> (Es Ciencia, 2025).

Isaac Newton, considerado hoy en día el padre de la física, hizo contribuciones clave, particularmente en la descripción de la mecánica clásica. Sus mayores aportes fueron sus tres leyes del movimiento, que describen la conservación de tres cantidades fundamentales: la energía, el momento lineal y el momento angular. Otro de sus grandes logros fue la teoría de la gravitación universal, que se rige por la siguiente ecuación:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}$$

Donde:

- $G$  es la constante de gravitación universal.

- $m_1$  es la masa del primer objeto.
- $m_2$  es la masa del segundo objeto.
- $\vec{r}$  es el vector de posición con magnitud  $r$ .

Aunque hoy en día esta ecuación no se utiliza a gran escala, sigue siendo muy útil para describir de manera precisa y sencilla el movimiento de los cuerpos celestes en el sistema solar. Esta teoría proporcionó el apoyo teórico necesario para que las tres leyes de Kepler fueran aceptadas junto con la teoría heliocéntrica.

## II. Newton y Einstein en la relatividad

Durante varios siglos, las leyes de Newton fueron consideradas inmutables; nadie se atrevía a contradecirlas hasta la llegada de otro genio de la física: Albert Einstein. Él se percató del problema del desfase en el perihelio de Mercurio, cuya trayectoria no concordaba con las leyes de Newton (Nye, 2003). En un intento por justificar esta discrepancia, se propuso una hipótesis insatisfactoria que involucraba un material denominado éter, el cual se postulaba como una sustancia presente alrededor de los cuerpos celestes, y se creía que generaba un cambio en su movimiento, además de causar la desviación de la luz (Pais, 1982).

La hipótesis del éter fue desmentida por las teorías de la relatividad especial y general, establecidas por Einstein (Einstein, 1920). Para abordar la relatividad general, es necesario desglosar primero la relatividad especial, la cual se fundamenta en dos grandes postulados (Einstein, 1905):

### a. Principio de relatividad:

*Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

Este postulado afirma que todas las leyes de la física establecidas, como la mecánica clásica y la electrodinámica, son válidas en todos los sistemas de referencia inerciales (Einstein, 1905).



**b. Constancia de la velocidad de la luz:**

*La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, independientemente del estado de movimiento de la fuente o del observador.*

Este postulado establece que la velocidad de la luz,  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s, es una constante y no depende del movimiento relativo entre la fuente y el observador. Incluso si el observador se desplazara a la velocidad de la luz, seguiría percibiendo la luz moviéndose a dicha velocidad (Einstein, 1905).

Estos dos postulados son clave para comprender cómo los sistemas de estudio cambian su interacción en función de su escala. En este contexto, al tratarse de cuerpos muy grandes, se manifiesta lo que se conoce como la curvatura espacial. Es decir, la distancia entre dos cuerpos grandes parece cambiar, aunque en realidad la distancia es un absoluto. Esto se puede observar con la siguiente ecuación (Misner et al., 1973):

$$\vec{x} = \frac{\dot{\vec{x}}}{t}$$

Donde:

- $\vec{x}$  es la distancia,
- $\dot{\vec{x}}$  es la velocidad,
- $t$  es el tiempo.

Aquí se observa que la distancia depende de la velocidad y del tiempo. Sin embargo, tal como afirman los postulados de Einstein, la velocidad es relativa, mientras que la distancia no lo es. Esto solo puede ser posible si el tiempo también es relativo (Einstein, 1916a).

La gran diferencia entre las teorías de Einstein y Newton no radica únicamente en el establecimiento de la velocidad de la luz como un límite máximo, sino también en la descripción de la gravedad. Newton concebía la gravedad como una fuerza en

un espacio tridimensional (Newton, 1687a), mientras que Einstein, al incorporar tres dimensiones espaciales y una temporal, interpretó la gravedad como una curvatura en el tejido del espacio-tiempo (Einstein, 1955). Esta nueva concepción permitió explicar con precisión el desfase en el perihelio de Mercurio, que desde el enfoque relativista era un movimiento natural (Weinberg, 1972).

# Capítulo 3

## Fundamentos teóricos de la cosmología

### I. Introducción a la cosmología moderna

En la actualidad se vive una segunda carrera espacial, la cual no habría sido posible sin la primera (Allnutt, 1985). Entre los grandes hitos de aquella etapa inicial destacan la llegada del ser humano a la Luna (NASA, 1969) y la puesta en órbita del telescopio espacial Hubble a una altitud de 547 kilómetros (NASA, s.f.). Este telescopio fue nombrado en honor al astrónomo Edwin Hubble, quien descubrió la constante que lleva su apellido y que describe la expansión del universo (Hubble, 1929). En conjunto con la teoría de la relatividad, estos hallazgos sentaron las bases de la cosmología moderna.

### II. Ley de Hubble

No es posible abordar la cosmología moderna sin mencionar uno de sus fundamentos: la ley de Hubble, la cual introdujo una idea revolucionaria en la astronomía. Esta relación fue establecida por Edwin Hubble, uno de los astrónomos más desta-

cados, a quien se atribuye el descubrimiento de la expansión del universo (Hubble, 1929).

Al utilizar las ecuaciones de campo de Einstein para analizar la posible dinámica del universo, se descubrió que estas predecían un universo en expansión o contracción. Dado que en ese momento se asumía que el universo debía ser estático, se introdujo la constante cosmológica para preservar dicho carácter (Warren, 2023). Sin embargo, a partir de la observación de distintos cúmulos de galaxias, se notó que estos se alejaban unos de otros a gran velocidad. Tras múltiples mediciones, se estableció la relación lineal conocida hoy como la ley de Hubble (Weinberg, 2008):

$$v = H_0 d \quad (3.1)$$

donde:

- $v$  es la velocidad de recesión entre dos objetos en el universo,
- $H_0$  es la constante de Hubble, que indica la tasa de expansión del universo (típicamente en unidades de  $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ ),
- $d$  es la distancia entre los dos objetos.

La **ecuación de Hubble** (3.1) muestra que las galaxias se alejan del observador a una velocidad proporcional a su distancia, lo cual constituye evidencia de la expansión del universo. Aunque esto pueda parecer sorprendente, no implica que el universo se expanda dentro de un espacio preexistente; por el contrario, significa que el propio universo se expande, generando un espacio cada vez mayor entre los objetos que contiene (Einstein, 1920).

Al estudiar la velocidad con la que se separan los grandes cuerpos celestes, se encontró una discrepancia entre las predicciones teóricas y los datos observados. Estos últimos sugieren una mayor cantidad de masa en comparación con lo predicho por la teoría. Esto plantea la interrogante sobre cuál es la composición (como la ma-

teria oscura) o la dinámica en el Universo (como una posible gravedad modificada) que origina dicha diferencia en la masa.

### **III. Tipos de materia**

#### **a. Materia bariónica**

La materia bariónica ha sido objeto de estudio desde la época de Newton y constituye un pilar fundamental para el desarrollo de distintas ramas de la física, en particular la física de partículas y la cosmología, donde resulta esencial comprender su naturaleza (Swinburne University of Technology, n.d.).

Tal como su denominación sugiere, la materia bariónica está compuesta principalmente por bariones, es decir, protones y neutrones. Esta composición le confiere la capacidad de interactuar a través de las fuerzas gravitatoria, electromagnética y nuclear. Gracias a estas interacciones, la astronomía se centró desde sus orígenes en el estudio de los objetos observables ópticamente, es decir, aquellos que emiten, absorben o reflejan radiación electromagnética (Swinburne University of Technology, n.d.).

#### **b. Materia oscura**

En este contexto surge el concepto de materia oscura, una forma de materia que, en términos generales, permanece como una de las grandes interrogantes de la física contemporánea. Su característica principal reside en que interactúa únicamente a través de la gravedad con la materia convencional (Misner et al., 1973). A diferencia de la materia bariónica, que participa en interacciones electromagnéticas y nucleares, la materia oscura no emite, absorbe ni refleja luz, por lo que su detección y análisis deben realizarse a través de métodos indirectos.

A partir de diversas observaciones astrofísicas y cosmológicas, se ha determinado la densidad de los principales componentes del universo, medida con alta pre-

cisión por la misión Planck (Planck Collaboration, 2020):

$\Omega_{\Lambda} = 0.6847 \pm 0.0073$	(densidad de energía oscura)
$\Omega_b = 0.0493 \pm 0.0002$	(densidad de materia bariónica)
$\Omega_{dm} = 0.265 \pm 0.007$	(densidad de materia oscura)
$\Omega_m = 0.3092 \pm 0.0070$	(densidad de materia total)

La existencia de la materia oscura se infiere a partir de múltiples evidencias observacionales, entre las que destacan las curvas de rotación de galaxias (Rubin & Ford, 1970), la dinámica de los cúmulos de galaxias (Zwicky, 1933), los efectos de lente gravitacional en sistemas como el Cúmulo Bala (Clowe et al., 2006), y las anisotropías del fondo cósmico de microondas medidas por WMAP y Planck (Planck Collaboration, 2020). Estas observaciones muestran de manera consistente que la materia visible resulta insuficiente para explicar la dinámica y estructura del universo.

En conjunto, la materia (bariónica más oscura) representa aproximadamente el 31.9 % del contenido total del universo. De esta fracción, la materia oscura constituye cerca del 83 %, mientras que la materia bariónica representa aproximadamente el 17 % restante (Planck Collaboration, 2020).

## IV. Energía oscura

Al abordar la composición del universo, resulta imprescindible considerar no solo la materia, sino también la energía, en particular la energía oscura. Si bien ambas comparten el calificativo **oscura**, la materia y la energía oscuras tienen en común únicamente el hecho de que su naturaleza intrínseca permanece desconocida. Sin embargo, el origen de esta última se encuentra estrechamente vinculado al estudio de la expansión acelerada del cosmos.

Al observarse que dicha expansión no podía explicarse exclusivamente mediante la materia visible o la materia oscura, surgió la necesidad de postular una forma de energía responsable de impulsar este fenómeno (Planck Collaboration, 2020). De

esta manera se estableció el concepto de energía oscura, la cual se estima constituye aproximadamente el 68 % del contenido energético total del universo (Liddle, 2015; Weinberg, 2008). La densidad de energía oscura, denotada como  $\Omega_{de}$ , se expresa como:

$$\Omega_{de} \approx 0.68$$

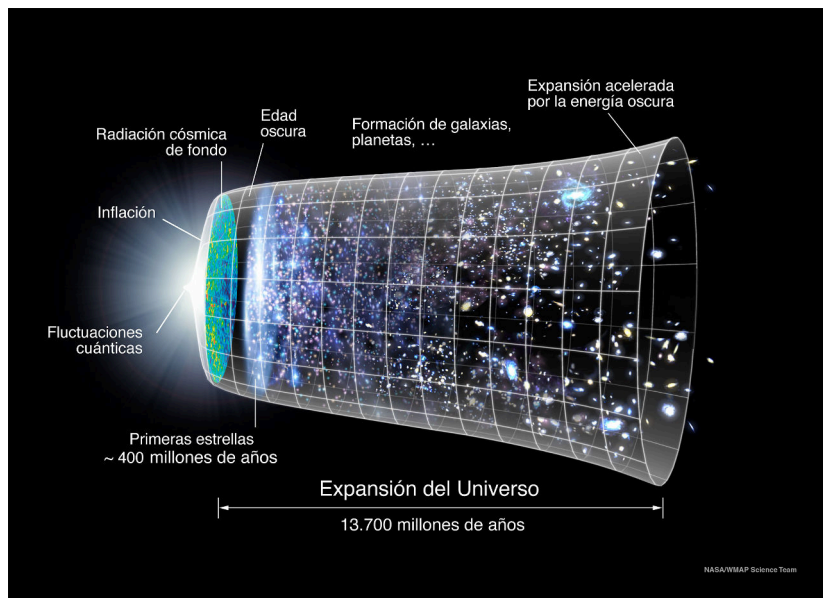


Figura 3.1: Ilustración de la expansión acelerada del universo basada en la ley de Hubble-Lemaître. La distancia entre galaxias aumenta con el tiempo, lo que evidencia la aceleración cósmica. Imagen tomada de Wikimedia Commons: [https://es.wikipedia.org/wiki/Expansión\\_métrica\\_del\\_espacio](https://es.wikipedia.org/wiki/Expansión_métrica_del_espacio) («Ley de Hubble-Lemaître», 2025).

### a. Evidencia de su presencia

Aunque la naturaleza física de la energía oscura permanece desconocida, existen evidencias observacionales sólidas de sus efectos a gran escala. Las soluciones dinámicas de las ecuaciones de la relatividad general con constante cosmológica, consideradas previamente por Alexander Friedmann (1922) y Georges Lemaître

(1927), establecen el marco teórico de un universo en expansión (Belenkiy, 2013; Luminet, 2014).

Décadas más tarde, las mediciones de luminosidad–distancia de supernovas tipo Ia, en conjunto con datos del CMB y BAO, demostraron que dicha expansión es acelerada; este comportamiento se modela de manera consistente mediante un término de energía del vacío (constante cosmológica  $\Lambda$ ) en el escenario  $\Lambda$ CDM (Gohd, 2025). En la Figura 3.2 se presenta un esquema representativo de la historia de esta expansión.

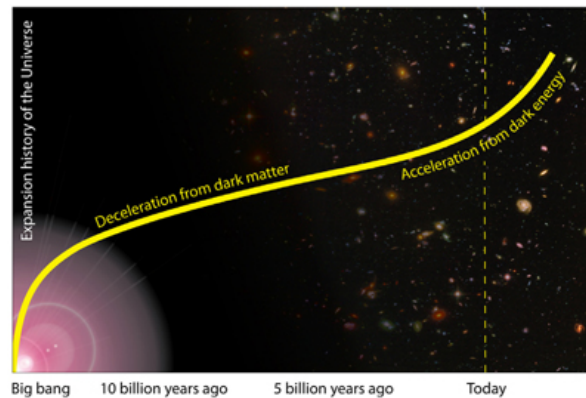


Figura 3.2: Historia de la expansión del Universo. Fuente: ESA Science & Technology, «What is dark energy?» («What is dark energy?», 2020).

## V. La métrica FLRW

En el marco de la Relatividad General (Einstein, 1916b), la geometría del espacio-tiempo no es fija, sino dinámica. Para describir la estructura causal y geométrica de este continuo, es necesario definir una herramienta matemática conocida como **métrica** (o tensor métrico) (Misner et al., 1973; Weinberg, 1972). La métrica actúa como una regla generalizada que permite calcular la distancia infinitesimal («intervalo») entre dos eventos en el espacio-tiempo curvo, definiendo así las propiedades gravitacionales del sistema.

Una vez establecida esta base geométrica, y partiendo del **Principio Cosmoló-**



**gico** —la premisa de que el universo es homogéneo e isótropo a gran escala (Liddle, 2015)—, la solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein que describe este universo es la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). Esta métrica permite modelar la expansión del universo mediante un factor de escala  $a(t)$ , y tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (3.2)$$

donde:

- $a(t)$  es el factor de escala, que determina cómo cambia el tamaño del universo con el tiempo,
- $k$  es el parámetro de curvatura espacial, con valores posibles  $k = 0$  (plano),  $k = +1$  (cerrado) o  $k = -1$  (abierto),
- $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son coordenadas comóviles esféricas. Esta elección se debe a la simetría rotacional (isotropía) implícita en el Principio Cosmológico, aunque la métrica también puede formularse de manera equivalente en coordenadas cartesianas isotrópicas (Liddle, 2015),
- $c$  es la velocidad de la luz.

En este marco, las distancias físicas entre galaxias crecen proporcionalmente a  $a(t)$ , lo que representa la expansión del universo. La métrica FLRW permite obtener las ecuaciones de Friedmann, que describen cómo evoluciona dicho factor de escala en función del contenido de materia, radiación y energía oscura del universo.

Además, existen propuestas que extienden esta métrica mediante una deformación conforme. Estas propuestas, conocidas como cosmologías conformemente FLRW (CFLRW), introducen un factor multiplicativo suave que depende del tiempo y del espacio. Este tipo de modificaciones permiten introducir inhomogeneidades significativas en la geometría del universo sin alterar las trayectorias de los fotones,

por lo cual no afectan la estructura angular del fondo cósmico de microondas. De esta forma, los modelos CFLRW brindan la posibilidad de explicar fenómenos atribuidos a la energía oscura o a la distribución de materia a gran escala desde una perspectiva puramente geométrica (Visser, 2015).

## VI. Tipos de universo

Desde la antigüedad, la humanidad ha mostrado curiosidad por el entorno, destacando los logros de los antiguos griegos al medir la curvatura y el radio de la Tierra (Heilbron, 2003). En la actualidad, el interés se extiende al universo, y para explorar su naturaleza, se utiliza el parámetro  $k$  de la métrica FLRW (Ecuación 3.2) (Weinberg, 2008).

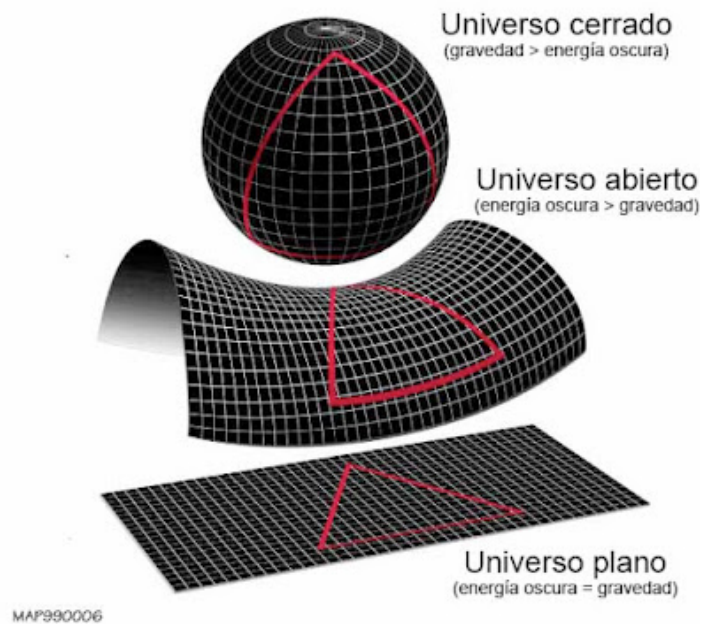


Figura 3.3: Representación esquemática de los tres tipos principales de geometría del universo según el parámetro de curvatura  $k$ : a) esférico (arriba,  $k > 0$ ), b) hiperbólico (centro,  $k < 0$ ) y c) plano (abajo,  $k = 0$ ). Imagen tomada del blog Ciencia de Sofá: <https://cienciadesofa.com/2016/03/que-significa-que-el-universo-sea-plano.html> (de Sofá, 2016).

Los tipos de universo según el parámetro de curvatura  $k$  se describen a continuación:

### a. Universo esférico ( $k > 0$ )

Este modelo describe un universo **cerrado** con **curvatura espacial positiva** (véase la Figura 3.3a). La analogía bidimensional más común es la superficie de una esfera: para un observador en dicha superficie, dos líneas que inician su recorrido de forma paralela (como dos meridianos en el ecuador) inevitablemente **convergen** en los polos.

En esta geometría no euclidiana, la suma de los ángulos internos de un triángulo es **mayor a**  $180^\circ$ , mientras que las circunferencias siempre son menores a  $2\pi r$ . Cosmológicamente, este escenario ocurre si la densidad de energía total del universo es *mayor* que la densidad crítica ( $\rho_{total} > \rho_c$ ), lo que se traduce en un parámetro de densidad  $\Omega_{total} > 1$ .

La implicación de esta alta densidad es que la atracción gravitatoria es lo suficientemente fuerte como para frenar la expansión. Aunque el universo se expande, eventualmente se detendrá, se revertirá y colapsará sobre sí mismo en un evento final conocido como el «Big Crunch». Este modelo, por lo tanto, describe un universo que es **finito en volumen** (aunque ilimitado, pues no tiene bordes), de forma análoga a como la superficie de una esfera tiene un área finita (Liddle, 2015).

