Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Informática

Modelo tecnopedagógico para un curso virtual universitario de métodos numéricos. Un acercamiento ontosemiótico

Tesis

Que como parte de los requisitos
para obtener el Grado de

Doctora en Innovación en Tecnología Educativa

Presenta

Teresa Carrillo Ramírez

Dirigido por:

Dra. Sandra Luz Canchola Magdaleno

Co-Directora:

Dra. María del Carmen González Videgaray

Querétaro, Qro. a 20 de junio de 2024

REPOSITORIO INSTITUCIONAL DGBSDI-UAQ

La presente obra está bajo la licencia:
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es

CC BY-NC-ND 4.0 DEED

Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional

Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

La licenciante no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Bajo los siguientes términos:

Atribución — Usted debe dar crédito de manera adecuada , brindar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios . Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciante.

NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con propósitos comerciales .

SinDerivadas — Si remezcla, transforma o crea a partir del material, no podrá distribuir el material modificado.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales ni medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otras a hacer cualquier uso permitido por la licencia.

Avisos:

No tiene que cumplir con la licencia para elementos del material en el dominio público o cuando su uso esté permitido por una excepción o limitación aplicable.

No se dan garantías. La licencia podría no darle todos los permisos que necesita para el uso que tenga previsto. Por ejemplo, otros derechos como publicidad, privacidad, o derechos morales pueden limitar la forma en que utilice el material.

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Informática

Doctorado en Innovación en Tecnología Educativa

Modelo tecnopedagógico para un curso virtual universitario de métodos numéricos. Un acercamiento ontosemiótico

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado

Doctora en Innovación en Tecnología Educativa

Presenta

Teresa Carrillo Ramírez

Dirigido por:

Dra. Sandra Luz Canchola Magdaleno

Co-dirigido por:

Dra. María del Carmen González Videgaray

Dra. Sandra Luz Canchola Magdaleno
Presidente

Dra. María del Carmen González Videgaray
Secretario

Dra. Reyna Moreno Beltrán
Vocal

Dra. María Teresa García Ramírez
Suplente

Dr. Arturo Erdely Ruíz
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Junio,2024
México

Dedicatorias

Dedico este trabajo a mis estudiantes, a todos los que, a lo largo de mi vida docente, me han enseñado tanto y me han ayudado a comprender que lo que un docente hace y dice frente al grupo influye para bien o para mal en sus mentes y en sus corazones. He aprendido mucho de ellos y en ellos encontré la motivación para hacer el Doctorado. Espero que sirva para hacerme mejor docente.

Por otro lado, dedico este esfuerzo a las personas más importantes en mi vida…

A mi padre, estaba cuando empecé esta aventura y ahora me acompañas desde lo más profundo de mi mente y mi corazón.

A mi mamá, ejemplo de fortaleza y valentía, con ella la única opción es ir hacia adelante.

A mi amado esposo, sencillamente el mejor… acompaña, empodera, apoya, jala, empuja, … lo que sea necesario para que yo logré lo que se me mete en la cabeza. Este trabajo es tan suyo como mío.

A mis hijos, Kaori y Rubén, mis revisores, orientadores, motivadores y a quienes les debo la vocación docente, los amo mucho.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por la beca con la que fui beneficiada para realizar mis estudios de Doctorado en Innovación en Tecnología Educativa.

A mis directoras de tesis, la Dra. Sandra Luz Canchola y la Dra. Maricarmen González-Videgaray, quienes guiaron este trabajo con sus conocimientos y experiencia, por su orientación y acompañamiento, especialmente en los momentos más difíciles de este proceso.

A la Coordinación del Programa de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación y a la División de Matemáticas e Ingeniería de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México por todas las facilidades brindadas para la realización de este trabajo.

A mis estudiantes de métodos numéricos durante mis estudios de Doctorado, sin estar conscientes, fueron los partícipes más importantes en este proyecto.

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Abreviaturas

ABP	Aprendizaje basado en problemas
APOS	Teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema
AVA	Ambientes Virtuales de Aprendizaje
CHAEA	Cuestionario de Honey-Alonso de Estilos de Aprendizaje
CTIM	Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas
EAAP	Estilos de aprendizaje y actividades polifásicas
EOS	Enfoque ontosemiótico
FES	Facultad de Estudios Superiores
IBD	Investigación basada en el diseño
LMS	Sistema gestor del aprendizaje (*Learning Managment System*)
M-EOS-MN	Modelo EOS para enseñanza virtual de métodos numéricos
MAC	Matemáticas Aplicadas y Computación
MS	Microsoft
NP	No se presentó
OVA	Ambientes Virtuales de Aprendizaje
PDF	Formato de Documento Portátil (*Portable Document Format*)
PTP	Presentación teórico-práctica
SEA	Sistema Escolar Acatlán
TAD	Teoría Antropológica de la Didáctica
TIC	Tecnologías de la Información y la Comunicación
TPACK	Conocimiento tecnológico, pedagógico y disciplinar (*Technological Pedagogical Content Knowledge*)

Resumen

El curso de Métodos Numéricos que habitualmente se imparte en educación superior es base sustancial de la matemática computacional, siendo su principal objetivo la aplicación de las matemáticas. Sin embargo, es común que los estudiantes enfrenten dificultades para su aprendizaje lo que se refleja en un alto índice de reprobación. Para lograr el aprendizaje integral de los contenidos es primordial la comprensión de las matemáticas que los sustentan por lo que es primordial enfocar su enseñanza en la construcción de conocimiento matemático por parte de los estudiantes. El objetivo de este trabajo fue desarrollar un modelo tecnopedagógico bajo el enfoque ontosemiótico (EOS) para un curso virtual de métodos numéricos. Para lograrlo se siguió una Investigación Basada en el Diseño con el objetivo de realizar intervenciones iterativas que permitieran, a partir de la observación y de los resultados, realizar los ajustes y modificaciones requeridos para lograr el objetivo. Las intervenciones se realizaron en los cursos de Métodos Numéricos 1 y Métodos Numéricos 2 de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación que se imparte en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México, en los periodos lectivos 2022-2, 2023-1 y 2023-2, con una población de 80 estudiantes en promedio en cada periodo. Con cada una de ellas se fue perfeccionando el modelo y mejorando los resultados. El modelo se desarrolló a partir de la integración, en materiales y actividades, las dimensiones y configuraciones del EOS, de tal forma que pudiera estructurarse una trayectoria didáctica en una plataforma virtual de aprendizaje. El modelo resultante, al que se le ha denominado modelo EOS para enseñanza virtual de Métodos Numéricos, está constituido por una trayectoria en tres niveles que guía a los estudiantes hacia el logro de los objetivos de aprendizaje mediante la construcción de conocimiento matemático y del desarrollo de habilidades cognitivas. Se elaboraron formatos guía para facilitar la implementación del modelo a los docentes interesados.

Palabras clave: Enfoque ontosemiótico, tecnopedagógico, métodos numéricos, matemática computacional, educación superior.

Abstract

The Numerical Methods course usually taught in higher education is the substantial basis of computational mathematics, being its main objective the application of mathematics. However, it is common for students to face learning difficulties, which is reflected in a high failure rate. In order to achieve a comprehensive learning of the contents, it is essential to understand the mathematics that support them, so it is essential to focus their teaching on the construction of mathematical knowledge by the students. The objective of this work was to develop a technopedagogical model under the ontosemiotic approach (EOS) for a virtual course of numerical methods. To achieve this, a Design-Based Research was followed with the objective of carrying out iterative interventions that allowed, based on observation and results, to make the adjustments and modifications required to achieve the objective. The interventions were carried out in the Numerical Methods 1 and Numerical Methods 2 courses of the Bachelor's Degree in Applied Mathematics and Computer Science taught at the Facultad de Estudios Superiores Acatlán of the Universidad Nacional Autónoma de México, in the academic periods 2022-2, 2023-1 and 2023-2, with a population of 80 students on average in each period. With each of them, the model was refined and the results improved. The model was developed from the integration, in materials and activities, of the dimensions and configurations of the EOS, so that a didactic trajectory could be structured in a virtual learning platform. The resulting model, which has been called EOS model for virtual teaching of Numerical Methods, is constituted by a three-level trajectory that guides students towards the achievement of learning objectives through the construction of mathematical knowledge and the development of cognitive skills. Guide formats were developed to facilitate the implementation of the model for interested teachers.

Keywords: Ontosemiotic approach, technopedagogic, numerical methods, computational mathematics, higher education.

1. Introducción

En las matemáticas, al igual que en la mayoría de los campos del conocimiento, cada día surgen nuevas aplicaciones, desarrollos y conceptos que, junto con la manera de abordarlos, se transforman en la aparición de nuevos modelos. En los últimos años, se ha reconocido la importancia de las funciones semióticas en la educación matemática lo que invita a la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) con estos fines. Aunado a lo anterior, el confinamiento provocado por la COVID-19 en el año 2020 promovió nuevas propuestas para la enseñanza virtual de las matemáticas sustentadas en modelos tecnopedagógicos, destacando la importancia de la formación docente continua para poder atender las demandas de una educación matemática bajo esta modalidad (González Fernández, 2021) en la que las herramientas tecnológicas sean también herramientas para favorecer las habilidades cognitivas y semióticas en el estudiante con el objetivo de favorecer las representaciones conceptuales, para mantener la motivación del estudiante (Bécar et al., 2017; Marquez et al., 2019), y para promover el desarrollo de habilidades de pensamiento de (Mudgett y Haynes, 2016; Sumarwati et al., 2020).

Desde este punto de vista, el proceso de enseñanza aprendizaje se puede plantear desde dos vertientes: por un lado, la necesidad de dominar los contenidos y por otro, los elementos que deben enmarcar el proceso de enseñanza – aprendizaje mediado por el uso de las TIC; lo cual no puede hacerse de manera arbitraria y desarticulada, ni de lo técnico ni de lo pedagógico (Grisales Aguirre, 2018). Estas posturas llevan implícitas el referente teórico-pedagógico en el que se basa la construcción de entornos interactivos (Bolaño-Muñoz, 2020; Godino, 2019), es decir, el uso de las TIC tiene sentido para mejorar el aprendizaje si se utiliza desde una perspectiva constructivista a través de experiencias basadas en la interacción social, la participación activa y los entornos complejos (Gros, 2016).

El análisis numérico, o métodos numéricos, trata del estudio, análisis y desarrollo de algoritmos y métodos para obtener soluciones numéricas y computacionales de problemas expresados matemáticamente. Se trata de una reflexión sobre los métodos analíticos de álgebra y cálculo para obtener resultados numéricos de problemas matemáticos que corresponden a diversos fenómenos en las ciencias naturales, de la ingeniería, de ciencias de la computación, de finanzas y de economía, entre otros. Actualmente, los métodos numéricos son considerados las matemáticas de la computación científica, debido a que el uso de la computadora ha potenciado sus aplicaciones, lo que los convierte en herramientas esenciales para profesionistas de las carreras de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (Chapra y Canale, 2015), por lo que los cursos de métodos numéricos son obligados en estas carreras. La enseñanza y el aprendizaje de métodos numéricos enfrenta como principal dificultad la vinculación de los conocimientos matemáticos con problemas del mundo real, esta dificultad es resultado de otros problemas como deficiencias en los conocimientos matemáticos previos (Bhatti, 2019) y problemas actitudinales o cognitivos (Tupacyupanqui-Jaen et al., 2018). Por lo anterior, es común que su aprendizaje se reduzca a la mecanización o memorización, minimizando la comprensión del sustento matemático de los métodos numéricos (Montero et al., 2015).

El dominio de los conocimientos matemáticos en los que se fundamentan los métodos numéricos permite al estudiante su aplicación crítica y reflexiva para la resolución de problemas (Flórez Escobar et al., 2019), así como la interpretación y análisis de los resultados. De ahí la importancia de promover el aprendizaje matemático de los métodos numéricos. Para ello, este trabajo recurre al Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la instrucción matemática el cuál incorpora, entre otras, la teoría de las representaciones y funciones semióticas de Raymond Duval (2017). Este enfoque se centra en las situaciones problemas y, en torno a ellas, clasifica en distintas configuraciones la instrucción matemática. Para facilitar la integración de estas configuraciones en un modelo educativo virtual se recurre al uso de herramientas tecnológicas con fines cognitivos, mediacionales y de interacción. Resultando un modelo tecnopedagógico que guíe al estudiante de forma progresiva en la construcción de sus conocimientos hasta llegar a la solución analítica y reflexiva de problemas mediante métodos numéricos.

1.1 Planteamiento del problema

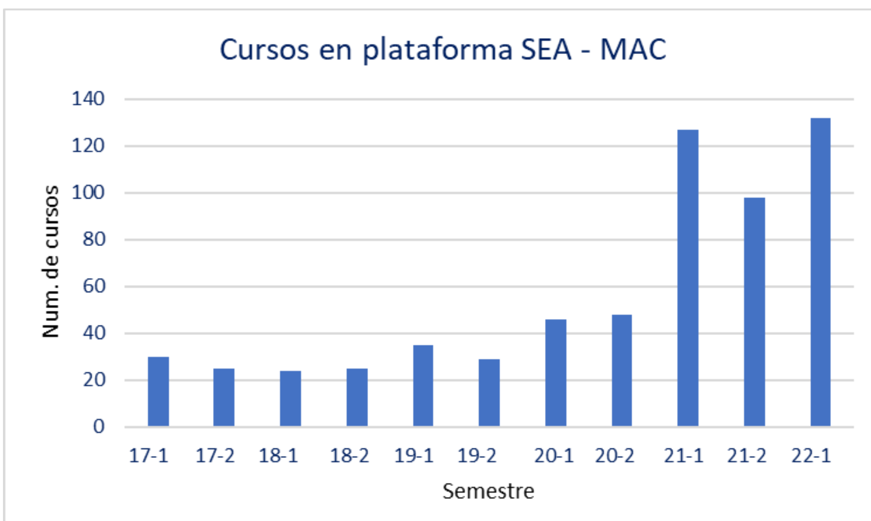
La educación virtual ha venido adquiriendo relevancia, impulsada por la creciente incorporación de la tecnología en la educación. Ejemplo de ello son las 50 licenciaturas en línea o a distancia que imparte la UNAM, aunque ninguna de ellas pertenece al área de Ciencias, Tecnología, Matemáticas o Ingenierías (UNAM, 2020).

Aunado a lo anterior, y como resultado de la creciente incorporación de la educación a las modalidades híbrida y virtual y al impulso que represento la pandemia por COVID-19, actualmente enfrentamos el reto de desarrollar modelos educativos que se adapten a las nuevas demandas. En la Facultad de Estudios Superiores Acatlán se ha venido promoviendo el desarrollo de asignaturas en línea como parte de una progresiva implementación de un modelo educativo híbrido en la plataforma Moodle Institucional (SEA, Sistema Escolar Acatlán), que paso de un promedio de aproximadamente 1,300 cursos al año, en el periodo de 2017 a 2019, a un promedio anual de 2,200 en los años 2021 y 2022 (FES Acatlán y Martínez Justo, 2022).

Por su parte, en la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación (MAC) la implementación de cursos en la plataforma Moodle institucional se ha incrementado de forma considerable, como se puede observar en la Figura 1.1, impulsado en gran medida por la contingencia sanitaria provocada por el COVID-19 en el año 2020. Este escenario invita a la reflexión sobre la pertinencia de contar con un modelo de enseñanza virtual propio para las asignaturas de matemática computacional. Que incluya métodos y estrategias de aprendizaje que contribuyan a desarrollar habilidades y competencias cognitivas (Bolaño-Muñoz, 2020).

Figura 1.1

Número de cursos en la plataforma SEA



Nota: Información proporcionada por el Centro de Desarrollo Tecnológico Acatlán (2021)

El desarrollo de modelos educativos innovadores que, mediante el uso de tecnologías, promueva la adquisición del conocimiento matemático para su posterior aplicación en la resolución de problemas reales requiere que el docente esté capacitado en conocimientos tecnológicos, de contenido y pedagógicos (Cabero y Barroso, 2016) y en Didáctica de la

Matemática. Esto implica la integración de componentes, ejes o dimensiones en modelos que, autores como Mishra y Koehler (2006) o Coll at al, (2008) han llamado tecnopedagógicos.

Un modelo con estas características requiere de un cuidadoso diseño y planificación instruccional, que además incluya los diversos tipos de interacciones fundamentales para el proceso de aprendizaje y que, en el caso del aprendizaje matemático, promueva la construcción de representaciones semióticas (Duval, 2016), es decir, que el estudiante interprete símbolos como conceptos y les dé significado. Siendo esta habilidad una de las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Afifah y Nafi'An, 2019). Por lo tanto, la enseñanza de las matemáticas enfrenta problemas, a corto plazo, en comprensión, de un nuevo concepto, y a largo plazo, en la resolución de un problema (Duval, 2016). Ante esta problemática las tecnologías brindan la posibilidad de diseñar modelos, simulaciones y experimentos que favorezcan esta construcción de significados (Peña et al., 2021).

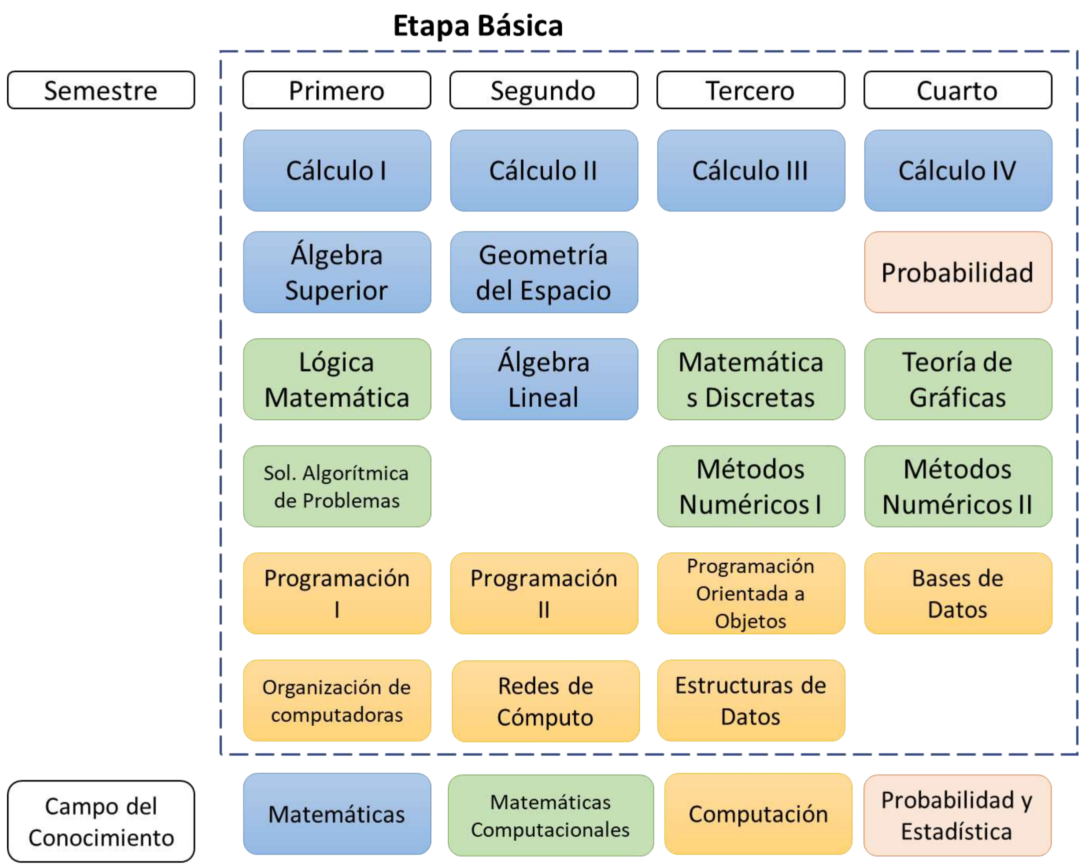
Los cursos de métodos numéricos, como parte del área de matemática computacional, consisten en la aplicación de conocimientos matemáticos en la resolución numérica de problemas apoyándose para ello con herramientas computacionales. Por lo tanto, su enseñanza contempla dos aspectos fundamentales, el sustento matemático de los métodos y su aplicación e implementación computacional; lo que requiere que el estudiante que cursa esta asignatura cuente con una formación matemática sólida, que incluya cálculo, álgebra y álgebra lineal; además de habilidades de programación.

Desafortunadamente, debido a que los métodos numéricos requieren una gran cantidad de cálculos aritméticos, su enseñanza y aprendizaje suelen centrarse en la parte técnica y procedimental, dejando de lado el sustento matemático y el análisis e interpretación del problema. Por otro lado, su aprendizaje presenta problemas de actitud por parte de los estudiantes pues no consideran los métodos numéricos como un curso de matemáticas o carecen de motivación, al sentir que se trata de una asignatura aislada (Detchev et al., 2020). Además de ingresar al curso con deficiencias en los conocimientos previos requeridos.

En la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación, las asignaturas de Métodos Numéricos se imparten en los semestres tercero y cuarto, siendo de los primeros cursos del área de matemática computacional en lo que se integran los conocimientos de matemáticas y computación adquiridos en los primeros semestres. Los programas de las asignaturas de Métodos Numéricos 1 y Métodos Numéricos 2 se pueden consultar en el Anexo A. Como se observa en la Figura 1.2, para tercer semestre el estudiante ha cursado asignaturas de cálculo, álgebra y programación, lo que debería proporcionarle el andamiaje necesario para el aprendizaje de métodos numéricos.

Figura 1.2

Mapa curricular de la etapa básica

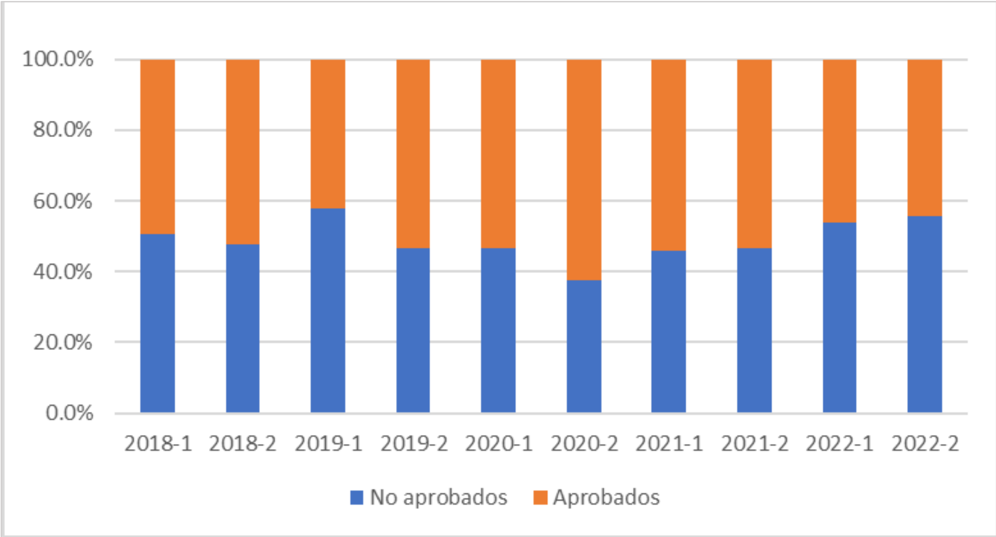


Nota: Obtenido de MAC y FES-Acatlán (2014)

Lamentablemente, pareciera que la formación previa y la obtenida durante el curso mismo, no son suficientes para alcanzar los aprendizajes esperados, lo que se refleja en el porcentaje de reprobación que se reporta cada semestre (Figura 1.3). Debido a que el porcentaje de reprobación es en promedio de 50%, la asignatura de Métodos Numéricos es considerada de alto índice de reprobación.

Figura 1.3

Porcentaje de aprobación-reprobación en Métodos Numéricos



Nota: Información proporcionada por la Coordinación del Programa de Matemáticas Aplicadas y Computación

Asimismo, de los estudiantes reprobados, aproximadamente el 50%, obtienen NP (No Presento), es decir, estudiantes que abandonaron el curso (Tabla 1.1), lo que por sí mismo representa un problema.

Tabla 1.1

Porcentaje de estudiantes no aprobados con NP

Periodo	Porcentaje con NP
2018-1	47%
2018-2	66%
2019-1	50%
2019-2	65%
2020-1	48%
2020-2	81%
2021-1	52%
2021-2	60%
2022-1	47%

1.2 Justificación

A partir de lo antes expuesto, es evidente que para alcanzar los aprendizajes establecidos en los objetivos de la asignatura se deben identificar las causas y atenderlas mediante un modelo de innovación que se ajuste a las necesidades actuales de los estudiantes, de la institución y de la sociedad en general. Considerando que, para que un estudiante aprenda significativamente es necesario tomar en cuenta sus conocimientos e ideas previas, sus necesidades, expectativas, estilos y estrategias de aprendizaje (Juárez Lugo et al., 2012) se realizó un estudio diagnóstico de tres etapas para definir el perfil del estudiante:

1. Identificar el nivel de conocimientos de matemáticas al ingresar a la licenciatura.
2. Identificar los estilos de aprendizaje en la población de estudio para conceptualizar orientaciones (preferencias) que tiende a utilizar de forma habitual cuando se enfrenta a tareas de aprendizaje a partir de lo que se podrán definir estrategias de enseñanza más efectivas.
3. Identificar las deficiencias de los estudiantes en la comprensión de los conceptos matemáticos mínimos necesarios para los cursos de métodos numéricos.

Para entender las dificultades en cuanto a conocimientos de matemáticas se consultaron los resultados de la Evaluación Diagnóstica que la UNAM aplica a todos los estudiantes que ingresan a licenciatura (CUAIEED y UNAM, 2020), donde se reporta que los estudiantes que ingresaron en la generación 2022 obtuvieron un 40.9% de aciertos, mientras que los estudiantes de la generación 2023 obtuvieron un 43.5% de aciertos. Dentro de este instrumento, se considera que los temas de mayor dificultad son:

- Definición de derivada y sus notaciones.
- Álgebra de funciones.
- Cónicas
- Continuidad en un punto
- Distancia entre dos puntos

Esto significa que el estudiante que ingresa a la licenciatura no cuenta con el andamiaje necesario para los cursos de Cálculo diferencial e integral, y Álgebra Lineal y Superior que asignaturas que se imparten los primeros semestres de formación en las licenciaturas de física, matemáticas e ingeniería.

Para identificar los estilos de aprendizaje se aplicó el Cuestionario de Estilos de Aprendizaje de Honey-Alonso (CHAEA) (Alonso et al., 1997) a un grupo de 90 estudiantes voluntarios de los primeros tres semestres de la licenciatura. Los resultados revelaron que el 61% de la población de estudio tiene un estilo Reflexivo y que el segundo estilo con mayor presencia es el Teórico con un 16%. Lo que además indica que los estilos Pragmático y Activo, deberán desarrollarse para que se cumplan las cuatro fases del aprendizaje según Kolb (Cazau y Pablo, 2014).

Considerando que los estudiantes con estilo Reflexivo aprenden mejor cuando se les permite observar y analizar la situación para pensar antes de actuar y que quienes aprenden bajo un estilo Teórico lo hacen a partir de modelos, teorías, y conceptos que presenten un desafío, siempre que cuenten con la oportunidad de preguntar e indagar, las estrategias de enseñanza deben orientarse en este sentido. Sin embargo, deberán promoverse actividades cortas pero retadoras para estimular el aprendizaje activo, que además les permita asociar la teoría con la práctica para desarrollar el estilo Pragmático.

Desde este primer acercamiento, pudo identificarse otra problemática que coincide con la experiencia empírica: A los estudiantes se les dificulta relacionar la teoría y la práctica, particularmente en actividades dinámicas en tiempos cortos.

El tercer elemento para completar el perfil del estudiante fue el nivel de conocimientos previos con que cuentan los estudiantes al ingresar a los cursos de Métodos Numéricos 1 (3^{er} semestre) y Métodos Numéricos 2 (4º semestre). Para ello se diseñaron evaluaciones diagnósticas, implementadas como cuestionarios en la plataforma Moodle del curso correspondiente, en cada uno se elaboraron reactivos para identificar el nivel de comprensión de los principales conceptos requeridos (Anexo B).

En el caso del grupo de Métodos Numéricos 1, la calificación promedio fue 5.7/10, la Tabla 1.2 presenta los temas evaluados y las calificaciones promedio por pregunta obtenidas, en donde puede observarse que solo en uno de los elementos, representación gráfica de rectas, se obtuvo un nivel Aceptable (8.0).

Tabla 1.2

Temas en la evaluación diagnóstica para Métodos Numéricos 1

Tema	**Calificación promedio**
Notación científica de números reales	5
Sistema de numeración binario	6
Serie de Taylor	7
Representación gráfica de tangente, secante, raíz de una función	8
Conceptos básicos de sistemas de ecuaciones lineales	4
Proceso de eliminación gaussiana	4
Definición de polinomios y valores propios	6

Para el curso de Métodos Numéricos 2, se evaluaron conceptos que los estudiantes debieron adquirir en Métodos Numéricos 1, además de los conocimientos matemáticos adquiridos en los cursos previos de Cálculo y Álgebra. El promedio grupal obtenido fue 7/10. Si bien, los resultados fueron ligeramente mejores que en el curso previo, siguen siendo insuficientes. En la Tabla 1.3 se presenta los temas abordados en la evaluación diagnóstica y la calificación promedio por pregunta obtenida. Puede observarse que de cinco tópicos solo dos presentaron un promedio Aceptable.

Tabla 1.3

Temas en la evaluación diagnóstica de Métodos Numéricos 2

Tema	**Calificación promedio**
Simbolización de la pendiente	7
Generalidades de los métodos numéricos	8
Norma vectorial	5
Representación gráfica de derivada e integral	7
Medición del error	8

A partir de lo anterior, puede afirmarse que los estudiantes presentan deficiencias considerables de conocimientos matemáticos, lo que representa un obstáculo para lograr los aprendizajes en asignaturas que requieren de estos conocimientos, como las de matemática computacional, particularmente, métodos numéricos. Por otro lado, es importante aclarar que, actualmente, el dominio de las matemáticas implica además habilidades computacionales, y competencias comunicativas y de razonamiento, que dependen del lenguaje (Dyrvold, 2020).

Por lo tanto, el problema a atender es la enseñanza y aprendizaje de la matemática para lo que se recurrió al Enfoque Ontosemiótico (EOS) como una propuesta dentro de la Didáctica de la Matemática, que adopta principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje (J D Godino et al., 2017). Esta propuesta debe atender la demanda actual del uso pedagógico de las tecnologías que permita la enseñanza virtual. Consecuentemente, este proyecto de investigación está dirigido a desarrollar un modelo tecnopedagógico para la enseñanza virtual de métodos numéricos bajo el Enfoque Ontosemiótico.

Si bien, el proyecto está dirigido específicamente a la enseñanza aprendizaje de métodos numéricos, su aplicación será factible en asignaturas del área de matemática computacional, tanto en carreras del área de físico, matemáticas e ingeniería, como en carreras del área socioeconómicas.

En este modelo la tecnología será una herramienta para desarrollar habilidades cognitivas y para crear escenarios de aprendizaje bajo un modelo o enfoque propio para la enseñanza de las matemáticas que permitan dirigir los esfuerzos a la formación de habilidades generales del quehacer matemático; y así obtener mayor eficiencia y solidez en su aprendizaje.

Pregunta de investigación

> ¿De qué manera deben integrarse las configuraciones del enfoque ontosemiótico para la instrucción matemática en un nuevo modelo tecnopedagógico para un curso virtual de métodos numéricos?

2. Antecedentes

A pesar de que, para el aprendizaje de las matemáticas, el uso de currículos estructurados y secuenciales ha sido la base para adquirir habilidades procedimentales, una formación matemática integral requiere, además, el desarrollo de habilidades de reflexión y discusión que van más allá de lo memorístico y lo mecánico (Grisales Aguirre, 2018). Por lo tanto, el proceso de enseñanza de las matemáticas plantea problemas de comprensión (Duval, 2017) y abstracción que interrelacionan razón, entendimiento, cálculo y aplicación (Abreu y Bracho, 2016). Por su parte, D'Amore y Fandiño (2017), consideran que el aprendizaje de las matemáticas implica al menos cinco aspectos: el conceptual, el algorítmico, el estratégico, el comunicativo y el semiótico. Esto implica abordar el problema desde distintos ángulos tales como, los conocimientos de los docentes necesarios para la enseñanza (Breda et al., 2017; Pino-Fan et al., 2018), las habilidades de aprendizaje de los estudiantes (Grisales Aguirre, 2018) y el uso reflexivo de los medios (Coll et al., 2008; Nantschev et al., 2020).

El marco referencial que sustenta esta investigación se centra en el Enfoque Ontosemiótico para la instrucción matemática como herramienta para atender las problemáticas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante el desarrollo de un modelo educativo que ayude al docente en las fases de diseño, implementación y evaluación, articulando las dimensiones epistémica y ecológica (teorías curriculares), junto con teorías del aprendizaje (dimensiones cognitiva y afectiva) y teorías orientadas al diseño instruccional, esto es, a la práctica de la enseñanza (Godino, 2011).

Como se mencionó anteriormente, el Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un sistema teórico que integra diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en investigaciones en Didáctica de la Matemática (Godino et al., 2007) y que cuenta con criterios para la adecuación entre los significados personales obtenidos por los estudiantes (aprendizaje), y los institucionales pretendidos (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y los recursos disponibles (entorno) (Breda et al., 2017). Además, proporciona las bases para una propuesta educativo-instruccional que reconoce la importancia de la transmisión de conocimientos contextualizados y significativos para el estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Godino, 2019; Peña et al., 2021), lo que implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas (Peña et al., 2021).

De acuerdo con el EOS el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando prácticas, objetos, variables y procesos, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa; reconociendo el papel central de la resolución de problemas en la generación del conocimiento (Godino et al., 2017). Por lo tanto, el docente se enfrenta al reto de conocer e incorporar en su enseñanza, elementos psicológicos y cognitivos, apoyándose para ello en el conocimiento de sus estudiantes, del dominio de estrategias de enseñanza aprendizaje y de las tecnologías (Capone et al., 2018). D'Amore y Fandiño (2020, p. 144) consideran que "el EOS es una de aquellas teorías que determinaron el nacimiento de formas nuevas de pensamiento y de reflexión en el panorama de Didáctica de la Matemática".

Por otro lado, considerando que en el aprendizaje de las matemáticas el uso de problemas de aplicación es indispensable para que los estudiantes den sentido a las estructuras conceptuales, la labor docente consiste en integrar el contexto, los saberes y el manejo de las TIC; lo que representa la esencia del modelo tecnopedagógico. En este sentido, el enfoque ontosemiótico (EOS) puede aportar elementos significativos para elaborar una teoría de diseño instruccional para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y otras áreas curriculares, tomando en cuenta que una teoría de la instrucción en un área de contenido específico no puede dar recetas de actuación para cada circunstancia, pero sí principios y criterios generales basados en resultados contrastados por la investigación (Godino, 2019).

Aunado a lo anterior, es importante recordar que el profesionista actual necesita ser autónomo, contar con habilidades críticas, ser capaz de tomar decisiones, dominar las herramientas tecnológicas y tener una visión sistemática que le permitan desarrollar habilidades de planeación de estrategias (Mendonca et al., 2016). Por lo tanto, es necesaria la incorporación de nuevas teorías y metodologías por medio de las cuales el proceso de enseñanza aprendizaje de los métodos numéricos satisfaga estas necesidades (Lima Pisco et al., 2020). En este sentido, para incorporar el EOS en un modelo virtual para un curso de métodos numéricos se consideran las posibilidades mediadoras de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) buscando la posibilidad de profundizar cognitivamente, de modo que sea posible un desarrollo de conocimientos y habilidades en los estudiantes (Torras Virgili, 2021).

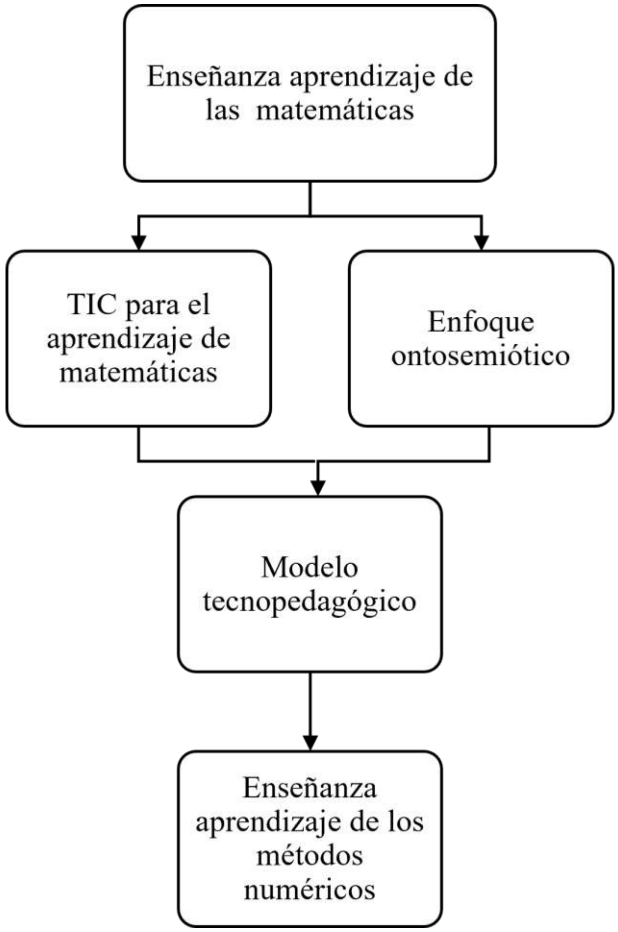
3. Fundamentación teórica

El uso de las tecnologías de la información y la comunicación como herramienta para desarrollar habilidades cognitivas en el estudiante de matemáticas, en este caso, de métodos numéricos; plantea nuevos retos pedagógicos y de didáctica de las matemáticas para los docentes, quienes deberán construir puentes entre el significado del contenido curricular y la construcción mental de ese significado realizada por los estudiantes (Marcelo et al., 2016), refiriéndose particularmente a las representaciones y estructuras mentales que realiza quien aprende pero que debe promover quien enseña.

Ante este planteamiento, se recurre a la incorporación de los elementos del Enfoque Ontosemiótico en un modelo tecnopedagógico para conseguir que el estudiante de métodos numéricos o cualquier otra asignatura de matemática computacional en educación superior, tras una comprensión cabal del sustento matemático, pueda analizar y resolver problemas e interpretar datos y soluciones. En la Figura 3.1 se muestra de forma esquemática la relación entre los constructos en que se desarrollaron en esta investigación. La cual parte de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para ello considera el uso de las TIC como herramienta pedagógica para el aprendizaje y el enfoque ontosemiótico para desarrollar un modelo tecnopedagógico, específicamente para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas que sustentan los métodos numéricos.

Figura 3.1

Constructos teóricos involucrados en la investigación



3.1 Enseñanza aprendizaje de las matemáticas

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere, en los distintos contextos de formación, una actualización constante de los métodos de enseñanza incorporando nuevos enfoques, nuevas estrategias (Grisales Aguirre, 2018) y un uso pedagógico de las tecnologías, con el propósito de construir "escenarios que favorezcan, de forma intencionada, las situaciones de aprendizaje" (Vrancken et al., 2018, p. 781). En este sentido Gangle (2016) afirma que la cuestión de la pedagogía matemática depende de las capacidades perceptivas e intelectuales de docentes y estudiantes, por un lado, y de las demandas intrínsecas de comprensión abstracta y prueba formal rigurosa, por el otro.

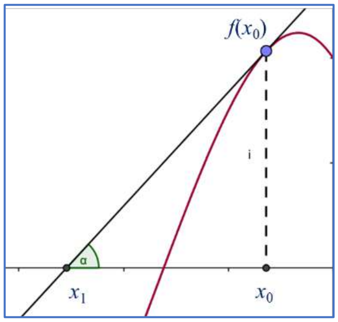
Si bien es cierto que, la Didáctica de la Matemática como campo de investigación se ha ido consolidando, aún existe cierta separación entre los resultados de las investigaciones académicas y la práctica de la enseñanza. Una de las razones de esta separación puede ser el énfasis de las investigaciones en planteamientos descriptivos de los problemas educativos (psicológicos, sociológicos, epistemológicos, etc.), dejando de lado el componente tecnológico de la educación matemática (Godino, 2011).

En lo que se refiere a las habilidades de aprendizaje de los estudiantes, es importante tener en cuenta que la construcción del conocimiento matemático tiene muchos niveles y se desarrolla a lo largo de la vida de los individuos. “Incluye, por un lado, pensamiento sobre conceptos matemáticos, y por otro, competencias cognitivas avanzadas, como el análisis, la abstracción, la justificación, la interpretación, la visualización o la estimación” (Vrancken et al., 2018, p. 780). La comprensión en matemáticas consiste en reconocer el objeto matemático representado y las posibles transformaciones de su representación semiótica. Mientras no puedan lograr esta actividad cognitiva, los estudiantes tendrán un bloqueo en su aprendizaje de las matemáticas que se interpreta como "incomprensión" (Gutiérrez et al., 2020). Por lo tanto, se requieren estrategias que faciliten la actividad cognitiva de los estudiantes.

