

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Informática

Doctorado en Tecnología Educativa

Evaluación de conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable mediante
Objetos de Aprendizaje en GeoGebra.

Tesis

Que como parte de los requisitos
para obtener el Grado de

Doctora en Tecnología Educativa

Presenta

Sugey Sotomayor Cano

Dirigido por:

Ricardo Chaparro Sánchez

Querétaro, Qro. a xx de mmmm de aaaa

La presente obra está bajo la licencia:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Bajo los siguientes términos:



Atribución — Usted debe dar [crédito de manera adecuada](#), brindar un enlace a la licencia, e [indicar si se han realizado cambios](#). Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.



NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con [propósitos comerciales](#).



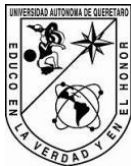
SinDerivadas — Si [remezcla, transforma o crea a partir](#) del material, no podrá distribuir el material modificado.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales ni [medidas tecnológicas](#) que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una [excepción o limitación](#) aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como [publicidad, privacidad, o derechos morales](#) pueden limitar la forma en que utilice el material.



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Informática

Doctorado en Innovación en Tecnología Educativa

Evaluación de conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable mediante
Objetos de Aprendizaje en GeoGebra.

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado
Doctora en Tecnología Educativa

Presenta

Sugey Sotomayor Cano

Dirigido por:

Ricardo Chaparro Sánchez

Ricardo Chaparro Sánchez

Presidente

José Alberto Rodríguez Morales

Secretario

Ma. Teresa García Ramírez

Vocal

Rocío Edith López Martínez

Suplente

Sandra luz Canchola Magdaleno

Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.

México

DEDICATORIAS

*A Jesús Gabriel, mi ángel de luz.
Tu sonrisa y valentía vivirán siempre en mí.*

*A Freya Sofía, mi ahijada hermosa.
Eres fuente de amor y esperanza.*

AGRADECIMIENTOS

A DIOS por ser mi guía y mi luz en momentos difíciles, por darme fuerza en la adversidad y esperanza en la incertidumbre. Sin Su amor y misericordia, este logro no habría sido posible.

A mi madre Itala y a mi padre Juan, por su amor incondicional, por educarme con buenos valores y por ser mi fortaleza en momentos adversos, por creer siempre en mí y enseñarme a soñar.

A mi esposo Deimer, por ser mi voz de aliento, por compartir conmigo su conocimiento y apoyarme incondicionalmente en cada etapa de este proceso. Gracias por no dejarme caer cuando los días se tornaban grises y por recordarme que todo es posible cuando se tiene fe y un propósito claro.

A mis hermanos, Juley, Brenda, Henry y Jhon, por brindarme su admiración y amor incondicional, por motivarme a seguir adelante y estar siempre para mí. Gracias por ser mis cómplices en cada paso del camino y ser mi refugio.

A mi familia, amistades y seres queridos, por acompañarme a la distancia con palabras reconfortantes y buenos deseos que me impulsaron a continuar.

A mis amigas Leidy, Ángela y Laura, por su apoyo incondicional, por aportar con su conocimiento a esta investigación, por hacerme reír cuando más lo necesitaba y por enseñarme, con su compañía, a valorarnos y respetarnos entre mujeres.

A mis asesores, por sus valiosas enseñanzas y el tiempo dedicado a esta investigación; especialmente al Dr. Ricardo Chaparro Sánchez, por sus consejos, su guía constante y su apoyo incondicional para sacar adelante este trabajo.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) por la beca otorgada para realizar los estudios de doctorado.

A mí, por ser fuerte y resiliente, y por recordarme que todo es posible cuando no perdemos la fe y nos recargamos del amor de quienes nos estiman. ¡Mañana siempre será más bonito!

RESUMEN

Esta investigación tuvo como objetivo evaluar el impacto de Objetos de Aprendizaje en la reducción de conflictos cognitivos durante la enseñanza del cálculo multivariable, con énfasis en el concepto de derivada parcial. Los Objetos de Aprendizaje se diseñaron siguiendo el modelo instruccional ADDIE (Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación), y se estructuraron conforme a la taxonomía de eventos instruccionales de Gagné. Cada recurso integró applets interactivos creados con GeoGebra, cuyo carácter dinámico y versátil permitió al estudiantado explorar de forma visual e interactiva los conceptos matemáticos implicados. El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos guio tanto el diseño del contenido como el análisis de la actividad matemática, facilitando la identificación de significados parciales emergentes durante la resolución de las tareas. Se adoptó una metodología de enfoque mixto fundamentada en la Investigación Basada en Diseño, desarrollada en sus cuatro fases: análisis, diseño y desarrollo, implementación y evaluación. Los resultados evidencian que, aunque persisten concepciones centradas en la aplicación mecánica de procedimientos, los Objetos de Aprendizaje favorecieron una comprensión más integral y profunda de la derivada parcial, promovieron la transición entre distintos registros de representación y disminuyeron los conflictos cognitivos. Se concluye que el uso de recursos educativos diseñados sobre bases teóricas sólidas constituye una estrategia efectiva para enriquecer el aprendizaje del cálculo multivariable en contextos de ingeniería.

Palabras claves: cálculo multivariable, conflictos cognitivos, objetos de aprendizaje, Geogebra, formación de ingenieros.

ABSTRACT

The objective of this research was to evaluate the impact of a Learning Object (LO) on reducing cognitive conflicts in the teaching of multivariable calculus, specifically regarding the concept of partial derivatives. The LO was designed under the ADDIE instructional model (Analysis, Design, Development, Implementation and Evaluation) and structured based on Gagne's taxonomy, integrating interactive applets developed with GeoGebra. The dynamic and versatile design of these applets enabled students to visually and interactively explore the involved mathematical concepts. The Onto-semiotic Approach (OSA) to mathematical knowledge and instruction guided both the content design of the LO and the analysis of students' mathematical activity, allowing the identification of partial meanings that emerged during the resolution of the proposed mathematical tasks. A mixed-methods methodology based on Design-Based Research (DBR) was applied, developed through its four phases: analysis, design and development, implementation, and evaluation. The results show that, although some conceptions focused on the mechanical use of procedures persist, the LO contributed to a more integrated and deeper understanding of the concept of partial derivative, promoting transitions between representational registers and reducing cognitive conflicts. It is concluded that the use of a Learning Object grounded in solid theoretical frameworks constitutes an effective strategy to enhance the learning of multivariable calculus in engineering contexts.

Keywords: multivariable calculus, cognitive conflicts, Learning Object, GeoGebra, engineering education.

INDICE

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1.	Descripción del problema.....	2
1.2.	Justificación.....	3
2.	ANTECEDENTES	6
2.1.	Investigaciones sin el uso de tecnología.....	6
2.2.	Investigaciones con el uso de la tecnología.....	11
3.	MARCO TEÓRICO	17
3.1.	Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemático	18
3.1.1.	Prácticas matemáticas institucionales y personales.....	21
3.1.2.	Conflictos semióticos y cognitivos.....	23
3.1.3.	Criterios de idoneidad didáctica	23
3.2.	Los conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable.....	25
3.2.1.	Análisis de la literatura sobre los conflictos.....	26
3.2.2.	Tipos de conflictos	28
3.3.	La tecnología educativa en la enseñanza del cálculo multivariable	29
3.3.1.	La integración de la tecnología en la enseñanza del cálculo	29
3.3.2.	El software GeoGebra como mediador en los procesos de enseñanza-aprendizaje.....	32
3.4.	Objetos de aprendizaje.....	33
3.4.1.	Características de los objetos de aprendizaje	34
3.4.2.	Estándares y especificaciones e-learning	35
3.4.3.	Taxonomía instructiva de Gagné.....	36
3.4.4.	Modelo ADDIE para la creación de Objetos de Aprendizaje	38

4.	HIPÓTESIS Y SUPUESTO	41
4.1.	Preguntas de investigación	41
4.2.	Hipótesis	41
4.3.	Supuesto	42
5.	OBJETIVOS	43
5.1.	Objetivo general	43
5.2.	Objetivos específicos	43
6.	METODOLOGÍA	44
6.1.	Ubicación metodológica	44
6.2.	Tipo de investigación	45
6.3.	Participantes	45
6.4.	Investigación Basada en Diseño	46
6.4.1.	Fase 1. Análisis de la situación. Definición del problema.....	48
6.4.2.	Fase 2. Desarrollo de las soluciones de acuerdo con la teoría.....	53
6.4.3.	Fase 3. Implementación.....	53
6.4.4.	Fase 4. Evaluación.....	54
7.	RESULTADOS	55
7.1.	Resultados de la fase de análisis.....	55
7.1.1.	Elementos curriculares del programa de cálculo multivariable.....	55
7.1.2.	Entrevista a docentes	56
7.1.3.	Significados parciales de la derivada evidenciados por los estudiantes	58
7.2.	Resultados de la fase de desarrollo.....	59
7.3.	Resultados de la fase de implementación	60
7.4.	Resultados de la fase de evaluación	62
7.4.1.	Valoración de los OA por parte del grupo de expertos	62

7.4.2.	Autoevaluaciones de los OA	63
7.4.3.	Valoración de los OA por parte de los estudiantes.....	65
7.4.4.	Prueba escrita.....	67
8.	DISCUSION	73
9.	CONCLUSIÓN	77
10.	REFERENCIAS	79
	ANEXOS	93
	ANEXO A. Formato de validación de juicio de expertos	93
	ANEXO B. Versión final de la entrevista validada.....	96
	ANEXO C. Instrumento de validación de los OA por parte de los expertos	97
	ANEXO D. Instrumento de validación de los OA por parte de los estudiantes	102
	ANEXO E. Prueba escrita aplicada a los estudiantes.....	106
	ANEXO F. Manual para la creación de objetos de aprendizaje de la derivad parcial ...	108

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Relación entre los elementos de los OA y las fases de la taxonomía instructiva de Gagné.....	37
Tabla 2 El proceso ADDIE y las acciones realizadas por el autor del OA	40
Tabla 3 Aplicación de las fases de la IBD en esta investigación.....	47
Tabla 4 Ítems de la entrevista organizados por cada dimensión	50
Tabla 5 Resumen de las características de las tareas.	52
Tabla 6 Cálculo del CVC de cada ítem y de todo el instrumento.....	56
Tabla 7 Rango del instrumento de valoración de los OA.....	62
Tabla 8 Valoración promedio de los OA por estudiantes.....	66
Tabla 9 Resultados de las tareas del OA-1	67
Tabla 10 Resultados de las tareas de los OA_2 y OA_3	70

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Nociones teóricas que fundamentan la investigación	18
Figura 2	Tipología de significados institucionales y personales	21
Figura 3	Componentes de la idoneidad didáctica.....	24
Figura 4	Representación del modelo ADDIE.....	38
Figura 5	Etapas generales de la IBD	47
Figura 6	Interfaz del OA_3.....	59
Figura 7	Vista del OA-1 en la plataforma institucional	60
Figura 8	Vista del OA-2 en la plataforma institucional	61
Figura 9	Vista del OA-3 en la plataforma institucional	61
Figura 10	Valoración por expertos de los OA.....	63
Figura 11	Resultados de la autoevaluación del OA_1.....	64
Figura 12	Resultados de la autoevaluación del OA_2.....	64
Figura 13	Resultados de la autoevaluación OA_3	65
Figura 14	Cálculo parcialmente correcto de derivadas parciales	68
Figura 15	Determinación incorrecta de los signos de las derivadas parciales	69
Figura 16	Cálculo incorrecto de la pendiente de una recta tangente a una superficie.....	70
Figura 17	Interpretación correcta de la derivada parcial como razón de cambio en un contexto financiero	71
Figura 18	Interpretación correcta de los signos de la derivada parcial en un contexto financiero	72
Figura 19	Determinación correcta de la ecuación del plano tangente a una superficie	72

1. INTRODUCCIÓN

En la formación del estudiantado de ingeniería, el cálculo multivariable cumple un papel esencial al proporcionar herramientas para describir, analizar y modelar fenómenos que involucran múltiples variables. Dentro de este campo, la derivada parcial representa uno de los conceptos fundamentales, cuya comprensión resulta compleja debido a la abstracción que implica y a las dificultades que plantea su visualización en espacios tridimensionales. Estas dificultades suelen estar asociadas a una enseñanza centrada en procedimientos algorítmicos, que limita el tránsito entre distintos registros de representación y no facilita una comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

Frente a los retos que enfrenta la enseñanza del cálculo multivariable, diversas investigaciones han evidenciado que las tecnologías digitales interactivas favorecen el aprendizaje de nociones complejas mediante visualización dinámica e interacción con objetos matemáticos (Esteban et al., 2006; Herrera & Cruz, 2024; Rojas et al., 2019). El uso de software dinámico en el aula permite representar los conceptos de forma manipulable, facilitando la exploración y el análisis de sus propiedades. Sin embargo, su efectividad no depende de la herramienta en sí misma, sino de cómo se diseñan las tareas y actividades que el estudiantado realiza con ella. Por esta razón, es necesario integrarlas dentro de secuencias didácticas que refuercen los conocimientos previos y contribuyan a minimizar los conflictos cognitivos al abordar conceptos más avanzados.

En este marco, la presente investigación propone el diseño, implementación y validación de objetos de aprendizaje mediados por tecnologías digitales interactivas, orientados a facilitar la comprensión de la derivada parcial y a reducir los conflictos cognitivos que enfrenta el estudiantado al abordar este concepto. La propuesta se apoya en modelos instruccionales consolidados y en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), que permite analizar la actividad matemática del estudiantado y profundizar en la comprensión del concepto a partir del estudio de los distintos significados parciales que emergen en dicha actividad.

El documento se organiza en varios apartados. En primer lugar, se presentan el planteamiento del problema y la justificación del estudio. Posteriormente, se exponen los objetivos, la

hipótesis y las preguntas de investigación. El marco teórico desarrolla los fundamentos teóricos y didácticos que sustentan la propuesta, seguido por el diseño metodológico, la presentación de resultados y su discusión. Finalmente, se incluyen las conclusiones del estudio, junto con sus implicaciones y proyecciones futuras.

1.1. Descripción del problema

Diversas investigaciones han señalado que la comprensión de los conceptos teóricos del cálculo multivariable representa un desafío para el estudiantado universitario, especialmente en programas de ingeniería. Esta dificultad se atribuye, en parte, a que los cursos suelen centrarse en aspectos numéricos, algebraicos y simbólicos, dejando de lado los aspectos gráficos que emergen de los propios conceptos. La construcción adecuada de estas nociones implica que el estudiantado transite con flexibilidad entre distintos registros de representación, como el gráfico, el algebraico, el tabular y el verbal, lo cual puede enriquecerse mediante el uso de recursos tecnológicos (Allan et al., 2019; Esteban et al., 2006; Vigo y Ferreira, 2019).

Uno de los obstáculos más comunes es la falta de articulación entre los conocimientos adquiridos en el cálculo de una variable y los nuevos conceptos que se introducen en el cálculo de varias variables. En muchos casos, se asume que el estudiantado puede extender de forma natural ideas como la noción de pendiente al espacio tridimensional, algo que no sucede en la mayoría de los casos (Martínez-Planell y McGee, 2015). Esta suposición dificulta la comprensión de conceptos más complejos como el plano tangente, la derivada direccional y el vector gradiente (Borji et al., 2024; Lee y Moore-Russo, 2015; Martínez-Planell et al., 2015; Rojas- Flórez et al., 2019).

Herrera y Cruz (2024) advierten que la complejidad y abstracción de conceptos como límites, derivadas e integrales dificulta su comprensión y aplicación en contextos reales. Ante esta situación, proponen estrategias didácticas innovadoras que favorezcan un aprendizaje significativo, como el desarrollo de proyectos contextualizados, el uso de tecnologías inmersivas para visualizar objetos matemáticos, plataformas con actividades interactivas y retroalimentación inmediata, y sistemas de inteligencia artificial adaptados al ritmo y estilo de aprendizaje. Además, destacan metodologías como la gamificación, el aprendizaje

colaborativo en línea, el aula invertida y el enfoque basado en el pensamiento, orientadas a promover la participación activa del estudiantado y la apropiación de los contenidos.

Con base en los hallazgos expuestos en estudios previos, la enseñanza y el aprendizaje del cálculo multivariable presentan retos importantes para favorecer la comprensión de los conceptos por parte del estudiantado. Si bien no se puede generalizar sobre las prácticas docentes en todos los contextos universitarios, las investigaciones revisadas coinciden en que la incorporación de recursos visuales interactivos, el desarrollo del pensamiento espacial mediante tareas cognitivas estructuradas y la coordinación de registros de representación contribuyen significativamente al aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados. Estas condiciones representan una oportunidad para profundizar en el análisis del problema y desarrollar propuestas que respondan a las necesidades del estudiantado desde una perspectiva didáctica y tecnológica.

1.2. Justificación

Los conceptos del cálculo multivariable son fundamentales en la formación del estudiantado de ingeniería, ya que proporcionan herramientas conceptuales necesarias para abordar problemas, interpretar fenómenos y en la construcción de nuevos conocimientos que se le presenten a lo largo del estudio de su carrera. Sin embargo, en comparación con el cálculo diferencial en una variable, las investigaciones que abordan la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos en varias variables siguen siendo reducidas.

Diversos autores coinciden en que la enseñanza del cálculo multivariable suele centrarse en la aplicación de fórmulas y procedimientos algebraicos, lo que dificulta la comprensión de los conceptos por parte del estudiantado y favorece el uso de esquemas mecánicos en la resolución de problemas (Allan et al., 2019; Martínez-Planell y Mcgee, 2015). Este enfoque algorítmico limita el desarrollo del pensamiento geométrico y la construcción de significados, especialmente en nociones como la derivada parcial, cuya comprensión implica analizar el comportamiento de una función respecto a cada una de sus variables, a partir de representaciones geométricas en dos y tres dimensiones.

En este sentido, no basta con centrarse únicamente en los procedimientos algebraicos; es fundamental generar experiencias de aprendizaje que permitan al estudiantado interpretar y construir significados a partir de representaciones visuales asociadas a los conceptos, las cuales resultan indispensables para relacionar estos contenidos con situaciones del mundo real (Esteban et al., 2006). Según Rojas et al. (2019) el uso de un software dinámico como GeoGebra permite al profesorado presentar los contenidos de forma accesible y propicia en el estudiantado una comprensión más profunda de los conceptos implicados.

En esta misma línea, algunos estudios recientes han incorporado el uso de GeoGebra en propuestas orientadas a favorecer la visualización de conceptos del cálculo multivariable. Por ejemplo, Ryokiti-Homa (2019) diseñó objetos tridimensionales de aprendizaje con representaciones estereoscópicas (utilizando gafas 3D) mediante este software, con el propósito de facilitar la interpretación geométrica de funciones multivariadas en un determinado punto. Por su parte, Aguilar-Sánchez et al. (2023) emplearon GeoGebra para el desarrollo de recursos digitales integrados en la plataforma Moodle, que permiten al estudiantado interactuar con objetos matemáticos en entornos virtuales estructurados. Estas experiencias evidencian la efectividad de las aplicaciones tecnológicas desarrolladas a partir de esta herramienta para favorecer la comprensión de nociones complejas y constituyen un referente útil en el diseño de recursos interactivos enfocados en la enseñanza de contenidos matemáticos.

Aunque diversos estudios han demostrado que el uso de tecnologías digitales favorece la visualización de conceptos en el aprendizaje del cálculo multivariable, son escasas las investigaciones que exploran su uso didáctico para reducir los conflictos cognitivos que enfrenta el estudiantado al abordar nociones abstractas. En respuesta a esta problemática, la presente investigación propone el diseño, implementación y evaluación de tres objetos de aprendizaje que integran visualización dinámica mediante applets interactivos desarrollados con GeoGebra, con el propósito de mejorar la comprensión de la derivada parcial desde distintos significados y de apoyar tanto el aprendizaje autónomo del estudiantado de ingeniería como la labor docente, al ofrecer recursos estructurados que faciliten su incorporación en la enseñanza de este concepto.

En respuesta a esta necesidad, la presente investigación propone el diseño, implementación y evaluación de tres objetos de aprendizaje que articulan visualización dinámica mediante applets interactivos de GeoGebra, con el propósito de mejorar la comprensión de la derivada parcial desde distintos significados y apoyar así el aprendizaje del estudiantado de ingeniería.

2. ANTECEDENTES

La enseñanza del cálculo multivariable es esencial en la formación del estudiantado de ingeniería, debido a su aplicabilidad en la resolución de problemas vinculados con fenómenos del mundo real. No obstante, el número de estudios que abordan la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos teóricos de esta asignatura es reducido, siendo más frecuentes las investigaciones centradas en el cálculo de una sola variable (Martínez-Planell y Trigueros Gaisman, 2012; Weber y Thompson, 2014).

En este apartado se presentan investigaciones organizadas en dos grupos según su enfoque: el primero incluye estudios que abordan la enseñanza del cálculo multivariable sin mediación tecnológica, mientras que el segundo reúne aquellos que incorporan herramientas digitales con el objetivo de favorecer la comprensión de los conceptos propios de esta asignatura en el estudiantado. La revisión busca identificar los enfoques didácticos predominantes, las dificultades conceptuales más reportadas y las estrategias implementadas por los docentes, con la finalidad de establecer la pertinencia de la propuesta desarrollada en este estudio

2.1. Investigaciones sin el uso de tecnología

En el contexto de las carreras de ingeniería, la enseñanza del cálculo suele enfocarse en la práctica algorítmica y algebraica, así como en la evaluación de competencias centradas en dicho enfoque. Esta orientación dificulta que el estudiantado otorgue significado a los objetos y procesos matemáticos de la asignatura dentro del ámbito ingenieril. En consecuencia, involucrar al estudiantado en la resolución de situaciones problema contribuye a una mejor comprensión de los contenidos de cálculo en relación con su área de especialidad (Zúñiga, 2007).

Desde esta perspectiva general, varios estudios han abordado las dificultades que enfrenta el estudiantado en la comprensión de funciones multivariadas, especialmente en lo que respecta a su representación y generalización. Por ejemplo, los estudiantes presentan dificultad al generalizar el concepto de función de una variable a la función de dos variables, lo cual impide que la representación gráfica de las funciones multivariadas sea directa. En este sentido, para que el estudiante logre una comprensión amplia sobre este tipo de funciones

es importante que establezca una relación entre los subconjuntos en el espacio tridimensional y las gráficas de dichas funciones (Trigueros y Martínez-Planell, 2010a).

Asimismo, se evidencian obstáculos en la comprensión de los conceptos de dominio, rango y unicidad del valor en funciones multivariantes. Estas dificultades están relacionadas con la tendencia del estudiantado a asociar el concepto de función únicamente con una fórmula algebraica y con dominios no restringidos. En este sentido, resulta necesario proponer actividades que les permitan realizar tratamientos dentro de cada registro de representación y que evidencien cómo las restricciones en el dominio se reflejan en el rango. Además, dichas tareas deben incluir conversiones entre los registros tabular, gráfico y algebraico, con el fin de favorecer una comprensión más completa de este objeto matemático (Martínez-Planell y Trigueros, 2012).

En este mismo sentido, incluir tareas que involucren el razonamiento cuantitativo y covariacional ayudan al estudiante a construir una noción de función multivariable y su tasa de cambio. De esta manera el estudiante podrá generalizar el concepto de función de una variable a dos o más, así como su concepción de tasa de cambio en dos a tres dimensiones, lo cual le permitirá describir sistemas complejos en donde interactúen múltiples variables (Weber, 2010).

Por otra parte, en la transición del cálculo de una variable al cálculo multivariable, el estudiantado tiende a extender la noción de área bajo la curva para interpretar las integrales múltiples. No obstante, esta generalización conduce con frecuencia a interpretaciones erróneas, especialmente al intentar asociar la integral doble con el volumen bajo una superficie. También se observan dificultades al interpretar los diferenciales y al distinguir entre la región de integración y la gráfica de la función. Estas respuestas reflejan que abordar las integrales múltiples exige nuevas formas de representación y sentido geométrico que van más allá del conocimiento previo y requieren una reorganización conceptual más profunda (Jones y Dorko, 2015).

Una revisión de investigaciones realizadas en distintos países permitió identificar dificultades recurrentes en el aprendizaje del cálculo multivariable, entre las cuales se encuentran la complejidad que representa para el estudiantado visualizar objetos matemáticos en tres

dimensiones, interpretar el dominio y el rango de funciones multivariantes, así como comprender el significado geométrico de conceptos como derivadas parciales, derivadas direccionales y diferenciales totales. Dicha revisión resalta que estas dificultades no constituyen una simple continuidad del cálculo en una variable, sino que exigen una reconstrucción conceptual que articule razonamiento espacial y diversas formas de representación de los conceptos. En consecuencia, se sugiere que la enseñanza del cálculo multivariable aborde explícitamente estos elementos desde las etapas iniciales de la formación matemática (Martínez-Planell y Trigueros, 2021) .

En relación con la construcción del concepto de derivada en el espacio tridimensional, diversos estudios señalan que la noción de pendiente es difícil para el estudiantado. En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las derivadas de funciones multivariantes, suele asumirse que los estudiantes pueden extender dicha noción de dos a tres dimensiones sin dificultad. Sin embargo, cuando este concepto se introduce de forma explícita, el estudiantado realiza conversiones y tratamientos dentro de los distintos registros de representación semiótica, lo cual favorece una comprensión más profunda del objeto matemático en cuestión (McGee y Moore-Russo, 2015).

Centrarse en el aspecto geométrico resulta relevante para conocer como comprenden los estudiantes la derivada direccional y su relación con otros conceptos del cálculo diferencial de varias variables. En este sentido, se deben propiciar actividades a través de las cuales los estudiantes puedan coordinar los procesos de cambio de distintos planos en el espacio, tangentes y verticales y les permitan alcanzar una comprensión amplia de la derivada direccional (Martínez-Planell et al., 2015).

La noción de cambio vertical en un plano es fundamental para comprender la derivada direccional como una pendiente, entendida como la razón entre el cambio vertical en el plano tangente y el desplazamiento horizontal en la dirección indicada. Sin esta construcción, el estudiantado presenta dificultades para interpretar geométricamente este concepto y tiende a aplicar fórmulas de manera mecánica. Además, se ha observado que la mayoría tiene problemas para identificar el vector dirección en el espacio tridimensional, lo que dificulta la relación entre la derivada direccional y la gráfica de la función. Asimismo, es común que no consideren el plano tangente como una aproximación local de la función en un punto dado.

Implementar actividades que refuercen la noción de cambio vertical, la ubicación del vector dirección y el significado geométrico del plano tangente favorece una comprensión más profunda de la derivada direccional (Martínez-Planell et al., 2017; Martínez-Planell y Trigueros, 2020).

Comprender la pendiente en el espacio tridimensional ayuda a establecer relaciones entre conceptos fundamentales del cálculo multivariable, como las derivadas parciales, las derivadas direccionales, el plano tangente, la ecuación de un plano y el diferencial total. En un estudio comparativo, se observó que el estudiantado que trabajó con actividades enfocadas en el razonamiento geométrico logró relacionar estos conceptos y usarlos en distintos contextos, mientras que quienes recibieron una enseñanza tradicional se centraron en procedimientos algebraicos sin articular diferentes formas de representación. Estos resultados muestran la importancia de proponer tareas que promuevan la visualización y el significado geométrico de la pendiente para mejorar la comprensión de estas nociones (Martínez-Planell et al., 2022).