### b. Universo plano ( $k = 0$ )

Este modelo, también conocido como **universo euclidiano** (véase la Figura 3.3c), es fundamental en la cosmología moderna. Su geometría espacial corresponde a la noción intuitiva clásica: las líneas paralelas se mantienen siempre a la misma distancia, la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es exactamente  $180^\circ$  y el perímetro de un círculo es  $2\pi r$ .

La planitud del universo está intrínsecamente ligada a su contenido total de ma-

teria y energía. En la cosmología de Friedmann, existe un valor específico llamado **densidad crítica** ( $\rho_c$ ). Esta densidad representa la cantidad exacta de masa-energía por unidad de volumen necesaria para que la atracción gravitatoria equilibre «críticamente» la energía de la expansión.

Un universo con  $k = 0$  es, por definición, aquel donde la densidad de energía total observada ( $\rho_{total}$ ) es *exactamente igual* a esta densidad crítica. Esto se expresa de forma compacta usando el parámetro de densidad:  $\Omega_{total} = \frac{\rho_{total}}{\rho_c} = 1$ .

Este balance perfecto tiene profundas implicaciones para la evolución y el destino del cosmos. Un universo plano se expandirá para siempre. En un modelo simple dominado por materia, la tasa de expansión disminuiría continuamente, acercándose a cero a medida que el tiempo tiende a infinito, pero sin llegar nunca a detenerse o recolapsar. Es el caso «crítico» que separa los universos cerrados de los abiertos (Liddle, 2015).

Es importante notar que  $k = 0$  solo describe la **geometría** (es localmente plano), pero no define su **topología** (su forma global). Aunque el caso más simple es un espacio infinito en todas las direcciones, teóricamente también podría ser finito si tuviera una topología «multiconexa» (como la de un toroide, donde al viajar en línea recta se regresaría al punto de partida). Sin embargo, el modelo plano e infinito es el más estándar y, crucialmente, es el que mejor se ajusta a las observaciones de alta precisión de la radiación de fondo de microondas (Liddle, 2015).

### c. Universo hiperbólico ( $k < 0$ )

Este modelo describe un universo **abierto** con **curvatura espacial negativa** (véase la Figura 3.3b). La analogía bidimensional más común para esta geometría es la superficie de una **silla de montar**.

En un espacio hiperbólico, las reglas de la geometría euclidiana se rompen: las líneas que comienzan su recorrido de forma paralela, eventualmente **divergen**, separándose cada vez más. De manera consecuente, la suma de los ángulos internos

de un triángulo es siempre **menor a**  $180^\circ$ , mientras que las circunferencias siempre son mayores a  $2\pi r$ .

Este escenario cosmológico ocurre si la densidad de energía total del universo es *menor* que la densidad crítica ( $\rho_{total} < \rho_c$ ). Esto se traduce en un parámetro de densidad  $\Omega_{total} < 1$ . Físicamente, esto significa que no hay suficiente materia-energía (y por tanto, gravedad) para frenar la expansión inicial del Big Bang.

Como resultado, el universo no solo se expandirá para siempre, sino que lo hará «abiertamente», sin que la gravedad logre detenerlo significativamente. Este modelo, al igual que el plano, describe un universo que es espacialmente **infinito** (Liddle, 2015).

#### d. Universo observable

Independientemente de la geometría global del cosmos (sea plana, esférica o hiperbólica), la capacidad para sondearlo está fundamentalmente limitada. Este límite no constituye un «borde» físico, sino una consecuencia directa de dos hechos: el universo tiene una edad finita (aproximadamente 13.8 mil millones de años) y la velocidad de la luz es finita.

El **universo observable** es la porción esférica del universo total que rodea al observador, definida por la distancia máxima que la luz ha podido viajar para llegar hasta el punto de observación desde el inicio del Big Bang. Esta frontera se conoce como el **horizonte de partículas** (Liddle, 2015).

Es crucial entender la relación de esto con la expansión. La Ley de Hubble-Lemaître describe cómo el espacio mismo se expande, provocando que las galaxias lejanas se alejen del observador. Aunque la relatividad especial prohíbe que los objetos se muevan *a través* del espacio más rápido que la luz, no impone ningún límite a la velocidad de la *expansión del espacio* mismo.

Esto tiene una consecuencia profunda: existen galaxias tan distantes que el espacio entre ellas y el observador se expande a una velocidad efectiva mayor que la

de la luz. La luz emitida por esas galaxias, aunque viaja hacia el observador a la velocidad  $c$ , es «arrastrada» por la expansión más rápido de lo que puede avanzar, y por lo tanto, nunca podrá alcanzarlo (Hubble, 1929). Esos objetos se encuentran más allá del universo observable.

Por lo tanto, mientras el universo *observable* es finito, el universo *total* bien podría ser infinito, tal como lo predicen las geometrías plana e hiperbólica.

## VII. Ecuación de estado del universo

Para describir la dinámica cósmica, es fundamental recurrir al concepto de **ecuación de estado**, la cual permite caracterizar el comportamiento de un fluido en términos de su presión y densidad. En cosmología, esta herramienta resulta especialmente útil, ya que el universo se modela como un fluido dinámico que evoluciona con el tiempo. Esta analogía permite describir su comportamiento mediante la relación adimensional conocida como **parámetro de la ecuación de estado**  $\omega$ :

$$\omega = \frac{P}{\rho} \quad (3.3)$$

donde:

- $P$  representa la presión total en el universo,
- $\rho$  es la densidad total de energía.

Determinar la ecuación de estado del universo implica conocer con precisión tanto su presión como su densidad total, lo cual presenta dificultades observacionales directas. No obstante, es posible estudiar su evolución a partir de las relaciones dinámicas que vinculan estas magnitudes. Una de ellas es la **ecuación de continuidad**, la cual se deriva de las ecuaciones de campo de Einstein bajo la métrica FLRW. Esta ecuación se utiliza como punto de partida en el trabajo de Aviles et al. (2012), donde se explora la posibilidad de restringir la evolución del parámetro de estado  $\omega$  sin asumir un modelo cosmológico específico. La expresión es:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(P + \rho) = 0 \quad (3.4)$$

Esta ecuación se asume como válida dentro del marco cosmológico estándar y se utiliza como herramienta para reconstruir el comportamiento de  $\omega$  a partir de cantidades observacionales. De este modo, es posible descartar ciertos modelos del universo y aproximarse a una forma funcional viable para su ecuación de estado.

## VIII. Leyes de Friedmann

El descubrimiento de la expansión del universo suscitó interrogantes fundamentales sobre los mecanismos físicos responsables de la separación entre objetos celestes y los factores determinantes de este proceso.

Estas cuestiones se abordan teóricamente considerando que dicha dinámica está regida por la distribución de masa y energía, así como por la curvatura del espacio-tiempo. Tal como se señala en (Liddle, 2015), la relación que vincula el contenido energético del universo con su dinámica de expansión se expresa mediante la **ecuación de Friedmann**:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.5)$$

donde:

- $H$  es el parámetro de Hubble,
- $G$  es la constante de gravitación universal,
- $\rho$  es la densidad de materia y energía del universo,
- $a$  es el factor de escala que describe el cambio de tamaño del universo.

Esta ecuación permite estudiar la evolución del cosmos en función de su contenido material y energético, así como de su geometría intrínseca. A diferencia de la ley

de Hubble, que se fundamenta en relaciones empíricas observacionales, la ecuación de Friedmann se deriva directamente de las ecuaciones de campo de Einstein bajo la métrica FLRW. De esta manera, se vincula la relatividad general con la cosmología moderna, lo que permite describir la expansión cósmica en función de los parámetros físicos fundamentales del universo (Misner et al., 1973; Weinberg, 1972).

## IX. Evolución general de la densidad en un modelo cosmológico

Para describir la evolución de la densidad de cualquier componente del universo, se parte de la ecuación de continuidad para cada fluido cosmológico, la cual expresa la conservación de energía-momento en un universo en expansión (ver Ecuación 3.4):

$$\frac{d\rho_i}{dt} + 3H(\rho_i + P_i) = 0,$$

donde  $\rho_i$  y  $P_i$  son la densidad y presión de la componente  $i$ , respectivamente, y  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  es el parámetro de Hubble. Aquí,  $\dot{a}$  representa la derivada temporal del factor de escala  $a(t)$ , es decir, la tasa de cambio del tamaño del universo con el tiempo, definida previamente en la Ecuación 3.5.

Al utilizar la **ecuación de estado** (ver Ecuación 3.3) para la componente  $i$ :

$$P_i = \omega_i \rho_i,$$

es posible reescribir la ecuación de continuidad como:

$$\frac{d\rho_i}{dt} + 3H\rho_i(1 + \omega_i) = 0.$$

Dado que  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , y al emplear la regla de la cadena para derivar respecto a  $a$  ( $\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{d\rho_i}{da} \frac{da}{dt} = aH \frac{d\rho_i}{da}$ ), la ecuación resulta en:



$$a \frac{d\rho_i}{da} + 3\rho_i(1 + \omega_i) = 0.$$

Esta expresión corresponde a una ecuación diferencial separable, cuya integración directa es:

$$\frac{d\rho_i}{\rho_i} = -3(1 + \omega_i) \frac{da}{a}.$$

Integrando desde  $a = 1$  (actualidad) hasta un factor de escala arbitrario  $a$ :

$$\ln \left( \frac{\rho_i}{\rho_{i,0}} \right) = -3(1 + \omega_i) \ln a,$$

y al despejar la densidad, se obtiene:

$$\rho_i(a) = \rho_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)},$$

donde  $\rho_{i,0}$  es la densidad actual de la componente  $i$ .

En términos del corrimiento al rojo  $z$ , utilizando la relación  $a = (1 + z)^{-1}$ , la densidad evoluciona como:

$$\rho_i(z) = \rho_{i,0}(1 + z)^{3(1+\omega_i)}.$$

Finalmente, al definir las densidades fraccionales actuales como:

$$\Omega_i = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_c},$$

donde  $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$  es la densidad crítica, la ecuación generalizada de Friedmann toma la forma:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \sum_i \Omega_i (1 + z)^{3(1+\omega_i)} + \Omega_k (1 + z)^2 \right], \quad (3.6)$$

donde  $\Omega_k$  representa la contribución de la curvatura espacial (Valdez Ávila, 2023).

## X. Parámetros Cinemáticos Cosmográficos

Más allá de la tasa de expansión  $H(z)$ , la dinámica del universo puede caracterizarse mediante una expansión en serie de Taylor del factor de escala  $a(t)$ . Esta aproximación, conocida como cosmografía, permite estudiar la evolución del universo de manera independiente al modelo dinámico subyacente (es decir, sin asumir *a priori* la Relatividad General o una forma específica de energía oscura). Los coeficientes de esta expansión dan lugar a parámetros cinemáticos fundamentales: el parámetro de desaceleración  $q$  y el parámetro *jerk*  $j$ .

### a. Parámetro de Desaceleración $q(z)$

El parámetro de desaceleración, denotado como  $q$ , es una cantidad adimensional que cuantifica la tasa de cambio de la expansión del universo; es decir, determina si la expansión se acelera o se frena. Se define en términos del factor de escala  $a(t)$  y sus derivadas temporales como:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}(t)^2}, \quad (3.7)$$

donde los puntos indican derivadas respecto al tiempo cósmico  $t$ . Históricamente, se esperaba que la gravedad de la materia frenara la expansión, lo que resultaría en un valor positivo de  $q$ . Sin embargo, las observaciones actuales de supernovas tipo Ia y otros trazadores cosmológicos indican que el universo se encuentra en una fase de expansión acelerada, lo que corresponde a valores negativos de  $q$  (Planck Collaboration, 2020).

Para fines de análisis observacional, resulta conveniente expresar el parámetro de desaceleración  $q$  en términos de cantidades directamente observables, como el corrimiento al rojo  $z$  y el parámetro de Hubble  $H(z)$ .

A partir de la relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo,  $a = (1 + z)^{-1}$ , el operador de derivada temporal se transforma mediante la regla de la cadena

como  $\frac{d}{dt} = -(1+z)H(z)\frac{d}{dz}$ . Al aplicar esto para obtener las derivadas del factor de escala se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= aH(z), \\ \ddot{a} &= \frac{d}{dt}[aH(z)] = -(1+z)H(z)\frac{d}{dz}[aH(z)]\end{aligned}$$

Al desarrollar la derivada del producto para  $\ddot{a}$  y recordando que  $da/dz = -a^2$ :

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= -\frac{H(z)}{a} \left( a \frac{dH}{dz} + H(z) \frac{da}{dz} \right) \\ &= aH^2(z) - H(z) \frac{dH}{dz}\end{aligned}$$

Finalmente, se sustituyen  $\dot{a}$  y  $\ddot{a}$  en la definición original (3.7):

$$q(z) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{a[aH^2(z) - H(z)\frac{dH}{dz}]}{(aH(z))^2} = -1 + \frac{aH(z)\frac{dH}{dz}}{a^2H^2(z)}$$

Al simplificar y sustituir  $a = (1+z)^{-1}$ , se llega a la expresión final:

$$q(z) = \frac{1+z}{H(z)} \frac{dH(z)}{dz} - 1 \quad (3.8)$$

Esta expresión es la que se implementa computacionalmente en el presente trabajo. Permite reconstruir la historia de la expansión directamente a partir de la función  $H(z)$  (o su forma normalizada  $E(z)$ ) predicha por los modelos teóricos ( $\Lambda$ CDM, CPL, PEDE).

Un punto crítico en el estudio de  $q(z)$  es la determinación del **redshift de transición** ( $z_t$ ), definido como el momento en que el universo pasó de una fase desacelerada (dominada por materia,  $q > 0$ ) a una fase acelerada (dominada por energía oscura,  $q < 0$ ). En el modelo estándar  $\Lambda$ CDM, esta transición ocurre típicamente alrededor de  $z_t \approx 0.6 - 0.8$  (Capozziello et al., 2015).

## b. Parámetro Jerk $j(z)$

Mientras que el parámetro de desaceleración examina la segunda derivada del factor de escala, el parámetro *jerk* (o sacudida), denotado como  $j$ , involucra la tercera derivada temporal. Su definición adimensional es:

$$j(t) = \frac{\ddot{a}(t)a(t)^2}{\dot{a}(t)^3} \quad (3.9)$$

El parámetro  $j$  es de particular importancia para distinguir entre el modelo cosmológico estándar y teorías alternativas de energía oscura o gravedad modificada. Para el modelo  $\Lambda$ CDM, donde la energía oscura es una constante cosmológica ( $\omega = -1$ ), el parámetro  $j$  es **idénticamente igual a la unidad** ( $j(z) = 1$ ) durante toda la evolución cósmica, independientemente de los valores de densidad de materia o curvatura.

Por lo tanto, cualquier desviación significativa de  $j = 1$  en las observaciones constituiría una fuerte evidencia a favor de una dinámica de energía oscura más compleja (como en los modelos CPL o PEDE) o de una modificación a la Relatividad General.

De manera análoga a  $q(z)$ , el parámetro *jerk* puede expresarse en términos de las variables observables  $z$  y  $q(z)$ . De la Ecuación (3.7), se despeja la aceleración  $\ddot{a}$ :

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \longrightarrow \ddot{a} = -\frac{q\dot{a}^2}{a} = -qaH^2(z) \quad (3.10)$$

Ahora se obtiene la derivada temporal del parámetro de Hubble,  $H(z) = \dot{a}/a$ :

$$\dot{H}(z) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2(z)$$

Sustituyendo la expresión de  $\ddot{a}$  obtenida anteriormente:

$$\dot{H}(z) = \frac{-qaH^2(z)}{a} - H^2(z) = -H^2(z)(1 + q) \quad (3.11)$$

Para encontrar el parámetro *jerk*, se calcula la tercera derivada  $\ddot{\ddot{a}}$  derivando  $\ddot{a} = -qaH^2(z)$  respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\ddot{a} &= \frac{d}{dt} [-qaH^2(z)] \\
&= -\dot{q} (aH^2(z)) - q\dot{a}H^2(z) - qa\frac{d}{dt}(H^2(z)) \\
&= -\dot{q}aH^2(z) - q(a\dot{H}(z))H^2(z) - 2qaH(z)\dot{H}(z)
\end{aligned}$$

Usando la relación  $\dot{q} = -(1+z)H(z)\frac{dq}{dz}$  y sustituyendo  $\dot{H}(z)$ :

$$\begin{aligned}
\ddot{a} &= - \left[ -(1+z)H(z)\frac{dq}{dz} \right] aH^2(z) - qaH^3(z) - 2qaH(z) [-H^2(z)(1+q)] \\
&= aH^3(z)(1+z)\frac{dq}{dz} - qaH^3(z) + 2qaH^3(z)(1+q) \\
&= aH^3(z) \left[ (1+z)\frac{dq}{dz} - q + 2q + 2q^2 \right] \\
&= aH^3(z) \left[ (1+z)\frac{dq}{dz} + q(1+2q) \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, se reescribe la definición del parámetro *jerk* (3.9):

$$j(z) = \frac{\ddot{a}a^2}{\dot{a}^3} = \frac{\ddot{a}}{aH^3(z)} = \frac{1}{aH^3(z)} \cdot aH^3(z) \left[ q(1+2q) + (1+z)\frac{dq}{dz} \right]$$

Lo que resulta en la relación final:

$$j(z) = q(z)[2q(z) + 1] + (1+z)\frac{dq(z)}{dz} \quad (3.12)$$

Esta relación diferencial conecta la evolución del parámetro de desaceleración con el *jerk*, permitiendo estudiar las derivadas de orden superior de la expansión cósmica y ofreciendo una prueba de consistencia para el modelo  $\Lambda$ CDM (Visser, 2004).

## XI. Modelo $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter)

El modelo  $\Lambda$ CDM es el marco cosmológico estándar que explica la evolución y expansión del universo considerando materia oscura fría (*cold dark matter*) y una

constante cosmológica  $\Lambda$  que representa la energía oscura (Liddle, 2015; Scott, 2018; Weinberg, 2008). A partir de la expresión general para la tasa de expansión del universo en función del corrimiento al rojo  $z$  dada en la Ecuación 3.6, cada componente  $i$  del universo se caracteriza por su densidad fraccional actual  $\Omega_i$  y su parámetro de estado  $\omega_i$ .

Para el modelo  $\Lambda$ CDM, los valores característicos del parámetro de estado son:

$$\begin{aligned}\omega_r &= \frac{1}{3} \quad (\text{radiación}), \quad \omega_m = 0 \quad (\text{materia: bariónica y oscura}), \\ \omega_\Lambda &= -1 \quad (\text{constante cosmológica}).\end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en la Ecuación 3.6, se recupera la forma habitual del modelo derivada de la Relatividad General (Einstein, 1916b; Misner et al., 1973):

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2] \quad (3.13)$$

Aquí,  $H(z)$  es la tasa de expansión del universo,  $H_0$  su valor actual;  $\Omega_r$ ,  $\Omega_m$  y  $\Omega_\Lambda$  son las densidades fraccionales actuales de radiación, materia y energía oscura respectivamente, y  $\Omega_k$  representa la contribución de la curvatura espacial.

De esta forma, la ecuación de Friedmann (3.5) para este modelo se expresa como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.14)$$

donde  $\Lambda$  es la constante cosmológica.

Este modelo ha sido ampliamente validado mediante observaciones como las anisotropías del fondo cósmico de microondas (Planck Collaboration, 2020), la estructura a gran escala del universo y la expansión acelerada detectada con supernovas (Frieman et al., 2008; Valdez Ávila, 2023).

### a. Análisis de los parámetros cinemáticos en $\Lambda$ CDM

El modelo estándar  $\Lambda$ CDM sirve como punto de referencia fundamental. Su comportamiento cinemático se muestra en la Figura 3.4.

