

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO**  
**CAMPUS SAN JUAN DEL RÍO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**ÀREA ELECTROMECAÁNICA**

**Diseño, análisis y fabricación de la estructura para auto de  
Mini Baja**

**TESIS**

**Que como parte de los requisitos para obtener el título de  
Ingeniero Electromecánico**

**Presenta:**

**Hernández García Osbaldo  
López Ugalde Gerardo**

**Dirigida por:**

**Dr. Aurelio Domínguez González**

**San Juan del Río, Qro., Octubre de 2007**

No. Adq. H73321

No. Título \_\_\_\_\_

Clas TS

629.26

H557d

## **RESUMEN**

La presente tesis desarrolla el diseño y construcción de un auto todo terreno para competencias de Mini Baja, por lo que se realizará un análisis de la estructura del auto por medio del Método de Elemento Finito. Con este fin, se desarrollará un programa en Matlab, el cual presenta por medio de gráficas los resultados de esfuerzos aplicados a diferentes nodos y elementos; dicha información ayudará a determinar en un futuro si la estructura soporta las pruebas o en tal caso es necesario reforzarla. Las condiciones requeridas para la construcción de la estructura son tomadas de la reglamentación de SAE, donde el objetivo es el diseño de una estructura que pueda soportar impactos o volcaduras, para proteger la integridad física del conductor. En base a la norma, se realiza un bosquejo del prototipo final y de esta manera seleccionar los materiales con los cuales se fabricará la estructura. Para dicho bosquejo, se usó el software Autocad, lo que permitió observar, determinar las dimensiones y forma exacta de cada una de las piezas para su posterior ensamble. Teniendo cada una de las dimensiones y formas de los elementos, se procedió al corte y adaptación de cada uno de ellos, utilizando las herramientas y equipos necesarios para posteriormente pasar al ensamble. Se eligió el Método de Elemento Finito para realizar el análisis de la estructura, usando elementos viga de Bernoulli, además se presenta una descripción de los métodos más usados como el de Newmark y Superposición. Para hacer el análisis, primero se establece la topología de la estructura donde se ubican los nodos y elementos correspondientes a la estructura y se designan las cargas principales correspondientes al peso de la transmisión, motor y conductor. Se anexan los planos correspondientes a la estructura, una vez que el prototipo es aprobado y listo para ser construido, la información permitirá ser utilizada para posteriores diseños e implantar nuevas mejoras sobre el prototipo ya establecido en la Universidad Autónoma de Querétaro.

## **AGRADECIMIENTOS**

En la realización de esta tesis se recopilaron todas las aportaciones y opiniones hechas por el Dr. Aurelio Domínguez Gonzáles (director de tesis) y los sinodales correspondientes de la Facultad de Ingeniería Electromecánica.

Se da un agradecimiento a todos los profesores de la Facultad de Ingeniería del área electromecánica por habernos impartido los conocimientos y experiencias de sus distintas disciplinas para fomentar el desarrollo de los conocimientos adquiridos durante el transcurso de la carrera, este agradecimiento se hace extensivo al personal administrativo y de servicios de esta institución y a nuestros compañeros de generación, que colaboraron en gran medida en nuestro desarrollo académico y personal.

Osbaldo: Agradezco a mis padres por el apoyo que me brindaron durante el transcurso de mi carrera, por haberme apoyado en cualquier situación e impulsarme día a día, hoy, en esta tesis, se refleja el esfuerzo mutuo. Le agradezco a mi compañero Gerardo por la dedicación y el empeño mostrado durante la realización de esta tesis, así como a mis compañeros, con quienes compartí experiencias diversas y aprendí a manejar y conciliar otros puntos de vista con los míos y de esta forma ampliar mis perspectivas para situaciones futuras.

Gerardo: Dedico esta tesis a mis padres y familiares por haberme brindado su apoyo incondicional, por todos sus consejos, y principalmente por ser la fortaleza que me mantuvo en pie para alcanzar este objetivo. Agradezco también a mi compañero de tesis, ya que gracias a su apoyo, a sus conocimientos y empeño este proyecto se pudo llevar a cabo, al igual que todos los proyectos a lo largo de la carrera.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>Introducción</b> .....	<b>9</b>
1.1	Antecedentes .....	9
1.2	Antecedentes de Mini Baja.....	12
1.3	Metodología.....	13
1.4	Objetivo del proyecto.....	14
1.5	El presente trabajo .....	14
<b>2</b>	<b>Método de elemento finito</b> .....	<b>16</b>
2.1	Obtención de las matrices de rigidez y masa para elementos viga.....	17
2.2	Elementos de marcos en el espacio. ....	28
2.3	Matriz de amortiguamiento .....	43
2.4	Solución de ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento .....	47
2.5	Respuesta en frecuencia debida a excitación armónica .....	47
2.6	Método de superposición .....	48
2.7	Método de Newmark .....	50
<b>3</b>	<b>Condiciones de diseño</b> .....	<b>55</b>
3.1	Normas de diseño y construcción .....	55
3.2	Herramientas de corte.....	62
3.3	Maquinas herramienta.....	63
3.4	Proceso de ensamble.....	64
<b>4</b>	<b>Diseño mecánico de la estructura</b> .....	<b>65</b>
4.1	Diseño particular .....	65
4.2	Diseño de la estructura .....	68
4.2.1	Ensamble de partes.....	69
<b>5</b>	<b>Análisis de la estructura por método de elemento finito</b> .....	<b>71</b>
5.1	Definición de la topología de la estructura .....	71
5.2	Definición de las cargas y condiciones frontera .....	79

5.3	Definición de las excitaciones .....	81
<b>6</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>83</b>
6.1	Respuesta de la estructura bajo excitación armónica .....	83
6.2	Respuesta de la estructura bajo excitación escalón .....	91
<b>7</b>	<b>Conclusiones .....</b>	<b>93</b>
	<b>Referencias .....</b>	<b>96</b>
	<b>Apéndice A .....</b>	<b>98</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 5.1 Conectividad de los elementos y propiedades .....	76
Tabla 5.2 Coordenadas de los elementos.....	78
Tabla 6.1 Ubicación de las cargas.....	84

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Dos nodos del elemento viga .....	19
Figura 2.2 Viga Euler -Bernoulli.....	19
Figura 2.3 Elementos hermitianos.....	21
Figura 2.4 Vector fuerza para varias cargas.....	24
Figura 2.5 Un elemento en el espacio.....	29
Figura 2.6 Grados de libertad locales y globales de un elemento en el espacio...	35
Figura 2.7 Coordenadas globales y locales.....	41
Figura 2.8 Transformación para un elemento vertical .....	42
Figura 3.1 Diseños permitidos del marco de respaldo. ....	57
Figura 3.2 Diseños permitidos y no permitidos del marco de respaldo. ....	57
Figura 3.3 Diseño permitido del marco superior.....	58
Figura 3.4 Marco inferior de la estructura.....	58
Figura 3.5 Elementos laterales. ....	59
Figura 3.6 Formas permitidas.....	59
Figura 3.7 Protecciones laterales y frontales.....	60
Figura 3.8 Protecciones laterales y frontales.....	60
Figura 3.9 Fijado del cinturón. ....	61
Figura 3.10 Separación de los cinturones. ....	62
Figura 4.1 Modelo final. ....	69
Figura 4.2 Marcos principales de la estructura.....	70
Figura 4.3 Estructura del carro todo terreno.....	71
Figura 5.1 Vista frontal .....	72
Figura 5.2 Vista posterior.....	73
Figura 5.3 Elementos de la parte central.....	74
Figura 5.4 Vista isométrica .....	75
Figura 6.1. Esfuerzo axial .....	85
Figura 6.2 Esfuerzo torsional.....	85
Figura 6.3 Esfuerzo flexionante.....	86
Figura 6.4 Esfuerzo axial.....	87



Figura 6.5 Esfuerzo torsional.....	87
Figura 6.6 Esfuerzo flexionante.....	88
Figura 6.7 Desplazamiento en el eje Z.....	89
Figura 6.8 Desplazamiento en el eje X.....	89
Figura 6.9 Desplazamiento en el eje Y.....	90
Figura 6.10 Respuesta en frecuencia.....	91
Figura 6.11 Respuesta de estabilidad para la aceleración del nodo 5.....	92
Figura 6.12 Respuesta de estabilidad para la velocidad del nodo 5.....	92
Figura 6.13 Respuesta de estabilidad para el desplazamiento del nodo 5.....	93

# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 Antecedentes

La SAE (Sociedad de Ingenieros Automotrices) es una organización no lucrativa manejada por los propios socios y conformada por casi 84,000 profesionistas de diversas disciplinas de la ingeniería en más de 97 países alrededor del mundo, que comparten información e intercambian las ideas para avanzar en la ingeniería de los sistemas de movilidad. La SAE se encarga del desarrollo de los estándares, los acontecimientos y la información técnica usada en el diseño, la construcción, mantenimiento de los vehículos automotores para el uso en tierra o mar, en el aire o espacio (SAE, 2005).

Tradicionalmente las grandes organizaciones han sido la sombra de personalidades muy destacadas. SAE es la excepción. SAE es el resultado de muchos miles de talentosos y entusiastas ingenieros. Nació como una respuesta lógica a las necesidades de estos tiempos (SAE, 2005)

A principios de 1900, había docenas de fabricantes de automóviles en los Estados Unidos, y muchos más alrededor del mundo. Muchas de estas compañías de los fabricantes y de las piezas del automóvil ensamblaron a grupos comerciales que resolvieron sus necesidades de promover su negocio y de levantar conciencia pública de esta nueva forma de transporte. Una necesidad de la protección de la patente, de problemas técnicos comunes del diseño, y del desarrollo de los estándares de la ingeniería emergía rápidamente, sin embargo, muchos ingenieros en el negocio del automóvil expresaron un deseo de tener "intercambio libre de ideas" para ampliar su base de conocimiento técnico individual (SAE, 2005).

Dos hombres que compartían la misma idea del concepto de automóvil en esa era: Meter Heldt y Horace Swetland, eran abogados incansables de los conceptos que formaron la creación de SAE. Heldt y Swetland escribieron una editorial en junio de 1902 en el cual decía, "existe una tendencia para los

fabricantes de automóviles que sigan ciertas normas para la construcción, las cuestiones técnicas se presentan constantemente y buscan la solución a través de la cooperación entre las industrias. Estas interrogantes se podrían ocupar lo mejor posible a través de una sociedad técnica (SAE, 2005).

Asimismo, Horace Swetland se convirtió en la voz del ingeniero del automóvil de esa época, y en un oficial de la SAE en sus orígenes. Para 1916 la sociedad del automóvil había crecido a 1,800 miembros. En la reunión anual que los representantes de la Sociedad Americana de Ingenieros Aeronáuticos, la Sociedad de Ingenieros del Tractor, así como representantes de la industria del canotaje vieron a la SAE como una institución para normar el descuido de estándares técnicos en sus industrias (SAE, 2005).

De esa reunión, en 1916, surgió una nueva organización con nuevos horizontes. Ésta debía ser una nueva sociedad que representara a ingenieros en todas las disciplinas. El miembro, Elmer Sperry de la SAE creó el término "automotor" que se deriva del griego auto (uno mismo), y del latín motivus (del movimiento). La sociedad de los ingenieros del automóvil se convirtió en la Sociedad de Ingenieros Automotores (SAE, 2005).

Charles Kettering, uno de los ingenieros automotores más famosos de la historia, patentó el arranque automático del automóvil en 1911. Kettering también presidió la SAE durante la primera guerra mundial, y gracias a su trabajo y al de su sucesor Charles Manly, para 1920 los miembros de la SAE sobrepasaban los 5,000 (SAE, 2005).

En 1947, la SAE eligió a su primer ingeniero del tractor como presidente C. Erwin Frudden. En la era de la posguerra, la reunión anual de la SAE se convirtió en un importante acontecimiento educativo ahora conocido como el Congreso Mundial de la SAE (SAE, 2005).

En 1960 el presidente de la SAE Harry Cheesbrough dijo, "la ingeniería automotora no sabe de ningún límite". Un viaje por Europa solidificó las relaciones comenzadas en los años 50 con una relación cooperativa en curso con FISITA (Federación Internacional de Ingenieros Automotrices). La SAE tiene hoy acuerdos cooperativos con organizaciones en Japón, Alemania, Reino Unido, Australia, y la India, por nombrar algunos (SAE, 2005).

Antes de 1980, la comunidad de miembros había crecido a más de 35,000. La celebración del 75 aniversario de la SAE trajo el reconocimiento de líderes políticos y de la industria alrededor del mundo. Durante los años 80 la SAE estableció una actividad de la publicación electrónica que ahora produce docenas de copias de CD-ROM interactivos y productos por internet, y ofrece miles de descargas de documentos técnicos estándares que permiten al usuario acceso casi instantáneo a la información técnica importante (SAE, 2005).

Para las dos décadas siguientes de la sociedad, la industria y los servicios individuales, llegaron a ser más grandes, más globales, más diversos, y más electrónicos. La SAE, ahora crea y maneja más estándares aeroespaciales y vehículos terrestres que cualquier otra entidad en el mundo (SAE, 2005).

Los Servicios internacionales de la SAE se constituyen de varias formas. A través de revistas mundialmente reconocidas como: *Automotive Engineering International*, *Aerospace Engineering* y *Off Highway Engineering* (Ingeniería Automotriz Internacional, Ingeniería Aeroespacial y la Vía de la Ingeniería). La SAE mantiene a la comunidad informada de los últimos progresos en el campo. La suscripción a una de estas revistas es una de las muchas ventajas de la membresía a la SAE. Las publicaciones técnicas de la SAE, históricas y estadísticas se distribuyen a los clientes en más de 65 países anualmente. Las capacidades del desarrollo del entrenamiento y profesional de la SAE se han ampliado en los últimos 20 años ahora producen más de 450 acontecimientos de desarrollo profesional cada año (SAE, 2005).

Durante los años 90, la SAE Internacional anunció la formación de la SAE Sección Brasil, sociedad conformada con 1,500 miembros y un Congreso mundial anual. La SAE abrió cuatro secciones geográficas en la India, y también estableció nuevas secciones en China, Rusia, Rumania y Egipto (SAE, 2005).

Una vez que los estudiantes atiendan a programas de la ingeniería del nivel universitario, la SAE presenta 12 diversas competencias colegiales del diseño (entre ellas Mini Baja), los conocimientos adquiridos en el aula de clases son cruciales para la acción de diseño, construcción y pruebas de funcionamiento de un vehículo en un ambiente competitivo. Las competencias colegiales del diseño de la SAE dibujan a más de 4,500 estudiantes a partir de 500 universidades en seis continentes (SAE, 2005).

Actualmente la SAE celebra su aniversario 100, que representa la sabiduría colectiva de casi 85,000 ingenieros, profesionistas técnicos, de académicos y representantes gubernamentales en 97 países alrededor del mundo (SAE, 2005).

## **1.2 Antecedentes de Mini Baja**

Mini Baja, es una competencia intercolegial de diseño automotriz para estudiantes, organizada por la SAE. Se originó en la Universidad del Sur de Carolina en 1976 y desde entonces este evento ha crecido y se convirtió en la contienda de diseño automotriz estudiantil más importante de Estados Unidos patrocinado por la SAE. Esta competencia tiene sede en un lugar diferente cada año estipulado con 5 meses de anticipación por el Consejo de la SAE.

Los alumnos tienen la oportunidad de diseñar, construir y probar un vehículo todo terreno, que tiene que soportar las pruebas a las que se le somete a lo largo de las diferentes competencias.

El motor, para este tipo de vehículos cuya capacidad es de 10 caballos de fuerza, es proporcionado por Briggs & Stratton, de tal manera que ningún competidor pueda tener alguna ventaja sobre los demás.

### **1.3 Metodología**

Para alcanzar el objetivo del proyecto, el diseño, análisis y construcción de un auto para la competencia Mini Baja, se requiere conocer las normas y restricciones que establece la SAE para todos los equipos que compiten, las cuales, hacen énfasis en la seguridad de las personas y conductor que estén en contacto con el vehículo.

Se realiza un bosquejo del prototipo, ajustándose a la capacidad de carga, dimensiones, forma y condiciones de seguridad que mencionan las reglas, para tener una idea general de lo que podría ser el prototipo final para la selección de los materiales que se utilizarán en la construcción.

Para dicho bosquejo, se hará uso del software Autocad, lo que permitirá observar, y su vez determinar las dimensiones y forma exacta de cada una de las piezas para su posterior ensamble. Con el primer anteproyecto, será posible la discusión con todos los miembros del equipo para implementar algunas mejoras en el diseño original. Como resultado de todas las opiniones de los involucrados, se tendrá el primer diseño de la estructura del auto.

Con el diseño propuesto, se procederá a la simulación en computadora para determinar la respuesta bajo diferentes cargas y excitaciones a las que estarán expuestos todos los elementos que conformaran el carro todo terreno, utilizando el Método de Elemento Finito (MEF), entre los resultados, se mostrarán gráficas de la respuesta en dominio de la frecuencia y el tiempo, que proporcionará la información del comportamiento del prototipo.

Para la fabricación de la estructura del auto de mini baja, es necesario realizar el corte y adaptación de cada una de las partes. Para esto, se emplean las herramientas de corte necesarias para dar las dimensiones tomadas de los planos. Para la unión de cada una de las partes, se requiere determinar que procesos de soldadura serán los adecuados aplicar en este caso, dadas las características del material designado para la construcción.

Una vez que se tengan cada una de las partes, se procederá al ensamble donde se utilizarán diferentes tipos de soldadura. Además, como parte de la estructura se colocará una lámina antiderrapante la cual estará en la parte inferior sosteniendo el asiento, así como pedales y al conductor, también se colocará una lámina de respaldo la cual evitará el contacto directo del calor producido por el motor, estas dos láminas deben estar soldadas utilizando el método de arco eléctrico.

#### **1.4 Objetivo del proyecto**

Diseñar, fabricar y analizar una estructura para un auto de Mini Baja, de manera que su desempeño sea confiable durante las pruebas a las que será sometido durante la competencia, que sea resistente a impactos, volcaduras y a las condiciones que pueda presentar el terreno donde se desenvolverá de manera satisfactoria y que brinde una seguridad al conductor.

Durante el desarrollo de la estructura, se aplicarán los conocimientos adquiridos durante la carrera de Ingeniero Electromecánico en un proyecto donde se requiere de ingenio, conocimiento práctico y teórico de lo que se pretende realizar. Este tipo de proyectos son de gran importancia ya que el estudiante debe realizar los cálculos correspondientes de ingeniería y así mismo aterrizar todos los conceptos de los cursos, además de poner toda su creatividad e ingenio para buscar soluciones a los problemas que se presentan.

#### **1.5 El presente trabajo**

La presente tesis, muestra el diseño, análisis y fabricación de un auto de Mini Baja. El cual se explica a continuación, en donde se plantea la forma de cómo fue realizado el prototipo y cuales fueron las bases para obtener el modelo deseado.

En el Capítulo 2, se presenta brevemente la metodología del Método de Elemento Finito que se utilizó para determinar la respuesta de estructura, y así determinar las matrices, dando a conocer los valores de las constantes de rigidez

y masa, para los elementos viga y una matriz que considera el amortiguamiento para la suspensión del carro.

En el capítulo 3, se establecen las condiciones de diseño y las reglas que se deben seguir para la fabricación del primer prototipo. Se da una explicación de cuales son las normas utilizadas con el fin de llegar a la estructura deseada. Aquí, se detallan las herramientas de corte que se utilizaron, la descripción de la máquina donde se realizó el proceso del formado de los tubos para el ensamble, así como, el proceso que se utilizó para la unión de los elementos.

En el Capítulo 4, se presenta la metodología para la realización de la estructura del carro todo terreno considerando los materiales, el peso, dimensiones, etc. Para que esta pudiera soportar todas las pruebas que se realizaran posteriormente durante la competencia.

En el Capítulo 5, se definen todos los datos requeridos para la simulación de la estructura la cual estará expuesta a diferentes tipos de excitación. Con este fin se desarrolló un programa en Matlab para observar gráficamente las respuestas obtenidas.

Los resultados se muestran en el Capítulo 6 de manera gráfica y numérica para diferentes tipos de excitación tales como escalón y armónica, a diferentes frecuencias y amplitudes, donde se demostrará que los programas desarrollados funcionan correctamente y se pueden determinar los esfuerzos de los elementos. Asimismo, calcular las frecuencias naturales y los modos de vibración. Los programas serán de utilidad, para que en posteriores diseños, estos resistan las condiciones extremas a las que se someten, pero fabricándose de tal manera que sean más ligeros.

En el capítulo 7, se presentan las conclusiones a las que se llegó después de haber desarrollado los programas para el análisis, donde la principal aportación, es que en comparación con otros programas comerciales, en los que se



desarrollaron, es posible introducir las señales, como respuesta de las condiciones del terreno.

## **2 MÉTODO DE ELEMENTO FINITO**

La finalidad del método de elemento finito es simplificar la solución de los problemas complicados, encontrando una solución lo mas cercana posible a la solución exacta, debido a que las herramientas matemáticas existentes, no son suficientes para encontrar la solución exacta de muchos problemas. Así que, en ausencia de otro método convencional se prefiere utilizar MEF, incluso, en el MEF, es posible mejorar la solución aproximada mediante herramientas computacionales. En el MEF se llega a la solución considerando la suma de "subregiones" en las cuales se ha dividido la estructura. Es difícil encontrar la respuesta exacta de una maquina o estructura sometida a esfuerzos o desplazamientos, de tal manera que se hace una división en muchas partes a las cuales se les llama elementos finitos, para cada pieza o elemento se supone una solución y se determinan todas las condiciones de equilibrio de la estructura (Rao, 1999).

En el Método de Elemento Finito la continuidad de un cuerpo o materia ya sea sólido, líquido o gaseoso es representada como un armado de subdivisiones llamados elementos finitos. Estos elementos, se consideran que están interconectados en puntos específicos llamados nodos o puntos nodales. Estos nodos usualmente se encuentran en los límites del elemento donde se considera que los elementos adyacentes están conectados. Desde la variación actual del campo de las variables (desplazamiento, esfuerzo, temperatura, presión, velocidad) dentro de la continuidad es desconocido, asumimos que la variación del campo de las variables dentro del elemento finito puede ser aproximada por una simple función. Estas funciones de aproximación (también conocidas como modelos de interpolación) están definidas en términos de los valores de los campos de variables en los nodos. Cuando las ecuaciones de campo (tales como ecuaciones de equilibrio) para la continuidad completas son escritas las nuevas variables serán los valores nodales del campo de variables. Resolviendo las

ecuaciones de campo, que se encuentran generalmente en forma de matrices, los valores nodales para el campo de variables serán conocidos. Una vez que estos se conocen, las funciones de aproximación definirán la variable de campo a través de los elementos de armado. La solución general para problemas utilizando el MEF, el proceso siempre se realiza paso a paso. Tomando como referencia la estructura de forma estática se realiza con los siguientes pasos: 1) discretización de la estructura, 2) selección de una correcta interpolación o modelo de desplazamiento, 3) derivación de los elementos de las matrices de rigidez y vectores de carga, 4) ensamble de las ecuaciones de los elementos para obtener las ecuaciones globales de equilibrio 5) solución para los desplazamientos nodales desconocidos, 6) calculo de los esfuerzos y deformaciones. La teoría del método de elemento finito, es aplicable a una gran variedad de problemas de ingeniería tales como: estructuras de ingeniería civil, estructuras aeroespaciales, conducción térmica, problemas geomecánicos, ingeniería biomédica, hidrodinámica, ingeniería nuclear, diseño mecánico, maquinas eléctricas y electromagnéticas (Rao, 1999).

## 2.1 Obtención de las matrices de rigidez y masa para elementos viga.

Con el objetivo de obtener las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, se estudió la formulación de la viga Euler-Bernoulli, ya que los elementos están sujetos por medio de soldadura. La ecuación (2.1), representa la flexión para vigas de Euler-Bernoulli (Kwong y Hyochonon, 1997; Rao, 1999; Reddy, 2006)

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = q(x,t) \quad (2.1)$$

Donde,  $v(x,t)$  es el desplazamiento transversal de la viga,  $\rho$  es la densidad de masa por volumen,  $EI$  es la rigidez de la viga,  $q(x,t)$  es la carga externa aplicada y  $t$  y  $x$  indican el tiempo y el eje en el espacio, a lo largo del eje de la viga. Se aplicó uno de los métodos residuales, el método de Galerkin, para

la ecuación de la viga, ecuación (2.1), y se realizó una formulación por elemento finito y las correspondientes ecuaciones matriciales (Kwong y Hyochonon, 1997; Rao, 1999; Domínguez González, 2005.).