El estudio de Martínez-Planell et al. (2024) muestra que enfatizar la pendiente en tres dimensiones y la linealidad local ayuda a los estudiantes a relacionar conceptos fundamentales del cálculo diferencial de funciones de dos variables, como el plano tangente, el diferencial total y la derivada direccional. Los resultados indican que quienes trabajaron con actividades centradas en la interpretación geométrica lograron establecer conexiones entre estos conceptos, mientras que los estudiantes con enseñanza tradicional dependieron más de la memorización de fórmulas sin comprender su significado geométrico. Esto resalta la importancia de enfoques didácticos que favorezcan la representación visual y el razonamiento para mejorar el aprendizaje del cálculo diferencial multivariable.

A su vez, la investigación realizada por Peter- Mkhathshwa (2023) tuvo como propósito analizar el razonamiento cuantitativo y covariacional de estudiantes universitarios al interpretar las derivadas parciales, mediante tareas propuestas tanto en contextos matemáticos como en situaciones del mundo real. Los resultados mostraron un mejor desempeño en las tareas de carácter matemático, en las que se evaluó la aplicación de reglas de diferenciación, como la regla de la cadena y la del cociente. En contraste, al resolver situaciones contextualizadas, el estudiantado presentó mayores dificultades, particularmente

al interpretar el signo y las unidades asociadas a la derivada, así como al reconocer que esta representa una razón de cambio instantánea con respecto a una variable, manteniendo constantes las demás.

Nardín et al. (2017) señalan que una de las formas de reducir los errores que comenten los estudiantes en la resolución de derivadas parciales consiste en la integración de situaciones didácticas matemático-comunicativas, las cuales facilitan el proceso de generalización del concepto de derivada de función de una a dos variables. Así como la interpretación de este tipo de derivadas y su aplicación en diferentes contextos

Se han documentado dificultades en la comprensión del estudiantado sobre la relación entre los planos tangentes y el diferencial total. Trigueros et al. (2018) identificaron que el estudiantado suele aplicar fórmulas de forma mecánica, sin comprender que el diferencial representa una aproximación local del comportamiento de la función mediante su plano tangente. A partir del análisis de entrevistas, se observó que muchos estudiantes no logran interpretar el significado geométrico del diferencial ni establecer conexiones entre sus distintas representaciones. El estudio destaca la necesidad de diseñar tareas que integren lo algebraico y lo gráfico para lograr una comprensión más sólida del concepto.

En este mismo orden de ideas, se identifican dificultades en la comprensión de los conceptos de gradiente y laplaciano en funciones de dos variables, particularmente en la articulación de sus significados a través de diferentes registros de representación. Aunque el contexto disciplinar (matemático o físico) no influyó en el tipo de error, sí afectó las formas de expresión utilizadas. Los resultados destacan la importancia de enseñar estos conceptos mediante tareas que promuevan la integración de representaciones gráficas, simbólicas y lingüísticas, y sugieren que una enseñanza que integre de manera explícita las expresiones matemáticas con sus interpretaciones físicas puede fortalecer la comprensión conceptual de los operadores diferenciales en situaciones contextualizadas (Dehaybes et al., 2025a).

Por otra parte, la comprensión de las derivadas parciales y direccionales de funciones multivariadas por parte del estudiantado universitario fue analizada a través de una serie de tareas que incluían distintos tipos de representaciones gráficas en contextos matemáticos y físicos. En el caso de las derivadas parciales, los estudiantes obtuvieron mejores resultados

al utilizar razonamientos algebraico-simbólicos y al responder sobre gráficos cartesianos. En cambio, al abordar la derivada direccional, se observaron dificultades, especialmente al interpretar la pendiente como una media entre dos puntos, en lugar de una razón de cambio en una dirección específica en un punto dado. Aunque el contexto no influyó significativamente en el desempeño general de los estudiantes, sí condicionó el tipo de representación empleada, con mayor uso de descripciones verbales en los problemas de tipo físico (Dehaybes et al., 2025b).

Además, el análisis de los recursos educativos ha sido otro foco de atención en los estudios sobre la enseñanza del cálculo multivariable. Examinar los libros de texto utilizados en esta asignatura resulta fundamental para comprender cómo se presentan los conceptos y de qué manera influyen en el aprendizaje significativo del estudiantado. En la mayoría de los casos, estos materiales están compuestos por tareas rutinarias y procedimentales, lo que limita la posibilidad de que el estudiantado realice conversiones y tratamientos entre distintos registros de representación. En particular, en el caso de las derivadas de funciones de varias variables, se observa una ausencia de tareas que favorezcan la intuición geométrica, lo cual dificulta el desarrollo de una comprensión conceptual sólida (Vigo y Gonzales, 2017).

En conjunto, los estudios revisados evidencian que las dificultades que presenta el estudiantado en la comprensión de los conceptos del cálculo multivariable no se deben únicamente a su complejidad y nivel de abstracción, sino también a enfoques de enseñanza centrados en la memorización de fórmulas y la mecanización de procedimientos algebraicos. Ante esta situación, las investigaciones analizadas proponen estrategias didácticas orientadas a fomentar la visualización espacial, la articulación entre distintos registros de representación y la aplicación de los conceptos en situaciones contextualizadas.

2.2. Investigaciones con el uso de la tecnología

La visualización ocupa un lugar central en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del cálculo multivariable. La integración de herramientas visuales como la realidad aumentada y la realidad virtual potencia los procesos vinculados con estos conceptos, al vincularlos con el entorno y dotarlos de sentido empírico en la experiencia cotidiana del estudiantado (Duarte et al., 2006).

En el contexto del estudio de funciones multivariables, el diseño de trayectorias de aprendizaje basadas en actividades con calculadoras gráficas permite al estudiantado explorar dichas funciones mediante representaciones gráficas, razonamiento cuantitativo y covariacional. Este enfoque favorece la transición del concepto de gráfica de una función de una variable a funciones de dos o más variables (Weber y Thompson, 2014).

El estudio de la derivada parcial puede enriquecerse mediante la articulación de diferentes formas de aprehensión gráfica, como lo demuestra una experiencia didáctica basada en el uso del *software Mathematica*. Esta herramienta facilitó al estudiantado la formulación de conjeturas, la resolución geométrica de problemas de optimización y la transformación de sus hábitos de trabajo al interactuar con objetos matemáticos en un entorno digital. La propuesta didáctica evidenció que la visualización mediada por la tecnología favorece la apropiación de conceptos fundamentales del cálculo diferencial de dos variables (Vigo y Ferreira, 2019).

En relación con la derivada direccional, diversas investigaciones coinciden en que las principales dificultades están asociadas a su visualización, actividades diseñadas con GeoGebra permiten su conceptualización mediante elementos gráficos, dinámicos, numéricos y textuales (Rojas et al., 2019). Asimismo, el uso de Objetos de Aprendizaje desarrollados en GeoGebra ha facilitado la interpretación geométrica y la comprensión del significado de la derivada direccional en escenarios didácticos específicos (Allan et al., 2019).

En otro estudio reciente, Aguilar et al. (2023) presentan una propuesta didáctica para el desarrollo de recursos digitales en matemáticas, fundamentada en el modelo pedagógico de la Universidad Militar Nueva Granada. Esta propuesta está centrada en la interacción con herramientas virtuales, particularmente GeoGebra, con el propósito de dinamizar las construcciones matemáticas y geométricas. Los objetos de aprendizaje desarrollados para el curso de cálculo multivariable están orientados a fomentar la exploración y la construcción de propiedades de los objetos matemáticos, a través de entornos digitales interactivos que favorecen el aprendizaje autónomo.

Ryokiti (2019) desarrolló objetos de aprendizaje tridimensionales con GeoGebra para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en el estudio de funciones multivariadas. Estos recursos se implementaron con estudiantes de ingeniería de la Universidad Luterana de Brasil (ULBRA), utilizando visualización estereoscópica mediante gafas 3D. Los resultados indicaron que la interacción con representaciones tridimensionales favoreció la comprensión de conceptos como derivadas direccionales, curvas de nivel y puntos críticos. Además, se reportó una mejora en la interpretación gráfica de las funciones y en la capacidad de análisis y abstracción por parte del estudiantado. El estudio destaca el potencial de los recursos digitales tridimensionales para fortalecer la intuición matemática y vincular la teoría con su representación gráfica.

Como recurso didáctico en un curso de integración múltiple, GeoGebra en sus versiones 2D y 3D fue implementado para representar regiones, manipular superficies y visualizar sólidos con mayor precisión. Esta herramienta se utilizó tanto en actividades de clase como en evaluaciones, facilitando el planteamiento correcto de integrales, la interpretación gráfica de los límites y el desarrollo del razonamiento matemático. Se evidenció una mejora en la motivación, la seguridad al resolver ejercicios y la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo multivariable (Ramírez-Santamaría, 2021).

El entorno de realidad virtual diseñado para manipular superficies y planos tangentes en 3D mediante el visor *Oculus Rift*, que permite la interacción inmersiva en entornos tridimensionales simulados, facilitó la comprensión de las derivadas parciales en funciones de dos variables. En esta experiencia sin intervención docente, estudiantes de ingeniería lograron mejoras significativas en la identificación del signo de dichas derivadas, especialmente quienes presentaban bajo rendimiento inicial. Aunque no se observaron diferencias en tareas más complejas, se destaca el potencial de esta tecnología para mejorar la visualización espacial y proporcionar retroalimentación inmediata (Cheong et al., 2023).

En un contexto de realidad aumentada, la calculadora GeoGebra 3D demostró ser una herramienta eficaz para facilitar la visualización de funciones de dos variables, especialmente en la interpretación geométrica de objetos tridimensionales. En comparación con el uso de presentaciones tradicionales en PowerPoint, el estudiantado percibió una mayor usabilidad al interactuar con modelos gráficos generados digitalmente. Aunque no se identificaron

diferencias significativas en la actitud o el compromiso, se resalta el valor didáctico de esta tecnología para enriquecer la experiencia de aprendizaje en entornos más accesibles y dinámicos (Cheong et al., 2024).

El rediseño de actividades previamente desarrolladas en investigaciones anteriores hacia un entorno de geometría dinámica en GeoGebra 3D permitió que algunos estudiantes construyeran significados geométricos sobre funciones de dos variables, al interpretar gráficamente la fijación de variables, reconocer intersecciones con planos fundamentales y utilizar secciones transversales como estrategia de análisis. No obstante, en varios casos, el software fue usado como simple sustituto, sin promover una reflexión profunda, lo que limitó la comprensión de los conceptos involucrados. Esto evidencia que el potencial del entorno digital depende del diseño didáctico y de las condiciones institucionales en las que se implementa (Orozco-Santiago et al., 2024).

Plataformas digitales como AVRAM (*Remote Virtual Environments for the Learning of Mathematics*) y ARC (*Augmented Reality in Calculus*) también fueron implementadas en clases de cálculo multivariable. Estas herramientas facilitaron la visualización de funciones en 3D, la identificación de regiones de integración y el abordaje de contenidos como superficies cuádricas e integrales múltiples, con resultados positivos tanto en el rendimiento académico como en la percepción del estudiantado respecto a su utilidad para comprender aspectos geométricos complejos (Medina -Herrera et al., 2019).

El aprendizaje colaborativo asistido por computadora, también conocido como *Computer-Supported Collaborative Learning* (CSCL), permitió organizar al estudiantado en pequeños grupos que trabajaron mediante plataformas digitales y GeoGebra para resolver tareas relacionadas con integrales dobles, triples y cambio de coordenadas. Esta estrategia favoreció la identificación de límites de integración y la representación gráfica de regiones en el espacio, reflejándose en un mejor desempeño respecto al aprendizaje individual en línea. Los resultados fueron comparables a los obtenidos en clases presenciales, lo que confirma el aporte didáctico de la colaboración estructurada en entornos virtuales (Milenković y Vučićević, 2024).

En el marco del aprendizaje invertido, la incorporación de quizzes diarios de baja ponderación contribuyó a mejorar la preparación constante del estudiantado y su rendimiento en cálculo multivariable. En particular, el estudiantado que realizó estas evaluaciones al inicio de cada clase desarrolló mejores hábitos de estudio, mostró una mejoría en sus calificaciones y una disminución en la tasa de reprobación, en comparación con quienes no utilizaron esta estrategia. Asimismo, se identificaron correlaciones positivas entre la percepción del curso, el esfuerzo dedicado fuera del aula y los resultados obtenidos en los exámenes (Johnson et al., 2023).

Con el propósito de fomentar el pensamiento crítico, ChatGPT 3.5 fue utilizado como generador de problemas y soluciones sobre derivadas parciales de funciones multivariables. Aunque la herramienta presentó altos índices de error, sobre todo en derivadas de segundo orden, el estudiantado fue capaz de identificar y corregir los procedimientos incorrectos, mostrando así una comprensión sólida de los conceptos abordados. Esta experiencia resalta el valor de un uso guiado de la inteligencia artificial como apoyo al aprendizaje, promoviendo una actitud crítica hacia los resultados generados por estos sistemas (Bakó, 2024).

La integración de herramientas de inteligencia artificial generativa como ChatGPT, Wolfram Alpha y GeoGebra, junto con guías orientadas al diseño de prompts efectivos, permitió rediseñar la dinámica de aula en el curso de cálculo multivariable. Se observó una mayor apropiación de los conceptos, incremento en la participación individual y una percepción más positiva respecto al curso en comparación con el enfoque tradicional. No obstante, persistieron dudas sobre la confiabilidad de las respuestas generadas por la IA, lo que subraya la necesidad de promover una alfabetización en inteligencia artificial en docentes y estudiantes para orientar su uso con sentido crítico (Bonilla et al., 2024).

En síntesis, las investigaciones analizadas coinciden en que muchas de las dificultades que enfrenta el estudiantado en el aprendizaje del cálculo multivariable están relacionadas con la visualización y la interpretación geométrica de los conceptos. En este sentido, el uso de tecnologías interactivas, como programas matemáticos dinámicos, entornos virtuales, realidad aumentada y virtual, y herramientas de inteligencia artificial, favorece la comprensión de los conceptos y fortalece los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta asignatura.

Desde esta perspectiva, se propone el diseño de objetos de aprendizaje con ayuda de la plataforma eXelearning que incluyan applets interactivos desarrollados con el software GeoGebra. Estos materiales ofrecerán al estudiantado la oportunidad de explorar los conceptos del cálculo multivariable, específicamente de la derivada parcial mediante representaciones dinámicas, con el propósito de superar las dificultades que suelen presentarse en modelos tradicionales de enseñanza. Así, se pretende propiciar un aprendizaje significativo, autónomo y contextualizado.

3. MARCO TEÓRICO

En este apartado se exponen las nociones teóricas que sustentan esta investigación, las cuales se pueden observar en la Figura 1. En primer lugar, se presenta el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS), centrado en estudiar los significados de un objeto matemático desde una perspectiva personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

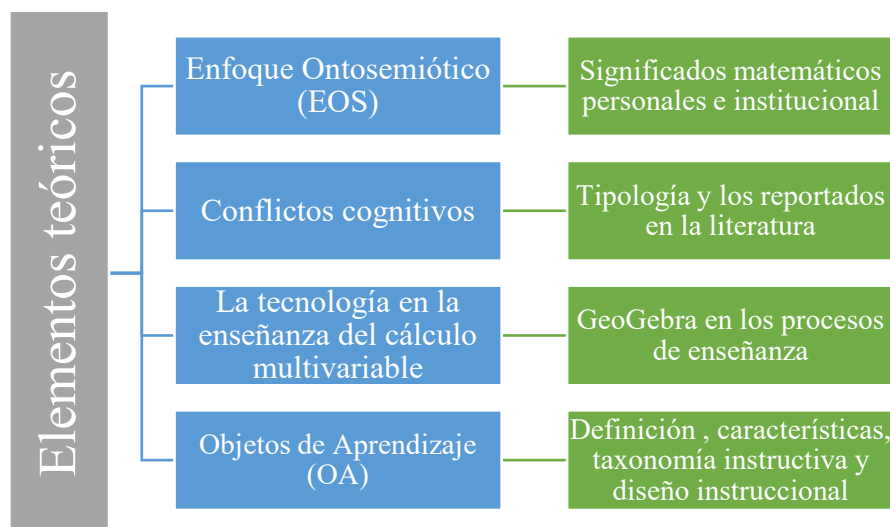
La segunda noción hace referencia a los conflictos cognitivos de los estudiantes en la enseñanza de esta rama del cálculo. Conocer estas dificultades y su tipología permite al docente diseñar estrategias de aprendizaje que ayuden a minimizar este tipo de conflictos en los educandos.

En tercer lugar, se expone la integración de la tecnología en los procesos de enseñanza de esta asignatura. En particular, se hace énfasis en cómo los recursos tecnológicos facilitan la presentación de los conceptos desde distintas perspectivas, junto con elementos dinámicos que posibilitan su manipulación y exploración.

Finalmente, se introduce la noción de los Objetos de Aprendizaje (OA), reconociéndolos como recursos educativos reutilizables que favorecen la flexibilidad y efectividad en el diseño instruccional. Este marco teórico proporciona una base sólida para la investigación, integrando enfoques teóricos y prácticos que contribuyen al desarrollo de estrategias efectivas en la enseñanza del cálculo multivariable.

Figura 1

Nociones teóricas que fundamentan la investigación



3.1. Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemático

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un sistema teórico modular, amplio e inclusivo que permite estudiar los problemas implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde distintos puntos de vista, epistemológico, ontológico, semiótico-cognitivo y educativo (Godino, 2022).

A continuación, se sintetizan las cinco nociones que conforman actualmente este enfoque teórico de la cognición matemática (Godino, 2012, 2024):

- Sistema de prácticas. Se entiende como el conjunto de acciones desarrolladas por una comunidad (institucional) o por una persona (personal) en la actividad matemática. Estas se agrupan en tres tipos: operativas, vinculadas con la resolución de problemas; discursivas, asociadas a la comunicación y validación de soluciones; y normativas, relacionadas con la formulación y aplicación de reglas, definiciones o criterios. Desde esta perspectiva, la resolución de problemas es el eje central en la construcción del conocimiento matemático.
- Configuración ontosemiótica. El conocimiento matemático se describe a través de los objetos y procesos que emergen e intervienen en las prácticas matemáticas

desarrolladas ante una determinada situación-problema. El EOS define seis objetos primarios: el lenguaje (términos, expresiones, gráficos, etc.); los conceptos (mediante definiciones o descripciones); las proposiciones (enunciados sobre conceptos); los procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas, etc.); las situaciones (problemas, tareas, ejercicios, etc.); y los argumentos (que validan proposiciones y procedimientos). La articulación entre estos objetos conforma redes que se denominan configuraciones ontosemióticas, las cuales pueden ser epistémicas si corresponden a redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes construidas a nivel personal.

La identificación de los objetos y procesos involucrados en una práctica matemática facilita la anticipación de posibles dificultades en el aprendizaje, la valoración de las competencias matemáticas del estudiantado y la determinación de los elementos que conviene retomar y validar como conocimientos formales en los momentos adecuados del proceso de estudio.

- Configuración didáctica. Se refiere a un tramo de actividad matemática y didáctica que se desarrolla desde el inicio hasta la conclusión de una tarea o situación-problema. En dicho tramo se integran tanto las acciones del profesorado como las del estudiantado, junto con los recursos utilizados, entre los que se incluyen materiales, conocimientos previos y herramientas epistémicas y cognitivas implicadas en el abordaje de la actividad. La duración de estas tareas puede variar desde unos minutos hasta periodos más extensos, como ocurre en los proyectos, lo cual permite distinguir configuraciones didácticas de tipo micro, meso o macro.
- Dimensión normativa. Se refiere a los elementos que regulan la actividad educativa, ya sea de forma explícita, como ocurre con las disposiciones curriculares oficiales, o de manera implícita, a través de normas, costumbres, hábitos y formas de interacción entre docentes y estudiantes.
- Idoneidad didáctica. Se concibe como un criterio general para valorar en qué medida un proceso de instrucción resulta adecuado para favorecer la correspondencia entre los significados que el estudiantado construye y aquellos que la institución busca promover, considerando el contexto y los recursos disponibles. Los indicadores empíricos definidos para cada faceta del modelo

actúan como herramientas de análisis y reflexión sistemática, aportando referentes para orientar y mejorar progresivamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo se abordan tres dimensiones teóricas del EOS. Primero, la noción de sistemas de prácticas, en la que se enfatizan las prácticas institucionales y personales. En segundo lugar, se señalan los conflictos cognitivos y semióticos, los cuales están inmersos en la dimensión de configuración de objetos y procesos matemáticos. Por último, se mencionan los criterios de idoneidad didáctica que se consideran en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático

Para tener una perspectiva más amplia de las nociones teóricas referidas anteriormente, el EOS define los siguientes términos:

Práctica matemática: es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994).

Objeto matemático: es cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático. El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (D'Amore y Godino, 2007).

Institución: se refiere a un grupo de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento (Godino et al., 2007).

Conocimiento y comprensión: los posicionamientos pragmáticos del EOS, entienden la comprensión básicamente como competencia y no tanto como un proceso mental; se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas (Godino et al., 2007).

3.1.1. Prácticas matemáticas institucionales y personales

Las prácticas en matemáticas asociadas a la resolución de ciertos tipos de situaciones pueden ser idiosincráticas, es decir, propias de una persona, o bien compartidas dentro del contexto de una institución. De este sistema de prácticas emergen tanto significados personales como institucionales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994).

El EOS establece una tipología de significados personales e institucionales (Godino et al., 2007), tal como se puede observar en la Figura 2.

Figura 2

Tipología de significados institucionales y personales



Nota: Adaptado de Godino et al. (2007).

Con relación a los significados personales se proponen los siguientes tipos:

Global: hace referencia al conjunto de prácticas personales que un individuo es capaz de desarrollar potencialmente, concernientes a un objeto matemático.

Declarado: se refiere a las prácticas que el sujeto manifiesta de forma explícita al responder a las pruebas de evaluación, abarcando tanto aquellas consideradas correctas como las que no lo son según el enfoque institucional.

Logrado: corresponde a las prácticas que el estudiantado manifiesta y que están alineadas con los criterios institucionales. En el análisis de los cambios que se producen en un proceso de estudio, es fundamental considerar los significados previos del estudiantado y los que llegan a construir al finalizar dicho proceso.

De acuerdo con los significados institucionales, los propuestos son:

Referencial: conjunto de prácticas que se consideran representativas y orientan la construcción del significado que se pretende lograr. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado del objeto matemático (Wilhelmi et al., 2007). Establecer el significado global como referencia requiere un análisis histórico y epistemológico que permita comprender el origen y desarrollo del objeto en cuestión, además de tomar en cuenta la diversidad de contextos en los que dicho objeto se aplica.

Pretendido: hace alusión al sistema de práctica consideradas en la planificación del proceso de enseñanza.

Implementado: conjunto de prácticas que el docente realiza de forma efectiva durante un determinado proceso de estudio.

Evaluable: se refiere a el subsistema de prácticas realizadas por el profesorado para valorar los aprendizajes alcanzados por el estudiantado.

En el contexto de esta investigación, los objetos matemáticos considerados son los conceptos del cálculo multivariable. Con respecto a los significados personales, se analiza la percepción global que tiene el estudiantado sobre los conceptos en cuestión, la cual se relaciona con los conocimientos previos que utiliza en la resolución de situaciones problema. En este aspecto, se identifican los conflictos semióticos y cognitivos que presentan los educandos respecto a las nociones conceptuales que conforman esta rama del cálculo.

3.1.2. Conflictos semióticos y cognitivos

La noción de conflicto semiótico puede ampliarse para referirse a cualquier discrepancia o contradicción entre los significados que dos sujetos, sean personas o instituciones, asignan a una misma expresión en el contexto de una interacción comunicativa. Cuando esta discrepancia se produce entre significados institucionales, se trata de un conflicto semiótico epistémico; si ocurre entre prácticas que conforman el significado personal de un mismo individuo, se considera un conflicto semiótico cognitivo. Por otro lado, cuando la diferencia emerge entre las prácticas discursivas y operativas de dos sujetos distintos que interactúan, como en el caso de un estudiante y un docente o entre estudiantes, se denomina conflicto semiótico interaccional (Godino et al., 2009).

Según la tipología de conflictos semióticos expuesta anteriormente, un sujeto experimenta un conflicto cognitivo cuando no encuentra concordancia entre dos prácticas matemáticas que implican el significado de un determinado objeto matemático. También un conflicto cognitivo se define como un estado de desequilibrio que surge cuando los conocimientos previos que tiene un estudiante entran en conflicto con las concepciones nuevas, o bien con el ambiente externo (Aguilar y Oktac, 2004).

En este trabajo se estudian los conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable. Inicialmente se identifica qué conceptos del cálculo diferencial e integral se les hace difícil a los estudiantes trasladar al estudio del cálculo de varias variables. Luego, se establece una tipología de estos conflictos que permite comprender a qué procesos mentales están asociados. Esto con la finalidad de proponer estrategias de aprendizaje mediadas por el uso de la tecnología que influyen en la reducción de estos conflictos.

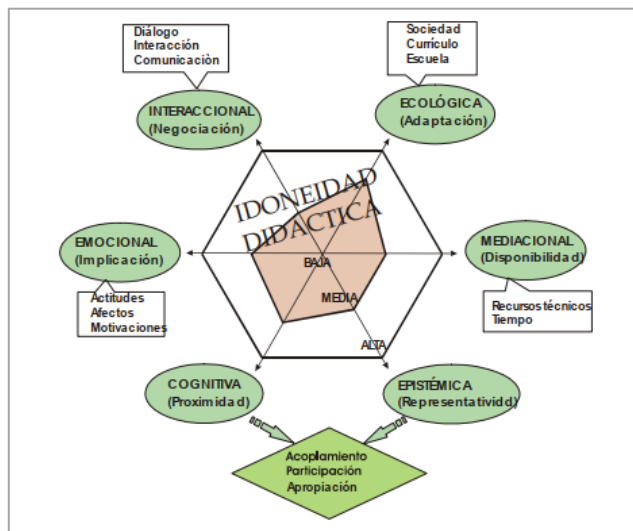
3.1.3. Criterios de idoneidad didáctica

Dentro del Enfoque Ontosemiótico, la idoneidad didáctica se concibe como un criterio sistémico que permite valorar en qué medida un proceso de instrucción resulta pertinente o adecuado en relación con el proyecto educativo. Su principal indicador empírico es el nivel de correspondencia entre los significados personales construidos por el estudiantado (aprendizaje) y los significados institucionales que se buscan promover o que han sido

implementados (enseñanza), todo ello en función de las condiciones específicas del entorno en el que se lleva a cabo dicho proceso. Esto implica la articulación coherente y armónica de las seis componentes siguientes (Godino et al., 2007), tal como se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Componentes de la idoneidad didáctica



Nota. Adaptado de Godino et al. (2007).

Idoneidad epistémica: corresponde al grado en que los significados institucionales, propuestos o implementados, representan adecuadamente el significado de referencia del objeto matemático.

Idoneidad cognitiva: indica el grado en que los significados pretendidos o implementados se sitúan dentro de la zona de desarrollo potencial del estudiantado, así como la proximidad entre los significados que logra construir y los que se espera que aprenda.