De acuerdo con Allan et al. (2017) en los conceptos matemáticos, como objetos de enseñanza y aprendizaje, se pueden distinguir tres dimensiones: la dimensión semántica (significativa) que hace referencia a los significados que se vinculan al concepto; la dimensión sintáctica (representativa) que hace referencia a las representaciones del concepto, que pueden ser gráficas, ecuaciones o tablas de valores, y las posibles traducciones entre ellas; y la dimensión procedimental (algorítmica) donde se incluyen los algoritmos que se vinculan al concepto. Por lo tanto, para lograr los aprendizajes esperados, la enseñanza debe abordar las tres dimensiones. Como ejemplo, en la Tabla 3.1 se presentan las tres dimensiones para la pendiente de una recta tangente a una curva como objeto matemático.

Tabla 3.1

Dimensiones del concepto: Pendiente de la recta tangente a una curva

Dimensiones	Concepto Pendiente de una recta tangente a una curva
Dimensión semántica Significado	Derivada de la función en el punto La derivada es el límite de la velocidad de cambio de la función en un intervalo infinitamente pequeño.
Dimensión sintáctica Representaciones: gráfica y simbólica	 $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = \tan(\alpha)$
Dimensión procedimental Algoritmo	1. Sea la función $f(x)$ 2. Elegir un punto $f(x_0)$ sobre la curva 3. Trazar una recta tangente a la curva en el punto 4. Nombrar x_1 a la intersección de la recta con el eje de las abscisas 5. Calcular el cociente $\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$

Finalmente, la investigación educativa proporciona los sistemas de referencia, las metas a lograr y medios de navegación, pero las decisiones locales están bajo la responsabilidad del docente (Godino, 2011). Por lo tanto, se requiere que los docentes cuenten con formación tecnológica y pedagógica (Nantschev et al., 2020) que, además, les permita afrontar los retos de la enseñanza virtual (Lubis et al., 2020; Weinhandl et al., 2020). La enseñanza virtual de las matemáticas demanda estrategias y herramientas que permitan la interacción, comunicación y trabajo colaborativo soportado por tecnologías que propicien la construcción del conocimiento por parte del estudiante (Guerra et al., 2018), mediante interacciones efectivas que favorezcan un aprendizaje eficiente, exitoso y disfrutable, tanto individual como colaborativo (Zheng et al., 2019).

3.1.1 Las TIC en la educación matemática

De acuerdo con Godino (2011) “la tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, ya que puede influenciar positivamente en lo que se enseña e incrementar el aprendizaje de los estudiantes”. Asimismo, favorece la construcción del conocimiento, ya que facilita el trabajo autónomo y colaborativo, fortalece las competencias metacognitivas y promueve la interacción social y la resolución colaborativa de problemas (Galindo Illanes et al., 2022). En este sentido Balderas (2011), citado en Muñoz Suárez (2017, p. 5), considera que “emplear tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas facilita algunas actividades como: modelar procesos, analizar modelos, interpretar la solución de los problemas o limitaciones de los métodos y procedimientos”.

El uso de tecnologías brinda la posibilidad de diversificar los medios didácticos para captar la atención de los estudiantes mediante clases más interactivas con situaciones contextualizadas, lo que convierte a la tecnología en una herramienta cognitiva para provocar y desarrollar habilidades del pensamiento (Muñoz Suárez et al., 2017). Considerando que la actividad cognitiva necesaria para el aprendizaje de las matemáticas es el reconocimiento de los objetos representados a través de representaciones variadas (imágenes, esquemas, explicaciones verbales, ...) que deben aclararse mutuamente (Duval, 2016), las tecnologías brindan los recursos apropiados para diversificar dichas representaciones.

En este sentido, Grisales Aguirre (2018) afirma que para lograr que las herramientas tecnológicas que se involucren en los procesos de enseñanza de las matemáticas surtan los efectos deseados, se requiere que el diseño, implementación y evaluación de objetos virtuales de aprendizaje (OVA), ambientes virtuales de aprendizaje (AVA) y todo recurso tecnológico, se lleve a cabo de una manera rigurosa y estructurada en el marco de lo disciplinar (contenido), lo pedagógico y lo técnico (funcional), de tal forma que otorguen un papel protagónico al estudiante, además de motivarlo para la experimentación del concepto y los procesos.

Bajo este planteamiento se han documentado diversos trabajos sobre el uso de herramientas computacionales como apoyo para el aprendizaje de distintas áreas de las matemáticas en educación superior, entre las que se pueden mencionar, el uso de software matemático como Wolfram Mathematica y GeoGebra para apoyar el aprendizaje de Cálculo diferencial e integral (Muñoz Suárez et al., 2017) o para auxiliar en el aprendizaje de la programación (McCord y Jeldes, 2019), el uso de programación visual para adquirir habilidades de programación (De Oliveira Brandao et al., 2016) o la implementación de actividades interactivas para el aprendizaje de matemáticas discretas (Lubis et al., 2020).

Adicionalmente, el uso de plataformas de aprendizaje (Learning Managment System) ha venido tomando auge en la integración de las TIC como escenario virtual para implementar un modelo educativo o diseño instruccional en el que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje (Capone et al., 2018; Guerra et al., 2018; Sumarwati et al., 2020; Zheng et al., 2019) promoviendo la interacción y el trabajo colaborativo entre los participantes. Casos destacables son la propuesta de diálogo matemático presentada por Capone (2018) para apoyar el aprendizaje de Cálculo o el uso de wikis como parte del aprendizaje basado en problemas (ABP) (Guerra et al., 2018), en las que se reconoce la importancia de la interacción para el desarrollo de los procesos cognitivos.

Algunos modelos que se han empleado con este fin son el aula invertida o la gamificación (Abdul Rahim et al., 2020), que con recursos como vídeos o presentaciones debidamente organizados en secuencias didácticas en plataformas o ambientes de aprendizaje (Timofeeva et al., 2019) promueven habilidades cognitivas y facilitan las representaciones mentales necesarias para el aprendizaje de las matemáticas. Estas propuestas recurren a componentes cognitivos y motivacionales que propician la construcción de representaciones, lo que muestra la tendencia de considerar el aprendizaje como resultado de la construcción de estructuras mentales internas.

Por otro lado, entre los enfoques predominantes están el epistemológico y el educativo, que tienen en común el uso de la noción de *representación*, es decir, el proceso mental que desarrolla quien aprende para interiorizar los conceptos aprendidos. Si estas representaciones se producen de acuerdo con reglas que permiten la descripción de un sistema o proceso, se habla de representaciones semióticas (Duval, 2016). Para lograr dichas representaciones deberán diseñarse actividades que propicien la reelaboración del pensamiento mediante un proceso de transformación y análisis como base de un proceso de codificación (Amaya, 2020).

3.2 El Enfoque ontosemiótico

La complejidad de los procesos de adquisición del conocimiento matemático requiere abordarlos desde diferentes enfoques, los más predominantes son el enfoque epistemológico y el educativo. Ambos usan representaciones semióticas, a partir de las cuales se realizan procesos cognitivos propios del pensamiento matemático, "considerándolas desde estructuras mentales y como requerimiento epistemológico para acceder a los objetos del conocimiento" (Duval, 2016, p. 63). Esto coincide con el enfoque constructivista que afirma que un modelo pedagógico para enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requiere características donde los estudiantes enfrenten permanentemente situaciones complejas que los comprometan con una verdadera comprensión; donde trabajen como científicos, comunicadores, profesionales y ciudadanos; donde puedan utilizar aprendizajes previos en formas más elaboradas, conectadas y complejas; donde puedan expresar y utilizar permanentemente sus ideas (Bolaño-Muñoz, 2020). Estas funciones cognitivas, de manera indirecta, hacen referencia a los sistemas de representación semiótica, a la práctica y al objeto matemáticos. Por lo tanto, para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la representación es un elemento crucial.

3.2.1 Representación semiótica

Una representación es un signo o combinación de signos, caracteres, diagramas, objetos, imágenes o gráficas, que necesitan ser trasladadas de un modo a otro. "El procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas, es decir, si se tiene un signo que representa un objeto, éste puede ser sustituido por otro. Este proceso de transformación depende del sistema semiótico de representación" (Duval, 2006, p. 145) y constituye una habilidad que quien aprende matemáticas, necesita desarrollar para ser más competente en su aprendizaje (Mainali, 2020). Esto significa que los estudiantes deben ser capaces de utilizar varios recursos semióticos para la resolución de problemas y para relacionar contenidos del lenguaje natural con el lenguaje matemático (Dyrvold, 2020). Dicho de otro modo, las representaciones semióticas son herramientas para producir nuevo conocimiento mediante la "representación de objetos de conocimiento", que son los resultados superficiales del funcionamiento de estructuras mentales profundas, que no dependen de la conciencia real de los individuos (Duval, 2016). A partir de lo anterior, se puede deducir que, para enseñar matemáticas, se debe entender cómo aprende el estudiante y facilitarle los medios que propicien la realización de dichas representaciones para que construya su propio sistema de representaciones.

3.2.2 El Enfoque ontosemiótico

El Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS) incorpora distintas teorías sobre Didáctica de la Matemática, entre las que destacan la teoría antropológica de la didáctica (TAD) de Chevallard (1991; 1992), la teoría de situaciones (Chevallard, 1991, 1992; D'Amore,y Godino, 2006; 2007; Font, Godino y D'Amore, 2007), la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOS) de Dubinsky (1980) y la teoría de representaciones semióticas de Duval (1993).

Este enfoque proporciona nociones teórico-metodológicas que direccionan diversos aspectos de la problemática en Didáctica de la Matemática, tales como la epistemológica (cómo emerge y se desarrolla la matemática), ontológica (qué es un objeto matemático y qué tipos intervienen en la actividad matemática), semiótica-cognitiva (qué significa conocer un objeto matemático bajo determinadas circunstancias) y educacional instruccional (enseñanza y aprendizaje) (Fernández Coronado et al., 2022). Cada uno de estos aspectos se aborda desde tres modelos teóricos: significados de los objetos matemáticos (epistemológico), funciones semióticas (cognitivo) y configuraciones didácticas (instruccional) (Godino et al., 2007, 2019):

1. Significado de los objetos matemáticos. La matemática es una actividad humana dirigida a resolver situaciones-problemas a través de sistemas de prácticas.
2. Funciones semióticas. Las prácticas pueden ser de una persona, o compartidas en el seno de una institución.
3. Configuraciones didácticas. Para resolver problemas se articulan secuencias de prácticas, en un tiempo y lugar específicos, incluyendo diversos procesos y subprocesos (significación, conjeturación, representación, argumentación, etc.).

Este enfoque asocia los significados de los objetos matemáticos a las prácticas, estas prácticas se representan mediante funciones semióticas de distinto tipo (Aznar et al., 2016). Para favorecer estas funciones semióticas se emplean las situaciones problema y las secuencias de prácticas, en las que participan objetos y procesos matemáticos (García Marimón et al., 2021), por lo tanto, las situaciones problema representan el eje central del enfoque.

3.2.3 Configuraciones del enfoque ontosemiótico

Este enfoque asume el principio de que el conocimiento de un objeto por un sujeto (individuo o institución) es un conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer como aquellas en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Entonces, la función semiótica es la herramienta teórico-metodológica para el análisis ontológico-semiótico de la construcción de los distintos significados de los objetos matemáticos (Aznar et al., 2016). Bajo este enfoque se distingue el problema estrictamente matemático de los fundamentos lógico-formales y el problema pedagógico de los fundamentos cognitivos (Castañeda et al., 2020; Gangle, 2016). Supone que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, en un determinado tiempo-espacio, a través de una secuencia de prácticas que considera procesos de significación, conjetura y argumentación. Para ello propone la noción de situación problema en la práctica matemática de resolución de problemas (sistema de prácticas) (Galindo Illanes et al., 2022).

La situación problema se refiere a una ontología de objetos matemáticos desde tres aspectos de la matemática: la resolución de problemas, el lenguaje simbólico y un sistema lógico y organizacional (Afifah y Nafi’An, 2019). La correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde interviene dicho objeto es interpretado como el “significado de ese objeto” (Galindo Illanes et al., 2022), donde se entiende por objeto a cualquier entidad que esté involucrada en la práctica matemática y que pueda identificarse como una unidad. En el EOS se identifican como objetos matemáticos primarios: situaciones problema, conceptos/propiedades, procedimientos, proposiciones y argumentos, lenguaje, acciones, definiciones, rasgos y operaciones, en la Tabla 3.2 se presenta una descripción breve de cada uno de estos objetos.

Tabla 3.2

Descripción de los objetos matemáticos primarios de acuerdo con el EOS

Objeto matemático	Descripción
Situación problema	Un problema cotidiano del cual emergen los objetos en un estado informal que son formalizados y generalizados para su aplicación en situaciones similares.
Conceptos (definiciones)	Descripciones que sustentan las diferentes alternativas de solución, con su propio conjunto de propiedades o proposiciones.
Procedimientos	Métodos de resolución, como algoritmos y operaciones, que evolucionan con el tiempo, generando enfoques complementarios o alternativos, como la demostración.
Proposiciones	Corresponden a las propiedades de los objetos involucrados que permiten asociarlos con otros.
Argumentos	Afirmaciones para validar objetos refutables (proposiciones y procedimientos), comúnmente argumentos deductivos.
Lenguaje matemático	Términos, expresiones, notaciones, gráficos y tablas, evidenciados en los diferentes registros a través de los cuales se expresan y representan datos, soluciones e ideas.

Nota: Elaboración a partir de Fernández Coronado et al. (2022, p. 4)

Como se mencionó antes, para atender las problemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el EOS propone una articulación de las perspectivas epistemológica, cognitiva e instruccional a través de la estructuración de sus bases teóricas en cinco dimensiones o configuraciones (D'Amore et al., 2007; Godino et al., 2017), que son empleadas como herramientas para el análisis didáctico del proceso de estudio, desde una perspectiva personal e institucional, lo que significa que se puede hacer una distinción entre configuraciones cognitivas (personales) y epistémicas (institucionales) (Pino-Fan et al., 2018). Estas configuraciones o dimensiones que se utilizan como base para delimitar la competencia general de análisis e intervención didáctica (Godino et al., 2017) son:

1. Sistema de prácticas
2. Configuración ontosemiótica

3. Configuración didáctica
4. Configuración normativa
5. Idoneidad didáctica

Cada una de las configuraciones consta de seis dimensiones o facetas (Pino-Fan, 2017):

1. Epistémica. Compuesta por la dimensión matemática en su totalidad (conocimiento común y ampliado) y por la dimensión didáctica (conocimiento especializado del contenido) (Amaya, 2020) o de otra forma, es la distribución de los componentes del significado institucional implementado como objetos matemáticos.
2. Cognitiva. Desarrollo de los significados personales en los aprendizajes.
3. Afectiva. Distribución de actitudes, emociones, afectos y motivaciones de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. Mediacional. Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
5. Interaccional. Secuencia de interacciones entre el docente y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.
6. Ecológica. Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, que soportan y condicionan el proceso de estudio.

Para las dimensiones epistémica y ecológica se asumen presupuestos antropológicos/ socioculturales; para las dimensiones cognitiva y afectiva se adoptan presupuestos semióticos y para la dimensión instruccional (interaccional y mediacional) se asume una perspectiva socio-constructivista. Estas dimensiones y configuraciones interaccionan de forma sistémica, lo que da muestra de la complejidad de los procesos de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas.

A continuación, se describen de forma sintetizada, cada una de las configuraciones que integran el enfoque:

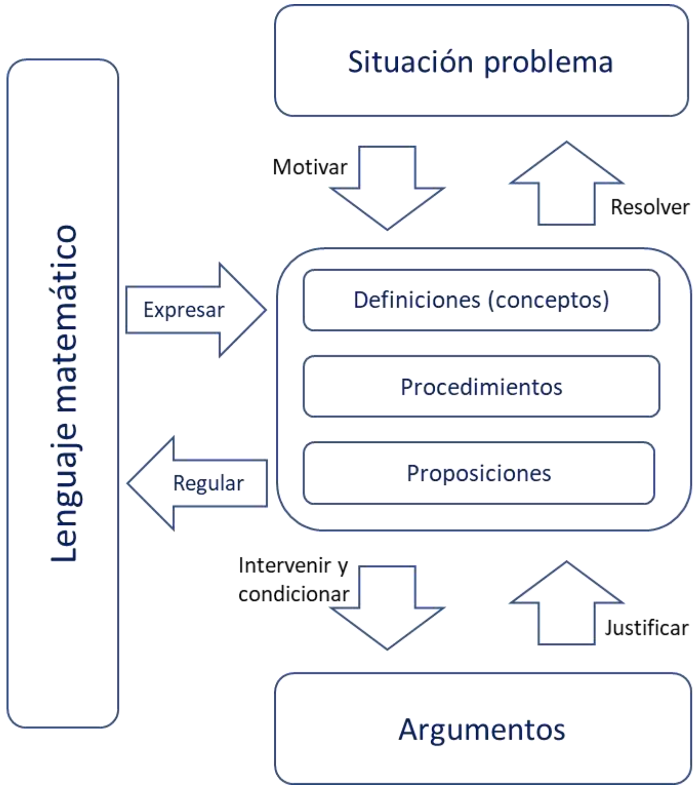
- Sistema de prácticas. Una práctica matemática es una secuencia de acciones, regulada por reglas establecidas institucionalmente, orientada hacia un objetivo, generalmente, resolver un problema (Mateus-Nieves, 2021), comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla. La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos: un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza y otros aspectos como fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos (D'Amore et al., 2007).

Los sistemas de prácticas se hacen operativos mediante las dimensiones epistémicas o cognitivas, y son relativos al marco institucional, las culturas y comunidades de prácticas, por lo tanto, el significado de un objeto matemático es entendido como un conjunto de prácticas operativas y discursivas (institucionales y personales) para resolver un tipo de problemas. En este contexto, el aprendizaje supone la apropiación por parte del estudiante de los significados validados en el seno de una institución, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Distéfano et al., 2019).

- Configuración ontosemiótica. Representa la relación entre objetos y procesos matemáticos que intervienen y emergen en la realización de las prácticas (Figura 3.2); tiene como finalidad describir la complejidad (ontosemiótica) de este proceso como factor explicativo de los conflictos semióticos y del avance del aprendizaje (Pino-Fan, 2017). Esta configuración puede ser epistémica, formada por redes de elementos matemáticos, o cognitiva, constituida por redes de objetos personales (Godino, 2022; Mateus-Nieves, 2021).

Figura 3.2

Componentes y relaciones en una configuración epistémica



Nota: Obtenido de D'Amore et al., (2007, p. 61)

- Configuración didáctica. Se define como cualquier segmento de actividad didáctica comprendida en el proceso de resolución de una situación problema, que incluye acciones de los estudiantes y del docente, así como los medios planificados para abordar la tarea. Está orientada a la descripción de los patrones de interacción y su relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas) (D'Amore et al., 2007). En la configuración didáctica participan los estudiantes, el docente y todos los medios diseñados y/o implementados durante la sesión (García Marimón et al., 2021). Varias configuraciones didácticas constituyen una trayectoria didáctica (Godino, 2022) que, a su vez, representan la principal herramienta metodológica para el análisis de los procesos de instrucción (Godino et al., 2007).

  Una configuración didáctica va de la situación problema y de las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (sistema de prácticas) a las configuraciones de objetos (epistémica/cognitiva) y de procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (configuración ontosemiótica).

- Configuración normativa. Está conformada por los elementos reguladores de los procesos de enseñanza y aprendizaje: normas, convenciones, hábitos, costumbres, tradiciones. Se refiere a la identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, entendiendo por normas aquellas reglas, hábitos y convenciones que regulan el funcionamiento de las prácticas matemáticas y didácticas. También considera las normas sociomatemáticas que condicionan los conocimientos que construyen los estudiantes (Peña et al., 2021). La Tabla 3.3 muestra la clasificación de las normas según su dimensión.

Tabla 3.3

Normas de acuerdo con su dimensión

Dimensión	**Descripción de la norma**
Epistémicas	Contenido matemático estudiado
Cognitivas	Conocimientos previos, emergentes, aprendizajes, ...
Afectivas	Interés, motivación, actitudes
Mediacionales	Recursos empleados
Interaccionales	Formas de interacción
Ecológicas	Ubicación del tema, relaciones con otros temas, currículo

Nota: Elaboración a partir de Godino (2009, p. 63)

- Idoneidad didáctica. Es la herramienta que permite una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula que puede servir como punto de partida para una teoría del diseño instruccional. Trata de criterios o dimensiones que permiten valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y guiar su mejora. Se debe entender como una norma de corrección qué establece cómo se debería realizar un proceso de enseñanza aprendizaje (Breda et al., 2018) como la articulación coherente y sistémica de los componentes o dimensiones como se presentan en la Tabla 3.4 (Godino et al., 2007).

Tabla 3.4

Idoneidad didáctica de las dimensiones

Dimensión	**Descripción de la idoneidad didáctica**
Epistémica	Representatividad de los significados institucionales pretendidos/implementados, respecto de un significado de referencia.
Cognitiva	Grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
Afectiva	Grado de implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de estudio.
Mediacional	Disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el proceso de enseñanza-aprendizaje.
Interaccional	Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
Ecológica	Adaptación del proceso de enseñanza y aprendizaje al proyecto educativo institucional, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Nota: Elaboración a partir de Breda y cols. (2018, p. 269)

> Las idoneidades epistémica y cognitiva no se reducen a los componentes conceptuales, procedimentales y actitudinales, sino más bien a conglomerados de situaciones problema, definiciones, procedimientos, proposiciones, lenguaje y argumentos (Figura 3.2) en los que el eje central son las situaciones problema seleccionadas para contextualizar y personalizar los significados.

Para considerar la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje se debe contar con criterios que sirvan al profesor para organizar la reflexión sobre su práctica. En la Tabla 6.5 se presentan los criterios de idoneidad propuestos por Godino (2013) como instrumento para que los docentes orienten su práctica.

3.2.4 El EOS en la educación superior

Desde que el EOS fue publicado en los años 90 se han realizado diversos trabajos teóricos de comparación con otros enfoques o de análisis y aplicación de sus dimensiones y configuraciones, así como investigaciones sobre su incorporación en la formación de profesores de matemáticas en los distintos niveles educativos. Como punto de partida para el presente trabajo se decidió realizar una revisión documental de las publicaciones indexadas en la base de datos Scopus, a partir del año 2015, que versarán sobre aplicaciones en educación superior o educación media superior (bachillerato), obteniendo, después de un análisis de los contenidos, 25 documentos, todos ellos publicados en España y Latinoamérica. Asimismo, en el periodo analizado, fue el año 2021 donde hubo mayor número de publicaciones (13), en el resto de los años el promedio fue de dos publicaciones.

En lo que se refiere a los temas que abordaron, destacan las áreas de probabilidad (Fernández Coronado et al., 2022; Oliveira Júnior et al., 2022), estadística (Afifah y Nafi'An, 2019; Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021), cálculo (Galindo Illanes et al., 2022; Larios et al., 2021; Mateus-Nieves, 2016, 2021) y geometría (Jaime et al., 2019; Morales R et al., 2021; Uribe y Oliva, 2021); además de trabajos sobre áreas de ciencias como química y física (Martínez et al., 2021; Moreno Martínez et al., 2021). No se localizó ningún trabajo sobre áreas de matemática computacional o de métodos numéricos. Cabe destacar que solo dos de ellos hacen referencia a la enseñanza virtual (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021; Peña et al., 2021).

A partir de lo anterior, puede identificarse la necesidad de incorporar enfoques en Didáctica de la Matemática como el EOS en la enseñanza aprendizaje de asignaturas de matemáticas aplicadas como los métodos numéricos, en el que se analicen las posibilidades para la enseñanza virtual, lo que permitirá aportar resultados que permitan validar, adaptar o mejorar las teorías articuladas en el Enfoque Ontosemiótico.

3.3 Modelo tecnopedagógico

Ante los avances tecnológicos y los retos que presenta la educación en el siglo XXI, la tecnología educativa, después de transitar por la aplicación de los medios y el diseño de instrucción, se centra en el diseño de escenarios de aprendizaje mediadas por tecnología, donde su función no solo es instrumental, sino como una herramienta didáctica y psicológica que contribuya al entrenamiento de la metacognición y la autorregulación como funciones cognitivas (Lorenzo-Lledó, 2018) siempre que su potencialidad semiótica sea utilizada para planificar y regular la actividad y los procesos cognitivos de los estudiantes (Coll et al., 2008). Es decir, los usos de la tecnología deben integrarse al diseño de procesos de aprendizaje considerando la importancia del aprendizaje personalizado (Castañeda et al., 2020). No basta con desarrollar una propuesta sobre métodos o técnicas de aprendizaje novedosos e interactivos, sino que resulta imperativo usarlos de forma apropiada para contribuir a desarrollar habilidades y competencias cognitivas, tomando en cuenta que cada estudiante es diferente. "Las nuevas generaciones requieren metodologías educativas que se adapten a sus necesidades reales y que contribuyan al desarrollo del pensamiento lógico matemático" (Bolaño-Muñoz, 2020, p. 490).

Ante este escenario, el docente es el responsable de diseñar los entornos que favorezcan dicho aprendizaje y de aprovechar las ventajas de la tecnología como mediadora en la construcción del conocimiento y la interacción social (Castellanos Sánchez et al., 2017), además, de mediar el conocimiento en los estudiantes para lograr la comprensión de los contenidos y establecer los modelos para la construcción de aprendizajes más complejos (Bolaño-Muñoz, 2020); de ahí la importancia de la formación del profesorado en el uso pedagógico de las tecnologías (Cejas-León y Navío-Gámez, 2020).

Para cada acción formativa mediada por las tecnologías deberán elegirse la plataforma y los recursos tecnológicos que servirán de soporte para la enseñanza-aprendizaje y para que se produzca la interacción necesaria. En este sentido, toda decisión tecnológica debe fundamentarse y derivarse de un enfoque pedagógico consciente (Lorenzo-Lledó, 2018). Por lo tanto, los procesos tecnológicos de diseño deben revisarse y adaptarse continuamente al contexto en el que se aplican (Cabero Almenara, 2016), con el propósito de atender uno de los objetivos fundamentales del uso de las TIC, generar contextos significativos de aprendizaje para que el estudiante analice, critique y extraiga conclusiones a partir de la información que se le proporciona (Abreu y Bracho, 2016).

Ante el planteamiento de que la pedagogía y la tecnología deben caminar al unísono, y toda decisión tecnológica debe fundamentarse y derivarse de un enfoque pedagógico consciente, surgió la corriente de no diferenciar el diseño pedagógico del tecnológico, creándose el concepto de diseño tecnopedagógico (Lorenzo-Lledó, 2018) también conocidos como modelos emergentes, haciendo referencia al conjunto de enfoques e ideas pedagógicas que están surgiendo alrededor del uso de las TIC en educación y que intentan aprovechar todo su potencial comunicativo, informacional, colaborativo, interactivo, creativo e innovador en el marco de una nueva cultura del aprendizaje (Castañeda et al., 2020; Castellanos Sánchez et al., 2017). Dentro de estos destacan:

- El modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) formulado por Mishra y Koehler (2006), es un modelo que permite integrar conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido; está basado en el modelo de Shulman de conocimiento didáctico del contenido (PCK) y lo complementa con el conocimiento tecnológico (TK) de los docentes (Rivera-Robles et al., 2021). Este modelo señala que para utilizar de forma eficaz las TIC en la enseñanza, el docente debe estar capacitado, no tanto en aspectos tecnológicos, sino más bien en pedagógicos y de contenidos (Akram et al., 2021; Cabero y Barroso, 2016; Corbacho et al., 2021; Dafonte-Gómez et al., 2018).
- El modelo tecnopedagógico de Coll et al. (2008) el cual considera que, en los procesos de enseñanza aprendizaje, la capacidad mediadora de las TIC debe emplearse, además de como mediadora entre los participantes y los contenidos; también como medio de interacción y comunicación entre los participantes (de Oliveira et al., 2015). A partir de lo cual definen tres dimensiones: la tecnológica, la pedagógica o instruccional y las formas de organización de la actividad conjunta entre los participantes.

  Esta tercera dimensión pretende solventar las limitaciones del uso de las TIC en la educación, en lo referente a la importancia de las interacciones sociales y el trabajo colaborativo (Guerra et al., 2018), representando el eje del constructivismo social, que brinda las posibilidades para generar las representaciones semióticas (Solano y Aarón, 2020).
- Los patrones tecnopedagógicos, denominados rutas de aprendizaje, que tienen como objetivo conducir a los estudiantes por la información y los contenidos que se utiliza para representar procesos de aprendizaje en concordancia con teorías cognitivas para que el estudiante realice funciones superiores motivadas por la interacción con su entorno y los otros participantes (Hernández Y. y Aranguren G., 2016). Esta propuesta destaca la importancia de la interacción entre los participantes en el proceso educativo y de sus

procesos cognitivos, elementos que al ser bien administrados promueven la adquisición, procesamiento y transformación de los contenidos.

- Estilos de aprendizaje y actividades polifásicas (EAAP), propuesta basada en los estilos de aprendizaje –activo, teórico, reflexivo y pragmático– que permite incorporar las TIC en el aula teniendo en cuenta los estilos cognitivos que se desean trabajar en el estudiante, de tal forma que se personalice la educación ajustándose a la forma de aprender de cada uno y, a su vez, se fomenten nuevos estilos de aprendizaje (Castellanos Sánchez et al., 2017).
- Aprendizaje invertido, propuesta tecnopedagógica que se basa en la supresión del modelo de clase tradicional a través de una dinámica de trabajo en la que el estudiante revisa los contenidos proporcionados por el docente antes de la clase y fuera del horario escolar (Bergmann y Sams, 2014), de manera que el tiempo de la clase pueda emplearse para prácticas, dinámicas de grupo o cualquier otra metodología de aprendizaje activo (Dafonte-Gómez et al., 2018) o de aprendizaje adaptativo (R. Clark et al., 2018) o ambientes de aprendizaje en línea (Weinhandl et al., 2020). En todos los casos el objetivo es motivar y comprometer al estudiante para un aprendizaje activo y autorregulado (Johnston, 2017; McCord y Jeldes, 2019).

Las propuestas anteriores no son excluyentes entre ellas y es común encontrar prácticas en las que se integran de forma reflexiva, siempre con el objetivo de mejorar los aprendizajes.

3.3.1 Modelo tecnopedagógico para enseñanza de las matemáticas en carreras CTIM

Tomando en cuenta que un modelo tecnopedagógico es la integración de los saberes o conocimientos didácticos o pedagógicos y tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, con el objetivo de mejorar los aprendizajes y desarrollar habilidades cognitivas en los estudiantes; se pueden localizar varios trabajos en el área de matemáticas que cumplen, en mayor o menor medida, estas características. Sin embargo, cuando se trata de matemáticas en la educación superior, y específicamente en las carreras CTIM, las propuestas son mucho más limitadas. Por lo tanto, como referencia contextual para este proyecto, se realizó una búsqueda en la base de datos de Scopus considerando publicaciones a partir del 2015 que reportaran el uso de elementos tecnopedagógicos en el proceso de enseñanza aprendizaje de matemáticas en carreras de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, a partir de lo cual se pudo encontrar que la mayoría de las propuestas hacen uso de plataformas de aprendizaje (LMS) principalmente Moodle (Blanco y Ginovart, 2012; Handayanto et al., 2018); que el aula invertida es de los modelos más populares (Fernández-Martín et al., 2020) y que la gamificación o ludificación también es implementada como modelo tecnopedagógico (Abdul Rahim et al., 2020; Pratiwi y Istiyowati, 2020). Además, en la educación superior es frecuente que los docentes o las instituciones desarrollen y utilicen herramientas computacionales propias para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje (Chai et al., 2020; Solano y Aarón, 2020).

Por otro lado, a pesar de que cada vez se implementan más los modelos tecnopedagógicos Marcelo y cols. (2016, p. 80) afirman que, "aunque las tecnologías se han venido introduciendo en la práctica de enseñanza universitaria, estas se incorporan siguiendo con las prácticas tradicionales de los docentes"; además, la intención de un docente de utilizar las tecnologías y su manera de diseñar la enseñanza-aprendizaje, están condicionadas a su percepción de autoeficacia con la tecnología misma. Asimismo, la aplicación del modelo TPACK todavía presenta ciertos niveles de falta de formación por parte de los docentes (Nantschev et al., 2020), dejando en evidencia el reto de formación docente en cuanto a la integración de los conocimientos tecnológicos y pedagógicos para su implementación en los procesos de enseñanza aprendizaje (Chai, 2019).

Por su parte, Timofeeva y cols. (2019) proponen algunos principios que deberían observarse para incorporar condiciones psicológicas y pedagógicas que garanticen la eficiencia del curso de matemáticas a distancia: humanización, interactividad, identificación de los participantes, regulación (tiempos y actividades), viabilidad pedagógica en el uso de las TIC, independencia y responsabilidad del estudiante, modularidad y gestión de procesos educativos virtuales.

3.4 Enseñanza y aprendizaje de métodos numéricos

Los métodos numéricos son la alternativa matemático-computacional para resolver modelos matemáticos complejos cuya solución analítica es difícil o imposible de obtener. Su enseñanza es obligada en la mayoría de las carreras de matemáticas, ingeniería y ciencias, debido a que son una herramienta transversal a la mayoría de los cursos de aplicación de las ciencias (Becerra-Romero et al., 2019). La solución numérica de problemas implica el dominio de temas como discretización, iteración y manejo del error numérico; elementos comunes en la matemática computacional y en el cómputo científico, áreas que han tomado relevancia en la actualidad.

Los principales objetivos de la enseñanza de métodos numéricos son: identificar los posibles enfoques para la resolución de problemas numéricos; identificar las características de cada método, las condiciones de aplicación, las ventajas y desventajas en comparación con otros métodos; y la determinación de tipos de problemas para los cuales el método puede ser el más eficiente (Bilousova et al., 2019). Sin embargo, este curso habitualmente es considerado de naturaleza procedimental, mostrando el uso práctico de las matemáticas sin centrarse en la rigurosidad matemática (Jerše y Lokar, 2017), minimizando el razonamiento lógico, el pensamiento creativo y crítico, la búsqueda de soluciones y el análisis de la información (Montero et al., 2015).

Entre las principales dificultades para el aprendizaje de métodos numéricos pueden mencionarse las carencias que tienen los estudiantes en las competencias y el conocimiento necesarios para enfrentar problemas aplicados, donde conceptos, teoremas y demostraciones pueden quedar en un nivel de abstracción difícil de asimilar y aplicar (Flórez Escobar et al., 2019), la gran cantidad de contenidos, los tiempos limitados, la falta de aplicación de los conceptos y de resolución de problemas del mundo real (Nease et al., 2019) y la dificultad de migrar el conocimiento abstracto de los métodos a un lenguaje de programación (Baist et al., 2019). Aunado a lo anterior, en muchos casos estas dificultades se reflejan en una aparente actitud de desinterés y desvalorización hacia su aprendizaje (Montero et al., 2015).

Por lo anterior, el proceso de enseñanza-aprendizaje de métodos numéricos no puede prescindir de la utilización de herramientas computacionales, haciéndose necesaria su incorporación para su mejora (Lima Pisco et al., 2020). No obstante, Haney et al. (2023) consideran que, a pesar de que se han desarrollado técnicas pedagógicas en diversos cursos de ingeniería y matemáticas, los métodos numéricos son un curso que no ha suscitado el mismo interés por parte de la comunidad de investigación educativa, en particular cuando se trata de salvar la distancia entre computación y matemáticas.

El uso de herramientas computacionales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de métodos numéricos tiene distintos propósitos, tales como: a) constituir una plataforma para facilitar recursos y actividades de aprendizaje (Pramita et al., 2018), b) ser un medio para realizar cálculos (Djamila, 2017; Mendonca et al., 2016), c) brindar un instrumento para la experimentación (Jahodova et al., 2018), d) conformar una estrategia para el desarrollo de habilidades matemáticas (Becerra-Romero et al., 2019; Mendonca et al., 2016) o computacionales (Gwynllyw et al., 2020), o e) ser una estrategia de enseñanza (Granados Ospina, 2015). El objetivo es promover el aprendizaje activo por medio de la interacción (Alloqmani et al., 2022) del estudiante con los sistemas digitales.

3.4.1 Las TIC como instrumento pedagógico

Bhuyan y Khan (2014) afirman que la enseñanza de métodos numéricos debe ser eficaz en el sentido de que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas prácticos. Esto significa, de acuerdo con Caligaris et al. (2017), que el docente debe promover el desarrollo de los niveles cognitivos más altos de la Taxonomía de Bloom para producir aprendizaje matemático.

En un intento por analizar las características de los métodos numéricos de forma integral, Zhang y Wang (2015) afirman que hay tres aspectos que deben considerarse: la construcción del método, el análisis numérico del método y los experimentos numéricos. Los dos primeros se basan en conocimientos teóricos y el último en conocimientos informáticos y en habilidades para la resolución de problemas.

Existe una coincidencia generalizada en que, para que el estudiante construya los aprendizajes establecidos, debe desempeñar un papel activo en el proceso, lo que ha dado lugar a las metodologías activas, como la instrucción invertida (Johnston, 2017), el aprendizaje basado en problemas (Lupu, 2016), el aprendizaje colaborativo (Purwati, 2019) y el aprendizaje adaptativo (Kaw et al., 2019). Dentro de este consenso, está el uso de distintos tipos de materiales de enseñanza, desde documentos en formato PDF, presentaciones con diapositivas (Bhatti, 2019) o libros interactivos (Kaczorowska et al., 2018), hasta simulaciones o aplicaciones interactivas (Alloqmani et al., 2022), para cuya gestión se emplean las plataformas educativas como Moodle o plataformas desarrolladas por la propia institución.

3.4.2 Las TIC como material de enseñanza

Existe una amplia variedad de herramientas computacionales empleadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los métodos numéricos, como materiales de enseñanza (Zulyadaini, 2020), como herramienta para realizar cálculos o visualizaciones (Rumbaut Leon y Quindemil Torrijo, 2017) y como herramienta pedagógica para desarrollar habilidades cognitivas (Pratiwi y Istiyowati, 2020) mediante la experimentación, la simulación (Bilousova et al., 2019; Tudon-Martinez et al., 2020) y el modelado (Becerra-Romero et al., 2019). La resolución de problemas del mundo real es primordial en el aprendizaje de los métodos numéricos (Bhuyan y Khan, 2014; Haney et al., 2023) por lo que suele considerarse en las rutas didácticas a través de los cuales se promueven habilidades cognitivas y la motivación del estudiante para el aprendizaje.

Las estrategias pedagógicas más innovadoras conjuntan modelos pedagógicos implementados con apoyo de plataformas de aprendizaje y procuran, además, el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior (Bilousova et al., 2019; Delgado Cepeda, 2017).

3.4.3 Las TIC como instrumento motivacional y de cognición

Las herramientas digitales también se emplean para promover la motivación en el estudiante, por ejemplo, el uso de vídeos en un trabajo colaborativo (Tupacyupanqui-Jaen et al., 2018), el aprendizaje basado en desafíos (Silva-López et al., 2018) o el uso de actividades lúdicas (Tan y Saucerman, 2017). Varios estudios consideran que la motivación y el interés de los estudiantes en el aprendizaje son factores primordiales que deben tomarse en cuenta al diseñar estrategias de enseñanza-aprendizaje, tales como los modelos de aprendizaje mixto o *b-learning* (Lemley y Kadioglu, 2022), de ludificación y basados en desafíos (Delgado Cepeda, 2017).

Por su parte, Montero et al. (2015) afirman que una mejora de las actitudes hacia el aprendizaje de métodos numéricos ha de pasar por un cambio de la imagen de la asignatura, que no es ajena a la metodología didáctica utilizada ni al tipo de interacciones entre docentes y estudiantes.