Aplicando el método residual en la ecuación (2.1) da como resultado la ecuación (2.2) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$I = \int \left[ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - q \right] w dx = 0 \quad (2.2)$$

Donde  $I$  es la longitud de la viga y  $w$  es una función de prueba. La formulación de la ecuación (2.2) es determinada integrando por partes dos veces el segundo término de la ecuación. La discretización de la viga en un número de elementos finitos esta dada por la ecuación (2.3) (Zienkiewicz y Morgan, 1983; Kwong y Hyochonon, 1997):

$$I = \sum_{i=1}^n \left[ \int_r \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dx + \int_r EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int_r q w dx \right] + \left[ V w - M \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^l = 0 \quad (2.3)$$

Donde  $V = EI(\partial^3 v / \partial x^3)$  es la fuerza cortante,  $M = EI(\partial^2 v / \partial x^2)$  es el momento flexionante,  $\Omega^e$  dominio del elemento finito y  $n$  es el número de elementos de la viga (Huebner et al., 1995; Rao, 1999; Domínguez González, 2005).

Se consideraron funciones de forma para interpolación espacial de la deflexión transversal,  $v$ , en términos de las variables nodales. Para este fin, se utilizó un elemento que tiene dos nodos, uno en cada extremo, como se muestra en la Figura 2.1. La deformación de una viga debe tener una pendiente continua, como también una deflexión continua, en cualquiera de los dos elementos adyacentes a la viga. Para satisfacer esta continuidad, cada nodo tiene ambas: deflexión,  $v_i$  y pendiente,  $\theta_i$ , como variables del nodo. En este caso, cualquiera

de las dos vigas adyacentes tiene una deflexión y pendiente común en el nodo (Kwong y Hyochonon, 1997; Hutton, 2004).

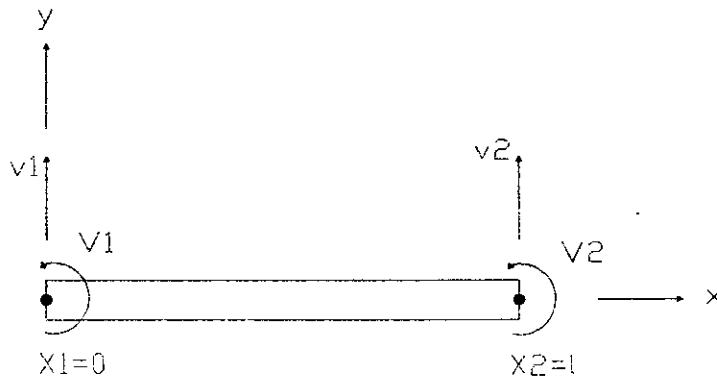


Figura 2.1 Dos nodos del elemento viga

Esto satisface la continuidad de deflexión y pendiente.

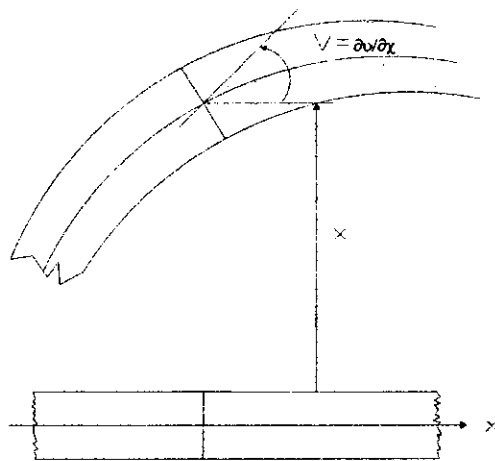


Figura 2.2 Viga Euler -Bernoulli

La ecuación de Euler-Bernoulli para vigas, esta basada en la suposición de que el plano normal al eje neutro antes de la deformación permanece normal al eje neutro después de la deformación, ver Figura 2.2. Esta suposición denota que  $\theta = dv/dx$ , por lo que la pendiente es la primera derivada de la deflexión en términos de  $x$ . Porque hay cuatro variables nodales para un elemento viga,

entonces, tenemos una función cúbica polinomial para  $v(x)$  (Kwong y Hyochonon, 1997; Hutton, 2004; Reddy, 2006):

$$v(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (2.4)$$

De la suposición para la ecuación de Euler-Bernoulli, la pendiente es calculada de la ecuación (2.4), por lo que da como resultado la ecuación (2.5) (Kwong y Hyochonon, 1997).

$$\theta(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 \quad (2.5)$$

La evaluación de la deflexión y de la pendiente que se produce para ambos nodos son las ecuaciones (2.6) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$\begin{aligned} v(0) &= c_0 = v_1 \\ \theta(0) &= c_1 = \theta_1 \\ v(l) &= c_0 + c_1l + c_2l^2 + c_3l^3 = v_2 \\ \theta(l) &= c_1 + 2c_2l + 3c_3l^2 = \theta_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Resolviendo la ecuación (2.6) para  $c_i$  en términos de las variables nodales  $v_i$  y  $\theta_i$  y sustituyendo los resultados en la ecuación (2.4) tenemos la ecuación (2.7) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$v(x) = H_1(x)v_1 + H_2(x)\theta_1 + H_3(x)v_2 + H_4(x)\theta_2 \quad (2.7)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 H_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\
 H_2(x) &= x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\
 H_3(x) &= \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\
 H_4(x) &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Las funciones  $H_i(x)$  son llamadas funciones hermitianas de forma y se muestran en la Figura 2.3. Las funciones hermitianas de la forma son del tipo  $C^1$ , lo que significa, que hacen a  $v$  y  $\partial v / \partial x$  continuas entre los dos elementos contiguos (Kwong y Hyochonon, 1997).

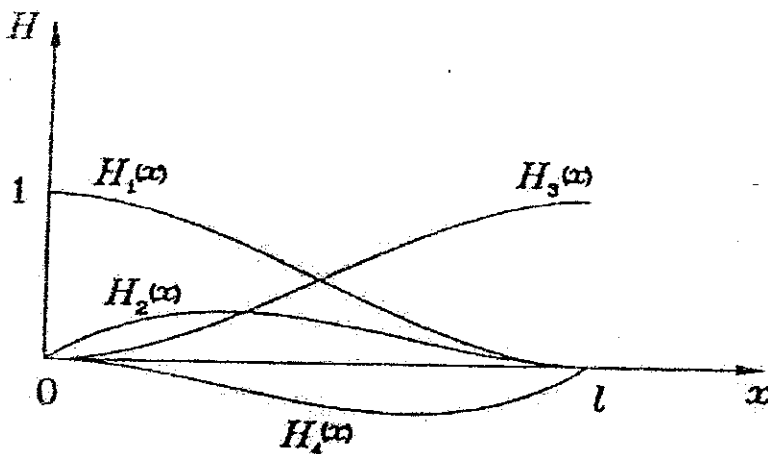


Figura 2.3 Elementos hermitianos

La aplicación de las funciones hermitianas de forma y el método de Galerkin en el segundo término de la ecuación (2.3) da por resultado la matriz de rigidez del elemento viga.

Esto da como resultado la ecuación (2.9) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$[K^e] = \int_0^l [B]^T EI [B] dx
 \tag{2.9}$$

Donde:

$$[B] = \{H_1^* H_2^* H_3^* H_4^*\} \quad (2.10)$$

Y los correspondientes grados de libertad del elemento son  $\{d^e\} = \{v_1 \theta_1 v_2 \theta_2\}^T$ . En la ecuación (2.10) la doble prima denota la segunda derivada de la función y  $l$  en la ecuación (2.9) es la longitud del elemento viga. Suponiendo que la rigidez  $EI$  de la viga es constante en elemento, la matriz de rigidez del elemento esta dada por la ecuación (2.11) (Kwong y Hyochonon, 1997; Rao, 1999; Hutton, 2004):

$$[K^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

En el caso de que la rigidez de la viga no sea constante dentro del elemento viga, la integral en la ecuación (2.9), debe ser evaluada incluyendo  $EI$  como una función de  $x$ . Si el elemento viga es relativamente corto, por ejemplo en un engrane refinado, el valor medio de  $EI$  para el elemento puede ser usado con la ecuación (2.11) para una aproximación razonable (Kwong y Hyochonon, 1997).

El tercer término de la ecuación (2.3), es el resultado de un vector de fuerza. Para una carga distribuida, es necesario calcular la ecuación (2.12) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$\{F^e\} = \int_b q(x) \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} dx \quad (2.12)$$

En donde  $\{F^e\}$  es el vector de fuerza. Si se tiene una carga uniforme  $q_0$  en el elemento, el vector de fuerzas se convierte en la ecuación (2.13): (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$\{F^e\} = q_0 \int_b \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} dx = \frac{q_0}{12} \begin{Bmatrix} 6l \\ l^2 \\ 6l \\ -l^2 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Otro tipo de carga común, es una fuerza concentrada en un elemento viga que se muestra en la Figura 2.4. En este caso, el vector de fuerza esta dado por la ecuación (2.14) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$\{F^e\} = \int_b P_0 \delta(x - x_0) \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} dx = P_0 \begin{Bmatrix} H_1(x_0) \\ H_2(x_0) \\ H_3(x_0) \\ H_4(x_0) \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Donde  $P_0$  es la carga concentrada aplicada cuando  $x = x_0$  y  $\delta(x - x_0)$  es la función delta de Dirac. El vector de fuerza para otros casos es resumido en la Figura 2.4 (Kwong y Hyochonon, 1997).



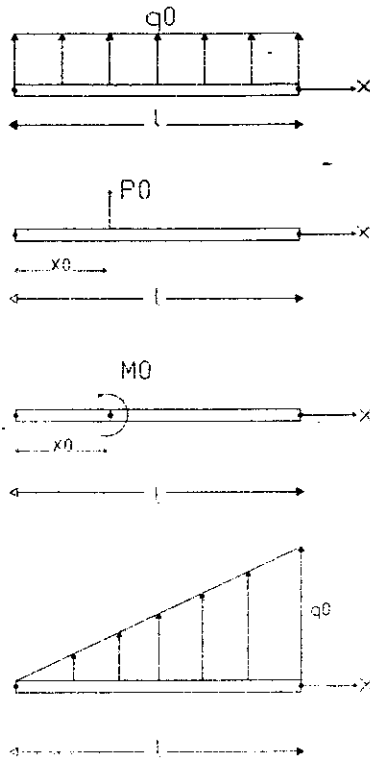


Figura 2.4 Vector fuerza para varias cargas

El último término de la ecuación (2.3) son las condiciones de frontera de la fuerza cortante, y el momento flexionante en los puntos límite,  $x = x_0$  y  $x = l$ , de la viga. Si las condiciones de frontera son desconocidas, la fuerza cortante o momento flexionante son incluidas en el vector fuerza del sistema en los dos nodos de la frontera. De modo que, la deflexión y la pendiente son conocidas como condiciones frontera geométricas para este caso.

Para análisis estático de vigas, el primer término de la ecuación (2.3), es la fuerza de inercia, que es despreciado (Kwong y Hyochonon, 1997).

Por lo tanto, acoplado las matrices de rigidez y vectores, resulta el sistema matricial de la ecuación (2.15) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (2.15)$$

Dadas las condiciones frontera se aplica la ecuación (2.15) y se resuelven las ecuaciones matriciales para las variables nodales desconocidas, deflexiones y pendientes.

Para análisis dinámico de vigas, la fuerza de inercia necesita ser incluida. En este caso, la deflexión transversal es una función de  $x$  y  $t$ . La deflexión es interpolada en un elemento viga, como se da en la ecuación (2.16) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$v(x,t) = H_1(x)v_1(t) + H_2(x)\theta_1(t) + H_3(x)v_2(t) + H_4(x)\theta_2(t) \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16), es la función que se usa para interpolar la deflexión en el espacio y las variables nodales son funciones del tiempo. El primer término de la ecuación (2.3) se transforma en la ecuación (2.17) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$\int \rho [H]^T [H] dx \{d\} \quad (2.17)$$

Donde:

$$[H] = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4] \quad (2.18)$$

De la ecuación (2.17) la matriz de masa del elemento es:

$$\begin{aligned}
 [M^e] &= \int \rho A [H]^T [H] dx \\
 &= \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

La matriz de masa de la ecuación (2.19) es llamada matriz de masa consistente. Adicionando los componentes en la matriz de masa, que son asociados sólo con los desplazamientos de las variables nodales (esto es  $v_1$  y  $v_2$ ), da  $\rho A l$ , la masa total del elemento viga. El elemento viga conserva la masa en términos de los grados de libertad traslacionales.

En análisis dinámico, la matriz de masa es requerida para ser invertida. De este modo, una matriz de masa diagonalizada tiene una ventaja de cálculo, lo que da como resultado la ecuación (2.20) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$[M^e] = \frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

La matriz de la ecuación (2.20) es llamada matriz de masa concentrada. Esta matriz tiene la mitad de elementos de masa de cada uno de los grados de libertad. Ambas matrices conservan su masa asociada con los grados de libertad traslacionales.

Otra manera de diagonalizar la matriz de masa constante es:

Sumar los componentes de la matriz de masa constante asociada con los grados de libertad, esto es, el primer y tercer componentes de la diagonal del elemento viga presente.

Dividir la diagonal por  $\alpha$  y también multiplicarla por la masa total del elemento.

Poner todos los demás elementos de la matriz en cero.

Aplicando el mismo procedimiento para la ecuación (2.19) se puede obtener la ecuación (2.21):

$$\frac{\rho A l}{78} \begin{bmatrix} 39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l^2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Esta matriz es llamada matriz diagonal de masa y también conserva la masa para los grados de libertad (Kwong y Hyochonon, 1997).

La matriz de rigidez del elemento no cambia para análisis dinámico, porque la forma de la función es la misma para ambos análisis, estático y dinámico. Sin embargo, la fuerza puede variar en función del tiempo. El vector de fuerza para análisis dinámico es (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$\{F^e(t)\} = \int q(x,t)[H]^T dx \quad (2.22)$$

De modo que, la ecuación (2.22) es diferente de la ecuación (2.12). Como resultado, la ecuación matricial para el análisis dinámico de un elemento viga después de ser acoplado con las matrices y vectores da como resultado la ecuación (2.23) (Kwong y Hyochonon, 1997):

$$[M]\{d\} + [K]\{d\} = \{F(t)\} \quad (2.23)$$

## 2.2 Elementos de marcos en el espacio.

Un elemento de un marco en el espacio es una barra de sección transversal uniforme, que es capaz de resistir esfuerzos axiales, momentos flexionantes en los dos ejes principales del plano de sección transversal y momentos en su eje centroidal. Los grados de libertad correspondientes se muestran en la Figura 2.5 (a). Puede apreciarse que la matriz de rigidez del elemento de un marco será del orden de  $12 \times 12$ . Si el sistema local de ejes coordenados  $(xyz)$ , se elige para que los ejes coincidan con los ejes de sección transversal, es posible construir dos submatrices de  $2 \times 2$  y  $4 \times 4$ . Los desplazamientos axiales  $q_1$  y  $q_7$  dependen solo de las fuerzas axiales, y los desplazamientos torsionales  $q_4$  y  $q_{10}$  dependen de los momentos torsionales. De tal manera que el sistema arbitrario de ejes  $xyz$ , los desplazamientos flexionantes en el plano  $xy$ , denotados por:  $q_2, q_6, q_8$  y  $q_{12}$  no solo dependen de los esfuerzos flexionantes que actúan en ese plano (esto es, las fuerzas cortantes actúan en la dirección  $y$  y los momentos flexionantes actúan en el plano  $xy$ ), pero también los esfuerzos flexionantes actúan en el plano  $xz$ . De tal modo que si los planos  $xy$  y  $xz$  coinciden con los ejes principales de sección transversal, los desplazamientos flexionantes y las fuerzas en los dos planos pueden ser consideradas independientes una de la otra (Rao, 1999; Hutton, 2004).

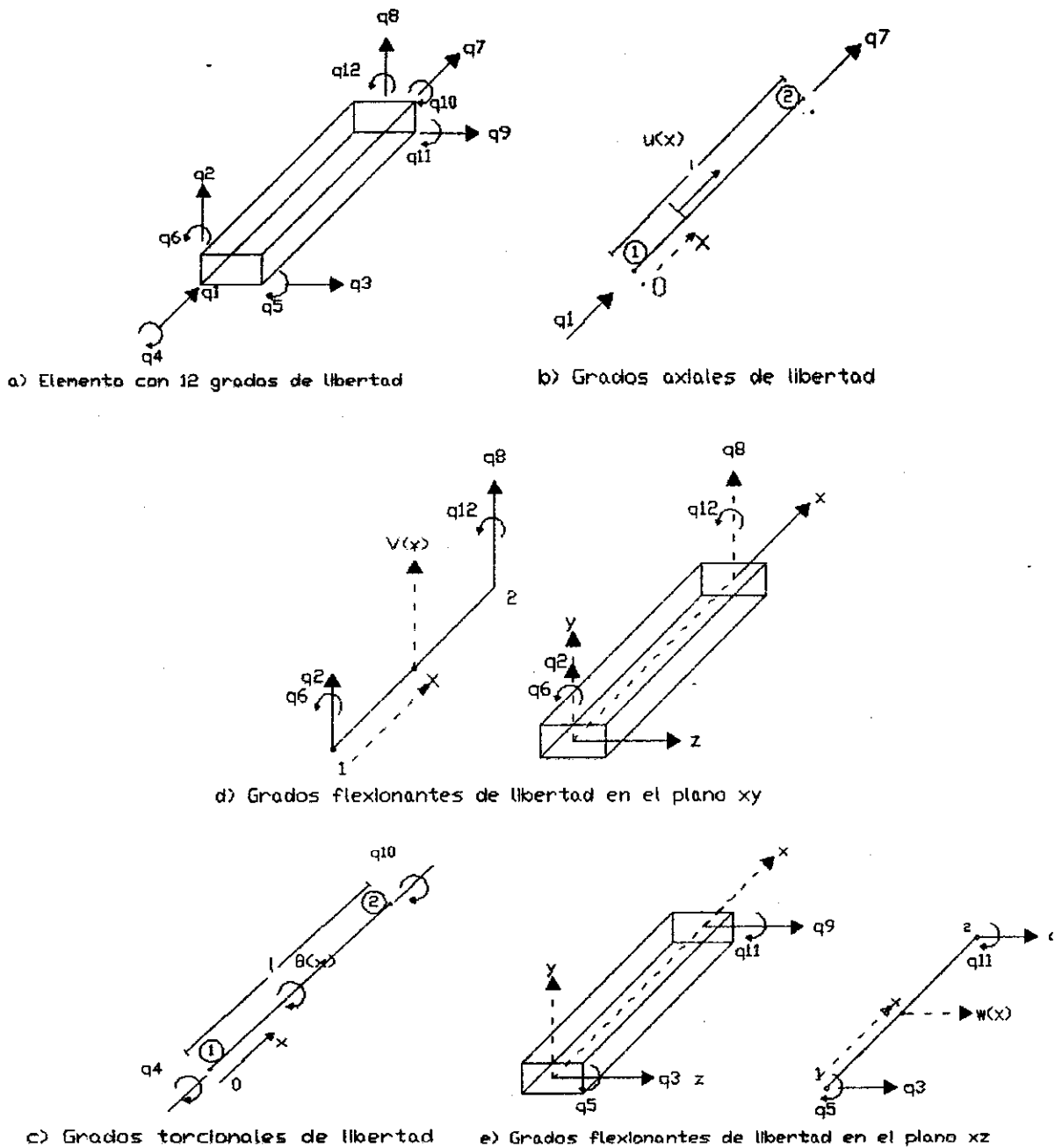


Figura 2.5 Un elemento en el espacio

Se elige como sistema coordenado local  $xyz$  para que coincida con los ejes principales de sección transversal, tomando como eje centroidal del elemento al eje  $x$ . De esta manera los desplazamientos se separarán en cuatro

grupos que son independientes unos de otros. Primero se consideran las matrices de rigidez correspondientes a los desplazamientos independientes y entonces se obtiene la matriz de rigidez total de los elementos por superposición.

Desplazamientos axiales: los desplazamientos nodales son  $q_1$  y  $q_7$ , que se muestran en la Figura 2.5 (b) y un desplazamiento lineal, modelando así, la matriz de rigidez (correspondiente al desplazamiento axial) se escribe como la ecuación (2.24) (Rao, 1999; Domínguez González, 2005):

$$[K^e] = \int_{\omega} [B]^T [D] [B] dV = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_7 \end{matrix} \quad (2.24)$$

Donde  $A$ ,  $E$  y  $l$  son el área de sección transversal, el módulo de Young y la longitud del elemento, respectivamente. Note que los elementos de la matriz  $[K^e]$ , están identificados por los grados de libertad indicados en la parte superior y derecha de la matriz en la ecuación (2.24).

Desplazamientos torsionales: aquí los grados de libertad (desplazamientos torsionales) están denotados por  $q_4$  y  $q_{10}$ . Suponiendo una variación lineal del desplazamiento torsional o ángulo de torsión, el modelo del desplazamiento puede ser expresado por la ecuación (2.25) (Rao, 1999):

$$\theta(x) = [N] \vec{q}_t \quad (2.25)$$

Donde  $[N]$  y  $\vec{q}_t$  están expresadas por las ecuaciones (2.26) y (2.27).

$$[N] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\vec{q} = \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_{10} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Suponiendo que la sección transversal del elemento es circular, el esfuerzo cortante inducido en el elemento puede expresarse por la ecuación (2.28) (Rao, 1999):

$$\varepsilon_{\alpha} = r \frac{d\theta}{dx} \quad (2.28)$$

Donde  $r$  es la distancia de la fibra a partir del eje centroidal de elemento.

De tal manera, que la relación de desplazamiento del esfuerzo puede ser expresada como la ecuación (2.29) (Rao, 1999):

$$\vec{\varepsilon} = [B] \vec{q}, \quad (2.29)$$

Donde

$$\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\alpha}\} \text{ Y } [B] = \begin{bmatrix} -r & r \\ l & l \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

De la ley de Hooke, la relación de carga de esfuerzos puede ser expresada como la ecuación (2.31) (Kwong y Hyochonon, 1997; Rao, 1999).

$$\vec{\sigma} = [D] \vec{\varepsilon} \quad (2.31)$$

Donde

$$\vec{\sigma} = \{\sigma_{\alpha}\}, [D] = [G] \quad (2.32)$$



Y  $G$  es el módulo de elasticidad en cortante. La matriz de rigidez del elemento correspondiente a los grados de libertad del desplazamiento torsional se determina como se expresa la ecuación (2.32) (Rao, 1999; Domínguez González, 2005):

$$[K^e] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_7 \end{matrix} = G \int_{x=0}^l dx \int_A r^2 dA \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Ya que  $\int r^2 dA = J =$  momento polar de inercia de la sección transversal que puede ser reescrito por la ecuación (2.34) (Rao, 1999):

$$[K^e] = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_9 \\ q_{10} \end{matrix} \quad (2.34)$$

El valor  $\frac{GJ}{l}$  es definido como rigidez torsional del elemento.

Desplazamientos flexionantes en el plano  $xy$ : los cuatro grados de libertad son  $q_2, q_6, q_8$  y  $q_{12}$  que se muestran en la Figura 2.5 (d) y la matriz de rigidez correspondiente es expresada por la ecuación (2.35) (Rao, 1999; Nelly, 2000):

$$[k_{xy}^{(e)}] = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} q_2 & q_6 & q_8 & q_{12} \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{12} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Donde  $I_z = \iint y^2 dA$  es el momento de inercia del área de sección transversal en el eje  $z$  (Huebner et al., 1995; Rao, 1999. Domínguez González, 2005).

Desplazamientos flexionantes del eje  $xz$ : aquí, la flexión de los elementos se presenta en el plano  $xz$  en lugar del plano  $xy$ . De tal modo que tenemos los grados de libertad denotados por  $q_3, q_5, q_9$  y  $q_{11}$  ver Figura 2.5 (e) en lugar de  $q_2, q_6, q_8$  y  $q_{12}$  como se muestra en la Figura 2.5 (d) respectivamente. Para proceder como en el caso que se presenta flexionante en el plano  $xy$ , se puede determinar la matriz de rigidez como se muestra en la ecuación (2.36) (Huebner et al., 1995; Rao, 1999; Domínguez González, 2005):

$$[k_{xz}^{(e)}] = \frac{EI_{yy}}{l^3} \begin{bmatrix} q_3 & q_5 & q_9 & q_{11} \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_5 \\ q_9 \\ q_{11} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Donde  $I_{xx}$  es el momento de inercia de la sección transversal del elemento en el eje  $y$ .