Idoneidad interaccional: hace referencia al grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en el aula favorecen la anticipación, detección y resolución de conflictos semióticos a lo largo del proceso de instrucción.

Idoneidad mediacional: se refiere a la pertinencia y disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de forma efectiva.

Idoneidad afectiva: expresa el nivel de compromiso, motivación e interés que muestra el estudiantado durante el proceso de instrucción, considerando tanto factores institucionales como aspectos personales vinculados a su experiencia educativa previa.

Idoneidad ecológica: alude al grado en que el proceso de estudio se articula con el proyecto educativo institucional, los fines de la escuela y las demandas sociales, respetando las condiciones del entorno en el que se desarrolla la práctica educativa.

En el presente trabajo se integran las facetas de la idoneidad didáctica en el diseño de los objetos de aprendizaje. La dimensión epistémica garantiza que los contenidos sean precisos y representativos de los objetivos de aprendizaje de la asignatura de cálculo multivariable. La idoneidad cognitiva se centra en evaluar la alineación de los contenidos con los conocimientos previos del estudiantado antes de la instrucción, así como la cercanía de los aprendizajes logrados con los objetivos pretendidos después del proceso.

La faceta interaccional se enfoca en facilitar la interacción entre estudiantes, investigador y materiales, identificando y abordando los conflictos semióticos o cognitivos que surgen. Las facetas mediacional y afectiva evalúan cómo los OA contribuyen a reducir los conflictos cognitivos y analizan también las actitudes y emociones del estudiantado respecto al uso de estos recursos tecnológicos. Finalmente, la dimensión ecológica asegura que el proceso de instrucción con los OA sea pertinente a las necesidades del estudiantado y se ajuste a las directrices curriculares.

3.2. Los conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable

Durante el aprendizaje de las matemáticas, el conflicto cognitivo se produce cuando los estudiantes no pueden aplicar sus conceptos previos para resolver un problema matemático. En este aspecto, la idea preconcebida que tienen sobre cómo solucionar el problema difiere de la forma correcta de resolverlo (Okach et al., 2020). Esta situación conlleva al aprendizaje

de nuevos conceptos, lo cual propicia la adquisición y modificación de estructuras cognitivas en los estudiantes (Chow y Treagust, 2013).

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, los conflictos cognitivos experimentados por los estudiantes en el estudio del cálculo multivariable se encuentran relacionados con la dificultad que estos tienen de trasladar los conceptos previos del cálculo de funciones de una sola variable al de dos o más. En la sección siguiente se presenta una revisión de la literatura sobre estos conflictos, seguida de la descripción de una tipología de estos.

3.2.1. Análisis de la literatura sobre los conflictos

Uno de los conflictos cognitivos que surge en el aprendizaje del cálculo está asociado al hecho de que las ideas intuitivas de la mayoría de los estudiantes sobre la noción de límite no se vinculan con la definición formal de este concepto (Kidron, 2014). En el contexto del cálculo multivariable, la mayoría de los estudiantes utilizan modelos dinámicos en vez de los topográficos para calcular los límites. Una débil comprensión topográfica de los límites multivariados contribuye a que los estudiantes se les dificulte entender el modelo de vecindad, el cual es necesario para entender la definición formal (Fisher, 2008).

Por otro lado, los estudiantes presentan dificultad en localizar curvas en sus correspondientes planos fundamentales en el espacio tridimensional, debido a que en la mayoría de los casos no visualizan el espacio físico donde viven y se mueven, como un sistema de coordenadas 3D. Además, se les hace difícil realizar tratamientos y conversiones entre los distintos registros de representación de objetos matemáticos en el espacio, lo que evidencia una falta de coordinación entre su esquema de R^3 y el de funciones y conjuntos de una sola variable (Trigueros y Martínez-Planell, 2010).

La enseñanza de las integrales de una variable centrada en la noción del “área bajo la curva” y no en la de “sumas de Riemann”, genera problemas en los alumnos en la conceptualización de las integrales múltiples, ya que las aplicaciones de la integración a otras disciplinas con frecuencia requieren imaginar el significado contextual de los términos de una suma de Riemann. En general, las dificultades de las integrales multivariadas provienen de la necesidad de reconstruir las ideas previas de una sola variable (Jones y Dorko, 2015).

La generalización por parte de los estudiantes de las nociones de dominio y rango desde el contexto de una función de una variable hasta el de dos, evidencia un conflicto cognitivo, puesto que estos consideran que el dominio de una función de dos variables está conformado por ternas ordenadas y no por el conjunto de todos los puntos del plano para los cuales $f(x, y)$ es un número real bien definido (Uygur- Kabael, 2011). Asimismo, Martínez -Planell y Trigueros, (2012) realizaron un estudio similar, en el que evidenciaron que los estudiantes presentan dificultades para representar gráficamente funciones con dominio restringido a un subconjunto del plano xy , así como para identificar el rango considerando dicha condición.

Por otra parte, el concepto de pendiente en el espacio es difícil para los estudiantes, pues, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las derivadas de funciones multivariantes se asume que los estudiantes pueden extender la noción de pendiente en dos a tres dimensiones. Si se presenta dicho concepto de una forma explícita, estos no tendrán inconveniente para realizar conversiones y tratamientos dentro de los diferentes registros de representación semiótica de la derivada de funciones de varias variables, y de esta forma tendrán una comprensión de este concepto matemático (McGee y Moore-Russo, 2015).

El análisis de los libros de texto utilizados en la enseñanza del cálculo multivariable es fundamental para conocer como son presentados los conceptos y de qué forma estos influyen en el aprendizaje significativo del estudiante. En la mayoría de las ocasiones los libros de texto están integrados por tareas rutinarias y procedimentales que impiden que el estudiante realice conversiones y tratamientos dentro de los distintos registros de representación de los conceptos. En el caso de las derivadas de funciones de varias variables hay ausencia de tareas que privilegien la intuición geométrica, lo cual dificulta la comprensión conceptual (Vigo y Gonzales, 2017).

El concepto de derivada direccional es difícil para la mayoría de los estudiantes, ya que no tienen una concepción geométrica sólida de la noción de pendiente de una recta en dos dimensiones basada en los procesos variacionales, lo cual les dificulta la comprensión de los conceptos de pendiente en el espacio, vector de posición y dirección, necesarios para lograr una conceptualización de la derivada direccional (Rojas et al., 2019).

Los estudios presentados evidencian que la comprensión de los estudiantes sobre el cálculo de una variable está presente e influye en la forma como los estudiantes conciben el cálculo multivariable. Ante esto, es necesario que los docentes al introducir conceptos del cálculo multivariable señalen las diferencias que tienen con los del cálculo de una variable y las contrasten con sus similitudes, lo cual ayudaría la reducción de los conflictos cognitivos.

3.2.2. Tipos de conflictos

Existen tres categorías de conflictos cognitivos (Sigel, 1979):

1.Existen discrepancias entre dos eventos internos (es decir, conflicto intrapersonal). Por ejemplo, cuando se le pregunta a un niño: “¿podrás decirme cuál es el mejor camino para llegar a tu casa? y existen dos rutas para llegar ella. Entonces, el niño entra en conflicto con respecto a que camino presentar.

2.Pueden producirse discrepancias entre un evento interno y otro externo. Por ejemplo, en un experimento de conservación con dos bolas de arcilla en el que una de ellas está deformada, el niño sostiene que la bola deformada tiene más arcilla que la otra. Incluso cuando se le dice que no se ha añadido ni quitado nada, el niño no cree que tenga la misma cantidad de arcilla.

3. Las discrepancias pueden producirse cuando ambos eventos son externos, por ejemplo, se le muestra al niño agua clara y un conjunto de polvos de colores. Se le pide que prediga qué ocurriría si se mezclaran dos de los colores (rojo y azul) y se introdujeran en el agua. Después de que los colores se mezclen, se plantea otra pregunta: "¿Por qué crees que el agua se tiñe de morado y no de rojo o azul?". La discrepancia en este caso surge en el contexto de la acción y es externa al niño.

Conforme a lo expuesto anteriormente, esta investigación se centra en estudiar los conflictos que ocurren entre un evento interno y externo, así como los conflictos intrapersonales. Con relación a los primeros, se analiza si el estudiantado puede advertir que un concepto matemático es el mismo cuando se presenta desde diferentes registros de representación semiótica (verbal, gráfico, figural, algebraico...), y, lo más importante, si es capaz de realizar conversiones entre dichos registros, lo cual evidencia una comprensión amplia del concepto.

En lo que respecta a los conflictos intrapersonales, se considera si, entre las distintas formas existentes para resolver un problema matemático, el estudiantado elige la más adecuada.

3.3. La tecnología educativa en la enseñanza del cálculo multivariable

La integración de la tecnología en el aula ha cambiado la forma en cómo se realizan los procesos de enseñanza-aprendizaje, puesto que genera ambientes dinámicos e interactivos, que permiten a los estudiantes la construcción de los conceptos. En este caso nos centraremos en el papel que juega la tecnología en la enseñanza del cálculo en forma general, así como la función del software GeoGebra en la educación matemática mediante la reducción de los conflictos cognitivos.

3.3.1. La integración de la tecnología en la enseñanza del cálculo

El uso del programa matemático Wólfram Alpha en la enseñanza del cálculo multivariable refleja cambios positivos en el estudiante debido a que le permite explicar con sus propias palabras la solución paso a paso de un determinado problema, lo cual evidencia un aprendizaje significativo en el educando (Hernández et al., 2015). Asimismo, la integración de un programa educativo de geometría tridimensional logra avances en los estudiantes en el aprendizaje de superficies cuádricas, pues estos, motivados por el uso de la computadora, resuelven problemas en menos tiempo (Hoyos et al., 2021).

La incorporación de las TIC en los cursos de cálculo integral, a través del uso de programas especializados, desarrolla en el estudiante la capacidad de usar, visualizar, crear, simular y manipular modelos matemáticos, así como enfocarse en la aplicación de los conceptos del curso en situaciones contextualizadas (Molina- Mora, 2017). De igual forma, el programa GeoGebra tiene un impacto positivo en los estudiantes sobre el aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones, al brindarles la oportunidad de realizar conexiones entre las representaciones gráficas y algebraicas de este concepto (Ocal, 2017). GeoGebra mejora la interpretación y la articulación entre los distintos registros de representación del concepto de función lineal y afín, acercando a los educandos a un aprendizaje significativo (Acevedo et al., 2020).

Por otra parte, la visualización gráfica que ofrece el programa Desmos facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos presentes en definiciones y teoremas sobre la derivada (Scremin et al., 2018). De igual forma, el uso de un programa como *Autograph* simplifica la solución de problemas del cálculo a través del dibujo y visualización de gráficos (Tarmizi et al., 2010). En los procesos de la didáctica del cálculo diferencial, el uso de Microsoft Mathematics mejora la comprensión conceptual, la habilidad procedimental y la actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje de la asignatura, así como potencializar la visualización de los conceptos (Mendezabal y Tindowen, 2018; Williner et al., 2014).

El uso de tecnología digital como graficadores en la enseñanza del límite, la derivada y otros conceptos, propicia un pensamiento activo en los estudiantes a través del cual generan reflexiones sobre estos objetos matemáticos, en lugar de centrarse solo en los cálculos algebraicos y pragmáticos (Hong y Thomas, 2015). En el estudio del precálculo, las calculadoras gráficas facilitan la comprensión de las concepciones, pues el estudiante puede resolver las tareas mediante las representaciones algebraica, gráfica y tabular (Nzuki, 2016).

Es conveniente mencionar que, para que las calculadoras gráficas tengan un efecto positivo en la enseñanza del cálculo, se debe tener en cuenta el estilo de pensamiento de los estudiantes: los tradicionales y analíticos prefieren mantenerse distantes del uso de la tecnología CAS (Sistema Algebraico Computacional), por creencias epistemológicas relacionadas con la naturaleza abstracta del cálculo; mientras que los visuales aprovechan los elementos gráficos que este tipo de herramienta tecnológica les ofrecen para la solución de problemas (Sevimli, 2016).

Los entornos virtuales de aprendizaje aportan significativamente a la enseñanza del cálculo si se integran adecuadamente tres elementos: contenido, pedagogía y tecnología. En este sentido, no solo se debe priorizar el contenido matemático, sino también el aspecto pedagógico que está relacionado con momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes (inicio, desarrollo, evaluación y retroalimentación), los cuales en consideración con teorías psicopedagógicas permiten el tratamiento de dicho contenido, al igual que la incorporación de la tecnología a través del progreso de diferentes habilidades en el estudiante (Ruiz, 2019).

En este mismo orden de ideas, el diseño de plataformas educativas para la enseñanza de contenidos del cálculo a través de unidades de aprendizaje tiene un efecto positivo en el rendimiento académico de los estudiantes, ya que proporciona un grado mayor de interacción docente-estudiante y estudiante-estudiante, fomenta la participación activa del estudiantado con relación a la temática integrada y, además, influye en los aspectos motivacionales asociados a distintos procesos cognitivos que son significativos en el aprendizaje de las matemáticas (Andrade-Aréchiga et al., 2012).

Los podcasts de video son otras de las herramientas tecnológicas que resulta útil para los estudiantes en el aprendizaje de conceptos del precálculo, debido a que son fáciles de usar y les proporcionan una visualización dinámica de los problemas y una explicación paso a paso de estos (Kay y Kletskin, 2012). Dentro de este marco también figuran los blogs educativos, los cuales – a través de tutoriales- ayudan a los estudiantes a utilizar representaciones gráficas como mapas conceptuales y redes semánticas que les permiten relacionar contenidos, conjeturar, modelar y formar los conceptos matemáticos (Delgado y Medina, 2019).

La mayoría de los estudiantes tiene acceso a un celular, lo cual facilita la integración de aplicaciones móviles en su proceso de aprendizaje. La realidad aumentada figura en este tipo de aplicaciones, y en el cálculo diferencial ayuda al estudiante a visualizar situaciones en las que se involucra el concepto de la derivada como es el caso de la razón de cambio instantánea. En este aspecto, el educando tiene la oportunidad de mejorar competencias asociadas a la visualización de fenómenos, la reflexión y la resolución de problemas (Ruiz -Ledesma et al., 2018).

Asimismo, el uso de los applets en la enseñanza del cálculo permite la comprensión de los conceptos desde el registro gráfico, superando la visión algorítmica y analítica, a la vez proporciona un ambiente favorable para que el estudiante desarrolle y relacione ideas respecto a dichos conceptos (Aranda y Callejo, 2017).

Por otra parte, los videos, al ser integrados a la metodología de aula invertida en la enseñanza del concepto de la derivada, promueven ambientes de trabajo grupal significativo, donde los estudiantes contrarrestan sus ideas y procedimientos para unificar criterios y superar dificultades respecto al objeto matemático en cuestión. Por el contrario, si este tipo de

herramienta tecnológica es utilizada con la finalidad de elaborar una clase en la cual se le brinda una información al estudiante, entonces no hay evidencia del carácter pedagógico que debe asumir (Fúneme, 2019).

3.3.2. El software GeoGebra como mediador en los procesos de enseñanza-aprendizaje

GeoGebra es un software matemático dinámico, de libre acceso y adaptable a todos los niveles educativos. Se caracteriza por integrar elementos de aritmética, geometría, álgebra, análisis, cálculo, probabilidad y estadística. Es un programa intuitivo y fácil de usar con poderosas herramientas que le permiten al profesorado la creación de materiales didácticos como páginas web o applets, por lo que se convierte en una herramienta de autor (Williner et al., 2020).

Este software se considera la mejor opción para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en el siglo XXI, puesto que le facilita al educando la visualización y exploración de los conceptos matemáticos. A diferencia de los modelos tradicionales, este programa propicia el aprendizaje significativo en los estudiantes mediante la interacción con los conceptos de manera individual o grupal dentro del aula o fuera de ella (Bekene, 2020).

Nobre et al. (2016) argumentan que GeoGebra proporciona un entorno innovador donde los estudiantes construyen su propio conocimiento mediante la visualización y experimentación de objetos matemáticos, facilitando la interpretación gráfica de conceptos. Además, sugieren que GeoGebra puede ser una herramienta motivacional y de apoyo en la enseñanza si se utiliza para diseñar actividades que integren teoría y práctica. Esto, a su vez, incrementa el interés de los estudiantes al relacionar los contenidos de estudio con su vida cotidiana y su futura especialización.

La incorporación de GeoGebra en los procesos de enseñanza del cálculo implica el reconocimiento de las ideas previas y estructuras cognitivas de los estudiantes y una orientación pertinente para que se realice la acomodación de la nueva información con la mediación de este recurso tecnológico. En este caso, se genera un conflicto cognitivo en los educandos a través del uso del software, pero al mismo tiempo se propicia una resolución a

través de preguntas que generen en ellos una reflexión sobre los conceptos tratados (Tamayo, 2013).

Los conflictos cognitivos que experimentan los estudiantes con respecto al concepto de la derivada direccional tienen que ver con la transición de la noción de pendiente de una recta en dos a tres dimensiones, así como con la interpretación geométrica de este objeto matemático. Frente a esta situación, el software GeoGebra permite a los alumnos la conceptualización de la derivada direccional a través de los elementos gráficos, dinámicos, numéricos y textuales que posee (Allan et al., 2019; Rojas et al., 2019).

3.4. Objetos de aprendizaje

La integración de tecnologías en la educación ha revolucionado los métodos de enseñanza y aprendizaje. Hoy en día, el acceso a la información a través de internet ha redefinido la manera en cómo los estudiantes utilizan diversos recursos formativos, permitiéndoles seleccionar modalidades de enseñanza adaptadas a sus intereses. Esta flexibilidad no solo amplía las opciones disponibles, sino que también fomenta un aprendizaje más personalizado y enriquecedor.

En este contexto, los Objetos de Aprendizaje (OA) son unidades digitales diseñadas para facilitar y enriquecer el proceso educativo mediante la integración de contenido interactivo y multimedia. Estos objetos ofrecen varias ventajas, como la adaptabilidad a diferentes estilos de aprendizaje y la posibilidad de acceso desde cualquier lugar y en cualquier momento, contribuyendo así a la creación de entornos educativos más dinámicos y accesibles (Diez-Martínez y Morales-Velasco, 2020).

El término "objeto de aprendizaje" ha adoptado diversas definiciones a lo largo del tiempo, cada una con diferentes perspectivas y enfoques. Una de las pioneras es la propuesta por L'Allier (1997), quien define un OA como la experiencia instruccional más pequeña e independiente que contiene un objetivo, una actividad de aprendizaje y una evaluación. Esta definición no especifica si los OA pueden ser digitales o si son recursos pasivos de solo lectura.

Por otro lado, la Learning Technology Standards Committee (LTS) presenta la definición más común en la actualidad: cualquier entidad, ya sea digital o no digital, que puede ser utilizada, reutilizada o referenciada en el proceso de aprendizaje mediado por tecnología (IEEE, 2002). Para Wiley (2000) y Polsani (2003), esta definición es ambigua, pues no excluye a personas, lugares, cosas o eventos, lo que la hace impráctica.

En contraste con las definiciones atribuidas a los OA por diversos autores, Morales et al. (2006) proponen una definición más integral que se ajusta mejor a la realidad de los OA: "una unidad educativa con un objetivo mínimo de aprendizaje asociado a un tipo concreto de contenido y actividades para su logro, caracterizada por ser digital, independiente y accesible a través de metadatos con la finalidad de ser reutilizada en diferentes contextos y plataformas. Esta definición será adoptada para esta investigación, dada su precisión y aplicabilidad.

3.4.1. Características de los objetos de aprendizaje

Con base en las definiciones expuestas anteriormente, el OA debe cumplir con ciertas características para ser reutilizado y accesible desde cualquier tipo de entorno o plataforma virtual. De acuerdo con Morales (2007), Maldonado et al. (2017) y Morales- Velasco (2022) un OA se caracteriza por ser:

- **Accesible:** Un objeto de aprendizaje (OA) debe poder ser fácilmente encontrado y localizado mediante metadatos estándar, lo que permite conocer sus características y facilitar su reutilización desde diferentes perspectivas.
- **Reusable:** El OA debe poder ser usado en diversos contextos educativos. Su estructura debe permitir la modificación del contenido para personalizarlo en escenarios futuros. Además, la disponibilidad de metadatos precisos y completos facilitará la determinación de los contextos educativos adecuados en los que el OA pueda ser reutilizado.
- **Interoperable:** Un OA debe tener la capacidad de funcionar en diversas plataformas y herramientas informáticas, permitiendo su importación y exportación sin necesidad de modificaciones. Esto se logra mediante el uso de estándares y especificaciones comunes que aseguran su compatibilidad y funcionalidad en diferentes entornos tecnológicos.

- **Durable:** El objeto de aprendizaje debe mantener su vigencia a pesar del tiempo, presentando contenido actualizado y soportando los cambios tecnológicos sin necesidad de ser rediseñado o recodificado por completo.
- **Auto contenido:** Debe presentar toda la información necesaria para alcanzar el objetivo propuesto de manera independiente, sin requerir recursos externos adicionales.
- **Granular:** Esta característica se refiere al tamaño del OA y es crucial para determinar su capacidad de reutilización. Un tamaño adecuado facilita la adaptación y personalización del contenido en diversos contextos educativos. Morales, García y Barrón (2007) clasifican los OA según diferentes niveles de agregación:
 - OA nivel 1: Componentes individuales como imágenes, segmentos de texto o vídeos.
 - OA Nivel 2: Agrupaciones de componentes del Nivel 1, como lecciones o documentos HTML con imágenes.
 - OA Nivel 3: Conjuntos de objetos del Nivel 2, como módulos de aprendizaje compuestos por varias lecciones.
 - OA Nivel 4: Conjuntos más amplios como cursos completos, compuestos por varios módulos de aprendizaje (Nivel 3).

3.4.2. Estándares y especificaciones e-learning

La creación de objetos de aprendizaje está sustentada en estándares y especificaciones que aseguran su interoperabilidad, reusabilidad y calidad en entornos educativos digitales. El estándar más utilizado es el SCORM (Stándar Sharable Content Object Reference Model), el cual facilita la integración de los OA en diferentes plataformas educativas (Orozco, 2017)

SCORM ha evolucionado a lo largo de los años, existen cuatro versiones distintas desde su implementación (Rossetti, 2021):

- SCORM 1.0. (enero, 2000): fue un borrador preliminar que estableció las bases del marco SCORM, aunque no contenía una especificación completamente implementable. Introdujo los elementos clave de empaquetado de contenido,

comunicación con un Sistema de Gestión de Aprendizaje (SGA) y descripción del contenido mediante metadatos, cada uno descrito en una especificación separada.

- SCORM 1.1 (enero, 2001): representó la primera versión completa e implementable del estándar, basada en SCORM 1.0. Fue adoptada por proveedores comerciales, quienes confirmaron su utilidad. A pesar de esto, aún había detalles por resolver para una implementación más amplia.
- SCORM 1.2 (octubre, 2001): esta versión superó las limitaciones de la anterior al desarrollar una especificación más sólida y fácil de implementar. Los proveedores que la adoptaron experimentaron ahorros significativos debido a una mejor interoperabilidad del contenido. En la actualidad, muchas plataformas educativas siguen admitiendo esta versión.
- SCORM 1.3 (enero, 2004): esta versión conocida comúnmente como SCORM 2004, incluye reglas de secuenciación y navegación para que los creadores de contenido especifiquen cómo los estudiantes avanzan entre los objetos de aprendizaje. Se han lanzado cuatro ediciones de esta versión, cada una mejorando la funcionalidad respecto a la anterior.

3.4.3. Taxonomía instructiva de Gagné

Gagné (1975) establece una secuencia de procesos de aprendizaje fundamentada en la memoria. Identifica diversos tipos y una jerarquía del aprendizaje. Basándose en estos principios y en los procesos cognitivos experimentados por los estudiantes, propone un modelo de nueve eventos instruccionales diseñado para estructurar la enseñanza. Estos eventos son:

1. Informar al estudiante el objetivo previo a conseguir para provocar la motivación.
2. Dirigir la atención hacia lo que se quiere enseñar.
3. Estimular el recuerdo de los conocimientos previos.
4. Presentar la información (estímulo externo) que se quiere enseñar.
5. Guiar el aprendizaje dando instrucciones de cómo aprender.

6. Producir acciones mediante el planeamiento y diseño de tareas y ejercicios para ser resueltos con la información enseñada.
7. Valorar las acciones realizadas en las tareas propuestas.
8. Proveer retroalimentación dependiendo de los resultados.
9. Promover la retención y transferencia de información a otros contextos.

Estos eventos han sido fundamentales para orientar el diseño de experiencias y materiales educativos en entornos de e-learning. Basándonos en esta taxonomía instruccional, en esta investigación se adapta la estrategia propuesta por Orozco (2017) para estructurar los OA. Esta estrategia consiste en la integración de seis elementos: nombre, objetivos de aprendizaje, introducción, contenidos, ejercicios y ejemplos, y autoevaluación. La descripción detallada de estos elementos se puede observar en la Tabla 1.

Tabla 1

Relación entre los elementos de los OA y las fases de la taxonomía instructiva de Gagné

Elemento: organización de los elementos según los eventos instruccionales de Gagné.		Fase de la taxonomía de instructiva de Gagné (1975)
Nombre	Se especifica el nombre del OA.	
Objetivo de aprendizaje	1. Informar al estudiante el objetivo previo a conseguir para provocar la motivación.	
Introducción	2. Dirigir la atención hacia lo que se quiere enseñar	
	3. Estimular el recuerdo de los conocimientos previos.	
Contenido	4. Presentar la información (estímulo externo) que se quiere enseñar.	
	5. Guiar el aprendizaje dando instrucciones de cómo aprender.	
Ejercicios y ejemplos	6. Producir acciones mediante el planeamiento y diseño de tareas y ejercicios para ser resueltos con la información enseñada.	

Autoevaluación	7. Valorar las acciones realizadas en las tareas propuestas.
	8. Proveer retroalimentación dependiendo de los resultados
Aplicaciones	9. Promover la retención y transferencia de información a otros contextos.

Nota: Adaptada de Orozco (2017)

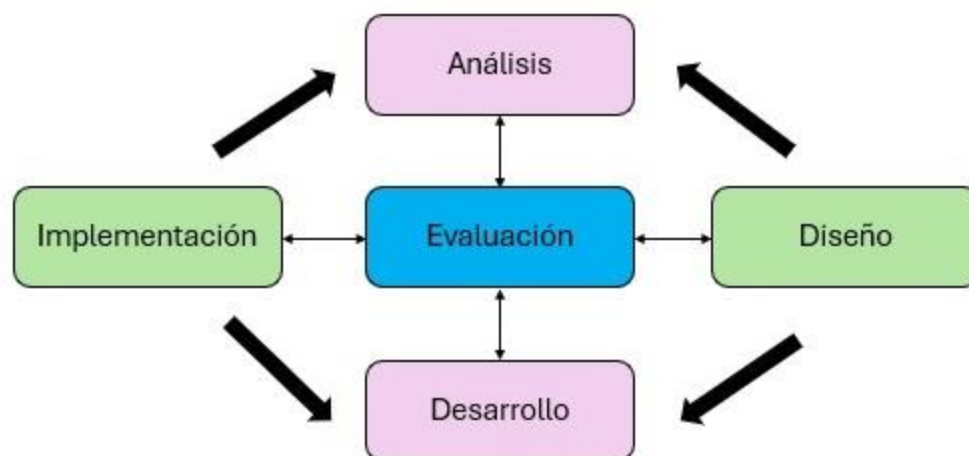
3.4.4. Modelo ADDIE para la creación de Objetos de Aprendizaje

El modelo ADDIE, es uno de los que regularmente es utilizado en el diseño instruccional; su nombre atiende al acrónimo ADDIE (Análisis, Diseño Desarrollo, Implementación y Evaluación), el cual representa las fases de este modelo. De acuerdo con Branch (2009) , ADDIE es un paradigma de desarrollo de productos que busca mantener una alineación entre necesidades, propósitos, metas, objetivos, estrategias y evaluaciones a lo largo de todo el proceso de aplicación del modelo.