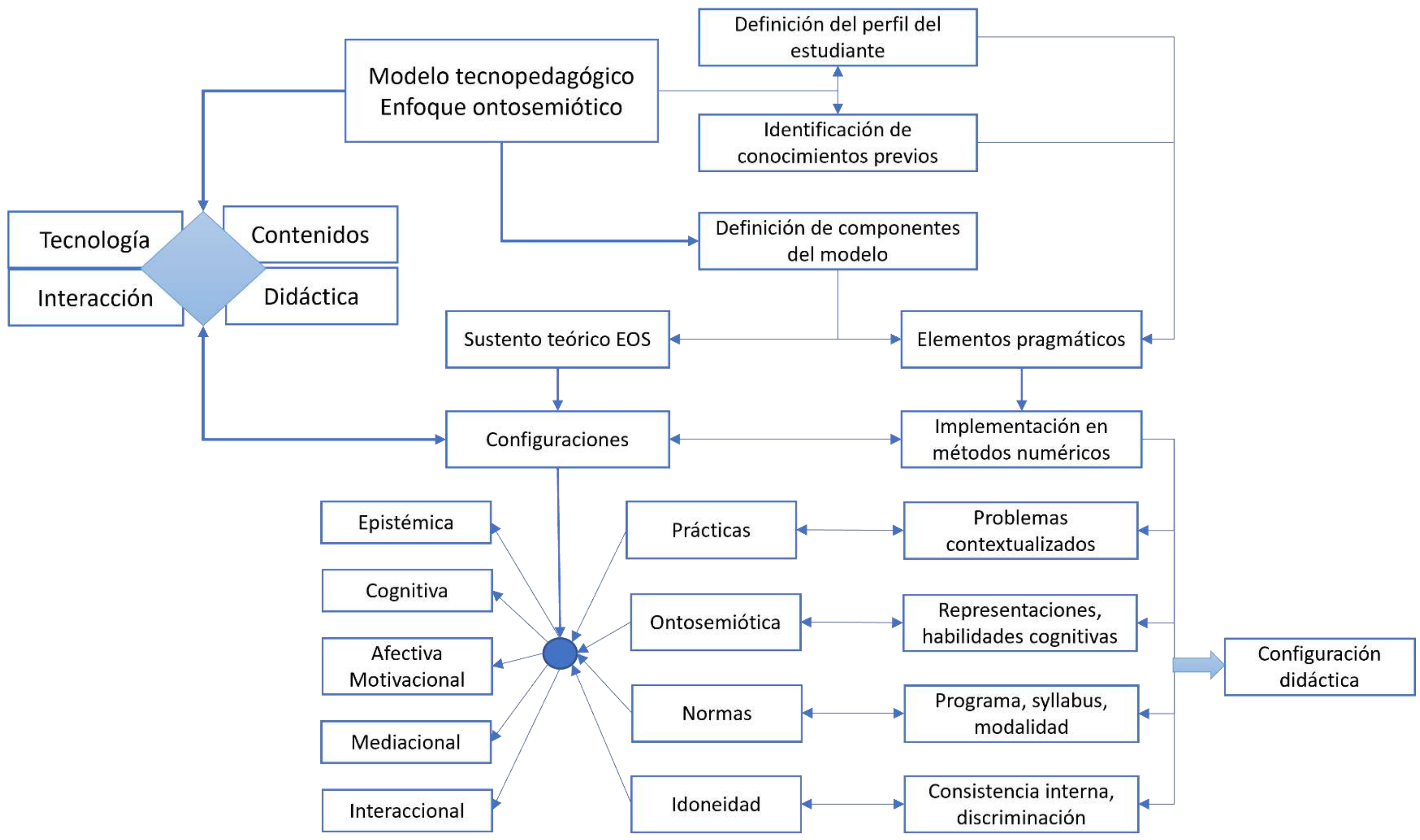
3.5 Vacíos en la literatura

Se puede afirmar que en ninguno de los estudios revisados se menciona de forma explícita a la Didáctica de la Matemática o al Enfoque Ontosemiótico como herramientas pedagógicas en la enseñanza de métodos numéricos, a pesar de que se reconoce que parte del problema en el aprendizaje de los métodos numéricos es la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. Mientras que todos coinciden en que es necesario continuar trabajando en el uso de las herramientas computacionales integradas en las estrategias de enseñanza-aprendizaje. A partir de lo anterior, se considera la necesidad de un modelo tecnopedagógico que utilice las herramientas computacionales con un propósito pedagógico, particularmente para el aprendizaje de las matemáticas, por lo que en esta tesis doctoral se propone desarrollar este modelo basado en el EOS (Godino et al., 2007).

Ante lo antes expuesto, en la Figura 3.3 se muestra un esquema de la relación sistémica de los componentes considerados en esta investigación, que constituirá la guía para el trabajo.

Figura 3.3

Esquematización de la fundamentación teórica del modelo



4. Supuestos

El presente trabajo ofrece la posibilidad de abordar distintos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas empleando las herramientas computacionales como herramienta pedagógica e instrumento semiótico. Para ello, se propone un modelo tecnopedagógico basado en los elementos del EOS para influir en la construcción del conocimiento matemático por parte de los estudiantes en un curso de Métodos Numéricos. A partir de los constructos esquematizados en la Figura 3.3, se pueden establecer los siguientes supuestos principal y secundarios:

Un modelo tecnopedagógico integrado por las dimensiones del EOS propiciará que los estudiantes construyan los conocimientos matemáticos requeridos para el aprendizaje de métodos numéricos.

- El modelo tecnopedagógico basado en el EOS pueda aplicarse en modalidad virtual como una opción viable para las situaciones que así lo demanden, logrando los aprendizajes establecidos para métodos numéricos.
- La resolución de problemas contextualizados mediante métodos numéricos, como elemento central del EOS, promueve la significación de aprendizajes, la motivación y la aplicación de conocimientos.
- La plataforma de aprendizaje Moodle, como medio para la implementación del modelo tecnopedagógico para un curso virtual de métodos numéricos, proporciona herramientas que permiten, tanto al docente, como al estudiante, evaluar de forma continua el avance en los aprendizajes.

5. Objetivos

Este proyecto de investigación busca integrar el EOS en un modelo tecnopedagógico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de métodos numéricos. Los objetivos planteados son:

Objetivo general. Desarrollar un modelo tecnopedagógico bajo el enfoque ontosemiótico para un curso virtual de métodos numéricos, para mejorar el desempeño general de los estudiantes.

Objetivos específicos

- Adaptar las configuraciones del enfoque ontosemiótico en estrategias de enseñanza-aprendizaje en un modelo tecnopedagógico para un curso virtual de métodos numéricos.
- Implementar el modelo tecnopedagógico propuesto en la plataforma Moodle para la impartición de un curso virtual de métodos numéricos.
- Analizar y evaluar los resultados obtenidos mediante la comparación de calificaciones finales, medición del desempeño y permanencia de los estudiantes para determinar si el modelo mejora el aprendizaje de los métodos numéricos y, mediante la aplicación de encuestas de percepción y grupos de enfoques, para conocer la opinión de los estudiantes sobre el modelo.

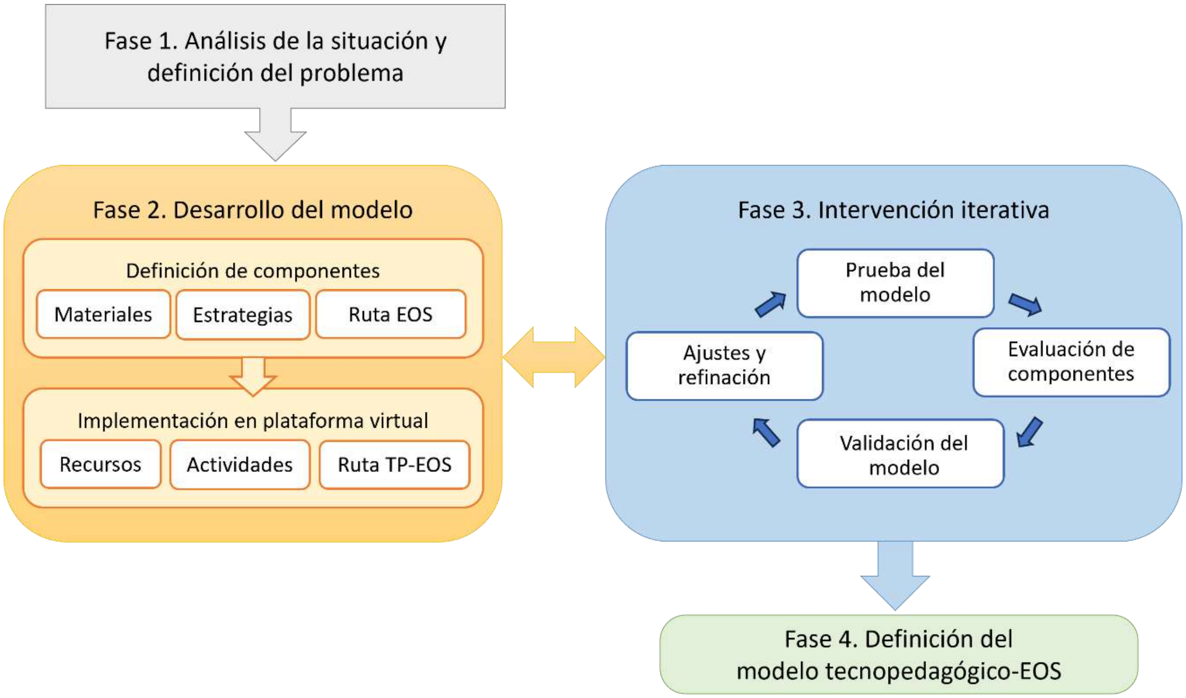
6. Metodología

En este capítulo se aborda la metodología empleada para lograr los objetivos de la investigación. Debido a que la enseñanza y el aprendizaje son procesos en continuo cambio, demandan un análisis constante que proporcione elementos para su mejora, por ello se empleó una metodología mixta bajo un diseño de investigación que favoreciera la generación de conocimientos y el desarrollo de un modelo innovador: la Investigación Basada en el Diseño (IBD). Este tipo de investigación está orientado hacia la innovación educativa cuya característica fundamental consiste en la introducción de un elemento nuevo para transformar una situación (De Benito Crosetti y Salinas Ibañez, 2016). Según Vrancken et al. (2018) la IBD se dirige principalmente a comprender los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los que el propio investigador se encuentra implicado. Se caracteriza por la interdependencia entre el diseño instruccional y la investigación, buscando ayudar a crear y ampliar el conocimiento sobre el desarrollo e implementación de ambientes de aprendizaje innovadores.

Tomando como base la revisión de resultados previos de investigaciones relevantes y el análisis diagnóstico, se relacionó constantemente la investigación y la práctica para desarrollar un modelo tecnopedagógico para la enseñanza aprendizaje de métodos numéricos sustentado en el Enfoque Ontosemiótico, el cual se fue probando y perfeccionando a través de un proceso de intervención iterativo. La Figura 6.1 presenta las fases de la metodología empleada.

Figura 6.1

Fases de la investigación basada en el diseño



6.1 Población

La población estudiada estuvo conformada por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación de la Facultad de Estudios Superiores (FES) Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México, inscritos de la asignatura de Métodos Numéricos 1 y 2, del 3º y 4º semestre, respectivamente, durante los periodos lectivos (semestres) 2022-2, 2023-1 y 2023-2 (Tabla 6.1).

Tabla 6.1

Número de estudiantes que integraron la población de estudio por periodo

Periodo	Curso	Número de estudiantes
2022-2	Métodos Numéricos 2	80
2023-1	Métodos Numéricos 1	70
2023-2	Métodos Numéricos 2	80

La asignación de los grupos a cada docente la realiza la Jefatura de Programa de la carrera. Por su parte, cada estudiante se inscribe de acuerdo con un horario definido a partir de su promedio. De acuerdo con este orden podrá elegir grupo en función de disponibilidad y sus tiempos, necesidades e intereses.

6.2 Técnicas e instrumentos

En este proyecto de investigación se emplearon dos tipos de instrumentos: (a) para verificar que los elementos del EOS sean integrados apropiadamente en los componentes del modelo y (b) para recopilar datos de las intervenciones y validar la idoneidad del modelo.

En el contexto de la investigación basada en el diseño los instrumentos de medición son procedimientos sistemáticos que permiten observar la conducta y los aprendizajes de los estudiantes, en este caso, a fin de hacer inferencias sobre los resultados de la incorporación del EOS en el modelo.

Para recolectar datos que permitieran evaluar los resultados del modelo en cada intervención se eligieron: (1) Una encuesta de percepción para conocer la opinión de los estudiantes sobre el modelo y sus componentes. (2) Los registros de las calificaciones en las actividades de la configuración didáctica y las calificaciones finales, para evaluar el efecto en los aprendizajes. (3) Grupos de enfoque para evaluar dominios cognitivos y la apreciación de los estudiantes sobre el modelo y sus aprendizajes, y (4) Un estudio técnico para evaluar la idoneidad de las actividades de autoevaluación.

6.2.1 Integración del EOS en el modelo

Para garantizar la correcta integración de los componentes del EOS en un modelo para la enseñanza virtual de métodos numéricos se emplearon instrumentos adaptados o diseñados a partir de propuestas directas de los autores del enfoque (Tabla 6.2).

Tabla 6.2

Instrumentos para evaluar la incorporación del EOS en el modelo

Instrumento	Componente del EOS
Tabla 6.3 Matriz de análisis para la faceta epistémica (Amaya, 2020, p. 121)	Configuraciones ontosemiótica, didáctica y sistema de prácticas.
Tabla 6.4 Matriz de análisis para la configuración normativa (Godino et al., 2009, pp. 65–70)	Configuración normativa
Tabla 6.5 Criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2013)	Idoneidad didáctica

A continuación, se explica cada uno de los tres instrumentos.

Tabla 6.3

Matriz de análisis para la faceta epistémica

Categoría de análisis	Indicadores
Cobertura del método	Conceptos Procedimientos
Reconocimiento y aplicación del método	Condiciones de aplicación
Producción de representaciones	Registros de partida y auxiliares Representaciones producidas
Sistemas semióticos producidos	Conexiones realizadas entre registros y representaciones
Distintas estrategias de solución	Estrategia y recursos
Uso de proposiciones/ definiciones	Pertinencia de los conceptos empleados Tareas retadoras
Argumentación	Calidad de las explicaciones y justificaciones

Nota: Elaborado a partir de Amaya (2020, p. 121).

Tabla 6.4

Matriz de análisis para la configuración normativa

Normas	Definición	Indicador
Epistémicas	Qué matemáticas se deben aprender	Contenidos Diversidad de representaciones
Cognitivas	Cómo aprenden los estudiantes y cómo se debe enseñar	Apropiación de significados Evaluación sumativa
Interactivas	Apropiación de significados	Clase de teoría y práctica Evaluación diversificada Actividades colaborativas
Mediacionales	Medios o recursos para los procesos de estudio	Aula virtual Medio de comunicación Medio de interacción Software Tiempos
Afectivas	Afectividad, motivación y emociones	Situaciones problema atractivas Participación de los estudiantes en la comunicación de significados
Ecológicas	Formación de profesionales competentes	Problemas del entorno social, político y económico para el sistema de prácticas

Nota: Elaborado a partir Godino et al., pp. (2009, pp. 65–70).

Tabla 6.5

Criterios de idoneidad didáctica[1]

Criterio	Componente	Indicador
Cognitivo	Conocimientos previos	Contenidos alcanzables con los conocimientos actuales
	Aprendizaje	Comprensión conceptual y proposicional
		Competencia comunicativa y argumentativa
		Fluencia procedimental
		Competencia metacognitiva
		Evaluación para los distintos niveles
	Representaciones	Actividades de ampliación y refuerzo
		Acceso y logro para todos
Epistémico	Situaciones problema	Problemas contextualizados
		Ejercicios
	Lenguaje	Diferentes formas de expresión matemática
	Proposiciones y procedimientos	Claros, correctos y fundamentales
		Los estudiantes generan o negocian proposiciones o procedimientos
	Argumentos	Explicaciones comprensibles
		Se promueven que el estudiante argumente
	Relaciones	Los objetos matemáticos se relacionan, identifican y articulan
Interaccional	Docente-estudiante	El estudiante participa en la dinámica de clase, externa y resuelve dudas
	Entre estudiantes	Se favorece el diálogo entre estudiantes con argumentos matemáticos
	Autonomía	Existen momentos para que los estudiantes asuman la responsabilidad del aprendizaje

[1] Por criterio de idoneidad se debe entender una regla de corrección que establece cómo debería realizarse un proceso de instrucción (Godino et al., 2009).

Criterio	Componente	Indicador
	Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes
Afectivo	Intereses	Las actividades son de interés para los estudiantes. Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de la materia en la vida cotidiana y profesional.
	Actitudes	Se promueve la participación, la perseverancia, responsabilidad, etc.
	Emociones	Satisfacción vs Frustración Motivación vs Apatía
Ecológico	Currículum	Los contenidos, su implementación y evaluación corresponden con las directrices curriculares Transversalidad
	Utilidad socio-laboral	Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
	Innovación	Integración de nuevas tecnologías y/o estrategias
Mediacional	Software matemático	Recursos manipulativos y de visualización para introducir conceptos, lenguajes y procedimientos Las definiciones y propiedades son contextualizadas
	Aula virtual	Recursos y actividades Horarios y tiempos Organización en el aula virtual

Nota: Elaborado a partir de Godino (2013)

6.2.2 Encuesta de percepción

El uso de la encuesta es común en la investigación cualitativa debido a que permite mayor acceso a los miembros de una población y se puede preguntar de una manera anónima, lo cual brinda libertad a los encuestados. Para evaluar los distintos componentes del modelo, de acuerdo con el sentir de los estudiantes, se aplicó una encuesta de percepción.

Dicha encuesta se instrumentó mediante un formulario de Google y se incrustó en la plataforma al final del curso para ser contestada por los estudiantes de forma voluntaria (Anexo C).

6.2.3 Calificaciones

Para analizar la configuración didáctica fueron consideradas las calificaciones en tres tiempos: la autoevaluación, el sistema de prácticas y las calificaciones finales.

Las calificaciones finales fueron calculadas a partir de la siguiente ponderación con lo que se pretende considerar la participación del estudiante a lo largo de la configuración didáctica:

- 40% Evaluación final. 10% al final de cada unidad temática. Comprensión y aplicación de conceptos matemáticos, de los métodos numéricos y la habilidad procedimental para su implementación en la solución de problemas.
- 20% Actividades de autoevaluación. Al término de cada método el estudiante debe realizar un cuestionario que le permite identificar su nivel de aprendizaje. Estas actividades se pueden realizar dos o tres veces para dar la oportunidad al estudiante de reestructurar conocimientos y lograr calificaciones satisfactorias.
- 20% Programas de los métodos. Por cada unidad temática, los estudiantes eligen un método para ser implementado en un lenguaje de programación. La elección del método, la justificación de esta elección y los requerimientos del programa se realizan de forma grupal. Al final del curso, estos programas se integran en un paquete de software.
- 20% Sistema de prácticas. Consiste en una serie de problemas de aplicación o contextualizados que requieren para su resolución de los métodos numéricos. Esta actividad se realiza por equipos y al final del curso se integran en un cuadernillo como un portafolio electrónico de evidencias.

6.2.4 Grupos de enfoque

Esta técnica, que privilegia la expresión oral, se empleó para obtener datos cualitativos sobre el dominio de los conocimientos adquiridos, a través de un diálogo entre pares sobre la experiencia de aprendizajes a partir del modelo. El objetivo del instrumento fue:

Objetivo: Identificar el dominio de los conceptos matemáticos que sustentan los métodos numéricos abordados en el curso y el desarrollo de habilidades metacognitivas por parte de los estudiantes, y su percepción sobre los aprendizajes a partir del modelo tecnopedagógico sustentado en el EOS.

Logística:

- Los estudiantes se integraron en grupos de cinco en grupo y horario que cada uno eligió libremente.
- Se asignó un horario de participación de cada grupo.
- Se definió una duración de 15 minutos por grupo.
- Todos los estudiantes participaron como actividad de cierre del curso.
- Las sesiones fueron síncronas a través de Zoom.
- Los y las estudiantes intercambiaron explicaciones, opiniones y experiencias sobre:
    - ¿Cuáles fueron sus principales dificultades y sus principales logros?
    - ¿Qué aprendizajes adicionales a los métodos numéricos adquirieron?
    - ¿Qué les gustó más del curso?

El docente valora el dominio de los temas en la forma de responder de los estudiantes, si el uso que hacen del lenguaje matemático es apropiado e identifican los componentes del modelo que requieren modificaciones.

6.2.5 Estudio técnico

Consiste en el análisis del examen empleado como actividad de autoevaluación, que integra las dimensiones epistémica, cognitiva y mediacional. Para ello se consideraron los estadísticos del examen que genera automáticamente la plataforma Moodle (Moodle.org, 2022):

- Consistencia interna. Indica si las preguntas discriminan entre estudiantes con diferentes habilidades o si están evaluando con calidad similar, lo que hace posible una correlación en el examen.

- Tasa de error. Estima el porcentaje de la desviación estándar que se debe a efectos aleatorios en lugar de diferencias genuinas de la habilidad entre los estudiantes.
- Error estándar. Refleja efectos aleatorios y es una medida de incertidumbre en la calificación de cualquier estudiante. Si el error estándar excede el 8%, es probable que una proporción sustancial de los estudiantes estén erróneamente calificados.

Para los reactivos:

- Índice de facilidad (porcentaje de aprobación). La facilidad del reactivo se define como la proporción de estudiantes que responde correctamente con respecto al total de respuestas recibidas.
- Índice de discriminación y eficiencia discriminativa (Ruiz Bolívar, 2015). El índice de discriminación indica qué tan efectivo es el reactivo para distinguir entre los niveles de aprendizaje logrados por los estudiantes. La eficiencia discriminativa intenta estimar qué tan bueno es el índice de discriminación en relación con la dificultad de la pregunta.

Los valores aceptables para estos estadísticos se muestran en la Tabla 6.6.

Tabla 6.6

Estadísticos de los exámenes (cuestionarios) en Moodle

Estadístico	**Satisfactorio**	**Insatisfactorio**
Consistencia interna	Mayor al 75%	Menor al 64%
Tasa de error	Menor de 50%	Mayor de 50%
Error estándar	6% – 8%	Mayor al 8%
Índice de facilidad	35% – 65%	Mayor de 90% o menor de 20%
Índice de discriminación	Superior a 30%	Menor que 20%
Eficiencia discriminativa	Superior a 50%	Menor que 50%

Nota: Elaborado a partir de la documentación de Moodle (Moodle.org, 2022)

6.3 Procedimientos

De acuerdo con lo descrito en el apartado 1.1, los estudiantes que ingresan a los cursos de Métodos Numéricos, en general, no cuentan con los conocimientos matemáticos necesarios para lograr los aprendizajes establecidos en los programas de la asignatura. Como punto de partida para el diseño del modelo se consideran los estilos de aprendizajes de los estudiantes que cursan métodos numéricos, siendo el estilo dominante el Reflexivo-Teórico, de acuerdo con la aplicación del cuestionario CHAEA descrito en el apartado 1.2. Sin embargo, las estrategias de enseñanza-aprendizaje no solo se orientan a estos estilos de aprendizaje, lo que implicaría no considerar a los estudiantes con estilos de aprendizaje diferentes. Por el contrario, el modelo debe contemplar actividades y materiales diversos para potenciar los aprendizajes de acuerdo con los estilos dominantes y para favorecer también el desarrollo de los estilos menos dominantes.

En lo referente a los conocimientos previos, tanto el examen diagnóstico aplicado al ingresar a la licenciatura, como las evaluaciones diagnósticas aplicadas al inicio de cada curso, revelan que la mayoría de los estudiantes no cuentan con los conocimientos matemáticos necesarios para los cursos de métodos numéricos (Tabla 1.2 y Tabla 1.3). Por lo tanto, el diseño de estrategias de enseñanza encaminadas a la recuperación de conocimientos previos debió partir del supuesto de que los estudiantes no dominan los temas matemáticos requeridos y considerarlos como parte del contenido de la asignatura.

Finalmente, los contenidos considerados para el modelo estuvieron definidos por los programas de las asignaturas de Métodos Numéricos 1 y Métodos Numéricos 2 establecidos en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación de la Facultad de Estudios Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México (MAC y FES-Acatlán, 2014), mismos que pueden consultarse en el Anexo A.

6.3.1 Desarrollo del modelo

Considerando la necesidad de entornos virtuales que gestionen conocimientos, habilidades y actitudes, de acuerdo con lo planteado en la Figura 3.2, y que promuevan la construcción de aprendizajes matemáticos que sustenten la asignatura en cuestión, en este caso de Métodos Numéricos, el Enfoque Ontosemiótico se incorporó en un modelo tecnopedagógico estructurado a partir de las perspectivas del EOS: epistemológica, cognitiva e instruccional:

a. Epistemológica: Actividad matemática dirigida a la resolución de problemas.
b. Cognitiva. Construcción de representaciones semióticas de los objetos matemáticos a partir de las cuales el estudiante construirá progresivamente conocimiento matemático.

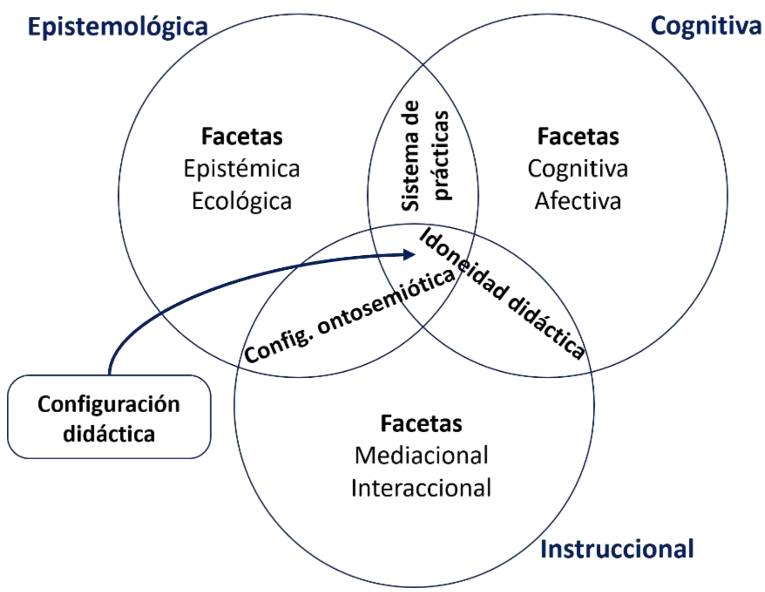
c. Instruccional: Secuencias de prácticas que considera procesos de significación, conjetura y argumentación.

La Figura 6.2 muestra esquemáticamente la relación sistémica de las dimensiones y configuraciones del EOS; puede observarse que el sistema de prácticas (resolución de problemas) representa el fin principal del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por lo tanto, se ubica como la intersección de las distintas perspectivas.

Sin embargo, tanto dimensiones como configuraciones están estrechamente relacionadas y ninguna de ellas puede verse aislada de las otras. En este sentido, ninguna es predominante.

Figura 6.2

Integración del EOS como modelo tecnopedagógico



Al inicio de este proyecto de investigación se planteó el desarrollo de un modelo tecnopedagógico desde un enfoque ontosemiótico. Sin embargo, tomando en cuenta que los modelos tecnopedagógicos se caracterizan por el uso pedagógico o con fines cognitivos de las herramientas computacionales, puede afirmarse que un modelo basado en el EOS es un modelo tecnopedagógico, debido a que dos de las seis dimensiones que lo componen tienen como propósito el uso y distribución de recursos tecnológicos para la construcción de conocimientos. La dimensiones mediacional e interaccional específicamente se refieren al uso de las tecnologías como medios o recursos que condicionan los procesos de estudio, lo que coincide con el modelo TPACK de Mishra y Koehler (2006), y facilitan las interacciones entre los actores del proceso enseñanza-aprendizaje lo que concuerda con el modelo planteado por Coll et al. (2008). En conclusión, no es necesario nombrar "tecnopedagógico" al modelo desarrollado en este proyecto de investigación, por lo que a partir de este punto solo se hará referencia a él como "Modelo EOS para educación virtual de métodos numéricos".

A partir de los elementos antes descritos, se definieron los componentes del modelo que se esquematiza en la Figura 6.3. El modelo se compone por tres niveles, el primer nivel contiene la Configuración didáctica de cada método, en el segundo nivel, se aborda la Integración de los conocimientos y habilidades adquiridos en el nivel previo, para terminar con la Apropiación donde se requiere que el estudiante evalúe métodos, herramientas y procedimientos, poniendo en práctica sus aprendizajes y habilidades. Estos niveles conforman la trayectoria didáctica del curso a través de la cual se lleva al estudiante de habilidades de pensamiento básicas a las de orden superior.

Figura 6.3

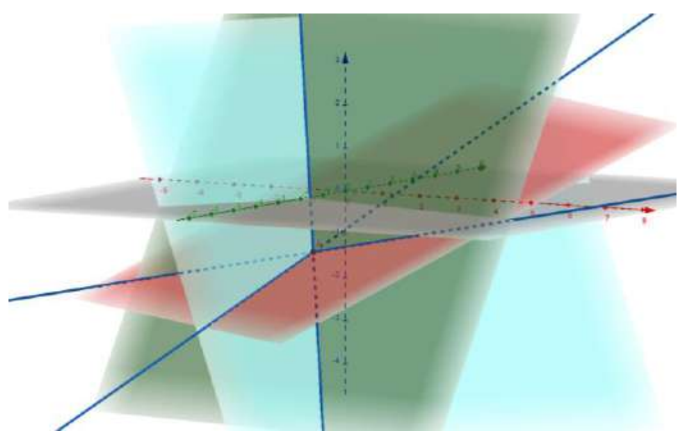
Modelo EOS para educación virtual de métodos numéricos (M-EOS-MN)

La presentación teórico-práctica (PTP) representa un espacio en el que tienen lugar la enseñanza y la actividad de aprendizaje. Este elemento es percibido por el estudiante como una clase. Requiere llevarse a cabo integrando las configuración epistémica y cognitiva en la que interactúen los objetos matemáticos favoreciendo en el estudiante la construcción de las representaciones para lograr el aprendizaje matemático. Para ello se recurre al uso de herramientas matemáticas computacionales como hojas de cálculo, GeoGebra, Python, MATLAB, Wolfram Mathematica o cualquier otra que el docente utilice para la explicación, comprensión y experimentación de cada uno de los métodos. El diseño y elaboración del material, así como la estrategia de presentación, deben ajustarse a la matriz de la dimensión epistémica de la Tabla 6.3.

En la Tabla 6.7 se presenta un ejemplo resumido de los elementos que integran una presentación teórico-práctica para los métodos iterativos para solución de sistemas de ecuaciones lineales. Los materiales digitales y las estrategias deberán elaborarse y diseñarse de acuerdo con esta configuración.

Tabla 6.7

Ejemplo resumido de los elementos para la presentación teórico-práctica

Tema de la sesión: Métodos iterativos para solución de sistemas de ecuaciones lineales	
Lenguaje El docente debe propiciar que el estudiante participe durante toda la presentación, experimentando, argumentando, cuestionando y resolviendo.	
Verbal	“Un sistema de ecuaciones lineales representa la relación de distintas situaciones en un problema (ecuaciones) que comparten componentes (variables). Su solución son los valores de esas variables que satisfacen todas las situaciones (ecuaciones del sistema) de forma simultánea”.
Simbólico	Sea el siguiente sistema de tres ecuaciones y tres variables $6x - 3y + 2z = 6$ $x + 4y - 2z = -7$ $-2x - 3y + 8z = -3$ $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$ $Ax = b \qquad \therefore x = A^{-1}b$
Gráfico	 Cada plano es una ecuación y el punto en que se intersecan es la solución del sistema.

Conceptos	
Previos	Ecuación lineal, matriz, determinante, matriz inversa, producto matricial Aproximación iterativa
Emergentes	Sucesión converge de aproximaciones Normas vectoriales, matrices convergentes Automatización de operaciones elementales Matriz dominante diagonalmente y matriz definida positiva
Propiedades/Proposiciones	
Previas	Si la matriz asociada al sistema es no singular el sistema tiene solución. $Ax = b \qquad \therefore x = A^{-1}b$
Emergente	Si la matriz es dominante diagonalmente y/o definida positiva el sistema puede resolverse de forma iterativa y es estable el crecimiento del error de redondeo. $Ax = b$ se puede transformar en $x = Tx + C$ y la sucesión que aproxima a la solución es $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C$ para $k = 0, 1, \dots$
Procedimiento	Transformar el sistema lineal en una forma iterativa. Verificar la convergencia del método para el sistema de ecuaciones en cuestión. Proponer una aproximación inicial al sistema. A partir de cada aproximación, mejorarla y volver a probar (iterar). Detener el procedimiento hasta lograr una aproximación que cumpla con los requerimientos del problema.
Argumento	La eficacia de estos métodos radica en la naturaleza del sistema de ecuaciones que determina su convergencia a partir del radio espectral. Numéricamente, siempre se puede encontrar la alternativa y mejorar la convergencia. Estos métodos son autocorregibles y estables en lo que respecta al error de redondeo. Los algoritmos pueden optimizarse en cuanto a número de operaciones y espacio de memoria requerido.

Durante la presentación teórica-práctica el estudiante no tiene suficiente participación como para aplicar y argumentar sobre las proposiciones y procedimientos, por ello, en la actividad que sigue a la presentación teórico-práctica, para atraer el interés de los estudiantes en las concepciones matemáticas, se contempla una autoevaluación con el propósito de brindar a los estudiantes oportunidades, reiteradas y duraderas, de poner en práctica procedimientos y criterios de prueba; planteando la construcción de conocimientos como resultado de la resolución de problemas.

La actividad de autoevaluación desempeñó las funciones de evaluación formativa y actividad de aprendizaje. En la Tabla 6.8 se indican las funciones de esta actividad en relación con las dimensiones del EOS.

Tabla 6.8

Funciones de las actividades de autoevaluación

Descripción	Faceta EOS
Indicar tema y objetivo (acorde con en el programa de la asignatura).	Epistémica
Proporcionar problemas que sean factibles de resolver por los estudiantes	Cognitiva/ Afectiva
Evaluar el grado en que los aprendizajes conceptuales y procedimentales pretendidos se hayan logrado.	Cognitiva
Ofrecer elementos para propiciar los aprendizajes faltantes.	Cognitiva
Motivar la participación reiterada para alcanzar los aprendizajes establecidos.	Afectiva
Proporcionar retroalimentación para facilitar la transformación de representaciones.	Interaccional

Los cuestionarios están compuestos por preguntas (reactivos) que deben recuperar y facilitar los aprendizajes sin caer en evaluaciones conductistas de memorización o repetición, sino que permitan al estudiante construir a partir de los conocimientos previos. Con estas características, esta actividad contribuye a la autorregulación y al aprendizaje autónomo.

Para lograr el desarrollo de habilidades cognitivas necesarias para el uso de métodos numéricos en la solución de problemas, como etapa final el modelo integra el sistema de prácticas. El sistema de prácticas consiste en seleccionar una serie de problemas de aplicación o contextualizados a resolver por medio de métodos numéricos. El sistema de práctica, conocido por los estudiantes como “Problemas de aplicación” o “Problemas para portafolio”, requiere la programación del método en un lenguaje como C o Python o del uso de alguna herramienta computacional, lo que tiene como objetivo dirigir al estudiante al nivel superior de habilidades de pensamiento (evaluar y crear).

Esta actividad tiene dos objetivos: lograr que el estudiante pueda pasar de una representación a otra sin caer en contradicciones, hacer conexiones entre representaciones y con elementos del contexto sociocultural (Amaya, 2020). Se procuró que los problemas que integraron el sistema de prácticas fueran lo más cercanos posible a los que el estudiante podrá encontrar en el ejercicio profesional y, para futuras aplicaciones del modelo, deberán mantenerse actualizados de acuerdo con el momento social en el que se lleva a cabo el proceso de aprendizaje. La Tabla 6.9 presenta la descripción de las funciones y acciones del sistema de prácticas con las dimensiones del EOS que integra. En las dimensiones cognitiva y epistémica el objetivo primordial del uso de las tecnologías fue favorecer la actividad matemática y facilitar los procesos de abstracción. El sistema de prácticas representa la aplicación íntegra de la configuración epistémica.

Tabla 6.9

Funciones del sistema de prácticas

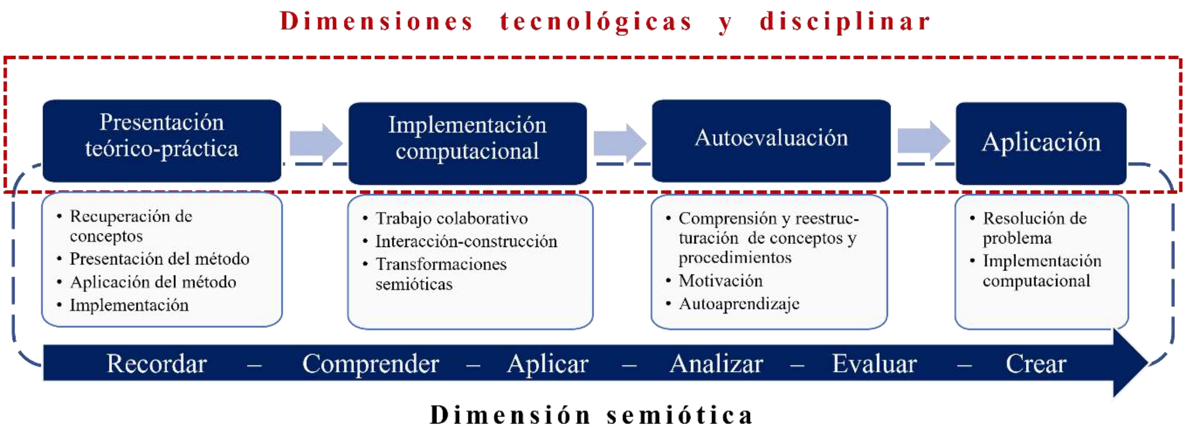
Descripción	Acciones	Faceta
Construir conocimientos matemáticos a partir de diversas situaciones.	Favorecer competencias matemáticas mediante la resolución de distintos problemas contextualizados.	Cognitiva
Recuperar conocimientos previos para sustentar los nuevos.	Plantear situaciones que demanden el uso de conocimientos previos o propiciar su construcción antes de concluir la práctica.	Cognitiva
Problemas contextualizados con la realidad de los estudiantes	Plantear situaciones problemáticas que despierten el interés de los estudiantes.	Motivacional
Comunicación entre los actores del proceso docente, estudiantes, ambiente de aprendizaje.	Implementar estrategias para una interacción continua entre participantes: rúbricas, guías de puntaje, retroalimentación y mensajes.	Interaccional

En el Anexo D se pueden consultar algunas de las situaciones problema que integraron el sistema de prácticas para cada unidad temática.

La trayectoria didáctica del curso estuvo integrada por las configuraciones didácticas de cada tema. Con estas configuraciones el docente realiza transposiciones didácticas que llevan al estudiante a movilizar y comprender la diversidad de significados parciales para un objeto matemático en los diversos contextos (Pino-Fan et al., 2018) que le permiten desarrollar habilidades como, entender el problema, planear una solución, implementar un plan de solución y verificar las respuestas. La Figura 6.4 presenta esquemáticamente la configuración didáctica, sus componentes y funciones semióticas que integran el EOS de acuerdo con la Figura 6.2.

Figura 6.4

Integración de componentes en la configuración didáctica



En la Tabla 6.10 se muestra la estructura general de la configuración didáctica, aplicable a cada método, incorporando los componentes: presentación teórico-práctica, autoevaluación y sistema de prácticas. En la columna de Formato se indica, de forma general, el uso de herramientas tecnológicas con fines pedagógico-cognitivos, de interacción y de comunicación. En la siguiente columna se indica la función cognitiva que se pretende desarrollar y en la última columna se indica la dimensión a la que corresponde cada acción.

Tabla 6.10

Configuración didáctica

Acción	**Formato**	**Propósito**	**Función cognitiva**	**Faceta**
Recuperación de conceptos	Presentación /vídeo /documento/gráficas	Recuperación de conocimientos previos; valoración de su uso en el método.	Reestructuración Motivación Abstracción	Cognitiva Epistémica Mediacional
Presentación del método Aplicación de conceptos	Deducción del método con apoyo de herramientas tecnológicas	Justificación matemática del método.	Argumentación Definiciones, procesos y proposiciones	
Aplicación del método	Resolución colaborativa de un problema básico	Motivación al estudiante a plantear formas de aplicación del método.	Intervenir y condicionar Trabajo colaborativo	Cognitiva Interaccional Mediacional Afectiva
Implementación computacional	Uso de software matemático o lenguaje de programación	Transformación de lenguaje matemático a un algoritmo.	Justificación Abstracción	
Actividad de autoevaluación	Evaluación automatizada en plataforma	Identificar el nivel de conocimientos y habilidades adquiridos.	Reestructuración Motivación Resolver	Cognitiva Mediacional Afectiva
Sistema de prácticas: situación problema	Integración de habilidades en un trabajo colaborativo	Lenguaje de programación, plataforma de aprendizaje.	Argumentar Resolver	Cognitiva Interaccional Mediacional Ecológica

6.3.2 Implementación en plataforma virtual

Las innovaciones en el modelo plantean un escenario que permite al estudiante actuar y reflexionar sobre su propio aprendizaje matemático. Para ello, la trayectoria didáctica del modelo se implementó en la plataforma de aprendizaje Moodle institucional SEA, Sistema Educativo Acatlán (https://sea.acatlan.unam.mx/).

De acuerdo con el modelo propuesto todas las actividades son consideradas de aprendizaje, incluso las actividades de evaluación sumativa, debido a que todas contribuyen a la construcción de conocimientos y siguen una trayectoria que lleva a los estudiantes en el desarrollo de habilidades cognitivas de las de orden inferior a las de orden superior.

El proceso de implementación del modelo en plataforma Moodle consistió en:

1. Definir tiempos de acuerdo con lo establecido en el calendario institucional, el cual consta de 16 semanas de clase, dos clases por semana de dos horas cada una. Además, se cuenta con dos semanas para evaluaciones finales (primera y segunda vuelta).
2. Definir la configuración del curso, por temas o por semanas. Con el propósito de poder realizar ajustes ante cualquier eventualidad o suspensión de clases por distintas causas, se decidió configurar el curso por temas.
3. Cada unidad temática siguió la configuración didáctica establecida en la Tabla 6.10. La conjunción de las unidades temáticas constituyó la trayectoria didáctica del curso.
4. Para facilitar a los estudiantes el seguimiento de la configuración, cada unidad temática se dividió en subtemas, cada uno de los cuales estuvo constituido por:
    a. Materiales en los que se incorpora la Presentación teórico-práctica y se disponen la presentación, vídeo de la clase, documentos PDF y sitios web.
    b. Actividades integradas por la autoevaluación, al menos un problema de aplicación (del sistema de prácticas) y la implementación del método en alguna herramienta computacional.
5. Al final de cada unidad temática se realizó un cierre, lo que se denominó “Integración de conocimientos”, para evaluar dominio de conceptos, de procedimientos y su aplicación mediante un programa de computadora en la resolución de problemas.
6. Para integrar todas las configuraciones didácticas, se agregó un tema denominado “Entregas finales” que consistió en integrar, en un paquete de programas, los

programas de los métodos individuales realizados a lo largo del curso; y en un portafolio electrónico los problemas del sistema de prácticas.