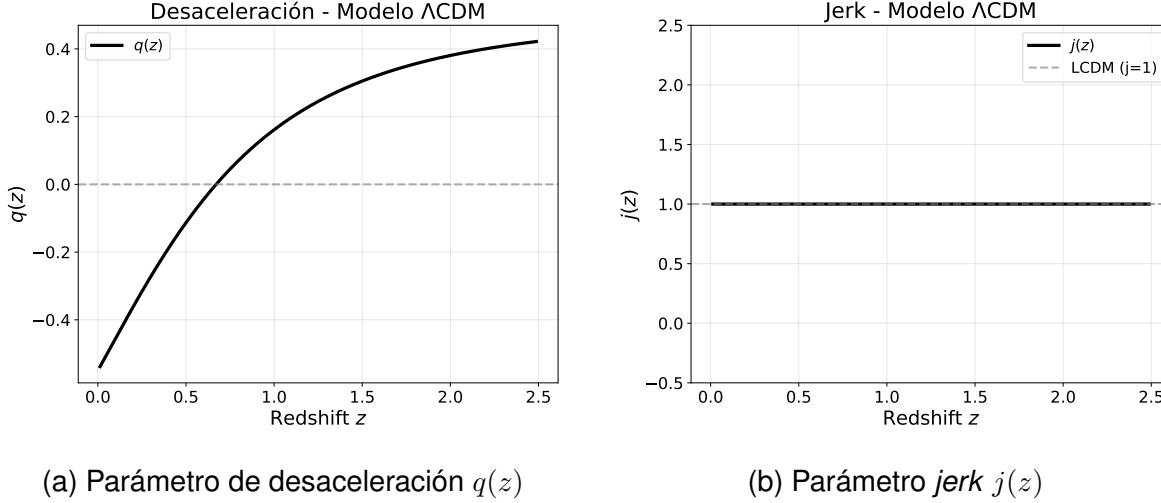


Figura 3.4: Cinemática del modelo  $\Lambda$ CDM. El panel (b) muestra la característica más distintiva de la Constante Cosmológica: un parámetro *jerk* invariante  $j(z) = 1$  a lo largo de toda la historia cósmica. (Fuente: Elaboración propia).

Como se observa en el panel (a), el modelo describe exitosamente la transición de un universo desacelerado a uno acelerado en tiempos recientes. Por su parte, el panel (b) confirma que, para una densidad de energía oscura constante ( $w = -1$ ), el parámetro *jerk* se mantiene fijo en la unidad. Cualquier desviación observacional de  $j = 1$  implicaría necesariamente una física más allá del modelo estándar (Aviles et al., 2012; Visser, 2004).

## XII. Modelo CPL (Chevallier–Polarski–Linder)

El modelo CPL es una parametrización dinámica de la energía oscura que permite que su ecuación de estado varíe con el tiempo, a diferencia del modelo  $\Lambda$ CDM,

en el cual la energía oscura se considera constante (Chevallier & Polarski, 2001; Linder, 2003).

A partir de la expresión general para la tasa de expansión del universo en función del corrimiento al rojo  $z$ , dada por la Ecuación 3.6, el modelo CPL especifica que el parámetro de estado de la energía oscura depende de  $z$  de la siguiente forma:

$$\omega_{de}(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \quad (3.15)$$

donde  $w_0$  es el valor actual del parámetro de estado y  $w_a$  mide su variación con el tiempo.

Para los demás componentes del universo, los valores característicos se mantienen constantes:

$$\omega_r = \frac{1}{3} \quad (\text{radiación}), \quad \omega_m = 0 \quad (\text{materia fría}).$$

La función que describe la evolución dinámica de la densidad de energía oscura es:

$$f(z) = (1+z)^{3(1+w_0+w_a)} \exp\left(-\frac{3w_a z}{1+z}\right), \quad (3.16)$$

la cual se sustituye en la Ecuación 3.6 para la componente de energía oscura, obteniendo la expresión particular para el modelo CPL:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_{de} f(z)]. \quad (3.17)$$

Este modelo resulta de gran utilidad para estudiar posibles desviaciones del modelo  $\Lambda$ CDM y se aplica habitualmente en el ajuste de datos observacionales que sugieren una energía oscura dinámica (Frieman et al., 2008; Valdez Ávila, 2023).

### a. Análisis de los parámetros cinemáticos en CPL

Para la parametrización CPL, la dinámica del universo presenta desviaciones respecto al modelo estándar, tal como se aprecia en la Figura 3.5.



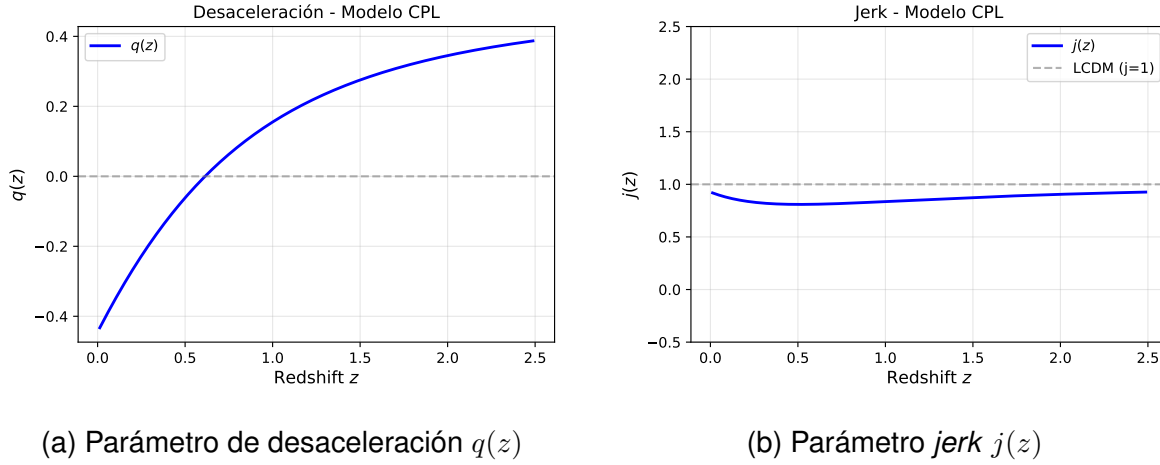


Figura 3.5: Cinemática del modelo CPL ( $w_0 = -0.9, w_a = 0.2$ ). A diferencia de  $\Lambda$ CDM, el parámetro *jerk* (derecha) no es constante, mostrando una evolución suave que tiende asintóticamente a  $j = 1$  en el pasado lejano. (Fuente: Elaboración propia).

El comportamiento del parámetro *jerk* en este modelo (Figura 3.5b) es crucial para distinguirlo de la constante cosmológica. Mientras que  $\Lambda$ CDM predice un valor fijo  $j = 1$ , CPL permite fluctuaciones suaves, lo que sirve como discriminante en análisis cosmográficos (Aviles et al., 2012). En este caso particular, la curva se mantiene ligeramente por debajo de la unidad, reflejando la naturaleza dinámica de la ecuación de estado  $w(z)$ .

### XIII. Modelo PEDE (Phenomenological Emergent Dark Energy)

El modelo PEDE propone una modificación a la naturaleza de la energía oscura, describiéndola como un fluido «emergente» (Li & Shafieloo, 2019). A diferencia del modelo CPL, que introduce nuevos grados de libertad, el modelo PEDE comparte el mismo número de parámetros libres que el modelo  $\Lambda$ CDM, pero postula que la densidad de energía oscura evoluciona dinámicamente y no es despreciable única-

mente en tiempos tardíos (Hernández-Almada et al., 2020; Li & Shafieloo, 2019).

A partir de la expresión general para la tasa de expansión del universo en función del corrimiento al rojo  $z$ , dada por la Ecuación 3.6, el modelo PEDE introduce una parametrización para la densidad de energía oscura basada en una función de tangente hiperbólica. La ecuación de estado asociada a la dinámica exclusiva de este fluido PEDE está dada por:

$$w_{\text{PEDE}}(z) = -\frac{1}{3\ln(10)} (1 + \tanh[\log_{10}(1+z)]) - 1. \quad (3.18)$$

Esta expresión implica que la energía oscura emerge gradualmente a medida que el universo evoluciona. Para integrar esta dinámica en la evolución cósmica, la función que describe la evolución de la densidad de energía oscura se define como:

$$\Omega_{DE}(z) = \Omega_{0DE} [1 - \tanh(\log_{10}(1+z))], \quad (3.19)$$

donde  $\Omega_{0DE}$  representa la densidad de energía oscura actual. Al sustituir esta contribución en la ecuación general (3.6), se obtiene la forma explícita para la expansión en el modelo PEDE:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_{0DE} [1 - \tanh(\log_{10}(1+z))]]. \quad (3.20)$$

Finalmente, al considerar la contribución conjunta de todas las densidades (materia, radiación y energía oscura emergente), es posible derivar una ecuación de estado efectiva del sistema. Utilizando la relación entre el parámetro de desaceleración y la ecuación de estado, se obtiene la expresión efectiva completa:

$$w_{\text{eff}}(z) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1+z}{E(z)^2} \left( 3\Omega_{0m}(1+z)^2 + 4\Omega_{0r}(1+z)^3 - \Omega_{0DE} \frac{\text{sech}^2 \left[ \frac{\ln(1+z)}{\ln(10)} \right]}{\ln(10)(1+z)} \right) - 3 \right] \quad (3.21)$$

Este modelo resulta de particular interés en la cosmología actual ya que, manteniendo la simplicidad paramétrica del modelo estándar, ofrece un mecanismo alternativo para explicar la aceleración tardía del universo y ha mostrado potencial para aliviar tensiones observacionales como la de  $H_0$  (Hernández-Almada et al., 2020; Li & Shafieloo, 2019).

### a. Análisis de los parámetros cinemáticos en PEDE

El modelo de Energía Oscura Emergente (PEDE) muestra una fenomenología distintiva, particularmente en la evolución del parámetro *jerk*, tal como se ilustra en la Figura 3.6.

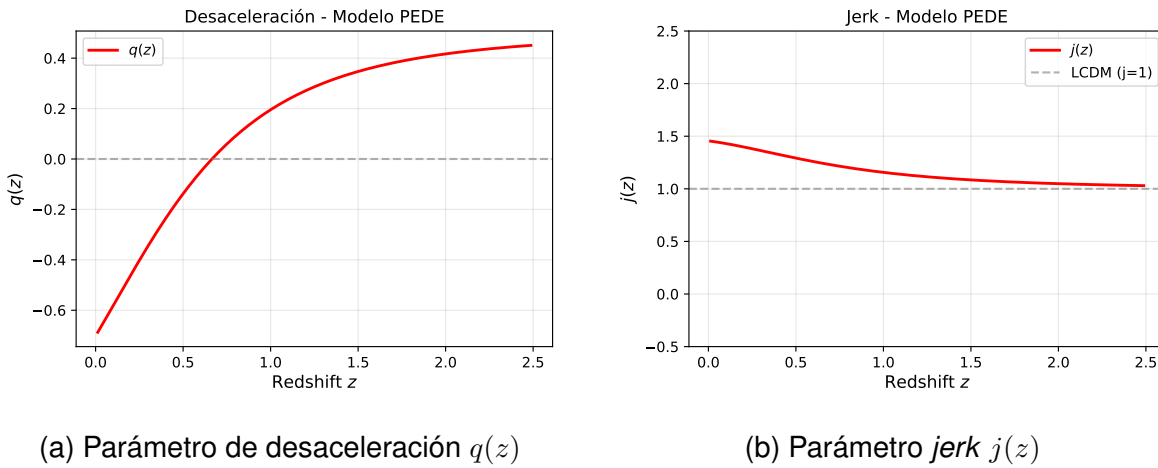


Figura 3.6: Cinemática del modelo PEDE. Nótese en el panel (b) la fuerte desviación de  $j(z)$  respecto a 1 en tiempos recientes ( $z \rightarrow 0$ ), característica propia de la «emergencia» de la densidad de energía oscura en este modelo. (Fuente: Elaboración propia).

La Figura 3.6b revela que el modelo PEDE recupera el comportamiento de tipo  $\Lambda$  ( $j \approx 1$ ) a alto corrimiento al rojo, pero exhibe una variación significativa en el universo local. Esta desviación positiva ( $j > 1$ ) en  $z = 0$  es una predicción teórica clave que podría ser contrastada con observaciones futuras de alta precisión (Hernández-Almada et al., 2020).

## XIV. Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs)

Los *Fast Radio Bursts* (FRBs, por sus siglas en inglés) han emergido recientemente como un tema de gran interés en la astronomía, tanto en el ámbito cosmológico como en el estudio del medio interestelar (Petroff et al., 2019). Esto se debe, en gran parte, a que su origen sigue siendo un misterio, tal como se menciona en Guo y Wei (2024). Las FRBs se caracterizan por ser pulsos de energía extremadamente potentes, originados por alguna eyección de plasma, y su estudio ha permitido investigar objetos astrofísicos cercanos y la estructura del medio intergaláctico (Glowacki & Lee, 2024). Se postula que estos fenómenos pueden originarse en una variedad de sistemas capaces de generar grandes expulsiones o concentraciones de energía, tales como enanas blancas, agujeros negros, estrellas de neutrones y supernovas, entre otros (Guo & Wei, 2024).

En particular, cuando estos eventos de FRBs son lo suficientemente energéticos y están asociados a un *magnetar* —una estrella de neutrones con un campo magnético sumamente intenso— se produce una eyección de plasma (Petroff et al., 2019). La interacción de la señal de radio con el medio interestelar e intergaláctico a lo largo de su trayectoria (cuantificada a través de la Medida de Dispersión) ofrece información crucial sobre la densidad de electrones libres en la línea de visión (Glowacki & Lee, 2024). Adicionalmente, la determinación del corrimiento al rojo (*redshift*) —medida directa de la distancia cosmológica y la expansión— asociado a la FRB puede proporcionar información sobre el grupo estelar responsable de su origen. Esto convierte a las FRBs en una herramienta invaluable para investigar y comprender la evolución del universo (Wang et al., 2025).

Cuadro 3.1: Un esquema de subclasificación universal para FRBs propuesto en Guo y Wei (2024).

FRBs	Clase (a): Asociados con poblaciones estelares antiguas	Clase (b): Asociados con poblaciones estelares jóvenes
<b>Tipo I: No repetitivos</b>	Tipo Ia: FRBs no repetitivos asociados con poblaciones estelares antiguas	Tipo Ib: FRBs no repetitivos asociados con poblaciones estelares jóvenes
<b>Tipo II: Repetitivos</b>	Tipo IIa: FRBs repetitivos asociados con poblaciones estelares antiguas	Tipo IIb: FRBs repetitivos asociados con poblaciones estelares jóvenes

La importancia de estos datos para el presente análisis computacional radica en dos aspectos clave:

- a. Permiten restringir  $\Omega_b$  en épocas tardías del Universo, complementando las mediciones obtenidas de la radiación cósmica de fondo y las oscilaciones acústicas (Glowacki & Lee, 2024).
- b. Dado que se originan en procesos astrofísicos, estos datos dependen más de las características del proceso generador que de un modelo cosmológico general (Petroff et al., 2019).

Los datos utilizados en este estudio provienen de un catálogo de 92 FRBs localizados (véase la tabla 3 de Wang et al., 2025). Según Wang et al. (2025), el único requisito para incluir los datos es que su origen haya sido bien localizado para tener una medición precisa del corrimiento al rojo  $z$ .

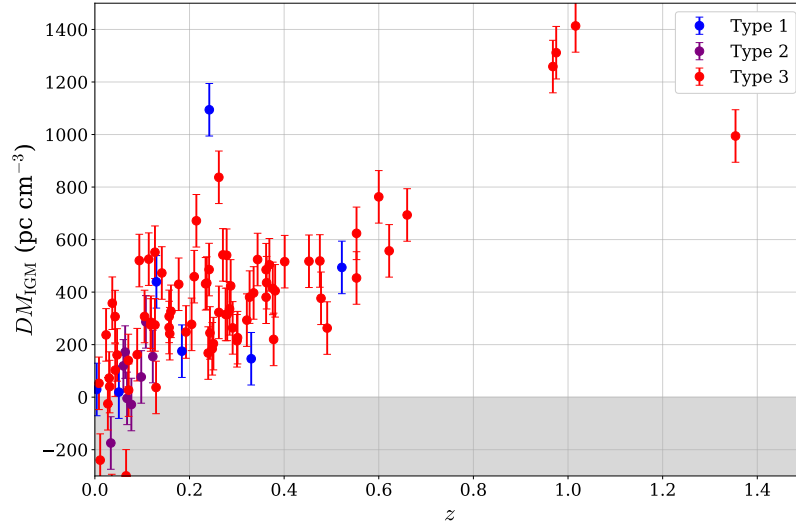


Figura 3.7: Visualización de los datos de FRBs graficados conforme a los criterios mencionados en Wang et al., 2025. En la gráfica se muestra la relación entre el corrimiento al rojo  $z$  y la medida de dispersión del medio intergaláctico  $DM_{\text{IGM}}$  para diferentes tipos de FRBs. (Fuente: Elaboración propia).

### a. La Relación Medida de Dispersión-Redshift ( $DM - z$ )

Aunque las Ráfagas Rápidas de Radio son eventos astrofísicos, su principal valor como sonda cosmológica proviene de la **Medida de Dispersión** ( $DM$ ). Es crucial aclarar que, en este contexto astrofísico, el término «dispersión» no se refiere a la variabilidad estadística de los datos, sino al fenómeno físico cromático donde las ondas de radio de baja frecuencia viajan más lento que las de alta frecuencia al atravesar un plasma ionizado.

Físicamente, la  $DM$  cuantifica el número total de electrones libres integrados a lo largo de la línea de visión desde la fuente hasta el observador. Se define como:

$$DM = \int_0^d n_e dl \quad (3.22)$$

donde  $n_e$  es la densidad de electrones libres y  $dl$  es el diferencial de camino. Por esta razón, la  $DM$  se mide en unidades de parsecs por centímetro cúbico ( $\text{pc cm}^{-3}$ ),

lo que representa la densidad de columna de electrones en el trayecto.

La  $DM$  total observada ( $DM_{\text{obs}}$ ) se descompone teóricamente en cuatro contribuciones principales (Petroff et al., 2019), tal como se implementa en la función de verosimilitud del código `ajuste_general.py`:

$$DM_{\text{obs}} = DM_{\text{MW}} + DM_{\text{halo}} + \frac{DM_{\text{host}}}{1+z} + DM_{\text{IGM}}(z) \quad (3.23)$$

donde:

- $DM_{\text{MW}}$  es la contribución de la Vía Láctea. En el análisis computacional realizado, esta se sustrae de la observación utilizando estimaciones de modelos de distribución de electrones galácticos (por defecto NE2001, aunque el código permite conmutar a YMW16).
- $DM_{\text{host}}$  es la contribución de la galaxia anfitriona. Se divide por  $(1+z)$  para corregir la dilatación temporal cosmológica, mapeando la  $DM$  desde el sistema de referencia de la fuente al del observador.
- $DM_{\text{halo}}$  representa la contribución del halo de gas difuso de la Vía Láctea. En la implementación bayesiana, tanto  $DM_{\text{host}}$  como  $DM_{\text{halo}}$  se tratan como parámetros libres (*nuisance parameters*) que se ajustan simultáneamente con los parámetros cosmológicos en las cadenas de Markov (Wang et al., 2025).
- $DM_{\text{IGM}}$  es la contribución del Medio Intergaláctico (IGM) y constituye el componente que contiene la información cosmológica dependiente del modelo ( $\Lambda$ CDM, CPL o PEDE).

El componente  $DM_{\text{IGM}}$  se calcula teóricamente integrando la densidad de electrones libres  $n_e(z')$  a lo largo de la línea de visión comóvil:

$$DM_{\text{IGM}}(z) = \int_0^z \frac{n_e(z')}{(1+z')^2} dl(z') \quad (3.24)$$

donde  $dl(z') = \frac{c}{H(z')} dz'$  es el elemento de línea comóvil, y  $H(z')$  es el parámetro de Hubble en función del redshift.