**Matriz de rigidez total:** las matrices de rigidez determinadas a través de los desplazamientos independientes pueden ahora ser recopiladas para obtener la matriz de rigidez total de los elementos como las ecuaciones (2.37), (2.38) y (2.39) (Rao, 1999; Nelly, 2000):

$$[k_{xy}^{(e)}] = \frac{EI_{zz}}{l^3} \begin{bmatrix} q_2 & q_6 & q_8 & q_{12} \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_2 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{12} \end{matrix} \quad (2.37)$$

$$[k_{xy}^{(e)}] = \frac{EI_{zz}}{l^3} \begin{bmatrix} q_2 & q_6 & q_8 & q_{12} \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q_2 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{12} \end{matrix} \quad (2.38)$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_9 & q_{10} & q_{11} & q_{12} \\ EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & 12EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & 6EI_{zz} & l & -12EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & 6EI_{zz} \\ 0 & l^3 & 0 & 0 & 0 & l^2 & 0 & l^3 & 0 & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 0 & 12EI_{yy} & 0 & -6EI_{yy} & 0 & 0 & 0 & -12EI_{yy} & 0 & -6EI_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & l^3 & 0 & l^2 & 0 & 0 & 0 & l^3 & 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_{yy} & 0 & EI_{yy} & 0 & 0 & 0 & 6EI_{yy} & 0 & 2EI_{yy} & 0 \\ 0 & 6EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & 4EI_{zz} & 0 & -6EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & 2EI_{zz} \\ l & l^2 & 0 & 0 & 0 & l & 0 & l^2 & 0 & 0 & 0 & l \\ -EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & -12EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & -6EI_{zz} & l & 12EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & -6EI_{zz} \\ 0 & l^3 & 0 & 0 & 0 & l^2 & 0 & l^3 & 0 & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 0 & -12EI_{yy} & 0 & 6EI_{yy} & 0 & 0 & 0 & 12EI_{yy} & 0 & 6EI_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & l^3 & 0 & l^2 & 0 & 0 & 0 & l^3 & 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GJ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_{yy} & 0 & 2EI_{yy} & 0 & 0 & 0 & 6EI_{yy} & 0 & 4EI_{yy} & 0 \\ 0 & 6EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & 2EI_{zz} & 0 & -6EI_{zz} & 0 & 0 & 0 & 4EI_{zz} \\ l & l^2 & 0 & 0 & 0 & l & 0 & l^2 & 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{matrix} \quad (2.39)$$

Matriz de rigidez global: puede verse que la matriz de rigidez de 12 x 12 dada en la ecuación (2.12) es con respecto al sistema de ejes coordenados local. De modo que los desplazamientos nodales en los sistemas coordenados, global y local, son de la misma familia que la relación de la Figura 2.6 (Rao, 1999).

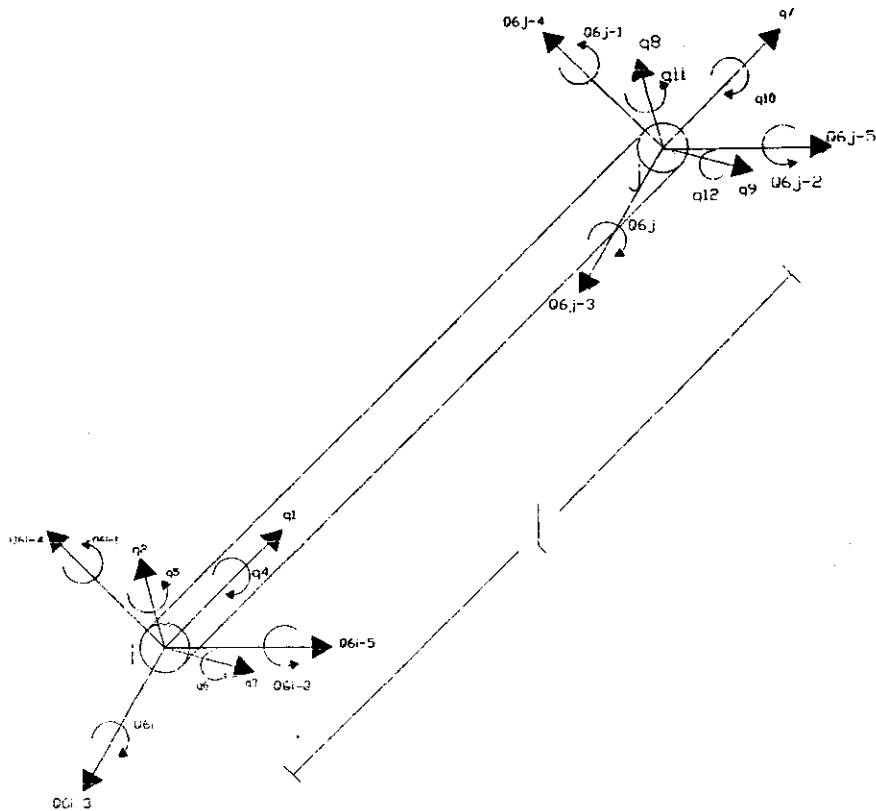


Figura 2.6 Grados de libertad locales y globales de un elemento en el espacio

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{6i-5} \\ Q_{6i-4} \\ Q_{6i-3} \\ Q_{6i-2} \\ Q_{6i-1} \\ Q_{6i} \\ Q_{6j-5} \\ Q_{6j-4} \\ Q_{6j-3} \\ Q_{6j-2} \\ Q_{6j-1} \\ Q_{6j} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

La transformación de la matriz,  $[\lambda]$ , esta identificada por la ecuación (2.41):

$$[\lambda]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\lambda] \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Donde

$$[\lambda]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \\ l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Y

$$[0]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Aquí  $l_{ox}, m_{ox}$  y  $n_{ox}$ , denotan la dirección de los cosenos del eje  $x$  (línea  $ij$  de la Figura 2.6);  $l_{oy}, m_{oy}$  y  $n_{oy}$  representa la dirección de los cosenos del eje  $y$ ; y  $l_{oz}, m_{oz}$  y  $n_{oz}$  indican la dirección de los cosenos del eje  $z$  con respecto a los ejes globales  $XYZ$  (Rao, 1999).

$$l_{ox} = \frac{X_j - X_i}{l} ; \quad m_{ox} = \frac{Y_j - Y_i}{l} ; \quad n_{ox} = \frac{Z_j - Z_i}{l} \quad (2.44)$$

Donde  $X_k, Y_k$  y  $Z_k$  indican las coordenadas del nodo  $k(k=ij)$  en el sistema global. Sin embargo, el cálculo de la dirección de los cosenos de los ejes  $y$  y  $zm$ , requiere un esfuerzo especial. Finalmente la matriz de rigidez del

elemento, con referencia al eje coordenado global, se obtiene por la ecuación (2.45) (Rao, 1999):

$$[K^{(e)}] = [\lambda]^T [k^{(e)}] [\lambda] \quad (2.45)$$

Transformación de la matriz: se determinó la transformación de la matriz  $[\lambda]$  entre los sistemas coordenados global y local en dos etapas. En el primer paso, se calculó la transformación de la matriz  $[\lambda_1]$  entre las coordenadas globales  $XYZ$  y las coordenadas  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$  suponiendo que el eje  $z$  es paralelo al plano  $XZ$  Figura 2.7 (a) (Rao, 1999):

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = [\lambda_1] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

En el segundo paso se determinó la transformación de la matriz  $[\lambda_2]$  entre las coordenadas locales  $xyz$  que es el sistema coordenado principal del miembro y las coordenadas  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$  como esta escrita en la ecuación (2.47) (Rao, 1999):

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\lambda_2] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Suponiendo que el sistema de coordenadas locales  $(xyz)$  puede ser obtenido, rotando el sistema  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$  alrededor del eje  $\bar{x}$  un ángulo  $\alpha$  como se muestra en la Figura 2.7 (b). De esta manera la transformación entre el sistema  $xyz$  y el sistema  $XYZ$  se obtiene a partir de la ecuación (2.48):

$$[\lambda] = [\lambda_2][\lambda_1] \quad (2.48)$$

Donde

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

Expresión para  $[\lambda_1]$ : de la Figura 2.7 (a), la dirección de los cosenos del eje longitudinal del elemento se determinó por la ecuación (2.50):

$$\begin{aligned} l_{ox} &= l_{ox} = \frac{X_j - X_i}{l} \\ m_{ox} &= m_{ox} = \frac{Y_j - Y_i}{l} \\ n_{ox} &= n_{ox} = \frac{Z_j - Z_i}{l} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Donde  $i$  y  $j$  denotan el primer y segundo nodos del elemento "e" en el sistema global y  $l$  representa la longitud del elemento "e", así que, la longitud del elemento esta dado por la ecuación (2.51) (Rao, 1999):

$$l = \{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2\}^{1/2} \quad (2.51)$$

Como el vector unitario  $\vec{k}$  que es paralelo al eje  $\bar{z}$ , es normal a ambos vectores unitarios  $\vec{j}$  paralelo al eje  $Y$ , y  $\vec{i}$  paralelo al eje  $\bar{x}$ , donde se tiene, que del análisis vectorial se expresa con la ecuación (2.52):

$$\vec{k} = \frac{\vec{i} \times \vec{j}}{\|\vec{i} \times \vec{j}\|} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} (-\vec{I} n_{ox} + \vec{K} m_{ox}) \quad (2.52)$$

Donde

$$d = (l_{ox}^2 + n_{ox}^2)^{1/2} \quad (2.53)$$

De tal modo que la dirección de los cosenos del eje  $\bar{z}$  con respecto al sistema global  $XYZ$  esta dada por la ecuación (2.54) (Rao, 1999):

$$l_{\bar{oz}} = -\frac{n_{ox}}{d}, \quad m_{\bar{oz}} = 0, \quad n_{\bar{oz}} = \frac{l_{ox}}{d} \quad (2.54)$$

Para encontrar la dirección de los cosenos del eje  $\bar{y}$ , se tiene la condición de que el eje  $\bar{y}$  (vector unitario  $\vec{j}$ ) es normal al eje  $\bar{x}$  ( $\vec{i}$ ) y el eje  $\bar{z}$  ( $\vec{k}$ ). Así se puede expresar a  $\vec{j}$  como la ecuación (2.55) (Rao, 1999).

$$\vec{j} = \vec{k} \times \vec{i} = \begin{bmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ l_{\bar{oz}} & -m_{\bar{oz}} & n_{\bar{oz}} \\ l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \left[ \vec{I}(-l_{ox} m_{ox}) - \vec{J}(-n_{ox}^2 - l_{ox}^2) + \vec{K}(-m_{ox} n_{ox}) \right] \quad (2.55)$$

Así que, la dirección de los cosenos del eje  $\bar{y}$  esta dada por la ecuación (2.56):

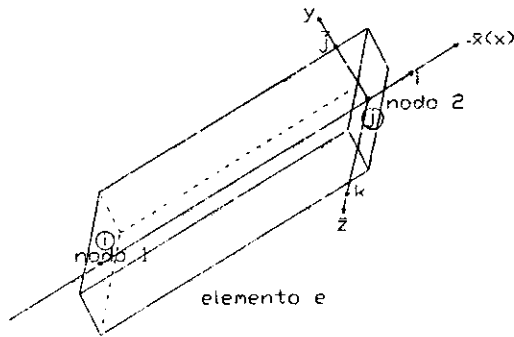


$$\left. \begin{aligned} l_{oy} &= -\frac{l_{ox} m_{ox}}{d} \\ m_{oy} &= \frac{n_{ox}^2 + l_{ox}^2}{d} \\ n_{oy} &= \frac{m_{ox} n_{ox}}{d} \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

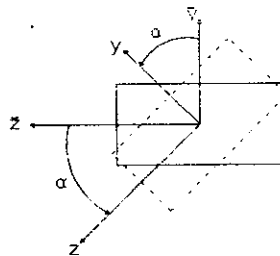
Tal que la matriz  $[\lambda_1]$  esta dada por la ecuación (2.57):

$$\begin{aligned} [\lambda_1] &= \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \\ l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ -(l_{ox} m_{ox})/d & (l_{ox}^2 + n_{ox}^2)/d & -(m_{ox} n_{ox})/d \\ -n_{ox}/d & 0 & l_{ox}/d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Donde  $l_{ox}, m_{ox}$  y  $n_{ox}$  están dadas por la ecuación (2.50) y  $d$  por la ecuación (2.53) (Rao, 1999).



a) Eje Z paralelo al plano xy



b) Caso general (x-bar y-bar z-bar no coinciden con x y z)

Figura 2.7 Coordenadas globales y locales

Expresión para  $[\lambda_2]$ : cuando el eje principal de sección transversal del elemento (ejes  $xyz$ ) es arbitrario, haciendo un ángulo  $\alpha$  con los ejes  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$  (el eje  $x$  es el mismo que el eje  $\bar{x}$ ), la transformación entre los dos sistemas puede ser expresada por la ecuación (2.58) (Rao, 1999):

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = [\lambda_2] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

Así que

$$[\lambda_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

De tal suerte que la transformación entre las coordenadas de los ejes  $XYZ$  y  $xyz$  se obtiene aplicando la ecuación (2.50) (Rao, 1999).

Note que: cuando  $\alpha = 0$ , la matriz  $[\lambda_2]$  genera una matriz unitaria.

El elemento "e" permanece vertical, esto es, cuando el eje  $x$  (o  $\bar{x}$ ) coincide con el eje  $Y$ ,  $I_{ox} = n_{ox} = 0$  y por lo tanto  $d$  tiende a cero. Esto ocasiona que algunos de los términos en la matriz  $[\lambda_2]$  sean indeterminados.

En este caso, se puede redefinir el ángulo  $\alpha$  como el ángulo en el plano horizontal entre los ejes  $Z$  y  $z$ , positivos cuando se rota de  $Z$  al eje  $X$  como se muestra en la Figura 2.8, en este caso la matriz  $[\lambda]$  es determinada a través del mismo procedimiento anterior (Rao, 1999):

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 0 & m_{ox} & 0 \\ -m_{ox} \cos \alpha & 0 & m_{ox} \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Donde  $m_{ox} = 1$  para este caso.

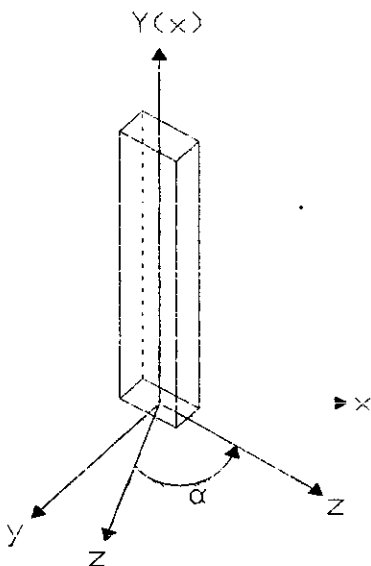


Figura 2.8 Transformación para un elemento vertical

Finalmente la transformación de la matriz  $[\lambda]$  se relaciona con los sistemas coordinados global y local dados en la ecuación (2.41) (Rao, 1999).

### 2.3 Matriz de amortiguamiento

El amortiguamiento en sistemas estructurales y máquinas es muy importante si un modelo es usado para predecir respuestas transitorias, transmisibilidad, caída de tiempo u otras características en el diseño y análisis que están sujetas a energía de disipación. En esta sección la matriz de amortiguamiento es determinada para ser incluida en la formulación del MEF. Más aún, el amortiguamiento en sistemas estructurales es de fácil comprensión, la caracterización del amortiguamiento esta aún en desarrollo. De cualquier manera, algunas aproximaciones se han hecho con precisión (Domínguez González, 2005).

Se adopta una metodología de amortiguamiento proporcional. En el amortiguamiento proporcional, la matriz de amortiguamiento  $[C]$  se asume que es proporcional a la matriz de masa  $[M]$  o a la matriz de rigidez  $[K]$  o combinación de ambas, de acuerdo con el amortiguamiento proporcional de Rayleigh. Estos tipos de amortiguamiento pueden ser determinados matemáticamente con la ecuación (2.61) (Huebner et al., 1995; Kwong y Hyochonon, 1997; Domínguez González, 2005):

$$[C] = \alpha[M] \quad [C] = \beta[K] \quad \text{o} \quad [C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.61)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros constantes.

Para llevar a cabo esto, primero se requiere obtener los valores propios y vectores propios de un sistema no amortiguado libre de vibración para establecer la matriz. La ecuación de movimiento para un sistema no amortiguado libre de vibración se expresa en la ecuación (2.62) (Domínguez González, 2005):

$$[M]\{x\} + [F]\{x\} = \{0\} \quad (2.62)$$

Suponiendo una solución armónica, la solución de la ecuación (2.62) se puede describir como en la ecuación (2.63):

$$\{x\} = \{\varphi\} \sin \omega(t - t_0) \quad (2.63)$$

Donde  $\{\varphi\}$  es la amplitud del vector,  $t$  es la variable de tiempo,  $t_0$  es una constante de tiempo y  $\omega$  es la frecuencia de vibración del sistema. Sustituyendo la ecuación (2.63) en (2.62) el eigen problema es determinado como la ecuación (2.64) (Huebner et al., 1995; Domínguez González, 2005):

$$[K]\{\varphi\} = \omega^2 [M]\{\varphi\} \quad (2.64)$$

Donde  $\varphi$  y  $\omega$  son los eigen valores y eigen vectores respectivamente. Un sistema con  $n$  grados de libertad tiene  $n$  soluciones para un eigen problema que es representado en forma matricial por la ecuación (2.65):

$$[K][\Phi] = [M]\{\Phi\}[\Omega]^2 \quad (2.65)$$

Donde  $[\Phi]$  matriz modal teniendo  $n$  eigen vectores columnas y  $[\Omega]^2$  es una matriz diagonal, con los eigen valores  $\omega_i^2$  en la diagonal se escribe de la forma como en la ecuación (2.66) :

$$[\Phi] = [\{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}, \dots, \{\varphi_n\}] \quad [\Omega]^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Con  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ . Los eigen vectores son llamados M-normalizados cuando se cumple la ecuación (2.67) (Domínguez González, 2005):

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (2.67)$$

Ahora las ecuaciones (2.64) y (2.67) dan por resultado la ecuación (2.68):

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega]^2 \quad (2.68)$$

Más aún, la matriz de masa y de rigidez, en general la matriz de amortiguamiento no puede ser construida a partir de las matrices de amortiguamiento y se supone que es aproximadamente toda la energía de disipación durante la respuesta del sistema (Domínguez González, 2005).

Asumiendo que las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento en elemento finito pueden ser de la forma que tiene la ecuación (2.69) (Zienkiewicz y Morgan, 1983; Kwong y Hyochonon, 1997; Domínguez González, 2005):

$$[M]\{\dot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (2.69)$$

Para desacoplar la ecuación (2.69), la siguiente transformación lineal puede representarse como la ecuación (2.70) (Domínguez González, 2005):

$$\{x\} = [\Phi]\{p\} \quad (2.70)$$

Donde  $\{p\}$  es referida como coordenadas modales

Ahora sustituyendo la ecuación (2.70) en (2.69) y multiplicando ambos lados de la izquierda por  $[\Phi]^T$  y usando las propiedades de los eigen vectores M-normalizados descritos en las ecuaciones (2.67) y (2.68) da como resultado la ecuación (2.71) (Domínguez González, 2005):

$$[I]\{p\} + [\Phi]^T [C] [\Phi]\{p\} + [\Omega]^2 \{p\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (2.71)$$

Se observa que las matrices del primer y tercer término de la izquierda de la ecuación (2.71) son matrices diagonales, porque existe la relación de ortogonalidad entre los eigen vectores y las matrices de masa  $[M]$  y de rigidez  $[K]$ . Más aún, el segundo término  $[\Phi]^T [C] [\Phi]$  frecuentemente no se reduce a

una matriz diagonal. Ahora, usando los conceptos de amortiguamiento proporcional establecidos en la ecuación (2.61), es posible diagonalizar el segundo término (Domínguez González, 2005).

Considerando la ecuación (2.71), suponemos que el segundo término tiene la forma de la ecuación (2.72) (Domínguez González, 2005):

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = 2[\Omega][\zeta] \quad (2.72)$$

Donde la relación de amortiguamiento es representada en forma matricial como la ecuación (2.73) (Domínguez González, 2005):

$$[\zeta] = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \Lambda & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & \Lambda & \zeta_n \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Esta forma ha sido frecuentemente empleada y recomendada para simular los efectos de amortiguamiento en sistemas de estructuras. En la mayoría de problemas de vibraciones, es irrelevante si el amortiguamiento  $2\zeta_i\omega_i$  en la ecuación (2.72) es basado en  $[C]$  proporcional a  $[M]$  o  $[K]$  o una combinación de ambos como en el amortiguamiento proporcional de Rayleigh. Por eso, desde un punto de vista práctico, el factor de amortiguamiento  $\zeta_i$  y la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_i$  puede ser interpretado como las propiedades de un sistema inherente. Además, los valores típicos y característicos de la relación de amortiguamiento  $\zeta_i$  para varios tipos de estructuras, son determinados de estudios experimentales. Sabiendo esto, la matriz de amortiguamiento  $[C]$  en la ecuación (2.72) es determinada con respecto al modal factores de amortiguamiento y frecuencias naturales no amortiguadas como la ecuación (2.74) (Domínguez González, 2005):

$$[C] = 2[\Phi]^{-T} [\Omega][\zeta][\Phi] \quad (2.74)$$

## **2.4 Solución de ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento**

Como se describió anteriormente, las matrices del sistema de masa, rigidez y amortiguamiento han sido definidas, las ecuaciones que rigen el movimiento, pueden ser representadas como en la ecuación (2.69). Si el sistema tiene  $n$  grados de libertad, entonces acoplando  $n$  ecuaciones que rigen el movimiento, se debe resolver simultáneamente para obtener la respuesta del sistema que puede ser un cálculo muy extenso si el número de grados de libertad es grande. En la práctica del análisis de elemento finito, el método más efectivo para el análisis en dominio del tiempo, es la integración directa y el método de superposición. La solución del sistema puede ser obtenida eficientemente en dominio de la frecuencia cuando el sistema esta expuesto a excitaciones armónicas ya que la respuesta tiene la misma frecuencia (Domínguez González, 2005).

Cuando el sistema es lineal es posible aplicar el método de superposición usando la transformación de matrices para convertir el sistema original en ecuaciones desacopladas que pueden resolverse individualmente. Además del método de integración directa el método más común y poderoso en análisis dinámico de estructuras es el método de Newmark. Con la selección de los parámetros de control adecuados, el método de Newmark es incondicionalmente estable para cualquier tiempo deseado. Más aún, este método puede ser utilizado para resolver problemas no lineales, como en este caso cuando un amortiguamiento variable es introducido a la estructura. Esto requiere un proceso iterativo para balancear el sistema de ecuaciones. En esta sección el dominio de la frecuencia, el método de adición y el de Newmark, serán explicados brevemente. El método de Newmark será formulado para resolver sistemas no lineales (Domínguez González, 2005).

## **2.5 Respuesta en frecuencia debida a excitación armónica**

Este método esta basado en el método de coeficientes indeterminados, donde suponemos que la respuesta del sistema debida a excitación armónica



tiene la misma frecuencia de la excitación. Las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de los grados de libertad de la estructura con amortiguamiento sujeto a excitación armónica pueden escribirse como en la ecuación (2.75) (Nelly, 2000; Domínguez González, 2005)..

$$[M]\{x\} + [C]\{x\} + [K]\{x\} = \text{Im}\{F\}e^{i\omega t} \quad (2.75)$$

Donde  $\{F\}$  es un vector  $n$  dimensional con una fuerza de amplitud que puede ser compleja si la fase de cada fuerza generalizada no es la misma que:

$$F_i = f_i e^{i\phi} \quad (2.76)$$

Suponemos que la solución de la ecuación (2.75) es armónica expresada en la ecuación (2.77).

$$\{x(t)\} = \text{Im}\left(\{U\}e^{i\omega(t)}\right) \quad (2.77)$$

Donde  $\{U\}$  es un vector  $n$ -dimensional de desplazamiento.

Sustituyendo la ecuación (2.77) en la (2.75) da por resultado la ecuación (2.78).

$$\left(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]\right)\{U\} = \{F\} \quad (2.78)$$

Finalmente de la solución de la ecuación (2.78) se obtiene la ecuación (2.79) (Domínguez González, 2005).

$$\{U\} = \left(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]\right)^{-1} \{F\} \quad (2.79)$$

## 2.6 Método de superposición

Este método desacopla las ecuaciones del movimiento de elemento finito para usar una transformación de matrices que consiste de tres formas de vibración del sistema de elemento finito. Este método es un cálculo más eficiente que el método de integración directa; sin embargo no es aplicable para problemas no lineales, porque el principio de superposición empleado para

obtener la solución que rigen las ecuaciones diferenciales no es válido en este caso (Domínguez González, 2005).