Para la presentación teórico-práctica de cada método se elaboró una presentación en MS PowerPoint como medio para integrar las actividades definidas en la Tabla 6.10. En la Tabla 6.11, se presenta un ejemplo de la secuencia seguida en las presentaciones empleadas para esta actividad. Adicionalmente, a manera de ejemplo se muestran las diapositivas para la presentación teórico-práctica correspondientes al tema Ajuste polinomial por el método de mínimos cuadrados.

Tabla 6.11

Secuencia de diapositivas para presentación teórico-práctica

Acción	**Descripción**	**Ejemplo**
Presentación	En un diálogo con el grupo se detona interés por el tema.	Figura 6.5
Introducción	Se introducen conceptos y se dan ejemplos de aplicación del método.	Figura 6.6
Recuperación de conocimientos	El docente guía al estudiante en la deducción del método a partir de aprendizajes previos.	Figura 6.7
Presentación del método	El docente, apoyado de herramientas computacionales y de forma colaborativa con el grupo, explica el método desde el punto de vista teórico, técnico y práctico.	Figura 6.8
Aplicación de conceptos	Explicar detalladamente cómo los conceptos matemáticos se relacionan y aplican para deducir el método. Es muy importante que el estudiante asocie el método numérico como una herramienta matemática.	Figura 6.9

Acción	Descripción	Ejemplo
Aplicación del método	Resolución de problemas básicos de forma grupal con apoyo de alguna herramienta computacional.	Figura 6.10
Implementación computacional	Se aborda la transformación de conceptos teóricos en instrucciones o fórmulas para aplicar el método a la resolución de problemas. Con esta actividad se favorece la construcción y transformación de representaciones semióticas.	Figura 6.11
Discusión y cierre	Reflexión y análisis sobre ventajas, desventajas, condiciones y características del método. Con esto se tienen los elementos para la autoevaluación y un problema de complejidad media.	Figura 6.12

Figura 6.5

Presentación

Figura 6.6

Introducción

Figura 6.7

Recuperación

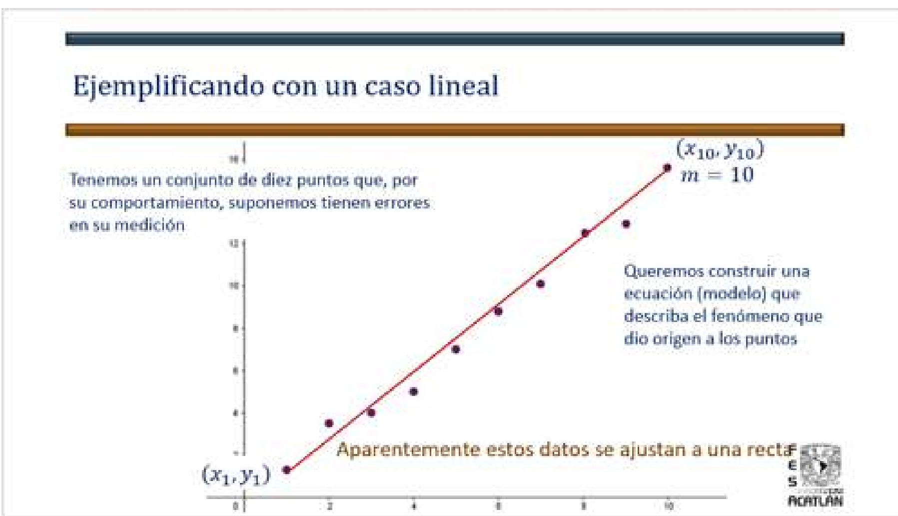


Figura 6.8

Presentación del método

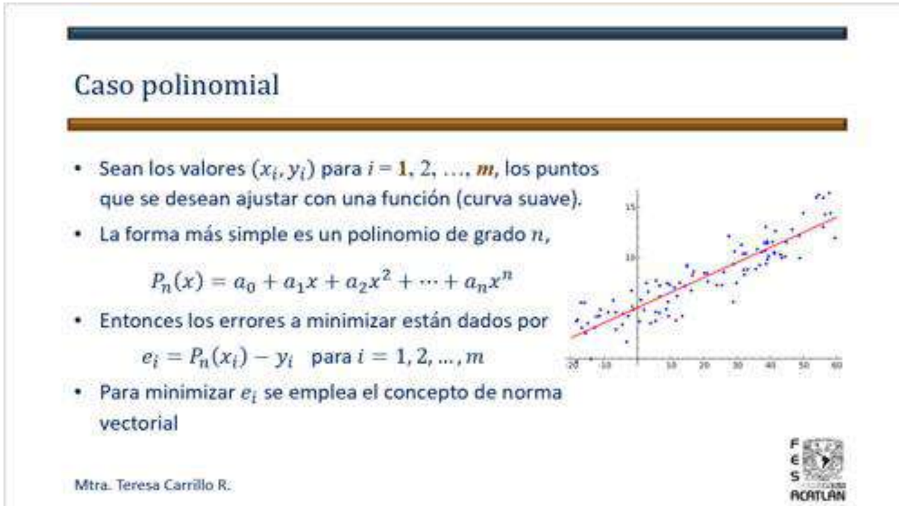


Figura 6.9

Aplicación de conceptos

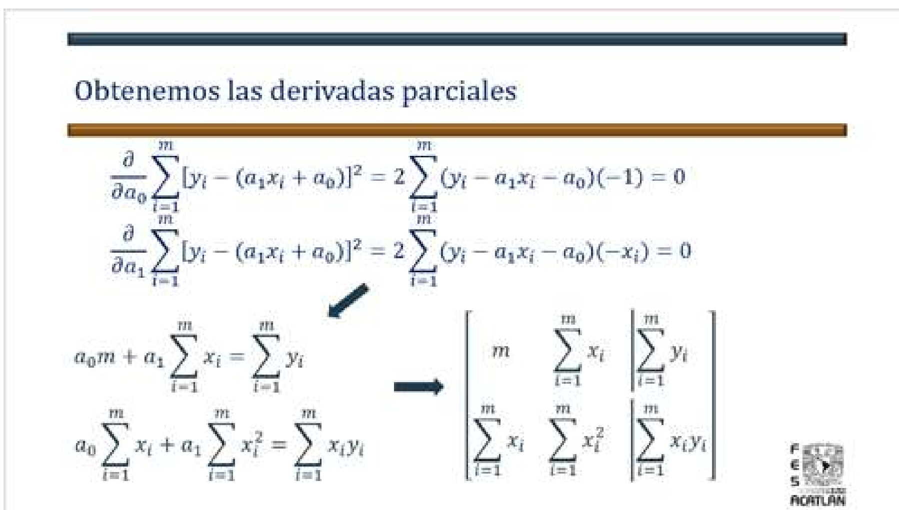


Figura 6.10

Aplicación del método

i	x_i	y_i	$(y_i - P_1)^2$	$(y_i - P_2)^2$	$(y_i - P_3)^2$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
1	-2.3	-18.7	2.03294474	2.87530919	0.107678	-17.274186	-17.004326	-18.371856
2	-1.1	-6.5	12.0560199	12.8799079	1.055011	-9.972178	-10.088859	-7.5271371
3	0.3	-2.5	1.09585664	0.60490917	0.943958	-1.4531683	-1.7222409	-1.5284248
4	1.3	1.8	8.0193101	7.02661209	0.632173	4.63183864	4.45077575	2.59509302
5	2.2	11.1	0.98337989	0.90867747	4.617308	10.1083449	10.1467542	8.95120768
6	2.8	14.6	0.70669405	0.33884492	1.168815	13.759349	14.0178961	15.6811176
Σ	3.2	-0.2	24.894	24.63	8.52			
			Suma de los errores al cuadrado					

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0 ,$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1 ,$$

$$\vdots$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n ,$$

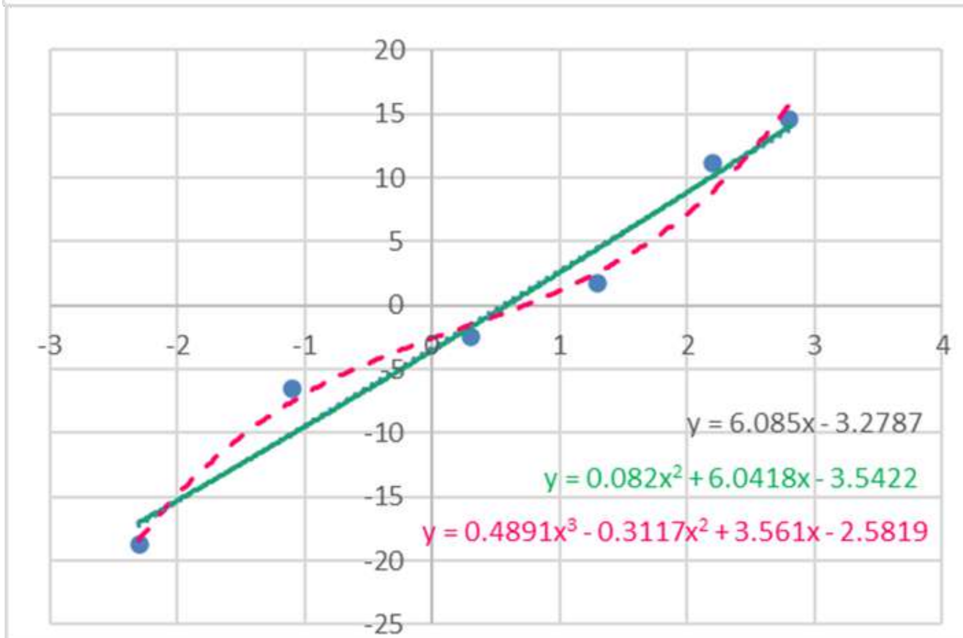


Figura 6.11

Implementación computacional

i	x_i	$f(x_i)$
0	-0.5	4.3
1	-0.1	0.6
2	0.6	-1.3
3	1.1	-0.2
4	2	6.3
5	2.3	9.5
6	2.5	12
7	3.2	23
8	3.5	28.5
9	3.9	37
10	4.3	46.1

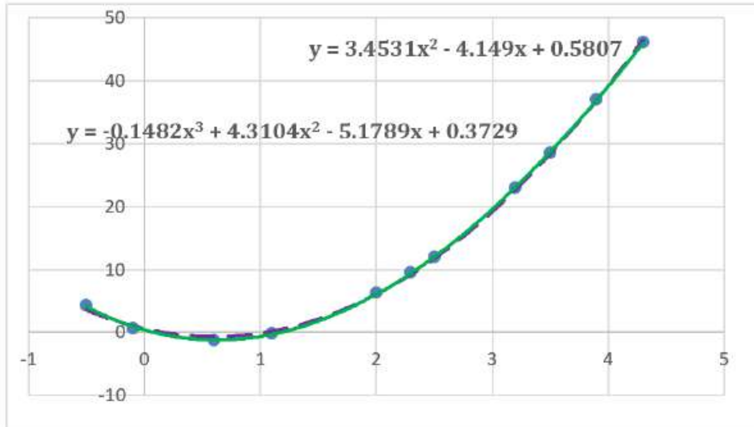
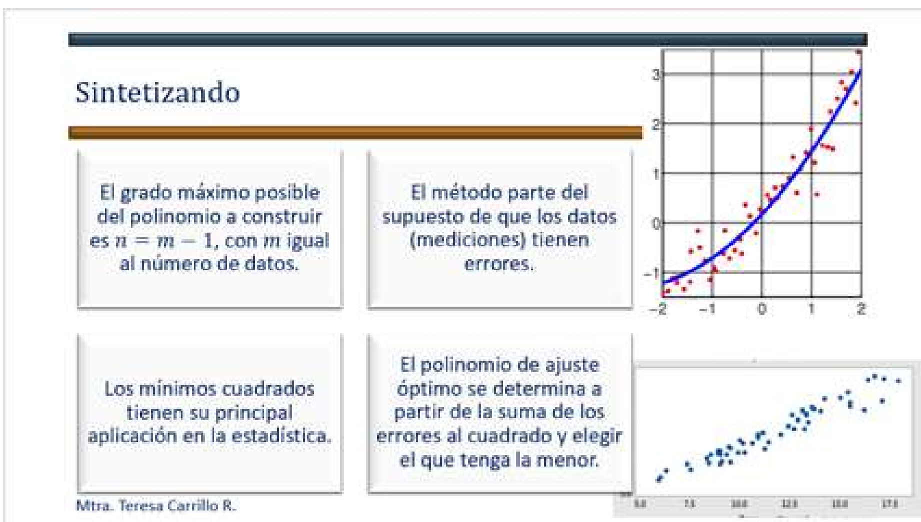


Figura 6.12

Discusión y cierre



Con la presentación teórico-práctica inicia la aplicación de la configuración epistémica (Figura 3.2) ejemplificada en la Tabla 6.7. Como apoyo para facilitar las interacciones entre argumentos y lenguaje matemático con conceptos y procedimientos se desarrollaron recursos y actividades con herramientas computacionales, usualmente GeoGebra, Mathematica o MS Excel. La Figura 6.13 presenta algunos ejemplos de los recursos desarrollados para el curso de Métodos Numéricos 1, mientras que la Figura 6.14 muestra algunos ejemplos de recursos empleados en el curso de Métodos Numéricos 2.

Figura 6.13

Ejemplos de recursos digitales para Métodos Numéricos 1

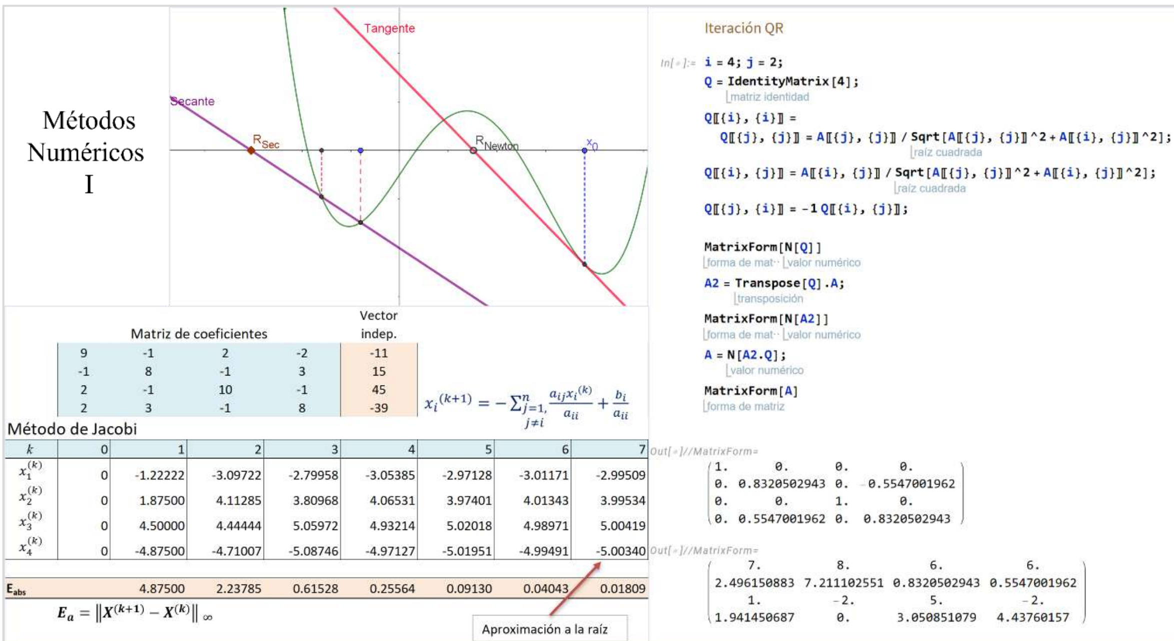
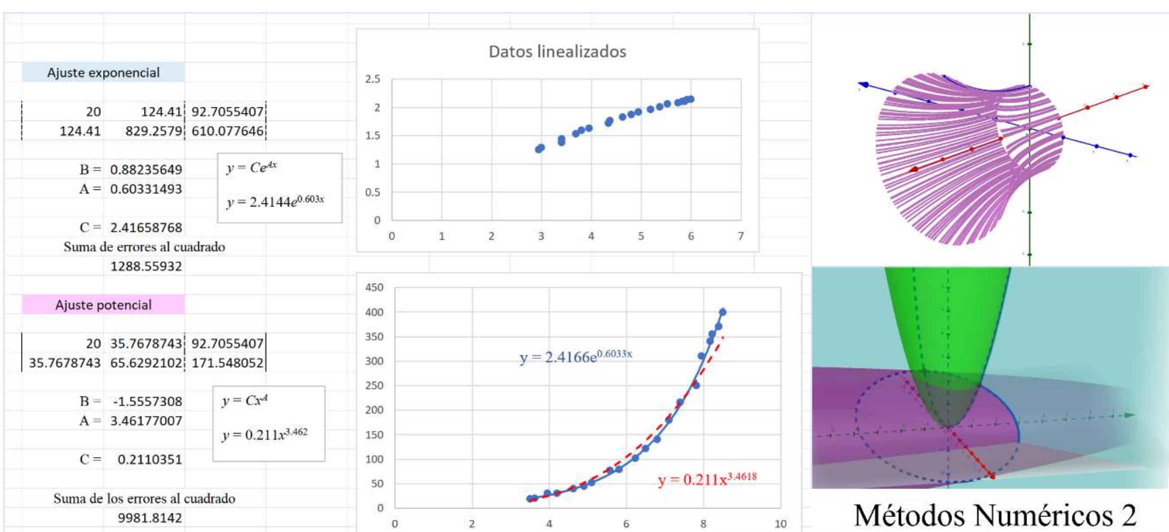


Figura 6.14

Ejemplos de recursos digitales para Métodos Numéricos 2

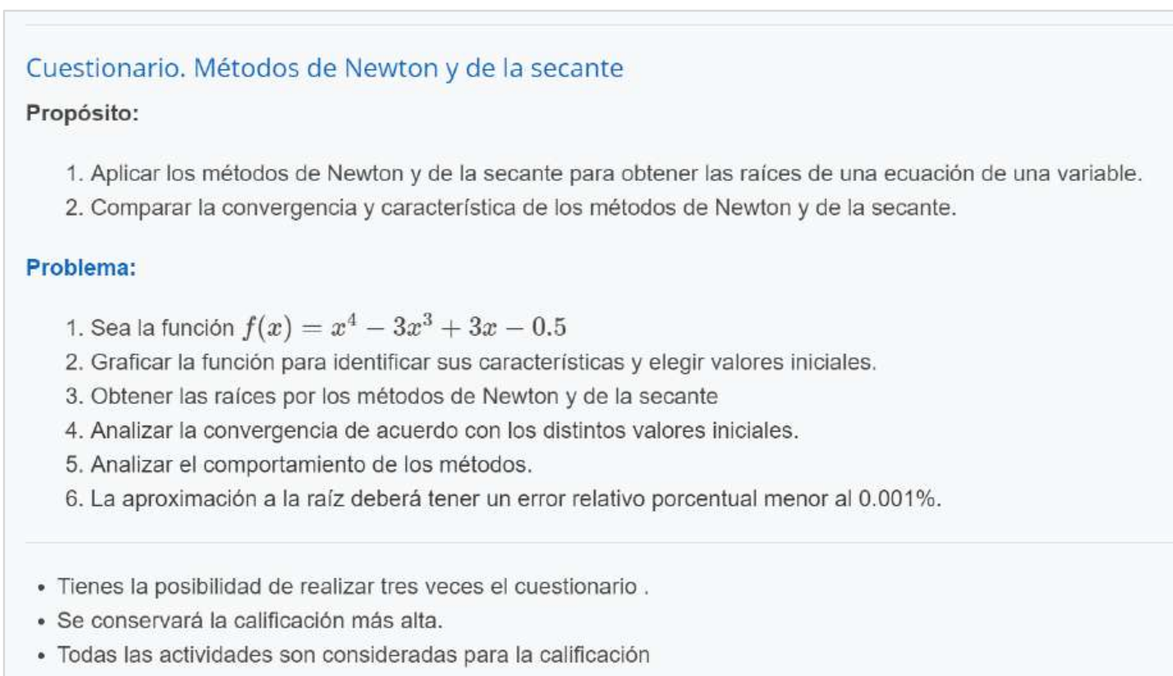


Las actividades de autoevaluación, implementadas como cuestionarios de Moodle[2], estuvieron integrados por una serie de reactivos que satisfacen las dimensiones del EOS descritas en la Tabla 6.8. Estas actividades de evaluación formativa pretenden, además de conocer el nivel de avance en los aprendizajes, reafirmarlos o complementarlos. Sin embargo, se les asigna una calificación debido a que, de acuerdo con la experiencia, el estudiante no realiza actividades que no tengan alguna aportación en su calificación final. Por lo tanto, esta actividad también puede considerarse evaluación sumativa.

Se desarrolló un cuestionario de autoevaluación para cada método visto en clase: 10 para Métodos Numéricos 1 y 12 para Métodos Numéricos 2. Para cada uno de ellos se especifican: propósito, indicaciones, tiempo para realizarlo y número de intentos (Figura 6.15). El tiempo que estará disponible el cuestionario depende de la planeación de tiempos, que en promedio va de 3 a 6 días. Asimismo, se configuraron para que el estudiante pudiera realizar como máximo tres intentos.

Figura 6.15

Definición de los cuestionarios de autoevaluación


Cuestionario. Métodos de Newton y de la secante

Propósito:

1. Aplicar los métodos de Newton y de la secante para obtener las raíces de una ecuación de una variable.
2. Comparar la convergencia y característica de los métodos de Newton y de la secante.

Problema:

1. Sea la función $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x - 0.5$
2. Graficar la función para identificar sus características y elegir valores iniciales.
3. Obtener las raíces por los métodos de Newton y de la secante
4. Analizar la convergencia de acuerdo con los distintos valores iniciales.
5. Analizar el comportamiento de los métodos.
6. La aproximación a la raíz deberá tener un error relativo porcentual menor al 0.001%.

- Tienes la posibilidad de realizar tres veces el cuestionario .
- Se conservará la calificación más alta.
- Todas las actividades son consideradas para la calificación

[2] Actividad Examen

La posibilidad de realizar varios intentos y la retroalimentación proporcionada en cada uno de ellos motiva al estudiante a obtener la máxima calificación al mismo tiempo que reafirma o reestructura conceptos o procedimientos. Es decir, esta actividad tiene, además de un propósito cognitivo, uno motivacional, evitando al estudiante la frustración y generándole satisfacción al obtener buenos resultados.

El tipo de reactivo elegido depende de lo que se desea evaluar. La Tabla 6.12 presenta ejemplos de los tipos de reactivos empleados de acuerdo con lo que se desea evaluar. Se emplearon reactivos en forma de argumentos (completar texto o emparejar columnas) para evaluar conceptos mediante un lenguaje natural; reactivos sobre procedimiento en los que se requería la aplicación del método para resolver un problema sencillo para evaluar el dominio del procedimiento. También se incluyeron reactivos para evaluar el dominio integral del método, características, ventajas y desventajas, casos de uso, casos patológicos, entre otros. En este sentido los reactivos más empleados fueron los de respuesta anidada (Cloze), emparejamiento de columnas, arrastrar y soltar sobre texto, opción múltiple y respuestas numéricas.

Tabla 6.12

Tipos de reactivos para las actividades de autoevaluación

Aspecto por evaluar	Características del reactivo	Ejemplo
Comprensión del concepto	Reactivos de tipo argumentativo mediante el uso de enunciados en lenguaje coloquial.	Figura 6.16
Dominio del procedimiento	Estos reactivos proporcionan información para fortalecer la comprensión del método y emplean lenguaje matemático para promover transformaciones semióticas.	Figura 6.17
Identificación de las características del método	Los reactivos para evaluar la comprensión en las condiciones de aplicación del método incluyen conceptos matemáticos, procedimientos y análisis del método.	Figura 6.18

Aspecto por evaluar	Características del reactivo	Ejemplo
Aplicación del método	Estos reactivos incluyen las condiciones de aplicación del método, conceptos, procedimientos y lenguaje matemático.	Figura 6.19

Figura 6.16

Reactivos para evaluar comprensión de conceptos

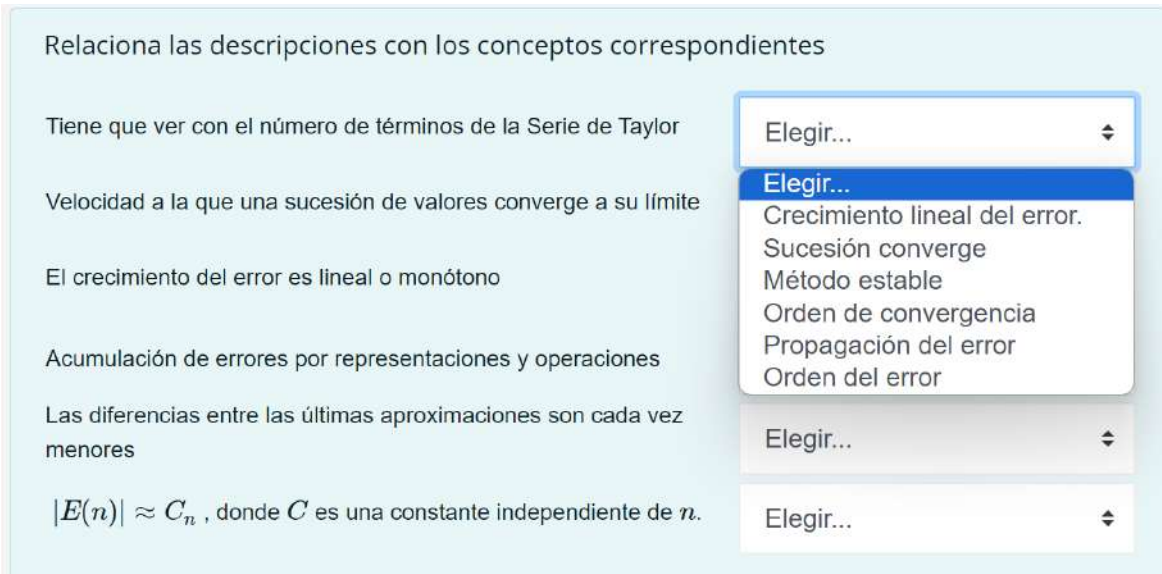


Figura 6.17

Reactivo para evaluar procedimientos

Ajuste polinomial

La obtención de los coeficientes del polinomio se realiza a partir de las ecuaciones normales.

A continuación, deberás capturar la matriz resultante de las ecuaciones normales.

Recuerda: La última columna contiene los términos independientes.

10	---------	---------	---------	
	---------	---------	---------	
	---------	---------	---------	

El polinomio cuadrático resultante es:

$\square\, x^2 + \square\, x + \square$

Con el cual, $\sum (y_i - P_2(x_i))^2 = \square$

El polinomio cúbico resultante es:

$\square\, x^3 + \square\, x^2 + \square\, x + \square$

Con el cual, $\sum (y_i - P_3(x_i))^2 = \square$

490955.2	120.6	54075	151477405	1869.4	145
9012475	2185	34075	26.538	29899.2	547333
-19.90096	1.46303	-9.15394	5.14466	-0.35478	0.010237
-1.1623	0.0905	11.2652	19.90096	9.1332	11.5889
13.424					

Figura 6.18

Reactivo para determinar si se conocen las características del método

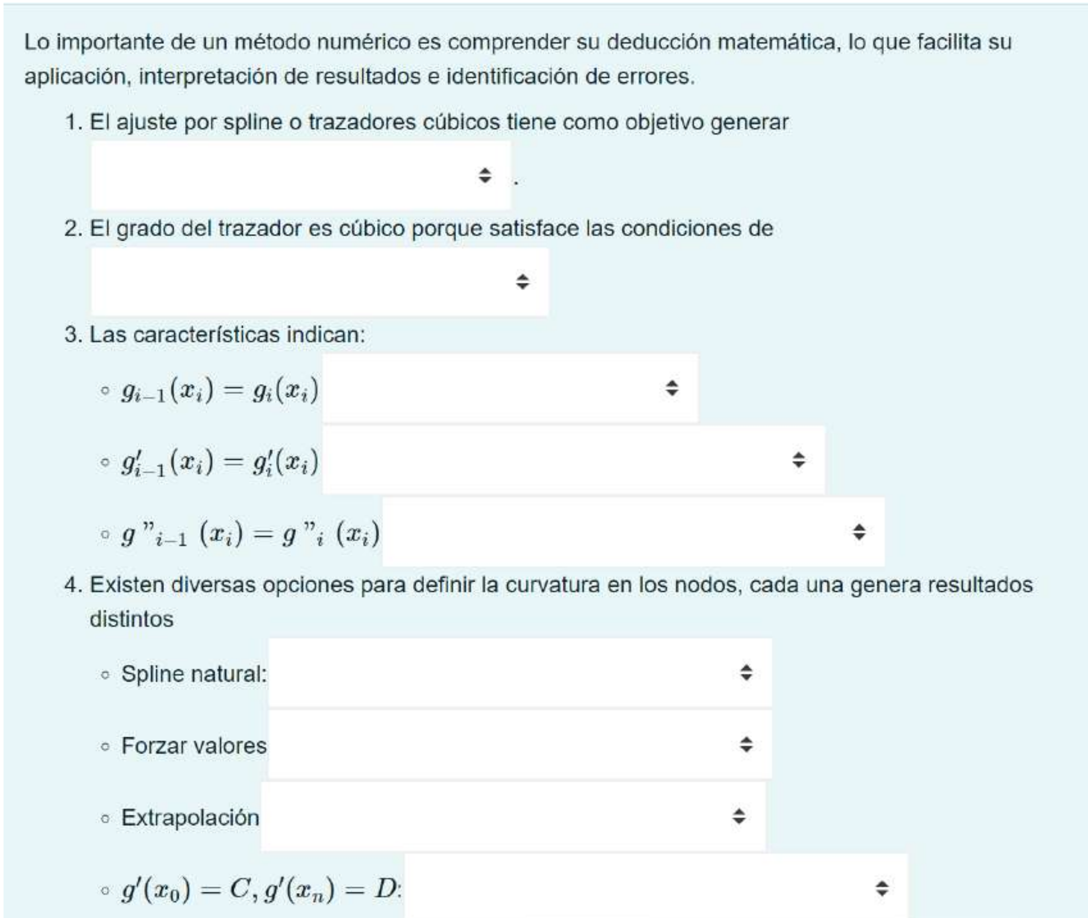
El método de Broyden es económico en cuanto a operaciones y evaluaciones funcionales, solo es cuestión de organizar el procedimiento. Completa la siguiente serie de pasos que componen el método de Broyden

1. Elegir un punto inicial. Si es posible a partir de ________
2. El método aproxima la ________ mediante un esquema en ________
3. Por lo tanto, requiere dos puntos iniciales, el 2o se obtiene mediante el método ________
4. Con estos valores se obtienen las ________ necesarias para la aproximación
5. A partir de la iteración 2, la matriz ________ se aproxima mediante ________
6. El proceso se repite hasta que se alcanza la tolerancia que se mide mediante ________

Sherman-Morrison	la gráfica	de la secante	matriz jacobiana
diferencias finitas	jacobiana inversa	de Newton	Broyden
error absoluto	diferencias	norma espectral	

Figura 6.19

Reactivo para evaluar la aplicación del método



Lo importante de un método numérico es comprender su deducción matemática, lo que facilita su aplicación, interpretación de resultados e identificación de errores.

1. El ajuste por spline o trazadores cúbicos tiene como objetivo generar .
2. El grado del trazador es cúbico porque satisface las condiciones de
3. Las características indican:
   - $g_{i-1}(x_i) = g_i(x_i)$
   - $g'_{i-1}(x_i) = g'_i(x_i)$
   - $g\,''_{i-1}\;(x_i) = g\,''_i\;(x_i)$
4. Existen diversas opciones para definir la curvatura en los nodos, cada una genera resultados distintos
   - Spline natural:
   - Forzar valores
   - Extrapolación
   - $g'(x_0) = C, g'(x_n) = D$:

Para aplicar de forma conjunta aprendizajes de conocimientos y habilidades se plantearon una serie de problemas contextualizados o de aplicación para ser resueltos por los métodos abordados en cada unidad temática. En la Figura 6.20 se muestra un ejemplo del tipo de problemas que deben resolver los estudiantes como parte del sistema de prácticas, el ejemplo corresponde a un problema para resolver por métodos cerrados, de bisección y de la posición falsa. Esta actividad que es colaborativa y que cumple funciones de evaluación formativa y sumativa, tiene como propósito resolver un problema aplicando métodos numéricos y habilidades en la resolución de problemas al tiempo que se forman en la presentación formal de resultados.

Figura 6.20

Ejemplo de situación problema del sistema de prácticas

Problema 2. Métodos cerrados

Propósito:
Resolver un problema de aplicación empleando los métodos de acotamiento.

Instrucciones:

Determinar el coeficiente de rozamiento c, necesario para que un paracaidista de masa $m = 71$ tenga una velocidad de $42\frac{m}{s}$, después de una caída libre de $t = 13s$ [La aceleración de la gravedad es $9.8\frac{m}{s^2}$].

Este problema se puede resolver determinando la raíz de la ecuación:

$$f(c) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t}) - v$$

Donde:
$t =$ tiempo
$v =$ velocidad
$m =$ masa
$g =$ gravedad

- Resolver el problema empleando los métodos cerrados para obtención de raíces.
- Elegir un intervalo de solución.
- Encontrar una raíz, con tolerancia 0.00005 en el error relativo y el absoluto.

Con esta actividad se desarrollan habilidades de pensamiento de orden superior: aplicar el método a la solución de un problema, analizar el problema, sus características, los datos disponibles y los datos requeridos, entre otros; evaluar el método óptimo para la solución, emplear alguna herramienta computacional para facilitar la aplicación del método, analizar e interpretar resultados y presentar un reporte formal. Estas acciones representan la integración de las dimensiones epistémica y cognitiva del EOS (Tabla 6.9) que, a diferencia de la actividad de autoevaluación, al ser colaborativa, incluye también la faceta interaccional.

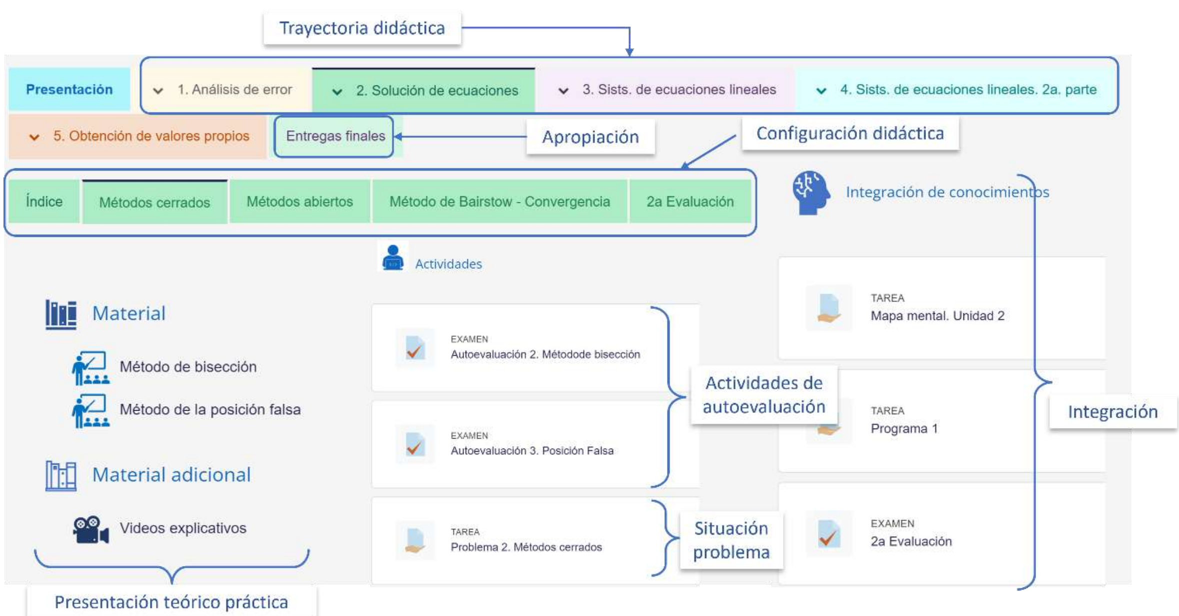
Cada uno de los problemas resueltos durante el curso se van integrando en un portafolio electrónico. Esta actividad representa un elemento motivacional, dado que le brinda al estudiante evidencia de los aprendizajes y habilidades adquiridos durante el curso. Esta evidencia puede formar parte de su currículum de formación.

6.3.3 Trayectoria didáctica EOS

Los componentes antes expuestos fueron organizados y articulados en la trayectoria didáctica definida en la Figura 6.3 y la Tabla 6.10. Es decir, los materiales y actividades fueron dispuestos en la plataforma de tal manera que conforme el estudiante avanza en ella, va construyendo su aprendizaje y avanzando de las habilidades de pensamiento de orden inferior a las de orden superior. La Figura 6.21 muestra el resultado de implementar la configuración didáctica en la plataforma Moodle, en este caso para la Unidad 2. Solución de ecuaciones, del curso de Métodos Numéricos 1. La primera parte estuvo integrada por materiales de elaboración propia para la presentación teórico-práctica y recursos diversos de apoyo en la web. La siguiente sección corresponde a las actividades, la autoevaluación mediante cuestionarios Moodle (Tabla 6.12) y la situación problema. Finalmente, como cierre de la unidad se realiza la programación de uno o algunos de los métodos de la unidad, se elabora una actividad de recuperación de conocimientos y se aplica una evaluación.

Figura 6.21

Implementación de la trayectoria didáctica



Una vez implementado el modelo en la plataforma para los dos cursos se realizó el proceso de intervención iterativa. Los resultados de este proceso se presentan en el siguiente apartado.

7. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de esta investigación, desarrollado mediante una Investigación Basada en el Diseño constituida por un proceso iterativo de tres intervenciones en periodos distintos (2022-2, 2023-1 y 2023-2) en los cursos de Métodos Numéricos 1 y Métodos Numéricos 2.

Los resultados se organizaron en tres apartados: En el primero se desglosan los resultados de cada una de las intervenciones, en el segundo se presenta el modelo resultante del proyecto de investigación, sus componentes, características y la guía para su implementación, y en el tercero, se presentan los resultados sintetizados de la aplicación iterativa del modelo.

7.1 Intervención iterativa

El objetivo de la intervención es llevar a cabo un proceso sistémico y planificado para probar los componentes del modelo individualmente y en conjunto para, a partir de ello, realizar los ajustes de mejora al modelo realizando conjeturas con base en el análisis y observación continuos del aprendizaje y motivación de los estudiantes y del entorno de aprendizaje. La Figura 6.1 muestra las etapas que integraron la intervención en cada iteración. En este caso, cada iteración correspondió a un curso semestral, en el que el investigador es el docente, lo que permitió observar el desarrollo del proceso de primera mano y hacer las correcciones y ajustes de una unidad temática a otra. Asimismo, en la Tabla 7.1 se describen las actividades que integraron cada etapa.

Tabla 7.1

Actividades por etapa de intervención

Etapa	Actividades
Prueba del modelo	• Aplicar el modelo en la impartición de un curso semestral

Evaluación de componentes	• Validar los recursos y estrategias de enseñanza.
	• Evaluar los aprendizajes a través de la idoneidad didáctica de las actividades de autoevaluación.
	• Validar la integración del sistema de prácticas.
	• Analizar la configuración didáctica
	  ○ Identificar dificultades cognitivas de razonamiento, de interpretación y comprensión de la información;
	  ○ Valorar la motivación de los estudiantes.

Validación del modelo	• Verificar el alcance de los objetivos de aprendizaje.
	• Analizar los resultados del aprendizaje
	  ○ Conceptos y procedimientos. Cuestionarios de comprensión;
	  ○ Desarrollo de habilidades para la resolución de problemas;
	  ○ Desarrollo de habilidades computacionales. Implementación computacional de los métodos.
	• Analizar el desempeño académico (calificaciones finales).

Recopilación de datos	• Grupos de enfoque • Encuesta de percepción
Ajustes y refinación	• Determinar las modificaciones necesarias en los componentes del modelo.

Para el análisis de las calificaciones finales se consideraron únicamente a los estudiantes que concluyeron el curso, dicho de otra forma, que obtuvieron una calificación. Esta aclaración es importante porque usualmente existe un porcentaje de estudiantes que, a pesar de estar inscritos, no se presentan a las clases o no se matriculan en la plataforma de aprendizaje, lo que en las actas finales se registra como NP (No se presentó), calificación que no tiene equivalencia numérica. Los estudiantes con NP, al no formar parte del proceso de instrucción, no pueden ser considerados como parte de la población de estudio. Sin embargo, sería muy conveniente analizar esta problemática, pues está relacionada con la eficiencia del curso y la eficiencia terminal, además del logro personal de cada estudiante. En este sentido, en cada curso se tienen inscritos un determinado número de estudiantes, que es diferente al número de estudiantes que toman el curso y distinto al número de estudiantes que lo concluyen, por tal motivo es muy variable la participación de los estudiantes en las actividades a lo largo del curso.