Considerando que la densidad promedio de electrones es  $n_e(z') = (1+z')^3 f_{\text{IGM}} f_e \frac{\rho_{b,0}}{m_p}$ , donde  $\rho_{b,0} = \Omega_b \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ , la expresión analítica implementada en el código es:

$$\text{DM}_{\text{IGM}}(z) = \frac{3H_0 c f_{\text{IGM}} f_e \Omega_b}{8\pi G m_p} \int_0^z \frac{(1+z')}{E(z')} dz' \quad (3.25)$$

## b. Posibles orígenes y progenitores

A pesar del creciente número de detecciones, el origen físico exacto de las FRBs permanece como una incógnita. Actualmente existen más de 50 teorías propuestas para explicar el mecanismo que genera estos pulsos de radio tan energéticos. Sin embargo, la mayoría de los modelos teóricos favorecen a las estrellas de neutrones como los progenitores más probables, debido a que la corta duración de los pulsos requiere una fuente físicamente compacta, y la alta luminosidad requiere grandes reservas de energía rotacional o magnética (Petroff et al., 2019).

Los modelos de progenitores se pueden clasificar generalmente en tres categorías principales:

- **Estrellas de neutrones aisladas (Magnetares):** Esta es la hipótesis más aceptada actualmente. Se postula que las FRBs podrían ser producidas por «hiper-fulguraciones» (*giant flares*) o sismos estelares (*starquakes*) en magnetares, que son estrellas de neutrones con campos magnéticos extremadamente intensos ( $B \sim 10^{15}$  G). La liberación repentina de energía magnética podría generar la emisión de radio coherente observada (Guo & Wei, 2024; Petroff et al., 2019).
- **Interacción de sistemas compactos:** Otros modelos sugieren que las ráfagas se originan cuando la magnetosfera de una estrella de neutrones interactúa violentamente con su entorno, por ejemplo, al ser golpeada por el material de una supernova, o al interactuar con el viento estelar de una estrella compañera o un agujero negro cercano.



- **Eventos cataclísmicos:** Para las FRBs que no se repiten (ver Sección c), se han propuesto modelos que implican la destrucción de la fuente, como la fusión de dos estrellas de neutrones (similar a las ondas gravitacionales y kilonovas) o el colapso de una estrella de neutrones supramasiva en un agujero negro (modelo *blitzar*).

### c. Evidencia observacional fundamental

La clasificación de las FRBs como una nueva clase de transitorios astrofísicos se sustenta en un conjunto de evidencias observacionales robustas que las distinguen de otras fuentes de radio conocidas, como los púlsares galácticos. Basado en la revisión de Petroff et al. (2019), las características definitorias son:

- Medida de Dispersión (DM) Excesiva:** Esta es la evidencia principal de su origen extragaláctico. Las FRBs exhiben un DM muy superior al máximo que puede aportar el medio interestelar de la Vía Láctea en esa dirección del cielo. Este exceso ( $DM_{\text{excess}}$ ) se atribuye a la propagación a través del medio intergaláctico (IGM) y la galaxia anfitriona, situando a las fuentes a distancias cosmológicas ( $z \sim 0.1 - 3$ ) (Petroff et al., 2019).
- Duración y Compacidad de la Fuente:** Los pulsos tienen duraciones típicas de milisegundos. En algunos casos, se ha detectado estructura temporal en escalas de microsegundos ( $\sim 30 \mu\text{s}$ ). Por argumentos de causalidad, el tamaño de la región de emisión ( $R$ ) debe cumplir  $R < c\Delta t$ , lo que implica que la fuente emisora debe ser extremadamente compacta (del orden de kilómetros), reforzando la hipótesis de estrellas de neutrones.
- Temperatura de Brillo y Emisión Coherente:** Dada su gran distancia y el alto flujo observado (Janskys), se deduce que la temperatura de brillo ( $T_b$ ) de las fuentes supera los  $10^{32}$  K. Como ningún proceso térmico puede generar tales temperaturas, esto confirma que el mecanismo de radiación debe ser *coheren-*

te, donde un gran número de partículas emiten en fase, similar al mecanismo de los púlsares pero mucho más energético (Glowacki & Lee, 2024).

- d. **Repetitividad:** Al menos una fracción de las fuentes, como FRB 121102 y FRB 180814, han mostrado múltiples estallidos a lo largo del tiempo. Esto descarta modelos puramente cataclísmicos para estas fuentes, demostrando que el progenitor sobrevive al evento de emisión.
- e. **Polarización y Rotación de Faraday:** Muchas FRBs presentan una fuerte polarización lineal. En casos extremos como FRB 121102, se ha medido una Medida de Rotación ( $RM$ ) excepcionalmente alta ( $\sim 10^5 \text{ rad m}^{-2}$ ), lo que evidencia que la fuente reside en un entorno magneto-iónico extremo y dinámico, posiblemente cerca de un agujero negro masivo o en el centro de una nebulosa de viento de púlsar densa.

## XV. Cronómetros Cósmicos: Relojes Estándar

De manera análoga al uso de las supernovas tipo Ia como «candelas estándar» debido a su luminosidad conocida, en cosmología es posible emplear ciertos objetos como «relojes estándar» para medir directamente la tasa de evolución temporal del Universo. Esta técnica, conocida como Cronómetros Cósmicos ( $H(z)$ ), se fundamenta en el método de la edad diferencial propuesto por Jimenez y Loeb (2002).

El principio básico consiste en el uso de galaxias masivas y pasivas, caracterizadas por poblaciones estelares antiguas y una formación estelar despreciable. Estas galaxias actúan como trazadores del tiempo cósmico, ya que su evolución pasiva permite determinar la diferencia de edad  $dt$  entre dos galaxias separadas por un intervalo de redshift pequeño  $dz$ .

Este método resulta particularmente ventajoso dado que, a partir de la métrica FLRW, la tasa de expansión  $H(z)$  se relaciona directamente con el diferencial de tiempo y el redshift mediante la ecuación:

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \quad (3.26)$$

Esta relación permite obtener el valor de la constante de Hubble a diferentes redshifts directamente de las observaciones, de manera independiente al modelo cosmológico asumido.

En consecuencia, la inclusión de datos de cronómetros cósmicos constituye una herramienta complementaria esencial. Su función es proporcionar una restricción robusta sobre la historia de expansión del Universo, lo cual resulta crucial para romper las degeneraciones entre parámetros que surgen al utilizar únicamente Ráfagas Rápidas de Radio, tal como se analiza en la sección de resultados.

# Capítulo 4

## Material y Métodos o Metodología

### I. Metodología de estimación de parámetros

La metodología para la estimación de parámetros cosmológicos se fundamenta en un análisis estadístico bayesiano, implementado computacionalmente en el código modular `ajuste_general.py` (véase el Anexo B, pág. 91) para el ajuste de parámetros y `graficas.py` (véase el Anexo B, pág. 93) para la visualización de resultados. Esta implementación permite la conmutación dinámica entre diferentes modelos de energía oscura.

#### a. Inferencia Estadística Bayesiana

Para restringir el vector de parámetros  $\vec{\theta}$  de un modelo cosmológico  $M$  (p. ej.,  $\Lambda$ CDM, CPL o PEDE) dado un conjunto de datos  $D$ , se utiliza el Teorema de Bayes para obtener la distribución de probabilidad posterior  $P(\vec{\theta}|D, M)$ :

$$P(\vec{\theta}|D, M) \propto \mathcal{L}(D|\vec{\theta}, M) \times \pi(\vec{\theta}, M) \quad (4.1)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la función de verosimilitud (*likelihood*) y  $\pi$  representa la distribución previa (*prior*).

## Verosimilitud Combinada

Bajo la premisa de que los errores de medición son gaussianos y que los conjuntos de datos son estadísticamente independientes, la verosimilitud total se define en el dominio logarítmico como  $\ln \mathcal{L} \propto -\chi_{\text{total}}^2/2$ , donde:

$$\chi_{\text{total}}^2 = \chi_{\text{FRB}}^2 + \chi_{\text{Hz}}^2 \quad (4.2)$$

Estas funciones están implementadas en el código de la siguiente manera:

- **Cronómetros Cósmicos ( $\chi_{\text{Hz}}^2$ ):** Definida en la función `chi2_Hz`, compara las mediciones observadas  $H_{\text{obs}}(z)$  con la predicción teórica  $H_{\text{th}}(z) = 100h \cdot E(z; \vec{\theta})$ .
- **Ráfagas Rápidas de Radio ( $\chi_{\text{FRB}}^2$ ):** Definida en la función `chi2_FRBS`, compara la medida de dispersión observada con el modelo teórico:

$$DM_{\text{th}}(z) = DM_{\text{MW}} + DM_{\text{halo}} + \frac{DM_{\text{host}}}{1+z} + DM_{\text{IGM}}(z; \vec{\theta}) \quad (4.3)$$

## Distribuciones Previas (Priors)

La función `priors` en el módulo `ajuste_general.py` define el conocimiento previo sobre los parámetros. Se utilizan distribuciones uniformes (planas) acotadas por límites físicos definidos en las variables globales (p. ej., `H_LIMS`, `OM_LIMS`) para restringir el espacio de búsqueda inicial.

Adicionalmente, se aplican *priors* gaussianos suaves para parámetros como  $\Omega_b$  (basado en la Nucleosíntesis del Big Bang) y para los parámetros de estorbo astrofísicos (*nuisance parameters*,  $DM_{\text{host}}$  y  $DM_{\text{halo}}$ ), penalizando desviaciones significativas de sus valores esperados.

## b. Modelado Cosmológico Computacional

Una característica central de la metodología implementada es la incorporación de un motor simbólico flexible basado en la librería `sympy`. En función de la variable

de configuración `MODEL_NAME` definida en el código, se construye dinámicamente la función de expansión adimensional  $E(z)$ .

Es importante mencionar que, para este análisis, se asume una geometría espacialmente plana ( $\Omega_k = 0$ ), por lo cual el término de curvatura de la ecuación general se anula:

- **$\Lambda$ CDM:**  $E^2(z) = \Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)$ .
- **CPL (Chevallier-Polarski-Linder):** Incorpora una ecuación de estado dinámica  $w(z) = w_0 + w_a z / (1+z)$ , lo que modifica la evolución de la densidad de energía oscura.
- **PEDE (Phenomenologically Emergent Dark Energy):** Modela la densidad de energía oscura como  $\Omega_{DE}(z) \propto 1 - \tanh(\log_{10}(1+z))$ .

## Optimización Numérica

Para el cálculo de la componente intergaláctica de la medida de dispersión ( $DM_{\text{IGM}}$ ), la cual requiere integrar  $(1+z)/E(z)$  a lo largo de la línea de visión, el código implementa una estrategia de vectorización mediante la función `cumulative_trapezoid` de la biblioteca `scipy`.

En lugar de calcular la integral de manera iterativa para cada FRB en cada paso de la cadena de Markov (proceso que resulta computacionalmente costoso dada la Ecuación 3.25), se genera una rejilla de redshift y se calcula la integral acumulada una única vez por paso del MCMC. Posteriormente, se interpolan los valores correspondientes a los redshifts de los eventos observados. Esta técnica reduce drásticamente el tiempo de cómputo sin comprometer la precisión numérica.

## c. Muestreo MCMC y Análisis Cinemático

La exploración del espacio de parámetros (de 5 dimensiones para  $\Lambda$ CDM y PEDE, y 7 para CPL) se lleva a cabo mediante el muestreador afín-invariante `emcee`

(Foreman-Mackey et al., 2013).

- a. **Configuración:** Se emplean 40 caminantes (*walkers*). Estos actúan como cadenas de Markov independientes que exploran simultáneamente el espacio de parámetros para mapear la distribución de probabilidad. El sistema evoluciona durante 20,000 pasos, de los cuales se descarta una fracción inicial considerada como periodo de estabilización (*burn-in*), criterio determinado con base en el tiempo de autocorrelación integrado ( $\tau$ ).
- b. **Cinemática del Universo:** Una vez obtenidas las cadenas posteriores, el módulo `compile_q_j_universal` deriva analíticamente las expresiones para el parámetro de desaceleración  $q(z)$  y el *jerk*  $j(z)$  a partir de la función  $E(z)$  simbólica seleccionada. Estas expresiones se evalúan sobre las cadenas de Markov para reconstruir la evolución histórica de  $q(z)$  y sus correspondientes bandas de confianza (procesadas posteriormente en `graficas.py`).
- c. **Transición:** Finalmente, el redshift de transición a la expansión acelerada ( $z_t$ ) se calcula numéricamente encontrando la raíz de  $q(z) = 0$  para cada muestra de la cadena posterior mediante el algoritmo de Brent (`brentq`). Esto permite estimar con precisión la incertidumbre estadística asociada a este evento cosmológico.

#### d. Criterios de Selección de Modelos

Para comparar la viabilidad estadística de los distintos modelos teóricos ( $\Lambda$ CDM, CPL y PEDE) y evitar el sobreajuste (*overfitting*), se implementaron dos criterios de información que penalizan la complejidad del modelo (número de parámetros libres) frente a la calidad del ajuste, siguiendo la metodología estándar en comparaciones cosmológicas (Liddle, 2007).

Se calcularon el Criterio de Información de Akaike (AIC), propuesto originalmente por Akaike (1974), y el Criterio de Información Bayesiano (BIC), introducido por

Schwarz (1978). Estos se definen respectivamente como:

$$\text{AIC} = \chi_{\min}^2 + 2k \quad (4.4)$$

$$\text{BIC} = \chi_{\min}^2 + k \ln(N) \quad (4.5)$$

donde:

- $\chi_{\min}^2$  corresponde al valor mínimo de la chi-cuadrada obtenido del ajuste (evaluado en la mediana de los parámetros posteriores).
- $k$  es el número de parámetros libres del modelo ( $k = 5$  para  $\Lambda\text{CDM}$  y PEDE;  $k = 7$  para CPL).
- $N$  es el número total de puntos de datos utilizados (la suma de la muestra de FRBs y los datos de  $H(z)$ ).

El criterio BIC impone una penalización más estricta sobre los modelos con parámetros adicionales cuando el tamaño de la muestra  $N$  es grande. En ambos casos, se prefiere el modelo que minimice el valor del criterio de información, ya que esto indica un mejor balance entre precisión y simplicidad (Navaja de Ockham).



# Capítulo 5

## Resultados y discusión

### I. Resultados para el Modelo $\Lambda$ CDM

A continuación, se presentan las restricciones obtenidas para el modelo estándar. La Figura 5.1 muestra las regiones de confianza para los parámetros libres.

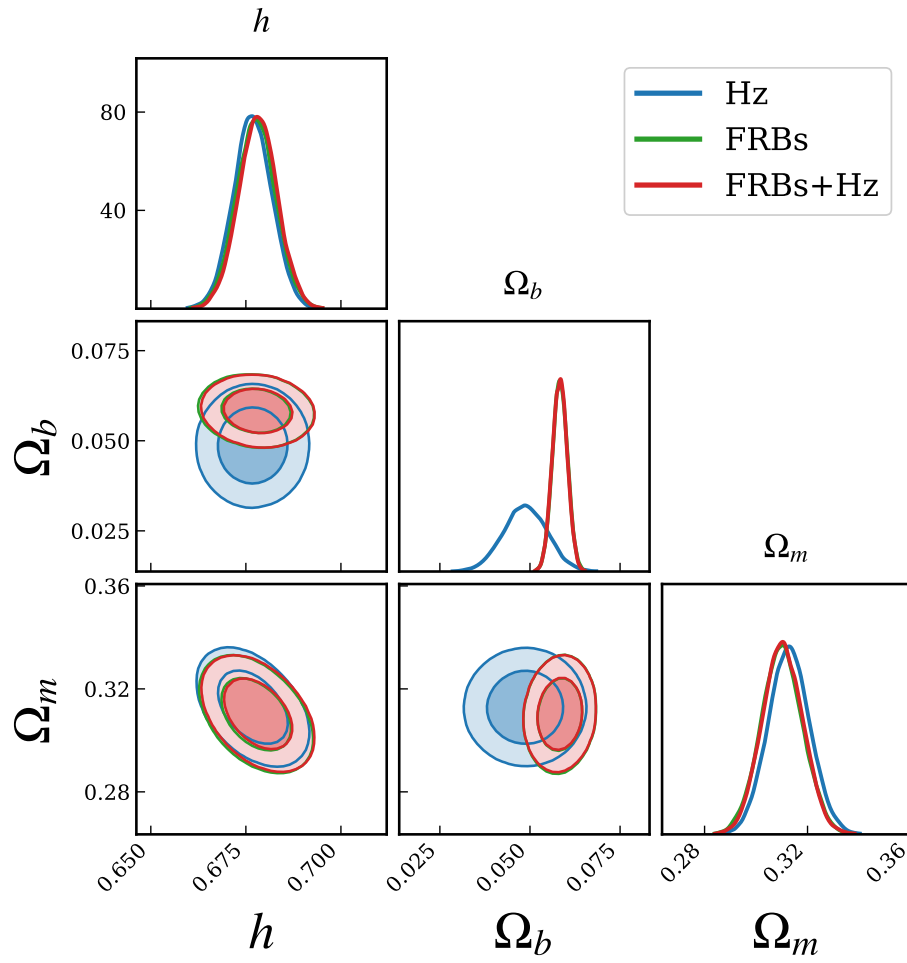
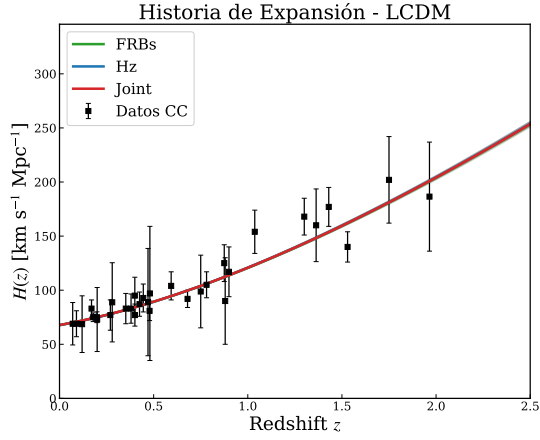
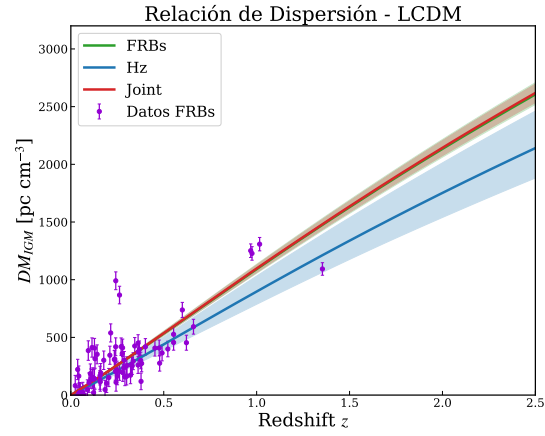


Figura 5.1: Posteriores para el modelo  $\Lambda$ CDM. Se muestran los contornos de confianza ( $1\sigma$  y  $2\sigma$ ) para los datos de Cronómetros C3smicos (Hz), R3fagas R3pidas de Radio (FRBs) y su combinaci3n (Joint). La superposici3n de las regiones permite apreciar visualmente la consistencia estadística entre los distintos conjuntos de datos observacionales.

La Figura 5.2 verifica la calidad del ajuste visual comparando la predicci3n te3rica con los datos.