Es importante destacar que los resultados de la evaluación formativa de cada fase pueden llevar al diseñador instruccional de regreso a cualquiera de las fases previas, asegurando así una mejora continua. Además, el producto final de una fase se convierte en el punto de partida para la siguiente, tal como se puede evidenciar en la Figura 4.

Figura 4

Representación del modelo ADDIE



Nota: Adaptado de De Jesús y Ayala (2021).

Según De Jesús y Ayala (2021) , el modelo ADDIE se presenta como una alternativa para organizar los recursos y actividades que fomenten el aprendizaje autónomo de los estudiantes, mediado por las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), tal como se expone en cada una de sus fases:

Análisis: el primer paso consiste en analizar a los estudiantes, el contenido y el entorno en donde se llevará a cabo el aprendizaje. El resultado será una descripción detallada del problema y las necesidades formativas, lo cual servirá de base para las siguientes fases del diseño instruccional.

Diseño: se elabora un programa del curso centrándose en el enfoque pedagógico y la secuenciación del contenido. Se seleccionan los medios y recursos adecuados, se trazan los objetivos de la unidad o módulo, se planifica la formación, se diseñan las actividades de aprendizaje y se desarrolla el proceso de evaluación.

Desarrollo: construcción de los materiales y recursos necesarios, como sitios web, objetos de aprendizaje, recursos multimedia, manuales y tutoriales para alumnos y docentes. Se planifican los materiales según el documento de diseño, se generan los ambientes necesarios para su implementación. Asimismo, se hace necesario realizar una prueba piloto de las propuestas

Implementación: Ejecución de la experiencia de aprendizaje con la participación de los estudiantes y el uso de los materiales contruidos, asegurando su disponibilidad efectiva.

Evaluación: incluye evaluaciones formativas en cada fase para ajustar el diseño instruccional, así como evaluaciones sumativas al final para medir la efectividad del aprendizaje alcanzado. Esta fase es fundamental en todo el proceso, ya que permite evaluar la calidad de los productos educativos y los procesos de enseñanza y aprendizaje antes y después de su implementación.

La Tabla 2 detalla las acciones y medios utilizados para crear los objetos de aprendizaje (OA) propuestos en esta investigación. Las etapas de análisis y diseño se centran en la dimensión pedagógica, mientras que las fases de desarrollo e implementación abordan los aspectos

técnicos de usabilidad. Ambas dimensiones son esenciales para evaluar la calidad pedagógica y técnica de los OA. Se ofrecerá una descripción detallada de estos aspectos más adelante, siguiendo el orden en que serán abordados.

Tabla 2

El proceso ADDIE y las acciones realizadas por el autor del OA

Fases de creación de los OA	Acciones realizadas	Medios utilizados
Análisis	➤ Detectar necesidades. ➤ Analizar los programas de estudio. ➤ Identificar el perfil del estudiante. ➤ Identificar requerimientos técnicos	➤ Informe de evaluación curricular. ➤ Observación.
Diseño	➤ Planificar estrategias de enseñanza. ➤ Seleccionar las actividades de aprendizaje. ➤ Redactar los objetivos.	➤ Modelos instruccionales. ➤ Taxonomías educativas.
Desarrollo	➤ Construir	➤ Herramientas informáticas. ➤ Estructuras jerárquicas de contenido bajo estándares.
	➤ Empaquetar	➤ Herramientas informáticas y estándares y especificaciones e-learning.
	➤ Etiquetar	➤ Herramientas y estándares como Dublin Core, LOM y LOM-ES.
Implementación	➤ Almacenar y distribuir	➤ Páginas Web y plataformas educativas.
Validación	➤ Evaluar a través de instrumentos desde perspectiva de expertos y estudiantes.	➤ Instrumento HEODAR ➤ Instrumento propuesto por Rosetti (Rossetti, 2021).

Fuente. Adaptada de Orozco (2017).

4. HIPÓTESIS Y SUPUESTO

En este apartado se presentan los elementos que orientan el desarrollo de la investigación, entre ellos las preguntas de investigación, la hipótesis planteada y el supuesto sobre el cual se fundamenta el estudio.

4.1. Preguntas de investigación

Pregunta general

¿De qué forma el Objeto de Aprendizaje (OA) impacta en la reducción de los conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable?

Preguntas específicas

- ¿Cómo se está abordando el proceso de la enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable?
- ¿Qué aspectos del uso de los OA favorecen la comprensión de los estudiantes y la reducción de conflictos cognitivos

4.2. Hipótesis

Hipótesis de investigación

El objeto de aprendizaje diseñado con GeoGebra reduce los conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable.

Hipótesis nula

El objeto de aprendizaje diseñado con GeoGebra no reduce los conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable.

4.3. Supuesto

La incorporación de Objetos de Aprendizaje diseñados con estructura instruccional clara, y visualización dinámica mediante GeoGebra, contribuye a reducir los conflictos cognitivos que el estudiantado de ingeniería experimenta al aprender la derivada parcial.

5. OBJETIVOS

5.1. Objetivo general

Evaluar el impacto de los Objetos de Aprendizaje (OA) diseñados con GeoGebra en la reducción de conflictos cognitivos durante la enseñanza de cálculo multivariable con el propósito de mejorar la comprensión de los estudiantes.

5.2. Objetivos específicos

- Identificar las condiciones de enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable, así como la aplicación de herramientas tecnológicas en este proceso, a través de una entrevista a docentes y una prueba diagnóstica a estudiantes.
- Diseñar y desarrollar tres Objetos de Aprendizaje con GeoGebra, fundamentados en principios del diseño instruccional y en el Enfoque Ontosemiótico, para abordar los principales significados asociados a la derivada parcial
- Aplicar los Objetos de Aprendizaje que incluyen applets de GeoGebra para la enseñanza de la derivada parcial, con el fin de disminuir los conflictos cognitivos del estudiantado.

6. METODOLOGÍA

En este capítulo se detalla la metodología utilizada en el desarrollo de la investigación, proporcionando una visión completa de los pasos seguidos y los enfoques empleados para alcanzar los objetivos planteados. La metodología constituye el marco estructural que dirige el proceso de estudio, desde la definición de los objetivos de investigación hasta la interpretación de los resultados obtenidos.

6.1. Ubicación metodológica

El termino paradigma hace referencia al conjunto de creencias y actitudes, como una visión del mundo compartida por una comunidad científica, que implica una metodología determinada (Ballina, 2013). El paradigma ofrece al investigador tanto la teoría como los referentes metodológicos necesarios para abordar el fenómeno objeto de estudio y de esta manera, comprender las cuestiones inherentes al proceso investigativo (Miranda y Ortiz, 2020).

La presente investigación, al ser educativa, adopta un enfoque pluriparadigmático, lo que implica el uso de varios paradigmas que ofrecen diferentes perspectivas para abordar el objeto de estudio. Se consideran tres paradigmas: positivista, interpretativo y sociocrítico, los cuales guían el diseño y la metodología de la investigación (Schuster et al., 2013). Según Santos (2010), en la práctica investigativa es difícil limitarse a un solo paradigma. Aunque uno predomine, generalmente se integran de manera coherente elementos de otros paradigmas.

De acuerdo con lo anterior, este estudio se enmarca en un paradigma positivista al emplear instrumentos y técnicas cuantitativas para evaluar el impacto de los Objetos de Aprendizaje (OA) en el aprendizaje del cálculo multivariable. Por otra parte, se recurre al paradigma interpretativo al examinar las percepciones, creencias y actitudes de los docentes hacia la enseñanza y el aprendizaje del cálculo multivariable, así como interpretar los significados atribuidos por el estudiantado a los conceptos previos de cálculo de una variable, fundamentales para la comprensión de los conceptos del cálculo multivariable.

Por último, se adopta un paradigma sociocrítico, ya que la finalidad de esta investigación consiste transformar la dinámica tradicional de clase mediante el uso de los OA. Estos recursos tecnológicos tienen como objetivo minimizar los conflictos cognitivos de los estudiantes sobre los conceptos del cálculo multivariable. A su vez, buscan fomentar la autonomía del estudiantado, promoviendo su capacidad para gestionar de manera independiente su proceso de aprendizaje.

6.2. Tipo de investigación

El presente estudio se fundamenta en la metodología de investigación mixta. La principal característica de este método es integrar la perspectiva cualitativa y cuantitativa en un mismo estudio con la finalidad que exista mayor comprensión acerca del objeto de estudio. Los diseños mixtos se centran en la comprensión, profundización o transformación de aspectos en el ámbito educativo (Pereira, 2011).

La perspectiva cualitativa se centra en la descripción y análisis de los conflictos cognitivos que presentan los estudiantes en relación con las configuraciones epistémicas asociadas a cada uno de los significados parciales de la derivada de funciones multivariantes. Por otra parte, teniendo en cuenta que se diseñarán objetos de aprendizaje vinculados a cada uno de los significados, el componente cuantitativo consiste en el análisis de los resultados de dichas tareas mediante el uso de métodos estadísticos. Para esto, se considerará la variable de “grado de corrección” de las respuestas de los estudiantes. Esta variable permitirá discriminar entre respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas.

6.3. Participantes

La muestra del estudio estuvo conformada por 11 estudiantes de la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Querétaro, adscritos a los programas de Ingeniería en Computación e Ingeniería en Telecomunicaciones y Redes. Todos los participantes habían cursado previamente Cálculo I y II. Nueve de ellos eran estudiantes que repetían la asignatura de Cálculo Multivariable, mientras que los dos restantes la cursaban por primera vez. Esta diversidad permitió identificar diferencias en las necesidades de aprendizaje y en la experiencia previa con respecto a los conceptos abordados.

6.4. Investigación Basada en Diseño

Con el fin de contribuir a la reducción de los conflictos cognitivos que presentan los estudiantes respecto al concepto de derivada de funciones multivariantes, esta investigación adoptó un enfoque metodológico fundamentado en la Investigación Basada en Diseño (IBD). De acuerdo con este tipo de metodología, el estudio se orienta al desarrollo de una solución frente a estos conflictos, los cuales representan una problemática en el contexto de enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable

Este enfoque está dirigido a la innovación educativa, se caracteriza por integrar un elemento nuevo para transformar una situación. La IBD, intenta responder a problemas detectados en escenarios educativos mediante la incorporación de teorías científicas o modelos disponibles que sean apropiados para dar solución a dichos problemas (Benito y Salinas, 2016) . De acuerdo con Van de Akker et al. (2006), los estudios enmarcados dentro de la IBD se enfocan en resolver problemas complejos en contextos reales, con el objetivo principal de generar aportes significativos tanto a nivel científico como práctico.

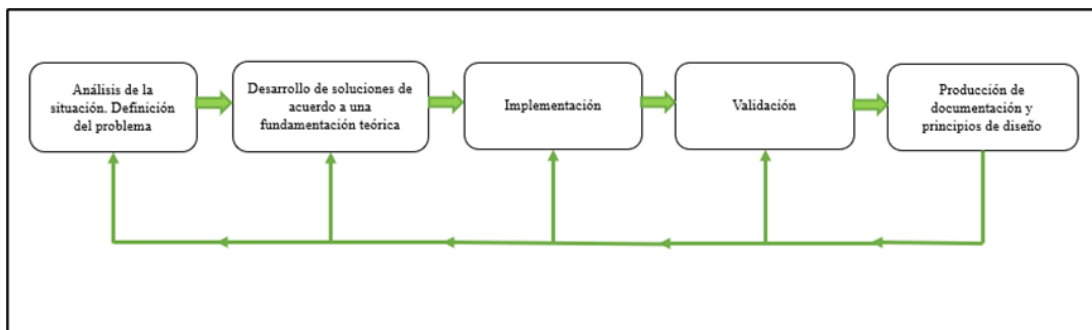
La IBD se presenta como una metodología adecuada para la investigación en Tecnología Educativa (TE), ya que aborda problemas complejos de la realidad educativa y contribuye a la mejora de la práctica, la intervención y los procesos de innovación. La intervención hace referencia a productos, programas, materiales, procedimientos, escenarios y otros resultados derivados del proceso investigativo (Esteve et al., 2019).

En este estudio, se implementan las fases de la Investigación Basada en Diseño planteadas por de Benito y Salinas (2016), quienes las adaptaron a partir del modelo propuesto por Reeves (Reeves, 2006). De acuerdo con este modelo, la investigación comienza con el análisis de la situación y la definición del problema. Luego, se desarrollan posibles soluciones basadas en un marco teórico, lo que resalta la importancia de la evaluación y revisión, que involucra tanto la fundamentación teórica como los aspectos positivos y negativos de la intervención. La fase siguiente es la implementación, seguida de la recopilación de información, actividad que se lleva a cabo a lo largo de todo el estudio. La investigación avanza mediante iteraciones continuas de diseño, validación, análisis y rediseño, lo que

permite mejorar el marco teórico y perfeccionar la intervención educativa durante todo el estudio. Estas fases se pueden observar en la Figura 5.

Figura 5

Etapas generales de la IBD



Nota: Adaptado de Benito y Salinas (2016).

A continuación, en la Tabla 3 se muestran cada una de las fases de la IBD contextualizadas al presente estudio.

Tabla 3

Aplicación de las fases de la IBD en esta investigación.

Fases de la IBD	Acción realizada
Análisis de la situación. Definición del problema	-Análisis de la enseñanza del cálculo en la ingeniería -Análisis del programa de cálculo multivariable -Entrevista a estudiantes. -Diagnóstico a estudiantes.
Diseño y desarrollo de las soluciones fundamentadas en teorías	- Principio de diseño de los objetos de aprendizaje basado en las siguientes teorías. -Enfoque Ontosemiótico (EOS) -Teoría del conflicto cognitivo (cartografía conceptual). -Teoría de los Objetos de Aprendizaje (Gagné). -Teoría del diseño Instruccional: ADDIE.
Implementación	Puesta en práctica de los objetos de aprendizaje diseñados en sesiones de clases presenciales y virtuales.

Evaluación y rediseño de las soluciones puestas en práctica.	-Implementación del OA a un grupo de estudiantes. -Evaluación de la primera implementación de los OA y rediseño. -Evaluación de la segunda implementación de los OA y rediseño.
--	---

En esta investigación, el carácter iterativo de la IBD se hizo evidente en el proceso de diseño, aplicación y mejora de los tres Objetos de Aprendizaje. A partir de la implementación de cada OA, se recolectó información a través de autoevaluaciones, valoraciones del estudiantado y opiniones de expertos, lo cual permitió identificar aspectos susceptibles de mejora, como la organización del contenido, la extensión del texto o la claridad de los ejemplos. Estos hallazgos fueron integrados en el diseño de los recursos siguientes, lo que permitió mejorar progresivamente la propuesta educativa. De esta manera, las fases de la IBD no se desarrollaron de manera lineal, sino que se retroalimentaron de forma cíclica, en concordancia con los principios metodológicos que sustentan este enfoque.

6.4.1. Fase 1. Análisis de la situación. Definición del problema

En esta primera fase se llevó a cabo un estudio de la problemática. Se revisó el programa de la asignatura cálculo multivariable correspondiente al plan de estudios del programa de Ingeniería en el que se desarrolló esta investigación, y se aplicaron entrevistas a docentes, así como una prueba diagnóstica al estudiantado, con el objetivo de comprender el contexto de enseñanza y aprendizaje de dicha asignatura.

Enseñanza del cálculo en ingeniería

El cálculo en las carreras de ingeniería es fundamental para el desarrollo de competencias como el análisis crítico, el razonamiento lógico y la resolución de problemas. Estas habilidades permiten a los ingenieros enfrentar desafíos complejos y tomar decisiones en contextos que involucran múltiples variables y factores (Loachamín et al., 2023). En particular, el cálculo multivariable permite modelar y analizar sistemas dinámicos, como el movimiento de objetos, el flujo de fluidos y la propagación de ondas, y optimizar sistemas en áreas como la producción de energía y el uso de recursos (Gallardo et al., 2022; Loachamín et al., 2023).

Sin embargo, su enseñanza enfrenta varios desafíos. Zúñiga (2007) señala que, si bien los programas de estudio tienen como objetivo proporcionar al estudiantado las herramientas necesarias para resolver problemas específicos de su carrera, estos problemas no se reflejan en los planes de estudios ni en los textos recomendados, y los docentes, en muchos casos, desconocen las aplicaciones particulares a las carreras de ingeniería, limitándose a las propuestas contenidas en los libros de texto.

Además, el bajo rendimiento de los estudiantes en los cursos de cálculo multivariable en muchos casos se relaciona con la falta de formación o capacitación de profesorado en relación con los nuevos modelos curriculares y metodologías de enseñanza, así como con la estructura de programas de estudios extensos y poco flexibles. Esta situación conduce a que no se evalúe de acuerdo con los resultados de aprendizaje, se continúen aplicando actividades algebraicas descontextualizadas en el aula, y el estudiantado no logre una comprensión profunda de los conceptos fundamentales, lo que lleva a un alto índice de reprobación en la asignatura (Gallardo et al., 2022).

El cálculo es una de las áreas más complejas de la matemática, y enseñar cálculo multivariable en nivel superior a estudiantes de programas no matemáticos representa un desafío (Milenković y Vučićević, 2024). Es por esta razón que muchos investigadores se han centrado en determinar que tipos de enfoques metodológicos son los adecuados para generar buenos resultados en el aprendizaje del cálculo (Dorko y Weber, 2014; Martínez-Planell y Trigueros, 2021).

De acuerdo con lo anterior, diversos estudios coinciden en que el currículo de cálculo multivariable en ingeniería debe promover metodologías de enseñanza activas e innovadoras que integren recursos tecnológicos, procesos de modelación matemática y conversión entre diferentes representaciones de los conceptos. Asimismo, es esencial fomentar el aprendizaje autónomo y colaborativo en el estudiantado, atender sus dificultades y fortalecer las habilidades pedagógicas del profesorado, vinculando los conceptos matemáticos con aplicaciones prácticas propias de la ingeniería (Gallardo et al., 2022; Herrera y Cruz, 2024; Milenković y Vučićević, 2024).

Revisión del programa de cálculo multivariable

En el contexto de esta investigación, se examinó el programa de la asignatura cálculo multivariable, impartida en el cuarto semestre de las carreras de Ingeniería en Computación e Ingeniería en Telecomunicaciones y Redes de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). Este documento, correspondiente al plan de estudios 2018, asigna 6 créditos a la materia, con una carga semanal de 4 horas teóricas.

Este análisis permitió identificar los contenidos temáticos, el enfoque metodológico y los criterios de evaluación contemplados en la asignatura, con el objetivo de contextualizar el diseño de los Objetos de Aprendizaje propuestos en esta tesis.

Estructura de la entrevista a docentes

Para conocer las concepciones del profesorado sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable, se diseñó una entrevista semiestructurada compuesta por 13 ítems distribuidos en tres dimensiones: aspectos curriculares, fundamentación disciplinar y mediación tecnológica. Esta estructura permitió indagar en la experiencia docente, las estrategias utilizadas, el conocimiento de los contenidos y el uso de tecnologías en el aula. Los ítems correspondientes a cada dimensión se detallan en la Tabla 4.

Tabla 4

Ítems de la entrevista organizados por cada dimensión

Dimensión	Ítems
Aspectos curriculares	1. ¿Cuánto tiempo tiene dictando la asignatura de cálculo multivariable?
	2. ¿Qué estrategias de aprendizaje implementa para el desarrollo de esta materia?
	3. ¿Qué tipo de materiales didácticos utiliza para el desarrollo de sus clases?
Fundamentación disciplinar	4. ¿Qué prerrequisitos conceptuales y procedimentales se necesitan para el estudio de esta materia?
	5. ¿Qué conceptos considera usted que representan o no dificultad para los estudiantes?
	6. ¿Cuáles considera usted que son los conflictos cognitivos que presentan los estudiantes respecto a esta asignatura?

	7. ¿Qué porcentaje del programa utiliza para retomar los conceptos de derivación e integración?
	8. ¿Qué recursos tecnológicos educativos utiliza para el desarrollo de su clases? ¿Cómo los utiliza?
	9. ¿Con que frecuencia utiliza estos recursos?
	10. ¿Todos los estudiantes tienen acceso a estos recursos?
Mediación tecnológica	11. ¿Qué conocimiento tienen los estudiantes sobre el uso de estos recursos?
	12. ¿Cuáles son las actitudes de los estudiantes respecto al uso de la tecnología en las clases?
	13. ¿Utiliza la tecnología educativa para el desarrollo de los exámenes?

Este instrumento fue sometido a un proceso de validación de contenido por juicio de expertos, cuyas valoraciones y sugerencias permitieron ajustar y perfeccionar los ítems. Los detalles del procedimiento de validación y los resultados obtenidos se presentan en el apartado de resultados.

Diagnóstico a estudiantes

Con la finalidad de evaluar la comprensión de los estudiantes sobre la derivada, se diseñó un cuestionario integrado por seis tareas. Cada una de estas tareas está relacionada con los significados parciales de la derivada identificados por Pino-Fan (2011) en un estudio histórico- epistemológico, cuyo fin fue reconstruir el significado holístico de este objeto matemático.

Los ítems seleccionados abordan tres subprocesos propuestos por Font (2000) que intervienen en el cálculo de la función derivada:

1. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$
2. El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$
3. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$

De esta manera, las actividades que conforman el cuestionario implican distintos tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos, como la descripción verbal,

gráfica, simbólica y tabular; tanto para la función como para su derivada. La Tabla 5 muestra un resumen de las características y objetivos de cada una de las tareas.

Tabla 5

Resumen de las características de las tareas.

Tarea	Objetivo	Representación que moviliza	Significado parcial activado
Tarea 1: Identificación de los ceros de la derivada	Establecer conexiones entre distintos significados de la derivada.	Simbólica y gráfica	Tangentes
Tarea 2: Aproximación de la derivada a partir de una tabla de valores	Explorar el significado de la derivada en un punto a partir de la aproximación numérica	Tabular y simbólica	Variación/razón de cambio
Tarea 3: Cálculo de la derivada en un punto a través de un registro gráfico	Relacionar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto con el valor de la derivada en dicho punto.	Gráfica y simbólica	Tangentes
Tarea 4: Cálculo de la velocidad instantánea	Asociar la derivada como una tasa de cambio instantánea a través de un fenómeno físico.	Simbólica	Variación/razón de cambio
Tarea 5: Análisis de la derivada a partir de la gráfica de la función original	Identificar las variaciones de la función derivada observando el comportamiento de la gráfica de la función original.	Gráfica	Tangentes
Tarea 6: Gráfica de la derivada de una función definida a trozos	Identificar características importantes de la derivada de una función a trozos mediante su representación gráfica	Gráfica	Tangentes/límites

Este cuestionario se aplicó a un grupo conveniente de 11 estudiantes de Ingeniería, seleccionados por haber cursado únicamente el curso de cálculo diferencial de funciones de una sola variable. A estos estudiantes se les designó con la letra E seguida de un número para el análisis de sus respuestas.

Durante la aplicación del instrumento, se explicó a los participantes la estructura del cuestionario, pero no se proporcionó información sobre las respuestas y no hubo interacción de los estudiantes con su docente. La sesión se realizó en la sala de cómputo de la institución, donde los estudiantes tenían acceso a ordenadores con el software GeoGebra instalado y duró dos horas.

6.4.2. Fase 2. Desarrollo de las soluciones de acuerdo con la teoría

En esta fase se diseñaron y desarrollaron tres Objetos de Aprendizaje (OA) orientados a favorecer la comprensión de la derivada parcial por parte del estudiantado. El proceso se fundamentó en el modelo instruccional ADDIE, particularmente en sus etapas de diseño y desarrollo, a partir de los resultados obtenidos en la fase de análisis y de los referentes teóricos presentados en el capítulo 3.

Cada OA fue estructurado conforme a la taxonomía instruccional de Gagné e integró situaciones contextualizadas, actividades interactivas con GeoGebra, videos explicativos y ejercicios de autoevaluación con retroalimentación inmediata. Esta fase se centró en la planificación pedagógica y técnica de los OA, considerando las dificultades detectadas en el diagnóstico aplicado al estudiantado durante la fase de análisis. Es importante destacar que estos recursos fueron concebidos como versiones iniciales, susceptibles de ajuste tras su implementación y evaluación, en concordancia con el enfoque iterativo propio de la IBD.

6.4.3. Fase 3. Implementación

Al finalizar la etapa de desarrollo, los objetos de aprendizaje fueron exportados desde eXeLearning en formato SCORM e integrados a la plataforma institucional, a la que el estudiantado tenía acceso para consultar los materiales del curso de cálculo multivariable.

Los OA fueron implementados en tres momentos. El OA-1 y el OA-2 se aplicaron durante sesiones presenciales, en las que el estudiantado interactuó con los materiales desde sus propios dispositivos. El OA-3 se aplicó de forma virtual mediante la misma plataforma. En cada sesión, el docente-investigador presentó el OA correspondiente y explicó su estructura, permitiendo al estudiantado desarrollar las actividades de manera autónoma. Posteriormente,

se recopilaban las valoraciones del estudiantado sobre cada OA, con el propósito de identificar posibles mejoras en su diseño y estructura.

6.4.4. Fase 4. Evaluación

Durante esta fase se aplicaron distintos instrumentos con el fin de valorar la calidad de los objetos de aprendizaje y su impacto en la reducción de los conflictos cognitivos experimentados por el estudiantado respecto al concepto de derivada parcial.

Antes de su implementación, los OA fueron evaluados por personas expertas mediante la versión del cuestionario HEODAR propuesta por Orozco (2017), quien adaptó el instrumento original de Morales et al. (2008) para incluir criterios relacionados con recursos desarrollados con GeoGebra. Este cuestionario permitió valorar los OA en tres dimensiones: pedagógica, usabilidad y aplicaciones interactivas. El instrumento completo se encuentra disponible en los Anexos.

Durante la implementación, cada OA incluyó una sección de autoevaluación compuesta por un cuestionario de opción múltiple. Estas actividades permitieron valorar la comprensión del estudiantado en relación con los contenidos abordados en cada recurso.

Al finalizar el trabajo con los OA, se aplicó un cuestionario para conocer la percepción del estudiantado respecto a los recursos utilizados. Este instrumento, propuesto Rossetti (2021), considera cuatro categorías: aprendizaje, atención, satisfacción y usabilidad. El instrumento completo también se encuentra disponible en los Anexos.

Finalmente, se aplicó una prueba escrita presencial, diseñada para evaluar los contenidos desarrollados en los tres OA. Esta evaluación tuvo como propósito identificar si se logró una mayor comprensión del concepto de derivada parcial y una posible reducción de los conflictos cognitivos previamente evidenciados en la fase diagnóstica.