El sistema de ecuaciones de elemento finito es desacoplado utilizando el eigen vector de la matriz  $[\Phi]$ . Esta matriz representa una matriz transformada que cambia las coordenadas originales  $\{x\}$  llamadas coordenadas generalizadas a una nueva referencia llamada coordenadas principales  $\{p\}$ . Usando la transformación lineal dada en la ecuación (2.70) y las propiedades ortonormales de los eigen vectores, la ecuación acoplada de movimiento puede ser desacoplada de tal forma que da por resultado la ecuación (2.80) (Domínguez González, 2005).

$$[\tilde{M}]\{p\} + [\tilde{C}]\{p\} + [\tilde{K}]\{p\} = \{\tilde{F}\} \quad (2.80)$$

Donde

$$[\tilde{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi]; [\tilde{C}] = [\Phi]^T [C] [\Phi]; [\tilde{K}] = [\Phi]^T [K] [\Phi]; \{\tilde{F}\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (2.81)$$

Donde  $[\tilde{M}]$ ,  $[\tilde{C}]$  y  $[\tilde{K}]$  son las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento y  $\{\tilde{F}\}$  es el vector fuerza. La relación entre las coordenadas generalizada y normal se da a partir de la ecuación (2.82) (Domínguez González, 2005).

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{p(t)\} \quad (2.82)$$

Como el sistema de ecuaciones dado en la ecuación (2.71) ha sido desacoplado, cada ecuación tiene la forma de la ecuación (2.83) (Domínguez González, 2005).

$$p\omega_j(t) + 2\omega_j\xi_j p_j(t) + \omega_j^2 p_j(t) = f_j(t), \quad j = 1, K, n \quad (2.83)$$

Con

$$f_j(t) = \{\phi_j\}^T \{F(t)\} \quad (2.84)$$

Las condiciones iniciales en las coordenadas principales son determinadas utilizando la ecuación (2.82) y la propiedad M-normalizada se representa por la ecuación (2.85) como sigue (Domínguez González, 2005):

$$p_j(0) = \{\varphi_j\}^T [M]\{x(0)\} \quad y \quad \dot{p}_j(0) = \{\dot{\varphi}_j\}^T [M]\{\dot{x}(0)\} \quad (2.85)$$

La solución de la ecuación (2.83) puede ser calculada por integración o evaluándola por la integral de Duhamel expresada en la ecuación (2.86).

$$p_j(t) = \frac{1}{\omega_j} \int_0^t f_j(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \text{sen } \omega_j (t-\tau) d\tau + e^{-\xi_j \omega_j t} (\alpha_j \text{sen } \omega_j t + \beta_j \text{cos } \omega_j t) \quad (2.86)$$

Donde la frecuencia natural amortiguada es determinada por la ecuación (2.87) (Domínguez González, 2005).

$$\omega_j = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (2.87)$$

Para el caso de vibraciones libres puede ser simplificada por la ecuación (2.87).

$$p_j(t) = A_j e^{-\xi_j \omega_j t} \text{sen}(\omega_j t - \theta_j) \quad (2.88)$$

Donde  $A_j$  y  $\theta_j$  son constantes que se determinan de las condiciones iniciales. Una vez que la solución de las coordenadas ha sido obtenida, la relación de la ecuación (2.82) se utiliza para obtener el resultado de las coordenadas generalizadas (Domínguez González, 2005).

## 2.7 Método de Newmark

En los métodos de integración directa, las ecuaciones de movimiento son integradas utilizando un procedimiento numérico paso a paso. El término directo quiere decir que es previo a la integración numérica, no transformadas a la forma diferencial llevadas a cabo. Los nuevos métodos de integración y sus propiedades han sido investigados por diferentes científicos. En aplicaciones prácticas, computación, precisión, estabilidad amortiguamiento de bajas y altas frecuencias, y matrices de inercia son la principal característica de la selección

del método de integración adecuado (Kwong y Hyochonon, 1997; Domínguez González, 2005).

Además de las técnicas de integración directa, es muy común utilizar el método de Newmark. Es un sencillo paso de integración que intenta satisfacer la ecuación diferencial del movimiento en dominio del tiempo  $t + \Delta t$  después de la solución, el tiempo es determinado. Con el fin de ilustrar la aplicación de estos métodos de integración, consideraremos la solución del equilibrio dinámico lineal ecuación (2.89) que tiene la siguiente forma (Newmark, 1959; Kwong y Hyochonon, 1997; Domínguez González, 2005):

$$[M]\{x\}_{t+\Delta t} + [C]\{x\}_{t+\Delta t} + [K]\{x\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (2.89)$$

Donde la matriz de masa  $[M]$ , la matriz de amortiguamiento  $[C]$  y la matriz de rigidez  $[K]$  son definidas en el tiempo  $t$ . De tal modo que la ecuación (2.89) se satisface sólo si las matrices no cambian durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Usando las series truncadas de Taylor, los vectores de velocidad y desplazamiento se aproximan de tal forma que da por resultado las ecuaciones (2.90) y (2.91) (Wilson, 1962; Zienkiewicz y Taylor, 1991; Domínguez González, 2005).

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + \Delta t \{x\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \{x\}_t + \beta \Delta t^3 \{x\}_t \quad (2.90)$$

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + \Delta t \{x\}_t + \gamma \Delta t^2 \{x\}_t \quad (2.91)$$

Considerando que la aceleración es lineal, entonces, se puede representar por la ecuación (2.92).

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \frac{(\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t)}{\Delta t} \quad (2.92)$$

La pauta para obtener las ecuaciones de Newmark, es sustituyendo la ecuación (2.92) en las ecuaciones (2.90) y (2.91), lo que da por resultado las

ecuaciones (2.93) y (2.94) (Zienkiewicz y Taylor, 1991; Domínguez González, 2005).

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + \Delta t \{\dot{x}\}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} \quad (2.93)$$

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\dot{x}\}_t + \gamma \Delta t \{\dot{x}\}_{t+\Delta t} \quad (2.94)$$

Estas ecuaciones, junto con la ecuación (2.89) se utilizan iterativamente para cada intervalo de tiempo, para cada desplazamiento de los grados de libertad del sistema estructural. Wilson (1962) formuló la notación matricial del método de Newmark, adicionando la rigidez y masa al amortiguamiento, y eliminando las iteraciones para introducir la solución directa de las ecuaciones en cada intervalo del tiempo. De tal forma, que las ecuaciones (2.93) y (2.94) se escriben como en las ecuaciones (2.95) y (2.96) (Domínguez González, 2005).

$$\{x\}_{t+\Delta t} = b_1 (\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t) + b_2 \{x\}_t + b_3 \{\ddot{x}\}_t \quad (2.95)$$

$$\{x\}_{t+\Delta t} = b_4 (\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t) + b_5 \{\dot{x}\}_t + b_6 \{\dot{x}\}_{t+\Delta t} \quad (2.96)$$

Donde las constantes  $b_i$  son definidas por las ecuaciones (2.97) y (2.98).

$$b_1 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}, b_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}, b_3 = \beta - \frac{1}{2} \quad (2.97)$$

$$b_4 = \gamma \Delta t b_1, b_5 = 1 + \gamma \Delta t b_2, b_6 = \Delta t (1 + \gamma b_3 - \gamma) \quad (2.98)$$

Ahora, sustituyendo  $\{\dot{x}\}_{t+\Delta t}$  y  $\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}$  de las ecuaciones (2.95) y (2.94) en la ecuación (2.89) queda de la forma descrita en la ecuación (2.99) (Domínguez González, 2005).

$$(b_1 [M] + b_4 [C] + [K]) \{x\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} + [M] (b_1 \{x\}_t + b_2 \{\dot{x}\}_t + b_3 \{\ddot{x}\}_t) + [C] (b_4 \{x\}_t + b_5 \{\dot{x}\}_t + b_6 \{\ddot{x}\}_t) \quad (2.99)$$

O simplemente como la ecuación (2.100).

$$[\hat{K}] \{x\}_{t+\Delta t} = \{\hat{F}\} \quad (2.100)$$

Donde

$$[\hat{K}] = b_1[M] + b_4[C] + [K] \quad (2.101)$$

Es llamada la matriz de rigidez efectiva o pseudo matriz de rigidez y el vector de carga efectivo se define por la ecuación (2.102) (Dominguez González, 2005).

$$\{\hat{F}\} = \{F\}_{t+\Delta t} + [M](b_1\{x\}_t + b_2\{\dot{x}\}_t + b_3\{\ddot{x}\}_t) + [C](b_4\{x\}_t + b_5\{\dot{x}\}_t + b_6\{\ddot{x}\}_t) \quad (2.102)$$

Note que para un problema estructural lineal con propiedades constantes, la pseudo matriz de rigidez  $[\hat{K}]$  y las constantes  $b_i$  son calculadas sólo una vez. Es de notar que el método de Newmark es estable si se cumple:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (2.103)$$

Cuando  $\beta = \frac{1}{4}$  y  $\gamma = \frac{1}{2}$ , el método es llamado método de aceleración con medias constantes (Dominguez González, 2005).

En problemas no lineales donde  $[M]$ ,  $[C]$  o  $[K]$  son variantes en el tiempo, el sistema se convierte en no lineal y un estado de equilibrio dado en la ecuación (2.89) generalmente no será logrado en el tiempo  $t + \Delta t$ . Para este tipo de problemas el método de Newmark es modificado para realizar un proceso iterativo en cada intervalo o en algunos incrementos. Para sistemas no lineales es conveniente escribir las ecuaciones del tiempo en forma incremental. El desplazamiento incremental, los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo  $t + \Delta t$  y la iteración  $(i+1)^{th}$  requerida para lograr un equilibrio, se definen en las ecuaciones (2.104), (2.105) y (2.106) (Dominguez González, 2005).

$$\{\delta x\}^{i+1} = \{x\}_{t+\Delta t}^{i+1} - \{x\}_{t+\Delta t}^i \quad (2.104)$$

$$\{\delta \dot{x}\}^{i+1} = \{\dot{x}\}_{t+\Delta t}^{i+1} - \{\dot{x}\}_{t+\Delta t}^i \quad (2.105)$$

$$\{\delta x\}^{i+1} = \{x\}_{t+\Delta t}^{i+1} - \{x\}_{t+\Delta t}^i \quad (2.106)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.95) y (2.96) en las ecuaciones (2.106) y (2.105) respectivamente, los vectores de aceleración y velocidad incremental se pueden reducir a las ecuaciones (2.107) y (2.108) (Domínguez González, 2005).

$$\{\ddot{\alpha}x\}^{i+1} = b_1 \{\ddot{\alpha}x\}^{i+1} \quad (2.107)$$

$$\{\dot{\alpha}x\}^{i+1} = b_4 \{\dot{\alpha}x\}^{i+1} \quad (2.108)$$

El sistema de ecuaciones del movimiento en la forma incremental para el  $(i+1)^{th}$  intervalo pueden se definidas por la ecuación (2.109) (Domínguez González, 2005):

$$[M]\{\ddot{\alpha}x\}^{i+1} + [C]_{t+\Delta t}^i \{\dot{\alpha}x\}^{i+1} + [K]_{t+\Delta t}^i \{\alpha x\}^{i+1} = \{\delta F\}^i \quad (2.109)$$

Ahora, considerando las ecuaciones (2.107), (2.108) y (2.109) se simplifica a la ecuación (2.110):

$$[\hat{K}]^{i+1} \{\delta x\}^{i+1} = \{\delta F\}^i \quad (2.110)$$

Donde la matriz de rigidez actualizada esta determinada por la ecuación (2.111) (Domínguez González, 2005):

$$[\hat{K}]^{i+1} = [K]_{t+\Delta t}^i + b_1 [M] + b_4 [C]_{t+\Delta t}^i \quad (2.111)$$

Se nota que la matriz de masa permanece constante durante  $t + \Delta t$ . El término de la derecha de la ecuación (2.110) es el vector de fuerza desbalanceado, que es la diferencia entre las fuerzas en el tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$  antes y después de que las matrices  $C$  y  $K$  sean actualizadas. Se puede expresar por medio de la ecuación (2.112) (Domínguez González, 2005):

$$\{\delta F\}^i = \{F\}_{t+\Delta t}^i - [M]\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t}^i - [C]_{t+\Delta t}^i \{\dot{x}\}_{t+\Delta t}^i - [K]_{t+\Delta t}^i \{x\}_{t+\Delta t}^i \quad (2.112)$$

### **3 CONDICIONES DE DISEÑO**

En este capítulo, se presentan todas las reglas que establece la SAE, para el diseño y construcción del carro todo terreno, así como, las herramientas que se utilizaron y los procesos de fabricación.

#### **3.1 Normas de diseño y construcción**

Para el diseño y fabricación del vehículo de Mini Baja se deben seguir algunas restricciones y normas de seguridad, por lo que, el diseño debe ser lo suficientemente seguro para el buen desempeño y debe resistir diferentes pruebas que se presentan durante la competencia, las cuales consisten en la seguridad tanto de los espectadores como del conductor. Además, el auto será sometido a pruebas de frenado, aceleración, maniobrabilidad, arrastre, ascenso por una pendiente y a la carrera de resistencia a campo traviesa.

Las pruebas a las que se somete el vehículo, son de tal magnitud, que habrá de soportar las dificultades que presenta un terreno de difícil acceso, presentando: baches, relieves, curvas cerradas o el ascenso por una colina de inclinación pronunciada, solo por mencionar algunas, quedando el vehículo sin daño permanente en su estructura.

Para el diseño del prototipo dentro de la Universidad Autónoma de Querétaro, se revisó la reglamentación para dar comienzo a la fase del diseño de la estructura bajo las siguientes consideraciones:

**El vehículo debe ser de fácil operación y mantenimiento y estético.**

El vehículo debería tener por lo menos 4 ruedas o más, ser capaz de transportar a una persona de 1.90 cm. de estatura y con un peso aproximado de 113.4 kg (SAE, 2005).

Las dimensiones están contempladas en el margen de 152.4 cm de ancho (incluyendo neumáticos), y una longitud, que no estaba restringida, pero se optó por considerar que los demás equipos estaban diseñando con un



máximo de 243.84 cm de largo, si se excede en esas dimensiones, el vehículo no podría operar con facilidad en algunas de las pruebas a desarrollar (SAE, 2005).

El vehículo debe tener la capacidad de operar en terreno de difícil acceso, con obstáculos como rocas, lodo, pendientes, baches y saltos. Con la suficiente tracción y frenado para desarrollar todas estas maniobras (SAE, 2005).

Además, el prototipo debe alojar un motor Briggs & Stratton de 10 Hp modelo 205432 tipo 0036-E1 en la parte trasera del chasis, el cual proporcionado por la SAE (SAE, 2005).

El vehículo tendrá un tirón o punto de arrastre en la parte frontal y posterior de la estructura, a lo largo de su línea longitudinal central, que será fijado al marco principal. El tirón debe estar fabricado de placa, colocado en un lugar adecuado donde no pueda presentar impactos durante una colisión (SAE, 2005).

Un frente tubular, lo suficientemente rígido que no presente deformación permanente, con un diámetro exterior máximo de 31.75 mm (SAE, 2005).

Además de las condiciones anteriores, se deben considerar algunas restricciones de diseño como son: el diseño debe ser en forma de jaula para prevenir al conductor de serias lesiones durante un choque o una volcadura y poder facilitar un escape rápido (SAE, 2005).

El marco del respaldo deberá estar rotado como máximo 20° a partir de la vertical como se muestra en la Figura 3.1 (SAE, 2005).

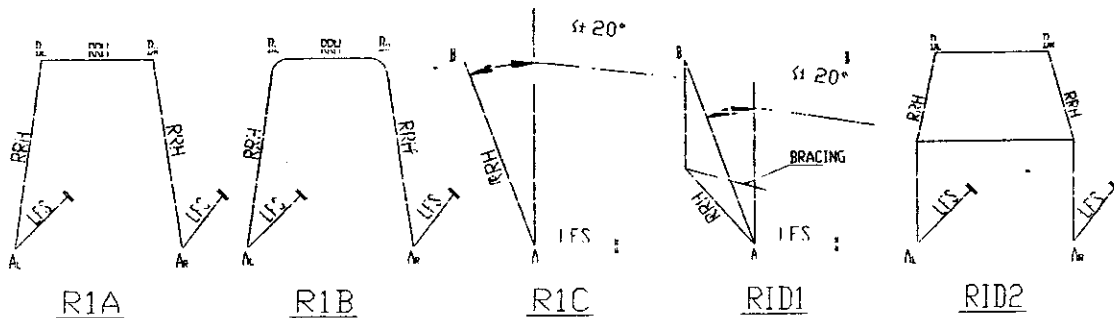


Figura 3.1 Diseños permitidos del marco de respaldo.

Las uniones superiores de este marco deben tener una curvatura que no exceda un radio de 12.7 cm y en la parte superior debe estar localizado a una distancia mínima de 104.14 cm a partir del asiento del conductor (SAE, 2005).

Además, el marco debe contar con un refuerzo diagonal que inicia a un máximo de 12.7 cm de la parte superior del marco hasta una localización máxima de 5.08 cm a partir del punto inferior del marco, sin sobrepasar un ángulo de  $20^\circ$  en su diagonal, contando con 2 o más elementos en caso de ser necesario, como se ilustra en la Figura 3.2 (SAE, 2005).

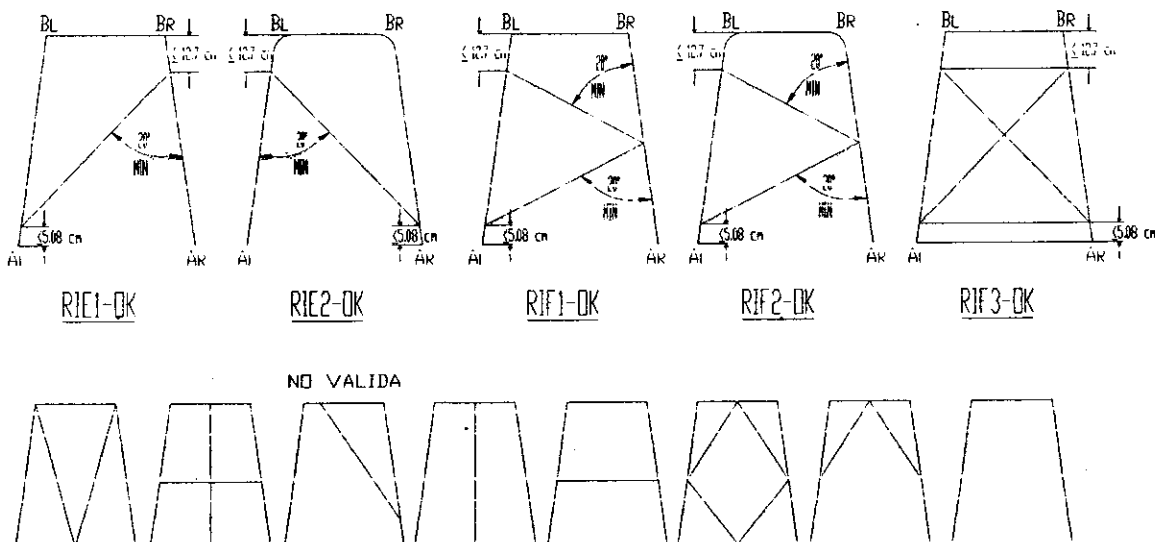


Figura 3.2 Diseños permitidos y no permitidos del marco de respaldo.

El marco superior de la estructura, se fija como opción a 5.08 cm a partir de la horizontal de los puntos B mostrados en la Figura 3.1 Y se extiende

horizontalmente hasta los puntos C (ver Figura 3.3), localizados verticalmente a un mínimo de 104.14 cm a partir del asiento y 30.48 cm horizontalmente a partir del asiento (SAE, 2005).

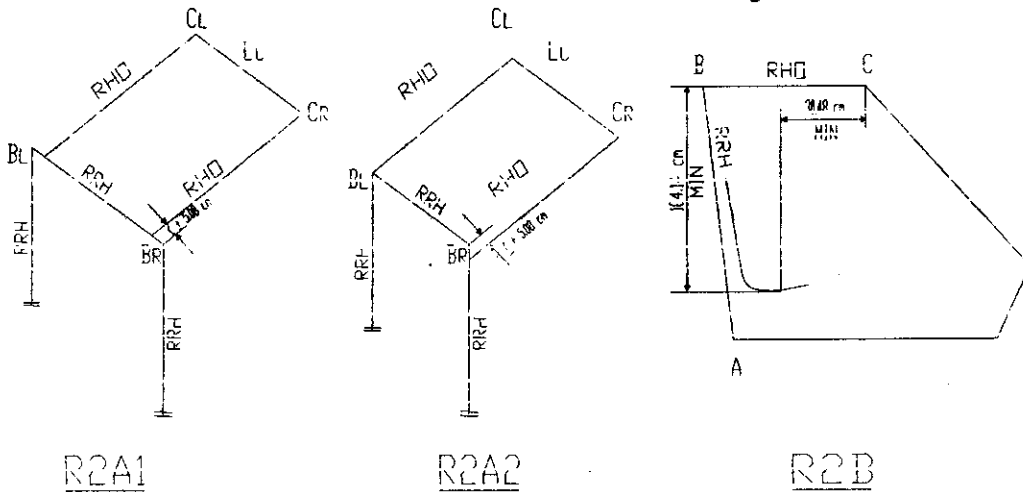


Figura 3.3 Diseño permitido del marco superior.

El marco inferior del chasis, debe estar unido al respaldo en los puntos A y extenderse hacia delante hasta los puntos AF como se muestra en la Figura 3.4 (SAE, 2005).

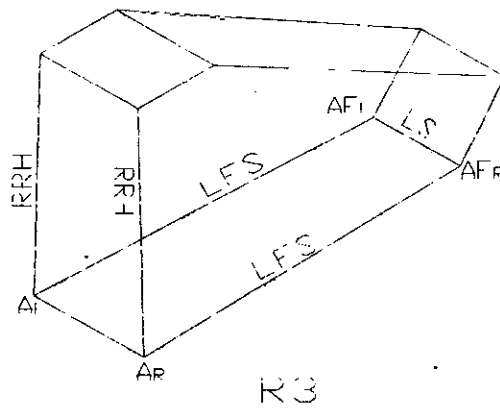


Figura 3.4 Marco inferior de la estructura

Los elementos laterales contra impacto se extenderán horizontalmente de los puntos S hacia los puntos SF, estos elementos se localizan entre 15.24 y

30.48 cm verticalmente a partir del asiento. Y tendrá una separación mínima de 5.08 cm a partir de los costados del conductor (ver Figura 3.5) (SAE, 2005).

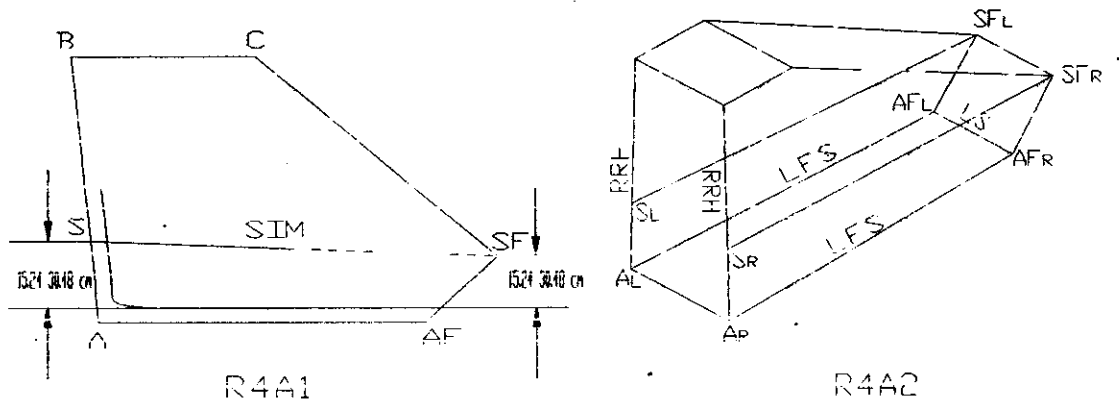


Figura 3.5 Elementos laterales.

La parte frontal de la estructura, debe estar unida en los puntos C y SF con un ángulo no mayor de  $45^\circ$  y la parte frontal inferior se unirá en los puntos SF y AF con un ángulo no mayor de  $45^\circ$  a partir de la vertical (ver Figura 3.6) (SAE, 2005).