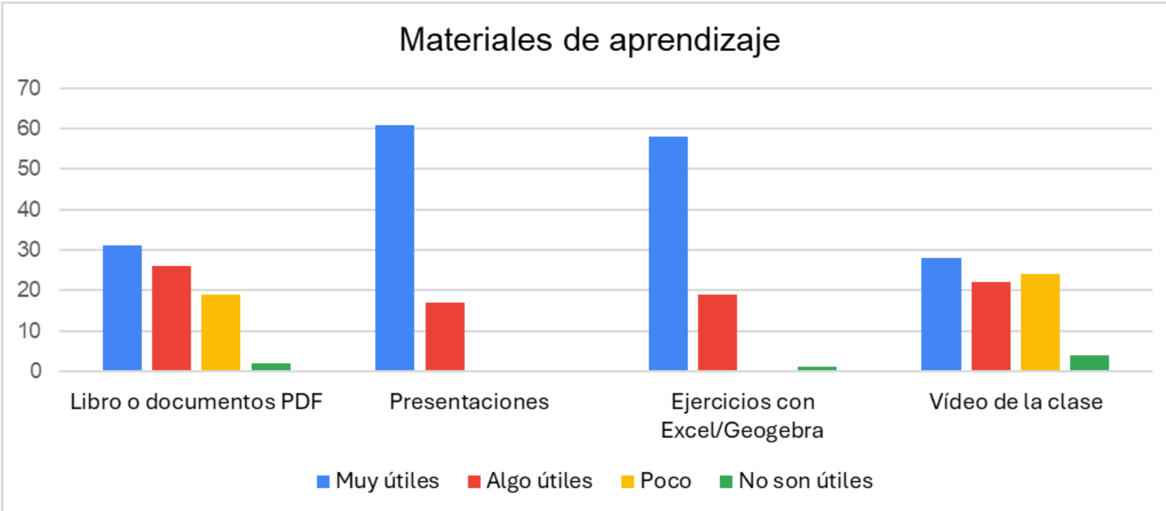
7.1.1 Intervención del semestre 2022-2

Durante este periodo lectivo que abarcó del 31 de enero al 18 de junio de 2022, se dispuso de tres grupos de Métodos Numéricos 2, 2401, 2403 y 2451, con un total de 80 estudiantes.

Para validar los materiales de enseñanza-aprendizaje, al final del semestre se aplicó una encuesta de percepción, que fue respondida por 78 estudiantes (Figura 7.1). Los resultados revelan que los estudiantes consideran que todos los recursos en sus diferentes formatos contribuyeron a su aprendizaje. Sin embargo, los vídeos y los documentos presentan menor preferencia con respecto a los otros formatos. Puede observarse que las diapositivas de la presentación, empleada para guiar la presentación teórico-práctica; siempre o muchas veces contribuye a su aprendizaje, seguido de los ejercicios con apoyo de alguna herramienta tecnológica.

Figura 7.1

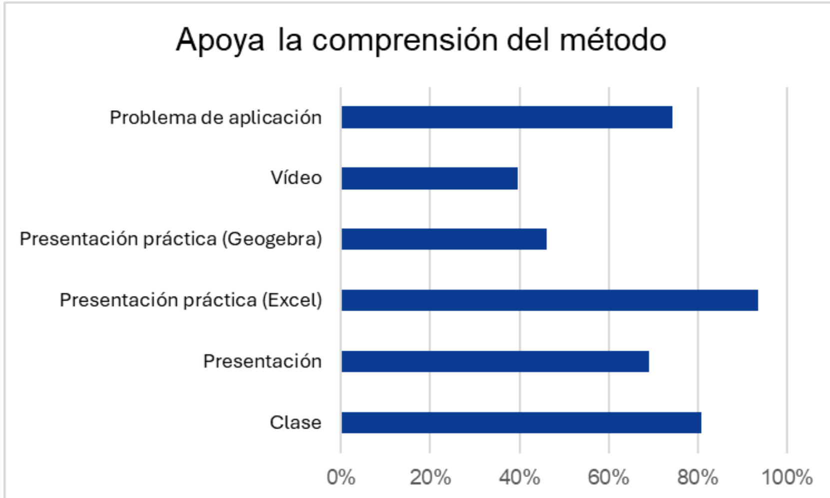
Opinión de los estudiantes acerca de los materiales de enseñanza



Asimismo, de acuerdo con esta encuesta, los estudiantes consideran que la presentación práctica con MS Excel y el problema contextualizado, son las actividades enseñanza-aprendizaje que más contribuyen a la comprensión del método, Figura 7.2. Esto permite suponer que los estudiantes tienen preferencia por las actividades que demandan mayor participación de su parte. Por otro lado, contrario a lo esperado, consideran que los vídeos son el recurso que menos contribuye a su aprendizaje del método.

Figura 7.2

Actividades de enseñanza-aprendizaje



Para el caso de las actividades de autoevaluación, se empleó el estudio técnico (Sección 6.2.5) con los criterios de idoneidad detallados en la Tabla 6.6. Los resultados se concentran en la Tabla 7.2, en ella se destacan con rojo los valores que resultaron insatisfactorios para evaluar apropiadamente los aprendizajes de los estudiantes.

Tabla 7.2

Estadísticos de los cuestionarios de autoevaluación, 2022-2

Método	Consistencia interna	Tasa de error	Error estándar
Método del punto fijo	56.21%	66.17%	13.55%
Método de Newton	69.83%	54.93	7.56%
Método de Broyden	76.06%	48.93%	8.45%
Polinomio de Lagrange	81.91%	42.54%	7.53%
Polinomio de diferencias divididas	36.79%	79.51%	12.02%
Polinomio de Newton	40.52%	77.12%	11.63%
Polinomio de Hermite	75.31%	49.56%	7.91%
Ajuste por *splines* cúbicos	52.54%	68.89%	9.44%
Ajuste por mínimos cuadrados	70.16%	46.43%	8.01%
Derivación numérica	79.78%	44.97%	7.75%
Extrapolación de Richardson	64.73%	59.39%	12.23%
Integración numérica	67.46%	57.05%	13.84%

A partir de esta información se pudo observar que las autoevaluaciones correspondientes al método del punto fijo, los polinomios de diferencias divididas, de Newton y de ajuste por *spline* cúbico, presentaron problemas de consistencia, es decir, la calificación que reciben los estudiantes no refleja de forma confiable la evaluación del aprendizaje.

Para analizar los motivos de estos resultados se consultaron el índice de facilidad y la eficiencia discriminativa de los reactivos que integraron estos cuestionarios. En la Tabla 7.3 se presentan los parámetros correspondientes a estos reactivos. Puede observarse que el principal problema es que son demasiado fáciles, parámetro que se ve afectado por el número de intentos permitidos. Asimismo, las preguntas con menor eficiencia discriminativa son del tipo “Opción múltiple” y una de relacionar columnas presento un valor demasiado bajo de eficiencia discriminativa (27%). Por lo tanto, los reactivos deberán analizarse antes de aplicarse y de ser posible evitar los de tipo de opción múltiple.

Tabla 7.3

Estadísticos de las autoevaluaciones. 2022-2

Num. Preg.	Tipo de pregunta	Índice facilidad	Índice de discriminación	Eficiencia discriminativa
Método del punto fijo				
1	Opción múltiple	88.30%	64.23%	85.38%
2	Opción múltiple	69.15%	34.13%	41.80%
3	Opción múltiple	77.66%	47.64%	59.43%
4	Opción múltiple	79.79%	47.09%	59.05%
5	Opción múltiple	76.60%	31.91%	38.93%
6	Respuestas anidadas (Cloze)	91.06%	57.53%	63.53%
7	Respuestas anidadas (Cloze)	77.17%	56.37%	57.67%
Polinomio de diferencias divididas				
1	Arrastrar y soltar sobre una imagen	99.43%	28.82%	53.73%
2	Respuestas incrustadas	67.43%	35.36%	39.83%
3	Arrastrar y soltar sobre marcadores	78.01%	38.43%	42.41%
Polinomio de interpolación de Newton				
1	Opción múltiple	91.14%	41.32%	56.54%
2	Respuestas incrustadas (Cloze)	93.18%	45.78%	50.03%
3	Opción múltiple	97.47%	43.22%	54.18%
4	Opción múltiple	88.61%	30.59%	41.24%
Ajuste por *Spline* cúbico				
1	Relacionar columnas	82.17%	21.90%	27.15%
2	Respuestas incrustadas (Cloze)	96.83%	32.97%	61.51%
3	Respuestas incrustadas (Cloze)	92.69%	66.38%	74.97%
4	Respuestas incrustadas (Cloze)	82.25%	40.85%	48.12%

A manera de comparación, se presentan los resultados de los reactivos de la autoevaluación del método de Lagrange (Tabla 7.4). En este cuestionario la mayoría de las preguntas son del tipo "Respuestas incrustadas (Cloze)", mismas que presentaron una eficiencia discriminativa satisfactoria, superior al 60%, en todos los casos. Asimismo, pudo observarse que el tipo de reactivo con menores puntajes fue del tipo "Arrastrar y soltar marcadores" y al igual que en la autoevaluación del polinomio de diferencias divididas. Deberá reconsiderarse el uso de este tipo de reactivo.

Tabla 7.4

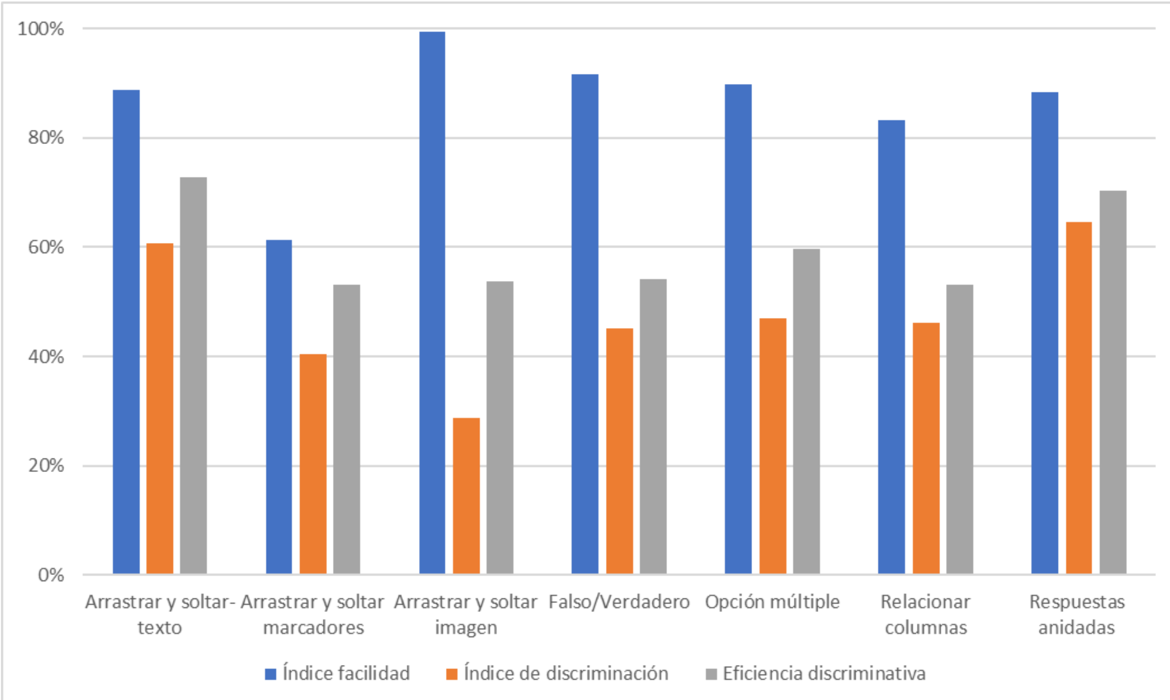
Estadísticos de la autoevaluación para el polinomio de Lagrange

Num. Preg.	Tipo de pregunta	Índice facilidad	Índice de discriminación	Eficiencia discriminativa
1	Respuestas incrustadas	89.49%	73.50%	77.36%
2	Respuestas incrustadas	91.82%	80.55%	87.00%
3	Arrastrar y soltar marcadores	44.55%	42.34%	63.71%
4	Respuestas incrustadas	87.07%	77.51%	79.42%
5	Respuestas incrustadas	75.57%	76.52%	82.47%

A partir de los estadísticos de los reactivos de cada autoevaluación se obtuvieron los valores promedio de los parámetros para cada tipo de reactivo mismos que se muestran en la Figura 7.3. Estos valores confirman que, en general, el índice de facilidad es elevado mientras que los reactivos del tipo "Arrastrar y soltar sobre texto" y "Respuestas incrustadas" presentan la mejor eficiencia discriminativa. Sin embargo, es importante aclarar que la idoneidad de los reactivos no está definida por su tipo, sino por la forma en que se emplean. Para el caso del aprendizaje matemático, la evaluación mediante reactivos que permitan verbalizar conceptos y procedimientos demandan del estudiante mayor comprensión, para ello, los reactivos deben plantearse cuidadosamente.

Figura 7.3

Valores promedio de los parámetros por tipo de reactivo

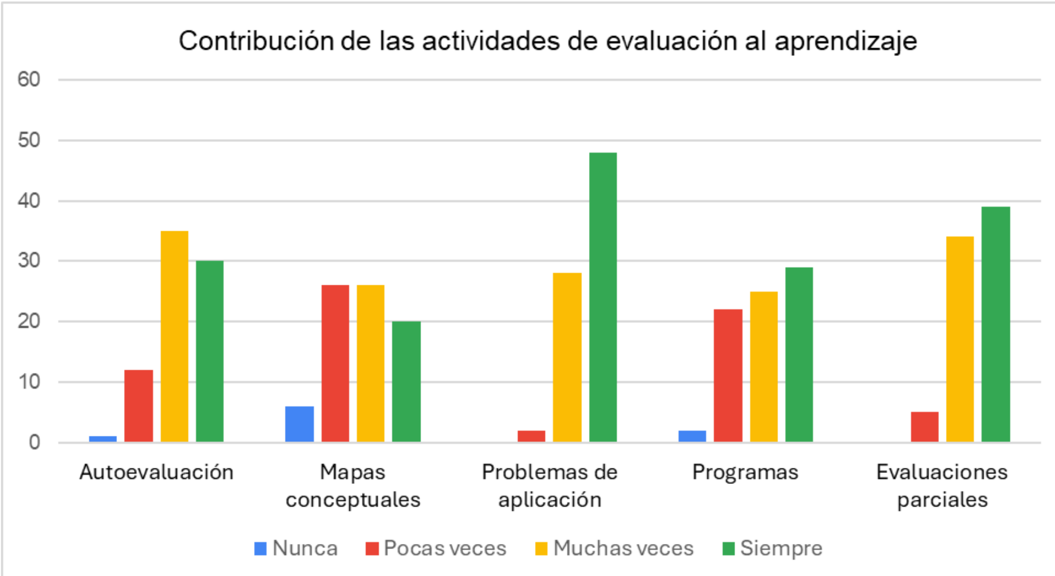


Por su parte, el sistema de prácticas, identificado por los estudiantes como "Problemas para el portafolio", como actividad colaborativa en la que se integran la aplicación de conceptos, métodos y habilidades, representó el elemento de evaluación de aprendizajes más importante. Para evaluar este componente se consideraron la percepción de los estudiantes, la motivación, evaluada mediante la participación de los estudiantes, y los aprendizajes adquiridos, medidos a través de las calificaciones obtenidas en las distintas actividades.

De acuerdo con los resultados de la encuesta, los estudiantes consideran que los problemas del sistema de prácticas son la actividad que más contribuye a su aprendizaje, seguida de las evaluaciones parciales, como se observa en Figura 7.4. Lo que confirma que las actividades contextualizadas generan los mejores aprendizajes.

Figura 7.4

Opinión de los estudiantes, sobre las actividades de aprendizaje



En la Tabla 7.5 se comparan las entregas de las actividades de autoevaluación con las entregas de los problemas de aplicación, se puede observar que:

a. Tanto la participación como la realización de intentos adicionales para mejorar la calificación mostró un descenso con el avance del curso.
b. La entrega de los problemas del sistema de prácticas fue menor que en la autoevaluación, en todos los casos.

La disminución de la participación de los estudiantes en las distintas actividades de un curso suele ser un fenómeno normal, aunque no deseable. Considerando que el fenómeno de deserción es multifactorial, debería considerarse si el modelo tiene alguna influencia en el abandono del curso o si favorece de alguna manera a la disminución en la participación en las actividades.

Tabla 7.5

Participación de los estudiantes en las actividades. 2022-2

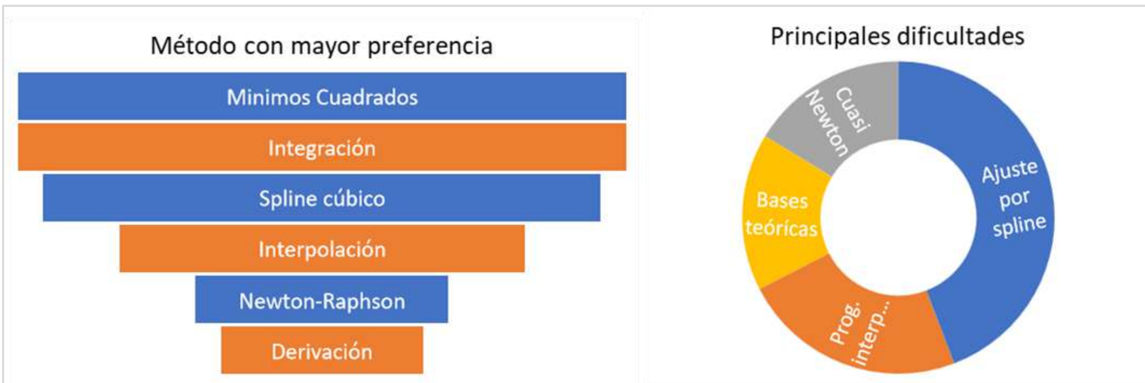
Método	Autoevaluación		Situación problema
	Participantes	Intentos totales	Entregas
Método del punto fijo	94	200	68
Método de Newton	81	151	69
Método de Broyden	83	130	66
Polinomio de Lagrange	88	159	69
Polinomio de diferencias divididas	87	158	66
Polinomio de Newton	79	124	63
Polinomio de Hermite	77	127	57
Ajuste por *splines* cúbicos	69	100	50
Ajuste por mínimos cuadrados	73	109	55
Derivación numérica	68	109	56
Extrapolación de Richardson	66	91	63
Integración numérica	69	125	61

Uno de los instrumentos para evaluar el modelo fueron los grupos de enfoque, para lo que se categorizaron y contabilizaron las menciones que hicieron los estudiantes mientras dialogaban sobre su experiencia de aprendizaje bajo el modelo. En general, los estudiantes emplearon un lenguaje coloquial para expresarse sobre los conceptos matemáticos involucrados en los métodos numéricos, evidenciando deficiencias en su comprensión y concentrándose en el procedimiento. De estos diálogos también puede destacarse que los métodos que despertaron mayor interés fueron el de mínimos cuadrados, integración y *spline* cúbico. De acuerdo con sus comentarios, los problemas de aplicación influyeron en esta preferencia. Asimismo, coincidieron en que las principales dificultades que enfrentaron fueron las deficiencias en conocimientos matemáticos necesarios para los métodos numéricos y los problemas del *spline* cúbico. Las respuestas obtenidas se representan en la Figura 7.5.

Estas respuestas y los datos de las secciones anteriores confirman que el método con mayor dificultad es el *spline* cúbico, que es uno de los que tiene mayor carga matemática.

Figura 7.5

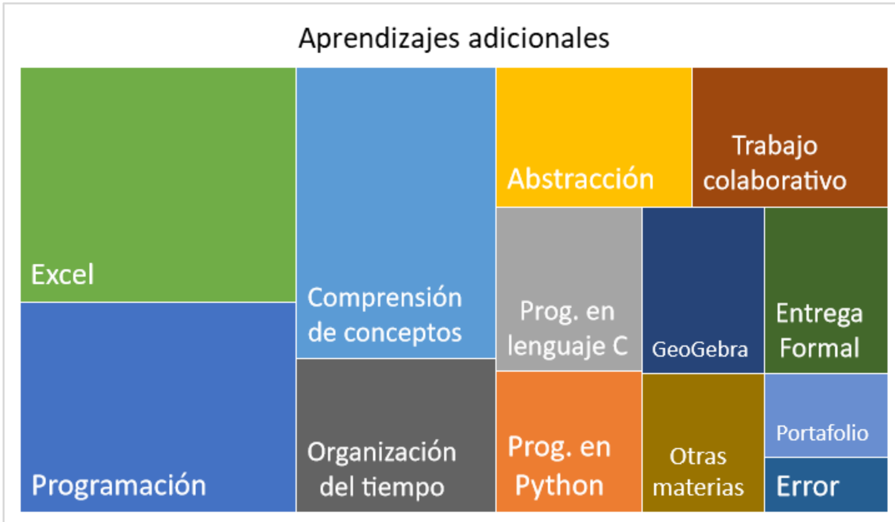
Respuestas de los grupos de enfoque



El modelo con EOS favorece en los estudiantes el desarrollo de habilidades y actitudes que contribuyen a su formación profesional. Con los grupos de enfoque se pudo identificar que los estudiantes reconocen haber adquirido aprendizajes adicionales (Figura 7.6), entre los que destacan el desarrollo de habilidades de programación y de manejo de MS Excel, la comprensión de conceptos matemáticos, que desarrollaron su habilidad de abstracción para el trabajo colaborativo, de organización del tiempo y la realización de trabajos formales.

Figura 7.6

Aprendizajes adicionales



Para evaluar la eficiencia del modelo se verifica el logro de los objetivos de aprendizaje mediante el rendimiento académico, tanto en las evaluaciones parciales como en la calificación final del curso, Tabla 7.6. En esta asignatura una calificación de 8/10 es considerada satisfactoria y, como puede observarse, en tres de las cuatro evaluaciones el promedio fue superior a 8.0, lo que representa un resultado alentador.

Tabla 7.6

Promedios de las evaluaciones parciales. 2022-2

Unidad temática	**Promedio**
Sistemas de ecuaciones no lineales	8.39
Interpolación polinomial	8.27
Aproximación polinomial	7.85
Derivación e integración numérica	8.65

Los aprendizajes también se midieron a través de las calificaciones en las actividades de autoevaluación y del problema de aplicación de cada método (Tabla 7.7). En las autoevaluaciones puede observarse que la calificación promedio en el tercer intento en todos los métodos fue superior a 8/10, con lo que puede suponerse que el estudiante logró los aprendizajes teóricos y procedimentales de los métodos. Estos aprendizajes se reflejan en los resultados obtenidos en la resolución de los problemas del sistema de prácticas donde se aplican los aprendizajes logrados y en los cuales la calificación fue superior a la obtenida en las actividades de autoevaluación.

Tabla 7.7

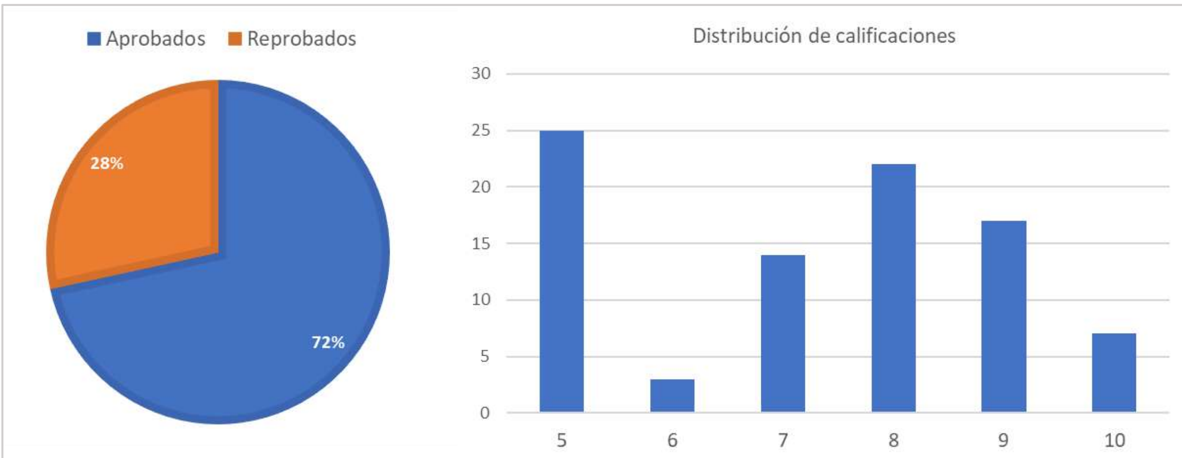
Calificaciones obtenidas en las actividades. 2022-2

Método	**Calificación promedio**		
	Autoevaluación		**Sistema de prácticas**
	Primer intento	**Último intento**	**Situación problema**
Método del punto fijo	6.81	8.06	9.44
Método de Newton-Rapshon	7.90	9.05	9.18
Método de Broyden	8.02	8.95	9.01
Polinomio de Lagrange	7.61	8.43	9.34
Polinomio de diferencias divididas	7.38	8.20	8.40
Polinomio de Newton	8.52	9.28	9.62
Polinomio de Hermite	7.83	8.42	9.30
Ajuste por *splines* cúbicos	8.03	8.84	9.10
Ajuste por mínimos cuadrados	7.82	8.50	8.77
Derivación numérica	7.83	8.90	9.19
Extrapolación de Richardson	7.93	8.50	8.82
Integración numérica	6.22	8.41	9.38
Extrapolación de Romberg	7.81	9.33	9.57

Por su parte, en la Figura 7.7 se presenta el porcentaje de aprobados *vs* reprobados y la distribución de calificaciones. Estos resultados son bastante satisfactorios porque muestran un incremento en el porcentaje de aprobados de acuerdo con los registros históricos (Figura 1.3). Además, la moda de las calificaciones aprobatorias es 8.0, lo que puede considerarse bastante positivo.

Figura 7.7

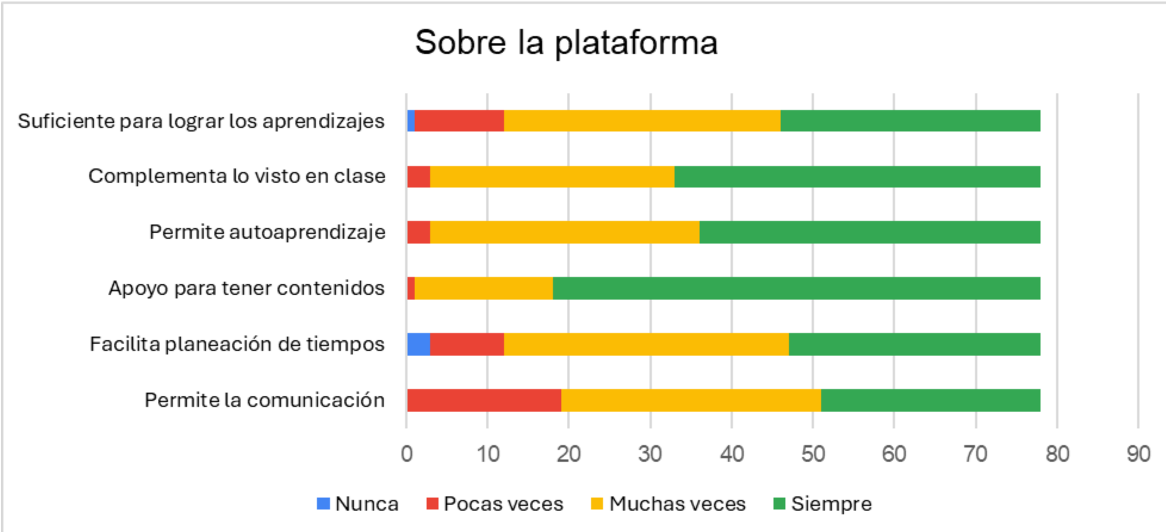
Distribución de calificaciones finales en el periodo 2022-2



Para evaluar la implementación del modelo en la plataforma como aula virtual y escenario de aprendizaje se consideraron los resultados de la encuesta de percepción. La Figura 7.8 presenta la opinión de los estudiantes sobre la plataforma de aprendizaje. Los estudiantes consideran la plataforma principalmente como medio para contar con los contenidos y complementar lo visto en clase, pero no como una plataforma que facilite la comunicación.

Figura 7.8

Percepción sobre la plataforma de aprendizaje. 2022-2



El resultado de la intervención representa la producción de conocimiento a partir de la aplicación del modelo con Enfoque Ontosemiótico. Con base en los datos recopilados durante la evaluación de los componentes se consideraron las siguientes modificaciones:

- Los documentos como material de apoyo solo se emplearán para los temas o problemas que se consideran de mayor dificultad y que requieran un repaso adicional.
- Las actividades desarrolladas con apoyo de MS Excel son de las más atractivas para los estudiantes, sin embargo, se deberá promover el uso de otras aplicaciones matemáticas.
- Deberá evaluarse con objetividad la pertinencia de la elaboración de mapas conceptuales, porque la opinión de los estudiantes puede deberse a las deficiencias en las habilidades cognitivas requeridas.
- Los cuestionarios de los temas con mayor carga matemática requieren un mayor análisis para mejorar la consistencia interna y disminuir los parámetros de error.
- Los reactivos del tipo "Arrastrar y soltar sobre marcadores o imágenes" presentan índices de facilidad muy elevados y una eficiencia discriminativa muy baja, lo que podría indicar que no son el tipo más apropiado para evaluar el aprendizaje matemático.

- Los reactivos de tipo “Opción múltiple” y “Falso/Verdadero” presentan una eficiencia discriminativa alrededor del 50% o menor, por lo que no propician transformaciones semióticas.
- Debe hacerse un análisis detallado para disminuirlo el índice de facilidad de los reactivos sin desmotivar al estudiante y sin perder el objetivo de apropiación de conceptos.
- Deberán revisarse las actividades correspondientes a los métodos que presentan menor participación y que coinciden con los que tienen una mayor carga matemática.
- Se deberán buscar estrategias para mantener motivado al estudiante y evitar la disminución en la realización de las actividades.

Es importante aclarar que el modelo provee los elementos generales, pero el detalle en el diseño de los materiales de enseñanza, los reactivos, los contenidos de las evaluaciones y la selección de las situaciones problema dependen de la experiencia y sensibilidad del docente.

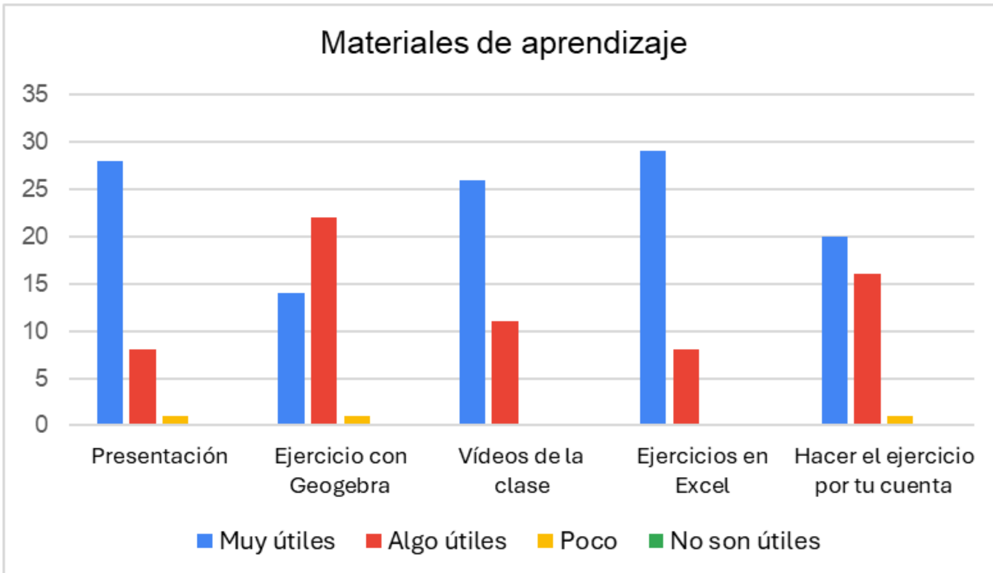
7.1.2 Intervención del semestre 2023-1

En el tercer semestre se imparte el curso de Métodos Numéricos 1, se trata de la primera asignatura que integra los conocimientos de matemáticas y computación. Esta asignatura suele presentar un porcentaje de reprobación ligeramente superior al de Métodos Numéricos 2. Para la aplicación del M-EOS-MN en este semestre se realizaron algunas modificaciones de acuerdo con los resultados de la 1ª iteración (periodo 2022-2): se eliminaron los recursos de tipo texto, se empelaron más reactivos del tipo “Respuestas incrustadas”, “Completar texto” y “Arrastrar sobre texto”, evitando en la medida de lo posible los de “Opción múltiple” y “Falso/Verdadero”.

Los resultados de la encuesta de percepción aplicada al final del semestre muestran que es consistente la preferencia de los estudiantes por las diapositivas empleadas para la presentación teórico-práctica y los ejercicios con MS Excel y GeoGebra. A pesar de que se procuró dar mayor uso a GeoGebra con respecto a la hoja de cálculo, puede observarse que los estudiantes siguen prefiriendo MS Excel. Por su parte, la valoración de los vídeos, en los que se enfatizaron los fundamentos matemáticos, presentó un incremento significativo en la preferencia (Figura 7.9). En general, los estudiantes consideran que todos los materiales son útiles para el aprendizaje.

Figura 7.9

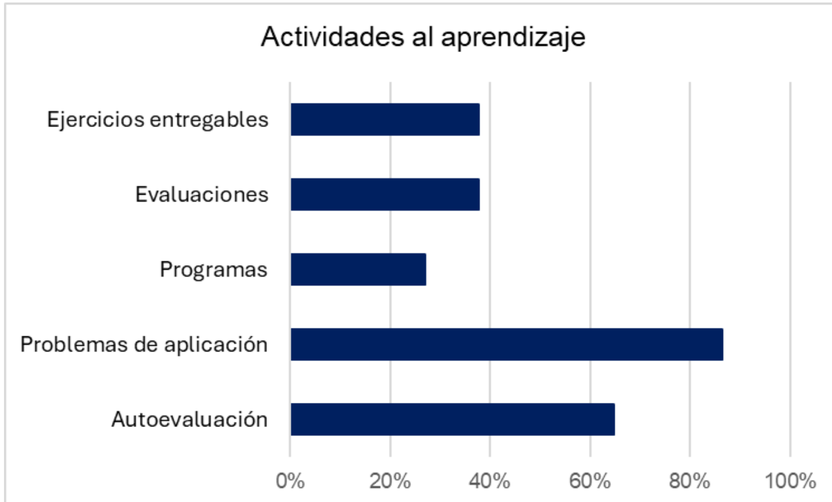
Utilidad de los materiales de enseñanza-aprendizaje



Sobre las actividades de enseñanza aprendizaje, en la Figura 7.10 puede observarse que los problemas del sistema de prácticas fueron reconocidos como la actividad que mayormente contribuye al aprendizaje de los métodos.

Figura 7.10

Contribución de las actividades al aprendizaje



Para las actividades de autoevaluación se modificaron los tipos de reactivos empleados y a los reactivos que evalúan la comprensión de conceptos se les aplicó una penalización de 10% con el propósito de evitar que los estudiantes respondan aleatoriamente y mejoren el puntaje a partir de los intentos previos. Asimismo, se disminuyó el número de autoevaluaciones aplicadas con el objetivo de evitar el decremento en la realización de actividades, partiendo del supuesto de que podría deberse a la carga excesiva de trabajo.

Se realizó el análisis de criterios de idoneidad a las actividades de autoevaluación. En la Tabla 7.8 se presentan los valores de los parámetros correspondientes. Puede observarse una mejora significativa con respecto a los valores de la primera intervención. Sin embargo, los que presentan valores insatisfactorios (destacados en rojo), nuevamente, coinciden con los métodos que tienen mayor carga matemática.

Tabla 7.8

Estadísticos de los cuestionarios de autoevaluación 2023-1

Método	Consistencia interna	Tasa de error	Error estándar
Análisis de error	89.92%	31.75%	8.06%
Métodos cerrados para solución de ecuaciones	75.54%	49.45%	5.24%
Métodos abiertos para solución de ecuaciones	71.6%	53.30%	5.60%
Método de Bairstow	64.18%	56.85%	8.02%
Métodos directos para sistemas de ecuaciones	82.24%	42.14%	7.02%
Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones	85.75%	37.75%	6.36%
Descomposición LU	62.22%	53.47%	8.30%
Obtención de valores propios	56.7%	63.30%	7.60%

Para comparar las características de un cuestionario de autoevaluación con resultados satisfactorios (Métodos iterativos) y uno con resultados insatisfactorios (Método de Bairstow) se consideraron los estadísticos de los reactivos y los tipos de reactivos. Los datos de la Tabla 7.9 sugieren que los reactivos del tipo “Respuestas incrustadas” y “Arrastrar y soltar sobre texto”, son idóneos para la evaluación de los conocimientos. Sin embargo, mientras en la autoevaluación de los métodos iterativos se obtuvieron valores satisfactorios, en examen del método de Bairstow no fue así. Es decir, el tipo de reactivo no garantiza una evaluación idónea del conocimiento, se requiere un análisis detallado de los que se desea evaluar para definir cómo debería dar evidencia de ello el estudiante.

Tabla 7.9

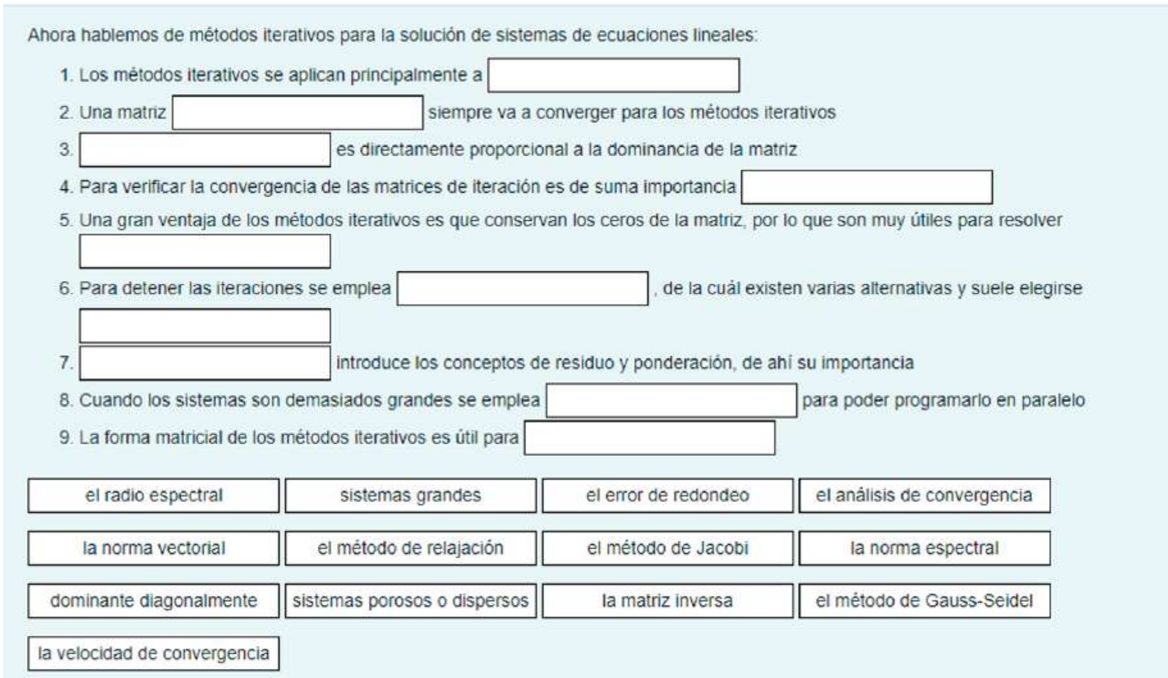
Comparativo de estadísticos de reactivos

	Num Preg.	Tipo de pregunta	Índice de facilidad	Índice de discriminación	Eficiencia discriminativa
Métodos iterativos	1	Arrastrar y soltar texto	60.49%	60.54%	61.42%
	2	Respuestas incrustadas	87.42%	80.27%	82.78%
	3	Relacionar columnas	89.52%	70.05%	74.91%
	4	Relacionar columnas	83.67%	54.50%	65.02%
M. Bairstow	1	Arrastrar y soltar texto	97.31%	68.83%	55.69%
	2	Respuestas incrustadas	98.98%	27.45%	48.03%
	3	Respuestas incrustadas	82.75%	71.35%	77.25%
	4	Relacionar columnas	83.67%	54.50%	65.02%

En la Figura 7.11 se muestra un ejemplo de reactivo del tipo “Arrastrar y soltar sobre texto” empleado para evaluar la comprensión de conceptos. En este caso, no se hace uso de expresiones matemáticas, pero se hace referencia a ellas, es decir, el estudiante debe comprender la parte matemática para poder completar los enunciados.