7. RESULTADOS

7.1. Resultados de la fase de análisis

En este apartado se presenta la información obtenida a partir del análisis del programa de la asignatura cálculo multivariable, las entrevistas realizadas a docentes que imparten dicha asignatura, así como de la prueba diagnóstica aplicada al estudiantado para evaluar su comprensión sobre la derivada ordinaria. Estos elementos permitieron conocer el contexto educativo en el que se desarrolló la propuesta didáctica.

7.1.1. Elementos curriculares del programa de cálculo multivariable

Con la finalidad de contextualizar la propuesta didáctica, a continuación, se presenta la estructura temática, el enfoque metodológico y los criterios de evaluación establecidos en el programa oficial de la asignatura cálculo multivariable, según el plan de estudios vigente.

El contenido del programa se organiza en tres unidades temáticas:

- **Unidad 1:** Introducción a vectores y superficies. Incluye operaciones con vectores, ecuaciones de recta y plano, y conceptos relacionados con curvas y superficies.
- **Unidad 2:** Funciones vectoriales. Comprende límites, derivadas parciales, derivadas direccionales y ecuaciones paramétricas.
- **Unidad 3:** Integrales múltiples. Aborda las integrales iteradas, el cálculo de áreas y volúmenes, y sus aplicaciones.

El enfoque metodológico es constructivista, centrado en el aprendizaje significativo y el desarrollo de competencias colaborativas. Sin embargo, el programa, no especifica las estrategias de aprendizaje que implica este enfoque. Aunque se menciona el uso de un software en el objetivo general, no se describe su implementación ni el propósito que cumple en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la asignatura en cuestión.

En cuanto a la evaluación, el programa establece modalidades diagnóstica, formativa y sumativa, mediante instrumentos como listas de cotejo, tareas y exámenes parciales. Aun así,

se identifica la necesidad de incorporar actividades contextualizadas que propicien la aplicación de los conceptos del cálculo multivariable por parte del estudiantado en situaciones propias de la ingeniería o del entorno real, con el fin de promover un aprendizaje significativo.

7.1.2. Entrevista a docentes

A continuación, se presentan los resultados de la validación del instrumento y el análisis de las respuestas proporcionadas por los docentes entrevistados.

Validación del instrumento

Para garantizar la validez de contenido del instrumento utilizado en las entrevistas al profesorado, se utilizó método de juicio de expertos. La valoración fue realizada por especialistas en el área, quienes evaluaron cada ítem en función de cuatro criterios: suficiencia, claridad, coherencia y relevancia, utilizando una escala del 1 al 4. El análisis se llevó a cabo mediante el coeficiente de validez de contenido (CVC), propuesto por Hernández-Nieto (2011), cuyos resultados se presentan en la Tabla 6.

Tabla 6

Cálculo del CVC de cada ítem y de todo el instrumento

Dimensión	ítem	M_x	CVC_i	CVC_c
Aspectos curriculares	1	3.6	0.9063	0.91
	2	3.8	0.9375	0.94
	3	3.7	0.9271	0.93
	4	3.8	0.9474	0.95
Fundamentación Disciplinar	5	3.5	0.8750	0.87
	6	3.7	0.9167	0.92
	7	3.1	0.7813	0.78
	8	3.9	0.9792	0.98
Mediación tecnológica	9	3.7	0.9271	0.93
	10	3.6	0.9063	0.91
	11	3.7	0.9271	0.93
	12	3.8	0.9375	0.94
	13	3.7	0.9271	0.93
CVC_c				0.92

Los valores obtenidos del CVC para los ítems individuales oscilaron entre 0.78 y 0.98, y el coeficiente total del instrumento fue de 0.92, lo cual indica una validez y concordancia excelentes entre los jueces. Asimismo, se tomaron en cuenta las observaciones generales realizadas por los expertos. Entre las sugerencias destacadas se encuentra el cambio de nombre de la dimensión “Aspectos curriculares” por “Aspectos didácticos”, dado que los ítems incluidos en esta categoría abordan temas relacionados con la experiencia docente, las estrategias de enseñanza y los recursos utilizados en el aula, los cuales se enmarcan en consideraciones pedagógicas más que en aspectos del currículo. También se propuso dividir el ítem 8 en dos partes, para distinguir los tipos de recursos tecnológicos de sus formas de uso. Además, se realizaron ajustes en la redacción de algunos ítems con el fin de mejorar su comprensión.

Después de aplicar las modificaciones recomendadas, el instrumento quedó conformado por 14 ítems. Estos resultados confirman la pertinencia y solidez del instrumento para explorar las concepciones del profesorado sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable. Los detalles del procedimiento de validación, el formato utilizado por los jueces, así como la escala de interpretación del CVC, se pueden consultar en el apartado de Anexos.

Concepciones de los docentes sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo multivariable

Una vez validado el instrumento, se aplicó la entrevista al profesorado y se procedió al análisis de sus respuestas. En la primera dimensión, relacionada con los aspectos didácticos, se identificó que entre los recursos educativos más empleados se encuentran los libros de texto *El cálculo en variedades* de Michael Spivak y *Cálculo multivariable* de James Stewart. También se hace uso de herramientas tecnológicas como *GeoGebra*, *Scientific* y prácticas de laboratorio desarrolladas por los propios docentes. Respecto a las estrategias de aprendizaje, la mayoría destacó que el uso de un software matemático facilita la comprensión de los conceptos, al permitir una interacción dinámica y la visualización de los objetos matemáticos. Además, señalaron que recomendar videos en plataformas como YouTube ayuda al estudiantado a reforzar lo trabajado en clase.

En cuanto a la segunda dimensión, referida a la fundamentación disciplinar, se señaló que conceptos como los teoremas de Green y Stokes resultan complejos para el estudiantado, debido a su complejidad abstracta como a la dificultad que implica su visualización. Asimismo, el grupo de docentes señaló que la diferenciación e integración de funciones multivariantes representan un desafío para los estudiantes, ya que los conocimientos previos que estos tienen sobre las derivadas ordinarias suelen entrar en conflicto al intentar ser generalizados a contextos de dos o más dimensiones.

Respecto a la dimensión de mediación tecnológica, los profesores manifestaron que *GeoGebra* y *Scientific* son los recursos más utilizados, tanto por su disponibilidad en los equipos de la universidad como por la posibilidad de emplearlos fuera del aula. Asimismo, expresaron que la mayoría de los estudiantes están familiarizados con estos programas, puesto que los han utilizado en cursos previos como álgebra lineal y cálculo diferencial e integral de funciones de una sola variable. Por último, indicaron que los estudiantes muestran una actitud positiva hacia el uso de estas herramientas, ya que les permiten una mejor visualización de los objetos matemáticos y agilizan los procedimientos algebraicos.

7.1.3. Significados parciales de la derivada evidenciados por los estudiantes

El diagnóstico mostró que el 55% del estudiantado proporcionó respuestas parcialmente correctas en la tarea relacionada con la derivada como razón de cambio instantánea. Aunque aplicaron un procedimiento algebraico para resolverla, no reconocieron que la velocidad de un objeto en un momento específico se interpreta como la razón de cambio de su posición. Asimismo, en las otras actividades del diagnóstico, presentaron dificultades en la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente y en su aplicación para analizar el comportamiento de una función, particularmente en la identificación de los intervalos en los que la función derivada es creciente o decreciente. Estos resultados evidencian dificultades en la articulación de los distintos significados de la derivada y en la coordinación de sus múltiples representaciones, lo que limita una comprensión integral del concepto.

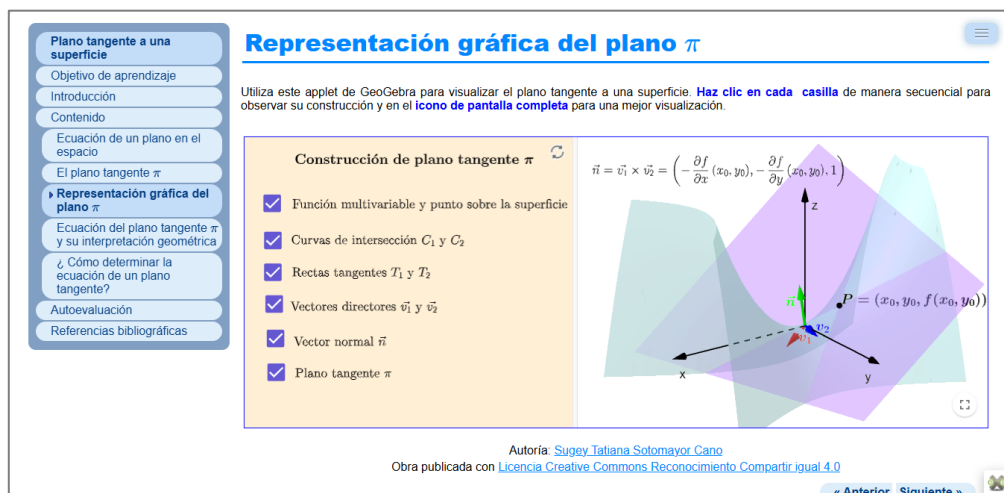
Estos resultados se detallan en el artículo titulado “*Evaluación de significados parciales de la derivada en estudiantes de Ingeniería mediante seis tareas cognitivas*”, cuya portada se encuentra en el apartado de Anexos.

7.2. Resultados de la fase de desarrollo

Una vez finalizada la planificación de los OA, se llevó a cabo su construcción, que incluyó la elaboración de los recursos, el diseño de la interfaz y la integración de los contenidos. La descripción detallada de este proceso, así como la estructura interna de cada OA, se presenta en el *Manual de diseño de Objetos de Aprendizaje para el aprendizaje de la derivada parcial*, incluido en el apartado de Anexos. En la Figura 6 se muestra un ejemplo de interfaz correspondiente al OA-3, en el que se integran elementos interactivos de GeoGebra para facilitar la visualización del plano tangente a una superficie. Este manual constituye uno de los principales aportes de esta investigación, al ofrecer una guía replicable para el desarrollo de recursos educativos mediados por tecnología.

Figura 6

Interfaz del OA_3



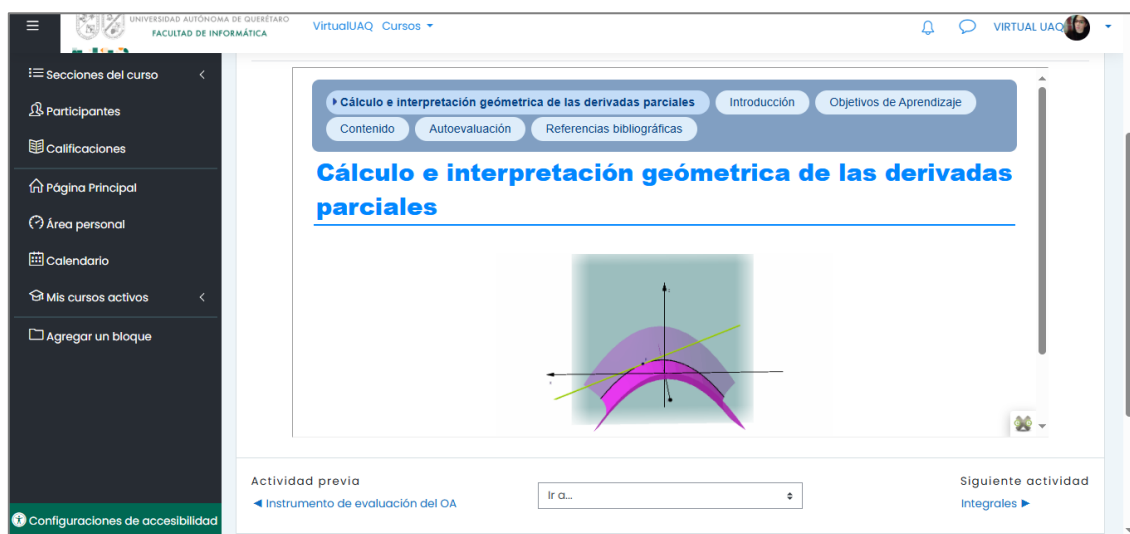
7.3. Resultados de la fase de implementación

La implementación de los objetos de aprendizaje permitió observar aspectos importantes sobre su desarrollo en las sesiones programadas, así como sobre la interacción del estudiantado con los contenidos y recursos propuestos. A continuación, se presentan los principales hallazgos obtenidos durante la aplicación de cada OA.

El OA-1, centrado en el cálculo e interpretación geométrica de la derivada parcial, fue implementado de forma presencial, debido a la extensión del contenido y al número de actividades incluidas, se requirió más tiempo del previsto para su desarrollo. Esta situación motivó la programación de una segunda sesión de trabajo con el recurso, lo que permitió que el estudiantado concluyera las actividades propuestas. La Figura 7 muestra el entorno de trabajo del objeto.

Figura 7

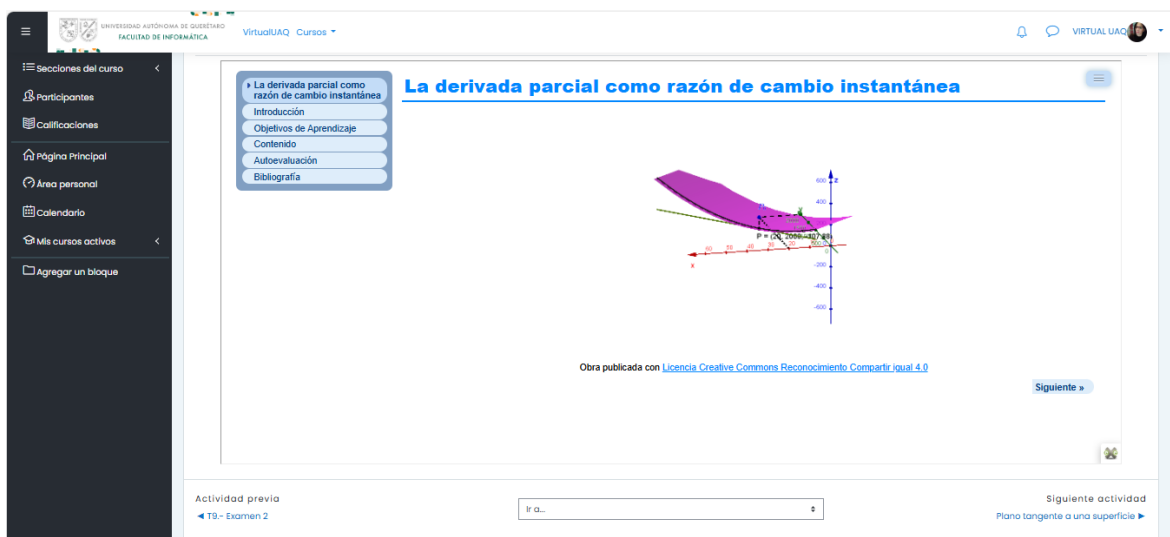
Vista del OA-1 en la plataforma institucional



El OA-2, orientado a la derivada parcial como razón de cambio en contextos reales, también fue aplicado de forma presencial. A diferencia del OA-1, este OA fue completado dentro del tiempo previsto, sin necesidad de ajustes en su aplicación. Durante su desarrollo, se observó que el estudiantado mostró mayor concentración, interés y motivación hacia las actividades propuestas. En la Figura 8 se observa una captura de la pantalla de inicio del objeto.

Figura 8

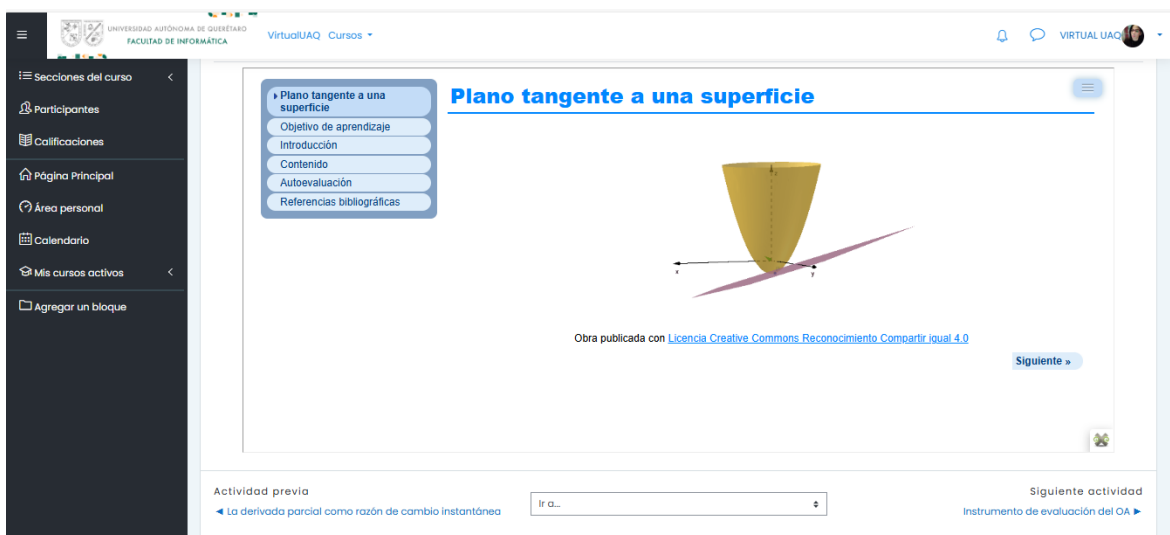
Vista del OA-2 en la plataforma institucional



El OA-3, centrado en la construcción del plano tangente a una superficie, se implementó en modalidad virtual. La actividad se desarrolló sin contratiempos y el estudiantado completó las tareas dentro del tiempo planeado, accediendo al contenido a través de la plataforma institucional. La Figura 9 presenta la página principal del recurso utilizado.

Figura 9

Vista del OA-3 en la plataforma institucional



En los tres casos, al inicio de las sesiones algunos estudiantes solicitaron apoyo docente para orientarse dentro del recurso, aunque esta necesidad disminuyó conforme avanzaban en las actividades.

7.4. Resultados de la fase de evaluación

Esta sección presenta los resultados de los instrumentos aplicados para valorar la calidad e impacto de los objetos de aprendizaje. Se incluyen: la evaluación realizada por expertos antes de la implementación, las autoevaluaciones integradas en cada OA, la valoración del estudiantado sobre los recursos utilizados, y los resultados de una prueba escrita aplicada al finalizar la intervención. Cada uno de estos instrumentos permitió recoger evidencia sobre la pertinencia pedagógica de los OA y su efecto en la comprensión del concepto de derivada parcial.

7.4.1. Valoración de los OA por parte del grupo de expertos

La calidad de los OA se determinó a partir del promedio de las valoraciones otorgadas por los expertos. Según Morales-Morgado (2007), los criterios han sido definidos como se presenta en la Tabla 7. La escala de valoración utilizada va de 1 a 5, donde 5 representa la puntuación más alta. Dado que los promedios obtenidos son valores decimales, es necesario establecer rangos de valoración con sus respectivos indicadores, lo que permite una aproximación más precisa del valor de calidad de los OA.

Tabla 7

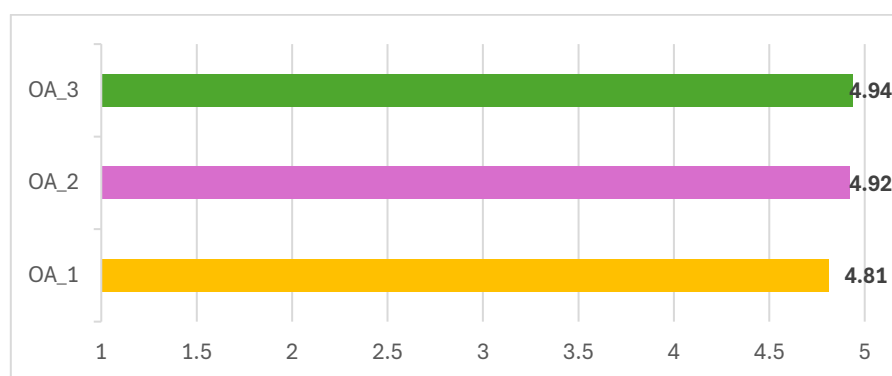
Rango del instrumento de valoración de los OA

Rango valor	Indicadores	Significado
1.0-1.5	Muy mala	La calidad del OA es muy mala, necesita rehacerse o ser eliminado.
1.6- 2.5	Mala	La calidad del OA es mala, requiere una gran mejoría.
2.6- 3.5	Regular	La calidad del OA no es del todo mala, pero necesita ser mejorado.
3.6-4.5	Buena	La calidad del OA es alta, aunque puede ser mejorado.
4.6-5.0	Muy buena	La calidad del OA es muy alta, no necesita mejoría.

Los resultados de la valoración realizada por expertos indican que los tres OA son considerados de alta calidad. En la Figura 10, se muestra la comparación de la valoración global de los OA. En este sentido, las sugerencias identificadas en la valoración del OA-1 fueron consideradas en el desarrollo del OA-2, y las del OA-2 en la construcción del OA-3, permitiendo una mejora progresiva en el diseño y contenido de estos recursos.

Figura 10

Valoración por expertos de los OA



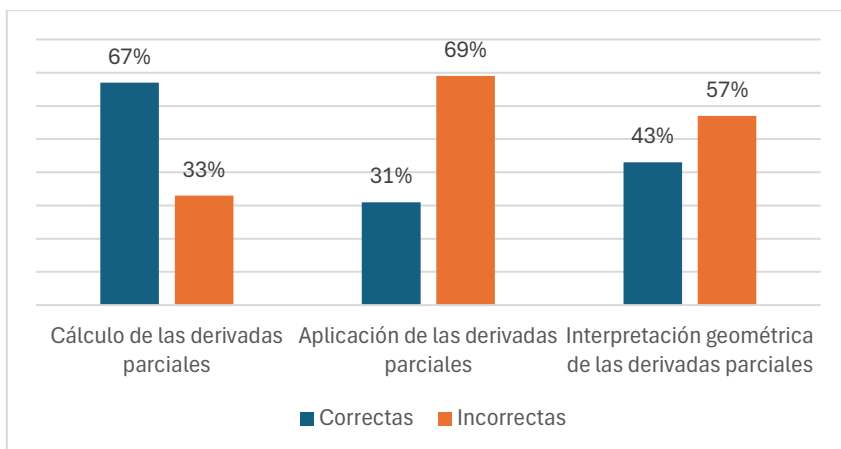
En general los expertos destacaron la claridad de los contenidos, la pertinencia de los ejercicios y el uso de GeoGebra como recurso interactivo. Como oportunidades de mejora sugirieron incorporar una retroalimentación más detallada en las autoevaluaciones, permitiendo que el estudiantado identifique qué respuestas fueron correctas y cuáles no, e incluso que tenga la posibilidad de revisar y corregir sus respuestas.

7.4.2. Autoevaluaciones de los OA

La Figura 11, muestra los resultados de la autoevaluación del OA_1, aplicada al estudiantado, donde se observa un mejor desempeño en el cálculo de las derivadas parciales, mientras que la aplicación y la interpretación geométrica de estas registraron mayores dificultades. Estas estuvieron relacionadas con la falta de conversión entre distintos registros de representación de la derivada parcial, lo que evidencia una comprensión parcial del concepto.

Figura 11

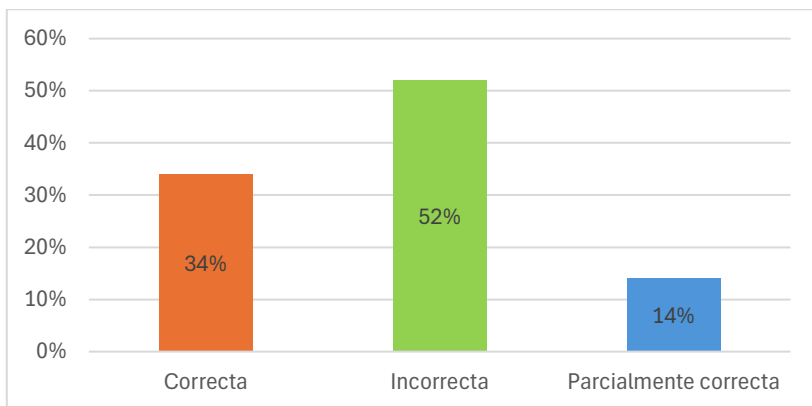
Resultados de la autoevaluación del OA_1



La Figura 12 muestra los resultados de la autoevaluación del OA-2, donde más de la mitad del estudiantado respondió incorrectamente, mientras que el resto obtuvo respuestas correctas o parcialmente correctas. Las principales dificultades estuvieron en la interpretación de la derivada parcial, al confundirla con un valor aislado en lugar de reconocerla como una razón de cambio instantánea. También se observaron problemas para determinar su signo en contextos aplicados, así como para identificar la variable que varía, su efecto en la función y la adecuada interpretación de las unidades asociadas al valor de la derivada.

Figura 12

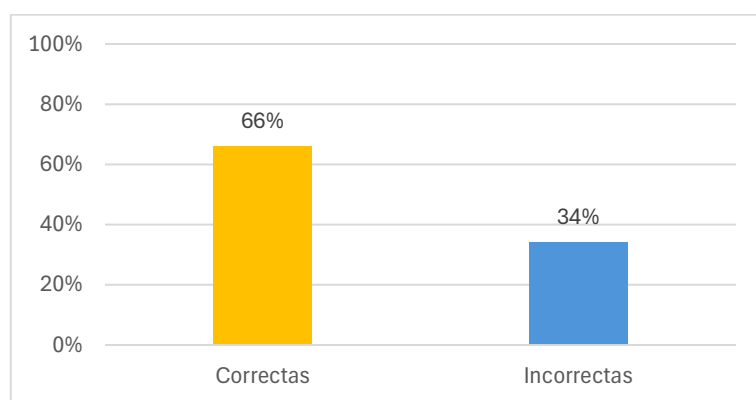
Resultados de la autoevaluación del OA_2



Por último, la Figura 13 presenta los resultados de la autoevaluación del OA_3, donde el 66% del estudiantado obtuvo respuestas correctas, lo que indica un buen desempeño en la identificación y la obtención del plano tangente a una superficie a partir del valor de las derivadas parciales de la función y el punto de tangencia. Sin embargo, se observaron dificultades al determinar qué superficie corresponde a un plano tangente dado en un punto específico.

Figura 13

Resultados de la autoevaluación OA_3



7.4.3. Valoración de los OA por parte de los estudiantes

En este apartado se presenta el análisis de los resultados obtenidos a partir del cuestionario de evaluación propuesto por Rossetti (2021), descrito en el capítulo anterior. Para el análisis, las respuestas se recodificaron de la siguiente manera: totalmente en desacuerdo = 1, en desacuerdo = 2, ni de acuerdo ni en desacuerdo = 3, de acuerdo = 4 y totalmente de acuerdo = 5. Con el fin de facilitar la interpretación de los datos, en este estudio se optó por promediar los ítems en función de cada categoría evaluada.

En la Tabla 8, se presentan los resultados de la valoración de los objetos de aprendizaje en las categorías de aprendizaje, atención, satisfacción y usabilidad. En general, las valoraciones reflejan una percepción positiva del estudiantado, con un promedio general superior a 3.8 en todas las dimensiones evaluadas.