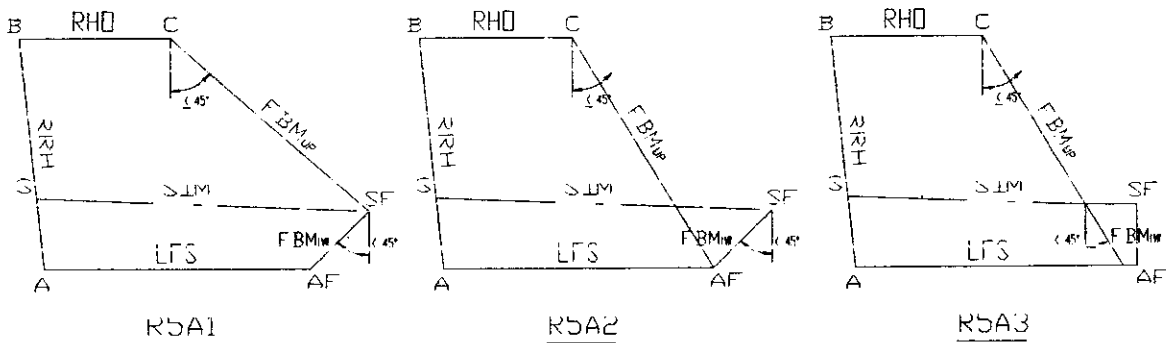


Figura 3.6 Formas permitidas

Las protecciones laterales y frontales, deberán ser de cualquiera de las dos formas siguientes: los elementos superiores se extenderán a partir del punto D hacia los puntos E, el ángulo que forma a partir de la parte frontal debe ser de por lo menos  $30^\circ$ . Los elementos inferiores se unirán al punto E y se extenderán verticalmente hacia abajo el cual no sobrepasará un ángulo de  $15^\circ$  (ver Figura 3.7) (SAE, 2005).

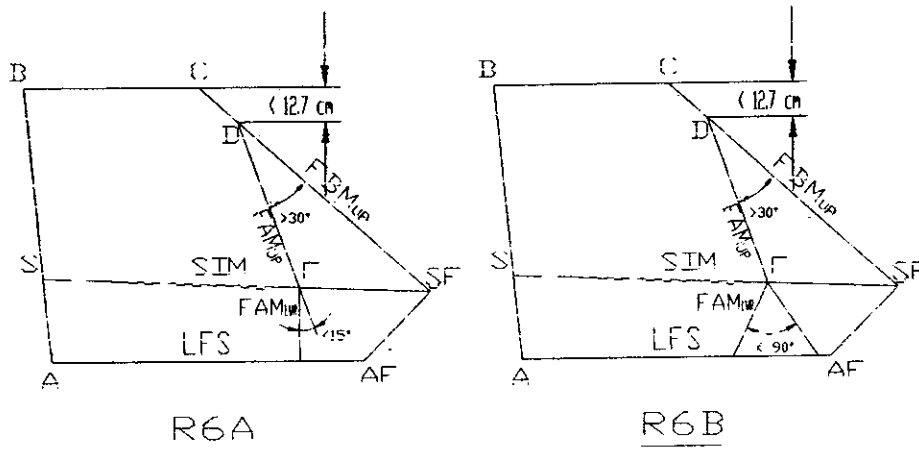


Figura 3.7 Protecciones laterales y frontales

La parte posterior de la estructura, donde se aloja el motor y la transmisión, debe ser construida a partir de triángulos con lados de no más de 81.28 cm de longitud (ver Figura 3.8) (SAE, 2005).

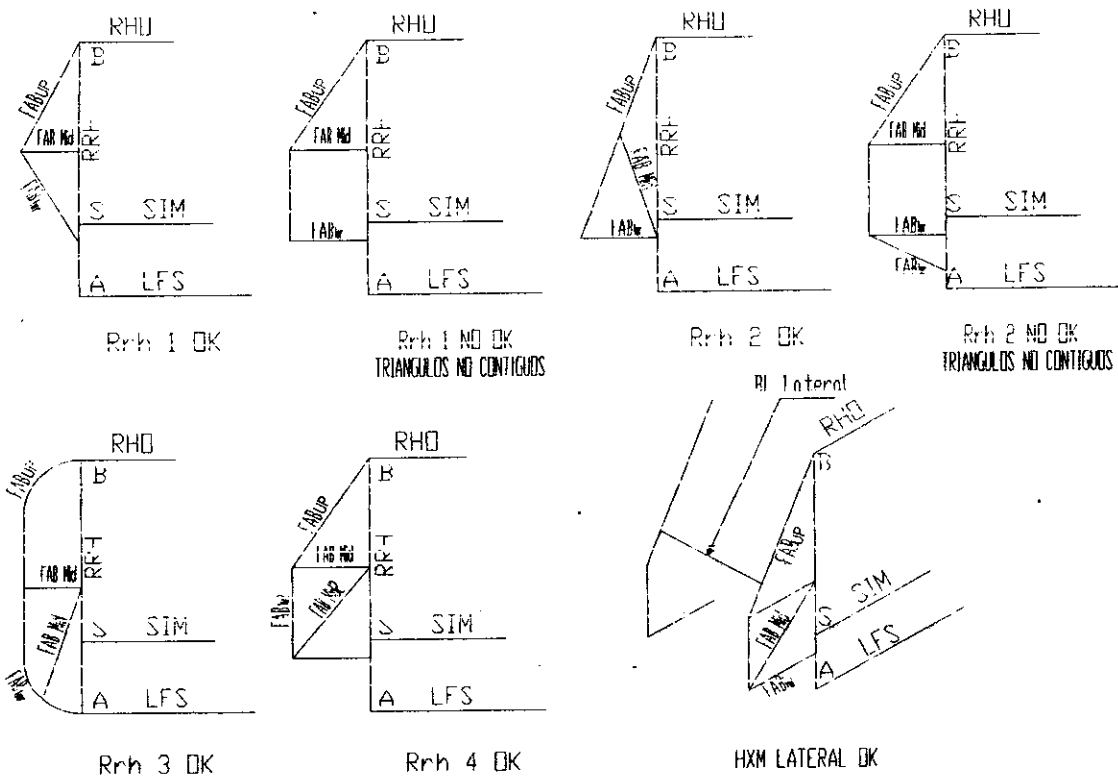


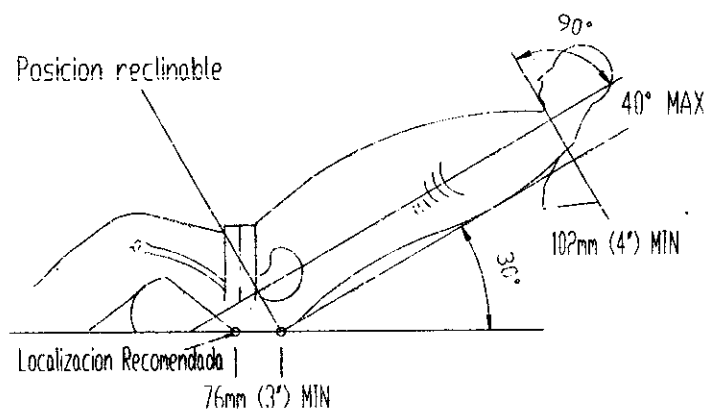
Figura 3.8 Protecciones laterales y frontales

La estructura de la jaula esta contemplada para la protección del conductor, la designación de las reglas anteriores, son consideradas como requerimientos mínimos de seguridad elaboradas por National Technical Inspectors (Inspectores Técnicos Nacionales).

El material utilizado para la fabricación de la jaula puede ser elegido contemplando las siguientes dos opciones: un tubo de acero circular con un diámetro exterior mínimo de 2.54 cm y una pared de 0.0327 cm conteniendo por lo menos un 18% de carbono o tubo de acero 1018 con un diámetro exterior de 2.54 cm, un esfuerzo de fluencia  $S_y = 370$  MPa y un módulo de elasticidad de 205 GPa (SAE, 2005).

La protección trasera para el conductor debe ser una lámina metálica con un espesor mínimo de 0.071 cm (SAE, 2005).

Como medida de seguridad se utiliza un cinturón de seguridad de 4 puntos que debe estar fijo a la estructura principal, el cual no debe exceder de 3 años de vejez a partir de su fecha de fabricación. Los puntos a los cuales estará unido el cinturón deben estar localizados de forma que la banda o correa pase por el área pélvica del conductor (ver Figura 3.9) (SAE, 2005).



**Figura 3.9 Fijado del cinturón.**

Los puntos verticales de unión de las bandas del cinturón estarán localizados a no más de 10.16 cm a partir de los hombros del conductor y la

localización horizontal de estos puntos deberá estar separada por un mínimo de 15.24 cm y un máximo de 20.32 cm (ver Figura 3.10) (SAE, 2005).

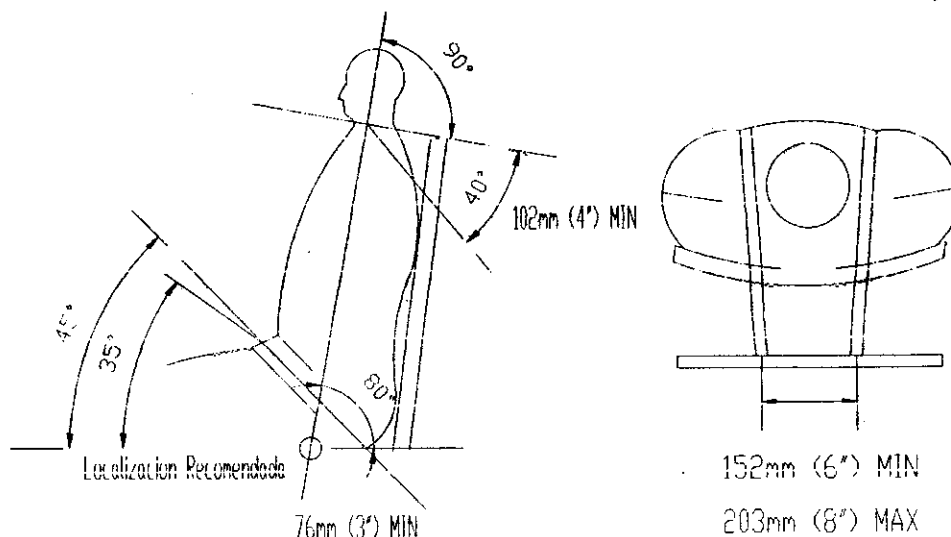


Figura 3.10 Separación de los cinturones.

Dentro de toda la estructura se requiere como medida de seguridad, que no existan picos, rebabas o cualquier protuberancia que puedan causar lesiones tanto al conductor como a terceros.

El aspecto primordial para el diseño del vehículo; es que sea de fácil operación, es decir, que pueda ajustarse a las capacidades de manejo y confort. La estructura se diseña para poder soportar a una persona de 190 cm de estatura y 113.4 kg de peso. La estructura deberá ser confiable, y mantener la integridad física del conductor, además se auxiliará por un cinturón de seguridad, procurando así que durante una volcadura o una colisión, el conductor permanecerá dentro de la estructura, evitando así, lesiones severas.

### 3.2 Herramientas de corte

Disco abrasivo: como el disco abrasivo tiene un gran número de partículas abrasivas, se tienen muchos "dientes" realizando la acción de corte. Una desventaja de estos métodos es que los discos comunes hacen un corte muy ancho, por lo cual se desperdicia mucho material. El corte con sierra

abrasiva produce una gran cantidad de calor en la pieza de trabajo (Kiev et al., 1993).

El calor excesivo que genera el corte puede decolorar el material o posiblemente afectar las propiedades metalúrgicas. Este problema puede parcialmente resolverse seleccionando un disco diferente.

Para seccionar todos los elementos necesarios en la fabricación de la estructura, se utilizó un disco abrasivo de 35.56 cm de diámetro exterior, 0.27 cm de espesor y 2.54 cm de diámetro interior, y una estructura 50A46R4B54KA para ser trabajado a una velocidad máxima de 4400 RPM (Kiev et al., 1993).

**Cortadores:** para el uso de los cortadores se debe tener en cuenta:

**Velocidad de corte ( $v$  m/min):** en relación con herramientas de acero rápido, las velocidades de corte para maquinar acero están en el intervalo de 20 a 50 m/min., dependiendo del avance y de la vida deseada de la herramienta. En cuanto a los carburos, las velocidades de corte para maquinar acero se hallan en el intervalo de 80 a 350 m/min, dependiendo de la calidad de los carburos, del avance y de la vida deseada de la herramienta (Alting, L. 1990).

**Avance ( $f$  mm/rev, mm/diente):** en la mayoría de los procesos el avance esta por debajo de 1.0 mm. Los valores menores se usan en maquinado de acabado y los mayores en maquinado de desbaste (Alting, L. 1990).

### **3.3 Maquinas herramienta**

**Fresadora:** la fresadora esta destinada para producir superficies planas y angulares y también se utiliza para hacer formas irregulares, trabajar superficies y cortar ranuras así como muescas. También puede utilizarse para taladrar, perforar, rimar y cortar engranes. Las fresadoras se clasifican de acuerdo con su



estructura e incluyen: columna y rodilla, de mesa fija, planeadora y especiales (Kazanas et al., 1989; Alting, L. 1990).

En la consola la pieza de trabajo se sujeta con una prensa en la mesa. La mesa de la fresadora esta montada en un carro que, a su vez, esta montado en la consola. El movimiento de la pieza de trabajo se obtiene con el avance manual o mecánico de la mesa (longitudinal), del carro (transversal) y de la consola (vertical) (Kazanas et al., 1989).

### **3.4 Proceso de ensamble**

**Soldadura oxiacetilénica:** la energía térmica necesaria para soldar por fusión se obtiene por medio de la combustión de oxígeno y acetileno en un soplete especial de oxiacetileno. El calor se trasmite a través del espacio de aire hasta la pieza de trabajo. Variando las porciones de oxígeno y acetileno, se pueden obtener tres tipos básicos de flama: neutra, oxidante (con exceso de oxígeno) y carburante o reductora (con exceso de acetileno). La flama neutra que corresponde a una combustión casi completa, se usa para la mayoría de las soldaduras. La zona exterior o llama de la flama precalienta el material y proporciona cierta protección contra la oxidación del material fundido. Debido al hecho de que una parte de oxígeno del aire se usa en la combustión secundaria y a que los movimientos de la flama crean un flujo de aire favorable (Kazanas et al., 1989; Horwitz, 2002).

Una ventaja que se tiene al aplicar este tipo de soldadura, es que es más fácil su aplicación para materiales con relativa pared delgada. El tamaño de la punta del soplete determina el tamaño o volumen de la flama oxiacetilénica.

Cuando se funde la unión, se forma un charco pequeño de metal fundido; se avanza la flama con lentitud a lo largo de la unión para formar charcos continuos del metal derretido. Conforme se avanza con lentitud el soplete a lo largo de la unión el metal que queda detrás se solidifica y produce la unión (Kazanas et al., 1989; Koellhoffer et al., 2002). La técnica directa, del proceso de soldadura oxiacetilénica, consiste en que el soplete apunta en el sentido que se

va a soldar; se utiliza para metales de menos de 0.3175 cm de espesor porque la flama precalienta el metal antes de llegar a la unión y no se derrite hasta la misma profundidad que con la técnica inversa (Kazanas et al., 1989; Alting, 1990; Horwitz, 2002).

## **4 DISEÑO MECÁNICO DE LA ESTRUCTURA**

En el presente capítulo, se describe de manera detallada la metodología que se sigue para el diseño de la estructura de un carro todo terreno, donde se mencionan las condiciones requeridas de diseño y como se siguió el ensamble de los elementos que la conforman.

### **4.1 Diseño particular**

Para el diseño propuesto se deben respetar las normas y restricciones que permite la SAE, realizando una estructura robusta la cual debe ser capaz de soportar las pruebas de seguridad y resistencia ya mencionadas, el material que se utilizará para su fabricación es tubo con un diámetro exterior de 33.78 mm, un espesor de pared de 2 mm, acero 1018. No sobrepasar en dimensiones de todos los elementos que se mencionaron con anterioridad y dejando un espacio suficiente para el piloto, se colocará una caja de transmisión, en la parte trasera del vehículo que proporcionará 5 velocidades, incluyendo la reversa, soportada en una estructura hecha de Perfil Tubular (PTR) de 5.08 cm X 5.08 cm. Para realizar los cambios de velocidad, se fabrica un mecanismo, el cual, se conecta desde la palanca situada en el costado derecho de jaula a la altura del brazo del conductor, y se acopla a la caja de transmisión situada en la parte trasera. El peso total de la estructura se calculó considerando que el tubo empleado tiene un peso de 1.5 kg por metro, lo que dió un total de 81 kg.

La SAE menciona, que el vehículo debe tener de ancho 152.4 cm como máximo, incluyendo neumáticos, la longitud no esta restringida, pero se sugiere que no exceda de 243.84 cm. El prototipo se diseña ajustándose a no sobrepasar dichas dimensiones, ya que de lo contrario el automóvil será más

difícil de manipular durante las pruebas a las que se someterá. Las dimensiones que se designaron son las siguientes: ancho de 152.4cm y largo de 236.22 cm. La altura de la estructura no tiene límite, así que se optó por comodidad para el conductor dimensionar a una altura de 132.08 cm totales. En la protección para el motor los elementos no exceden 81.28 cm en sus diagonales.

Para evitar bordes peligrosos o picos de la estructura, se realizan los dobleces pertinentes, además se pulen y resanan los puntos de unión para dar un acabado de forma presentable.

El material base de la estructura es un acero 1018 con un porcentaje 18% de carbono, recomendado por la SAE. Con sección circular y diámetro exterior de 3.34 cm, con un ancho de pared de 0.21 cm, un esfuerzo de fluencia del material  $S_y = 310.27$  MPa y módulo de elasticidad  $E = 210$  GPa, un momento de área  $I = 318016.06$  mm<sup>4</sup>.

Para la unión de los elementos, se empleó el proceso de soldadura oxiacetilénica y como material de aporte se usaron varillas cobrizadas.

Para el respaldo se utilizó una lámina de 0.8 mm. En el piso se usó lámina antiderrapante, la cual no está normada, por lo que se montó una lámina de 1.52 mm de espesor, para soportar el peso del conductor, así como los pedales y el asiento.

Una vez que se finalizó con la unión de todos los elementos que conforman la estructura, incluyendo láminas de respaldo y fondo, se pulen los puntos de unión y se aplica pasta resanante para cubrir la soldadura; para dejar una superficie lisa, se retiró el exceso de pasta empleando lijas de tamaño de grano 80, para dar la forma que se muestra en la Figura 4.3.

El peso es ilimitado para las condiciones de diseño, pero es importante hacer un vehículo ligero, con el fin de tener una mayor velocidad,

El diseño propuesto tiene un peso de 81 kg considerando los datos del proveedor y la cantidad de tubo utilizado, el cual para el tubo seleccionado su peso por metro es de 1.5 kg.

La tracción en la mayoría de los autos suele ser delantera, para el carro que se diseñó, la tracción es trasera, porque se ajusta mucho mejor al modelo convencional y además simplifica el diseño de la dirección. El motor trasmite su potencia a la caja de velocidades mediante un mecanismo de embrague. La potencia es transmitida a las llantas por la caja de velocidades, mediante cardanes que se acoplan a las masas donde se montan las llantas. El sistema de frenado del automóvil consiste en un sistema hidráulico y un sistema a través de balatas de tambor, las cuales se accionan a través de un sistema comprendido por dos cables de acero impulsados por un actuador hidráulico para las ruedas delanteras. Para la parte trasera, el sistema hidráulico acciona a dos calippers, los cuales permiten la fricción sobre los discos, que se fabricaron de placa de acero 1018, acoplados en cada uno de los rines de las ruedas.

El diseño de la estructura permite también, que todos los sistemas contenidos dentro del espacio del conductor, tales como pedales para frenado, embrague y aceleración, sistemas de frenado, cinturón de seguridad, mecanismo de dirección y mecanismo para el cambio de velocidad, tengan la capacidad de poder desmontarse de la estructura en determinado momento que se requiera, ya sea para mantenimiento de los sistemas y mecanismos mencionados como para el cambio de refacciones. No olvidando así, que también las partes que comprenden los sistemas de tracción y suspensión, puedan desmontarse con facilidad.

El tipo de motor utilizado es un Briggs and Stratton de 10 HP, modelo 205432, tipo 0036-E1 proporcionado por la SAE, será acoplado mediante poleas a una caja de transmisión de Renault 4L, la cual nos proporciona 4 velocidades y reversa que facilitará el manejo durante las pruebas, donde se fabricó un mecanismo para el cambio de velocidades. El motor y la transmisión deben ser

soportados por una base fabricada que se ubica en la parte trasera de la estructura, que estará protegida por una guarda hecha del mismo material base.

El motor debe estar acoplado firmemente a la estructura de manera que este no vibre, a fin de que la potencia transmitida no se vea afectada por el movimiento, manteniendo siempre las poleas alineadas para una mejor transmisión.

Durante el movimiento del automóvil para las pruebas a que será sometido, el conductor está expuesto a recibir impactos. Dichos impactos y la excitación misma del terreno sobre los neumáticos son algunas de las causas principales del cansancio del usuario. Para disminuir los impactos sobre el conductor se colocó un sistema de suspensión. El sistema de suspensión del automóvil consiste de 6 amortiguadores, 4 en la parte trasera del auto y 2 en la parte delantera, los cuales disminuirán los impactos proporcionando un mayor confort para el conductor.

## **4.2 Diseño de la estructura**

La estructura del vehículo todo terreno se diseña siguiendo las reglas establecidas por la SAE, adoptando la forma del prototipo base el cual debe estar dentro de las dimensiones y medidas de seguridad establecidas. Antes de proceder al corte de los elementos que conformarían la estructura se desarrollan todos los planos de manufactura por medio de Autocad, en donde se especifican las dimensiones, lo cual permitió observar de manera exacta cada una de las dimensiones y forma que presentarían los elementos que posteriormente se ensamblarían. Así como los ángulos de ensamble que presentaría la estructura, llegando así al modelo que se presenta en la Figura 4.1.

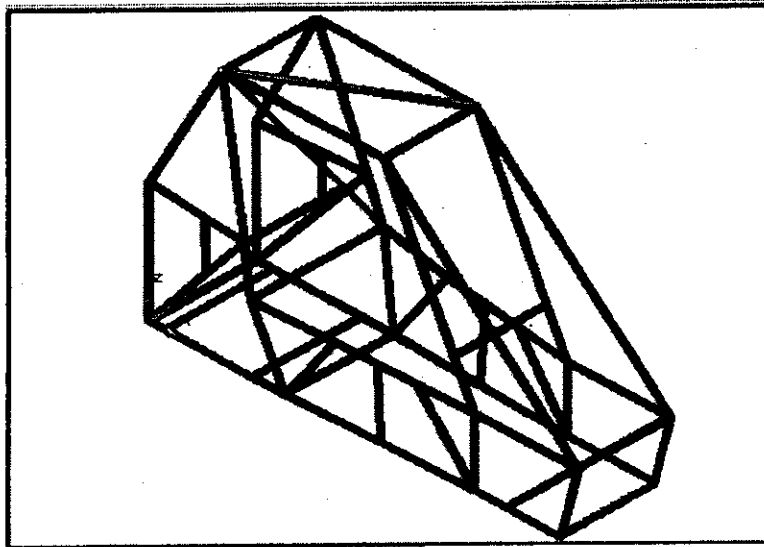


Figura 4.1 Modelo final.

Una vez obtenido el modelo al cual se pretende llegar y conociendo los materiales adecuados, se prosiguió a hacer el corte de acuerdo a las dimensiones del modelo final y a realizar los saques adecuados de los elementos que se obtuvieron en los planos. La herramienta que se utilizó para poder hacer a los tubos el ángulo y saque requerido para el ensamble es una fresa de extremo plano (end mill), de corte izquierdo. La forma de algunos elementos se realizó en la fresadora para el desbaste y saque de tubos utilizando un cortador de HSS de 2.54 cm de diámetro exterior para el desbaste de los tubos y un cortador de HSS de 3.175 cm para los saques. Es importante que se hayan hecho los saques con los ángulos que se determinaron en los planos, para que al momento del ensamble se ajustaran perfectamente, y así, tener un correcto proceso de soldadura.

#### 4.2.1 Ensamble de partes

Una vez realizado el bosquejo del modelo de la estructura y teniendo las dimensiones de cada uno de los elementos que la conformarían, se realizaron los cortes ejecutándose primero el marco inferior de la estructura comprendida por los elementos LFS, LC y AI que se muestran en la Figura 3.4. Y a partir de

este marco se ensamblaron los posteriores elementos, considerando los marcos principales los cuales son el respaldo, el toldo y la parte frontal de la estructura cuyo ensamble se realizó por separado como se muestra en la Figura 4.2.