Figura 7.11

Reactivo para evaluar conceptos



Ahora hablemos de métodos iterativos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales:

1. Los métodos iterativos se aplican principalmente a [ ]
2. Una matriz [ ] siempre va a converger para los métodos iterativos
3. [ ] es directamente proporcional a la dominancia de la matriz
4. Para verificar la convergencia de las matrices de iteración es de suma importancia [ ]
5. Una gran ventaja de los métodos iterativos es que conservan los ceros de la matriz, por lo que son muy útiles para resolver [ ]
6. Para detener las iteraciones se emplea [ ], de la cuál existen varias alternativas y suele elegirse [ ]
7. [ ] introduce los conceptos de residuo y ponderación, de ahí su importancia
8. Cuando los sistemas son demasiados grandes se emplea [ ] para poder programarlo en paralelo
9. La forma matricial de los métodos iterativos es útil para [ ]

el radio espectral	sistemas grandes	el error de redondeo	el análisis de convergencia
la norma vectorial	el método de relajación	el método de Jacobi	la norma espectral
dominante diagonalmente	sistemas porosos o dispersos	la matriz inversa	el método de Gauss-Seidel
la velocidad de convergencia			

Para evaluar el dominio de procedimientos se empelaron reactivos como el que se muestra en la Figura 7.12 del tipo “Respuestas incrustadas”. Se puede observar que además de solicitar los resultados de un problema, el enunciado de la pregunta guía al estudiante en el procedimiento y destaca conceptos que debe dominar. En este ejemplo se solicita que el estudiante capture los resultados numéricos o que los elija de una lista desplegable. En ambos casos, el estudiante debió resolver el problema con anticipación y tener disponibles los resultados. Cuando se solicita que capture datos numéricos, es muy común que cometa errores de captura o que sus resultados tengan pequeñas variaciones. Aspectos que deben considerarse al diseñar el reactivo.

Figura 7.12

Reactivo para evaluar procedimientos

Solución de un sistema de ecuaciones por descomposición LU, **método de Doolittle**.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 43 \\ 33 \\ -14 \end{bmatrix}$$

La matriz es **estrictamente dominante diagonalmente**, lo que significa que la factorización será estable con respecto al **error de redondeo**.

Realiza tus cálculo y captura los resultados **redondeando a cinco cifras**

Coeficientes de la matriz L (Triangular inferior)

1	0	0	0
	1	0	0
		1	0
			1

Coeficientes de la matriz U (Triangular superior)

12	-2	3	4
0			
0	0		
0	0	0	

Un vez factorizada la matriz en un producto LU, se obtiene por sustitución hacia adelante un vectora laterno Z

$z_1 =$

$z_2 =$

$z_3 =$

$z_4 =$

Finalmente, con una sustitución hacia atrás entre la matriz U y el vector Z se obtiene el vector solución

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

$x_4 =$

El sistema de prácticas para este curso incluyó los siguientes problemas para resolución de ecuaciones:

- Determinar el factor de rozamiento para el caso de un paracaidista.
- Profundidad normal de un flujo en un canal.
- Resolver la ecuación de Van Der Walls para distintos gases.
- Determinar la posición para que un robot perfore una placa bajo ciertas condiciones.
- Determinar el número de Match crítico para un caso del ala de avión.

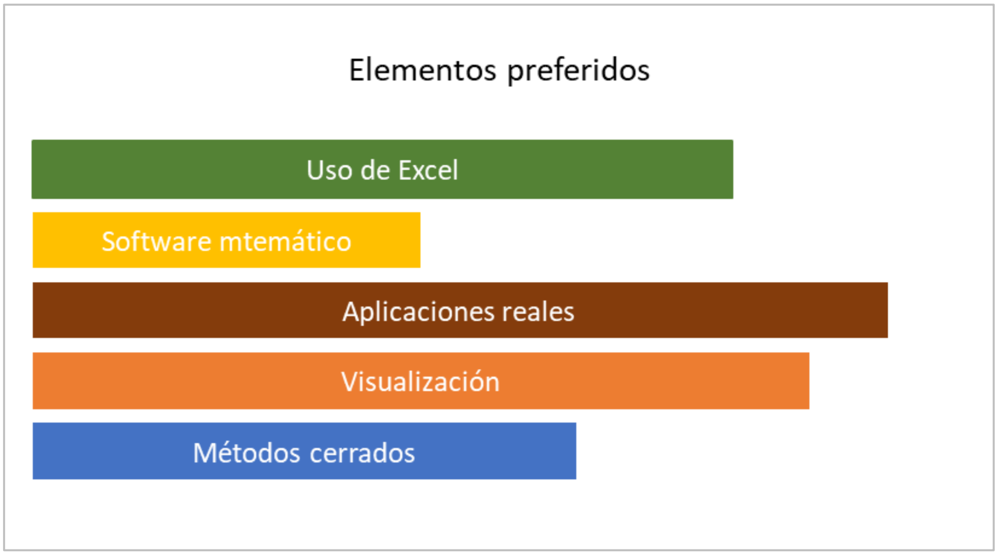
Los problemas para los métodos de sistemas de ecuaciones lineales dejaron en evidencia las deficiencias de los estudiantes en el dominio de conceptos que debieron adquirir en el curso de Álgebra lineal. Los problemas empleados fueron sobre

- Determinar el costo de componentes de un producto bajo ciertos requerimientos.
- El diseño de un circuito eléctrico bajo determinadas condiciones.
- Determinar los coeficientes de un modelo que debe ajustarse a ciertas condiciones (coeficientes del *spline* cúbico).

Al igual que en la primera aplicación del modelo, en esta segunda intervención los estudiantes reconocen los problemas de aplicación como principal actividad para su aprendizaje (Figura 7.10), lo que fue confirmado por los grupos de enfoque (Figura 7.13). También dejan evidencia de que

Figura 7.13

Elementos de la configuración didáctica con mayor preferencia



A pesar del reconocimiento de que los problemas del sistema de prácticas son efectivos para el aprendizaje, en la Tabla 7.10 puede observarse que la entrega de estos problemas es considerablemente menor a la participación en las actividades de autoevaluación, en las que los estudiantes realizan más de un intento con la motivación de mejorar su calificación. En este punto es importante destacar que la demanda de tiempo y trabajo es bastante diferente entre una actividad de autoevaluación y un problema del sistema de prácticas, particularmente para un estudiante de tercer semestre que no está muy habituado a la entrega de reportes formales.

Al igual que en la primera intervención, la participación de los estudiantes en las actividades decrece conforme se avanza en el curso. Esto puede verse influenciado por factores académicos, a la pandemia por COVID-19, a los paros de actividades o tomas de instalaciones, la carga de trabajo en otras asignaturas o situaciones personales de los estudiantes.

Tabla 7.10

Participación de los estudiantes en las actividades. 2023-1

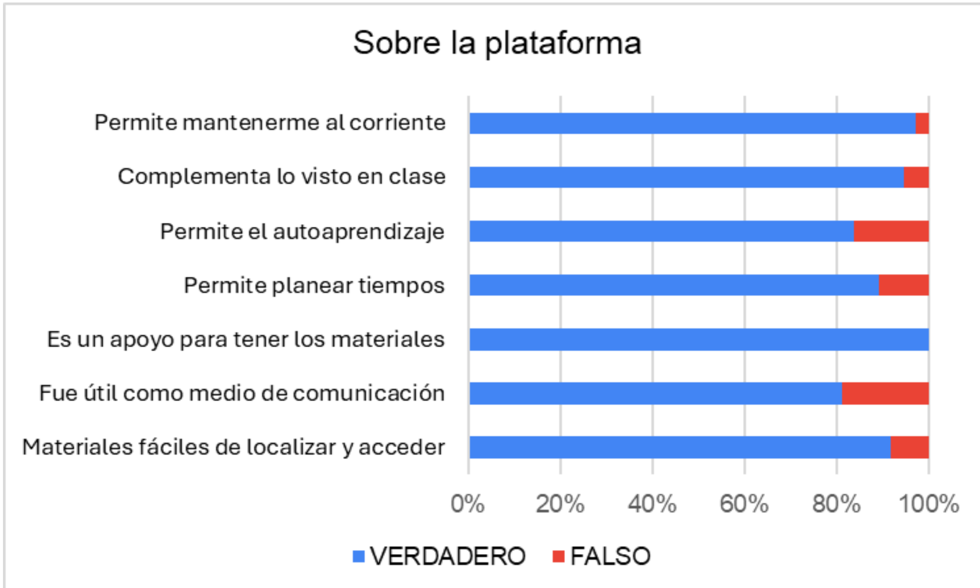
Método	Autoevaluación		Situación problema
	Participantes	Intentos totales	Entregas
Análisis de error	77	125	58
Métodos cerrados	73	93	56
Métodos abiertos	62	93	57
Método de Bairstow	67	145	48
Métodos directos	62	106	65
Métodos iterativos	62	79	55
Descomposición LU	64	112	49

Para validar el modelo, en esta intervención se emplearon los datos obtenidos en los grupos de enfoque, un par de preguntas de la encuesta de percepción y los resultados en el desempeño académico.

Se les preguntó a los estudiantes sobre la plataforma de aprendizaje, en general, la respuesta fue favorable en todos los aspectos abordados (Figura 7.14). Destaca que, para el total de los estudiantes que respondieron, es un apoyo para tener disponibles todos los materiales y que les permite mantenerse al corriente. Pudo identificarse un área de oportunidad en lo referente a la comunicación, donde cerca del 20% de los encuestados no consideran la plataforma útil como medio de comunicación.

Figura 7.14

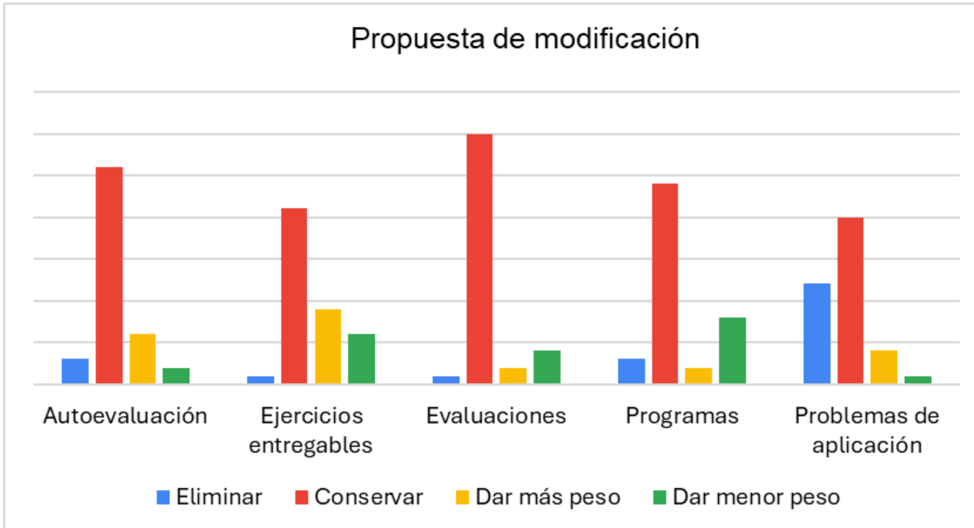
Percepción sobre la plataforma de aprendizaje. 2023-1



Asimismo, se les preguntó ¿De las actividades realizadas qué modificarías? La Figura 7.15 muestra que la mayoría de los encuestados consideran que las actividades deben conservarse. Sin embargo, la actividad que más se propone eliminar fueron los problemas de aplicación, lo cual refuerza la teoría de que son considerados demasiado trabajo.

Figura 7.15

Propuesta de modificación de las actividades



En los grupos de enfoque los estudiantes entablaron un diálogo sobre su experiencia de aprendizaje bajo el modelo y se contabilizaron las menciones referentes al uso del lenguaje matemático, su opinión sobre los componentes del modelo, los aprendizajes que pudieron identificar como destacados y las principales dificultades que enfrentaron como se muestra en la Figura 7.16.

En general, los estudiantes evidenciaron la comprensión de los conceptos empleados, principalmente los relacionados con álgebra lineal. Por otro lado, lo más mencionado sobre la trayectoria didáctica fue el trabajo colaborativo con frases como:

- "Yo no sabía programar en ese lenguaje, pero mis compañeros me animaron a intentarlo"
- "Cuando trabajas en equipo, te explican cuando no entiendes"
- "Mi compañero sabe mucho y me enseño muchos trucos de programación"
- "Cuando son actividades en equipo, no te sientes solo, sabes que puedes preguntar"
- "Las actividades en equipo me ayudaron a conocer a mis compañeros"

Esto sugiere que las actividades colaborativas son bien recibidas, representando un factor de motivación. El siguiente elemento más mencionado fue el uso de problemas de aplicación.

Pudo detectarse que los estudiantes identificaron los componentes del modelo y este fue recibido de manera positiva.

Figura 7.16

Componentes del modelo identificados por los estudiantes

Por su parte, en la Figura 7.17 se esquematizan las menciones sobre los aprendizajes adquiridos que más destacaron los estudiantes. Nuevamente MS Excel fue el más mencionado, sin embargo, las siguientes menciones más frecuentes estuvieron referidas a la comprensión de los conceptos matemáticos y de los métodos numéricos, lo que resulta muy alentador.

Figura 7.17

Aprendizajes destacados

El logro en los objetivos de aprendizaje, reflejado en las calificaciones, permite evaluar de forma cuantitativa los resultados de la aplicación del modelo. En la Tabla 7.11 se puede observar que los promedios en las cuatro evaluaciones parciales fueron superiores a 8/10. Estos resultados son bastante positivos y presentan una ligera mejora en comparación con la primera intervención, considerando que se trata del primer curso de métodos numéricos y que los estudiantes de tercer semestre tienen menos experiencia en programación.

Tabla 7.11

Promedios de las evaluaciones parciales. 2023-1

Unidad temática	**Promedio**
Análisis de error	8.11
Solución numérica de ecuaciones	8.61
Solución de sistemas de ecuaciones lineales	8.04
Obtención de valores propios	8.27

El otro factor considerado para evaluar el desempeño académico fueron las calificaciones obtenidas en las actividades de la configuración didáctica, mismas que se muestran en la

Tabla 7.12. En este caso, las calificaciones de las autoevaluaciones fueron mejoradas del primero al último intento, sin embargo, la calificación obtenida en el problema del sistema de prácticas no fue mejor que la de las autoevaluaciones. Con este dato, se confirma lo que previamente se suponía: se requiere promover el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, no técnico-procedimentales, sino de análisis de datos y de presentación de resultados.

Tabla 7.12

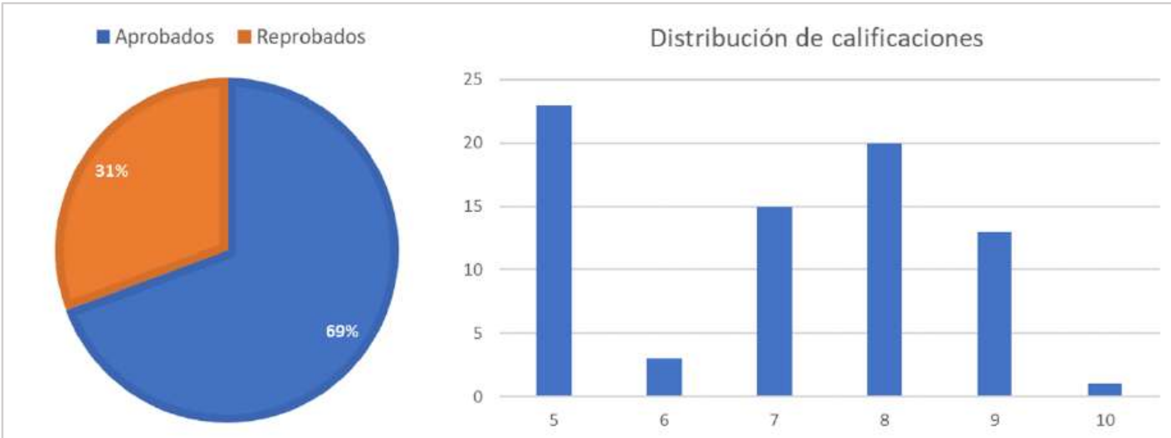
Calificaciones obtenidas en las actividades. 2023-1

Método	Calificación promedio		
	Autoevaluación		Sistema de prácticas
	Primer intento	Último intento	Situación problema
Análisis de error	7.51	8.78	7.5
Métodos cerrados para solución de ecuaciones	6.91	9.43	8.6
Métodos abiertos para solución de ecuaciones	8.41	9.22	7.6
Método de Bairstow	7.32	8.83	7.7
Métodos directos para sistemas de ecuaciones	8.01	8.89	8.6
Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones	8.26	8.85	8.2
Descomposición LU	7.87	8.71	7.9

Finalmente, en la Figura 7.18 se presentan el porcentaje de aprobación y la distribución de calificaciones. Se observa que el porcentaje de estudiantes aprobados es ligeramente menor al obtenido en la primera intervención, no obstante, la distribución de las calificaciones es muy parecida, la moda de estudiantes aprobados coincide en 8/10. Estos resultados pueden considerarse satisfactorios.

Figura 7.18

Distribución de calificaciones 2023-1



La principal observación realizada durante la intervención es referente a los problemas del sistema de prácticas. A pesar de que los estudiantes los reconocen como el elemento con el que más aprenden, las calificaciones no resultaron como se esperaba. Esto sugiere que se debe trabajar en las habilidades para la resolución de problemas, el análisis e interpretación de datos. Al tratarse de un curso virtual, deberán integrarse guías o rúbricas que guíen al estudiante en la adquisición de estas habilidades.

Pudo identificarse que la faceta afectivo-motivacional está relacionada con todos los elementos del modelo y desempeña un papel importante para lograr los objetivos. Durante este curso, en la facultad se presentó un problema por el que se suspendieron las clases un par de semanas y esto afecto de forma notoria la continuidad y la motivación de los estudiantes, algunos de ellos no retomaron el curso. Esto puede apreciarse en el decremento en la participación en las actividades (Tabla 7.10).

Se confirma que los reactivos del tipo "Opción múltiple" no brindan la posibilidad de realizar funciones semióticas para construir conocimientos, pero también se puede afirmar que los reactivos del tipo "Respuestas incrustadas", que generaron buenos valores en los cuestionarios de la aplicación previa del modelo, en este caso presentaron índices de facilidad elevada. Se puede concluir que lo importante es la forma en que se pregunta y qué se evalúa. Es decir, cada reactivo requiere un análisis detallado.

7.1.3 Intervención del semestre 2023-2

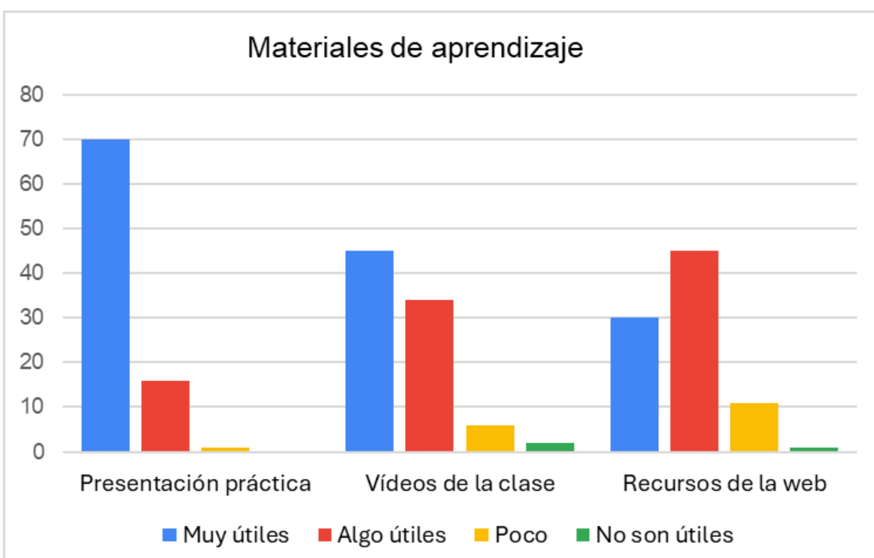
Durante el semestre 2023-2, que abarcó del 30 de enero al 9 de junio de 2023, el modelo se aplicó a dos grupos de Métodos Numéricos 2, 2401 y 2403, conformados por un total de 80 estudiantes inscritos.

Para esta intervención, correspondiente a la tercera iteración, para la evaluación del modelo se consideraron aspectos más específicos de los materiales y las actividades en relación con las dimensiones del EOS, abordados a través de preguntas en la encuesta de percepción.

Como se describió en la sección 6.3.3, la configuración didáctica para cada método se dividió en Materiales y Actividades. El elemento central de los materiales es la presentación teórico-práctica en la que se implementaron las dimensiones cognitivas y epistémicas del EOS. Para complementar se dispusieron además vídeos (propios y de internet) y recursos de sitios en internet. Sobre estos, los estudiantes reconocen a la presentación teórico-práctica como el material que más útil resultó para su aprendizaje (Figura 7.19).

Figura 7.19

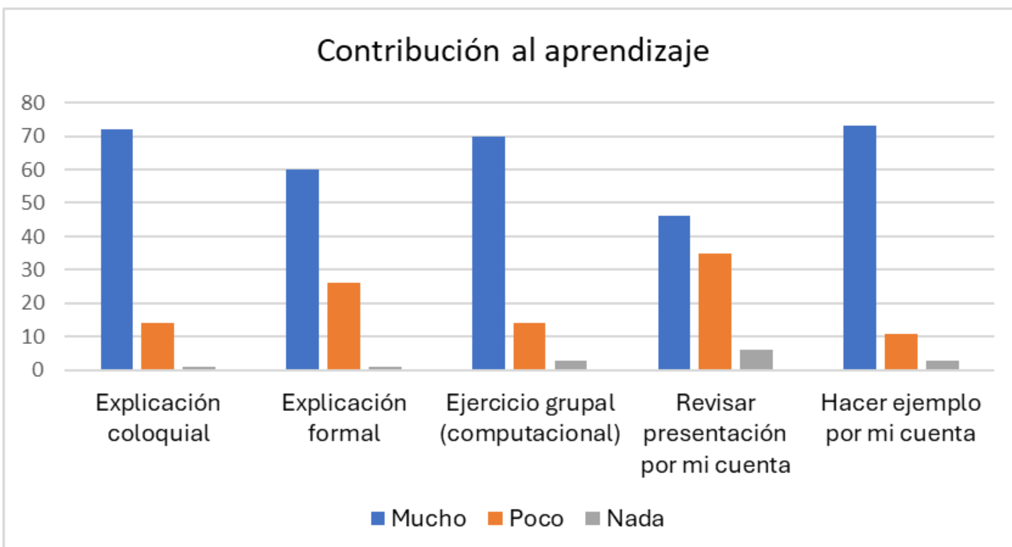
Opinión sobre los materiales de aprendizaje 2023-2



La Figura 7.20 presenta la opinión de los estudiantes sobre la contribución de los componentes de la presentación teórico-práctica a su aprendizaje. Puede observarse que en todos los casos perciben que la actividad contribuye a su aprendizaje, sin embargo, la preferencia es menor para la explicación formal (matemática), lo que sugiere deficiencias en los conocimientos matemáticos previamente adquiridos. En este punto es importante destacar que los estudiantes reconocen que hacer el ejemplo por su cuenta es lo que más contribuye a su aprendizaje, lo que refleja el desarrollo de habilidades para el aprendizaje autónomo.

Figura 7.20

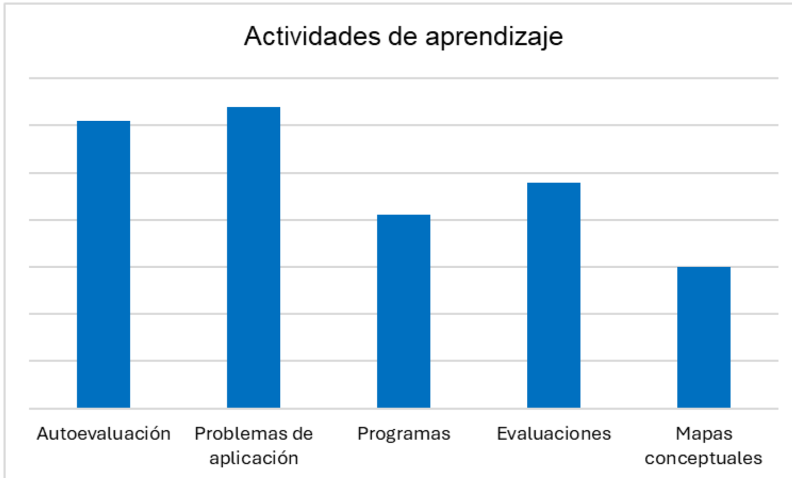
Componentes de la presentación teórico-práctica



Para la aplicación del modelo en el semestre 2023-2 se agregó a las actividades la realización de un mapa conceptual al final de cada unidad temática como estrategia de integración y reestructuración de conocimientos, desafortunadamente no fue percibida así por los estudiantes, como puede observarse en la Figura 7.21. No obstante, se confirma que la resolución de problemas de aplicación, que también cumple estas funciones, es referida por los estudiantes como la actividad con más aprendizajes. Es de destacar que los estudiantes consideran a las actividades de autoevaluación como actividades de aprendizaje.

Figura 7.21

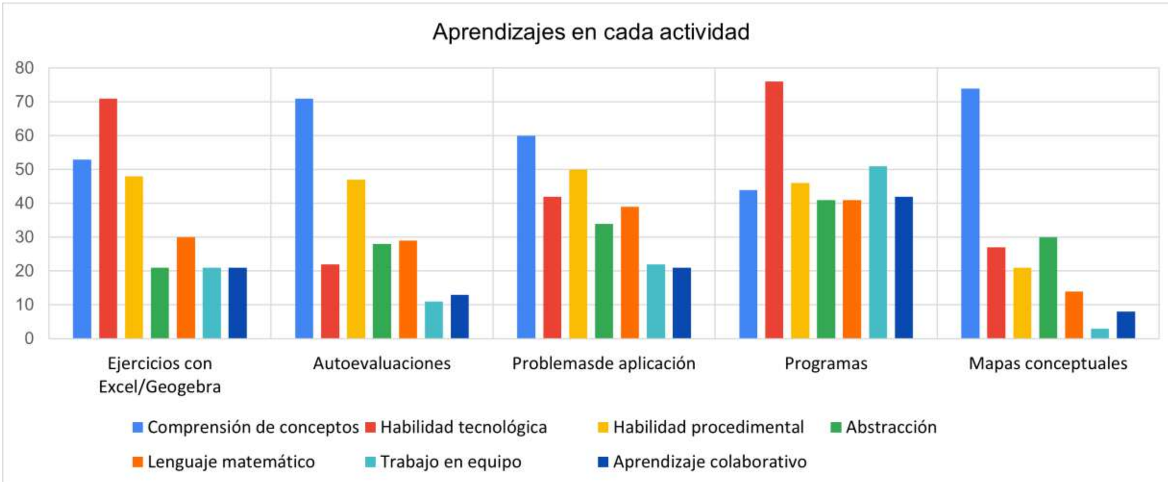
Contribución de las actividades al aprendizaje



En esta línea de ideas, se cuestionó a los estudiantes sobre los aprendizajes y habilidades específicos adquiridos en cada actividad: comprensión de conceptos, lenguaje matemático, habilidad tecnológica, trabajo en equipo, habilidad procedimental, abstracción y aprendizaje colaborativo (Figura 7.22). A partir de lo expresado por los estudiantes, los mapas conceptuales y las autoevaluaciones son las actividades que más les facilitan la comprensión de conceptos, el desarrollo de programas, además de desarrollar habilidades tecnológicas, promueve el trabajo en equipo. En este punto vale la pena destacar que, de acuerdo con la percepción de los estudiantes, los problemas de aplicación son la actividad que más aprendizajes y habilidades promueve, a excepción del trabajo en equipo. Lo que sugiereque este aspecto es el que requiere un replanteamiento en el modelo.

Figura 7.22

Aprendizajes y habilidades adquiridos en cada actividad



La aplicación del estudio técnico a las actividades de autoevaluación generó los resultados que se muestran en la Tabla 7.13 que, al compararse con los resultados de la primera intervención (Tabla 7.2), presentan una mejora significativa obteniendo para todos los cuestionarios una consistencia interna satisfactoria. Además, deja en evidencia que los métodos de Newton requieren un análisis más detallado, para identificar si el problema está en la enseñanza o en la forma de evaluar los conocimientos.

Tabla 7.13

Estadísticos de los cuestionarios 2023-2

Método	Consistencia interna	Tasa de error	Error estándar
Método de Newton	81.85%	42.61%	8.31%
Método de Broyden	83.72%	40.35%	8.59%
Polinomio de Lagrange	82.53%	42.60%	7.48%
Polinomio de diferencias divididas	77.81%	47.10%	9.30%
Polinomio de Newton	72.73%	52.22%	8.79%
Polinomio de Hermite	78.34%	46.54%	7.40%
Ajuste por *splines* cúbicos	80.58%	44.06%	6.94%
Extrapolación de Richardson	81.36%	43.18%	7.19%

En la aplicación previa de este curso (2022-2), tres de los cuestionarios presentaron resultados insatisfactorios, en esta segunda aplicación se mejoraron todos los resultados, solo algunos porcentajes de error estándar resultaron ligeramente altos. Al revisar los estadísticos de facilidad y eficiencia discriminativa, aún se obtienen índices de facilidad ligeramente altos, por lo que se sugiere disminuir el número de intentos de tres a dos.

La Tabla 7.14 presenta la participación de los estudiantes en las principales actividades de la configuración didáctica. Los resultados son una clara evidencia de la importancia de la motivación en el desempeño académico. Como se mencionó al inicio de esta sección, se contaba con 80 estudiantes inscritos, sin embargo, revelan que en un inicio solo 70 realizaban las actividades y con el avance del curso este número fue disminuyendo. Esto se atribuye principalmente a que, pasada la mitad del curso, hubo un problema técnico con la plataforma y se perdieron algunos registros, por lo que se tuvieron que aplicar algunas acciones para recuperarlos. Después de esto, algunos estudiantes dejaron de asistir o de entregar actividades, terminando el curso con alrededor de 50 estudiantes que realizaban actividades de forma regular.

Tabla 7.14

Participación de los estudiantes en las actividades. 2023-2

Método	Autoevaluación		Situación problema
	Participantes	Intentos totales	Entregas
Método de Newton	72	112	60
Método de Broyden	71	102	54
Polinomio de Lagrange	64	108	65
Polinomio de diferencias divididas	79	117	47
Polinomio de Newton	62	93	40
Polinomio de Hermite	42	60	40
Ajuste por *splines* cúbicos	68	95	35
Extrapolación de Richardson	50	61	47
Integración numérica	56	88	50

La información obtenida de los grupos de enfoque sugiere que el modelo logra el objetivo con los estudiantes que cubren la trayectoria didáctica. En la Figura 7.23 se esquematizan las menciones sobre los aprendizajes que reconocen los estudiantes. Puede destacarse, que la programación y el lenguaje matemático tuvieron más menciones que los métodos numéricos. Considerando que la enseñanza de métodos numéricos habitualmente es procedimental, que los estudiantes reconozcan estos aprendizajes, representa un logro del modelo, siendo que las deficiencias en el dominio de los conceptos matemáticos, es uno de los principales problemas en el aprendizaje de métodos numéricos. Asimismo, estos aprendizajes contribuyen a un mejor aprendizaje en asignaturas subsecuentes.

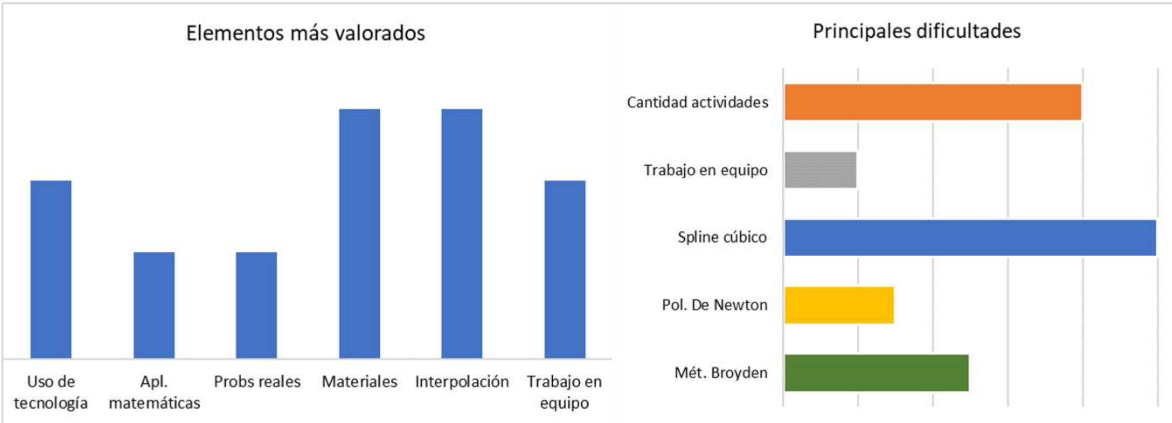
Figura 7.23

Elementos mencionados en los grupos de enfoque

En este diálogo entablado entre los estudiantes pudieron identificarse los elementos más valorados del modelo y del curso. Destacan los materiales y el tema de interpolación. El trabajo en equipo, como puede observarse, es valorado, pero también identificado como una dificultad menor (Figura 7.24). Entre las principales dificultades mencionadas están el ajuste por *spline* cúbico, lo que es consistente con los resultados en las autoevaluaciones y el problema del sistema de prácticas, y la cantidad de actividades. La cantidad de actividades es uno de los principales aspectos que deben evaluarse en el modelo.

Figura 7.24

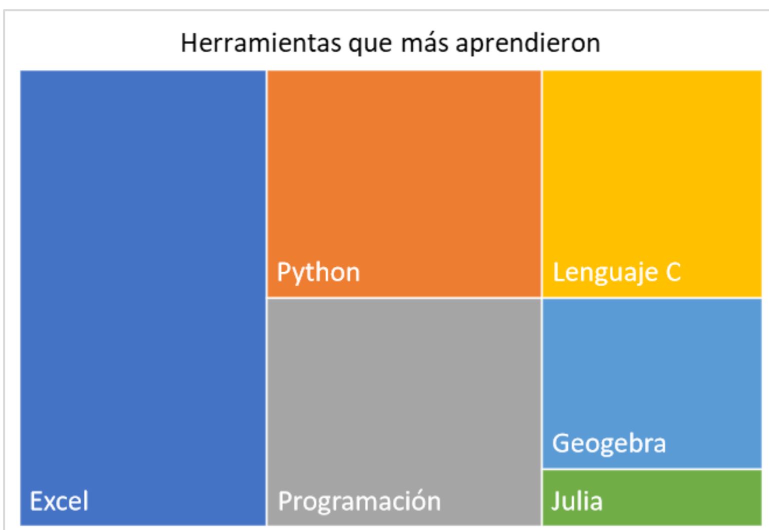
Aprendizajes y dificultades



En esta tercera intervención, se promovió el uso de herramientas computacionales matemáticas. Esto motivó a los estudiantes a profundizar en su aprendizaje, refiriendo como principales aprendizajes tecnológicos, nuevamente MS Excel (Figura 7.25), pero también mencionan habilidades de programación, lenguaje Python y lenguaje C.

Figura 7.25

Habilidades tecnológicas



Al analizar el logro de los objetivos de aprendizaje mediante el promedio de las calificaciones obtenidas en las evaluaciones parciales, en la Tabla 7.15 puede observarse que en las cuatro se obtuvieron promedios superiores a 8.0, incluso en la cuarta, el promedio fue superior a 9.0. Esto sugiere que el estudiante que sigue la configuración didáctica va desarrollando habilidades tecnológicas y cognitivas que le permiten alcanzar estos resultados.

Tabla 7.15

Promedio de las evaluaciones parciales. 2023-2

Unidad temática	Promedio
Sistemas de ecuaciones no lineales	8.15
Interpolación polinomial	8.61
Aproximación polinomial	8.34
Derivación e integración numérica	9.11

Para ser consistente con las intervenciones previas, en esta también se analizan las actividades obtenidas en las actividades de autoevaluación y en problema del sistema de prácticas. Los datos concentrados en la Tabla 7.16 muestran que el comportamiento de los promedios es muy similar a la iteración previa. Se confirma que los estudiantes realizan más de un intento para mejorar sus resultados, mejorando los aprendizajes, por lo que los resultados en los problemas del sistema de prácticas son mejores que los obtenidos en los primeros intentos a pesar de la diferencia en la dificultad de las actividades.

Tabla 7.16

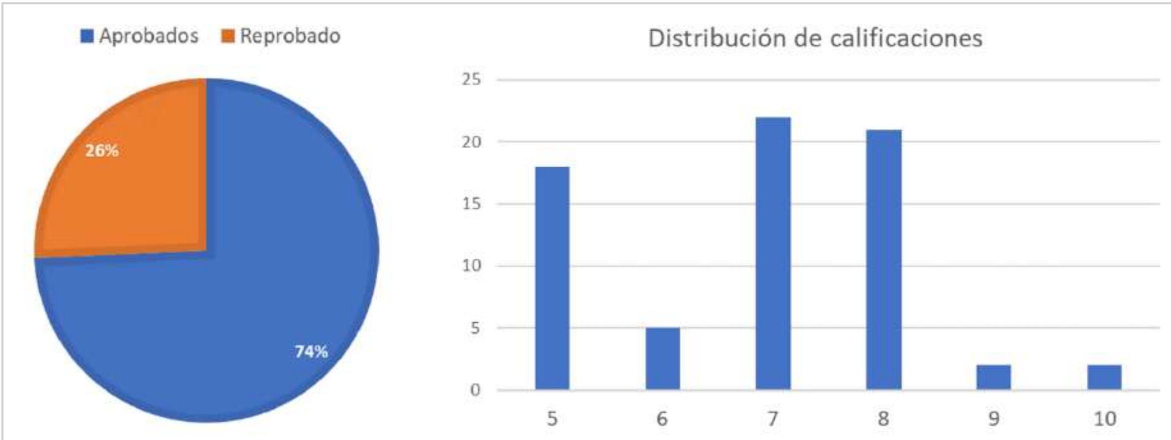
Calificaciones obtenidas en las actividades. 2022-2

Método	Calificación promedio		
	Autoevaluación		Sistema de prácticas
	Primer intento	Último intento	Situación problema
Método de Newton-Rapshon	7.59	8.36	8.10
Método de Broyden	7.87	8.31	7.20
Polinomio de Lagrange	7.58	8.58	8.02
Polinomio de diferencias divididas	7.96	8.20	8.88
Polinomio de Newton	8.40	9.00	8.62
Polinomio de Hermite	5.88	6.22	8.89
Ajuste por *splines* cúbicos	8.74	9.10	8.73
Extrapolación de Richardson	9.14	9.25	8.72
Integración numérica	6.94	8.40	8.64

En lo que respecta a las calificaciones finales, en la Figura 7.26 puede observarse que disminuyó el porcentaje de estudiantes que no aprobaron, sin embargo, cambió la distribución de las calificaciones, con 7.0 y 8.0 con más frecuencia. Es evidente que el problema ya mencionado con los registros en la plataforma tuvo afectaciones en los resultados finales.

Figura 7.26

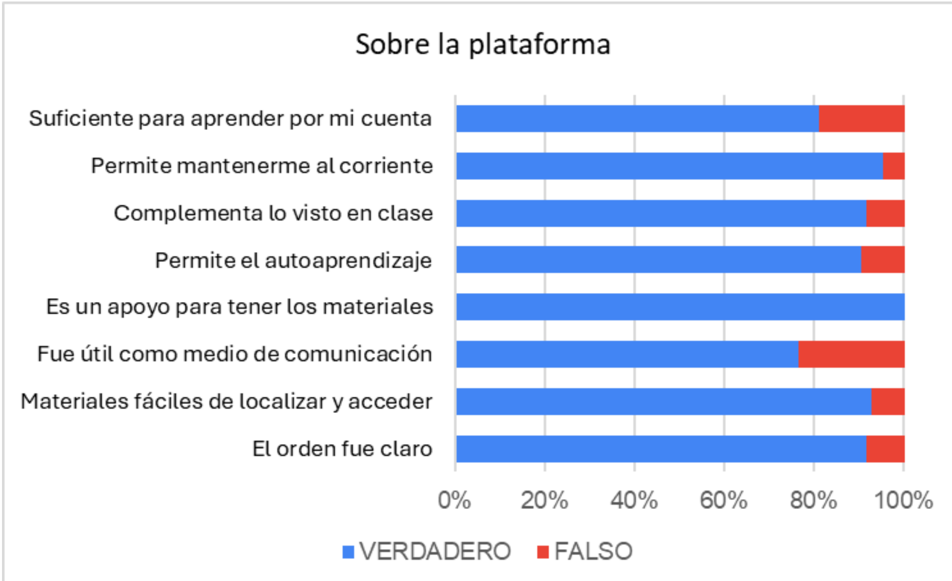
Distribución de calificaciones 2023-2



Para finalizar el proceso de intervención, en la encuesta de percepción se preguntó a los estudiantes sobre las funciones de la plataforma. Las respuestas se presentan en la Figura 7.27, en general, coinciden con las intervenciones anteriores, los estudiantes aun consideran que la plataforma permite el aprendizaje autorregulado, pero no todos creen que sea suficiente para aprender por su cuenta. La deficiencia se sigue presentando en emplear la plataforma como medio de comunicación.

Figura 7.27

Percepción sobre la plataforma de aprendizaje. 2023-2



Concretando los datos de las intervenciones, las observaciones realizadas y los ajustes requeridos, se propuso el modelo EOS para métodos numéricos.