Tabla 8*Valoración promedio de los OA por estudiantes*

Objeto de aprendizaje	Aprendizaje	Atención	Satisfacción	Usabilidad
OA_1	3.91	3.46	3.72	3.65
OA_2	4.43	4.16	4.28	4.27
OA_3	4.24	4.04	4.13	4.14
Promedio general	4.19	3.89	4.04	4.02

La categoría mejor valorada fue aprendizaje, lo que indica que los OA fueron percibidos como herramientas adecuadas para fortalecer la comprensión de los conceptos abordados. En particular, el OA-2 recibió la mejor valoración en esta dimensión, seguido por el OA-3, ambos con evaluaciones favorables. No obstante, el OA-1 obtuvo la puntuación más baja, lo que estuvo relacionado con su extensión y la cantidad de información abordada.

En contraste, la categoría de atención obtuvo el promedio más bajo entre las dimensiones evaluadas, con un valor general de 3.89, influenciado por la valoración del OA-1. En el aula, los estudiantes mencionaron que esta percepción estuvo relacionada con el diseño y la presentación del contenido de este OA.

En la dimensión de satisfacción, el OA-2 obtuvo la puntuación más alta, con un promedio de 4.28. Esto indica que el estudiantado mostró una actitud positiva hacia su uso, manifestando disposición para volver a utilizarlo en otras clases y recomendarlo a otras personas.

Por último, en cuanto a la categoría de usabilidad, nuevamente destaca el OA-2, con un valor promedio de 4.27, lo que refleja que este OA fue percibido como accesible y bien estructurado. El estudiantado consideró que su navegación fue intuitiva, la organización del contenido adecuada y la interfaz amigable, facilitando su uso sin requerir apoyo adicional.

En general, los resultados reflejan una valoración positiva de los OA en todas las dimensiones evaluadas, aunque con diferencias según su diseño y estructura. Mientras que el OA-2 obtuvo las mejores puntuaciones en todas las categorías, el OA-1 presentó mayores dificultades, especialmente en atención y usabilidad. Estos hallazgos resaltan la importancia de organizar la información de manera adecuada para favorecer la experiencia del estudiantado.

7.4.4. Prueba escrita

La prueba escrita estuvo conformada por siete tareas diseñadas con base al contenido desarrollado en los objetos de aprendizaje. Estas tareas abordaron el cálculo de derivadas parciales a partir de reglas y teoremas de derivación, su interpretación como pendiente de una recta tangente a una superficie y como razón de cambio instantánea en situaciones contextualizadas, así como su uso en la determinación de la ecuación de un plano tangente. El análisis de las respuestas se hizo mediante una categorización en tres niveles de corrección (correcta, parcialmente correcta e incorrecta), considerando la coherencia con las configuraciones cognitivas movilizadas y con los objetos primarios involucrados. Esta prueba puede consultarse en el apartado de Anexos.

La Tabla 9 presenta los resultados obtenidos por el estudiantado en las tareas incluidas en la prueba escrita relacionadas con los conceptos desarrollados en el OA-1. Las tareas están codificadas como T1, T2, T3 y T4, y corresponden a distintas acciones matemáticas. Se aprecia un mejor desempeño en las tareas T1 y T2, asociadas al cálculo de derivadas parciales de funciones multivariadas, donde más del 85 % de las respuestas se clasificaron entre correctas y parcialmente correctas. Por el contrario, las tareas T3 y T4, vinculadas con la interpretación geométrica de las derivadas parciales, presentaron un mayor número de respuestas incorrectas, con valores de 77.8 % y 88.9 %, respectivamente.

Tabla 9

Resultados de las tareas del OA-1

Acción matemática	Tipo de configuración cognitiva	Objeto primario	Frecuencia	Porcentaje por tipo de respuesta		
				C	PC	I
T1: Cálculo de las derivadas parciales de una función de dos variables.	Técnica	Procedimiento y proposiciones	9	44.4%	44.4%	11.2%
T2: Cálculo de las derivadas parciales de una función de tres variables.	Técnica-verbal	Procedimiento y proposiciones	9	22%	56%	22%

T3: Determinar signos de las derivadas parciales.	Verbal – simbólica	Argumento Representación	9	11.1%	11.1%	77.8%
T4: Determinar la pendiente de la recta tangente a una superficie en un punto dado.	Técnica	Procedimiento y proposiciones	9	11.1%	0%	88.9%

Nota: correcta (C), parcialmente correcta (PC) e incorrecta (I).

La Figura 14 muestra que el estudiante aplica correctamente el procedimiento para calcular las derivadas parciales de la función dada. No obstante, se evidencia una confusión en el uso de la notación, ya que utiliza la notación de derivada ordinaria en lugar de la notación correspondiente a derivadas parciales. Además, se observa que el estudiante enuncia de manera explícita las reglas de derivación empleadas, como la regla del producto y la derivada del arco seno, lo cual indica una intención de justificar los pasos realizados.

Figura 14

Cálculo parcialmente correcto de derivadas parciales

Ejercicio 2.
 $w(r, u, t) = r u \text{sen}^{-1}(ut)$

$\frac{dw}{dr} = u \text{sen}^{-1}(ut)$

$\frac{dw}{dv} = r u \frac{t}{\sqrt{1-(ut)^2}} + r \text{sen}^{-1}(ut)$ • Regla del producto
 • Derivada sen^{-1}

$\frac{dw}{dt} = r u \frac{u}{\sqrt{1-(ut)^2}}$ • Derivada sen^{-1}

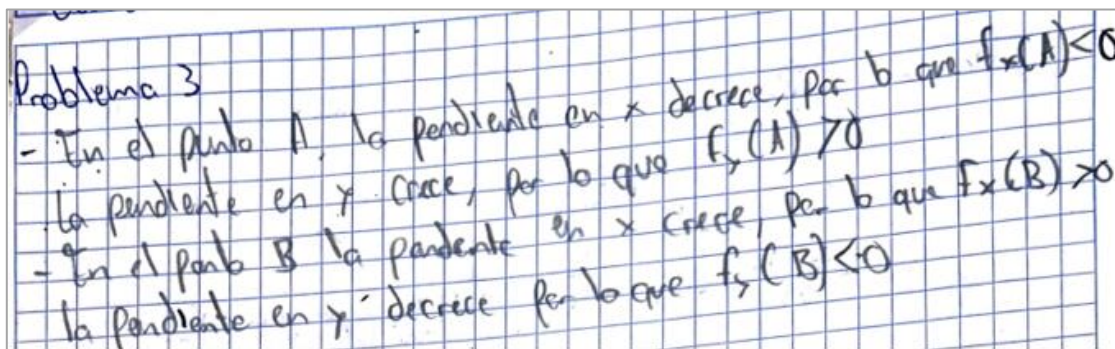
derivada arco seno sen^{-1}
 $f(x) = \text{arcsen}(u) \rightarrow \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

La Figura 15 muestra la justificación de un estudiante respecto a la determinación del signo de las derivadas parciales en dos puntos, a partir de la gráfica de una superficie. Se observa que no realizó una interpretación adecuada, ya que relaciona el signo de la derivada parcial con el crecimiento o decrecimiento de la pendiente, en lugar de relacionarlo con el

comportamiento de la función. Esta formulación resulta ambigua, dado que la pendiente en un punto no “crece” ni “decrece”, sino que puede ser positiva, negativa o nula.

Figura 15

Determinación incorrecta de los signos de las derivadas parciales



La Figura 16 muestra una respuesta en la que el estudiante interpreta la pendiente de la recta tangente a la superficie en un punto como el vector gradiente evaluado en ese mismo punto. Esta asociación es incorrecta, ya que no distingue que cada derivada parcial representa la pendiente en una dirección específica, mientras que el gradiente indica la dirección de máximo crecimiento de la función, pero no equivale a la pendiente de una recta tangente en cualquier dirección. Además, se observa el uso de notación inadecuada, tanto al representar las derivadas con notación ordinaria en lugar de parcial, como al escribir incorrectamente el vector gradiente, lo que evidencia dificultades en el manejo simbólico y en la comprensión del concepto.

Figura 16

Cálculo incorrecto de la pendiente de una recta tangente a una superficie

Handwritten work showing the calculation of the tangent line slope for the surface $z = 16 - 4x^2 - y^2$ at the point $(1, 2)$.

The surface equation is given as $z = f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$.

The student incorrectly calculates the partial derivatives:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} (16 - 4x^2 - y^2) = -8x$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy} (16 - 4x^2 - y^2) = -2y$$

At the point $(1, 2)$, the student calculates:

$$\frac{df}{dx} = -8(1) = -8$$

$$\frac{df}{dy} = -2(2) = -4$$

The student concludes that the slope of the tangent line is $f(1, 2) = (-8, -4)$.

The correct calculation for the partial derivatives should be:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} (16 - 4x^2 - y^2) = -8x$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy} (16 - 4x^2 - y^2) = -2y$$

At the point $(1, 2)$, the correct calculation is:

$$\frac{df}{dx} = -8(1) = -8$$

$$\frac{df}{dy} = -2(2) = -4$$

The correct slope of the tangent line is $f(1, 2) = (-8, 4)$.

La Tabla 10 presenta los resultados de las tareas T5, T6 y T7, correspondientes a la prueba escrita sobre los conceptos trabajados en los OA-2 y OA-3. Las tareas T5 y T6, enfocadas en la interpretación de la derivada parcial en distintos contextos registraron más del 60 % de respuestas entre correctas y parcialmente correctas. Sin embargo, en la tarea T6 se observó un mayor porcentaje de respuestas incorrectas en comparación con la T5, lo que sugiere que el contexto físico representó un desafío para el estudiantado. Por su parte, la tarea T7, orientada al cálculo de la ecuación del plano tangente a una superficie, presentó el porcentaje más alto de respuestas correctas entre las tres tareas, lo que indica una mayor apropiación del procedimiento algebraico requerido.

Tabla 10

Resultados de las tareas de los OA_2 y OA_3

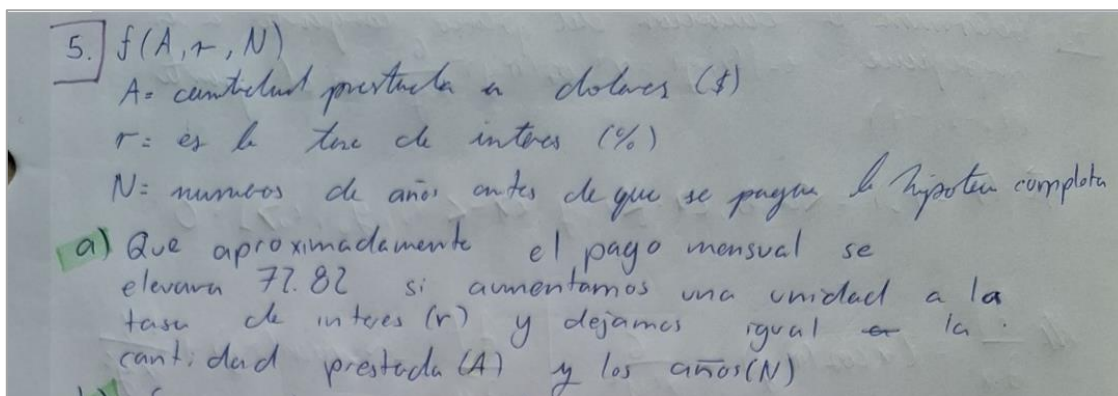
Acción matemática	Tipo de configuración cognitiva	Objeto primario	Frecuencia	Porcentaje por tipo de respuesta		
				C	PC	I
T5: Interpretación de la derivada parcial en un contexto financiero	Verbal-simbólica	Argumento	9	44.4%	33.3%	22.2%
T6: Interpretación de la derivada	Verbal-simbólica	Argumento	9	11.1%	55.6%	33.3%

parcial en un contexto físico							
T7: Determinar la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto dado	Verbal- Técnica	Procedimiento y proposiciones	8	55.6%	11.1%	33.3%	
Nota: correcta (C), parcialmente correcta (PC) e incorrecta (I).							

La figura 17 muestra la justificación de un estudiante ante la pregunta sobre el significado de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial r}$ en un contexto financiero. En su respuesta, indica que el pago mensual se incrementa aproximadamente en 77.82 unidades monetarias al aumentar la tasa de interés en una unidad, manteniendo constantes la cantidad prestada y el número de años. Esta formulación refleja una comprensión adecuada de la derivada parcial como razón de cambio instantánea en una situación contextualizada.

Figura 17

Interpretación correcta de la derivada parcial como razón de cambio en un contexto financiero



La figura 18 muestra una respuesta en la que el estudiante interpreta de forma adecuada el significado del signo de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial N}$ en un contexto financiero. Se observa que comprende que el valor de esta derivada refleja el comportamiento del pago mensual al variar el número de años del préstamo y que distingue entre los escenarios inusuales y lógicos según el signo de la derivada. Esta respuesta refleja una comprensión adecuada del significado de

la derivada parcial como razón de cambio instantánea, expresada de forma coherente con el contexto propuesto en la tarea.

Figura 18

Interpretación correcta de los signos de la derivada parcial en un contexto financiero

d) ¿Qué significaría que el valor de $\frac{\partial f}{\partial N}(93000, 14, 50)$ fuese positivo o negativo?

Si fuese positivo:

Esto implicaría que extender el plazo del préstamo (aumentar NNN) hace que el pago mensual aumente. Esto sería financieramente inusual, ya que, al aumentar el plazo del préstamo, los pagos suelen ser menores porque el monto total se divide en más meses.

Si fuese negativo:

Esto indica que, como se espera en la mayoría de los casos financieros, extender el plazo del préstamo reduce el pago mensual porque el monto total del préstamo se distribuye en más pagos.

La Figura 19 muestra una respuesta en la que el estudiante resuelve correctamente la tarea de determinar la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto dado. Como parte de su procedimiento, enuncia las reglas de derivación utilizadas, las aplica adecuadamente para obtener las derivadas parciales, evalúa los resultados en el punto indicado y construye la ecuación solicitada.

Figura 19

Determinación correcta de la ecuación del plano tangente a una superficie

Handwritten mathematical work on grid paper showing the calculation of partial derivatives and the equation of the tangent plane for the function $f(x, y) = x^2 \cos(\pi y) - \frac{6}{xy^2}$ at the point $(2, -1)$.

Left side (Partial Derivatives):

$$f = z = f(x, y) = x^2 \cos(\pi y) - \frac{6}{xy^2} \quad (2, -1) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 \cos(\pi y) - \frac{6}{xy^2}) = \frac{6}{xy^2}$$

Aplicamos la regla de la diferencia

$$= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \cos(\pi y)) - \frac{\partial}{\partial x} (\frac{6}{xy^2})$$

$$= 2x \cos(\pi y) + \frac{6}{xy^3} //$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cos(\pi y) - \frac{6}{xy^2})$$

regla de la diferencia

$$= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cos(\pi y)) - \frac{\partial}{\partial y} (\frac{6}{xy^2})$$

$$= -\pi x^2 \sin(\pi y) - (\frac{12}{xy^3})$$

$$= -\pi x^2 \sin(\pi y) + \frac{12}{xy^3} //$$

Right side (Evaluation and Tangent Plane Equation):

$$f(2, -1) = (2)^2 \cos(\pi(-1)) - \frac{6}{(2)(-1)^2}$$

$$= 4 \cos(-\pi) - 3$$

$$= 4 \cos(\pi) - 3$$

$$= -4 - 3$$

$$= -7$$

$$f_x(2, -1) = 2(2) \cos(\pi(-1)) + \frac{6}{(2)(-1)^3}$$

$$= 4 \cos(-\pi) + \frac{6}{-2}$$

$$= -4 - 3$$

$$= -7$$

$$f_y(2, -1) = -\pi(2)^2 \sin(\pi(-1)) + \frac{12}{(2)(-1)^3}$$

$$= -4\pi \sin(-\pi) - \frac{12}{2}$$

$$= 0 - 6$$

$$= -6$$

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

$$= -\frac{7}{2}(x - 2) + 6(y + 1) - 7$$

$$= -\frac{7}{2}x + 5 - 6y - 6 - 7$$

$$= -\frac{7}{2}x - 6y - 8 //$$

8. DISCUSION

La presente investigación tuvo como propósito evaluar el impacto de los objetos de aprendizaje diseñados con GeoGebra en la reducción de conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable. Los hallazgos obtenidos a partir de instrumentos validados, tales como entrevistas a docentes, diagnóstico a estudiantes, autoevaluaciones integradas en los objetos de aprendizaje, valoraciones de estos por los estudiantes y las pruebas escritas permitieron valorar los efectos del uso de estos OA en la comprensión de las derivadas parciales. En este apartado se interpretan estos resultados con base en el marco teórico y estudios previos, se analizan sus implicaciones en la enseñanza de las matemáticas en ingeniería, se reconocen las limitaciones del estudio y se proponen nuevas líneas de investigación.

La enseñanza del cálculo multivariable requiere enfoques que integren tecnología, refuercen conocimientos previos y contextualicen los conceptos en situaciones reales. Orozco-Santiago et al. (2024) destacan que herramientas como GeoGebra facilitan la visualización de conceptos complejos, siempre que su uso no se limite al ingreso de expresiones algébricas y a observar gráficos, sino que promueva la construcción e interiorización de los conceptos. Martínez-Planell y Trigueros (2021) enfatizan sobre la importancia de reforzar la geometría 3D y el álgebra vectorial, para lograr una comprensión profunda. Por su parte, Díaz (2024) subraya que la contextualización mediante aplicaciones reales ancla los conceptos abstractos en escenarios tangibles, favoreciendo su comprensión e interés en el estudiantado.

La interpretación de la derivada ordinaria en términos de un proceso algorítmico, sin considerar otros registros de representación causa en los estudiantes conflictos cognitivos que dificultan la comprensión de conceptos más avanzados como las derivadas de funciones multivariables. Lo anterior concuerda con lo señalado por Martínez-Planell et al. (Martínez-Planell et al., 2015), Lee y Moore-Russo (2015) y Nardin et al. (2017), quienes relacionan estas dificultades con la falta de coordinación entre representaciones geométricas y analíticas, conocimientos previos poco afianzados y la ausencia de una transición clara entre conceptos en dos y tres dimensiones. Los objetos de aprendizaje diseñados en esta investigación tienen como propósito reducir dichos conflictos mediante la visualización interactiva, integración

de distintos registros de representación, fortalecimiento de conceptos previos y presentación de situaciones contextualizadas.

Las herramientas del Enfoque Ontosemiótico sirvieron para orientar tanto el diseño instruccional de los objetos de aprendizaje como el análisis de los significados de la derivada parcial evidenciados por el estudiantado. Esta perspectiva permitió identificar configuraciones cognitivas asociadas a significados institucionales esperados, así como conflictos cognitivos persistentes. En línea con Galindo et al. (2022) ,“el uso de TIC se articula como mediación semiótica intencionada, que permite activar configuraciones epistémicas específicas y propiciar el tránsito entre significados institucionales y personales” (p. 8).

Un objeto de aprendizaje para la enseñanza del cálculo multivariable estructurado con base en una taxonomía instruccional adecuada, que integre applets interactivos, videos cortos que refuercen los conceptos previos, y situaciones que permitan la aplicación de los conceptos en distintos escenarios contribuye a la reducción de los conflictos cognitivos en el estudiantado al promover la visualización y comprensión de los conceptos desde diferentes registros de representación. Esto coincide con lo propuesto por Allan et al. (2019) quienes desarrollaron objetos de aprendizaje para la enseñanza de las derivadas direccionales, resaltando que la integración de herramientas interactivas y visualización dinámica facilita la comprensión de este objetos matemático y mejora la transición entre representaciones algebraicas y gráficas.

En contraste con estudios como los de Aguilar-Sánchez et al. (2023) que se enfocaron en el diseño de Objetos de Aprendizaje sin abordar su implementación, y el de Ryokiti-Homa (2019) que exploró recursos tridimensionales sin una secuencia instruccional claramente definida, esta investigación propuso, aplicó y valoró OA con actividades guiadas, visualización interactiva y autoevaluaciones. Además, se consideraron los aportes docentes en su diseño, lo que permitió analizar los conflictos cognitivos del estudiantado y orientar mejoras didácticas desde una perspectiva más integral.

El análisis de los resultados mostró avances en la comprensión de la derivada parcial como razón de cambio instantánea en contextos aplicados, superando el enfoque procedimental evidenciado en el diagnóstico inicial. Sin embargo, persistieron conflictos cognitivos en su

interpretación geométrica como pendiente de una recta tangente a una superficie en un punto dado. Esta dificultad coincide con lo reportado por Lee y Moore-Russo (2015), quienes señalan que el estudiantado tiende a trasladar de manera inapropiada la definición de pendiente en dos dimensiones a contextos tridimensionales, sin considerar la dependencia de la dirección.

Aunque los objetos de aprendizaje facilitaron la comprensión de algunos significados de la derivada parcial, los hallazgos muestran que persisten dificultades en el estudiantado al asociarla con la pendiente de la recta tangente a una superficie. Esto indica que, si bien los OA constituyen un recurso didáctico valioso, su impacto depende del acompañamiento docente, del tiempo disponible y del diseño instruccional. En consecuencia, la hipótesis planteada se cumplió parcialmente.

Dado que la muestra fue seleccionada por conveniencia, los resultados de este estudio no pueden generalizarse a otras poblaciones. Sin embargo, el modelo de diseño instruccional de los objetos de aprendizaje propuestos puede adaptarse a distintas asignaturas que aborden conceptos abstractos, donde el uso de recursos visuales e interactivos favorezca la comprensión. Su aplicación en nuevos contextos podría enriquecer las estrategias didácticas y aportar evidencias sobre su efectividad en el aprendizaje de contenidos complejos.

Entre las limitaciones de esta investigación destaca que la mayoría de los estudiantes participantes eran repetidores del curso de cálculo multivariable, algunos de los cuales solo cursaban esta materia, lo que influyó en los resultados debido a que sus conocimientos previos no estaban consolidados. Además, el tiempo destinado al desarrollo de los objetos de aprendizaje representó un desafío para algunos estudiantes, quienes manifestaron necesitar más tiempo para revisar el contenido y completar las actividades. Finalmente, la asistencia irregular de los estudiantes a las clases previas a la implementación de los OA, en las que se trabajaron conceptos previos necesarios para abordar la derivada parcial mediante el uso de GeoGebra, también limitó el alcance de los resultados obtenidos.

Finalmente, con base en los resultados obtenidos, surge el interrogante: ¿Serían diferentes los resultados si los conceptos desarrollados en los OA se vincularan con situaciones propias del campo de la ingeniería en computación o telecomunicaciones? Esta pregunta permite

adoptar una postura crítica frente a los alcances del presente estudio y abren posibilidades para continuar explorando el papel de los recursos digitales en la enseñanza de conceptos matemáticos complejos.

9. CONCLUSIÓN

En esta investigación se planteó el problema de la falta de comprensión de conceptos abstractos del cálculo multivariable, tomando como caso específico el estudio de las derivadas parciales. Con base en esto, se diseñaron tres objetos de aprendizaje apoyados en GeoGebra orientados a la reducción de conflictos cognitivos que dificultan el aprendizaje de este tema. El modelo instruccional desarrollado se fundamentó en la necesidad de fortalecer la comprensión del estudiantado a través de recursos interactivos que favorezcan la articulación de registros de representación, la interpretación geométrica del concepto y su vinculación con situaciones contextualizadas.

Los resultados evidenciaron un impacto favorable de los objetos de aprendizaje en la construcción de algunos significados de la derivada parcial, especialmente en su interpretación como razón de cambio instantánea y en la aplicación de procedimientos algebraicos para la obtención de la ecuación del plano tangente. No obstante, se identificaron conflictos cognitivos en tareas que implicaban interpretar geométricamente la derivada parcial, así como dificultades en la articulación entre registros de representación de este concepto, particularmente al vincular expresiones verbales con representaciones simbólicas y gráficas, por lo cual el objetivo principal de este estudio se cumplió parcialmente.

El modelo propuesto aporta al campo de la enseñanza del cálculo multivariable al evidenciar que el uso estructurado de objetos de aprendizaje, integrados con applets de GeoGebra, favorece la comprensión de los distintos significados de la derivada parcial, la visualización dinámica de los objetos matemáticos involucrados y la articulación entre los distintos registros de representación. Asimismo, contribuye metodológicamente al proponer un modelo de diseño instruccional replicable en otros contenidos matemáticos que representan un nivel de abstracción complejo.

Es importante resaltar que el carácter iterativo de la investigación basada en diseño se manifestó en un proceso de mejora continua de los objetos de aprendizaje, a partir de la retroalimentación obtenida en cada fase. Las valoraciones del estudiantado, las

autoevaluaciones y las opiniones de expertos permitieron realizar ajustes en la organización del contenido, la extensión del texto y la claridad de los ejemplos, así como incorporar videos explicativos y modificar los applets interactivos desarrollados con GeoGebra. Estos cambios respondieron a las necesidades detectadas durante la implementación de cada OA y contribuyeron a una comprensión más profunda del concepto de derivada parcial por parte del estudiantado.

Como proyección, se considera pertinente desarrollar investigaciones que analicen el impacto de implementar objetos de aprendizaje con acompañamiento docente, especialmente en tareas que promuevan la interpretación geométrica de conceptos en el espacio tridimensional. También sería relevante estudiar la aplicación de esta propuesta en otros niveles educativos o áreas disciplinares, con el fin de evaluar su alcance en contextos diversos. Por otra parte, se podrían explorar investigaciones orientadas a integrar herramientas de inteligencia artificial como apoyo al aprendizaje del cálculo multivariable, particularmente en el uso de retroalimentación inmediata y adaptativa que ayude al estudiantado a identificar errores, comprender los procedimientos realizados y reforzar los conceptos matemáticos involucrados.