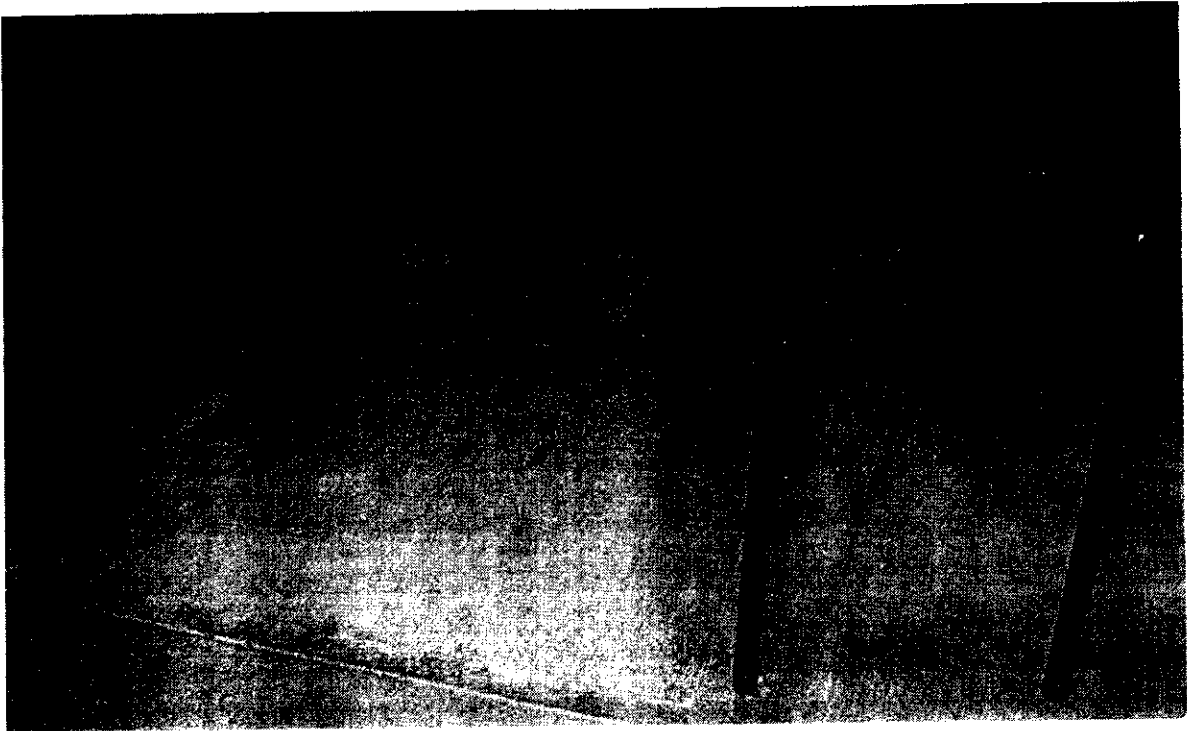


Figura 4.2 Marcos principales de la estructura

Una vez realizados todos los cortes y dobleces de los tubos necesarios para formar los marcos, evitando la formación de picos en la estructura, se prosiguió a la unión de los elementos, aplicando el proceso de soldadura oxiacetilénica, ya que el espesor del tubo seleccionado, no permitía que se aplicara soldadura por arco eléctrico, porque el material se fundiría fácilmente, no permitiendo una unión adecuada entre los elementos, presentando huecos entre estos. El tamaño de la punta del soplete utilizado para este proceso fue una boquilla No. 1, que tiene un diámetro de orificio de 0.1016 cm la cual es la óptima para soldar un espesor de metal de 0.119 cm a 0.238 cm (Kazanas et al., 1989).

Al término del ensamble de los marcos y todos los demás elementos que conformarían la estructura, adoptó la forma que se muestra en la Figura 4.3.

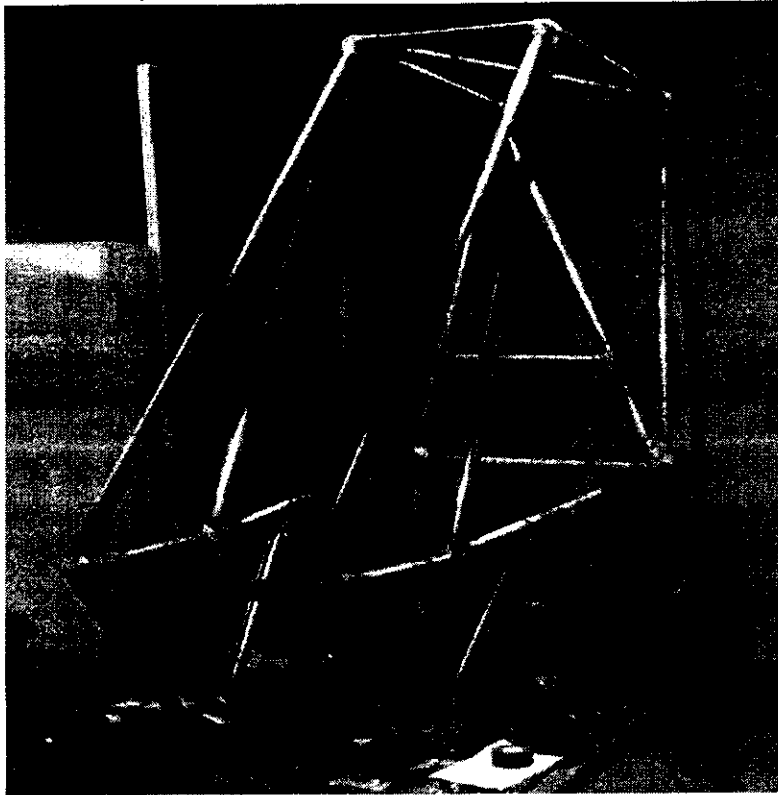


Figura 4.3 Estructura del carro todo terreno

Después de haber ensamblado todos los marcos principales se reforzó la estructura adicionándole elementos que fueran de seguridad y otros para el soporte de motor, orquillas delanteras, traseras así como amortiguadores, y un elemento para la instalación de los cinturones de seguridad. Y por último se le da a la estructura un acabado fino a la soldadura, puliéndola y resanándola con la pasta especial para posteriormente lijarla.

## **5 ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA POR MÉTODO DE ELEMENTO FINITO**

### **5.1 Definición de la topología de la estructura**

Para realizar el análisis de la estructura por el Metodo de Elemento Finito, se utilizó el modelo final, en el que se identifica cada elemento de la estructura del vehículo y localizando los nodos de unión correspondientes, para posteriormente identificar en cuales se aplican las cargas principales.



En la Figura 5.1, se muestran los elementos que conforman la estructura de la parte frontal del vehículo, dichos elementos guardarán esta posición para el análisis por elemento finito, de cada uno de los elementos se determinó: peso, longitud, área, módulo de Young, densidad y las coordenadas tomadas de un punto de referencia.

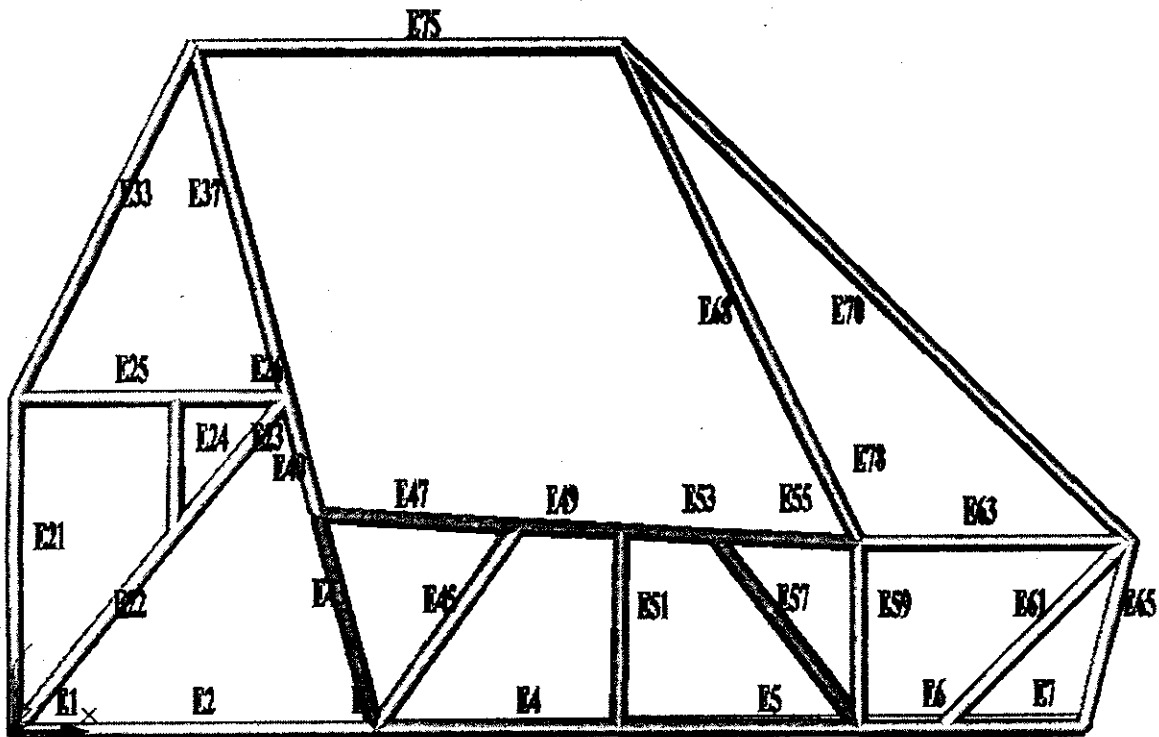


Figura 5.1 Vista frontal

En la Figura 5.2, que es una vista posterior de la estructura del vehículo se observa la posición de los elementos al igual que en la Figura 5.1, estos elementos sirven de protección del motor para cualquier accidente, mientras que otros servirán para la protección del conductor. Los elementos E2, E9, E22, E23, E59 y E60 son utilizados para la colocación de los amortiguadores.

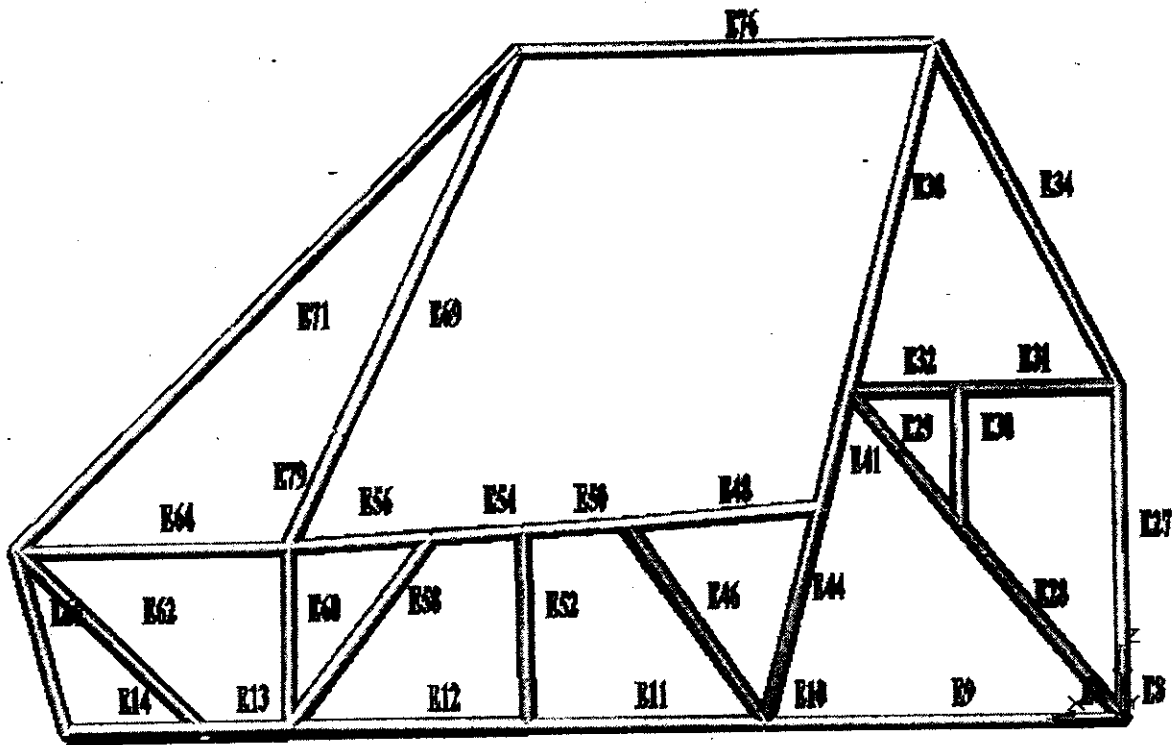


Figura 5.2 Vista posterior

Para observar todos los elementos de la estructura se presentaron diferentes vistas para poder localizar los elementos que se encuentran en dicha vista, para que posteriormente se pueda encontrar la conectividad de cada uno de los elementos con los nodos correspondientes.

En la Figura 5.3, se muestran los elementos de la parte central de la estructura, algunos de los elementos son utilizados para soportar el peso del motor como los son E16 y E17, Los elementos E18, E35, E36, E42, E39 y E79 son utilizados para colocar la lámina que se utiliza como respaldo, protección del conductor y para colocar el cinturón de seguridad. Los elementos E18, E19 y E80, son utilizados para soportar al conductor y soportar la lámina antiderrapante, así como los pedales y sistemas de frenos. Los elementos E20 y E67, es la protección de los pies, y el elemento E72 su función es para la colocación del volante. Los elementos E73, E74, E75, E76 y E77, son usados para el techo del vehículo, el cual solo soportará el número designado por la SAE.

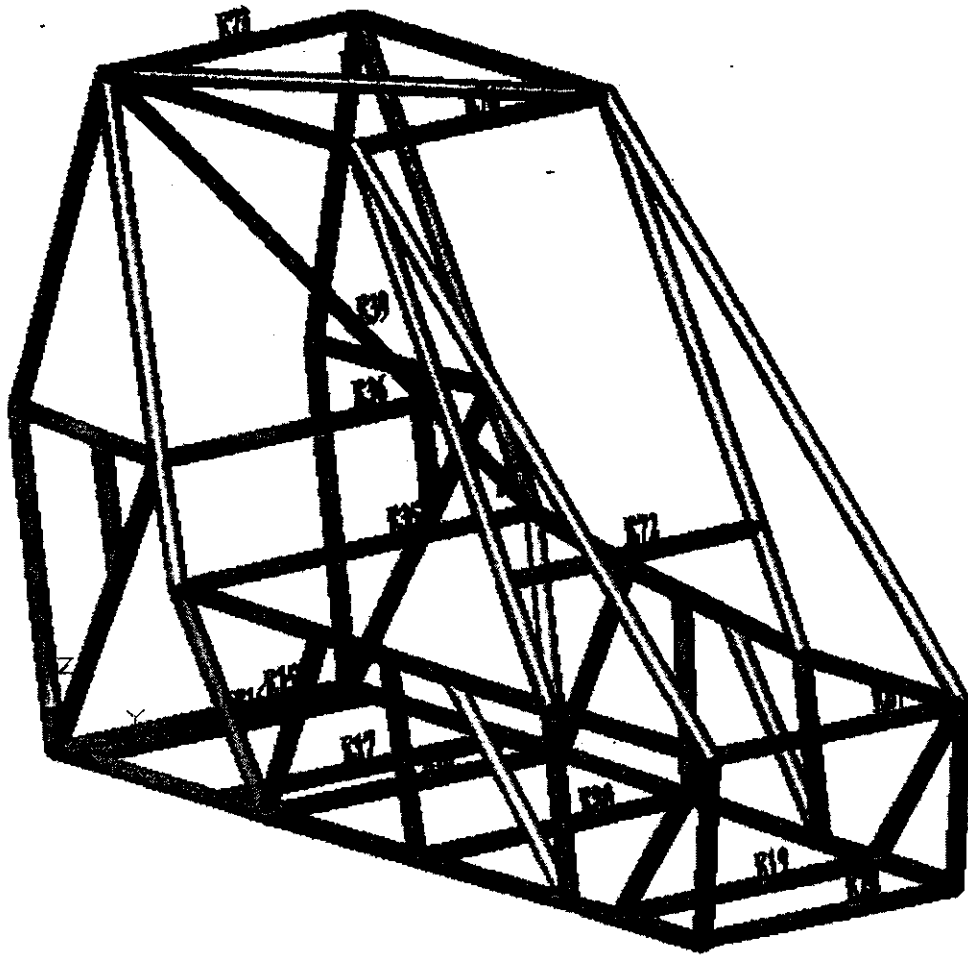


Figura 5.3 Elementos de la parte central

En la Figura 5.4, se observa la posición de todos los nodos con la que esta constituida toda la estructura, estos son utilizados para designar la conectividad de los elementos, estos datos son mostrados en la tabla 4.1, mostrando los datos que se utilizaron para realizar los programas en Matlab para el análisis de elemento finito.

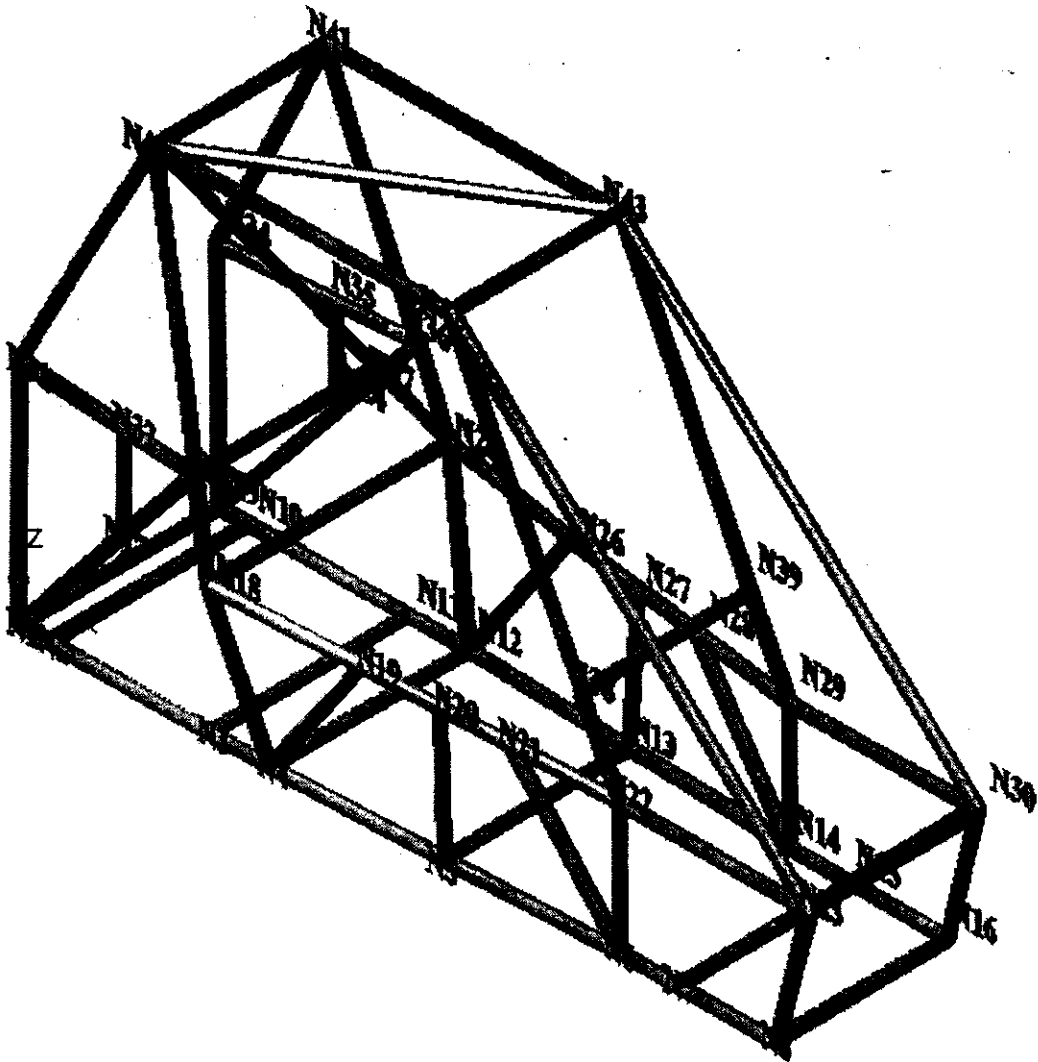


Figura 5.4 Vista isométrica

En la Tabla 5.1 se muestra la conectividad de cada uno de los elementos, así como las propiedades del material empleado para la construcción de la estructura.

Elemento No.	Conectividad	Longitud (m)	Peso (Kg)	E_Y (GPa)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Área (m <sup>2</sup> )
E1	N1 N2	0.08255	0.1238	210	7538.87	3.87E-04
E2	N2 N3	0.44196	0.6629	210	7538.87	3.87E-04
E3	N3 N4	0.1651	0.2476	210	7538.87	3.87E-04
E4	N4 N5	0.461772	0.6926	210	7538.87	3.87E-04
E5	N5 N6	0.461772	0.6926	210	7538.87	3.87E-04
E6	N6 N7	0.1651	0.2476	210	7538.87	3.87E-04
E7	N7 N8	0.2667	0.4	210	7538.87	3.87E-04
E8	N9 N10	0.08255	0.1238	210	7538.87	3.87E-04
E9	N10 N11	0.44196	0.6629	210	7538.87	3.87E-04
E10	N11 N12	0.1651	0.2476	210	7538.87	3.87E-04
E11	N12 N13	0.461772	0.6926	210	7538.87	3.87E-04
E12	N13 N14	0.461772	0.6926	210	7538.87	3.87E-04
E13	N14 N15	0.1651	0.2476	210	7538.87	3.87E-04
E14	N15 N16	0.2667	0.4	210	7538.87	3.87E-04
E15	N1 N9	0.549275	0.8239	210	7538.87	3.87E-04
E16	N2 N10	0.549275	0.8239	210	7538.87	3.87E-04
E17	N3 N11	0.549275	0.8239	210	7538.87	3.87E-04
E18	N4 N12	0.549275	0.8239	210	7538.87	3.87E-04
E19	N7 N15	0.4699	0.7048	210	7538.87	3.87E-04
E20	N8 N16	0.4699	0.7048	210	7538.87	3.87E-04
E21	N1 N31	0.63246	0.9486	210	7538.87	3.87E-04
E22	N1 N17	0.48641	0.7296	210	7538.87	3.87E-04
E23	N17 N33	0.3302	0.4953	210	7538.87	3.87E-04
E24	N17 N32	0.25908	0.3886	210	7538.87	3.87E-04
E25	N31 N32	0.3048	0.4572	210	7538.87	3.87E-04
E26	N32 N33	0.213868	0.3208	210	7538.87	3.87E-04
E27	N9 N34	0.63246	0.9486	210	7538.87	3.87E-04
E28	N9 N24	0.48641	0.7296	210	7538.87	3.87E-04
E29	N24 N36	0.3302	0.4953	210	7538.87	3.87E-04
E30	N24 N35	0.25908	0.3886	210	7538.87	3.87E-04
E31	N34 N35	0.3048	0.4572	210	7538.87	3.87E-04
E32	N35 N36	0.213868	0.3208	210	7538.87	3.87E-04
E33	N31 N40	0.74676	0.9486	210	7538.87	3.87E-04
E34	N34 N41	0.74676	0.9486	210	7538.87	3.87E-04
E35	N18 N25	0.66802	1.002	210	7538.87	3.87E-04
E36	N33 N37	0.50038	0.7505	210	7538.87	3.87E-04
E37	N33 N40	0.6858	1.028	210	7538.87	3.87E-04

Tabla 5.1 Conectividad de los elementos y propiedades

Elemento N.	Conectividad	Longitud (m)	Peso (Kg)	E_Y (GPa)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Área (m <sup>2</sup> )
E38	N36 N41	0.08255	1.028	210	7538.87	3.87E-04
E39	N37 N40	0.44196	1.207	210	7538.87	3.87E-04
E40	N18 N33	0.1651	0.3429	210	7538.87	3.87E-04
E41	N25 N36	0.461772	0.3429	210	7538.87	3.87E-04
E42	N25 N37	0.461772	0.4076	210	7538.87	3.87E-04
E43	N4 N18	0.1651	0.6381	210	7538.87	3.87E-04
E44	N12 N25	0.2667	0.6381	210	7538.87	3.87E-04
E45	N4 N19	0.08255	0.7124	210	7538.87	3.87E-04
E46	N12 N26	0.44196	0.7124	210	7538.87	3.87E-04
E47	N18 N19	0.1651	0.5715	210	7538.87	3.87E-04
E48	N25 N26	0.461772	0.5715	210	7538.87	3.87E-04
E49	N19 N20	0.461772	0.2952	210	7538.87	3.87E-04
E50	N26 N27	0.1651	0.2952	210	7538.87	3.87E-04
E51	N5 N20	0.2667	0.5715	210	7538.87	3.87E-04
E52	N13 N27	0.549275	0.5715	210	7538.87	3.87E-04
E53	N20 N21	0.549275	0.2667	210	7538.87	3.87E-04
E54	N27 N28	0.549275	0.2667	210	7538.87	3.87E-04
E55	N21 N22	0.549275	0.4191	210	7538.87	3.87E-04
E56	N28 N29	0.4699	0.4191	210	7538.87	3.87E-04
E57	N6 N21	0.4699	0.6972	210	7538.87	3.87E-04
E58	N14 N28	0.63246	0.6972	210	7538.87	3.87E-04
E59	N6 N22	0.48641	0.5334	210	7538.87	3.87E-04
E60	N14 N29	0.3302	0.5334	210	7538.87	3.87E-04
E61	N7 N23	0.25908	0.762	210	7538.87	3.87E-04
E62	N15 N30	0.3048	0.762	210	7538.87	3.87E-04
E63	N22 N23	0.213868	0.7848	210	7538.87	3.87E-04
E64	N29 N30	0.63246	0.7848	210	7538.87	3.87E-04
E65	N8 N23	0.48641	0.5334	210	7538.87	3.87E-04
E66	N16 N30	0.3302	0.5334	210	7538.87	3.87E-04
E67	N23 N30	0.25908	0.7038	210	7538.87	3.87E-04
E68	N38 N42	0.3048	1.2192	210	7538.87	3.87E-04
E69	N39 N43	0.213868	1.2192	210	7538.87	3.87E-04
E70	N23 N42	0.74676	2.042	210	7538.87	3.87E-04
E71	N30 N43	0.74676	2.042	210	7538.87	3.87E-04
E72	N38 N39	0.66802	0.7038	210	7538.87	3.87E-04
E73	N40 N41	0.50038	0.7096	210	7538.87	3.87E-04
E74	N42 N43	0.6858	0.7093	210	7538.87	3.87E-04
E75	N40 N42	0.6858	1.2192	210	7538.87	3.87E-04
E76	N41 N43	0.80518	1.2192	210	7538.87	3.87E-04
E77	N40 N43	0.2286	1.4	210	7538.87	3.87E-04
E78	N22 N38	0.2286	0.3562	210	7538.87	3.87E-04
E79	N29 N39	0.27178	0.3562	210	7538.87	3.87E-04
E80	N5 N13	0.42545	0.762	210	7538.87	3.87E-04

Continuación de la Tabla 5.1

En la Tabla 5.2 se muestran las coordenadas de los nodos tomando como referencia un punto fijo para todos.