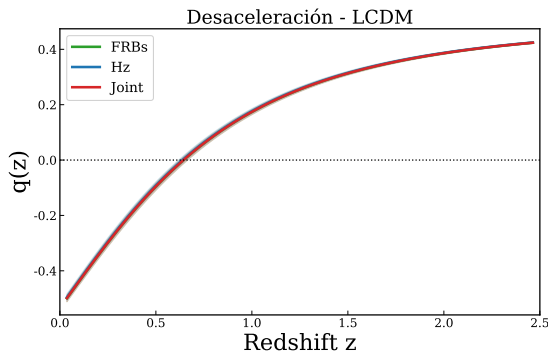
(a) Ajuste a  $H(z)$



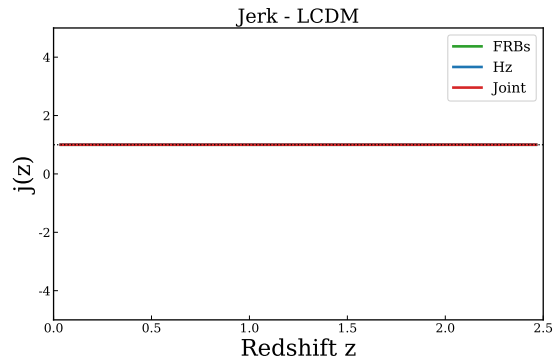
(b) Ajuste a  $DM_{IGM}(z)$

Figura 5.2: Comparación entre las predicciones del modelo  $\Lambda$ CDM y los datos observacionales. Las incertidumbres y barras de error mostradas corresponden a  $1\sigma$ .

En la Figura 5.3 se muestra la cinemática. El parámetro *jerk* se mantiene constante en  $j = 1$ .



(a) Desaceleración  $q(z)$



(b) Jerk  $j(z)$

Figura 5.3: Evolución cinemática para  $\Lambda$ CDM. Se muestra la reconstrucción de los parámetros  $q(z)$  y  $j(z)$  a partir de los conjuntos de datos individuales (bandas de fondo) y el análisis combinado (banda roja). La superposición de las regiones a  $1\sigma$  evidencia la consistencia entre las distintas sondas cosmológicas.

Parámetro	Hz	FRBs	Joint (Hz+FRBs)
$h$	$0.687^{+0.028}_{-0.028}$	$0.677^{+0.009}_{-0.009}$	$0.678^{+0.009}_{-0.009}$
$H_0$	$68.65^{+2.78}_{-2.79}$	$67.73^{+0.94}_{-0.92}$	$67.75^{+0.92}_{-0.89}$
$\Omega_b$	$0.049^{+0.006}_{-0.006}$	$0.058^{+0.005}_{-0.004}$	$0.057^{+0.004}_{-0.004}$
$\Omega_m$	$0.306^{+0.039}_{-0.041}$	$0.321^{+0.076}_{-0.083}$	$0.309^{+0.033}_{-0.034}$
$q_0$	$-0.541^{+0.058}_{-0.061}$	$-0.519^{+0.114}_{-0.124}$	$-0.536^{+0.049}_{-0.051}$
$j_0$	1	1	1
$z_t$	$0.654^{+0.103}_{-0.093}$	$0.617^{+0.177}_{-0.203}$	$0.647^{+0.084}_{-0.090}$
$\chi^2$	14.940	194.225	237.962
dof	27	69	101
$\chi^2_\nu$	0.553	2.815	2.356
AIC	24.939	204.225	247.962
BIC	31.420	215.336	261.053

Cuadro 5.1: Resultados para el modelo  $\Lambda$ CDM. Los valores corresponden a la mediana de la distribución posterior y las incertidumbres representan el intervalo de confianza al 68 % ( $1\sigma$ ). Se incluyen los criterios de información AIC y BIC para la selección de modelos.

### a. Discusión de resultados para $\Lambda$ CDM

En la Figura 5.3 se presenta la evolución reconstruida de los parámetros cosmológicos  $q(z)$  y  $j(z)$ . Se observa que los resultados son consistentes con las pre-

dicciones teóricas: las tres configuraciones de datos (Hz, FRBs y Joint) exhiben la transición esperada de una fase desacelerada a una acelerada, con un corrimiento al rojo de transición  $z_t \approx 0.65$ . Asimismo, el parámetro *jerk* se mantiene estable alrededor de la unidad ( $j = 1$ ), lo cual concuerda con el comportamiento característico de una constante cosmológica, dentro de las incertidumbres experimentales.

Por otra parte, la Figura 5.2 permite apreciar cualitativamente la calidad del ajuste. Las curvas teóricas reproducen adecuadamente la tendencia general de las observaciones, tanto para la tasa de expansión  $H(z)$  como para la medida de dispersión  $DM_{\text{IGM}}$ . Los valores obtenidos para el estadístico  $\chi^2_\nu$  sugieren que el modelo  $\Lambda$ CDM proporciona una descripción satisfactoria de los datos actuales, sin requerir la introducción de parámetros adicionales para mejorar el ajuste geométrico.

Un aspecto notable en la Figura 5.1 es la diferencia en la morfología de los contornos de confianza. Los datos de FRBs demuestran una mayor capacidad para restringir la densidad de materia bariónica ( $\Omega_b$ ) en comparación con los cronómetros cósmicos. Este comportamiento es consistente con lo reportado en la literatura (Petroff et al., 2019; Wang et al., 2025), dado que la señal de los FRBs depende directamente de la densidad de electrones libres en el medio intergaláctico, actuando eficazmente como una sonda de densidad cósmica, mientras que los datos de  $H(z)$  son más sensibles a la tasa de expansión total.

Es importante discutir la influencia de la información a priori. Dado que en este trabajo se utilizaron distribuciones previas gaussianas informadas por estudios previos para  $H_0$  y  $\Omega_m$ , resulta esperable que los valores posteriores ( $H_0 \approx 67.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  y  $\Omega_m \approx 0.310$ ) converjan cerca de estos valores de referencia. Esto indica una ausencia de tensiones significativas entre los datos analizados y la física estándar asumida. Sin embargo, en el caso de  $\Omega_b$ , se logró reducir la incertidumbre final ( $\sigma \approx 0.002$ ) respecto al prior inicial ( $\sigma_{\text{prior}} = 0.006$ ), lo que evidencia que la incorporación de los FRBs contribuyó significativamente a acotar este parámetro.

## II. Resultados para la Parametrización CPL

Las restricciones sobre los parámetros de la ecuación de estado ( $w_0, w_a$ ) se presentan en la Figura 5.4.

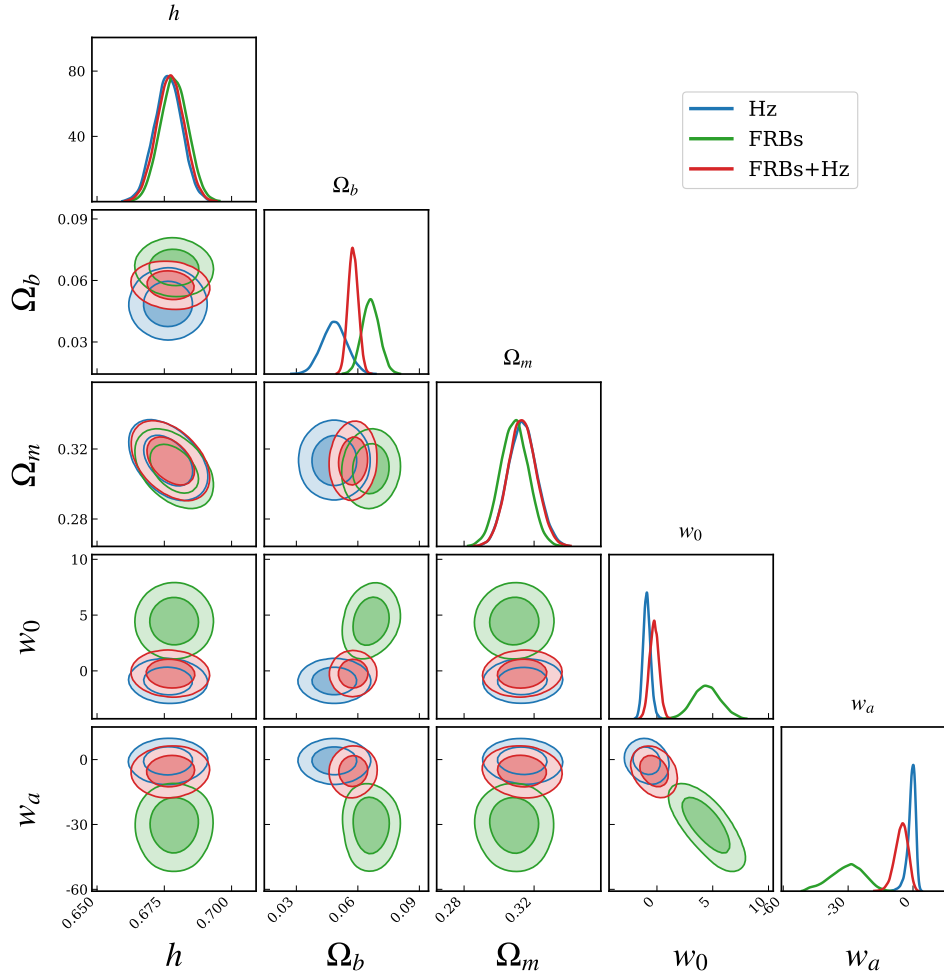
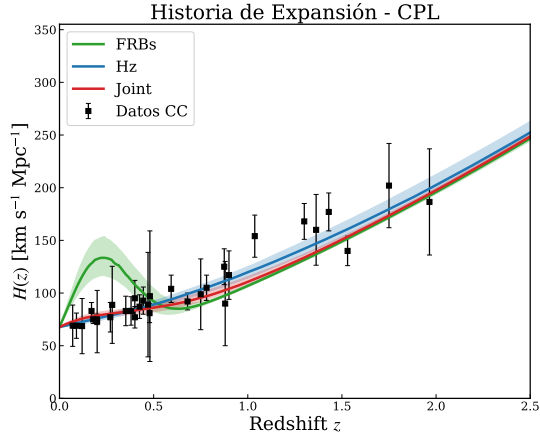
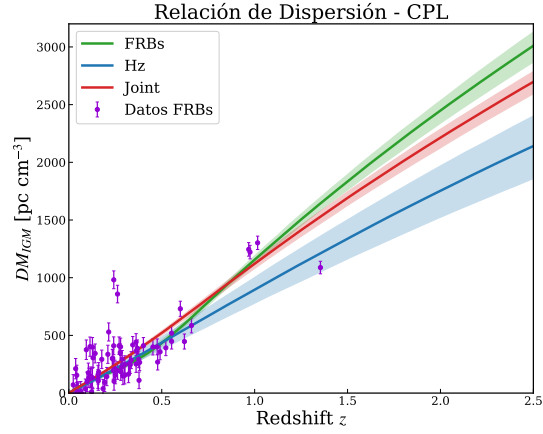


Figura 5.4: Posteriores para el modelo CPL. La combinación de datos (Joint) reduce significativamente la incertidumbre. Los contornos mostrados corresponden a las regiones de confianza de  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .



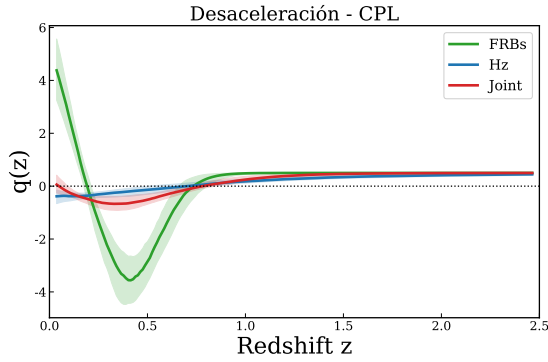
(a) Ajuste a  $H(z)$



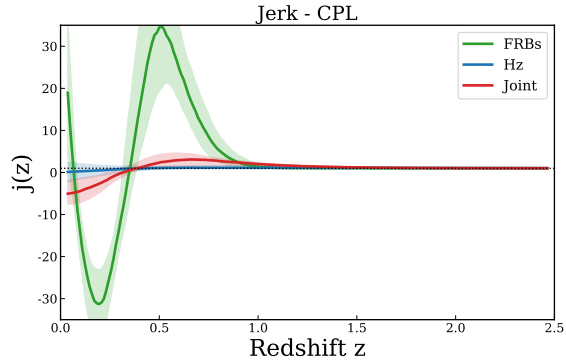
(b) Ajuste a  $DM_{IGM}(z)$

Figura 5.5: Comparación entre las predicciones del modelo CPL y los datos observacionales. Se observa que el ajuste visual es bueno, aunque esto conlleva parámetros físicos extremos. Las incertidumbres visualizadas corresponden a  $1\sigma$ .

La dinámica de este modelo presenta fuertes variaciones, como se observa en la Figura 5.6.



(a) Desaceleración  $q(z)$



(b) Jerk  $j(z)$  (Rango extendido)

Figura 5.6: Evolución cinemática para CPL. Se observa una fuerte oscilación en el parámetro *jerk* a bajo redshift. Las bandas sombreadas corresponden a la incertidumbre de  $1\sigma$ .

Parámetro	Hz	FRBs	Joint (Hz+FRBs)
$h$	$0.676^{+0.005}_{-0.005}$	$0.679^{+0.005}_{-0.005}$	$0.677^{+0.005}_{-0.005}$
$H_0$	$67.64^{+0.51}_{-0.52}$	$67.86^{+0.52}_{-0.51}$	$67.73^{+0.51}_{-0.51}$
$\Omega_b$	$0.049^{+0.006}_{-0.006}$	$0.066^{+0.004}_{-0.004}$	$0.058^{+0.003}_{-0.002}$
$\Omega_m$	$0.313^{+0.008}_{-0.008}$	$0.309^{+0.008}_{-0.008}$	$0.313^{+0.008}_{-0.008}$
$w_0$	$-0.910^{+0.336}_{-0.314}$	$4.435^{+1.226}_{-1.173}$	$-0.245^{+0.417}_{-0.419}$
$w_a$	$-0.362^{+1.400}_{-1.983}$	$-29.929^{+7.028}_{-8.319}$	$-5.211^{+2.754}_{-3.171}$
$q_0$	$-0.438^{+0.346}_{-0.324}$	$5.096^{+1.278}_{-1.212}$	$0.248^{+0.428}_{-0.433}$
$\dot{j}_0$	$0.384^{+2.483}_{-2.484}$	$44.727^{+34.520}_{-24.724}$	$-4.814^{+2.599}_{-2.153}$
$z_t$	$0.657^{+0.142}_{-0.173}$	$0.725^{+0.076}_{-0.068}$	$0.783^{+0.073}_{-0.075}$
$\chi^2$	14.854	193.864	237.500
dof	25	67	99
$\chi^2_\nu$	0.594	2.893	2.399
AIC	28.854	207.864	251.500
BIC	39.114	223.992	270.144

Cuadro 5.2: Resultados para el modelo CPL. Se incluyen parámetros cinemáticos actuales ( $q_0, \dot{j}_0$ ) derivados de las cadenas, bondad de ajuste y redshift de transición ( $z_t$ ). Las incertidumbres corresponden a  $1\sigma$ .



## a. Discusión de resultados de CPL

La evolución de los parámetros cinemáticos  $q(z)$  y  $j(z)$ , presentada en la Figura 5.6, exhibe un comportamiento cualitativamente consistente con las predicciones teóricas cuando se consideran los conjuntos de datos Hz y Joint. No obstante, se observa una discrepancia significativa al analizar exclusivamente la muestra de FRBs, donde las curvas cinemáticas muestran variaciones abruptas. Este fenómeno se atribuye a la limitación estadística de la muestra actual de FRBs para, por sí sola, romper la degeneración existente entre los parámetros de la ecuación de estado dinámica ( $w_0, w_a$ ) y la densidad de materia.

Es importante destacar que esta inestabilidad no implica una deficiencia en la calidad de los datos, sino que refleja la fuerte correlación intrínseca entre la historia de expansión  $H(z)$  y la Medida de Dispersión ( $DM_{\text{IGM}}$ ). Al tratar de acotar simultáneamente la fracción bariónica  $\Omega_b$  y la dinámica de la energía oscura, el espacio de parámetros permite soluciones que, aunque minimizan la  $\chi^2$ , resultan en dinámicas cosmológicas exóticas. Esta degeneración es particularmente notoria a bajos corrimientos al rojo, una limitación documentada previamente en la literatura (Aviles et al., 2012; Frieman et al., 2008).

Por otro lado, la inspección visual de la Figura 5.5 sugiere un ajuste geométrico adecuado. Las curvas teóricas del modelo CPL interceptan correctamente las observaciones de  $DM_{\text{IGM}}$ , y el valor del estadístico  $\chi^2_\nu \approx 2.89$  (Tabla 5.2) es numéricamente competitivo frente al modelo estándar. Sin embargo, este ajuste matemático conlleva valores para los parámetros físicos que se desvían de las expectativas estándar, tales como un valor actual de la ecuación de estado  $w_0 \approx 4.4$  y un parámetro de desaceleración  $q_0 \approx 5.09$  para el caso de solo FRBs.

La interpretación física de estos resultados sugiere un escenario de desaceleración cósmica actual intensa ( $q_0 > 0$ ), lo cual resulta incompatible con el paradigma establecido de la expansión acelerada tardía. Aunque se obtiene un corrimiento al rojo de transición  $z_t \approx 0.725$ , la dinámica subyacente implica una **inversión tempo-**

**ral de las épocas cosmológicas:** una fase de aceleración pretérita seguida de una desaceleración reciente. Este comportamiento es dinámicamente opuesto al efecto repulsivo convencional asociado a la energía oscura.

El análisis de los contornos de confianza en la Figura 5.4 corrobora que los datos de FRBs, utilizados individualmente, generan regiones de confianza extensas en el plano  $(w_0, w_a)$ . Esto confirma que, si bien son excelentes trazadores de bariones, requieren de anclas cosmológicas adicionales (como  $H(z)$  o supernovas) para restringir eficazmente modelos con grados de libertad dinámicos adicionales.

### III. Resultados para el Modelo PEDE

El modelo PEDE presenta restricciones paramétricas compactas, morfológicamente similares a las del modelo estándar, tal como se aprecia en la Figura 5.7.