10. REFERENCIAS

- Acevedo, A., Vergel, M., & Nieto, C. (2020). Transposición didáctica para apoyar la enseñanza de la función lineal y afin para estudiantes de cálculo usando las NTIC. *Revista Aglala*, 11(2), 200–221.
- Aguilar- Sánchez, J. F., Ospina, Y. T., & Jimenez, W. (2023). Integración de GeoGebra con Moodle para la construcción de recursos digitales en matemáticas. *Academia y Virtualidad*, 16(1), 13–29. <https://doi.org/10.18359/ravi.5654>
- Aguilar, P., & Oktac, A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía. *Relime*, 7(2), 117–144.
- Allan, M. C., Parra, S., & Martins, A. (2019). Objetos de Aprendizaje para la enseñanza de Derivadas Direccionales: diseño, implementación y evaluación. *XIV Congreso Nacional de Tecnología En Educación y Educación En Tecnología*, 125–134. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/90736>
- Andrade-Aréchiga, M., López, G., & López-Morteo, G. (2012). Assessing effectiveness of learning units under the teaching unit model in an undergraduate mathematics course. *Computers & Education*, 59, 594–606. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.03.010>
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus Early Transcendentals* (10a ed.). Wiley.
- Aranda, C., & Callejo, M. L. (2017). Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: Dos estudios de casos. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 31(58), 777–798. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13>
- Bakó, M. (2024). Applicability of ChatGPT for generating and calculating partial derivatives of multivariable functions. *Journal of Agricultural Informatics*, 15(2), 37–44. <https://doi.org/10.17700/jai.2024.15.2/730>
- Ballina, F. (2013). *Paradigmas y perspectivas teórico-metodológicas en el estudio de la administración*. Universidad Nacional Autónoma de Mexico. <https://www.uv.mx/iiesca/files/2013/01/paradigmas2004-2.pdf>

- Batschelet, E. (1975). *Introduction to Mathematics for Life Scientists* (2a ed.). Springer - Verlag.
- Bekene, T. (2020). Implementation of GeoGebra a Dynamic Mathematical Software for Teaching and Learning of Calculus in Ethiopia. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 11(9), 838–860. <https://doi.org/10.14299/ijser.2020.09.01>
- Benito, B., & Salinas, J. M. (2016). La Investigación Basada en Diseño en Tecnología Educativa Design-Based Research in Educational Technology. *Revista Interuniversitaria de Investigación En Tecnología Educativa (RIITE)*, 0, 44–59.
- Bonilla, A. M., Márquez, J. E., Benavidez, L. G., & Gutiérrez, F. R. (2024). Inteligencia Artificial Generativa (IAG) en la educación matemática. *EIEIE ACOFI 2024*, 1–12. <https://doi.org/https://doi.org/10.26507/paper.3672>
- Borji, V., Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2024). Students’ geometric understanding of partial derivatives and the locally linear approach. *Educational Studies in Mathematics*, 115(1), 69–91. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10242-z>
- Branch, R. M. (2009). Instructional Design: The ADDIE Approach. In *Department of Educational Psychology and Instructional Technology University of Georgia*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09506-6>
- Cheong, K. H., Chen, J. S., Kang, K., & Yeo, D. J. (2023). Supporting Students’ Visualization of Multivariable Calculus Partial Derivatives via Virtual Reality. *Mathematics*, 11(831), 1–11. <https://doi.org/10.3390/math11040831>
- Cheong, K. H., Chu, C. E., Ng, W. K., & Yeo, D. J. (2024). Implementing GeoGebra 3D Calculator With Augmented Reality in Multivariable Calculus Education. *IEEE Access*, 12, 85455–85464. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3394531>
- Chow, Tuck-Choy, F., & Treagust, D. F. (2013). An Intervention Study Using Cognitive Conflict to Foster Conceptual Change. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 36(1), 44–64.

- D'Amore, B., & Godino, J. (2007). El Enfoque Ontosemiótico Como Un Desarrollo De La Teoría Antropológica En Didáctica De La Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, 10(2), 191–218.
- De Benito, B., & Salinas, J. M. (2016). La Investigación Basada en Diseño en Tecnología Educativa. *Revista Interuniversitaria de Investigación En Tecnología Educativa*, 0, 44–59. <https://doi.org/10.6018/riite2016/260631>
- De Jesús, L. E., & Ayala, S. (2021). Diseño Instruccional en ambientes virtuales, basado en el Modelo ADDIE. In *El Diseño Instruccional. Elemento clave para la innovación en el aprendizaje, modelos y enfoques* (1a ed.). Astra ediciones.
- Dehaybes, M. Al, Deprez, J., Van- Kampen, P., & De Cock, M. (2025a). Students' understanding of two-variable calculus concepts in mathematics and physics contexts. I. the partial derivative and the directional derivative. *Physical Review Physics Education Research*, 21(1), 1–16. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.21.010131>
- Dehaybes, M. Al, Deprez, J., Van- Kampen, P., & De Cock, M. (2025b). Students' understanding of two-variable calculus concepts in mathematics and physics contexts. II. The gradient and the Laplacian. *Physical Review Physics Education Research*, 21(1), 1–15. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.21.010132>
- Delgado, J. R., & Medina, N. M. (2019). Uso del blog como herramienta para el aprendizaje significativo de la derivada en estudiantes de ingeniería. *Revista Eelectrónica de Humanidades , Educación y Comunicación Social, REDHECS*, 1(13), 789–800.
- Díaz, J. L. (2024). Integrating the anthropological theory of didactics in multivariate calculus education: Challenges, pedagogical shifts, and innovative activities. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(1), 695–707. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6>
- Diez-Martínez, E., & Morales-Velasco, R. (2020). Codiseño de Objetos de Aprendizaje OA como estrategia de capacitación a docentes de Educación Superior. *Eduotec. Revista*

Electrónica de Tecnología Educativa, 74, 114–126.
<https://doi.org/10.21556/edutec.2020.74.1765>

Dorko, A., & Weber, E. (2014). Generalising calculus ideas from two dimensions to three: how multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 269–287.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2014.919873>

Escobar-Pérez, J., & Cuervo- Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances En Medición*, 6, 27–36.

Esteban, P., Trefftz, H., & Restrepo, J. (2006). Estrategias de visualización en el cálculo de varias variables. *Revista Educación y Pedagogía*, 18(45), 121–131.

Esteve, F., Cela, J., & De Benito, B. (2019). DBR: una estrategia metodológica para investigar en tecnología educativa. In M. Gisbert, V. Esteve, & L. Lázaro, J (Eds.), *¿Cómo abordar la educación del futuro? Conceptualización, desarrollo y evaluación desde la competencia digital docente* (pp. 79–92). Octaedro.
<http://hdl.handle.net/10234/190114>

Fisher, C. B. (2008). *Students' conceptualizations of multivariable limits*. Oklahoma State University.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques: aplicacions a les derivades* [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona].
<http://www.tdx.cat/TDX-0408108-104902>

Fúneme, C. C. (2019). El aula invertida y la construcción de conocimiento en matemáticas. El caso de las aplicaciones de la derivada. *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, 45, 159–174. <https://doi.org/10.17227/ted.num45-9840>

Gagné, R. M. (1975). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción*. Diana.

Galindo, M., Breda, A., Chamorro, D., & Alvarado, H. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students

- in Chile. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(7), 1–14. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12162>
- Gallardo, M., Galindo, M., & Chamoro, D. (2022). Diseño de enseñanza del cálculo mediante la metodología Flipped Classroom en estudiantes de Ingeniería. *Nuevas Ideas En Informática Educativa*, 16, 345–350.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39((1-2)), 127–135.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiotica de investigación en Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49–68). Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación En Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2), 1–24. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25>
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque Ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones* (1a ed.). Aula Magna McGraw Hill.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 14(3), 325–335.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (2020). El Enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 47–59. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education*, 1(1), 1–22.

- Hernández-Nieto, R. (2011). *Instrumentos de Recolección de Datos en Ciencias Sociales y Ciencias Biomédicas*. Universidad de los Andes.
- Hernández, R. V., Mariño, L. F., & Vergel, M. (2015). Types of knowledge in resolution of problems with double integrals, using Mathematic Software. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 6(3), 33. <https://doi.org/10.22335/rlct.v6i3.670>
- Herrera, C., & Cruz, S. (2024). Desafíos en la enseñanza del Cálculo en contextos universitarios en un enfoque por competencias. *Plumilla Educativa*, 33(1), 1–27. <https://doi.org/10.30554/p.e.1.5099.2024>
- Hong, Y. Y., & Thomas, M. O. J. (2015). Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. *Mathematics Education Research Journal*, 27(2), 183–200. <https://doi.org/10.1007/s13394-014-0135-6>
- Hoyos, E., Acosta, C., Aristizábal, J., Mesa, M., Trujillo, C., Rincón, J., Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2021). Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas. *Tecné, Episteme y Didaxis* ., 49, 123–142. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.17227/ted.num49-9574>
- Hughes-Hallett, D. (2013). *Calculus Single y Multivariate* (6ta ed.). Wiley.
- IEEE. (2002). Standard for Learning Object Metadata. *Learning Technology Standards Committee (LTSC)*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26170.52166>
- Johnson, M. T., Stanhope, S. R., Ferguson, L., Kim, B., & Jerome, R. (2023). Improving Student Preparation and Pass Rates in Flipped Multivariable Calculus with Low-Stakes, Daily Quizzes. *PRIMUS*, 33(7), 714–728. <https://doi.org/10.1080/10511970.2022.2163329>
- Jones, S. R., & Dorko, A. (2015). Students' understandings of multivariate integrals and how they may be generalized from single integral conceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 40, 154–170. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.09.001>
- Kay, R., & Kletskin, I. (2012). Evaluating the use of problem-based video podcasts to teach

- mathematics in higher education. *Computers and Education*, 59(2), 619–627.
<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.03.007>
- Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. In *Encyclopedia of Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- L’Allier, J. J. (1997). *Frame of Reference: NETg’s Map to the Products, Their Structure and Core Beliefs*.
<http://web.archive.org/web/20020615192443/www.netg.com/research/whitepapers/frameferef.asp>
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2000). *Cálculo 2 de varias variables* (9a ed.). Mc Graw Hill.
- Lee, D., & Moore-Russo, D. (2015). Impact of explicit presentation of slopes in three dimensions on students’ understanding of derivatives in multivariable calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 357–384.
<https://doi.org/10.1007/s10763-014-9542-0>
- Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7a ed.). Oxford University Press.
- Loachamín, H. D., Vargas, Á. P., Andrade, J. V., & Puente, P. F. (2023). Enseñanza, aprendizaje y enfoque de la matemática en la ingeniería. *AlfaPublicaciones*, 5(3.2), 6–20. <https://doi.org/10.33262/ap.v5i3.2.400>
- Maldonado, J., Bermeo, J., & Vélez, F. (2017). *Diseño, Creación y Evaluación de Objetos de Aprendizaje. Metodología DCREVOA 2.0*. CEDIA.
- Marsden, J. E., Tromba, A. J., & Weinstein, A. (1993). *Basic Multivariable Calculus* (2da ed.). Springer- Verlag.
- Martínez-Planell, R., & Mcgee, D. (2015). Student understanding of derivatives of functions of two variables. In *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, 355–362.

- Martínez-Planell, R., Trigueros-Gaisman, M., & McGee, D. (2017). Students' understanding of the relation between tangent plane and directional derivatives of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior*, 46, 13–41. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.001>
- Martínez-planell, R., & Trigueros, M. (2020). Review of our work on the teaching and learning of functions of two variables. *INDRUM 2020*, 1–11.
- Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 365–384. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9408-8>
- Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM - Mathematics Education*, 53(3), 695–707. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6>
- Martínez-planell, R., Trigueros, M., & Borji, V. (2024). Building on slope : results of a second research cycle on the differential calculus of two-variable functions. *Fifth Conference of the International Net Work for Didactic Research in University Mathematics*, 1–12.
- Martínez-Planell, R., Trigueros, M., & Borji, V. (2022). Slope and the Differential Calculus of Two-Variable Functions. *24th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME 24)*, 366–373.
- Martínez-Planell, R., Trigueros, M., & McGee, D. (2015). On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 57–86. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.03.003>
- Medina -Herrera, L. M., Aguilar-Abalo, M., & Juarez-Ordoñez, S. (2019). Learning calculus with augmented reality and virtual environments. *11th International Conference on Education Technology and Computers (ICETC '19)*, 18–22. <https://doi.org/10.1145/3369255.3369271>
- Mendezabal, M. J. N., & Tindowen, D. J. C. (2018). Improving students' attitude, conceptual

- understanding and procedural skills in differential Calculus through microsoft mathematics. *Journal of Technology and Science Education*, 8(4), 385–397. <https://doi.org/10.3926/jotse.356>
- Miklavcic, S. J. (2020). *An Illustrative Guide to Multivariable and Vector Calculus* (1a ed.). Springer Nature Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-33459-8>
- Milenković, A., & Vučićević, N. (2024). Advancing students' achievements in multivariable calculus education through CSCL. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(2), 1–13. <https://doi.org/10.29333/iejme/14472>
- Miranda, S., & Ortiz, J. A. (2020). Los paradigmas de la investigación: un acercamiento teórico para reflexionar desde el campo de la investigación educativa. *Revista Iberoamericana Para La Investigación y El Desarrollo Educativo (RIDE)*, 11(21), 1–18. <https://doi.org/10.23913/ride.v11i21.717>
- Molina- Mora, J. A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*, 31(2), 19–36. <https://doi.org/10.15359/ru.31-2.2>
- Morales- Morgado, E. M. (2007). *Gestion del conocimiento en sistema e-learning, basado en objetos de aprendizaje, cualitativa y pedagogicamente definidos* [Tesis doctoral, Universidad de Salamanca]. <https://doi.org/10.14201/gredos.21864>
- Morales -Velasco, R. A. (2022). *Implementación de un proceso de diseño de OA centrado en el docente como autor, en el ámbito de la educación superior* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Querétaro]. <https://ri-ng.uaq.mx/xmlui/handle/123456789/3705>
- Morales, E., García, F., & Barrón, Á. (2007). A proposal to define LOs together with pedagogical granularity level. *CEUR Workshop Proceedings*, 361.
- Morales, E. M., García, F. J., & Barrón, A. (2006). LOs instructional design based on an ontological model to improve their quality. *8th International Symposium on Computers in Education Proceedings, SIIE 2006, January 2006*, 441–448.

- Morales, E. M., Gómez, D. A., & García, F. J. (2008). HEODAR: Herramienta para la evaluación de objetos didácticos de aprendizaje reutilizables. In J. . Velázquez, F. J. García, & A. B. GiL (Eds.), *Actas del X Simposio Internacional de Informática Educativa - SIIIE'08* (pp. 1–6). Ediciones Universidad de Salamanca. <http://hdl.handle.net/10366/126551>
- Nardín, A., Montalván, M., Salgado, M., & Pérez, O. (2017). Errores de los estudiantes en el tema de derivada de funciones de varias variables. *Revista Paradigma*, 38(1), 312–330.
- Nobre, C. N., Meireles, M. R. G., Vieira, N., Resende, M. N. de, Costaosta, L. E. da, & Rocha, R. C. da. (2016). The use of Geogebra software as a Calculus teaching and learning too. *Informatics in Education*, 15(2), 253–267. <https://doi.org/10.15388/infedu.2016.13>
- Nzuki, F. (2016). Examining graphing calculator affordances in learning pre-calculus among undergraduate students. *International Journal of Information and Communication Technology Education*, 12(2), 35–50. <https://doi.org/10.4018/IJICTE.2016040104>
- Ocal, M. F. (2017). The Effect of Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Applications of Derivative. *Higher Education Studies*, 7(2), 67. <https://doi.org/10.5539/hes.v7n2p67>
- Okach, D., Karuku, S., & King'endo, M. (2020). Manifestations and meanings of cognitive conflict among mathematics students in Embu, Kenya. *Educational Research and Reviews*, 15(11), 690–699. <https://doi.org/10.5897/err2020.4061>
- Orozco-Santiago, J., Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2024). Learning two-variable functions using 3D dynamic geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–17. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321593>
- Orozco, C. M. (2017). *Objetos de Aprendizaje con eXeLearning y GeoGebra para la definición y representación geométrica de operaciones con vectores y sus aplicaciones* [Tesis doctoral, Universidad De Salamanca]. <https://doi.org/10.14201/gredos.133003>

- Pereira, Z. (2011). Mixed Method Designs in Education Research: a Particular Experience. *Revista Electrónica Educare*, XV, 1409–1451. <https://www.redalyc.org/pdf/1941/194118804003.pdf>
- Peter - Mkhathshwa, T. (2023). A quantitative and covariational reasoning investigation of students' interpretations of partial derivatives in different contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(4), 511–533. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1958941>
- Pino-Fan, L. R. (2011). *Conocimiento Didáctico-Matemático de los Profesores sobre la Derivada: Clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Académica Española.
- Polsani, P. R. (2003). Use and abuse of reusable learning objects. *Journal of Digital Information*, 3(4).
- Ramírez-Santamaría, B. A. (2021). GeoGebra en 2D y 3D como recurso didáctico en un curso de integración múltiple: una experiencia de enseñanza-aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet*, 21(1), 1–17. <https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/>
- Reeves, T. C. (2006). Design research from a technology perspective. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 52–66). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203088364-13>
- Rojas- Flórez, L. C., Mejía- Velasco, H. R., & Esteban- Duarte, P. V. (2019). Conceptualización de la derivada direccional a partir de la pendiente de una recta en el espacio. *El Cálculo y Su Enseñanza*, 12, 13–26. <https://doi.org/10.61174/recacym.v12i1.31>
- Rojas, L., Mejía-Velasco, H. R., & Esteban, P. (2019). Conceptualización de la derivada direccional a partir de la pendiente de una recta en el espacio. *El Cálculo y Su Enseñanza, Enseñanza de Las Ciencias y La Matemática*, 12, 13–26.
- Rossetti, S. R. (2021). *Objetos de aprendizaje como propuesta de innovación educativa para*

mejorar el aprendizaje de estudiantes del área económico administrativa de la Universidad de Sonora [Tesis Doctoral] [Universidad Autónoma de Querétaro].
<http://ri-ng.uaq.mx/handle/123456789/3376>

Ruiz -Ledesma, E. F., Gutiérrez- García, J. J., & Garay -Jiménez, L. I. (2018). Visualizando problemas de la derivada con aplicaciones en dispositivos móviles. *Innovación Educativa*, 18(76), 39–68.

Ruiz, E. F. (2019). Estudio sobre las dificultades que tienen estudiantes de nivel superior en la resolución de problemas de cálculo, y empleo de un escenario de aprendizaje tecnopedagógico como apoyo en el trabajo del aula. *Nova Scientia*, 11(23), 258–295.
<https://doi.org/10.21640/ns.v11i23.1840>

Ryokiti-Homa, A. I. (2019). Objetos de aprendizaje tridimensionales contruidos con el software Geogebra. *Revista Paradigma*, 40(1), 69–79.

Santos, Y. (2010). ¿Cómo se pueden aplicar Los distintos paradigmas de la investigación científica a la cultura física y el deporte? *Podium*, 1–10.

Schuster, A., Puente, M., Andrada, O., & Maiza, M. (2013). La metodología cualitativa, herramienta para investigar los fenómenos que ocurren en el aula. La investigación educativa. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación En Ciencias y Tecnología*, 4(2), 109–139.

Scremin, G., Quartieri, M. T., Oliveira, E. C., Palacios, J. luis, & Felix, J. L. P. (2018). O uso de tecnologia no ensino e na aprendizagem de Cálculo Diferencial. *Revista Docência Do Ensino Superior*, 8(2), 119–139. <https://doi.org/10.35699/2237-5864.2018.2444>

Sevimli, E. (2016). Do calculus students demand technology integration into learning environment? case of instructional differences. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 13(1). <https://doi.org/10.1186/s41239-016-0038-6>

Sigel, I. E. (1979). On Becoming a Thinker: A Psychoeducational Model. *Educational Psychologist*, 14(1), 70–78. <https://doi.org/10.1080/00461527909529208>

- Stewart, J. (2018). *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas* (8a ed.). Cengage Learning.
- Tamayo, E. D. (2013). Implicaciones didácticas de Geogebra para el tratamiento de los tipos de funciones en estudiantes del último grado de secundaria. *Apertura*, 5(2), 58–68.
- Tarmizi, R. A., Mohd, A. F., Abu, K., & Yunus, A. S. (2010). Effects of Technology Enhanced Teaching on Performance and Cognitive Load in Calculus. *International Journal of Education and Information Technologies*, 4(2), 109–120.
- Thomas, G. B. (2010). *Cálculo varias variables* (12a ed.). Pearson.
- Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 3–19. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5>
- Trigueros, M., Martínez-Planell, R., & McGee, D. (2018). Student Understanding of the Relation between Tangent Plane and the Total Differential of two-Variable Functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 181–197. <https://doi.org/10.1007/s40753-017-0062-5>
- Uygur- Kabaël, T. (2011). Generalizing single variable functions to two-variable functions, function machine and APOS. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, 11(1), 484–499.
- Vigo, K., & Ferreira, M. J. (2019). Las aprehensiones en el registro gráfico para el estudio de la derivada parcial. *Educación*, 28(55), 203–224. <https://doi.org/10.18800/educacion.201902.010>
- Vigo, K., & Gonzales, C. (2017). Una organización matemática de la derivada de funciones de dos variables en un libro de texto para ingeniería. In L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 280–289). CLAME, A.C. <http://clame.org.mx/uploads/actas/alme30.pdf>
- Weber, E. (2010). *Students' ways of thinking about two-variable functions rate of change in space* [Tesis Doctoral, Arizona State University].

<https://www.proquest.com/docview/1009080743>

- Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' Images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics*, 87, 67–85.
<https://doi.org/10.1007/S10649-014-9548-0>
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 27(1), 77–120.
- Wiley, D. A. (2000). *Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and taxonomy*. <http://reusability.org/read/chapters/wiley>
- Williner, B. (2014). Habilidades matemáticas referidas el concepto de Derivada y uso de tecnología. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 87, 101–124.
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/87/Articulos_07.pdf
- Williner, B., Favieri, A., & Scorzo, R. (2020). Clasificación de tareas con software. Propuesta usando la aplicación GeoGebra para dispositivos móviles en carreras de ingeniería. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 293–309.
- Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). *Matemáticas 3 Cálculo de varias variables* (1a ed.). Mc Graw Hill.
- Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 10(1), 145–175.

ANEXOS

ANEXO A. Formato de validación de juicio de expertos

Respetado juez:

Usted ha sido seleccionado para evaluar el instrumento de **Entrevista a docentes** que hace parte de la investigación: **Evaluación de conflictos cognitivos en la enseñanza del cálculo multivariable mediante Objetos de Aprendizaje en GeoGebra**. La evaluación de los instrumentos es de gran relevancia para lograr que sean válidos y que los resultados obtenidos a partir de éstos sean utilizados eficientemente; aportando tanto al área investigativa de la tecnología educativa como a sus aplicaciones. Agradecemos su valiosa colaboración.

Nombre y apellido del Juez: _____

Formación académica: _____

Áreas de experiencia profesional: _____

Tiempo: _____ Cargo actual: _____

Institución: _____

Objetivo de la investigación: Evaluar el impacto de un Objeto de Aprendizaje (OA) diseñado con eXelearning y GeoGebra en la reducción de conflictos cognitivos durante la enseñanza de cálculo multivariable, con el propósito de mejorar la comprensión de los estudiantes.

Objetivo del juicio de expertos: Determinar la validez de contenido de la entrevista.

Objetivo de la entrevista: Identificar las concepciones de los docentes sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la asignatura de cálculo multivariable, en relación con los aspectos didácticos, disciplinarios y tecnológicos.

De acuerdo con los siguientes indicadores califique cada uno de los ítems según corresponda (Escobar-Pérez y Cuervo- Martínez, 2008):

Categoría	Calificación	Indicador
Suficiencia Los ítems que pertenecen a una misma dimensión bastan para obtener la medición de esta área	No cumple con el criterio	Los ítems no son suficientes para medir la dimensión.
	Bajo Nivel	Los ítems miden algún aspecto de la dimensión, pero no corresponden con la dimensión total.
	Moderado nivel	Se deben incrementar algunos ítems para poder evaluar la dimensión completamente.
	Alto nivel	Los ítems son suficientes.

Claridad El ítem se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas	No cumple con el criterio	El ítem no es claro.
	Bajo nivel	El ítem requiere bastantes modificaciones o una modificación muy grande en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de estas.
	Moderado nivel	Se requiere una modificación muy específica de algunos de los términos del ítem.
	Alto nivel	El ítem es claro, tiene semántica y sintaxis adecuada.

Categoría	Calificación	Indicador
Coherencia El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo.	No cumple con el criterio	El ítem no tiene relación lógica con la dimensión.
	Bajo Nivel	El ítem tiene una relación tangencial con la dimensión.
	Moderado nivel	El ítem tiene una relación moderada con la dimensión que está midiendo.
	Alto nivel	El ítem se encuentra completamente relacionado

		con la dimensión que está midiendo.
No cumple con el criterio		El ítem puede ser eliminado sin que se vea afectada la medición de la dimensión.
Relevancia	Bajo nivel	El ítem tiene alguna relevancia, pero otro ítem puede estar incluyendo lo que mide éste.
El ítem es esencial o importante, es decir debe ser incluido.	Moderado nivel	El ítem es relativamente importante.
	Alto nivel	El ítem es muy relevante y debe ser incluido.

Una vez presentadas las categorías, debe calificarlas con un número del 1 al 4. En la planilla de evaluación, las categorías están escritas de forma abreviada. Si lo considera pertinente, puede agregar observaciones en la columna correspondiente.

Dimensión	Ítem	Suf.	Coh.	Rel.	Cla.	Observaciones generales
Aspectos curriculares						
Aspectos disciplinares						
Mediación tecnológica						

ANEXO B. Versión final de la entrevista validada

Dimensión	Ítems
Aspectos didácticos	1. ¿Cuánto tiempo tiene dictando la asignatura de cálculo multivariable?
	2. ¿Qué estrategias de aprendizaje implementa para el desarrollo de esta materia?
	3. ¿Qué tipo de materiales didácticos utiliza para el desarrollo de sus clases?
Fundamentación disciplinar	4. ¿Qué prerequisites conceptuales y procedimentales se necesitan para el estudio de esta materia?
	5. ¿Qué conceptos considera usted que representan mayor dificultad para los estudiantes?
	6. ¿Cuáles considera usted que son los conflictos cognitivos que presentan los estudiantes respecto a esta asignatura?
	7. ¿Qué porcentaje del programa utiliza para retomar los conceptos de derivación e integración?
Mediación tecnológica	8. ¿Qué recursos tecnológicos educativos utiliza para el desarrollo de su clases?
	9. ¿Cómo utiliza estos recursos?
	10. ¿Con que frecuencia utiliza estos recursos?
	11. ¿Todos los estudiantes tienen acceso a estos recursos?

	12. ¿Qué conocimiento tienen los estudiantes sobre el uso de estos recursos?
	13. ¿Cuáles son las actitudes de los estudiantes respecto al uso de la tecnología en las clases?
	14. ¿Utiliza la tecnología educativa para el desarrollo de evaluaciones?

ANEXO C. Instrumento de validación de los OA por parte de los expertos

CRITERIOS PEDAGÓGICOS PARA EVALUAR OBJETOS DE APRENDIZAJE						
CATEGORIA PSICOPEDAGÓGICA						
MOTIVACIÓN Y ATENCIÓN	N/S	Muy deficiente	Deficiente	Aceptable	Alta	Muy alta
Presentación atractiva y original: captar la atención de los estudiantes y mantener el interés.						
Información relevante: entregar información importante para ayudar a comprender los contenidos.						
Participación del alumno: explica claramente su participación en el desarrollo del programa.						
DESEMPEÑO PROFESIONAL						
Adecuación a competencias profesionales: adecuar la utilidad de los contenidos y actividades para las necesidades y desempeño profesional de los estudiantes.						
NIVEL DE DIFICULTAD ADECUADO A LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS ESTUDIANTES						
Profundidad pertinente: adecuar profundidad según conocimientos previos y nivel de complejidad que el						

estudiante es capaz de comprender						
Nivel de Lenguaje: adecuar lenguaje utilizado (científico, etc.) a los conocimientos previos de los estudiantes						
INTERACTIVIDAD						
Nivel de interactividad: promover actividades abiertas, diversas maneras de resolver problemas, proporcionar realimentación y corrección de errores						
Tipo de interactividad: adecuar interactividad a los objetivos de la metodología, los niveles pueden ser: activos, expositivos o mixtos						
CREATIVIDAD						
Promover el desarrollo e iniciativa y el aprendizaje autónomo.						
Promover el desarrollo de habilidades metacognitivas y estrategias de aprendizaje que les permita planificar, regular y evaluar su propia actividad intelectual.						
CATEGORIA DIDÁCTICO-CURRICULAR	N/S	Muy deficiente	Deficiente	Aceptable	Alta	Muy alta
CONTEXTO						
Nivel formativo adecuado a la situación educativa, por ejemplo: educación secundaria, etc.						
Descripción de la unidad: Presenta una introducción y/o resumen que explica de forma clara en qué consiste la unidad.						
OBJETIVOS						
Correctamente formulado: generalmente los objetivos se elaboran según la fórmula: verbo infinitivo + contenido + circunstancia						
Factible: puede ser alcanzado.						