Nodo	X	Y	Z
N1	0	0	0
N2	0.08255	0	0
N3	0.52451	0	0
N4	0.68961	0	0
N5	1.1513058	0.01984502	0
N6	1.6130016	0.0396875	0
N7	1.778	0.0396875	0
N8	2.0447	0.0396875	0
N9	0	0.549275	0
N10	0.08255	0.549275	0
N11	0.52451	0.549275	0
N12	0.68961	0.549148	0
N13	1.1513058	0.52930552	0
N14	1.6130016	0.5094605	0
N15	1.778	0.5094605	0
N16	2.0447	0.5095875	0
N17	0.30894528	-0.02081276	0.37510974
N18	0.57958736	-0.059436	0.41095422
N19	0.96233234	-0.01731772	0.38393878
N20	1.1581638	0	0.37367464
N21	1.33504432	0.01533652	0.36440618
N22	1.6130016	0.0396875	0.34983928
N23	2.1362416	0.0396875	0.34983928
N24	0.30844236	0.5700522	0.37450014
N25	0.57949592	0.608584	0.41095422
N26	0.95460058	0.56597296	0.3842512
N27	1.1581638	0.54930802	0.37367464
N28	1.33504432	0.53381148	0.36440618
N29	1.6130016	0.5094605	0.34983928
N30	2.1362416	0.5094605	0.34983928
N31	0	0	0.63246
N32	0.30691328	-0.0206756	0.63204852
N33	0.52032916	-0.035052	0.63176404
N34	0	0.549275	0.63246
N35	0.30691328	0.5699506	0.63504852

Tabla 5.2 Coordenadas de los elementos

Nodo	X	Y	Z
N36	0	0	0
N37	0	0	0
N38	0	0	0
N39	0	0	0
N40	0	0.01984502	0
N41	0	0.0396875	0
N42	0	0.0396875	0
N43	0	0.0396875	0

Continuación de la Tabla 5.2

## 5.2 Definición de las cargas y condiciones frontera

La estructura tiene como cargas más significativas las que son causadas por el peso del motor, caja de transmisión y conductor, las cuales están distribuidas de la siguiente forma:

**Motor:** tiene un peso de 30 kg con carga completa de combustible y aceite, el cual esta distribuido dentro de los elementos E2, E9, E16 y E17, los cuales tienen como nodos de apoyo N2, N3, N10, N11.

**Caja de transmisión:** tiene un peso de 45 Kg con aceite incluido, acoplado a un sistema de embrague para realizar la transmisión de potencia del motor a la caja de transmisión, el cual esta distribuido dentro de los elementos E2, E9, E16 y E17, los cuales tienen como nodos de apoyo N2, N3, N10, N11, porque el motor y la caja de transmisión están montados uno sobre el otro apoyándose en los elementos y nodos mencionados.

**Conductor:** por norma el peso del conductor es de 113.4 kg que estará soportado por los elementos E4, E11, E18 y E80 donde se colocará el asiento que lo alojará, y como nodos de apoyo N4, N5, N12 y N13.



La carga de los pedales, volante, el mecanismo para el cambio de velocidades y el peso del asiento son despreciados para el análisis porque no son cargas significativas que pueda presentar alguna variación contundente en los elementos donde se soporta.

Como condiciones de frontera de la estructura, solo se considera la carga del conductor y la caja de transmisión, los elementos E35, E36, E42, E49 no se consideran ya que estos solo son respaldo para el conductor.

Las orquillas donde se acoplaron los neumáticos traseros están unidas a los elementos E2 y E9, y los nodos N2, N3, N10 y N11 de la estructura que son los que se consideran para su estudio. Para la parte delantera los elementos que se presentan son E7, E6, E13 y E14 y los nodos de apoyo son N6, N7, N8, N14, N15 y N16. Estos elementos se eligieron para el estudio por ser los que soportarán las excitaciones debidas al terreno. Si el carro sufriera un impacto frontal, es importante que la estructura resistiera por lo que también se analizan los elementos E20, E65, E66, E67 y los nodos N8, N16, N23 y N30 que son los que forman el marco frontal de protección contra impactos. En caso de un choque en la parte trasera, se consideran los elementos E15, E21, E27 y nodos de apoyo N1, N9, N31 y N34 que son los que se encuentran como protección para el motor y la caja de transmisión, y en caso de un posible choque es importante que no los dañe por algún derrame de líquido que se presente en el motor y caja de transmisiones.

Los amortiguadores traseros tienen como elementos de apoyo E24 y E30 y los nodos N17, N24, N32 y N35. Estos elementos deben tener la capacidad de soportar la carga absorbida por el amortiguador y en la parte delantera los amortiguadores tienen como elementos E63 y E64 y los nodos N22, N23, N29 y N30.

### 5.3 Definición de las excitaciones

Para un análisis del vehículo todo terreno, se le aplicarán funciones de excitación para saber como responde la estructura, las cuales son función escalón, función armónica y función aleatoria, las cuales se describirán a continuación:

Un escalón ideal, es una señal cuyo tiempo de crecimiento inicial es cero. Si el tiempo de crecimiento inicial es varias veces mas pequeño que el período correspondiente a la frecuencia máxima de interés, el error que se introduce en la identificación puede considerarse despreciable (Ogata, 2003).

La señal escalón, es la señal que más se ha aplicado en la práctica convencional de control automático de procesos monovariantes simples y pocos perturbados (Ogata, 2003).

Función escalón: Sea la función escalón descrita por la ecuación (5.1) (Kuo, 1997; Ogata, 2003).

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) &= A & \text{si } t > 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Donde  $A$  es una constante. Obsérvese que se trata de un caso especial de una función exponencial  $Ae^{-\alpha t}$ , donde  $\alpha = 0$ . La función escalón queda identificada en  $t = 0$ . Su transformada de Laplace esta dada por la ecuación (5.2) (Ogata, 2003):

$$\lambda[A] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s} \tag{5.2}$$

Al efectuar la integración, se supuso que la parte real de  $s$  era mayor que cero (la abscisa de convergencia) y por lo tanto, que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}$  era cero. Como se indico antes, la transformada de Laplace así obtenida, es valida en todo plano  $s$  excepto en el polo  $s = 0$  (Ogata, 2003).

La función escalón cuya altura es la unidad, recibe el nombre de función *escalón unitario*. La función escalón unitario que se produce en  $t = t_0$ , se denota a menudo como  $u(t - t_0)$  o  $1(t - t_0)$ . La función escalón de altura  $A$ , también se puede escribir como  $f(t) = A1(t)$ . La transformada de Laplace de la función escalón unitario, esta definida por la ecuación (5.3) (Ogata, 2003).

$$\begin{aligned} 1(t) & \text{ para } t < 0 & 1(t) & \text{ para } t \neq 0 \\ 1(t) & \text{ para } t > 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Es  $\frac{1}{s}$ , o  $\lambda[1(t)] = \frac{1}{s}$ . Físicamente, una función escalón producida en  $t = 0$  corresponde a una señal constante aplicada súbitamente al sistema al instante en que el tiempo  $t$  es igual a 0 (Ogata, 2003).

Las funciones armónicas son las que se emplean frecuentemente para el análisis del impacto y de la vibración. La respuesta de un sistema de multigrados de libertad, debido a una excitación armónica, es la suma de la solución homogénea y de la solución particular. Si el amortiguamiento no esta incluido, la solución homogénea frecuentemente se ignora. En una situación real, el amortiguamiento se presenta, causando a la solución homogénea, un decremento con el tiempo. En tiempos largos solo tendremos solución particular (Nelly, 2000).

El método de coeficientes indeterminados puede adaptarse para encontrar la solución particular de un sistema de multigrados de libertad sujetos a la excitación armónica. El método de coeficientes indeterminados se puede usar para sistemas amortiguados y no amortiguados. Esta aplicación para  $n$  grados de libertad, requiere que la solución sea menor de  $n$  ecuaciones simultaneas. Más aún, el método de coeficientes indeterminados es eficiente para sistemas con pocos grados de libertad (Nelly, 2000).

Este tipo de excitación tiene la peculiaridad de que se excita simultáneamente todo el rango de frecuencias sobre el que se realiza el estudio. El término aleatorio hace referencia a la amplitud de la fuerza de excitación que en términos estadísticos sigue una distribución de probabilidad gaussiana. Es el tipo de excitación más usada en análisis dinámico, ya que se trata en muchos casos de una aproximación más real de las vibraciones a que se somete la estructura en su solicitud de servicio. Con este tipo de excitación se consigue un espectro plano y continuo en promedio, lo cual garantiza que la energía aportada tenga el mismo nivel para cada frecuencia dentro del rango de interés.

Los primeros intentos de aplicar señales de naturaleza aleatoria en la identificación de procesos, especialmente aquellas que poseen características cercanas al llamado ruido blanco. Las señales aleatorias poseen con respecto a otras, como el escalón, la ventaja de que su amplitud puede ser muy pequeña, reduciéndose por tanto el grado de perturbación que se introduce en la planta objeto de identificación. Por otra parte, estas señales pueden superponerse a los valores normales de la variable de entrada, independientemente de las variaciones de esta, sin que se afecte, al menos teóricamente, el proceso de identificación.

Las funciones aleatorias como el ruido solo se pueden describir en forma estadística o probabilística. Si una señal con características aleatorias se introduce a un sistema determinístico, se tendrá una señal de salida no determinística (Guillén Estévez, 1980).

## **6 RESULTADOS**

### **6.1 Respuesta de la estructura bajo excitación armónica**

Para encontrar la respuesta de la estructura bajo una función armónica se realizó el análisis de la siguiente forma: para la transmisión y motor a gasolina se tomaron sus nodos correspondientes que son N2, N3, N10 y N11 donde estos se sitúan, cuyos elementos que los conforman son E16 y E17, ahora bien, para el conductor se toman los nodos N4, N5, N12 y N13 cuyos elementos que lo

conforman son E18 y E80, las excitaciones se dan en los nodos N2, N3, N7, N8, N15 y N16 que es donde se acoplan las orquillas para los neumáticos, estos nodos se toman como referencia para el análisis, donde los elementos que lo conforman son E7, E14, E2 y E9; como ya se había mencionado el análisis fue realizado mediante un programa computacional hecho en MATLAB. La Tabla 6.1 muestra como están distribuidas las cargas en la estructura.

Carga	Peso (kg)	Nodos	Elemento
Transmisión y motor	16.25	N2, N10	E16
Transmisión y motor	16.25	N3, N11	E17
Conductor	28.35	N4, N12	E18
Conductor	28.35	N5, N13	E80

Tabla 6.1 Ubicación de las cargas

Durante el análisis se estableció el nodo 14 como la excitación de la estructura, tomando una frecuencia de 0.001 Hz., una amplitud de 5 mm para todos los nodos a graficar, de los cuales se obtuvieron los elementos que presentaban mayores esfuerzos (Axial, Torsional y Flexionante), así, se tomó para el análisis los elementos que tienen puntos críticos y enfocarnos a ellos para su descripción, ya que de estos son los que mas importan debido a que están sometidos a grandes esfuerzos.

El elemento que presentó mayores esfuerzos durante el análisis fue el elemento 24, el cual presenta esfuerzos máximos axial y torsional, los cuales obtuvieron un valor de  $1.2202 \times 10^{14}$  Pa,  $3.4359 \times 10^9$  Pa respectivamente y un esfuerzo flexionante de  $9.0723 \times 10^9$  Pa. La respuesta se presenta en forma senoidal ya que la fuente de excitación es de la misma forma, y además, se aprecia en las gráficas de las figuras: Figura 6.1., Figura 6.2 y Figura 6.3 que tienen variaciones muy pequeñas como respuesta a lo largo del periodo de tiempo del análisis.

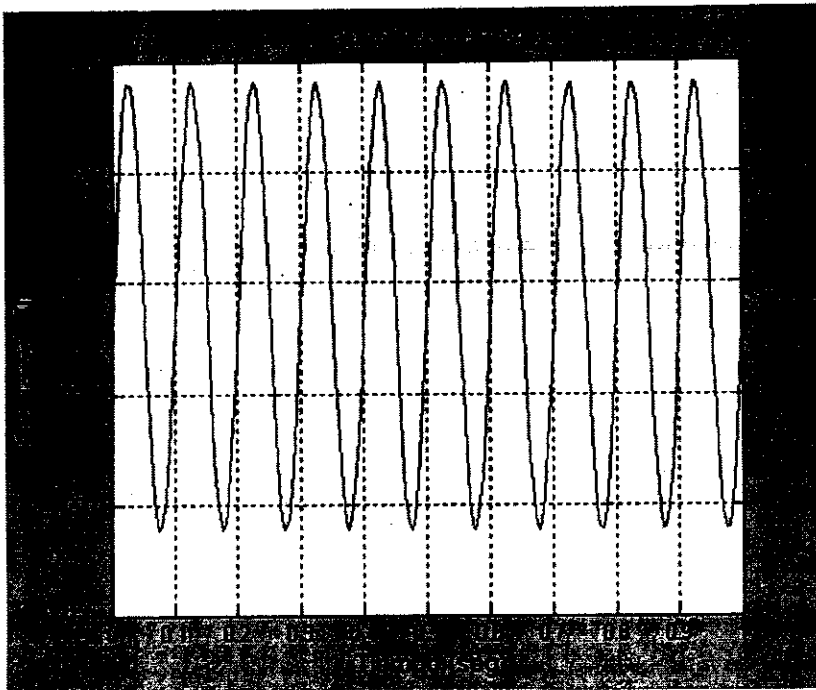


Figura 6.1. Esfuerzo axial

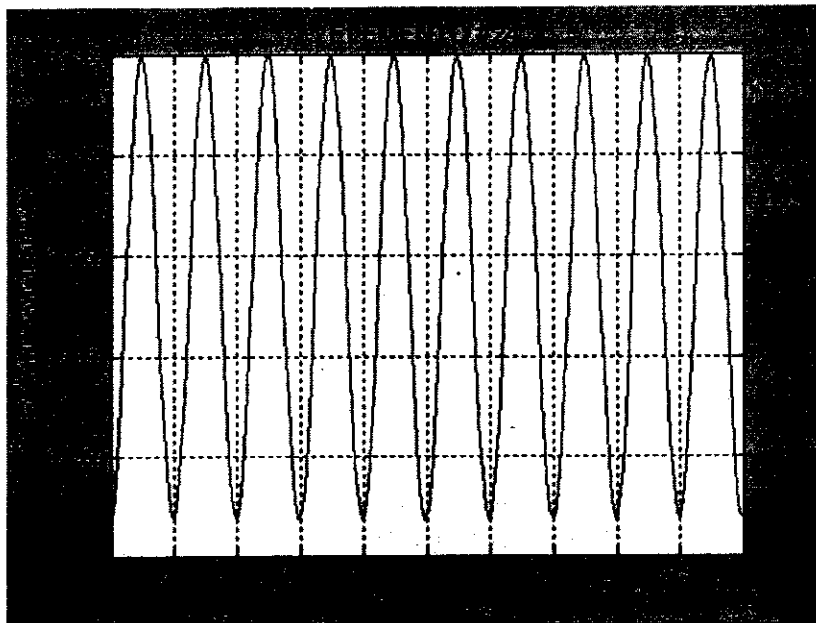


Figura 6.2 Esfuerzo torsional

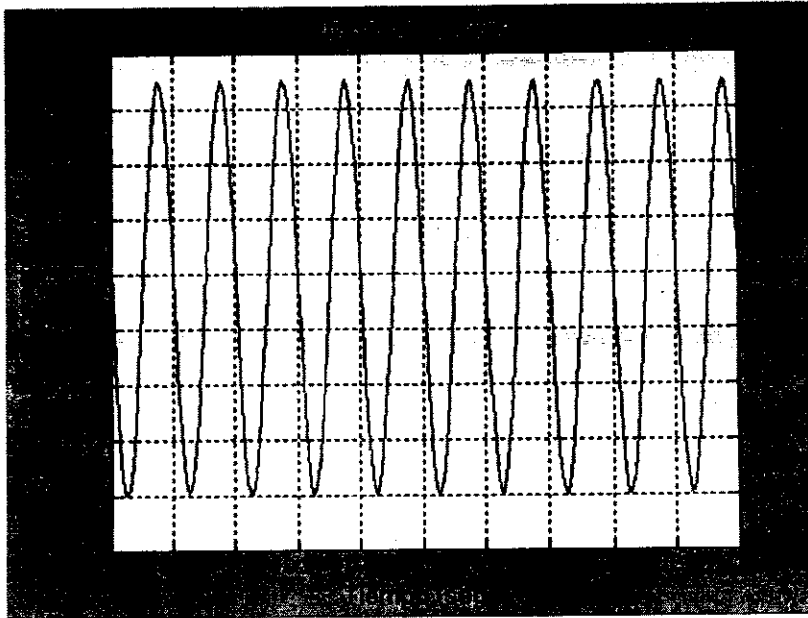


Figura 6.3 Esfuerzo flexionante

Un elemento sometido a flexión, torsión o axial, significaría que éste se deformara elásticamente, en caso de que el esfuerzo fuera muy excesivo en cualquiera de sus casos. En caso de que se presentara un esfuerzo demasiado excesivo sobre un elemento ocasionaría que éste se fracture afectando a las demás partes de la estructura.

Otro de los elementos donde se observó que presentaba grandes esfuerzos fue en el elemento 8. Donde el esfuerzo flexionante fue mayor que en el esfuerzo axial y torsional, obteniendo un valor de  $4.2483 \times 10^{10}$  Pa, mientras que para los otros esfuerzos se presentaron valores de  $2.3426 \times 10^{12}$  Pa y  $7.151 \times 10^7$  Pa respectivamente. Al igual que el elemento anterior sus variaciones son muy pequeñas y de forma senoidal. Las gráficas de las respuestas de éstos elementos se muestran en las figuras: Figura 6.4 de esfuerzo axial, Figura 6.5 del esfuerzo torsional y Figura 6.6 del esfuerzo flexionante.

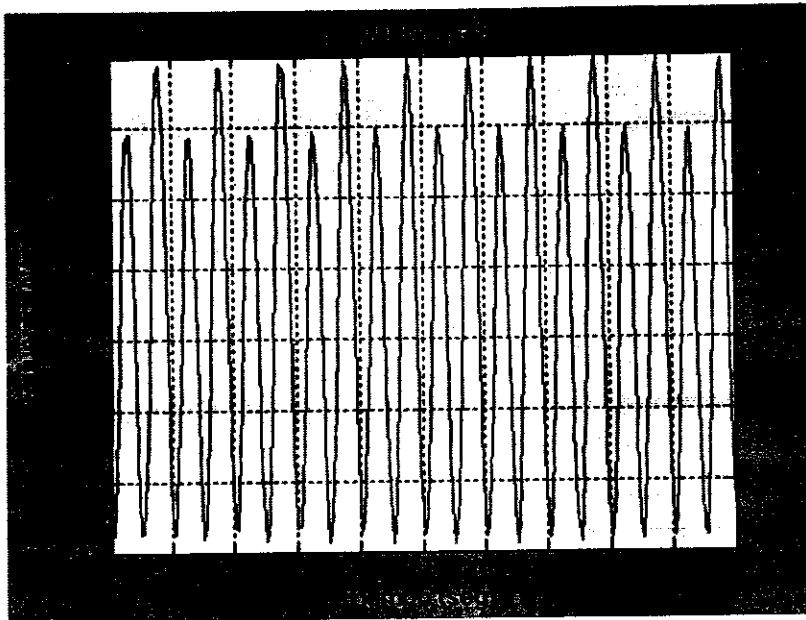


Figura 6.4 Esfuerzo axial

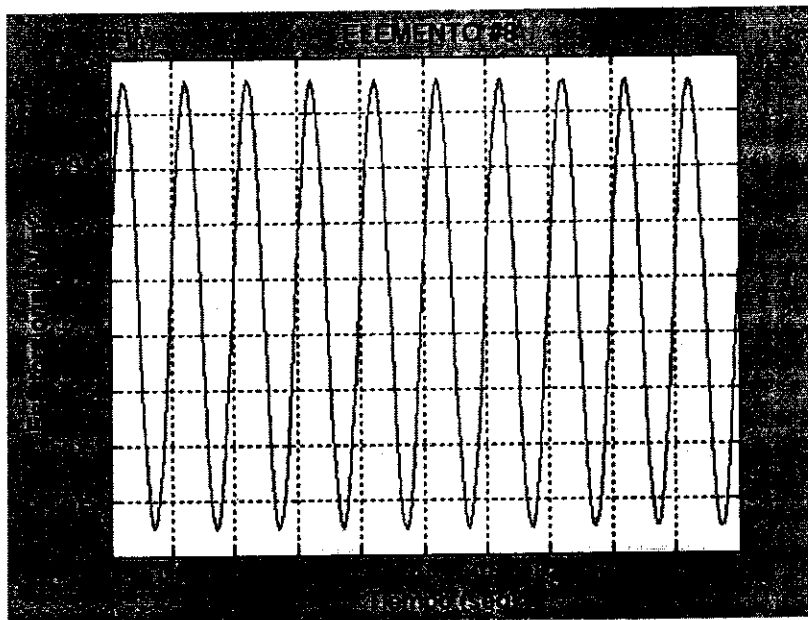


Figura 6.5 Esfuerzo torsional



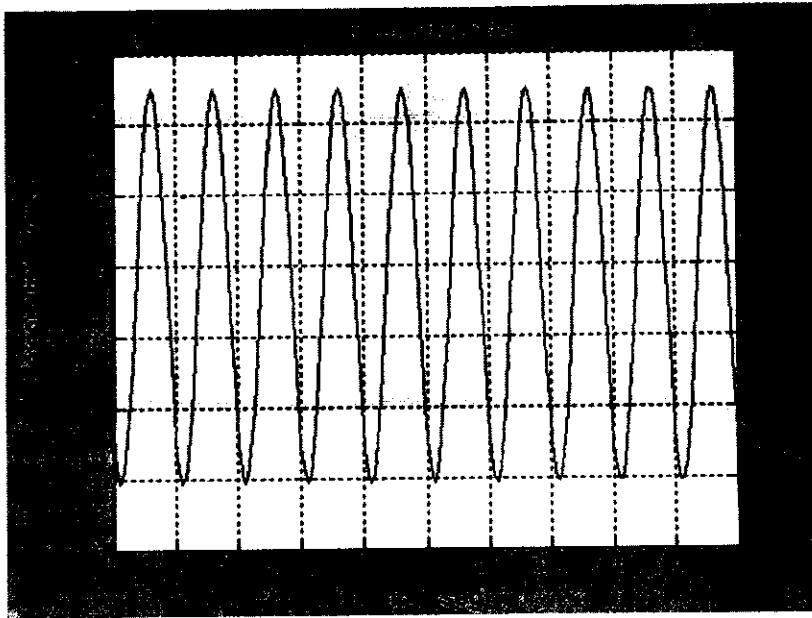


Figura 6.6 Esfuerzo flexionante

Al hacer el estudio de los desplazamientos que sufren cada uno de los nodos en los ejes X, Y y Z, se encontró que estos nodos no tenían grandes desplazamientos al introducir la excitación senoidal en el eje Z que se interpretó como el eje de referencia en el cual actuaría la excitación. Estos desplazamientos ayudan a determinar si la estructura se deforma de tal manera que pueda sufrir daños a los puntos de unión o en otro de los casos que la estructura se pueda desprender en algunos de los nodos donde pudiera ser que se presentara un desplazamiento muy grande.