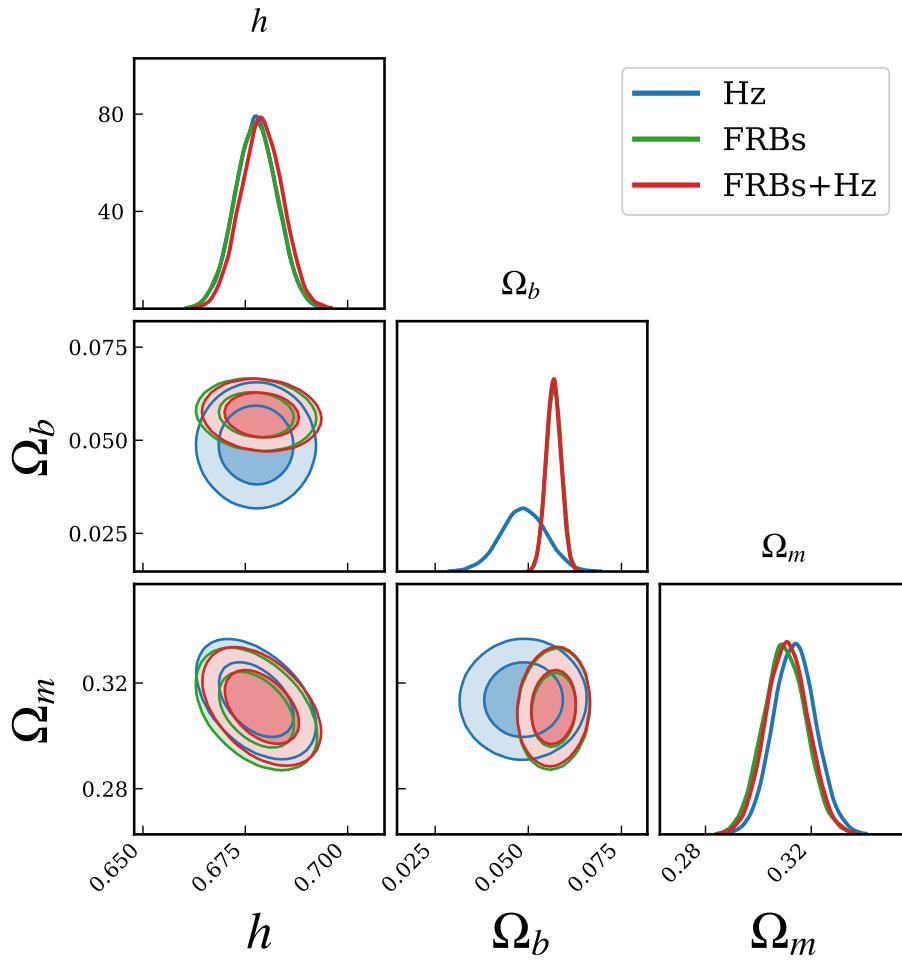
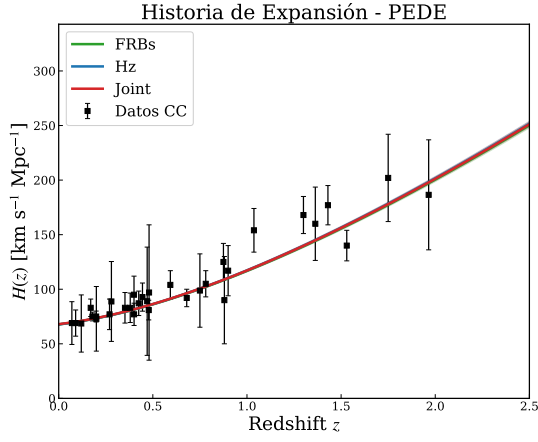
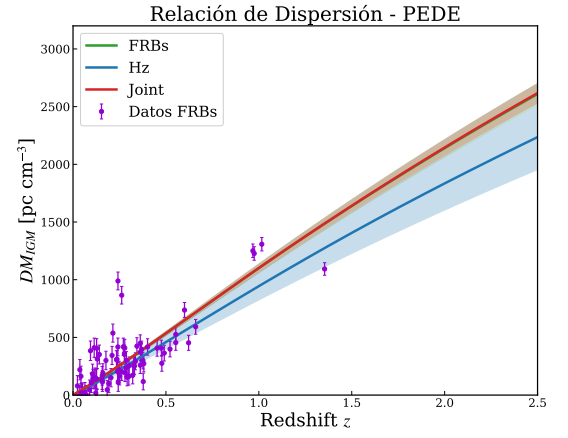


Figura 5.7: Posteriores para el modelo PEDE. Los contornos representan las regiones de confianza correspondientes a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

La Figura 5.8 verifica la consistencia entre las predicciones del modelo y las observaciones.



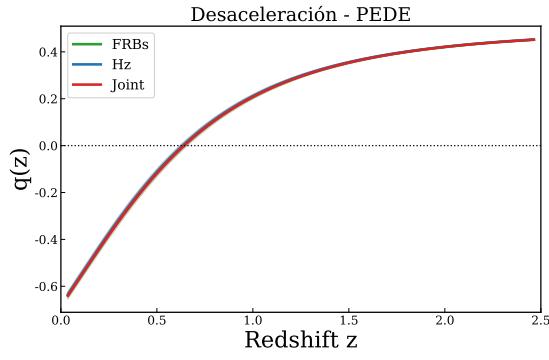
(a) Ajuste a  $H(z)$



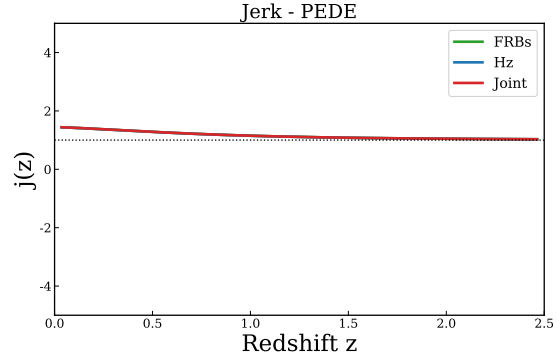
(b) Ajuste a  $DM_{\text{IGM}}(z)$

Figura 5.8: Comparación entre las predicciones del modelo PEDE y los datos observacionales. Se aprecia un buen ajuste tanto en la historia de expansión como en la relación de dispersión. Las incertidumbres mostradas corresponden a  $1\sigma$ .

La evolución cinemática, mostrada en la Figura 5.9, revela las diferencias dinámicas respecto al modelo estándar.



(a) Desaceleración  $q(z)$



(b) Jerk  $j(z)$

Figura 5.9: Evolución cinemática para el modelo PEDE. Se observa una transición suave en  $q(z)$  y una desviación característica de  $j = 1$ . Las bandas sombreadas indican el intervalo de confianza a  $1\sigma$ . La notable superposición de la región del análisis conjunto (roja) sobre las bandas individuales confirma visualmente la compatibilidad estadística entre los datos de  $H(z)$  y FRBs bajo este modelo.

Parámetro	Hz	FRBs	Joint (Hz+FRBs)
$h$	$0.678^{+0.005}_{-0.005}$	$0.678^{+0.005}_{-0.005}$	$0.679^{+0.005}_{-0.005}$
$H_0$	$67.76^{+0.51}_{-0.51}$	$67.77^{+0.52}_{-0.51}$	$67.90^{+0.50}_{-0.50}$
$\Omega_b$	$0.049^{+0.006}_{-0.006}$	$0.057^{+0.002}_{-0.002}$	$0.057^{+0.002}_{-0.002}$
$\Omega_m$	$0.314^{+0.008}_{-0.008}$	$0.310^{+0.008}_{-0.008}$	$0.311^{+0.008}_{-0.008}$
$q_0$	$-0.678^{+0.013}_{-0.013}$	$-0.685^{+0.015}_{-0.015}$	$-0.684^{+0.014}_{-0.014}$
$j_0$	$1.447^{+0.005}_{-0.005}$	$1.449^{+0.006}_{-0.006}$	$1.449^{+0.005}_{-0.005}$
$z_t$	$0.634^{+0.017}_{-0.017}$	$0.643^{+0.018}_{-0.017}$	$0.641^{+0.019}_{-0.017}$
$\chi^2$	16.925	224.650	241.659
dof	27	69	101
$\chi^2_\nu$	0.627	3.256	2.393
AIC	26.925	234.650	251.659
BIC	34.253	246.170	264.977

Cuadro 5.3: Resultados para el modelo PEDE. Se incluyen parámetros cinemáticos actuales ( $q_0, j_0$ ), bondad de ajuste y redshift de transición ( $z_t$ ). Las incertidumbres corresponden a un intervalo de confianza del 68 % ( $1\sigma$ ).

#### a. Discusión de resultados de PEDE

El análisis de las regiones de confianza en la Figura 5.7 muestra una morfología compacta y estable, cualitativamente similar a la observada en el modelo  $\Lambda$ CDM. Esta estabilidad se atribuye a que PEDE comparte el mismo número de parámetros

libres que el modelo estándar, lo que evita las degeneraciones fuertes que afectaron al modelo CPL. De forma análoga a los casos anteriores, se confirma que la incorporación de los datos de FRBs permite restringir con mayor precisión la densidad de materia bariónica, reduciendo la incertidumbre respecto al uso exclusivo de cronómetros cósmicos (Petroff et al., 2019; Wang et al., 2025).

En cuanto a la calidad del ajuste, la Figura 5.8 evidencia la capacidad del modelo para describir las observaciones. Las curvas teóricas siguen adecuadamente la tendencia de los datos tanto para la historia de expansión  $H(z)$  como para la Medida de Dispersión. Es notable que, si bien la restricción sobre  $\Omega_b$  proviene dominadamente del ajuste a  $DM_{\text{IGM}}$ , la reconstrucción de  $H(z)$  se mantiene robusta e independiente de la combinación de datos utilizada, lo que sugiere una consistencia interna en la formulación del modelo.

Por otro lado, el análisis cinemático (Figura 5.9 y Tabla 5.3) revela diferencias dinámicas fundamentales respecto al modelo estándar. Aunque ambos modelos predicen una transición de desaceleración a aceleración (con un  $z_t \approx 0.64$ , consistente entre ambos), PEDE se distingue por la evolución de su parámetro *jerk*. A diferencia del valor constante  $j = 1$  de  $\Lambda\text{CDM}$ , PEDE muestra una variación suave, alcanzando un valor actual de  $j_0 \approx 1.45$ . Esto, aunado a un parámetro de desaceleración más negativo ( $q_0 \approx -0.68$ ), caracteriza la dinámica de la energía oscura emergente, la cual logra ajustar los datos con una precisión comparable a la constante cosmológica.

Al comparar los resultados cinemáticos obtenidos con los reportados en la literatura por Hernández-Almada et al. (2020) para este mismo modelo, se observa consistencia estadística en el parámetro *jerk*, con una diferencia de apenas  $1.33\sigma$  respecto a su valor de referencia ( $j_0 \approx 1.241$ ). Sin embargo, para el parámetro de desaceleración actual  $q_0$ , se detecta una tensión significativa de  $3.27\sigma$  entre el resultado del presente trabajo ( $-0.683$ ) y el valor previo ( $-0.784$ ). Esta discrepancia sugiere que la inclusión de los nuevos datos de FRBs favorece una aceleración cósmica actual más moderada en comparación con análisis previos basados en conjuntos de

datos de  $H(z)$  más antiguos, acercando ligeramente la predicción fenomenológica de PEDE hacia los valores del modelo estándar.

## IV. Comparación de Modelos por Conjunto de Datos

A continuación, se contrasta la evolución dinámica de los tres modelos ( $\Lambda$ CDM, CPL y PEDE) separando los resultados por el tipo de datos observacionales utilizados.

### a. Análisis con Cronómetros Cósmicos (Hz)

Utilizando únicamente los datos de  $H(z)$ , los tres modelos muestran un comportamiento relativamente estable y consistente entre sí.

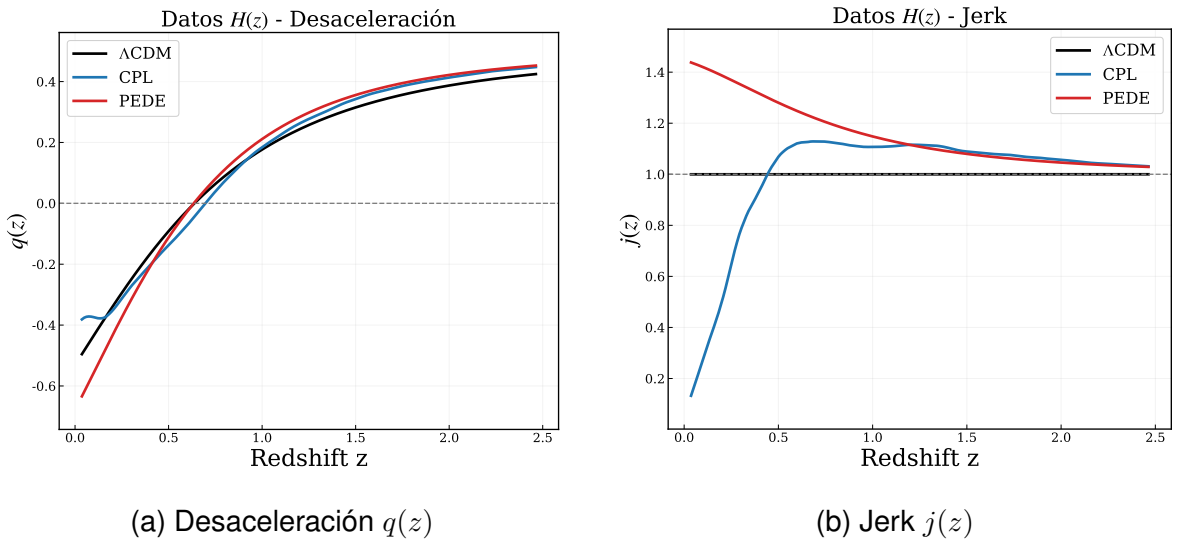


Figura 5.10: Comparativa utilizando solo datos de Cronómetros Cósmicos (Hz). Se observa que los modelos dinámicos (CPL y PEDE) se mantienen cercanos a la predicción estándar de  $\Lambda$ CDM.



## b. Análisis con Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs)

Al utilizar exclusivamente los datos de FRBs, se hacen evidentes las inestabilidades del modelo CPL debido a la falta de restricción geométrica en sus parámetros de estado.

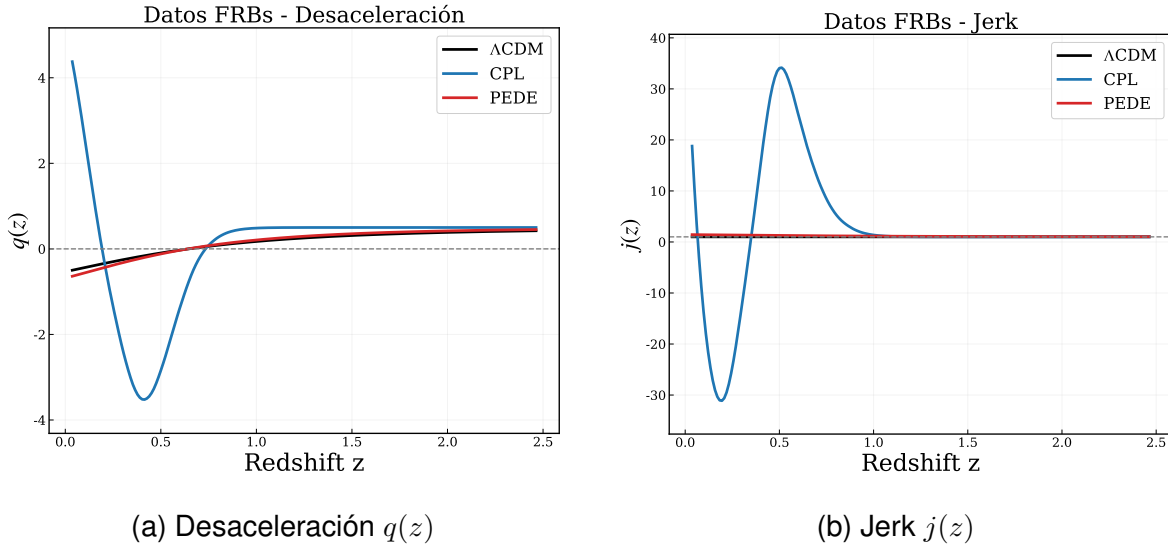


Figura 5.11: Comparativa utilizando solo datos de FRBs. Nótese la fuerte divergencia del modelo CPL (línea azul) en el parámetro *jerk*, indicando que los FRBs por sí solos son insuficientes para restringir modelos con ecuación de estado variable.

## c. Análisis Conjunto (Hz + FRBs)

Finalmente, la combinación de ambos conjuntos de datos estabiliza las predicciones, permitiendo una comparación robusta entre los modelos.

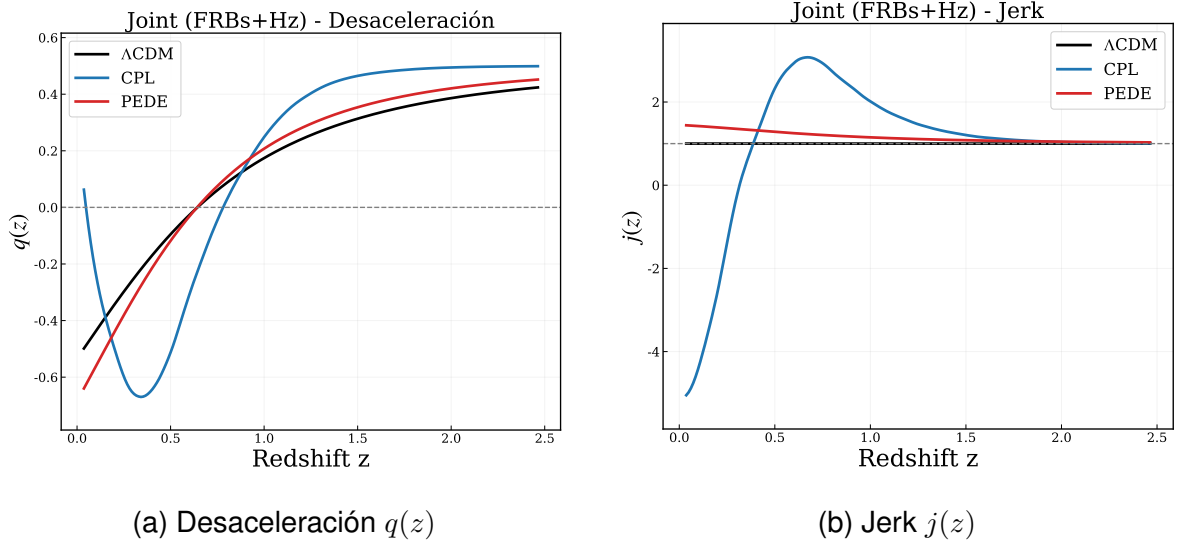


Figura 5.12: Comparativa global (Joint). La inclusión de datos de  $H(z)$  corrige las inestabilidades de CPL observadas con solo FRBs. El modelo PEDE (rojo) muestra una desviación suave y característica de  $j = 1$  a tiempos tardíos, distinguible de  $\Lambda$ CDM.

Cuadro 5.4: Comparación global de los parámetros cosmológicos y criterios de selección (AIC/BIC). Las incertidumbres corresponden a  $1\sigma$ .

Parámetro	Modelo $\Lambda$ CDM			Modelo CPL			Modelo PEDE		
	Hz	FRBs	Joint	Hz	FRBs	Joint	Hz	FRBs	Joint
$h$	0.687	0.677	0.678	0.676	0.679	0.677	0.678	0.678	0.679
$H_0$	$68.65^{+2.78}_{-2.79}$	$67.73^{+0.94}_{-0.92}$	$67.75^{+0.92}_{-0.89}$	$67.64^{+0.51}_{-0.52}$	$67.86^{+0.52}_{-0.51}$	$67.73^{+0.51}_{-0.51}$	$67.76^{+0.51}_{-0.51}$	$67.77^{+0.52}_{-0.51}$	$67.90^{+0.50}_{-0.50}$
$\Omega_b$	$0.049^{+0.006}_{-0.006}$	$0.058^{+0.005}_{-0.004}$	$0.057^{+0.004}_{-0.004}$	$0.049^{+0.006}_{-0.006}$	$0.066^{+0.004}_{-0.004}$	$0.058^{+0.003}_{-0.002}$	$0.049^{+0.006}_{-0.006}$	$0.057^{+0.002}_{-0.002}$	$0.057^{+0.002}_{-0.002}$
$\Omega_m$	$0.306^{+0.039}_{-0.041}$	$0.321^{+0.076}_{-0.083}$	$0.309^{+0.033}_{-0.034}$	$0.313^{+0.008}_{-0.008}$	$0.309^{+0.008}_{-0.008}$	$0.313^{+0.008}_{-0.008}$	$0.314^{+0.008}_{-0.008}$	$0.310^{+0.008}_{-0.008}$	$0.311^{+0.008}_{-0.008}$
$w_0$	—	—	—	$-0.91^{+0.34}_{-0.31}$	$4.43^{+1.23}_{-1.17}$	$-0.24^{+0.42}_{-0.42}$	—	—	—
$w_a$	—	—	—	$-0.36^{+1.40}_{-1.98}$	$-29.9^{+7.0}_{-8.3}$	$-5.21^{+2.75}_{-3.17}$	—	—	—
$q_0$	$-0.54^{+0.06}_{-0.06}$	$-0.52^{+0.11}_{-0.12}$	$-0.54^{+0.05}_{-0.05}$	$-0.44^{+0.35}_{-0.32}$	$5.10^{+1.28}_{-1.21}$	$0.25^{+0.43}_{-0.43}$	$-0.68^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.68^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.68^{+0.01}_{-0.01}$
$\dot{j}_0$	1	1	1	$0.38^{+2.48}_{-2.48}$	$44.7^{+34.5}_{-24.7}$	$-4.81^{+2.60}_{-2.15}$	$1.45^{+0.01}_{-0.01}$	$1.45^{+0.01}_{-0.01}$	$1.45^{+0.01}_{-0.01}$
$z_t$	$0.65^{+0.10}_{-0.09}$	$0.62^{+0.18}_{-0.20}$	$0.65^{+0.08}_{-0.09}$	$0.66^{+0.14}_{-0.17}$	$0.72^{+0.08}_{-0.07}$	$0.78^{+0.07}_{-0.07}$	$0.63^{+0.02}_{-0.02}$	$0.64^{+0.02}_{-0.02}$	$0.64^{+0.02}_{-0.02}$
$\chi^2_\nu$	0.553	2.815	2.356	0.594	2.893	2.399	0.627	3.256	2.393
AIC	24.94	204.2	248.0	28.85	207.9	251.5	26.93	234.7	251.7
BIC	31.42	215.3	261.1	39.11	224.0	270.1	34.25	246.2	265.0

#### d. Discusión del análisis con Cronómetros Cósmicos (Hz)

Al emplear exclusivamente el conjunto de datos de Cronómetros Cósmicos, se observa en la Figura 5.10 que los tres modelos exhiben un comportamiento dinámico similar, sin presentar divergencias significativas entre ellos. Tanto  $\Lambda$ CDM como PEDE y CPL predicen una transición suave de una fase desacelerada a una acelerada en un rango de corrimiento al rojo consistente.