7.2 Modelo EOS para la E-A virtual de métodos numéricos

El modelo resultante de este proyecto que se muestra en la Figura 6.3, es un modelo para la enseñanza virtual de métodos numéricos (M-EOS-MN) que incorpora las dimensiones y configuraciones del EOS con el propósito de favorecer la construcción del conocimiento matemático requerido para el aprendizaje de métodos numéricos y con ello mejorar los resultados en el desempeño académico de los estudiantes.

Figura 6.3

Modelo EOS para educación virtual de métodos numéricos (M-EOS-MN)

El modelo que está diseñado para su implementación en una plataforma virtual de aprendizaje como Moodle, se compone por tres niveles. El primer nivel contiene la Configuración didáctica que se elabora para cada método, en el segundo nivel, se aborda la Integración de los conocimientos y habilidades adquiridos por unidad temática. Finalmente, en el tercer nivel, se realizan las actividades de Apropiación donde el estudiante evalúa métodos, herramientas y procedimientos poniendo en práctica los aprendizajes adquiridos y habilidades desarrolladas durante el curso. Estos niveles conforman la trayectoria didáctica del curso a través de la cual se lleva al estudiante de habilidades de pensamiento básicas a las de orden superior. En estos niveles y los componentes que los constituyen representan la incorporación del enfoque ontosemiótico en un modelo para la enseñanza virtual de métodos numéricos.

Para aplicar el modelo se desarrollaron formatos-guía que le faciliten al docente la elaboración de su diseño instruccional. Como primer paso se identifican las unidades temáticas del programa de la asignatura y los tiempos establecidos (Tabla 7.17). Con esta información se realiza la distribución de tiempos para garantizar el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje establecidos (configuración normativa).

Tabla 7.17

Definición inicial de la configuración normativa

Asignatura:		Duración: Número de sesiones, horas por sesión.
Objetivo general:		
Unidad temática 1	Número de sesiones	Para cada unidad se debe destinar tiempo para cierre (Integración de conocimientos)
	Objetivo particular:	
Unidad temática 2	Número de sesiones	Para cada unidad se debe destinar tiempo para cierre (Integración de conocimientos)
	Objetivo particular:	
…		
Cierre del curso	Asignar tiempo para las actividades de la etapa de Asimilación	

Las configuraciones didácticas de cada método (tema) están compuestas por dos secciones, Materiales y Actividades. Esta forma de organización permite a los estudiantes seguir la trayectoria de forma intuitiva.

En la Tabla 7.18 se presenta el formato-guía para la elaboración de los Materiales. Para la presentación teórico-práctica se presentan los elementos que debe contener, la secuencia que debe seguir y quién realiza la actividad. Esta forma de llevar la sesión de clase requiere el uso continuo de herramientas computacionales, por lo que se indica cuáles son las funciones que deben desempeñar y se sugieren algunas herramientas en concordancia con las actividades en las que se emplean. Por su parte, los vídeos como material complementario y opcional para los estudiantes que prefieren este formato deben cumplir con determinadas características qua también se indican en el formato-guía. Es importante aclarar que las actividades de autoevaluación y los problemas del sistema de prácticas son referidos durante la PTP, pero se describen en el formato-guía correspondiente a las Actividades.

Tabla 7.18

Formato-guía para materiales

Presentación teórico-práctica		
Formato	**Secuencia del contenido**	**Participante**
Presentación con diapositivas	1. Introducción con ejemplo cotidiano	Docente
	2. Conceptos matemáticos necesarios para la deducción del método	Docente-Grupo
	3. Explicación formal breve de los conceptos previos	Docente
	4. Planteamiento matemático del método (H)	Docente
	5. Deducción matemática y gráfica o animación (siempre que sea posible) del método (H)	Docente-Grupo
	6. Reflexión de las características del método y del tipo de problemas que resuelve.	Docente-Grupo
	7. Resolución de un problema básico: análisis de datos y de condiciones e interpretación de resultados (H)	Docente-Grupo
	8. Autoevaluación (problema nivel medio) (H)	Estudiante
	9. Planteamiento de un problema contextualizado de interés para los estudiantes (problema nivel avanzado) (H)	Equipos de estudiantes
[H] Apoyo con herramienta computacional		
Propósito del uso de las herramientas computacionales	1. Promover las representaciones y transformaciones semióticas	
	2. Facilitar la aplicación de los conceptos	
	3. Brindar un ambiente de experimentación	
	4. Propiciar la comprensión del procedimiento	
	5. Transformar lo abstracto en concreto	
	6. Desarrollar habilidades tecnológicas	

	De acuerdo con el nivel de habilidades cognitivas, las herramientas que se proponen son: 1. Hoja de cálculo 2. GeoGebra, Mathematica, Maple, MatLab, NumPy, Manim, 3. Lenguajes de programación, C, C++, Python
Vídeos	Como material complementario, se centran en la fundamentación matemática, y cumplen las siguientes características: • Breves (10-15 minutos) • Recuperan conceptos previos • Deducción matemática detallada • Uso de esquemas y colores

En la Tabla 7.19 se presenta el formato-guía para las actividades: autoevaluación, situaciones problema, programas y portafolio electrónico. En todas las actividades deben detallarse el propósito de la actividad, las indicaciones para su realización y la forma de calificación, para los cuestionarios de autoevaluación, dos intentos conservando la calificación más alta y para las otras actividades rúbrica o guía de puntaje.

Tabla 7.19

Formato-guía para actividades

Descripción de la actividad	Tema y propósito Planteamiento del problema (nivel medio) Rubrica de evaluación Definición de tiempos

Reactivos de la Autoevaluación Recuperar – Reforzar – Aplicar – Complementar	
Para evaluar conceptos	Procurar preguntas que permitan verbalizar los conceptos. Los reactivos útiles para este fin son de tipo:

Reactivos de la Autoevaluación Recuperar – Reforzar – Aplicar – Complementar	
	• Relacionar columnas • Arrastrar y soltar sobre texto • Completar enunciados (blancos) • Respuestas incrustadas (Cloze) • Seleccionar palabras faltantes
Para evaluar comprensión	Relacionar la representación en lenguaje matemático (expresiones, fórmulas) con su verbalización y argumentación. Se deberán plantear distintos escenarios para elegir de acuerdo con las condiciones y características de los métodos. Los tipos de reactivo que se sugieren son: • Relacionar (columnas) la expresión matemática con su significado o su aplicación. • Completar enunciados (blancos). • Respuestas incrustadas (Cloze) empleando opción múltiple para plantear distintas condiciones y características. • Seleccionar palabras faltantes que den sentido a los enunciados.
Para evaluar procedimientos	Basándose en el sustento matemático, guiar al estudiante en el proceso de solución del problema • Seleccionar la palabra faltante para identificar la secuencia en el proceso • Respuestas numéricas • Arrastrar sobre el texto
Retroalimentación	Los cuestionarios deberán proporcionar la retroalimentación necesaria para corregir, reestructurar o completar los aprendizajes.

<table>
<tr><td colspan="2">Situación problema</td></tr>
<tr><td>Planteamiento</td><td>Situaciones problema o problemas contextualizados con la realidad de los estudiantes con las siguientes características:
Posibles de resolver con los aprendizajes adquiridos para generar satisfacción en lugar de frustración.
Deben representar un reto que requiera integrar los aprendizajes.
El nivel de complejidad debe demandar la implementación del método en un lenguaje de programación.
Se resuelven de forma de colaborativa (en equipo) para nivelar habilidades entre los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Entrega</td><td>Presentación formal del trabajo
Portada
Planteamiento
Proceso de resolución
Presentación de resultados
Análisis e interpretación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Programas de los métodos</td></tr>
<tr><td>Entregas parciales</td><td>Por cada unidad temática los estudiantes implementan algún(nos) método(s) en un lenguaje de programación.
Para cada caso se define una rúbrica
Se realiza de forma colaborativa (en equipos)</td></tr>
<tr><td>Paquete de programas</td><td>Al final del curso, los programas de cada unidad se integran en un “sistema computacional de métodos numéricos”, con fines motivacionales, cognitivos y epistémicos.
Se define una rúbrica
Se presenta como producto del semestre</td></tr>
</table>

Portafolio electrónico	
Propósito	Proporcionar al estudiante evidencia de su progreso en habilidades y conocimientos.
Contenido	Integración de los reportes de las situaciones problemas en un portafolio

Estos formatos se pueden adaptar de acuerdo con el criterio del docente y la normativa de la institución, pero no debe omitirse ninguno de los componentes del modelo porque se puede afectar el resultado.

Para atender lo que afirman Breda et al. (2018) “Si se considera que la Didáctica de la Matemática debe aspirar a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se necesitan criterios que permitan valorarlos y guiar su mejora”, el M-EOS-MN fue evaluado con los instrumentos indicados en la Tabla 6.2, a través de los cuales pudo verificarse que los componentes incorporan las dimensiones y configuraciones del EOS, las tablas de verificación pueden consultarse en el Anexo E.

7.3 Síntesis de resultados de la aplicación del modelo

En la Tabla 7.20 se concentran los principales resultados de la aplicación del modelo en cada una de las intervenciones descritas en el apartado 6.4. De acuerdo con los resultados de la encuesta de opinión, en las tres aplicaciones, la presentación teórico-práctica y los problemas de aplicación (sistema de prácticas) fueron identificados por los estudiantes como los elementos que más contribuyeron a su aprendizaje. Asimismo, consideran que el uso de herramientas computacionales durante la presentación teórico practica fue muy útil para su aprendizaje. Sobre la plataforma, los estudiantes reportan, en las tres intervenciones, que el principal uso que le dieron fue para disponer de los contenidos y mantenerse al corriente. En el curso de Métodos Numéricos 1, destaca el uso de la plataforma como medio para organizar los tiempos, mientras que en los cursos de Métodos Numéricos 2 reportaron emplearla como medio de autoaprendizaje.

Por su parte, la programación de los métodos en un lenguaje de programación, en las tres intervenciones fue vista como una actividad que les permitió mejorar sus habilidades de programación, pero expresaron que represento una actividad difícil, por las deficiencias en programación y por las dificultades del trabajo en equipo. Sin embargo, para la tercera aplicación, los estudiantes reconocen que esta actividad contribuyó a desarrollar habilidades útiles para su formación. Con respecto a los cuestionarios de las autoevaluaciones, se pudo identificar que los tipos de reactivos que facilitan la evaluación de conceptos y procedimientos son de arrastrar y soltar sobre texto y los de respuestas anidadas. Para equilibrar los índices de facilidad con los de discriminación se sugiere asignar dos intentos, conservando la calificación más alta y asignando una pequeña penalización a los reactivos que requieran comprensión de conceptos, tratando de evitar que el estudiante responda sin reflexionar.

Con respecto a las calificaciones, el promedio final en los tres períodos fue superior a 7.5/10, sin embargo, pudo observarse una ligera disminución en los periodos 2023-1 y 2023-2. Esto podría ser consecuencia de los inconvenientes que se presentaron para la impartición continua del curso por los motivos que se expusieron anteriormente (paro de actividades académicas y problemas técnicos en los registros de la plataforma). Estos resultados invitan a revisar las acciones de la faceta afectiva. No obstante, los porcentajes de aprobación y los promedios generales del grupo representan una mejora cercana al 20% con respecto a los datos históricos registrados.

Tabla 7.20

Concentrado de principales resultados por intervención

Componente	2022-2	2023-1	2023-2
Presentación teórico-práctica	Muy útil como material de aprendizaje	Muy útil como material de aprendizaje	Muy útil como material de aprendizaje
Apoyo computacional	Muy útil para comprender los métodos	Muy útil para comprender los métodos	Muy útil para comprender los métodos
Sistema de prácticas	Principal actividad para el aprendizaje	Principal actividad para el aprendizaje	Principal actividad para el aprendizaje
Principales usos de la plataforma	Disponer de contenidos y autoaprendizaje	Disponer de contenidos y organización del tiempo	Disponer de contenidos y autoaprendizaje
Autoevaluación	4 cuestionarios no idóneos	Uno cuestionario no idóneo	Todos los cuestionarios idóneos
Programas de los métodos	2º aprendizaje más reconocido Actividad con dificultades	4º aprendizaje más reconocido Actividad con dificultades	2º aprendizaje más reconocido Desarrolla habilidad procedimental y trabajo colaborativo
Reactivos con mejores resultados	Arrastrar y soltar sobre texto Respuestas anidadas	Respuestas anidadas	Respuestas anidadas
Calificaciones	72% de aprobación Promedio grupal: 8.18	69% de aprobación Promedio grupal: 7.88	74% de aprobación Promedio grupal: 7.5

8. Discusión

El planteamiento inicial de este proyecto fue desarrollar un modelo tecnopedagógico, sin embargo, dado que el EOS contempla en sus dimensiones interaccional y mediacional el uso pedagógico y cognitivo de las tecnologías (Figura 6.2), principio de los modelos tecnopedagógicos, es redundante llamar tecnopedagógico a un modelo basado en el EOS. Por lo tanto, el resultado de este proyecto de investigación es un modelo basado en el EOS para la enseñanza virtual de métodos numéricos (M-EOS-MN). Este modelo es una aportación para atender la principal problemática de la enseñanza-aprendizaje de los métodos numéricos: la deficiencia de los conocimientos matemáticos que los sustentan. Con el modelo propuesto se comprueba que es posible integrar el EOS en un modelo para la enseñanza virtual de métodos numéricos de acuerdo con lo descrito en el apartado 7.1.

Los resultados sugieren que el modelo es factible y, en general, benéfico para la consecución de los aprendizajes. Uno de los hallazgos principales fue la percepción de los estudiantes sobre la trayectoria didáctica, particularmente sobre el sistema de prácticas, ya que reconocen a la resolución de problemas contextualizados como el principal elemento que contribuye a los aprendizajes. Con esto se confirma lo planteado por Godino et al. (2007) de que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas.

Asimismo, la encuesta reveló que los estudiantes identifican las actividades prácticas como elementos importantes para su aprendizaje, de ahí la importancia de los formatos-guía que detallan la manera de incorporar la participación de los estudiantes en las sesiones de clase, esto coincide con lo que afirman D'Amore et al. (2007): "el docente deberá diseñar la instrucción cuidadosamente para que se logren los aprendizajes teóricos que permitan una correcta aplicación de conceptos y métodos". En este sentido, los problemas que integren el sistema de prácticas deberán ser problemas cercanos a la realidad de los estudiantes y procurar que sean parecidos a los problemas que enfrentarán en el ejercicio de su profesión, por lo que requieren actualizarse continuamente. Lo anterior también coincide con la metodología para la enseñanza de métodos numéricos presentada por Navia et al. (2022) en el sentido de la importancia que asigna a la materialización de los conceptos teóricos mediante la resolución de problemas prácticos basándose en el aprendizaje activo.

Por otro lado, el uso de distintos formatos en materiales y actividades con el propósito de facilitar las funciones semióticas descritas por Aznar et al. (2016), como herramientas para la construcción de significados de objetos matemáticos e indispensables para producir nuevo conocimiento (Duval, 2016), son una estrategia común en trabajos sobre enseñanza de métodos numéricos, entre los que destacan Becerra-Romero et al. (2019), Granados Ospina (2015) y Detchev et al. (2020) quienes además emplean la plataforma Moodle como AVA con la premisa planteada por Godino (2011) de que la tecnología sea empleada para influir positivamente en lo que se enseña.

Por su parte, las actividades de autoevaluación que desempeñan la doble función de evaluar y favorecer aprendizajes tienen características semejantes a las presentadas por R. M. Clark y Kaw (2021) en un estudio de caso sobre pruebas en las que se evalúan habilidades de pensamiento de acuerdo con la taxonomía de Bloom. En ambos casos, los resultados muestran que el desarrollo de este tipo de habilidades atrae el interés de los estudiantes, mejorando sus aprendizajes.

La búsqueda de la mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los métodos numéricos está influenciada y motivada en gran medida por los avances tecnológicos que permiten implementar estrategias pedagógicas de forma atractiva y eficaz para los estudiantes. Las estrategias que se pudieron identificar en la revisión documental coinciden en cierta manera con el M-EOS-MN que se propone en este trabajo, principalmente las metodologías activas que se relacionan con la afirmación de Freeman et al. (2016) de que para que el estudiante construya los aprendizajes establecidos debe desempeñar un papel activo en el proceso. Por su parte, Lupu (2016) destaca la importancia de la computadora en el aprendizaje de métodos numéricos como herramienta para las representaciones gráficas, para aplicar conjuntos de pruebas y para la resolución de problemas.

A pesar de lo expuesto anteriormente, del modelo desarrollado y de los resultados positivos obtenidos, el trabajo enfrentó algunas limitaciones que son importantes de mencionar. La primera de ellas fue el entorno social, cuando este proyecto inició México se encontraba enfrentando un distanciamiento social ocasionado por la pandemia provocada por el COVID-19, los estudiantes en esos periodos cursaban todas sus asignaturas en línea y realizaban la mayoría de sus actividades en esta modalidad. Para el último periodo en que se aplicó el modelo, la sociedad había regresado a la normalidad y esto significó requerimientos de tiempo y actividades adicionales, que inevitablemente afectan el desempeño de los estudiantes. En este contexto, los estudiantes tuvieron que enfrentar situaciones que les afectaron emocionalmente en las que un modelo de enseñanza no puede influir.

Asimismo, cada institución educativa tiene características que las identifica y distingue de las demás. Este proyecto se desarrolló en su totalidad con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México, lo que sugiere que al aplicar el modelo en otra institución o en otra carrera seguramente los resultados presentarán diferencias. Esto, sin duda, representa otra etapa futura para este proyecto de investigación.

En esta misma línea de ideas, durante el semestre 2023-1 las actividades en la Facultad se suspendieron por una problemática estudiantil y al retomar las actividades fue notorio el cambio en la motivación de los estudiantes, lo que inevitablemente afecta su desempeño académico. Otra situación que afectó la aplicación del modelo se presentó en el periodo 2023-2, cuando por una falla técnica en los servidores de la facultad, poco después de medio semestre, se perdieron los registros en la plataforma institucional de aprendizaje (SEA). A pesar de que se recuperaron la mayoría de las calificaciones y se realizaron acciones para retomar el curso, también se pudo observar desánimo en los estudiantes. Estas situaciones indican que la motivación es un factor muy importante en el aprendizaje y situaciones como las enfrentadas son difíciles de prever, pero que deberían considerarse acciones para incorporar en las actividades del modelo.

Por otro lado, llevar al estudiante de habilidades de pensamiento de orden inferior a las de orden superior, lograr los aprendizajes y desarrollar las habilidades para la resolución de problemas con métodos numéricos, significó incluir una cantidad considerable de actividades a realizar por el estudiante, esta es la principal autocritica a este modelo. Especialmente porque los estudiantes que llevan este curso están inscritos en otras tres o cuatro asignaturas, por lo que deberían buscarse actividades que cumplan las mismas funciones, pero que demanden menos tiempo de los estudiantes.

La elaboración de los cuestionarios de autoevaluación en Moodle es muy redituable para el docente ya que, si bien en un principio demanda un gran esfuerzo, las actividades se convierten en activos mejorables cada semestre. Es decir, el docente puede reusarlas y mejorarlas continuamente.

Aun cuando el EOS tiene un propósito pragmático requiere una comprensión profunda de sus componentes, por lo que se sugiere que los docentes de educación superior interesados en implementar este modelo se capaciten en Didáctica de la Matemática y en el EOS, esto permitiría adaptar y mejorar el M-EOS-MN.

Durante la revisión documental sobre el EOS en educación superior, la mayoría de los estudios localizados fueron teóricos o de formación docente, lo que sugiere que la complejidad del enfoque limita su aplicación, esto invita a una reflexión sobre la forma o los medios para difundirlo y aplicarlo más ampliamente lo que seguramente lo llevaría a una evolución positiva.

De acuerdo con las reflexiones anteriores, la siguiente línea de investigación apunta a la generalización y perfeccionamiento del modelo mediante su aplicación en distintas instituciones y con poblaciones de características diferentes. Además, investigaciones futuras deberían orientarse a fortalecer el factor afectivo y motivacional ya que en este trabajo se pudo constatar que tiene una influencia significativa en el desempeño de los estudiantes y en consecuencia en su aprendizaje.

Finalmente, considerando los avances actuales en inteligencia artificial, debería considerarse incorporarla como herramienta para mejorar el modelo en su conjunto, sus componentes o las actividades que lo constituyen.

9. Conclusiones

Los cursos de métodos numéricos representan un eje de formación crucial en las carreras de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas. De ahí la importancia de proponer un modelo específico para la impartición de esta asignatura en el nivel superior. A continuación, se presentan brevemente las conclusiones del presente estudio.

9.1 El modelo propuesto

De las seis dimensiones que constituyen el EOS, la mediacional y la interaccional coinciden con el planteamiento de las propuestas tecnopedagógica en el sentido de que el uso de tecnologías computacionales en el proceso de enseñanza aprendizaje debe tener un enfoque pedagógico consciente. Por este motivo, se decidió omitir la denominación de tecnopedagógico al modelo desarrollado en este proyecto y nombrarlo “Modelo EOS para la enseñanza virtual de Métodos Numéricos (M-EOS-MN)”. En este modelo, constituido por tres niveles, se integran las dimensiones y configuraciones del EOS, en una trayectoria didáctica diseñada para su implementación en la enseñanza virtual.

Los niveles que constituyen el modelo: configuración didáctica, integración y apropiación; articulan los componentes en una trayectoria didáctica que favorece la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades cognitivas para formar al estudiante en la resolución de problemas (sistema de prácticas), como la actividad para asociar los significados de los objetos matemáticos.

Los resultados obtenidos tras la aplicación iterativa del modelo muestran una mejora cercana al 20% en las calificaciones finales en comparación con los datos registrados en el Programa de la carrera, donde el porcentaje de reprobación habitual es de entre el 50% y 40%.

9.2 El sistema de prácticas

El sistema de prácticas, constituido por las situaciones problema planteadas para cada uno de los métodos numéricos del programa de la asignatura, representa el eje central del M-EOS-MN y del EOS. De acuerdo con las respuestas obtenidas en la encuesta de percepción los estudiantes reconocen que la resolución de problemas contextualizados, que requieren evaluar método, procedimiento y herramienta computacional, representa la principal actividad para lograr los aprendizajes. Sin embargo, para lograr este objetivo, la trayectoria del modelo contempla la presentación teórico-práctica y la autoevaluación, como elementos formativos.

El uso de herramientas computacionales en estas actividades representa una herramienta cognitiva y pedagógica que facilita la experimentación, la construcción y transformación de representaciones semióticas, además de desempeñar un papel afectivo motivacional. Asimismo, visualizar gráficamente los conceptos y las deducciones de los métodos representa un factor valioso para el aprendizaje. En general, los estudiantes consideran que emplear estas herramientas les facilita la comprensión de las matemáticas que sustentan los métodos numéricos.

9.3 Cuestionarios de autoevaluación

Los cuestionarios de autoevaluación representan una actividad de enseñanza y aprendizaje que permite al estudiante conocer su nivel de aprendizaje y, de ser necesario, reestructurar o complementar lo aprendido. Por lo tanto, los reactivos que los componen deben ser elaborados cuidadosamente. Con las intervenciones iterativas se pudo concluir que los reactivos para evaluar y complementar los aprendizajes deben ser de tipo explicativo o argumentativo, de tal manera que favorezcan la verbalización de conceptos matemáticos abstractos. La estrategia de verbalizar conceptos matemáticos en lugar de presentar fórmulas o ecuaciones para el diseño de reactivos ofrece dos ventajas: es más sencillo implementar estos reactivos en cuestionarios automatizados y favorece las transformaciones semióticas en el estudiante, dirigiéndolo a la comprensión de los componentes matemáticos y abstractos mediante un lenguaje cotidiano.

Los tipos de reactivos fueron evaluados mediante los índices de facilidad, de discriminación y la eficiencia discriminativa. A partir de ello, se concluyó que el tipo de reactivo que facilita este tipo de evaluación es el de respuestas anidadas y el de arrastrar y soltar sobre textos. Además, se concluyó que, para lograr los valores idóneos, lo recomendable es darle al estudiante la posibilidad de realizar los cuestionarios con dos intentos. Más de dos intentos aumenta de forma significativa los índices de facilidad de los reactivos, disminuye el porcentaje de consistencia interna del cuestionario y aumenta la tasa de error.

También se concluyó que definir una pequeña penalización (10% o 20%) a los reactivos que evalúan conceptos contribuye a la idoneidad de la evaluación. Por último, se debe mencionar la importancia de la retroalimentación en esta actividad. Es a través de la retroalimentación que se complementan o reestructuran los aprendizajes.

9.4 La plataforma de aprendizaje

Dado que el M-EOS-MN está planteado para un curso virtual, su implementación en la plataforma de aprendizaje representa un elemento primordial como escenario que propicie la construcción de conocimientos. Sin embargo, esta implementación puede aplicarse sin ninguna modificación cursos en modalidad *b-learning* o presenciales, donde lo que cambiaría sería la modalidad de las sesiones de clase, pero que en ambos casos cumple la función de guiar al estudiante en la construcción de conocimientos y desarrollo de habilidades, además de fomentar el aprendizaje autónomo.

Para cada tema se implementó la Configuración didáctica en dos secciones: Materiales y Actividades. El nivel de Integración se implementó por unidad temática y el nivel de Apropiación para el curso en su conjunto. De acuerdo con la percepción de los estudiantes, la plataforma les resultó útil para disponer de los contenidos y mantenerse al corriente, para el autoaprendizaje y para organizar sus tiempos. En general, expresan que fue sencillo seguir la trayectoria didáctica.

En suma, el M-EOS-MN se visualiza como prometedor, factible y flexible para implementar elementos de Didáctica de la Matemática a través del EOS en la enseñanza de métodos numéricos. Con ello este modelo pretende cubrir este hueco identificado en la revisión documental.

Asimismo, el modelo pretende brindar a los docentes de métodos numéricos una guía sencilla y práctica que les permita lograr los aprendizajes en sus estudiantes sin tener que profundizar en el dominio y comprensión del Enfoque Ontosemiótico. Este trabajo es una invitación a continuar explorando aplicaciones del EOS como estrategia innovadora en la educación superior en carreras del área CTIM.

9.5 Futuras líneas de investigación

A partir del análisis de resultados pueden establecerse las líneas para futuros trabajos, la primera de ella deberá ser la influencia de las actitudes y la motivación en los aprendizajes. El modelo propuesto (M-EOS-MN) consideró el uso de las herramientas computacionales y las estrategias empleadas como factores motivacionales, sin embargo, no se percibió una disminución en el índice de abandono, explorando modelos como la gamificación o estrategias de trabajo colaborativo, sin aumentar la carga de trabajo.

Asimismo, la incorporación de la inteligencia artificial es un factor que debe incorporarse para evitar que los estudiantes lo usen inapropiadamente y no exploten sus ventajas. Sin duda, es el siguiente paso en la educación.

Mientras se trabaja en estas líneas deberá difundirse el modelo, probarse en otras instituciones y en otras asignaturas de orientación similar.

10. Referencias

Abdul Rahim, R. H., Baharum, A., & Hijazi, H. (2020). Evaluation on effectiveness of learning linear algebra using gamification. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, *17*(2), 997. https://doi.org/10.11591/ijeecs.v17.i2.pp997-1004

Abreu, J. L., & Bracho, J. (2016). *Una propuesta para mejorar la educación matemática*. http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/UnaPropuesta.pdf

Afifah, D. S. N., & Nafi'An, M. I. (2019). Analizing of field independent and dependent students' understanding in solving statistical problems based on ontosemiotic approach. *Journal of Physics: Conference Series*, *1321*(2). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1321/2/022100

Akram, H., Yingxiu, Y., Al-Adwan, A. S., & Alkhalifah, A. (2021). Technology Integration in Higher Education During COVID-19: An Assessment of Online Teaching Competencies Through Technological Pedagogical Content Knowledge Model. *Frontiers in Psychology*, *12*(August), 1–11. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.736522

Allan, C., Parra, S., & Martins, A. (2017). Objetos de Aprendizaje para la Interpretación Geométrica de Métodos Numéricos: Uso de GeoGebra. *TE & ET - Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, *20,* 51–56. http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/64594

Alloqmani, A., Alsaedi, O., Bahatheg, N., Alnanih, R., & Elrefaei, L. (2022). Design Principles-Based Interactive Learning Tool for Solving Nonlinear Equations. *Computer Systems Science and Engineering*, *40*(3), 1023–1042. https://doi.org/10.32604/csse.2022.019704

Alonso, C., Gallego, D., & Honey, P. (1997). Los estilos de aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora. *Annals of Physics*, *54*(2). http://www.mendeley.com/research/no-title-avail/

Amaya, T. D. A. (2020). Evaluación de la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de Futuros Profesores de Matemáticas en el Desarrollo de una Clase Utilizando Funciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*(66), 110–131. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a06

Aznar, A., Baccelli, S., Figueroa, S., Distéfano, M. L., & Anchorena, S. (2016). Las Funciones Semióticas como Instrumento de Diagnóstico y Abordaje de Errores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 670–690. https://doi.org/10.1590/1980-4415V30N55A18

Baist, A., Fadillah, A., & Nopitasari, D. (2019). Students Self Regulated Learning in Numerical Methods Course using Computational Mathematics Teaching Materials. *Malikussaleh Journal of Mathematics Learning (MJML)*, *2*(1), 1–4. https://doi.org/10.29103/mjml.v2i1.2122

Bécar, J.-P., Canonne, J.-C., Vermeiren, L., Robert, F., & Cartignies, E. (2017). A METHOD TO CONNECT MATHEMATICS AND SCIENCES USING A COMPUTER ALGEBRA SYSTEM. *EDULEARN17 Proceedings*, *1*(April 2018), 5932–5939. https://doi.org/10.21125/edulearn.2017.2336

Becerra-Romero, A., Díaz-Rodríguez, M., & González-Estrada, O. A. (2019). Development of a virtual learning environment for the subject numerical methods under Moodle. *Journal of Physics: Conference Series 1161*, *1161*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1161/1/012010

Bergmann, J., & Sams, A. (2014). Flip Your Classroom Reach Every Student in Every Class Every Day. En *Get Abstract Compressed Knowledge*.

Bhatti, N. (2019). CAI and conventional method for retention of mathematics: an experimental study. *Journal of Physics: Conference Series*, *1157*(3). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/3/032079

Bhuyan, M. H., & Khan, S. S. A. (2014). Teaching a numerical analysis course for electrical engineering students in the cognitive domain. *International Journal of Electrical Engineering and Education*, *51*(1), 82–92. https://doi.org/10.7227/IJEEE.51.1.7

Bilousova, L., Kolgatin, O., & Kolgatina, L. (2019). Computer simulation as a method of learning research in computational mathematics. *CEUR Workshop Proceedings*, *2393*, 880–894. http://ceur-ws.org/Vol-2393/paper_209.pdf

Blanco, M., & Ginovart, M. (2012). Los cuestionarios del entorno Moodle: Su contribución a la evaluación virtual formativa de los alumnos de matemáticas de primer año de las titulaciones de Ingeniería. *RUSC Universities and Knowledge Society Journal*, *9*(1), 354–370. https://educationaltechnologyjournal.springeropen.com/articles/10.7238/rusc.v9i1.1277

Bolaño-Muñoz, O. E. (2020). El constructivismo: Modelo pedagógico para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educare*, *24*(3), 488–502. https://doi.org/https://doi.org/10.46498/reduipb.v24i3.1413

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(60), 255–278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Cabero Almenara, J. (2016). ¿Qué debemos aprender de las pasadas investigaciones en Tecnología Educativa? *Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*, *0*, 23–33. https://doi.org/10.6018/riite/2016/256741

Cabero, J., & Barroso, J. (2016). Formación del profesorado en TIC: Una visión del modelo TPACK. *Cultura y Educacion*, *28*(3), 633–663. https://doi.org/10.1080/11356405.2016.1203526

Caligaris, M., Rodriguez, G., Favieri, A., & Laugero, L. (2017). Developing mathematical abilities using learning objects when learning numerical methods. *Proceedings of ICERI2017 Conference 16th-18th November 2017, Seville, Spain*, 6018–6026. http://www.wolfram.com/cdf/.

Capone, R., Del Regno, F., & Tortoriello, F. S. (2018). E-teaching in mathematics education: The teacher's role in online discussion. *Journal of E-Learning and Knowledge Society*, *14*(3), 41–51. https://doi.org/10.20368/1971-8829/1538

Castañeda, L., Salinas, J., & Adell, J. (2020). Hacia una visión contemporánea de la Tecnología Educativa. *Digital Education Review*, *37*, 240–268. https://doi.org/10.1344/der.2020.37.240-268

Castellanos Sánchez, A., Sánchez Romero, C., & Calderero Hernández, J. F. (2017). Nuevos modelos tecnopedagógicos. Competencia digital de los alumnos universitarios. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *19*(1), 1–9. https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.1.1148

Cazau, & Pablo. (2014). *Cuestionario de estilos de aprendizaje* (p. 22). https://antoniortega2000.files.wordpress.com/2014/10/cuestionario-de-estilos-de-aprendizaje-y-explicacion-de-estilos.pdf

Cejas-León, R., & Navío-Gámez, A. (2020). Sobre la formación tecnopedagógica del profesorado. La visión de los expertos y formadores. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *11*(31), 150–164. https://doi.org/10.22201/iisue.20072872e.2020.31.711

Chai, C. S. (2019). Teacher Professional Development for Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) Education: A Review from the Perspectives of Technological Pedagogical Content (TPACK). *Asia-Pacific Education Researcher*, *28*(1), 5–13. https://doi.org/10.1007/s40299-018-0400-7

Chai, C. S., Rahmawati, Y., & Jong, M. S.-Y. (2020). Indonesian Science, Mathematics, and Engineering Preservice Teachers' Experiences in STEM-TPACK Design-Based Learning. *Sustainability*, *12*(21), 9050. https://doi.org/10.3390/su12219050

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros* (7a ed.). McGraw Hill.

Clark, R., Kaw, A., Lou, Y., Scott, A., & Besterfield-Sacre, M. (2018). Evaluating Blended and Flipped Instruction in Numerical Methods at Multiple Engineering Schools. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, *12*(1). https://doi.org/10.20429/ijsotl.2018.120111

Clark, R. M., & Kaw, A. A. W. (2021). Enhancing student outcomes in a blended numerical methods course for engineers: The case for practice and cumulative tests. *International Journal of Engineering Education*, *37*(3), 485–593. https://www.ijee.ie/1atestissues/Vol37-3/03_ijee4052.pdf

Coll, C., Mauri, T., & Onrubia, J. (2008). La utilización de las TIC en la educación. Del diseño tecno-pedagógico a las prácticas de uso. En C. Coll & C. Monereo (Eds.), *Psicología de la educación virtual* (pp. 74–104). Morata.

Corbacho, A. M., Minini, L., Pereyra, M., González-Fernández, A. E., Echániz, R., Repetto, L., Cruz, P., Fernández-Damonte, V., Lorieto, A., & Basile, M. (2021). Interdisciplinary higher education with a focus on academic motivation and teamwork diversity. *International Journal of Educational Research Open*, *2–2*, 100062. https://doi.org/10.1016/J.IJEDRO.2021.100062

CUAIEED, & UNAM. (2020). *Evaluación educativa CUAIEED*. https://cuaieed.unam.mx/evaluacion_educativa

Dafonte-Gómez, A., García-Crespo, O., & Ramahí-García Diana. (2018). 'Flipped learning' y competencia digital: diseño tecnopedagógico y percepción del alumnado universitario. *Index Comunicación*, *8*(2), 275–294. https://journals.sfu.ca/indexcomunicacion/index.php/indexcomunicacion/article/view/373/393

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexión sobre algunos conceptos clave de la investigación en educación Matemática: didáctica, concepto, competencia, esquema y situación. *Eco Matemático*, *8*(S1), 61–67. https://doi.org/10.22463/17948231.1385

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Historia y desarrollo de la didáctica de la matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque onto-semiótico). *PARADIGMA*, *XLI*, 130–150. https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.2020.p130-150.id870

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVIII*(2), 49–77. https://doi.org/https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2007.p49-77.id386

De Benito Crosetti, B., & Salinas Ibañez, J. (2016). La investigación basada en diseño en tecnología educativa. *Revista Interuniversitaria de investigación en Tecnología Educativa*, 44–59. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.6018/riite/2016/260631

De Oliveira Brandao, L., Bosse, Y., & Gerosa, M. A. (2016). Visual programming and automatic evaluation of exercises: An experience with a STEM course. *2016 IEEE*

Frontiers in Education Conference (FIE), *2016-Novem*, 1–9. https://doi.org/10.1109/FIE.2016.7757621

de Oliveira, J. M., Henriksen, D., Castañeda, L., Marimon, M., Barberà, E., Monereo, C., Coll, C., Mahiri, J., & Mishra, P. (2015). El panorama educativo de la era digital: Prácticas comunicativas que (nos) impulsan hacia adelante. *RUSC Universities and Knowledge Society Journal*, *12*(2), 14–29. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.7238/rusc.v12i2.24402440

Delgado Cepeda, F. J. (2017). Small private online research: A proposal for a numerical methods course based on technology use and blended learning. *Proceedings of the 13th International Conference on Mobile Learning 2017, ML 2017*, 84–88. https://eric.ed.gov/?id=ED579207

Detchev, I., Rangelova, E., & Cao, S. L. (Christine). (2020). Overcoming Non-numerical Challenges in an Engineering Numerical Methods Course. *2020 ASEE Virtual Annual Conference Content Access Proceedings*, *2020-June*. https://doi.org/10.18260/1-2--35025

Distéfano, M. L., Aznar, M. A., & Pochulu, M. D. (2019). Characterizing meaning processes of mathematical symbols on university students. *Educacion Matematica*, *31*(1), 144–175. https://doi.org/10.24844/EM3101.06

Djamila, H. (2017). Excel spreadsheet in teaching numerical methods. *Journal of Physics: Conference Series*, *890*(1), 012093. https://doi.org/10.1088/1742-6596/890/1/012093

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143–168. http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La habilidad para cambiar el registro de representación.pdf

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En U. D. F. J. de Caldas (Ed.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61–94). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. En *Understanding the Mathematical Way of Thinking - The*

Registers of Semiotic Representations. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Dyrvold, A. (2020). Relations between semiotic resources in mathematics tasks: a source of students' difficulties. *Research in Mathematics Education*, *22*(3), 265–283. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1689160

Fernández Coronado, N. A., García-García, J. I., Arredondo, E. H., & Araya Naveas, I. A. (2022). Epistemic Configurations and Holistic Meaning of Binomial Distribution. *Mathematics*, *10*(10), 1748. https://doi.org/10.3390/math10101748

Fernández-Martín, F.-D., Romero-Rodríguez, J.-M., Gómez-García, G., & Ramos Navas-Parejo, M. (2020). Impact of the Flipped Classroom Method in the Mathematical Area: A Systematic Review. *Mathematics*, *8*(12), 2162. https://doi.org/10.3390/math8122162

FES Acatlán, & Martínez Justo, M. (2022). *Informes de Actividades*. FES Acatlán. https://www.acatlan.unam.mx/director/Informes.html

Flórez Escobar, W. F., Flórez Londoño, D. A., & Valencia Cardona, R. A. (2019). Programación científica. Una propuesta didáctica para la enseñanza de métodos numéricos y programación. *Encuentro Internacional de Educación en Ingeniería ACOFI*. https://acofipapers.org/index.php/eiei/article/view/134

Freeman, S., Miles Mcdonougha, S. L. E., Smithb, M. K., Okoroafora, N., Jordta, H., Pat, M., Traductor, W., & Henríquez, A. (2016). *Aprendizaje activo mejora el desempeño estudiantil en ciencia, ingeniería y matemáticas*. https://eduteka.icesi.edu.co/articulos/investigacion-aprendizaje-activo

Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Chamorro Manríquez, D. D., & Alvarado Martínez, H. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(7), em2130. https://doi.org/10.29333/ejmste/12162

Gangle, R. (2016). Semiotics in mathematics education: Topological foundations and diagrammatic methods. En *Edusemiotics - A Handbook* (pp. 47–61). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-1495-6_4

García Marimón, O., Diez-Palomar, J., Morales Maure, L., & Durán González, R. E. (2021). Evaluación de secuencias de aprendizaje de matemáticas usando la herramienta de los

Criterios de Idoneidad Didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*(70), 1047–1072. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a23

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*, 1–20.