Indica lo que se espera sea aprendido: el alumno debe ser consciente de lo que tiene que aprender.						
Coherente con los objetivos generales: los objetivos específicos deben ayudar a cumplir los objetivos generales.						
TIEMPO DE APRENDIZAJE						
El tiempo de duración estimado en el desarrollo de la unidad es adecuado al tiempo disponible.						
CONTENIDOS						
Presenta información suficiente y adecuada al nivel educativo.						
Adecuar los contenidos al objetivo propuesto.						
Presentar información en distintos formatos (texto, audio, etc.).						
Permite interactuar con el contenido a través de enlaces.						
Presentar información complementaria para ayudar a los alumnos que deseen profundizar sus conocimientos						
Cuidar que la información que presenta sea confiable, (datos exactos, referencias bibliográficas, etc.).						
Presentar la información de forma adecuada para ayudar a una mejor comprensión del contenido						
Verificar que el idioma empleado en los contenidos sea pertinente a los objetivos de enseñanza.						
ACTIVIDADES						
Ayudan a reforzar los conceptos						
Promueve la participación: estimulan la reflexión y la crítica, esto es el cuestionamiento de las propias						

ideas para la integración de la nueva información a los conocimientos preexistentes						
Presenta distintos tipos de estrategias de aprendizaje, según sea el caso (resolución de problemas, estudio de caso, etc.)						
Presenta actividades de evaluación y práctica						
Se propone modalidades trabajo según sea el caso (individual, colaborativa y/o cooperativa)						
RETROALIMENTACIÓN						
Se refuerzan los conocimientos a través de ejercicios, autoevaluaciones, etc.						
CRITERIOS DE DISEÑO TÉCNICO PARA EVALUAR OBJETOS DE APRENDIZAJE						
DISEÑO DE INTERFAZ						
TEXTO	N/S	Muy deficiente	Deficiente	Aceptable	Alta	Muy alta
Organizar en párrafos cortos, sin romper los párrafos ni la continuidad de las ideas que se exponen en ellos.						
Utilizar hipertexto para dividir información extensa en múltiples páginas						
Marcar bloques de contenido a través de títulos o epígrafes						
Usar mayúsculas para los títulos, encabezados o resaltar textos puntuales						
Evitar subrayados cuando no hay enlaces.						
Tipo de letra legible y tamaño adecuado						
Los colores y tipos de letras aportan información por sí mismos.						
No presentar ningún error ortográfico.						
IMAGEN						
Aclarar la información textual						

Su presencia no es superflua.						
ANIMACIONES						
Las animaciones están justificadas no se abusa de ellas.						
Atraer la atención del usuario para destacar cosas relevantes						
No tardar mucho tiempo en cargarse						
Evitar animaciones que se presentan en un ciclo sin detenerse.						
MULTIMEDIA						
Usar multimedia justificadamente, solo cuando sea necesario para aportar algo						
Indicar entre paréntesis cuando el tiempo estimado de descarga pueda superar los 2 segundos.						
DISEÑO DE NAVEGACIÓN	N/S	Muy deficiente	Deficiente	Aceptable	Alta	Muy alta
PÁGINA DE INCIO						
Aclarar al usuario dónde se encuentra y el objetivo del sitio.						
Presentar las principales áreas de contenido del sitio con hipervínculos para acceder a ella.						
Si existe pantalla de bienvenida, ésta no debe retardar la llegada del usuario a la página de inicio.						
NAVEGABILIDAD						
Poseer una estructura flexible que permita al usuario controlar su navegación.						
Presentar títulos claros indicando nombre o contenido principal.						
La interfaz de navegación muestra todas las alternativas posibles al mismo tiempo, para que los usuarios puedan escoger su opción						

El usuario sabe dónde se encuentra en todo momento.						
Las pantallas dedican en gran parte espacio al contenido.						
La páginas deben ser sencillas, no estar recargadas con publicidad, animaciones, etc.						
El diseño es consistente en todas las pantallas (tamaños, colores, iconos, tipos de letra, etc.).						
APLICACIONES CON GEOGEBRA	N/S	Muy Deficiente	Deficiente	Aceptable	Alta	Muy alta
Usar aplicaciones justificadamente, solo cuando sea necesario para mostrar algo.						
Indicar entre paréntesis cuando el tiempo estimado de carga pueda superar los 2 segundos y las condiciones tecnológicas necesarias.						
Sencillas de usar y con instrucciones claras						
Adecuadas para el nivel educativo						

ANEXO D. Instrumento de validación de los OA por parte de los estudiantes

I. APRENDIZAJE					
Ítems	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni en acuerdo/ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
El contenido del objeto de aprendizaje es adecuado para mis necesidades de aprendizaje.					
Las actividades del objeto de aprendizaje son apropiadas para el tema.					

El objeto de aprendizaje me ayudó a reflexionar sobre el tema.					
Estoy seguro de que podré usar el conocimiento adquirido en este OA en la práctica a futuro.					
El objeto de aprendizaje me ayudó a memorizar información.					
El objeto de aprendizaje ha ayudado mi comprensión sobre el tema.					
El objeto de aprendizaje me ha apoyado para alcanzar el objetivo de aprendizaje.					
La autoevaluación incluida en el objeto de aprendizaje me ayudo a evaluar que tanto había entendido el tema.					
Las actividades del objeto de aprendizaje me sirvieron para reforzar los conocimientos del tema.					
El objeto de aprendizaje me permitió aprender un nuevo concepto.					
I. ATENCIÓN					
Ítems	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni en acuerdo/ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Trabajar con el OA fue motivante					
La interactividad del OA ayudó a mantener mi atención.					

Los ejercicios que contenía el OA me parecieron muy interesante					
El OA contenía elemento que estimularon mi curiosidad sobre el tema.					
Los elementos multimedia en el OA ayudaron a mantener mi atención					
El texto del OA es preciso y mantuvo mi interés.					
El tiempo requerido para completar el OA fue adecuado.					
La cantidad de texto en el OA fue adecuada.					
Los ejercicios del OA fueron desafiantes y motivadores.					
II. SATISFACCIÓN					
ítems	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni en acuerdo/ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
El OA me estimuló a seguir trabajando.					
Realmente disfruté utilizar el OA.					
La duración del OA e la adecuada para alcanzar los objetivos del tema.					
Al culminar con el OA sentí haber alcanzado los objetivos del tema.					
La retroalimentación del OA ayudó a sentirme					

recompensado por el esfuerzo					
Estoy seguro de que volveré a utilizar el OA.					
Me gustaría utilizar más OA en esta y otras clases.					
La retroalimentación en las actividades del OA es pertinente y suficiente.					
Me sentí confiado al usar el OA.					
Recomendaría a mis compañeros usar el OA.					
III. USABILIDAD					
Ítems	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni en acuerdo/ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
El OA me informó sobre mi progreso.					
La retroalimentación en el OA no interfiere con los contenidos.					
La navegación en el OA fue intuitiva y las etiquetas del menú facilitaron el acceso al contenido.					
La información del OA está bien organizada y estructurada.					
El diseño y los colores del OA son adecuados.					
El tamaño y los colores del texto permitieron su legibilidad.					

Considero es fácil utilizar el OA.					
Las imágenes utilizadas permitieron aclarar los contenidos.					
El OA tiene una interfaz muy amigable.					
Pude utilizar el OA sin necesidad de apoyo del profesor o de mis compañeros.					
IV. Comentarios finales					
¿Cómo se podría mejorar el objeto de aprendizaje?					Respuesta abierta
¿Cuáles consideran que serían los beneficios para el profesor, el poder contar con más objetos de aprendizaje?					Respuesta abierta
¿Cuáles consideran que serían los beneficios para el estudiante, el poder contar con más objetos de aprendizaje?					Respuesta abierta
Utilice este espacio para cualquier comentario adicional que desee hacer sobre la herramienta utilizada, incluida la aclaración de cualquiera de sus respuestas.					Respuesta abierta

ANEXO E. Prueba escrita aplicada a los estudiantes

	Universidad Autónoma de Querétaro Facultad de Informática Cálculo Multivariable – Parcial final MDM. Sugely Sotomayor Cano	
---	---	---

Nombre: _____ Fecha: _____

Instrucción: En las preguntas de opción múltiple, selecciona la opción que consideres correcta y justifica tu elección. Las respuestas sin justificación no serán válidas.

1. Sea $h(s, y) = \frac{4\sqrt{s}}{3y^2+1}$, la derivada $\frac{\partial h}{\partial y}$ es:

a) $\frac{24y\sqrt{x}}{3y^4+1}$

b) $\frac{24y\sqrt{s}}{3y^4+1}$

c) $\frac{-6y\sqrt{x}}{(3y^2+1)^2}$

d) $-\frac{24y\sqrt{s}}{(3y^2+1)^2}$

2. Si $w(r, u, t) = r \sin^{-1}(ut)$, determinar $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$
3. Considera la superficie $z = f(x, y)$ representada en la Figura 1. Responde los siguientes interrogantes:

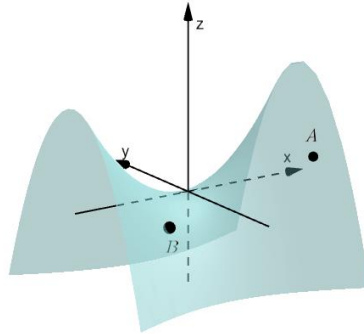


Figura 1. Gráfica de la superficie.

¿Cuáles son los signos de $f_x(A)$ y $f_y(A)$?: _____

¿Cuáles son los signos de $f_x(B)$ y $f_y(B)$?: _____

4. Sea la superficie $z = f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a la superficie en el punto $(1, 2, 8)$?
5. Suponga que el pago mensual de la hipoteca de una casa está dado por la función $f(A, r, N)$, donde A es la cantidad prestada en dólares, r es la tasa de interés (%), y N es el número de años antes de que la hipoteca esté completamente pagada.
 - a) ¿Qué significa $\frac{\partial f}{\partial r}(93000, 14, 50) = 72.82$ en términos financieros?
 - b) ¿Cuáles son las unidades de $\frac{\partial f}{\partial r}$?
 - c) ¿Qué significaría que el valor de $\frac{\partial f}{\partial A}(93000, 14, 50)$ fuese positivo o negativo?
 - d) ¿Qué significaría que el valor de $\frac{\partial f}{\partial N}(93000, 14, 50)$ fuese positivo o negativo?

6. De acuerdo con la siguiente situación, indica cuáles de las afirmaciones que se presentan a continuación son verdaderas o falsas.

Situación: La energía promedio E (Kcal) que necesita un lagarto para caminar o correr una distancia de un kilómetro está modelada por la función $E(m, v) = 2.65m^{0.66} + \frac{3.5m^{0.75}}{v}$, donde m es la masa corporal del animal (medida en gr) y v su velocidad (medida en $\frac{km}{h}$).

Fuente: C. Robbins, *Wildlife Feeding and Nutrition*, 2a. ed. (San Diego, Academic Press, 1993)

- a) $\frac{\partial f}{\partial m}(450,9)$ indica que si el lagarto mantiene constante la velocidad de $9 \frac{km}{h}$ mientras camina o corre y su masa aumenta de 450 a 451gr su gasto energético incrementará en aproximadamente 0.28 Kcal por cada gramo de masa adicional. ()
- b) Las unidades de la derivada $\frac{\partial f}{\partial v}$ son $\frac{Kcal}{h(km)}$. ()
- c) $\frac{\partial f}{\partial m}(450,9)$ indica que si el animal tiene una masa de 450gr y una velocidad de $9 \frac{km}{h}$ cuando se mueve, su gasto energético incrementará en $187,4 \frac{Kcal}{h}$. ()
- d) $\frac{\partial f}{\partial v}(450,9)$ indica que si el animal mantiene constante su masa de 450gr y su velocidad aumenta de 9 a $10 \frac{km}{h}$ mientras camina o corre, su gasto energético decrecerá en aproximadamente 4.221 Kcal por cada kilómetro recorrido ()
- e) Si el animal aumenta su masa de 300 a 301gr ,su gasto energético (medido en $\frac{Kcal}{h}$) disminuirá progresivamente con cada kilómetro que recorra en una hora. ()
- f) Las unidades de la derivada $\frac{\partial f}{\partial v}$ son $\frac{Kcal}{gr km}$ ()

7. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y) = x^2 \cos(\pi y) - \frac{6}{xy^2}$ en el punto $(2, -1, -7)$.

ANEXO F. Manual para la creación de objetos de aprendizaje de la derivad parcial

Introducción

Este manual documenta el proceso de diseño y desarrollo de tres Objetos de Aprendizaje (OA) creados para fortalecer la comprensión del concepto de derivada parcial en estudiantes de ingeniería. El desarrollo incluyó la construcción de los recursos digitales, así como su empaquetado y etiquetado conforme a los estándares pertinentes. Los OA fueron elaborados con base en el modelo ADDIE, estructurados según la taxonomía instructiva de Gagné y diseñados considerando principios del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la instrucción matemática. El propósito de este documento es servir como guía para futuras implementaciones o adaptaciones de estos recursos digitales en otros contextos educativos.

1. Diseño instruccional de los Objetos de Aprendizaje

La estructura de los Objetos de Aprendizaje (OA) se basa en la guía propuesta por Gagné (1975) para la planeación y ejecución de actividades orientadas al logro de objetivos instruccionales. Cada OA aborda un significado específico de la derivada parcial:

OA_1: Cálculo e interpretación geométrica de las derivadas parciales.

OA_2: Interpretación de la derivada parcial como razón de cambio instantánea.

OA_3: Determinación del plano tangente a una superficie mediante derivadas parciales.

A continuación, en la Tabla 1 se presenta la planificación instruccional del OA_1. Esta estructura fue replicada en los OA_2 y OA_3, con ajustes según su contenido específico y objetivo de aprendizaje.

Tabla 1. Planeación y diseño de los elementos que integran OA_1.

Elemento	Descripción	Recurso
Nombre: Cálculo e interpretación geométrica de las derivadas parciales.	En la página de inicio de cada OA se presenta un imagen animada del concepto de derivada parcial para despertar el interés en el estudiante.	Texto estático Gift animado de GeoGebra.
Objetivos de aprendizaje	Calcular las derivadas parciales de funciones multivariantes. Evaluar las derivadas parciales en un punto determinado. Interpretar geoméricamente la derivada parcial como pendiente una recta tangente a una superficie en punto específico.	Texto estático
Introducción	Se presenta el concepto de derivada parcial y un ejemplo prácticos como la sensación térmica, demostrando cómo estas derivadas permiten analizar cambios en situaciones específicas, como la percepción del frío en función de la temperatura y la velocidad del viento.	Texto estático.

Contenido	Derivación parcial de funciones de dos variables Derivación parcial de funciones de tres o más variables Evaluación de las derivadas parciales. La derivada parcial como pendiente de una recta tangente.	Texto estático
Ejercicios y ejemplos	Dada $f(x, y) = 3x^2y + xy^3$ se calcula $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$ de la siguiente manera. Considerando la variable y como una constante, se deriva f con respecto a x y se obtiene: $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}3x^2y + \frac{\partial}{\partial x}xy^3 = 3(2x)y + (1)y^3 = 6xy + y^3.$	Texto estático Applet interactiva GeoGebra.
Autoevaluación	Preguntas de opción múltiple	Texto estático. Imágenes estáticas creadas con GeoGebra. Imágenes estáticas creadas con editores de latex.

Además, en el diseño de las actividades se incorporaron los objetos matemáticos primarios definidos por Godino y Batanero (1994), tales como: situaciones problema (enunciados de las actividades), lenguajes (registros verbal, gráfico, algebraico y tabular), conceptos (nociones de cálculo multivariable), proposiciones (propiedades asociadas a los conceptos) y procedimientos (acciones necesarias para resolver las tareas). Aunque no se incluyeron argumentos de forma explícita, algunas preguntas fueron formuladas con la intención de promover la justificación de respuestas por parte del estudiantado.

2. Desarrollo de los objetos de aprendizaje

Esta fase incluyó la construcción de los recursos digitales, la organización jerárquica del contenido y la edición de elementos gráficos y visuales. Incluyó también la redacción de textos, la creación de applets dinámicos y la integración de todos los componentes en un entorno estructurado. El desarrollo de los OA se realizó en etapas claramente definidas: elaboración textual, generación de recursos visuales, estructuración de contenidos y empaquetado del material.

2.1. Construcción de recursos visuales e interactivos

Los textos estáticos se elaboraron en Microsoft Word, aprovechando sus herramientas para insertar ecuaciones y ajustar el formato. La información fue consultada en libros especializados en cálculo multivariable, tanto en inglés como en español, y organizada con el propósito de presentar los conceptos de manera clara y comprensible para los estudiantes. Las fuentes consultadas son:

- *Introduction to Mathematics for Life Scientists* (Batschelet, 1975);
- *Basic Multivariable Calculus* (Marsden et al., 1993);
- *El Cálculo* (Leithold, 1998);
- *Cálculo 2 de Varias Variables* (Larson y Edwards, 2000);
- *Cálculo Varias Variables* (Thomas, 2010);
- *Matemáticas 3: Cálculo de Varias Variables* (Zill y Wright, 2011b);
- *Calculus Early Transcendentals* (Anton et al., 2012);
- *Calculus Single and Multivariate* (Hughes-Hallett, 2013);
- *Cálculo de Varias Variables Trascendentes Tempranas* (Stewart, 2018);
- *An Illustrative Guide to Multivariable and Vector Calculus* (Miklavcic, 2020).

En los tres objetos de aprendizaje se incorporaron recursos visuales e interactivos para complementar la información escrita. Algunas imágenes fueron generadas con GeoGebra, otras con editores de LaTeX como Overleaf y CodeCogs, y exportadas en formato JPG o GIF. En la página de inicio de cada OA se integró una animación creada en GeoGebra para captar la atención del estudiantado y motivar la exploración del contenido, como se muestra en la Figura 1.



Figura 1. Páginas de inicio de los tres OA.

Los applets interactivos, desarrollados con GeoGebra, permiten representar de forma visual y dinámica conceptos fundamentales como la derivada parcial, la razón de cambio y el plano tangente. En la Figura 2 se muestra un ejemplo representativo de estas construcciones. Cada applet incorpora botones de avanzar, retroceder y reiniciar, lo que facilita una navegación secuencial a través de los contenidos y ejemplos interactivos, favoreciendo una mejor comprensión de los conceptos abordados.

Ejemplo

Solución a.

1. Primero se grafica la superficie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ que representa la gráfica de la función f . ✓ 1.
2. Luego, se ubica el punto $(1, 2)$ denotado por P_0 perteneciente al dominio de la función $f(x, y)$. ✓ 2.
3. Se evalúa el punto $(1, 2)$ en $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Esto es, $z = f(1, 2) = 5$. De esta manera, se obtiene el punto $(1, 2, 5)$ denotado como P . ✓ 3.
4. En nuestro ejemplo, $y = 2$ es un plano paralelo al plano xz que pasa por el punto $(1, 2, 5)$. ✓ 4.

←
→

Reiniciar

Figura 2. Applets interactiva creada con GeoGebra para la interpretación geométrica de la derivada parcial.

En la sección de autoevaluación de cada OA se integraron cuestionarios de opción múltiple creados con Google Forms, los cuales permiten guardar las respuestas del estudiantado de forma automática y en tiempo real. Además, ofrecen un análisis detallado de los resultados, lo que facilita tanto la evaluación como el seguimiento del progreso individual de cada estudiante. En la Figura 3 se muestra un ejemplo de uno de estos formulario.

Cálculo de las derivadas parciales

En este cuestionario evaluará tus conocimientos sobre el concepto de derivadas parciales en funciones multivariantes, ayudándonos a determinar si se han cumplido los objetivos planteados en el OA1.

En esta primera sección, evaluaras tu comprensión sobre el cálculo de las derivadas parciales de funciones con dos o más variables.

ssotomayor119@alumnos.uaq.mx [Cambiar de cuenta](#)

No compartido

Correo electrónico del estudiante

Tu respuesta

1. Dada la función $f(x, y, z) = \sin(xz) \sin(xy) \sin(yz)$. La derivada parcial de f con respecto a x es

☐ a) $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(yz) \sin(xy) \sin(xz) + x \cos(xz) \sin(xy) \sin(yz)$

☐ b) $\frac{\partial f}{\partial x} = z \cos(xz) \sin(xy) \sin(yz) + y \cos(xy) \sin(xz) \sin(yz)$

☐ c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xz) \sin(xy) \sin(yz) + \cos(xy) \sin(xz) \sin(yz)$

☐ d) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(yz) \sin(xy) \sin(xz) + \cos(xz) \sin(xy) \sin(yz)$

Figura 3. Cuestionario de Google Forms integrados al OA_1.

2.2. Empaquetado

El empaquetado de los objetos de aprendizaje se realizó utilizando el programa *eXelearning*, una herramienta de autor de código abierto que permite construir y publicar recursos educativos digitales sin requerir conocimientos avanzados de programación (<http://exelearning.net>). Su entorno de trabajo está conformado por cuatro zonas bien diferenciadas

Estructura: esta sección permite la creación de índices de contenidos utilizando una estructura jerárquica de actividades en forma de árbol, siguiendo el modelo de secuenciación y navegación del estándar SCORM (2004).

Menú principal: se pueden gestionar los archivos, la impresión, las exportaciones, los estilos, las preferencias del usuarios como el idioma, etc.

iDevices: son las diferentes actividades que se pueden integrar en los contenidos creados para hacerlos interactivos y más dinámicos.

Área de trabajo: Corresponde a la zona mayor donde se colocan recursos, actividades, objetivos, contenidos, entre otros elementos. En la pestaña "Autoría" se pueden visualizar los contenidos creados, y en la pestaña "Propiedades" se pueden incluir metadatos relacionados con las creaciones.

Para empaquetar los datos, se seleccionó el estilo FPD-MEDU, proporcionando una apariencia coherente y funcional a la interfaz del OA. Luego, se estableció la estructura basada en la taxonomía instructiva de Gagné. Una vez creada, se añadieron los recursos correspondientes mediante los *iDevices*. La Tabla 2 detalla los *iDevices* utilizados para cada elemento del OA. Es importante destacar que, una vez conformada la estructura, los *iDevices* pueden ajustarse, desplazarse o reubicarse según sea necesario dentro de la misma.

Tabla 2. Clase de *iDevices* utilizados en el empaquetado de los OA.

Elemento del OA	Tipo <i>iDevices</i>	Recurso educativo digital
1. Nombre	Texto y tareas	Texto estático Gift GeoGebra
2. Objetivos de aprendizaje	Texto y tareas	Texto estático
3. Introducción	Texto y tareas	Texto estático
4. Contenidos 5. Ejercicios y ejemplos	Texto y tareas Actividades interactivas	Texto estático, imágenes, applets de GeoGebra.
6. Autoevaluación 7. Aplicaciones	Texto y tareas	Cuestionario de Google Forms

2.3. Etiquetado

El proceso de etiquetado consiste en asignar metadatos a los Objetos de Aprendizaje (OA) con el fin de facilitar su búsqueda, localización e intercambio en diferentes entornos educativos. Para ello, se empleó el estándar LOM-ES V1.0 (Norma UNE-71361:2010), desarrollado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD), en colaboración con el Instituto de Tecnologías Educativas (ITE) y otros programas institucionales orientados al desarrollo de la Sociedad de la Información y el Conocimiento.

Desde la plataforma *eXelearning*, se accede a la pestaña de Propiedades, donde es posible completar los campos correspondientes a los metadatos: título, descripción, idioma, palabras clave, nivel educativo, tipo de recurso, autoría, entre otros. Esta información queda incorporada al archivo final exportado, garantizando su interoperabilidad con sistemas de gestión de aprendizaje compatibles. Este procedimiento debe aplicarse a cada OA desarrollado. En la Figura 4 se muestra un ejemplo del formulario de metadatos completado para uno de los OA.

The screenshot shows the 'Propiedades' (Properties) tab of the eXelearning platform. The form is titled 'Catalogación' and contains the following fields:

- Título:** La derivada parcial
- Idioma:** Español
- Descripción general:** Este objeto de aprendizaje tiene como propósito que el estudiante conozca el concepto de la derivada parcial, aprenda cómo se calcula y comprenda su interpretación como la pendiente de una recta tangente a una superficie.
- Objetivos:**
- Conocimiento previo:**
- Autoría:** Sugey Sotomayor Cano
- Licencia:** Creative Commons: Reconocimiento - compartir igual 4.0
- Tipo de recurso educativo:**
- Especificaciones de utilización:**
 - Tipo de alumnado:** ☒ Todos, ☐ Necesidades educativas especiales, ☐ Altas capacidades
 - Para trabajar en grupo:** ☐
 - Para trabajar en tutoría:** ☐
 - Lugar de utilización:** ☒ Aula, ☐ Fuera del centro
 - Modalidad de uso:** ☒ Presencial, ☐ Semipresencial, ☐ A distancia

Figura 4. Proceso de etiquetado del OA_1.

3. Acceso a los objetos de aprendizaje

Para consultar y explorar los objetos de aprendizaje desarrollados, se puede acceder a cada uno mediante los siguientes enlaces:

OA_1 – Cálculo e interpretación geométrica de las derivadas parciales:

[https://7cmhevqbpcvoyheelz65xq.on.driv.tw/Carpeta%20%20eXelearning/Objeto%20de%20aprendizaje%20eXelearning/Objeto%20de%20Aprendizaje%20%201%20\(Sitio%20Web\)/Objeto_de_Aprendizaje_1300624/](https://7cmhevqbpcvoyheelz65xq.on.driv.tw/Carpeta%20%20eXelearning/Objeto%20de%20aprendizaje%20eXelearning/Objeto%20de%20Aprendizaje%20%201%20(Sitio%20Web)/Objeto_de_Aprendizaje_1300624/)

OA_2 – La derivada parcial como razón de cambio:

[https://7cmhevqbpcvoyheelz65xq.on.driv.tw/Carpeta%20%20eXelearning/Objeto%20de%20aprendizaje%20%202%20\(%20p%C3%A1gina%20web\)/Objeto_de_aprendizaje_2_181024/](https://7cmhevqbpcvoyheelz65xq.on.driv.tw/Carpeta%20%20eXelearning/Objeto%20de%20aprendizaje%20%202%20(%20p%C3%A1gina%20web)/Objeto_de_aprendizaje_2_181024/)

OA_3 – Ecuación del plano tangente a una superficie:

https://7cmhevqbpcvoyheelz65xq.on.driv.tw/Recursos%20didacticos/OA3-Prueba/OA3_plano_tangente_111124/

Cada enlace dirige a la versión web del OA correspondiente, permitiendo su visualización completa tal como fue estructurado en *eXelearning*

4. Consideraciones para la implementación y evaluación

Después de completar la fase de desarrollo, se procede con la implementación de los OA. Es necesario realizar una evaluación previa por parte de expertos para detectar posibles errores de contenido, así como problemas de funcionalidad y operatividad. Posteriormente, se debe realizar una evaluación desde la perspectiva de los usuarios para determinar la eficacia de los recursos en entornos educativos.