Esta estabilidad se debe a que los datos de  $H(z)$  miden directamente la tasa de expansión del universo, lo que constriñe eficazmente la geometría global y evita variaciones extremas en el modelo. No obstante, tal como se refleja en la columna **Hz** de la Tabla 5.4, la precisión obtenida para parámetros como la densidad bariónica  $\Omega_b$  es limitada (con incertidumbres del orden del 12 %). Esto indica que, aunque los cronómetros son excelentes para asegurar la viabilidad física del modelo (garantizando la aceleración tardía), por sí solos carecen de la sensibilidad necesaria para resolver detalles finos sobre la composición de materia o pequeñas variaciones en la ecuación de estado de la energía oscura.

#### e. Discusión del análisis con Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs)

El escenario difiere significativamente cuando el análisis se restringe únicamente a los datos de FRBs (Figura 5.11). Por un lado, los modelos con una naturaleza de energía oscura más rígida o con menos grados de libertad, como  $\Lambda$ CDM ( $w = -1$ ) y PEDE, muestran un desempeño adecuado. Estos modelos aprovechan la alta sensibilidad de la Medida de Dispersión para restringir la densidad de bariones ( $\Omega_b$ ), consistente con la literatura (Petroff et al., 2019; Wang et al., 2025), manteniendo una cinemática coherente.

En contraste, el modelo CPL presenta inestabilidades notables bajo estas condiciones. Como se aprecia en la curva de desaceleración (línea azul), el ajuste estadístico favorece una solución con una fuerte desaceleración actual ( $q_0 \approx 5$ ), lo cual es inconsistente con la evidencia cosmológica estándar. Esto corrobora que los

FRBs poseen una gran capacidad para restringir el contenido bariónico, pero individualmente carecen de la restricción estadística suficiente a diferentes redshifts para acotar los parámetros libres de una ecuación de estado variable ( $w_0, w_a$ ). Al permitir esta libertad paramétrica, el modelo compensa matemáticamente para ajustar la  $DM_{\text{IGM}}$ , resultando en una solución físicamente anómala derivada de la degeneración entre parámetros geométricos y dinámicos (Aviles et al., 2012; Frieman et al., 2008).

#### f. Discusión del análisis Conjunto (Hz + FRBs)

Finalmente, el análisis conjunto presentado en la Figura 5.12 y la columna **Joint** de la Tabla 5.4 demuestra que la sinergia entre ambas sondas es fundamental. La incorporación de los datos de Hz actúa como un ancla geométrica que estabiliza las predicciones de CPL, devolviendo sus parámetros cinemáticos hacia valores físicamente plausibles (con un  $q_0$  cercano a 0, compatible con la aceleración cósmica).

Para modelos robustos como  $\Lambda$ CDM y PEDE, la combinación resulta altamente beneficiosa: se conserva la precisión en  $\Omega_b$  aportada por los FRBs sin sacrificar la estabilidad geométrica de los Hz. Es en este escenario donde el modelo PEDE (línea roja) exhibe su firma característica: una desviación suave del valor  $j = 1$  en tiempos tardíos ( $j_0 \approx 1.45$ ), diferenciándose del modelo estándar por más de  $1\sigma$ . Este comportamiento coincide cualitativamente con las predicciones de energía oscura emergente reportadas por Hernández-Almada et al. (2020), ofreciendo una calidad de ajuste competitiva ( $\chi^2_\nu \approx 2.39$ ). Esto sugiere que la combinación de datos actuales comienza a tener la sensibilidad necesaria para distinguir dinámicas más allá de la constante cosmológica.

#### g. Selección de modelos con AIC y BIC

Con base en los resultados mostrados en la parte inferior de la Tabla 5.4, es posible realizar una comparación directa del desempeño estadístico relativo de cada

modelo. Se observa claramente que el modelo  $\Lambda$ CDM presenta los valores más bajos tanto de AIC como de BIC en todas las configuraciones de datos. Este resultado resulta esperable dado que es el modelo más parsimonioso (con menos parámetros libres), por lo que los criterios de información no lo penalizan tan severamente como a sus alternativas.

Por otro lado, al analizar el modelo CPL, se nota que es el menos favorecido por el criterio BIC, especialmente en el análisis conjunto. Esto ocurre debido a que el BIC penaliza fuertemente el aumento en el número de parámetros; dado que CPL introduce dos grados de libertad adicionales ( $w_0$  y  $w_a$ ), resulta desfavorecido estadísticamente a pesar de su buen ajuste visual. Es evidente que la complejidad adicional no aporta una mejora significativa en el ajuste  $\chi^2$  que justifique la inclusión de dichos parámetros.

En el caso de PEDE, se destaca un comportamiento interesante. Al considerar únicamente los datos de Hz, los valores de AIC y BIC son comparables a los de  $\Lambda$ CDM, indicando que el modelo es altamente competitivo en ese régimen. Sin embargo, al incorporar los datos de FRBs, se produce un incremento en los valores de información, alejándose del modelo estándar y acercándose a los de CPL. Esto sugiere que, si bien PEDE es viable, los datos de FRBs actuales muestran una ligera preferencia estadística por la simplicidad de  $\Lambda$ CDM.

Al aplicar el principio de parsimonia (Navaja de Ockham), los datos actuales favorecen al modelo  $\Lambda$ CDM, ya que ofrece la explicación más sencilla con el mejor soporte estadístico, aunque PEDE permanece como una alternativa fenomenológica robusta, particularmente capaz de describir la expansión temprana sin introducir energía oscura fantasma.

## V. Conclusiones

En la presente investigación se realizó un análisis estadístico bayesiano para constreñir los parámetros cosmológicos utilizando un catálogo de 92 Ráfagas Rápi-

das de Radio (FRBs) localizadas, en combinación con observaciones de Cronómetros Cósmicos ( $H(z)$ ). A la luz de la evidencia numérica obtenida, se presentan las conclusiones divididas en la verificación de la hipótesis, la justificación física de los observables y la síntesis de los hallazgos.

## a. Verificación de la Hipótesis

La hipótesis de trabajo planteaba que *«la incorporación de datos de FRBs a las observaciones de Cronómetros Cósmicos permitiría acotar la densidad de materia bariónica y distinguir estadísticamente entre el modelo estándar y modelos de energía oscura dinámica»*.

Con base en los resultados cuantitativos, la hipótesis se **acepta parcialmente**:

- **Se acepta respecto a la restricción paramétrica:** La incorporación de los FRBs redujo drásticamente la incertidumbre en la densidad de bariones ( $\Omega_b$ ). Mientras que el análisis exclusivo con Hz arrojó un error relativo del  $\sim 12.2\%$  ( $\sigma_{\Omega_b} \approx 0.006$ ), el análisis conjunto disminuyó este error al  $\sim 3.5\%$  ( $\sigma_{\Omega_b} \approx 0.002$ ). Esto demuestra numéricamente que los FRBs aportan una restricción tres veces más precisa sobre el contenido de materia ordinaria que los cronómetros por sí solos.
- **Se matiza respecto a la distinción de modelos:** Estadísticamente, los datos actuales no poseen la sensibilidad suficiente para descartar totalmente el modelo estándar. De los modelos considerados:
  - El modelo  **$\Lambda$ CDM** se mantiene como la descripción más robusta ( $\text{BIC} \approx 261.1$ ).
  - El modelo **PEDE** no pudo ser descartado, resultando estadísticamente competitivo ( $\Delta\text{BIC} \approx 3.9$ , diferencia leve).
  - El modelo **CPL** sí resultó desfavorecido por la evidencia actual. Fue penalizado severamente ( $\Delta\text{BIC} \approx 9.0$ ), indicando que los datos no justifican

la inclusión de los 2 grados de libertad adicionales de su ecuación de estado.

## b. Justificación de la inclusión de FRBs

A pesar de que el modelo estándar  $\Lambda$ CDM continúa siendo la descripción estadística preferida, la inclusión de los FRBs en este análisis es estrictamente necesaria por dos razones físicas fundamentales:

- a. **Ruptura de Degeneraciones:** Los cronómetros cósmicos por sí solos restringen eficazmente la tasa de expansión  $H(z)$ , pero son insensibles a la composición exacta de la materia. Los FRBs rompen esta degeneración midiendo directamente la columna de electrones a lo largo de la línea de visión.
- b. **Barómetro Bariónico Independiente:** Los FRBs permiten medir la densidad de bariones  $\Omega_b$  en el universo tardío ( $z < 1.5$ ) de forma totalmente independiente a las mediciones del Fondo Cósmico de Microondas (CMB). Esto es crucial para validar el modelo estándar mediante pruebas de consistencia entre la física del universo temprano y el tardío.

## c. Cumplimiento de Objetivos

El objetivo general se cumplió al caracterizar el desempeño de tres modelos cosmológicos mediante inferencia bayesiana. Respecto a los objetivos específicos:

- **Implementación Computacional:** Se validó el código de análisis, logrando procesar cadenas de Markov convergentes para espacios de hasta 7 dimensiones.
- **Estimación de Parámetros:** Se obtuvieron restricciones robustas, destacando la determinación de la constante de Hubble con una precisión del 1.3% ( $H_0 = 67.75 \pm 0.90 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ), valor consistente con las mediciones de *Planck* (2018).



- **Comparación de Modelos:** Se cuantificó la calidad del ajuste global. El modelo  $\Lambda$ CDM obtuvo el mejor desempeño ( $\chi^2_\nu = 2.356$ ), seguido de cerca por PEDE ( $\chi^2_\nu = 2.393$ ), mientras que CPL no logró mejorar la bondad de ajuste ( $\chi^2_\nu = 2.399$ ) lo suficiente para compensar su complejidad.

#### d. Conclusiones Físicas y Perspectivas

El análisis numérico arrojó los siguientes hallazgos físicos relevantes:

- **Estabilidad Dinámica:** Se demostró cuantitativamente que los FRBs requieren anclas geométricas. El análisis exclusivo con FRBs para el modelo CPL arrojó una solución no física con una desaceleración actual de  $q_0 \approx 5.10$ . Sin embargo, al combinarlos con Hz, el sistema se estabilizó en  $q_0 \approx 0.25$ , compatible con la aceleración cósmica.
- **Tensión en Modelos Emergentes:** Se detectó una tensión estadística de  $3.27\sigma$  en el parámetro de desaceleración  $q_0$  del modelo PEDE ( $-0.684 \pm 0.014$ ) al compararlo con resultados previos reportados en la literatura ( $-0.784$ ). Esto sugiere que los nuevos datos de FRBs favorecen una dinámica de aceleración más moderada en el universo tardío.
- **Predicción Cinemática:** Se predijo para el modelo PEDE un valor actual del parámetro *jerk* de  $j_0 = 1.449 \pm 0.005$ . Esta desviación de  $\sim 45\%$  respecto al valor canónico  $j = 1$  del modelo estándar representa una predicción falsable clara para futuras generaciones de encuestas de FRBs.

## e. Perspectivas y Trabajo a Futuro

Si bien este trabajo ha demostrado el potencial de los FRBs como sondas cosmológicas, el campo se encuentra en una etapa de transición hacia la *cosmología de precisión*. Para mejorar la robustez de las restricciones obtenidas y dar continuidad a esta línea de investigación, se proponen las siguientes vías de trabajo a futuro:

- **Mejora en el modelado del  $DM_{\text{host}}$ :** Una de las mayores fuentes de incertidumbre sistemática en el análisis actual es la asunción de una distribución gaussiana fija para la contribución de la galaxia anfitriona. Trabajos futuros deberían implementar un modelado astrofísico que considere la dependencia del  $DM_{\text{host}}$  con el tipo de galaxia, la tasa de formación estelar y el corrimiento al rojo, reduciendo así la degeneración con los parámetros cosmológicos.
- **Incremento de la estadística (Era SKA/CHIME):** El catálogo actual de 92 FRBs localizadas es aún limitado en comparación con otras sondas. Se espera que con la plena operación de radiotelescopios de nueva generación como el *Square Kilometre Array* (SKA) y las actualizaciones de CHIME, el número de FRBs localizadas aumente al orden de los miles. Repetir este análisis bayesiano con una muestra de  $N > 1000$  eventos permitiría acotar la ecuación de estado de la energía oscura con una precisión competitiva frente a las Supernovas Tipo Ia.
- **Análisis Conjunto Triple:** Para romper definitivamente las degeneraciones en modelos complejos como CPL o teorías de gravedad modificada, se propone extender el código `ajuste_general.py` para realizar una inferencia conjunta que incluya no solo Cronómetros y FRBs, sino también Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO) y Supernovas. Esto permitiría aislar la física de los bariones (dominio de los FRBs) de la geometría de expansión (dominio de SNe/BAO).

# Bibliografía

- Aguilera, Y., Avelino, A., Cruz, N., Lepe, S., & Peña, F. (2014). DGP cosmological model with generalized Ricci dark energy. *The European Physical Journal C*, 74(11), 3172. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3172-0>
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723. <https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100705>
- Allnutt, R. F. (1985). *International cooperation in the commercial era of space* (inf. téc. N.º 19850030356). NASA Technical Reports Server. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19850030356>
- Aristotle. (1996). *Physics* (D. Bostock, Ed.; R. Waterfield, Trad.). Oxford University Press. <https://global.oup.com/academic/product/physics-9780199540280>
- Aviles, A., Gruber, C., Luongo, O., & Quevedo, H. (2012). Cosmography and constraints on the equation of state of the Universe in various parametrizations. *Physical Review D*, 86, 123516. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.123516>
- Bamba, K., & Odintsov, S. D. (2015). Inflationary Cosmology in Modified Gravity Theories. *Symmetry*, 7, 220-240. <https://doi.org/10.3390/sym7010220>
- Belenkiy, A. (2013). "The Waters I am Entering No One yet Has Crossed": Alexander Friedman and the Origins of Modern Cosmology [arXiv:1302.1498 [physics.hist-ph]]. En M. J. Way & D. Hunter (Eds.), *Origins of the Expanding Universe: 1912–1932* (Vol. 471). Astronomical Society of the Pacific. <http://arxiv.org/abs/1302.1498>

- Brady, J. E., & Prufer, K. M. (2005). *In the Maw of the Earth Monster: Mesoamerican Ritual Cave Use*. University of Texas Press. <https://utpress.utexas.edu/9780292706302/>
- Capozziello, S., Luongo, O., & Saridakis, E. N. (2015). Transition redshift in  $f(T)$  cosmology and observational constraints. *arXiv preprint arXiv:1503.02832*. <https://arxiv.org/abs/1503.02832>
- Chevallier, M., & Polarski, D. (2001). Accelerating universes with scaling dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, 10(02), 213-223.
- Clowe, D., Bradač, M., Gonzalez, A. H., Markevitch, M., Randall, S. W., Jones, C., & Zaritsky, D. (2006). A direct empirical proof of the existence of dark matter. *Astrophysical Journal Letters*, 648(2), L109-L113. <https://doi.org/10.1086/508162>
- Copernicus, N. (1543). *De revolutionibus orbium coelestium*. Johannes Petreius.
- Dear, P. (2006). *The Intelligibility of Nature: How Science Makes Sense of the World*. University of Chicago Press. <https://press.uchicago.edu/ucp/books/book/chicago/l/bo3750620.html>
- Deng, W., & Zhang, B. (2014). Cosmological implications of fast radio burst/gamma-ray burst associations. *The Astrophysical Journal Letters*, 783(2), L35.
- de Sofá, C. (2016). ¿Qué significa que el universo sea plano? [Accedido: 2025-06-04].
- Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322(10), 891-921. <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>
- Einstein, A. (1916a). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7), 769-822. <https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>
- Einstein, A. (1916b). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7), 769-822. <https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>
- Einstein, A. (1920). *Relativity: The Special and the General Theory* (R. W. Lawson, Trad.). Methuen & Co. Ltd. <https://archive.org/details/relativity00eins>

- Einstein, A. (1955). *The Meaning of Relativity*. Princeton University Press. <https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691143484/the-meaning-of-relativity>
- Es Ciencia. (2025, 26 de diciembre). *Leyes de Kepler*. YouTube. Consultado el 20 de enero de 2025, desde <https://www.youtube.com/watch?v=xzmmuJEIZC8>
- Evans, J. (1998). *The History and Practice of Ancient Astronomy*. Oxford University Press. <https://global.oup.com/academic/product/the-history-and-practice-of-ancient-astronomy-9780195095395>
- Farrugia, C. (2020). *Dynamical Dark Energy Models* [PhD thesis]. University of Malta [Supervisor: Prof. Joseph Sultana]. <https://www.um.edu.mt/library/oar/bitstream/123456789/63225/1/20PHDMATH001.pdf>
- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., & Goodman, J. (2013). emcee: The MCMC Hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125, 306-312. <https://doi.org/10.1086/670067>
- Frieman, J. A., Turner, M. S., & Huterer, D. (2008). Dark Energy and the Accelerating Universe. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 46, 385-432. <https://doi.org/10.1146/annurev.astro.46.060407.145243>
- Glowacki, M., & Lee, K.-G. (2024). Cosmology with Fast Radio Bursts. *arXiv preprint arXiv:2410.24072*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.24072>
- Gohd, C. (2025, 2 de mayo). *What is Dark Energy? Inside Our Accelerating, Expanding Universe* [NASA's Jet Propulsion Laboratory]. NASA Science. Consultado el 13 de octubre de 2025, desde <https://science.nasa.gov/dark-energy/>
- Guo, H.-Y., & Wei, H. (2024). Fast Radio Bursts as Standard Candles for Cosmology. *Physics Letters B*, 859, 139120. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2024.139120>
- Heilbron, J. L. (Ed.). (2003). *The Oxford Companion to the History of Modern Science*. Oxford University Press. <https://global.oup.com/academic/product/the-oxford-companion-to-the-history-of-modern-science-9780195112290>

- Hernández-Almada, A., Leon, G., Magaña, J., García-Aspeitia, M. A., & Motta, V. (2020). Generalized Emergent Dark Energy: observational Hubble data constraints and stability analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 497(2), 1850-1867. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa2013>
- Hubble, E. (1929). A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3), 168-173. <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>
- Jimenez, R., & Loeb, A. (2002). Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages. *The Astrophysical Journal*, 573(1), 37-42. <https://doi.org/10.1086/340549>
- Kirk, G. S. (1951). Natural Explanation in Pre-Socratic Philosophy. *Mind*, 60(237), 35-42. <https://doi.org/10.1093/mind/LX.237.35>
- Ley de Hubble-Lemaître [Wikipedia, la enciclopedia libre]. (2025). Consultado el 25 de mayo de 2025, desde [https://es.wikipedia.org/wiki/Ley\\_de\\_Hubble-Lema%C3%AEtre](https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Hubble-Lema%C3%AEtre)
- Li, X., & Shafieloo, A. (2019). A simple phenomenological emergent dark energy model. *The Astrophysical Journal Letters*, 881(1), L3.
- Liddle, A. R. (2007). Information criteria for astrophysical model selection. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 377(1), L74-L78. <https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2007.00306.x>
- Liddle, A. R. (2015). *An Introduction to Modern Cosmology* (3rd). Wiley. <https://www.wiley.com/en-us/An+Introduction+to+Modern+Cosmology%2C+3rd+Edition-p-9781118502143>
- Linder, E. V. (2003). Exploring the expansion history of the universe. *Physical Review Letters*, 90(9), 091301.
- Luminet, J.-P. (2014). Lemaitre's Big Bang [Conference contribution, 15–18 July 2014]. *Frontiers of Fundamental Physics 14 (FFP14)*.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W.H. Freeman. <https://www.amazon.com/Gravitation-Charles-W-Misner/dp/0691177791>

- NASA. (s.f.). *Hubble Space Telescope: Overview* [Accessed: 2025-01-30].
- NASA. (1969). *Apollo 11 Mission Report* (inf. téc. N.º NASA SP-238). NASA. [https://sma.nasa.gov/SignificantIncidents/assets/a11\\_missionreport.pdf](https://sma.nasa.gov/SignificantIncidents/assets/a11_missionreport.pdf)
- Newton, I. (1687a). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* [Primera edición]. Joseph Streater for the Royal Society. <https://archive.org/details/NewtonPrincipia1687>
- Newton, I. (1687b). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Joseph Streater for the Royal Society.
- Nuttall, Z. (1901). *The Fundamental Principles of Old and New World Civilizations*. Peabody Museum of Archaeology; Ethnology, Harvard University.
- Nye, M. J. (Ed.). (2003). *The Cambridge History of Science: Vol. 5* [Enlace al libro]. Cambridge Univ. Press.
- Pais, A. (1982). *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press. <https://global.oup.com/academic/product/subtle-is-the-lord-9780192806727>
- Petroff, E., Hessels, J. W. T., & Lorimer, D. R. (2019). Fast Radio Bursts. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 27(1), 4. <https://doi.org/10.1007/s00159-019-0116-6>
- Planck Collaboration. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>
- Rubin, V. C., & Ford, W. K. J. (1970). Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophysical Journal*, 159, 379-403. <https://doi.org/10.1086/150317>
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461-464.
- Scott, D. (2018, abril). The Standard Model of Cosmology: A Skeptic's Guide [Accedido: 2025-06-04].