Godino, J. D. (2013). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720/13965

Godino, J. D. (2019). How to teach mathematics and experimental sciences? Solving the inquiring versus transmission dilemma. *CEUR Workshop Proceedings*, *2555,* 71–80. http://ceur-ws.org/Vol-2555/paper6.pdf

Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, *2*(2), e202201. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009). *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *Source: For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 38–43. https://doi.org/10.2307/26742011

Godino, J. D., Font Moll, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *27*(1), 59–76. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3663

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

González Fernández, M. O. (2021). La capacitación docente para una educación remota de emergencia por la pandemia de la COVID-19. *Revista Tecnología, Ciencia y Educación*, *19*(2021), 81–102. https://doi.org/10.51302/tce.2021.614

Granados Ospina, A. (2015). Las TIC en la enseñanza de los métodos numéricos. *Sophia*, *11*(2), 143–154. https://revistas.ugca.edu.co/index.php/sophia/article/view/347

Grisales Aguirre, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, *14*(2), 198–214. https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751

Gros, B. (2016). Retos y tendencias sobre el futuro de la investigación acerca del aprendizaje con tecnologías digitales. *Revista de educación a distancia (RED)*, *32*. https://revistas.um.es/red/article/view/233061

Guerra, L., Arciniegas, S., Narváez, L. D., & Grimon, F. (2018). Competencies and Indicators for a Productive Digital Communication. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, *721*, 1022–1032. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73450-7_97

Gutiérrez, M. J. F., Lasheras, F. S., & Alonso, J. A. T. (2020). An intervention based on identifying topics that students have difficulties with. *Mathematics*, *8*(12), 1–16. https://doi.org/10.3390/math8122220

Gwynllyw, D. R., Henderson, K. L., Van lent, J., & Guillot, E. G. (2020). Using Python in the Teaching of Numerical Analysis. *MSOR Connections*, *18*(2), 25–32. https://doi.org/10.21100/msor.v18i2.1100

Handayanto, A., Supandi, S., & Ariyanto, L. (2018). Teaching using moodle in mathematics education. *Journal of Physics: Conference Series*, *1013*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012128

Haney, M. R., Dillon, H. E., & Kotas, J. (2023). Active learning modules for a numerical methods course. *International Journal of Mechanical Engineering Education*. https://doi.org/10.1177/03064190231205368

Hernández Y., & Aranguren G. (2016). Technological-pedagogical pattern : learning path based on comprehensive activities. *Revista Vinculos*, *13*(2), 30–39. https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/vinculos/article/view/11671/12398

Jahodova, M., Krcek, J., Moravkova, Z., & Schreiberova, P. (2018). Set of interactive tools for numerical integration teaching. En J. Beseda & L. Rohlikova (Eds.), *Overcoming the challenges and barriers in open education (DISCO 2018)* (pp. 41–49).

Jaime, Ó. J. M., Moll, V. F., & Pino-Fan, L. (2019). Structure and dynamic of analogical, abductive and deductive arguments: A course on solid geometry as a context for reflection. En *Ensenanza de las Ciencias* (Vol. 37, Número 1, pp. 93–116). Universitat Autonoma de Barcelona. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Jerše, G., & Lokar, M. (2017). Learning and teaching numerical methods with a system for automatic assessment. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *24*(3), 121–127. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1564/tme_v24.3.03

Johnston, B. M. (2017). Implementing a flipped classroom approach in a university numerical methods mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(4), 485–498. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1259516

Juárez Lugo, C., Rodríguez Hernández, G., & Luna Montijo, E. (2012). El cuestionario de estilos de aprendizaje CHAEA y la escala de estrategias de aprendizaje ACRA como herramienta potencial para la tutoría académica. *Revista de estilos de aprendizaje*, *5*(10), 148–171. http://revistaestilosdeaprendizaje.com/article/view/965

Kaczorowska, M., Pańczyk, B., & Dmytruk, R. (2018). Satisfaction of it students in numerical methods learning using educational application – research results. *INTED2018 Proceedings*, 4168–4175. https://doi.org/10.21125/inted.2018.0808

Kaw, A., Clark, R., Delgado, E., & Abate, N. (2019). Analyzing the use of adaptive learning in a flipped classroom for preclass learning. *Computer Applications in Engineering Education*, *27*(3), 663–678. https://doi.org/10.1002/cae.22106

Larios, V., Páez, R. E., & Moreno, H. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20,* 105–124. https://doi.org/10.35763/aiem20.4002

Lemley, E., & Kadioglu, S. (2022). A Modern Approach to Teaching Computational/Numerical Methods. *2022 ASEE Annual Conference & Exposition Proceedings*. https://doi.org/10.18260/1-2--41809

Lima Pisco, R. J., Cedeño Ferrin, J. A., & Padilla Orlando, M. A. (2020). Aplicación de los métodos numéricos en la enseñanza superior. *Revista Científica Sinapsis*, *1*(16). https://doi.org/10.37117/s.v2i17.356

Lorenzo-Lledó, A. (2018). Innovación en el aprendizaje desde el diseño tecno-pedagógico. *International Studies on Law and Education*, *29–30*, 119–130. http://www.hottopos.com/isle29_30/119-130Lorenzo.pdf

Lubis, A., Ritonga, A., Hia, Y., & Nasution, A. A. (2020). Online Learning Design At Higher Education: An Example From Mathematics Classroom. *Journal of Physics: Conference Series*, *1462*(1), 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1462/1/012004

Lugo-Armenta, J. G., & Pino-Fan, L. R. (2021). Inferential Statistical Reasoning of Math Teachers: Experiences in Virtual Contexts Generated by the COVID-19 Pandemic. *Education Sciences*, *11*(7), 363. https://doi.org/10.3390/educsci11070363

Lupu, C. (2016). The Role of the Computer in Learning Mathematics Through Numerical Methods. *Science Journal of Education*, *4*(2), 32. https://doi.org/10.11648/j.sjedu.20160402.13

MAC, & FES-Acatlán. (2014). *Plan de estudios, 2014*. https://mac.acatlan.unam.mx/media/vinculos/2018/07/Tomo I.pdf

Mainali, B. (2020). Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(1), 1–21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Marcelo, C., Yot, C., & Perera, V. H. (2016a). The technological and technological pedagogical knowledge in science teaching at the university. A descriptive study. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *34*(2), 67–86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1552

Marcelo, C., Yot, C., & Perera, V. H. (2016b). The technological and technological pedagogical knowledge in science teaching at the university. A descriptive study. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *34*(2), 67–86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1552

Marquez, E., Garcia, S., & Molina, S. (2019). Implementation of Visual Supplements to Strengthen Pedagogical Practices and Enhance the Physical Understanding of

Fundamental Concepts in Engineering Mechanics. *2019 ASEE Annual Conference & Exposition Proceedings*. https://doi.org/10.18260/1-2--32939

Martínez, N. M., Escobedo, B. R. R., & de Guadalupe Torres Moreno, R. (2021). The hybrid maps in school chemistry. *Educacion Quimica*, *32*(3), 117–129. https://doi.org/10.22201/FQ.18708404E.2021.3.77443

Mateus-Nieves, E. (2016). Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 559–585. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a13

Mateus-Nieves, E. (2021). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*(71), 1593–1615. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

McCord, R., & Jeldes, I. (2019). Engaging non-majors in MATLAB programming through a flipped classroom approach. *Computer Science Education*, *29*(4), 313–334. https://doi.org/10.1080/08993408.2019.1599645

Mendonca, J., Goncalves, G., Ferro, T., & Ferreira, M. (2016). Teaching and learning of contents from numerical methods using the technology: Comparison of the use of two technological resources. *2016 International Symposium on Computers in Education (SIIE)*, 1–4. https://doi.org/10.1109/SIIE.2016.7751823

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. En *Teachers College Record* (Vol. 108, Número 6, pp. 1017–1054). https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Montero, Y., Pedroza, M. E., Astiz, M. S., & Vilanova, S. L. (2015). Caracterización de las actitudes de estudiantes universitarios de Matemática hacia los métodos numéricos. *Revista electrónica de investigación educativa*, *17*(1), 88–99. https://redie.uabc.mx/redie/article/view/357/997

Moodle.org. (2022). *Estadísticas del reporte del examen*. https://docs.moodle.org/all/es/Estad%C3%ADsticas_del_reporte_del_examen

Morales R, G., Rubio G, N., & Larios O, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*(70), 664–689. https://doi.org/10.1590/1980-4415V35N70A06

Moreno Martínez, N., Hernández Zavala, L. E., & Briceño Solís, E. C. (2021). Análisis de la resolución de un problema de cinemática mediante el mapa conceptual híbrido. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *39*(3), 157–176. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3106

Mudgett, D. R., & Haynes, S. R. (2016). Teaching programming as application development from the ground up. *2016 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)*, *2016-Novem*, 1–9. https://doi.org/10.1109/FIE.2016.7757738

Muñoz Suárez, M. A., Porras, Fernández, M. I., & Mayiya, G. Illescas. (2017). Aplicación de software matemático para el logro de aprendizaje en aplicaciones de cálculo diferencial e integral en estudiantes universitarios. *3er Congreso Internacional de Ciencias Pedagógicas*, 1295–1314. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7210620

Nantschev, R., Feuerstein, E., González, R. T., Alonso, I. G., Hackl, W. O., Petridis, K., Triantafyllou, E., & Ammenwerth, E. (2020). Teaching approaches and educational technologies in teaching mathematics in higher education. *Education Sciences*, *10*(12), 1–12. https://doi.org/10.3390/educsci10120354

Navia, J. A. N., Guerrero, G. S., de los Ríos, G. A. B., Quiroga, G. U., Perilla, J. P. A., & Sepúlveda, J. I. G. (2022). A Methodological Proposal for Numerical Methods Teaching in Engineering using Problem-Based Learning (PBL). *Proceedings of the LACCEI international Multi-conference for Engineering, Education and Technology*, *2022-July*. https://doi.org/10.18687/LACCEI2022.1.1.598

Nease, J., McKenzie, K., Karolat, S., & Pham, C. (2019). A worshop-based approach to teaching numerical methods and computing in Chemical Engineering. *Proceedings of the Canadian Engineering Education Association (CEEA)*. https://doi.org/10.24908/pceea.vi0.13727

Oliveira Júnior, A. P. de, Barros Neto, D. D. F., & Saito, S. (2022). Evaluating Independent and Mutually Exclusive Event Concepts in the Thinking of Higher Education Students. *Acta Scientiae*, *24*(5), 27–53. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6835

Peña, C. N., Pino-Fan, L. R., & Assis, A. (2021). Normas que regulan la gestión de clases virtuales de matemáticas en el contexto COVID-19. *Uniciencia*, *35*(2), 1–20. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.21

Pino-Fan, L. R. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63–94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Pramita, M., Sukmawati, R. A., & Sari, D. P. (2018). The Implementation of Flipped Classroom Assisted by Learning Management System for Numerical Method Courses. *Proceedings of the 1st International Conference on Creativity, Innovation and Technology in Education (IC-CITE 2018)*. https://doi.org/10.2991/iccite-18.2018.36

Pratiwi, & Istiyowati, L. S. (2020). Simulation and Games Based Learning Model for Learning Math in Higher Education. *Universal Journal of Educational Research*, *8*(9A), 16–20. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.082003

Purwati, N. K. R. (2019). Development of student worksheet based on collaborative learning model in learning course of numerical methods. *Journal of Physics: Conference Series*, *1321*(3), 032073. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1321/3/032073

Rivera-Robles, S. B., Salcedo-Lagos, P. A., Valdivia-Guzmán, J. R., & López-Jara, O. A. (2021). Estudios empíricos del modelo sobre conocimiento didáctico-tecnológico del contenido (TPACK) en matemáticas, incluidos en bases bibliográficas internacionales. *Información tecnológica*, *32*(4), 109–120. https://doi.org/10.4067/S0718-07642021000400109

Ruiz Bolívar, C. (2015). *Instrumentos y técnicas de investigación educativa. Un enfoque cuantitativo y cualitativo para la recolección y análisis de datos* (3a ed.). DANAGA Training and Consulting.

Rumbaut Leon, F., & Quindemil Torrijo, E. M. (2017). Las tecnologías de la información y las comunicaciones en la asignatura Métodos Numéricos para cursos de ingeniería en la enseñanza superior. *Didasc@lia: Didactica y Educacion*, *8*(1), 99–110. http://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/article/view/591

Silva-López, R. B., Rodríguez Silva, N. A., & Méndez-Gurrola, I. I. (2018). Challenges-based learning and gamification for the course of numerical methods in engineering. *ICERI2018 Proceedings*, 4286–4295. https://doi.org/10.21125/iceri.2018.1949

Solano, A. D., & Aarón, M. A. (2020). Engineering education based on a collaborative techno-pedagogical design, using SMILE. *Formacion Universitaria*, *13*(4), 201–210. https://doi.org/10.4067/S0718-50062020000400201

Sumarwati, S., Fitriyani, H., Azhar Setiaji, F. M., Hasril Amiruddin, M., & Afiat Jalil, S. (2020). Developing Mathematics Learning Media Based on E-Learning using Moodle on Geometry Subject to Improve Students' Higher Order Thinking Skills. *International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM)*, *14*(04), 182. https://doi.org/10.3991/ijim.v14i04.12731

Tan, P., & Saucerman, J. (2017). Enhancing Learning and Engagement through Gamification of Student Response Systems. *ASEE Annual Conference & Exposition Proceedings*. https://doi.org/10.18260/1-2--28276

Timofeeva, E. F., Grigoryan, L. A., Marchenko, T. V, & Khalatyan, K. A. (2019). A model of mathematics distance learning in university training e-environment. *CEUR Workshop Proceedings*, *2494*, 20–23. http://ceur-ws.org/Vol-2494/paper_29.pdf

Torras Virgili, M. E. (2021). Emergency Remote Teaching: las TIC aplicadas a la educación durante el confinamiento por COVID-19. *Innoeduca. International Journal of Technology and Educational Innovation*, *7*(1), 122–136. https://doi.org/10.24310/innoeduca.2021.v7i1.9079

Tudon-Martinez, J. C., Hernandez-Alcantara, D., Rodriguez-Villalobos, M., Aquines-Gutierrez, O., Vivas-Lopez, C. A., & Morales-Menendez, R. (2020). The effectiveness of computer-based simulations for numerical methods in engineering. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*, *14*(3), 833–846. https://doi.org/10.1007/s12008-020-00673-w

Tupacyupanqui-Jaen, D., Cornejo-Aparicio, V., & Bedregal-Alpaca, N. (2018). Video and cooperative work as didactic strategies to enrich learning and development of generic competences in numerical methods. *Proceedings - 13th Latin American Conference on Learning Technologies, LACLO 2018*, 134–141. https://doi.org/10.1109/LACLO.2018.00038

UNAM. (2020). *CUAIEED, UNAM*. https://cuaieed.unam.mx

Uribe, M., & Oliva, P. R. (2021). Types of knowledge displayed by future Mathematics teachers when solving problems about trigonometric functions. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *35*(71), 1478–1505. https://doi.org/10.1590/1980-4415V35N71A12

Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2018). *La investigación basada en diseño para el aula de matemáticas aprendizaje*. http://funes.uniandes.edu.co/13601/1/Vrancken2018La.pdf

Weinhandl, R., Lavicza, Z., & Houghton, T. (2020). Designing Online Learning Environments for Flipped Approaches in Professional Mathematics Teacher Development. *Journal of Information Technology Education: Research*, *19*, 315–337. https://doi.org/10.28945/4573

Zhang, S., & Wang, X. (2015). Some ideas on the teaching reform of the numerical analysis for the undergraduate. *Proceedings of the 2015 International Conference on Social Science and Higher Education*, 215–218. https://doi.org/10.2991/icsshe-15.2015.28

Zheng, J., Xing, W., & Zhu, G. (2019). Examining sequential patterns of self- and socially shared regulation of STEM learning in a CSCL environment. *Computers and Education*, *136*(March), 34–48. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.03.005

Zulyadaini, Z. (2020). Development of teaching materials in numerical methods. *Ukrainian Journal of Educational Studies and Information Technology*, *8*(1), 28–38. https://doi.org/10.32919/uesit.2020.01.03

11. Anexos

Anexo A. Programas de las asignaturas de Métodos Numéricos

Programa de Asignatura. Métodos Numéricos I (MAC y FES-Acatlán, 2014)

MODALIDAD	CARÁCTER	TIPO	HORAS AL SEMESTRE	HORAS SEMANA	CRÉDITOS
Curso	Obligatoria	Teórico-Práctica	64	4	6

ETAPA DE FORMACIÓN	Básica	SEMESTRE	Tercero
CAMPO DE CONOCIMIENTO	Matemáticas Computacionales		

SERIACIÓN	Indicativa
ASIGNATURA(S) ANTECEDENTE	Algebra Superior y Programación II
ASIGNATURA(S) SUBSECUENTE(S)	Métodos Numéricos II
Objetivo general: El alumno aplicará técnicas numéricas para la solución de sistemas de ecuaciones lineales y nolineales en problemas prácticos mediante la elaboración de sistemas computacionales.	

Índice temático		**Horas**	
Unidad	**Tema**	**Teóricas**	**Prácticas**
1	Análisis de error	4	4
2	Solución numérica de ecuaciones de una sola variable	8	8
3	Solución de sistemas de ecuaciones lineales	10	10
4	Factorización LU y sus aplicaciones	4	4
5	Cálculo de valores y vectores propios	6	6
	Total de horas:	32	32
	Suma total de horas:	64	

HORAS T	HORAS P	UNIDAD	CONTENIDO
4	4	1	**ANÁLISIS DE ERROR** **Objetivo particular:** El alumno utilizará las técnicas para minimizar los errores típicos en el uso de los métodosnuméricos. **Temas:** 1.1 Introducción 1.2 Errores de redondeo: aritmética del punto flotante, errores de truncamiento, absoluto yrelativo 1.3 Propagación del error en distintas operaciones aritméticas 1.4 Orden de convergencia

8	8	2	**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DE UNA SOLA VARIABLE** **Objetivo particular:** El alumno implementará computacionalmente los algoritmos de métodos numéricos para el cálculo de raíces deecuaciones de una sola variable. **Temas:** 2.1 Método de bisección 2.2 Método de falsa posición 2.3 Método de Newton 2.4 Método de la secante 2.5 Método de Bairstow
10	10	3	**SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES** **Objetivo particular:** El alumno resolverá numéricamente sistemas de ecuaciones implementando los algoritmos enun lenguaje de programación. **Temas:** 3.1 Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la solución de sistemasecuaciones lineales 3.1.1 Inversión de matrices 3.1.2 Método de intercambio 3.2 Métodos exactos 3.2.1 Método de Gauss y pivoteo parcial 3.2.2 Método de Gauss-Jordan y pivoteo total 3.3.3 Gauss-Jordan particionado 3.4 Métodos iterativos. 3.4.1 Mejoramiento iterativo de la solución 3.4.2 Método de Jacobi 3.4.3 Método de Gauss-Seidel 3.4.4 Método de relajación
4	4	4	**FACTORIZACIÓN LU Y SUS APLICACIONES** **Objetivo particular:** El alumno aplicará técnicas numéricas para inversión de matrices sin diagonalización enproblemas específicos. **Temas:** 4.1 Modelos de contexto y comportamiento 4.2 Método de Cholesky 4.3 Método Doolittle 4.4 Solución de sistemas bandados. (Método de Crout)
6	6	5	**CÁLCULO DE VALORES Y VECTORES PROPIOS** **Objetivo particular:** El alumno aplicará técnicas numéricas para el cálculo de valores propios. **Temas:** 5.1 Método de potencias 5.2 Transformación de Householder 5.3 Iteración QR

Programa de Asignatura. Métodos Numéricos II (MAC y FES-Acatlán, 2014)

MODALIDAD	CARÁCTER	TIPO	HORAS AL SEMESTRE	HORAS SEMANA	CRÉDITOS
Curso	Obligatoria	Teórico-Práctica	64	4	6

ETAPA DE FORMACIÓN	Básica	SEMESTRE	Cuarto
CAMPO DE CONOCIMIENTO	Matemáticas Computacionales		

SERIACIÓN	Indicativa
ASIGNATURA(S) ANTECEDENTE	Álgebra Lineal, Métodos Numéricos I, Programación Orientada a Objetos, Cálculo II
ASIGNATURA(S) SUBSECUENTE(S)	Ninguna

Objetivo general: El alumno aplicará técnicas numéricas para el cálculo de derivadas e integrales definidas, solución de sistemas de ecuaciones no lineales, así como las técnicas de interpolación y extrapolación para la aproximación polinomial, mediante la implementación de los algoritmos computacionales correspondientes.

Índice temático		Horas	
Unidad	**Tema**	**Teóricas**	**Prácticas**
1	Introducción a la solución de sistemas de ecuaciones no lineales	8	8
2	Interpolación y aproximación polinomial	16	16
3	Derivación e integración numérica	8	8
	Total de horas:	32	32
	Suma total de horas:	64	

HORAS		UNIDAD	CONTENIDO
T	P		
8	8	**1**	**INTRODUCCIÓN A LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES** **Objetivo particular:** El alumno resolverá numéricamente sistemas de ecuaciones no lineales implementando losalgoritmos en un lenguaje de programación. **Temas:** 1.1 Punto fijo para sistemas no lineales 1.2 Método de Newton 1.3 Método de Quasi Newton

16	16	2	**INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN POLINOMIAL** **Objetivo particular:** El alumno aplicará las técnicas de interpolación y ajuste de curvas para la aproximaciónpolinomial y funcional. **Temas:** 2.1 Interpolación polinomial 2.1.1 Fórmula de Lagrange 2.1.2 Diferencias divididas 2.1.3 Fórmula de interpolación de Newton: hacia delante y hacia atrás 2.1.4. Método de Hermite 2.2 Extrapolación 2.3Teoría de la aproximación. Mínimos Cuadrados 2.4 Ajuste de curvas con Splines cúbicos
8	8	3	**DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA** **Objetivo particular:** El alumno aplicará los métodos de derivación e integración numérica en el cálculo de áreas. **Temas:** 3.1 Derivación numérica 3.2 Newton Cotes 3.2.1 Regla trapezoidal 3.2.2 Regla de Simpson 1/3 3.2.3 Regla de Simpson 3/8 3.3 Integración de Romberg

Anexo B. Reactivos de las evaluaciones diagnósticas

Evaluación diagnóstica de Métodos Numéricos 1

Representación de punto flotante.

Sean los siguientes números reales, escríbelos en notación científica

	Parte entera	Parte fraccionaria (inicia con punto p. ej. .446)	Exponente
312.2456			
0.00007845			
5.3259			

Sistema de numeración binario.

Escribe los números equivalentes, según corresponda

Decimal	Binario
$(146)_{10}$	
	$(0.10101)_2$

Serie de Taylor

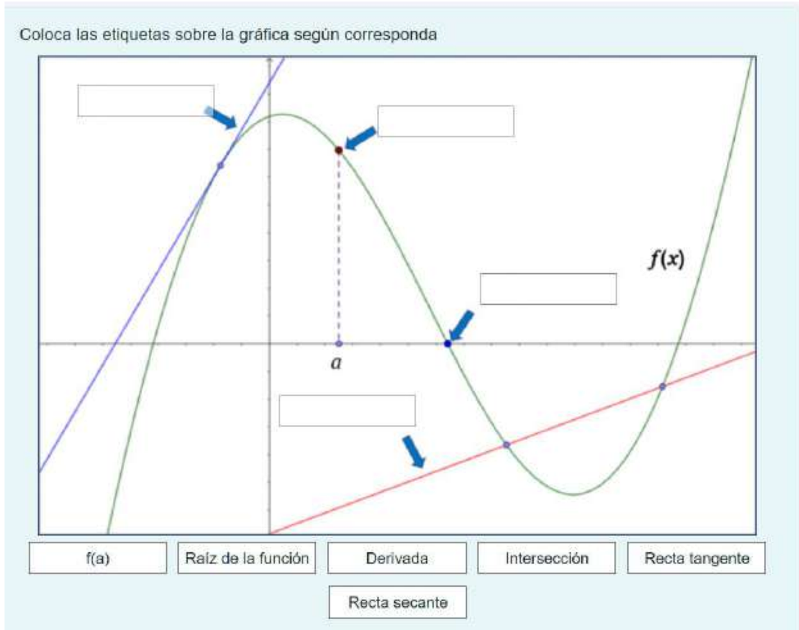
El teorema de Taylor establece que cualquier función suave puede ______ por un polinomio.

La serie de Taylor se emplea para aproximar el valor de una función en un punto a partir del valor de la función y ______ en un punto cercano.

Al ser la serie de Taylor infinita, en la práctica es ______ a un número finito de términos, el orden ______ del último término determina el orden de la serie de Taylor.

Los términos que no son considerados representan un ______ o error de aproximación.

aproximado | residuo | derivada | derivarse | truncada | sus intervalos | de la derivada | sus derivadas | aproximarse



Sistemas de ecuaciones lineales.

Asocia cada afirmación con el concepto correspondiente

La matriz asociada a un sistema con infinidad de soluciones es

Elegir...

- Elegir...
- Matriz inversa
- Menor
- Matriz singular
- Matriz no singular
- Determinante
- Matriz adjunta
- Cofactor

Transpuesta de la matriz de cofactores

Indica si un sistema de ecuaciones tiene solución única

Un sistema de ecuaciones tiene solución única cuando la matriz asociada al sistema es

Determinante de la submatriz de orden (n-1)x(n-1) de una matriz A de nxn obtenida suprimiendo el i-ésimo renglón y la j-ésima columna

Elegir...

Valores propios.

Elige la respuesta que completa cada enunciado:

1. Los valores propios de una matriz son [ ] del polinomio característico.
2. El [ ] se obtiene de $|A - I\lambda| = 0$.
3. Los valores propios de una matriz [ ] son todos positivos.
4. Una matriz es semejante a otra si tiene [ ]
5. Una matriz con la propiedad $Q = Q^t$ es [ ]

Evaluación diagnóstica de Métodos Numéricos 2

Elige la fórmula de la pendiente

Seleccione una:

○ a. $\lim_{x \to 0} \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}$

○ b. $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

○ c. $L_0 y(x_0) + L_1 y(x_1) + L_2 y(x_2)$

Sea el siguiente vector

$$x = \begin{bmatrix} -0.225 \\ 0.145 \\ 0.019 \\ -0.003 \end{bmatrix}$$

Calcular cada una de las normas vectoriales que se indican

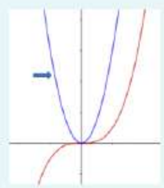
$\|x\|_2$ Elegir...

$\|x\|_\infty$

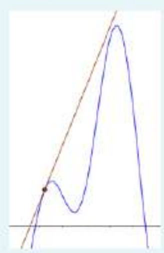
$\|x\|_1$

Elegir...
0.064
0.225
0.392
-0.064
0.268

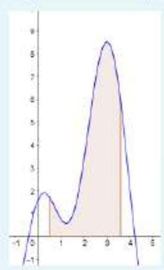
Asocia la gráfica con su concepto correspondiente



Elegir...

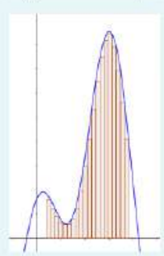


Elegir...



Elegir...

Elegir...
Derivada
Sumas de Riemman
Recta tangente
Integral definida



Elegir...

Medición del error

Dado que los métodos numéricos solo proporcionan [ ], el control y la medición del error representan un elemento crucial.

- Para detener un proceso iterativo se requiere medir el error en [ ] y compararlo con [ ] previamente establecidos.
- Cuando la solución es un vector, las iteraciones pueden realizarse de tal manera que TODAS las variables se calculan con los valores de la iteración anterior, lo que se conoce como iteraciones [ ] o de tal forma que la componente estimada (i) se emplea para obtener las siguientes componentes ($k = i + 1, i + 2, ..., n$), lo que se conoce como [ ].

Conceptos. Lee detenidamente y completa las afirmaciones

- La mayoría de los métodos numéricos son iterativos, es decir, [ ] la solución de un problema a través de una [ ] de estimaciones. Esta sucesión deberá ser [ ].
- La convergencia significa que la [ ] entre la solución del problema y cada una de las [ ] generadas por el método es [ ] para cada nueva iteración.
- Cuando hablamos de la solución de sistemas de ecuaciones, hablamos de [ ] y la convergencia se verifica con la [ ] del vector diferencia entre los vectores de la sucesión.
- La norma vectorial se emplea para calcular [ ] relativo o absoluto.
- Las iteraciones [ ] permiten calcular los componentes de la solución de forma separada.
- La técnica de iteraciones [ ] pretende acelerar la convergencia al emplear la obtención de cada nueva estimación en la iteración en la que fue calculado.
- La serie de Taylor se emplea para aproximar [ ] y para estimar [ ] de cualquier método que involucre funciones para su solución.

error	cerca	menor	diferencia	aproximan	estimaciones	vectores
sucesión	convergente	mayor	norma vectorial			
error	funciones	simultáneas	sucesivas			

Anexo C. Encuesta de percepción

Formulario de Google empleado para aplicar la encuesta de percepción. Es importante mencionar que este formulario sufrió ligeras modificaciones cada semestre, de acuerdo con lo que se determinaba era importante conocer.

Recursos de aprendizaje

Sobre los recursos de aprendizaje *

	Son muy útiles	Sirven como apoyo	Poco útiles	No son útiles
Presentaciones				
Vídeos de la clase				
Recursos en la web				

Sobre los aprendizajes en cada actividad *

	Comprensión de conceptos	Habilidad tecnológica	Habilidad procedimental	Abstracción	Lenguaje matemático
Ejercicios con Excel/Geogebra en clase					
Ejercicios de los reforzamientos					
Problemas de aplicación (portafolio)					
Programas					
Mapas conceptuales					

Sobre la plataforma. Elige el (los) enunciado(s) que mejor describa(n) tu opinión *

	Falso	Verdadero
El orden fue claro e intiutivo	○	◉
Los materiales fueron fáciles de localizar y acceder	○	◉
Fue útil como medio de comunicación	○	◉
Es un apoyo para tener los contenidos	○	◉
Fue útil para la planeación de tiempos	○	◉
Permite el autoaprendizaje	○	◉
Complementa lo visto en clase	○	◉
Cuando no pude asistir a clase, permitió mantenerme al corriente	○	◉
Sería suficiente para aprender por mi cuenta	○	◉

Sesiones de clase

¿Cuánto contribuyó cada actividad al aprendizaje del método? *

	Mucho	Poco	Nada
Explicación coloquial	○	○	○
Explicación formal	○	○	○
Ejemplo (computacional...	○	○	○
Revisar vídeo por mi cue...	○	○	○
Hacer el ejemplo por mi ...	○	○	○

Elementos de evaluación

Recuerda, la evaluación es para que estudiante y docente conozcan el nivel de aprendizaje

Elige los elementos de evaluación que consideres mejor contribuyeron a tu aprendizaje. *

- [ ] Reforzamientos de la plataforma
- [ ] Problemas para portafolio
- [ ] Programas y paquete
- [ ] Evaluaciones parciales
- [ ] Mapas conceptuales

De las siguientes opciones, elige qué cambiarías en la evaluación *

	Eliminar	Conservarlo	Darle más peso	Darle menor peso
Reforzamientos	○	◉	○	○
Ejercicios entregables	○	◉	○	○
Evaluaciones en línea	○	◉	○	○
Programas	○	◉	○	○
Portafolio	○	◉	○	○

Anexo D. Situaciones problema del sistema de prácticas

A continuación, se enuncian de manera general los problemas que integraron el sistema de prácticas de cada curso. En algunos casos, los problemas involucran tablas de valores, las cuales fueron omitidas por no ser el propósito de este apartado.

Métodos Numéricos 1

1. Métodos abiertos (bisección y posición falsa). Determinar el coeficiente de rozamiento c, necesario para que un paracaidista de masa $m = 71$ tenga una velocidad de $42\, m/s$, después de una caída libre de $t = 13s$. La aceleración de la gravedad es $9.8\, m/s^2$. El problema se resuelve determinando la raíz de la ecuación (2ª ley de Newton):

$$f(c) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}\right) - v$$

2. Método de Newton. La ecuación de estado de Van Der Waals para un gas ideal es

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

   Para el gas Cloruro de estaño $a = 27.27$ y $b = 0.1642$. Calcular el V a $68°C$ para una *P*resión de 50 *atm*. Elegir valor inicial y tolerancia a valorar con el error relativo porcentual.

3. Método de la secante. Determinar el número de Match crítico, con determinados parámetros, resolviendo la ecuación

$$f(M) = \frac{\left\{\left[\frac{2 + 0.4M^2}{2.4}\right]^{3.5} - 1\right\}}{0.7M^2 C_{pi}} - \left\{\sqrt{1 - M^2} + \frac{\left(\frac{M^2 C_{pi}}{2}\right)}{1 + \sqrt{1 - M^2}}\right\}^{-1} = 0$$

4. Método de Bairstow. Encontrar las raíces del siguiente polinomio mediante la obtención de los factores cuadráticos por el

$$P(x) = x^5 - 4.1x^4 + 3.35x^3 - 4.77.5x^2 - 2.6x + 46.5$$

5. Eliminación gaussiana. Determinar la cantidad de compuestos para lograr una mezcla para producir un conjunto de crema con determinadas restricciones de precios
6. Métodos iterativos (Jacobi, Gauss-Seidel y Relajación). Resolver un circuito eléctrico a partir de la Ley de Kirchhof.

7. Descomposición LU. Resolver el sistema de ecuaciones resultante de un ajuste de curvas: Matriz simétrica (mínimos cuadrados), matriz bandada (*spline* cúbico o diferenciación numérica).
8. Obtención de valores propios: Solución de ecuaciones diferenciales

Métodos Numéricos 2

1. Método del punto fijo. En un concurso de robótica se tienen que diseñar rutas para los robots sin que coincidan el un punto. El siguiente sistema de ecuaciones representa estas rutas, identifica el punto en que se intersecan para definir tiempos de salida.
$$f_1(x,y) = x^2 - y - 2 = 0$$
$$f_2(x,y) = 2xy - 3 = 0$$
2. Método de Newton-Raphson. Las siguientes ecuaciones modelan piezas que deben ensamblarse para construir una pieza mecánica. En los puntos de intersección deben realizarse las sujeciones. Emplear los métodos de Newton-Raphson y de Newton modificado para encontrar estos puntos con una precisión de cinco cifras. Elabora las gráficas para determinar los puntos iniciales ¿qué método consideras es más apropiado para su implementación computacional?
$$f_1(x,y,z) = x^2 + 2z^2 + y - 10 = 0$$
$$f_2(x,y,z) = 5x - 6y + z^2 = 0$$
$$f_3(x,y,z) = z - x^2 - y^2 = 0$$
3. Método de Broyden. Resolver el problema del ensamble de piezas evitando el uso de la matriz jacobiana. Determina qué método requiere mayor número de operaciones aritméticas y compara las estimaciones en función de número de iteraciones, error relativo.
4. Polinomio de Lagrange (2022-2). La siguiente tabla de valores contiene el número de divorcios anuales en el estado de Tlaxcala. Determinar el número de divorcios en el año que se solicita empleando polinomios de 2º y 3er grado ¿Cuál aproximación es más apropiada?
5. Polinomio de Diferencias Divididas (2022-2). En la tabla se presentan los decesos diarios por COVID durante el primer bimestre de 2022, sin embargo, faltan algunos

registros. Emplear el polinomio de interpolación de diferencias divididas para estimar estos valores.

6. Polinomio de Diferencias Divididas (2023-2). La siguiente tabla muestra el registro de número de casos anuales de VIH en México. Estimar el número de casos para el año 2017 y 2021 empleando un polinomio de Lagrange de 2º y 3er grado. Elaborar las gráficas correspondientes y elegir la mejor estimación.
7. Polinomio de diferencias de Newton (2022-2). En la tabla se muestran las presiones de vapor a diferentes temperaturas de 1-3 butadieno. Determinar una estimación para la presión del vapor a 36°C.
8. Polinomio de diferencias de Newton (2023-2). La tabla presenta el registro de robos en transporte público en el Estado de México en octubre de cada año. Determinar el número de robos en junio del 2021 y junio del 2022. Comparar resultados y elaborar conclusiones.
9. Polinomio de Hermite. En la tabla se tienen los registros de la distancia y la velocidad de un automóvil en distintos tiempos. Determinar la distancia en 20 seg.
10. Ajuste por *Spline* cúbico (2022-2). Colocar una figura en GeoGebra, definir nodos sobre el contorno y con *splines* cúbicos dibujar dicho contorno.
11. Ajuste por *Spline* cúbico (2023-2). En el mapa se indican las ciudades por las que debe pasar el Tren Maya, definir una posible ruta empleando trazadores cúbicos.

12. Ajuste por mínimos cuadrados (2022-2). Construir un modelo de contagios COVID por sexo y edad.
13. Ajuste por mínimos cuadrados (2023-2). Construir un modelo a partir de los datos de variación de las temperaturas globales y oceánica mundiales.

14. Integración numérica. A partir de una tabla de valores, determinar el consumo de energía eléctrica en el bajío durante un periodo de tiempo.

Anexo E. Tablas de verificación de la incorporación del EOS en el modelo

Verificación de la incorporación de la faceta epistémica

Categoría de análisis	Indicadores	Componente del modelo
Cobertura del método	Conceptos Procedimientos	Presentación teórico-práctica Autoevaluación
Reconocimiento y aplicación del método	Condiciones de aplicación	Presentación teórico-práctica Autoevaluación
Producción de representaciones	Registros de partida y auxiliares	Evaluación diagnóstica Presentación teórico-practica
	Representaciones producidas	Situación problema
Sistemas semióticos producidos	Conexiones realizadas entre registros y representaciones	Deducción del método con herramienta computacional
Distintas estrategias de solución	Estrategia y recursos	Presentación del método con problema básico Problema de autoevaluación Resolución de la situación problema con herramienta computacional
Uso de proposiciones/ definiciones	Pertinencia de los conceptos empleados	PTP-Conceptos matemáticos necesarios para el método
	Tareas retadoras	Problema de autoevaluación Situación problema
Argumentación	Calidad de las explicaciones y justificaciones	PTP- Explicación formal Situación problema Programación del método

Verificación de la incorporación de la configuración normativa

Normas	Indicador	Componente del modelo
Epistémicas	Contenidos	Programa de la asignatura Trayectoria didáctica
	Diversidad de representaciones	PTP-Explicación formal y deducción con apoyo computacional
Cognitivas	Apropiación de significados	Sistema de practicas Programación de métodos
	Evaluación sumativa	Autoevaluación Evaluación parcial
Interactivas	Clase de teoría y práctica Evaluación diversificada	Presentación teórico-práctica Autoevaluación, evaluación parcial
	Actividades colaborativas	Programación de los métodos Sistema de prácticas (portafolio electrónico) Trabajo grupal cada clase
Mediacionales	Aula virtual Medio de comunicación	Implementación en Moodle Mensajería de la plataforma
	Medio de interacción	Aula virtual, trabajo colaborativo en la nube
	Software	Zoom, Moodle, MS Excel, GeoGebra, MATLAB
	Tiempos	16 semanas de clases + 2 semanas de evaluación 2 sesiones de 2 horas a la semana

Normas	Indicador	Componente del modelo
Afectivas	Situaciones problema atractivas	Problemas contextualizados para portafolio electrónico
	Participación de los estudiantes en la comunicación de significados	Presentación de la resolución de problemas y programación de los métodos
Ecológicas	Problemas del entorno social, político y económico para el sistema de prácticas	Problemas contextualizados para portafolio electrónico

Verificación de la incorporación de la idoneidad didáctica

Criterio	Indicador	Componente del modelo
Cognitivo	Conocimientos previos	PTP-Recuperación y explicación de los conceptos necesarios para comprender el método.
	Aprendizaje	Autoevaluación: comprensión conceptual y proposicional Presentación del problema contextualizado Implementación computacional del método
	Evaluación para los distintos niveles	Actividad de clase Autoevaluación Evaluación parcial Sistema de prácticas
	Representaciones	Actividades de autoevaluación Evaluación parcial Implementación computacional del método
Epistémico	Situaciones problema	Problemas contextualizados Ejercicios en clase

Criterio	Indicador	Componente del modelo
	Lenguaje	Diferentes formas de expresión matemática en las distintas actividades
	Proposiciones y procedimientos	Claros, correctos y fundamentales proporcionando los materiales para consulta o análisis previo o posterior Los estudiantes generan o negocian proposiciones o procedimientos al implementar computacional-mente el método o resolver el problema contextualizado
	Argumentos	Explicaciones comprensibles en distintos niveles Se promueven que el estudiante argumente
	Relaciones	Los objetos matemáticos se relacionan, identifican y articulan con el apoyo de herramientas computacionales y de forma grupal
Interaccional	Docente-estudiante	El estudiante participa en la dinámica de clase, externa y resuelve dudas
	Entre estudiantes	Se favorece el diálogo entre estudiantes con argumentos matemáticos a través de actividades grupales en clase.
	Autonomía	Resolución de los problemas del sistema de prácticas y desarrollo del paquete de programas.
	Evaluación formativa	Actividades de autoevaluación.
Afectivo	Intereses	Implementación del método en MS Excel Problemas de interés para los estudiantes en su vida cotidiana y profesional.
	Actitudes	Varios intentos en las actividades de autoevaluación.

Criterio	Indicador	Componente del modelo
		Varias actividades sencillas que guían al aprendizaje.
	Emociones	Es posible corregir resultados proporcionando retroalimentación oportuna. Mostrar interés continuo en el aprendizaje de los estudiantes.
Ecológico	Currículum	Los contenidos, su implementación y evaluación cumplen con lo establecido en el programa de la asignatura y en el plan de estudios Las habilidades desarrolladas son útiles para otras materias.
	Utilidad socio-laboral	El planteamiento de problemas, desarrollar programas y aprender MS Excel contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
	Innovación	Empleo de herramientas computacionales que van surgiendo y que resultan útiles para el curso, como Python.
Mediacional	Software matemático	Recursos manipulativos y de visualización en GeoGebra, Mathematica o MS Excel para introducir conceptos, lenguajes y procedimientos.
	Aula virtual Moodle (SEA)	Recursos y actividades Horarios y tiempos Organización en el aula virtual