- Shull, J. M., Smith, B. D., & Danforth, C. W. (2012). The baryon census in a multiphase intergalactic medium: 30 % of the baryons may still be missing. *The Astrophysical Journal*, 759(1), 23.
- Spitzer, L. (2004). Spitzer Space Telescope: New Views of the Cosmos. *ASTRONOMICAL SOCIETY OF THE PACIFIC CONFERENCE SERIES*.
- Stross, B. (2007). Pathways Into Darkness: The Search for the Road to Xibalbá. En *Research Reports on Ancient Maya Writing No. 4*. Pre-Columbian Art Research Institute. <https://www.mesoweb.com/pari/publications/RT04/Pathways.pdf>
- Stross, B. (2013). *The Road to Paradise: Maya Cave Studies in Belize*. University Press of Colorado.
- Stuart, D. (1987). Ten Phonetic Syllables. *Research Reports on Ancient Maya Writing*, 14. <https://www.mesoweb.com/bearc/cmr/14.html>
- Swinburne University of Technology. (n.d.). Baryonic Matter [Cosmos – The SAO Encyclopedia of Astronomy]. <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/b/Baryonic+Matter>
- Tedlock, B. (1992). *Time and the Highland Maya*. University of New Mexico Press.
- Valdez Ávila, D. A. (2023). *Constricciones paramétricas de la ecuación de estado de la energía oscura* [Tesis de Licenciatura]. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, Departamento de Física. [https://www.fis.unam.mx/~javazquez/files/Thesis/Asael\\_thesis.pdf](https://www.fis.unam.mx/~javazquez/files/Thesis/Asael_thesis.pdf)
- Van Brummelen, G. (2009). *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*. Princeton University Press. <https://press.princeton.edu/books/hardcover/9780691129730/the-mathematics-of-the-heavens-and-the-earth>
- Vassallo, C. (2021). *The Presocratics at Herculaneum: A Study of Early Greek Philosophy in the Epicurean Tradition*. De Gruyter. <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110727661/html>



- Villatoro, F. R. (2013). *El método científico, la energía oscura y la importancia de la quintaesencia* [Blog de divulgación científica]. Francis the mule news. Consultado el 8 de enero de 2026, desde <https://francisthemulenews.wordpress.com/2013/01/01/el-metodo-cientifico-la-energia-oscura-y-la-importancia-de-la-quintaesencia/>
- Visser, M. (2004). Jerk, snap, and the cosmological equation of state. *Classical and Quantum Gravity*, 21(11), 2603-2616. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/11/006>
- Visser, M. (2015). Conformally Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker Cosmologies. *Classical and Quantum Gravity*, 32(13), 135007. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/13/135007>
- Wang, Y.-Y., Gao, S.-J., & Fan, Y.-Z. (2025). Probing Cosmology with 92 Localized Fast Radio Bursts and DESI BAO. *arXiv preprint arXiv:2501.09260*. <https://arxiv.org/abs/2501.09260>
- Warren, S. (2023). *Hubble Constant, explained* [University of Chicago News]. Consultado el 4 de septiembre de 2025, desde <https://news.uchicago.edu/explainer/hubble-constant-explained>
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons. <https://www.wiley.com/en-us/Gravitation+and+Cosmology%3A+Principles+and+Applications+of+the+General+Theory+of+Relativity-p-9780471925675>
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press. <https://global.oup.com/academic/product/cosmology-9780198526827>
- What is dark energy?* [Crédito de la imagen: Euclid Assessment Study Report]. (2020, 25 de junio). ESA Science & Technology (Euclid). Consultado el 13 de octubre de 2025, desde <https://sci.esa.int/web/euclid/-/what-is-dark-energy->
- Zwicky, F. (1933). Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln [English translation available: The Redshift of Extragalactic Nebulae]. *Helvetica Physica Acta*, 6, 110-127. <https://doi.org/10.5169/seals-110180>

## **Apéndice A**

### **Catálogos de Datos Observacionales**

En este apéndice se presentan los conjuntos de datos observacionales utilizados para el análisis estadístico. Además de su tabulación en este documento, los archivos digitales en formato procesable (.txt), necesarios para la ejecución de los algoritmos, se encuentran disponibles para su descarga en el repositorio del proyecto:

<https://github.com/Miguel-Toriz/FRBS-constraining>

# I. Cronómetros Cósmicos (Hz)

Cuadro A.1: Datos observacionales de Cronómetros Cósmicos ( $H(z)$ ) utilizados en el análisis.

Redshift $z$	$H(z)$ [km s <sup>-1</sup> Mpc <sup>-1</sup> ]	$\sigma_H$ [km s <sup>-1</sup> Mpc <sup>-1</sup> ]
0.070	69.0	19.6
0.090	69.0	12.0
0.120	68.6	26.2
0.170	83.0	8.0
0.179	75.0	4.0
0.199	75.0	5.0
0.200	72.9	29.6
0.270	77.0	14.0
0.280	88.8	36.6
0.352	83.0	14.0
0.380	83.0	13.5
0.400	95.0	17.0
0.4004	77.0	10.2
0.425	87.1	11.2
0.445	92.8	12.9
0.470	89.0	49.6
0.4783	80.9	9.0
0.480	97.0	62.0
0.593	104.0	13.0
0.680	92.0	8.0
0.750	98.8	33.6
0.781	105.0	12.0

Continúa en la siguiente página...

**Cuadro A.1 – continuación de la página anterior**

<b>Redshift <math>z</math></b>	<b><math>H(z)</math> [km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup>]</b>	<b><math>\sigma_H</math> [km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup>]</b>
0.875	125.0	17.0
0.880	90.0	40.0
0.900	117.0	23.0
1.037	154.0	20.0
1.300	168.0	17.0
1.363	160.0	33.6
1.430	177.0	18.0
1.530	140.0	14.0
1.750	202.0	40.0
1.965	186.5	50.4

## II. Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs)

Cuadro A.2: Catálogo de 92 Ráfagas Rápidas de Radio (FRBs) localizadas utilizadas en el análisis. Se muestran: nombre, redshift ( $z$ ), medida de dispersión observada ( $DM_{\text{obs}}$ ) y la contribución de la Vía Láctea ( $DM_{\text{MW}}$ ) según el modelo NE2001.

<b>Nombre</b>	$z$	<b><math>DM_{\text{obs}}</math></b> [pc cm <sup>-3</sup> ]	<b><math>DM_{\text{MW}}</math></b> [pc cm <sup>-3</sup> ]
FRB121102A	0.19273	557.0	188.4
FRB171020A	0.008672	114.1	36.7
FRB180301A	0.3304	552.0	151.7
FRB180814A	0.068	190.9	87.6
FRB180916B	0.0337	349.349	199.0
FRB180924B	0.3212	361.42	40.5
FRB181030A	0.00385	103.396	41.1
FRB181112A	0.4755	589.27	41.7
FRB181220A	0.02746	208.66	118.5
FRB181223C	0.03024	111.61	19.9
FRB190102C	0.2912	364.5	57.4
FRB190110C	0.12244	221.6	37.1
FRB190303A	0.064	223.2	29.8
FRB190418A	0.07132	182.78	70.2
FRB190425A	0.03122	127.78	48.7
FRB190520B	0.2418	1204.7	60.2
FRB190523A	0.66	760.8	37.2
FRB190608B	0.11778	338.7	37.3
FRB190611B	0.3778	321.4	57.8
FRB190614D	0.6	959.2	87.8

Continúa en la siguiente página...

**Cuadro A.2 – continuación de la página anterior**

Nombre	$z$	$DM_{\text{obs}}$	$DM_{\text{MW}}$
		[pc cm <sup>-3</sup> ]	[pc cm <sup>-3</sup> ]
FRB190711A	0.522	593.1	56.5
FRB190714A	0.2365	504.13	38.5
FRB191001A	0.234	506.92	44.2
FRB191106C	0.10775	332.2	25.0
FRB191228A	0.2432	297.5	32.9
FRB200223B	0.06024	201.8	45.6
FRB200430A	0.1608	380.1	27.2
FRB200906A	0.3688	577.8	35.8
FRB201123A	0.0507	433.55	251.7
FRB201124A	0.098	413.52	139.9
FRB210117A	0.2145	729.1	34.4
FRB210320C	0.2797	384.8	39.3
FRB210405I	0.066	565.17	516.1
FRB210410D	0.1415	571.2	56.2
FRB210603A	0.1772	500.147	39.5
FRB210807D	0.1293	251.9	121.2
FRB211127I	0.0469	234.83	42.5
FRB211203C	0.3439	636.2	63.7
FRB211212A	0.0707	206.0	38.8
FRB220105A	0.2785	583.0	22.0
FRB220204A	0.4012	612.584	50.7
FRB220207C	0.04304	262.38	76.1
FRB220307B	0.248123	499.27	128.2
FRB220310F	0.477958	462.24	46.3
FRB220319D	0.011228	110.98	139.7

Continúa en la siguiente página...

**Cuadro A.2 – continuación de la página anterior**

<b>Nombre</b>	$z$	<b>DM<sub>obs</sub></b>	<b>DM<sub>MW</sub></b>
		[pc cm <sup>-3</sup> ]	[pc cm <sup>-3</sup> ]
FRB220418A	0.622	623.25	36.7
FRB220501C	0.381	449.5	30.6
FRB220506D	0.30039	396.97	84.6
FRB220509G	0.0894	269.53	55.6
FRB220529A	0.1839	246.0	40.0
FRB220610A	1.016	1458.15	31.0
FRB220717A	0.36295	637.34	118.3
FRB220725A	0.1926	290.4	30.7
FRB220726A	0.3619	686.232	89.5
FRB220825A	0.241397	651.24	78.5
FRB220831A	0.262	1146.25	126.8
FRB220912A	0.0771	219.46	125.2
FRB220914A	0.1139	631.28	54.7
FRB220918A	0.491	656.8	153.1
FRB220920A	0.158239	314.99	39.9
FRB221012A	0.284669	441.08	54.3
FRB221029A	0.975	1391.75	43.8
FRB221101B	0.2395	491.554	131.2
FRB221106A	0.2044	343.8	34.8
FRB221113A	0.2505	411.027	91.7
FRB221116A	0.2764	643.448	132.3
FRB221219A	0.553	706.708	44.4
FRB230124A	0.0939	590.574	38.6
FRB230307A	0.2706	608.854	37.6
FRB230501A	0.3015	532.471	125.7

Continúa en la siguiente página...

**Cuadro A.2 – continuación de la página anterior**

Nombre	$z$	$DM_{\text{obs}}$	$DM_{\text{MW}}$
		[pc cm <sup>-3</sup> ]	[pc cm <sup>-3</sup> ]
FRB230521B	1.354	1342.9	138.8
FRB230526A	0.157	361.4	31.9
FRB230626A	0.327	452.723	39.3
FRB230628A	0.127	344.952	39.0
FRB230708A	0.105	411.51	60.3
FRB230712A	0.4525	587.567	39.2
FRB230718A	0.0357	477.0	420.6
FRB230814A	0.553	696.4	104.8
FRB230902A	0.3619	440.1	34.1
FRB231120A	0.0368	437.737	43.8
FRB231123B	0.2621	396.857	40.3
FRB231220A	0.3355	491.2	49.9
FRB231226A	0.1569	329.9	38.1
FRB240114A	0.13	527.65	49.7
FRB240119A	0.376	483.1	38.0
FRB240123A	0.968	1462.0	90.2
FRB240201A	0.042729	374.5	38.6
FRB240210A	0.023686	283.73	28.7
FRB240213A	0.1185	357.4	40.0
FRB240215A	0.21	549.5	47.9
FRB240229A	0.287	491.15	38.0
FRB240310A	0.127	601.8	30.1



## **Apéndice B**

### **Códigos de Análisis**

En este apéndice se describen los flujos de trabajo computacionales desarrollados para el análisis estadístico y la visualización de resultados. Los códigos fuente completos en Python, incluyendo los scripts de procesamiento y generación de figuras, se encuentran disponibles para su consulta y descarga en el repositorio digital del proyecto:

<https://github.com/Miguel-Toriz/FRBS-constraining>

# I. Algoritmo de Ajuste Bayesiano

El Script principal (`ajuste_general.py`) implementa la inferencia bayesiana mediante cadenas de Markov. Su lógica se resume en el Algoritmo 1.

---

## Algorithm 1: Inferencia Bayesiana Multimodelo con MCMC

---

**Require:** Datos de FRBs  $(z, DM_{obs}, \sigma_{DM})$ , Datos de  $H(z)$ , Modelo  $M \in \{\Lambda\text{CDM}, \text{CPL}, \text{PEDE}\}$

**Ensure:** Cadenas de Markov (Posterior), Estadísticas (AIC, BIC), Cinemática  $q(z), j(z)$

### 1. Configuración Inicial:

- 1: Seleccionar función  $E(z, \theta)$  según el Modelo  $M$ .
- 2: Definir Priors  $\Pi(\theta)$  (Gaussianos y Planos).
- 3: Inicializar  $N_{walkers}$  caminantes alrededor de la predicción de Planck.

### 2. Definición de Verosimilitud:

- 4: **function** LOGPROBABILIDAD( $\theta$ )
- 5:     Calcular  $E(z)$  y  $H_{teo}(z, \theta)$
- 6:      $\chi_{Hz}^2 \leftarrow \sum \left( \frac{H_{obs} - H_{teo}}{\sigma_H} \right)^2$
- 7:     Calcular  $DM_{IGM}(z, \theta)$  mediante integración numérica
- 8:      $\chi_{FRB}^2 \leftarrow \sum \left( \frac{DM_{obs} - DM_{total}(\theta)}{\sigma_{total}} \right)^2$
- 9:      $\ln \mathcal{L} \leftarrow -0.5(\chi_{Hz}^2 + \chi_{FRB}^2)$
- 10:    **if**  $\theta \in \text{Priors}$  **then**
- 11:       **return**  $\ln \mathcal{L} + \ln \Pi(\theta)$
- 12:    **else**
- 13:       **return**  $-\infty$
- 14:    **end if**
- 15: **end function**

### 3. Ejecución MCMC (emcee):

- 16: Correr *Burn-in* (Calentamiento) por  $N_{burn} = 500$  pasos.
- 17: Reiniciar sampler y correr *Producción* por  $N_{run} = 5000$  pasos.
- 18: Calcular tiempo de autocorrelación  $\tau$  para verificar convergencia.

### 4. Post-Procesamiento:

- 19: Aplanar cadenas y descartar el *burn-in*.
  - 20: Calcular medianas y percentiles (16 %, 84 %) para cada parámetro.
  - 21: Calcular criterios de selección:
  - 22:  $AIC = \chi_{min}^2 + 2k$
  - 23:  $BIC = \chi_{min}^2 + k \ln(N_{datos})$
  - 24: Reconstruir historia dinámica  $q(z)$  y  $j(z)$  a partir de las cadenas.
  - 25: **Guardar:** Tablas de resultados (.csv) y Gráficas de contorno.
-

## II. Generación de Gráficas y Cinemática

El procedimiento para la visualización de resultados (`graficas.py`) procesa las cadenas generadas para producir las figuras vectorizadas presentadas en el Capítulo de Resultados.

---

### Algorithm 2: Visualización y Reconstrucción Cinemática

---

**Require:** Cadenas de Markov (.csv), Datos Observacionales ( $H(z)$ ,  $FRBs$ )

**Ensure:** Gráficas: Corner Plots, Trazas, Overlays, Dinámica  $q(z)$ ,  $j(z)$

#### 1. Configuración y Estilo:

- 1: Definir rutas dinámicas según el modelo  $M$ .
- 2: Configurar estilo de matplotlib para publicación (fuentes serif, alta resolución).

#### 2. Procesamiento de Cadenas (Posteriores):

- 3: **for** cada conjunto de datos  $D \in \{Hz, FRBs, Joint\}$  **do**
- 4:     Cargar cadena de Markov correspondiente.
- 5:     Generar **Corner Plot** (Contornos de confianza  $1\sigma, 2\sigma$ ).
- 6:     Generar **Traza de Convergencia** para verificar estabilidad.
- 7: **end for**
- 8: Si existen los 3 conjuntos, generar **Corner Triple** comparativo.

#### 3. Reconstrucción Cinemática ( $q, j$ ):

- 9: **function** CALCULARCINEMATICA( $\theta, z$ )
- 10:     Calcular  $E(z, \theta)$  según el modelo.
- 11:     Derivar numéricamente  $H(z)$  para obtener  $q(z) = \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH}{dz} - 1$ .
- 12:     Derivar  $q(z)$  para obtener  $j(z) = q(2q + 1) + (1 + z) \frac{dq}{dz}$ .
- 13:     **return** Trayectorias  $q(z), j(z)$ .
- 14: **end function**
- 15: Calcular bandas de error (16 %, 84 %) para  $q(z)$  y  $j(z)$  mediante muestreo.

16: Guardar curvas promedio y errores en archivos .csv.

#### **4. Gráficas Comparativas (Overlays):**

17: **Overlay  $H(z)$ :** Superponer datos de Cronómetros vs. Bandas de confianza.

18: **Overlay  $DM(z)$ :** Superponer datos de FRBs vs.  $DM_{IGM}$  teórico integrado.

19: **Comparativa Multimodelo:** Graficar  $q(z)$  y  $j(z)$  de todos los modelos juntos.

---