Tomando el mismo nodo (N32) para obtener el análisis de los desplazamientos, teniendo una excitación de forma senoidal, con una amplitud de 5 mm y una frecuencia de 0.001 Hz. Se obtuvo que el nodo presenta mayor desplazamiento sobre el eje Z, teniendo un valor de 0.2 mm a la salida con las condiciones ya descritas, este valor obtenido se puede apreciar en la Figura 6.7.

En los ejes X y Y se presentaron valores de  $1.8 \times 10^{-5}$  m, que se puede observar en la Figura 6.8 y  $7.8 \times 10^{-5}$  m como se observa en la Figura 6.9, respectivamente que son desplazamientos muy pequeños.

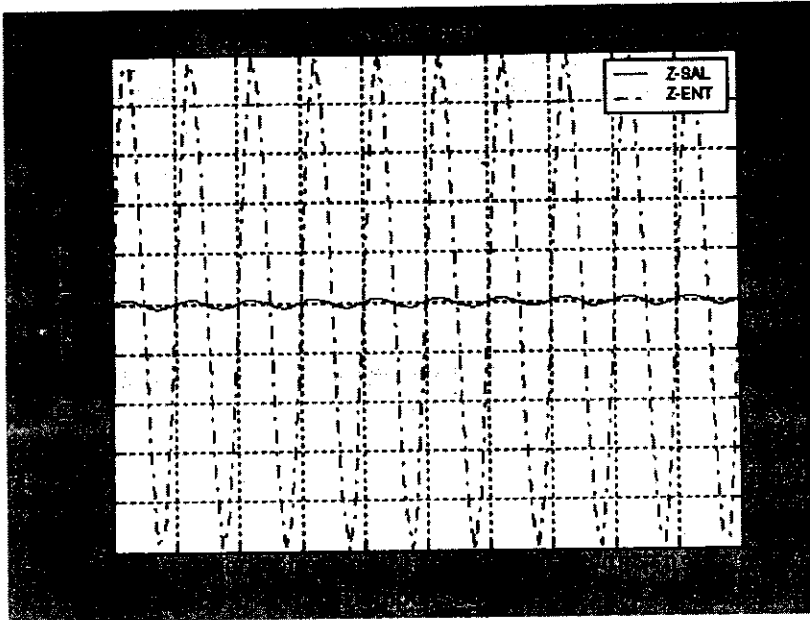


Figura 6.7 Desplazamiento en el eje Z

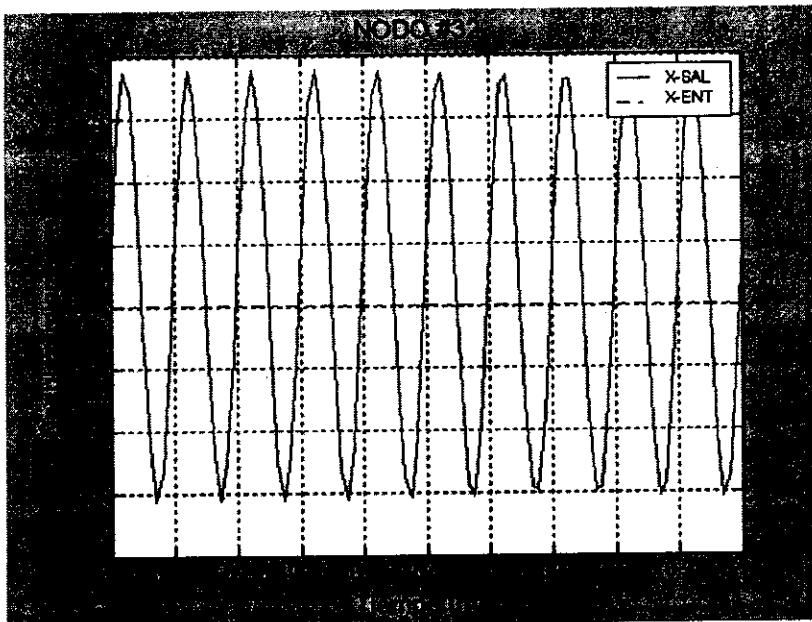


Figura 6.8 Desplazamiento en el eje X

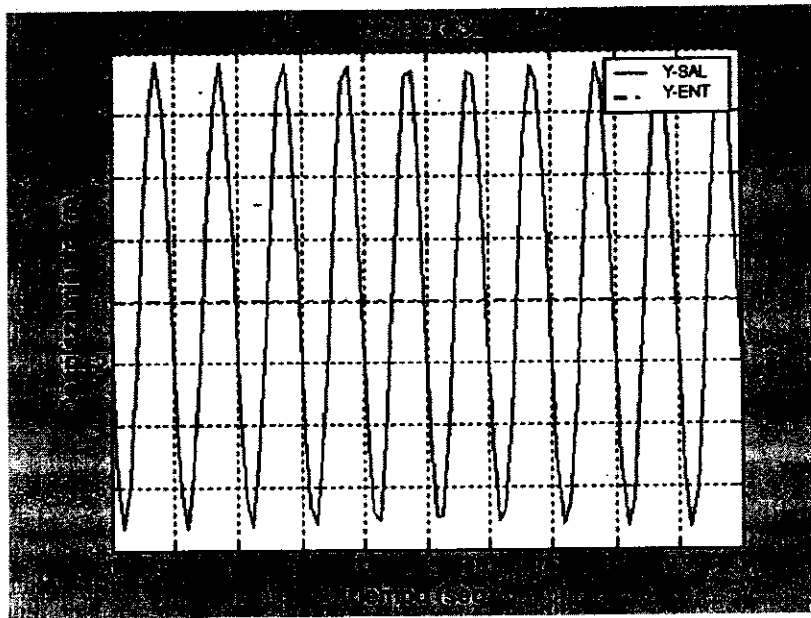


Figura 6.9 Desplazamiento en el eje Y

La respuesta en frecuencia del análisis ayuda a determinar bajo que frecuencias el nodo presenta sus puntos críticos, el cual se toma un rango de frecuencias desde 0 hasta 1000 Hz, en las cuales el nodo puede entrar en resonancia afectando la estructura. Se puede observar en la Figura 6.10 que un punto crítico para el nodo 32 se presenta en una frecuencia de 10 Hz, el cual tiene un valor de desplazamiento de  $2.8 \times 10^{-4}$  m que es el pico mas grande que se tiene para el rango de frecuencias, después se observa un pico con valor mas pequeño a una frecuencia de 580 Hz el cual ya no es tan importante como el primero por la amplitud de este.

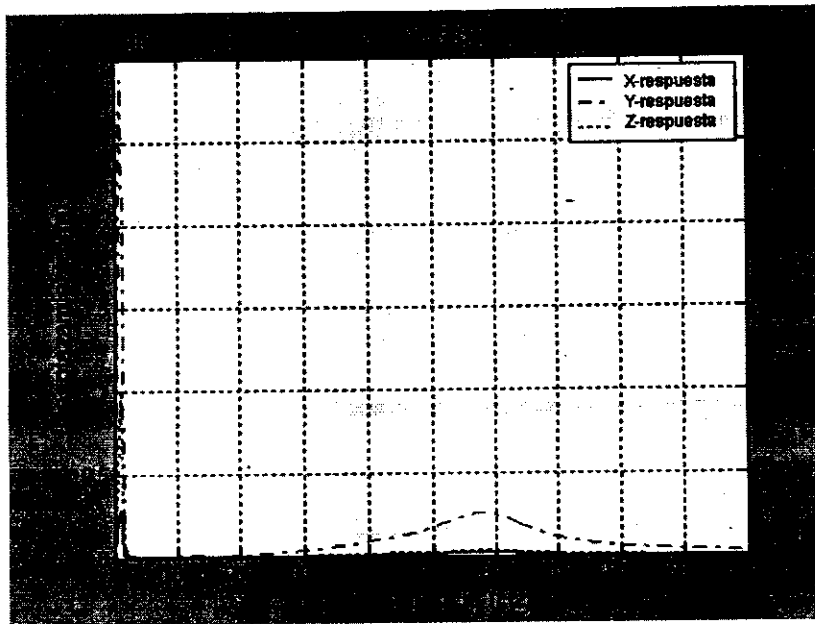


Figura 6.10 Respuesta en frecuencia

## 6.2 Respuesta de la estructura bajo excitación escalón

Para hacer el análisis de la estructura se recurrió al Método de Newmark y realizando un programa en MATLAB para encontrar la respuesta bajo una función escalón. Las condiciones para este estudio se establecieron de tal forma que la excitación tiene una amplitud de 0.010 m, tomando como referencia el nodo 14 como excitación ya que este es uno de los nodos donde se acoplan los neumáticos del carro.

Se tomó el nodo 5 para el análisis, ya que en este se soporta al conductor, para observar el comportamiento que presentarían los nodos bajo la excitación y ver la forma de estabilización en el tiempo, así mismo conocer y observar la estabilización rápida del sistema que nos garantizaría que la estructura no oscilara durante un periodo largo de tiempo y no afectara el desempeño del conductor y así el vehículo fuera mas cómodo para ser conducido.

La respuesta para la aceleración, velocidad y desplazamiento se muestran en las figuras siguientes: en la Figura 6.11 donde se muestra la

aceleración, se observa que la respuesta se estabiliza en 7 seg después de haberse aplicado la excitación sobre el eje Z, mientras que en los ejes X y Y las oscilaciones son muy pequeñas.

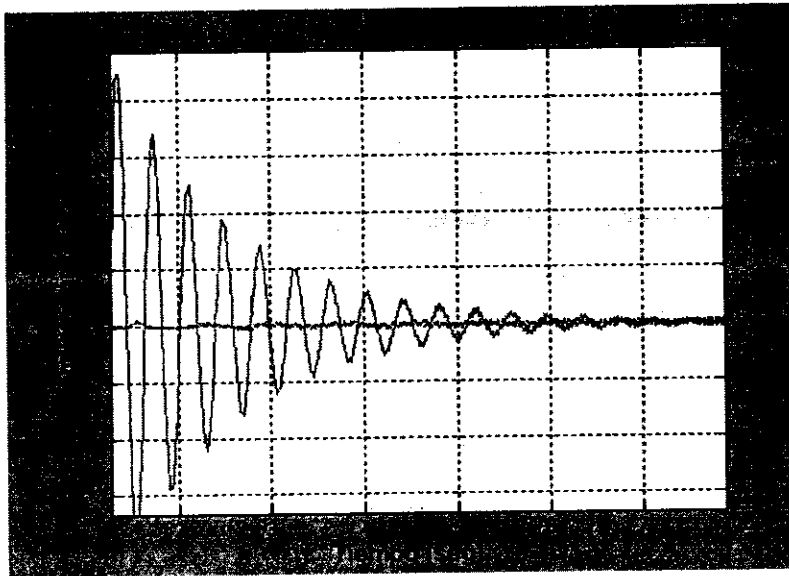


Figura 6.11 Respuesta de estabilidad para la aceleración del nodo 5

Para este nodo, vemos que la velocidad con la que se desplaza a lo largo del eje Z, presenta una estabilización hasta los 5 seg, teniendo una amplitud máxima a partir de cero de 0.62 m/s como se observa en la Figura 6.12.

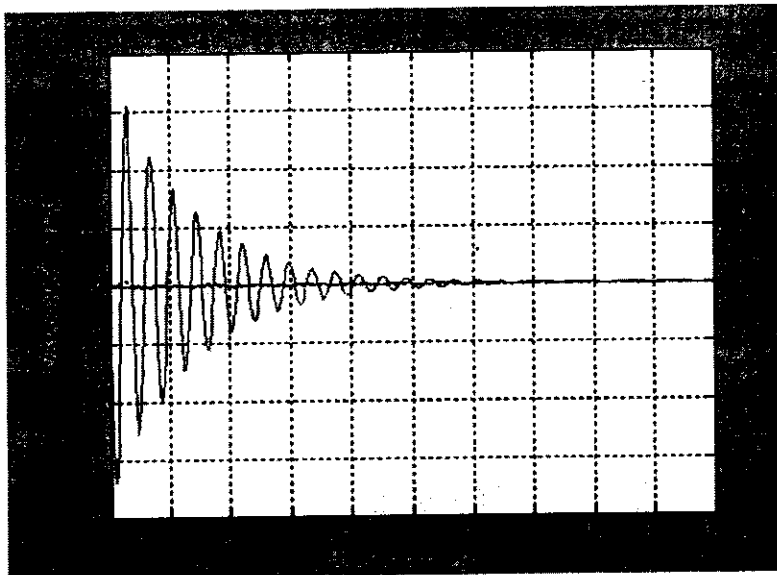


Figura 6.12 Respuesta de estabilidad para la velocidad del nodo 5

Por último, la respuesta de desplazamiento, encontramos que la estabilización se efectúa a partir de 4 seg, como se muestra en la Figura 6.13, en esta figura se observa que la gráfica que representa el desplazamiento en el eje Z, esta desplazada como causa del peso propio de la barra y el peso del conductor, por tal razón el nodo comienza a oscilar a partir de 0.042 m, el signo negativo nos indica que la fuerza actúa en sentido negativo del eje Z.

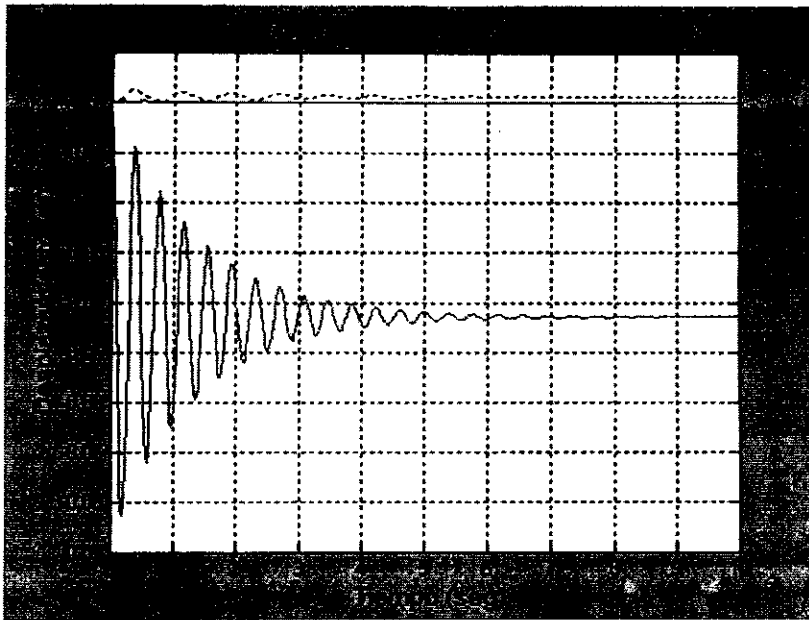


Figura 6.13 Respuesta de estabilidad para el desplazamiento del nodo 5

## 7 CONCLUSIONES

La finalidad de la presente tesis, es desarrollar programas de elemento finito que permitan el cálculo de los esfuerzos en cada uno de los elementos de la estructura bajo diferentes tipos de excitaciones, así como calcular las frecuencias naturales y los modos de vibración.

Los resultados que se obtuvieron al realizar el programa en MATLAB, mediante el análisis de respuesta en frecuencia y por el método de Newmark, fueron de gran ayuda, debido a que se logró observar los esfuerzos que presentaban los elementos de la estructura y los desplazamientos que

presentaban los elementos de la estructura y los desplazamientos que presentaban los nodos, y así, tener la confianza de que la estructura resistiera las condiciones a las que será sometido.

De las frecuencias naturales obtenidas, se observa que éstas son suficientemente altas, lo que hace suponer, que ningún elemento es considerablemente débil. También de los resultados observados, se concluye que los programas han sido correctamente desarrollados ya que en comparaciones con software comercial como el ANSYS da similares resultados.

La importancia del presente trabajo es que permitirá introducir señales reales, obtenidas de sensores, en el modelo de elemento finito de la estructura con el fin de predecir los esfuerzos de los elementos. En función de los resultados será fácil mejorar el diseño ya que aquellos elementos con bajos esfuerzos podrán ser sustituidos por elementos menos resistentes que aligeren el diseño. Como se puede deducir, en este tipo de autos con potencia reducida en el motor, el peso del auto se vuelve un factor muy crítico.

Con estos programas, en un futuro se podrán hacer diseños que resistan a las condiciones extremas a las que se someten este tipo de carros de Mini Baja pero más ligeros. Para este fin, se debe instrumentar el auto con el objetivo de tener señales reales de desplazamiento, velocidad y aceleración obtenidas por los sensores instalados. Después, dichas señales se pueden introducir en los programas desarrollados como funciones de excitación en cada uno de los nodos próximos donde se instala la suspensión. Enseguida, es posible determinar el comportamiento dinámico de la estructura y en consecuencia es posible predecir los esfuerzos en cada elemento.

El proceso para determinar los esfuerzos reales cuando el auto sea sometido a condiciones lo más parecidas a las reales, es en primer lugar obtener las señales digitales de desplazamiento, velocidad y aceleración. Después, introducir estas señales de excitación en el programa, para que por medio del método de Newmark se determine el desplazamiento de los nodos del sistema.

Con esto es posible determinar la deformación elástica de cada elemento y en consecuencia sus respectivos esfuerzos. Esto representa la principal ventaja del software desarrollado, ya que a diferencia de ANSYS, en los programas es posible introducir fácilmente cualquier señal digitalizada obtenida de los sensores. Incluso se pudiera incluir algún módulo de optimización a los programas como futuros trabajos de investigación.



## REFERENCIAS

- Alting, L. 1990. Procesos para ingeniería de manufactura. p 168-170, 206-210, 244-241. Alfaomega. México, D. F.
- Domínguez González A. Ph. D. Tesis, 2005. Design optimization and vibration control of adaptive structures. p 130. Concordia University of Montreal, Canada.
- Guillén Estévez, F. 1980. Teoría de control guía de estudio. p 120-121. IPN. México, D. F.
- Horwitz, H. 2002. Soldadura aplicaciones y práctica. p 131-140. Alfaomega. Bogotá, Colombia.
- Huebner, K. H., Thornton, E. A., y Byron, T.G. 1995. The finite element method for engineers. p 231-232, 241-242. Wiley-Interscience. USA.
- Hutton, D. 2004. Fundamentals of finite element analysis. p 94-101. McGraw Hill. New York, NY.
- Kazanas, H. C., Baker, G. E., y Gregor T. 1989. Procesos básicos de manufactura. p 220-221, 235-236, 319-320. Mc Graw-Hill. México, D. F.
- Kibbe, R. R., Neely, J. E., Meyer, R. O., y With, W. T. 1993. Manual de máquinas herramientas, Vol. II. Ciencia y Técnica. p 322-348. México, D. F.
- Koellhoffer, L., Manz, A. F., y Hornbenger, E. G. 2002. Manual de soldadura. p 133-134. Limusa. México, D. F.
- Kuo, B.C. 1997. Sistemas de control digital. p 79-81. CECSA. México, D. F.
- Kwong Y. W. y Hyochonon B. 1997. The finite element method using matlab. p 235. CRC Press. USA.
- Nelly S. G. 2000. Fundamentals of mechanical vibrations. p 356, 516-523, 589-590. Mc Graw-Hill. USA.
- Newmark, N. M. 1959. A method of computation for structural dynamics. p 68-94. Proc. A. S. C. E. USA.
- Ogata, K. 2003. Ingeniería de control moderna. p 15-21. Prentice Hall. México, D. F.
- Rao, S. S. 1999. The finite element method in engineering. p 3-13, 266-278. Butterworth-Heincmann. USA.

Reddy, J. N. 2006. An introduction to the finite element method. p 261-263, 302-303. Mc Graw Hill. Texas, USA.

Wilson, E. L. 1962. Dynamic response by step-by-step matrix analysis. Proceedings of symposium on the use of computers in civil engineering, october 1-5, Lisboa, Portugal.

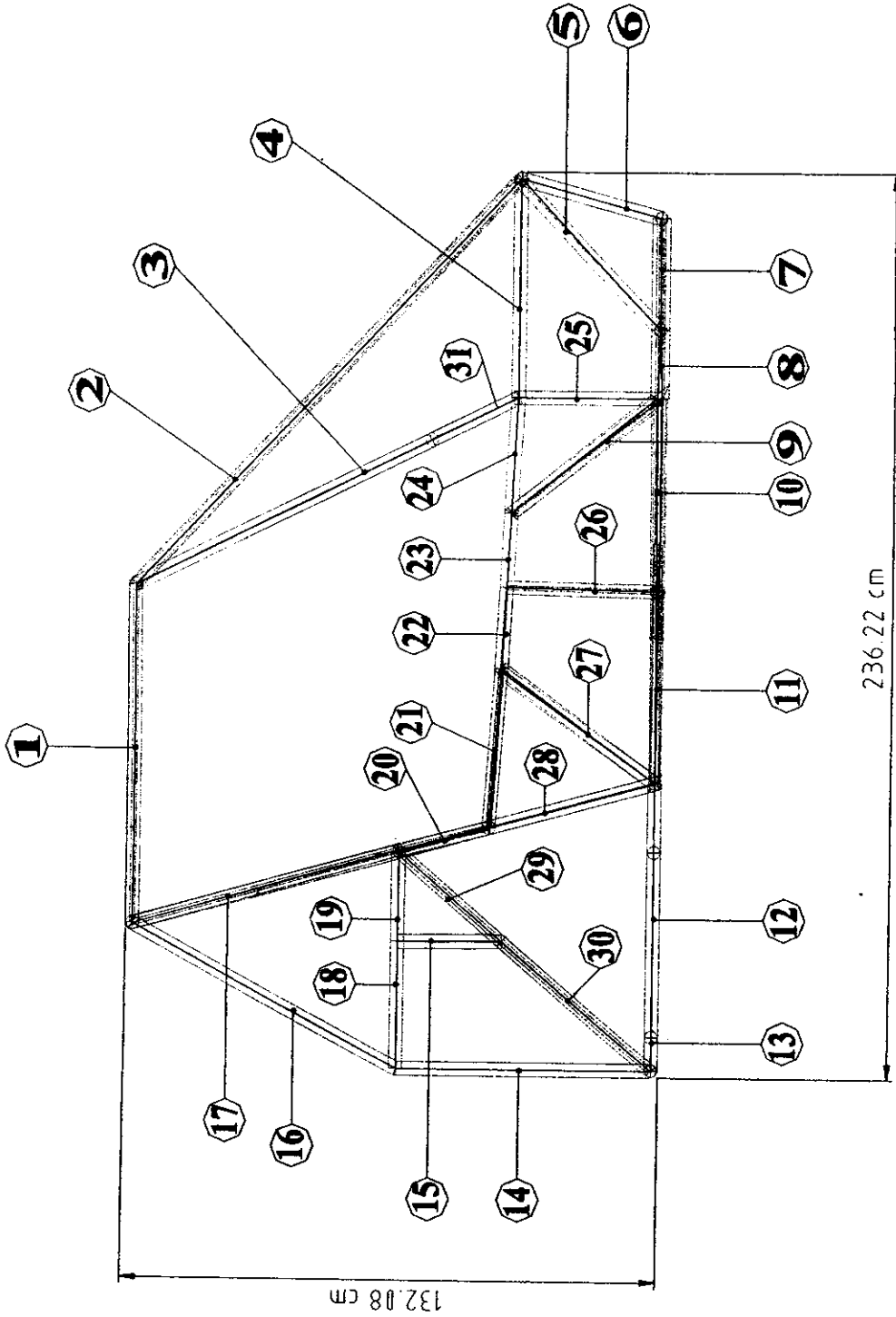
[www.saemex.org](http://www.saemex.org)

Zienkiewicz O.C. y Morgan K. 1983. Finite element method approximation. p 25-26, 276-278. Wiley-Interscience. USA.

Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L. 1991. The finite element method solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity. p 369-374. McGraw Hill. UK.

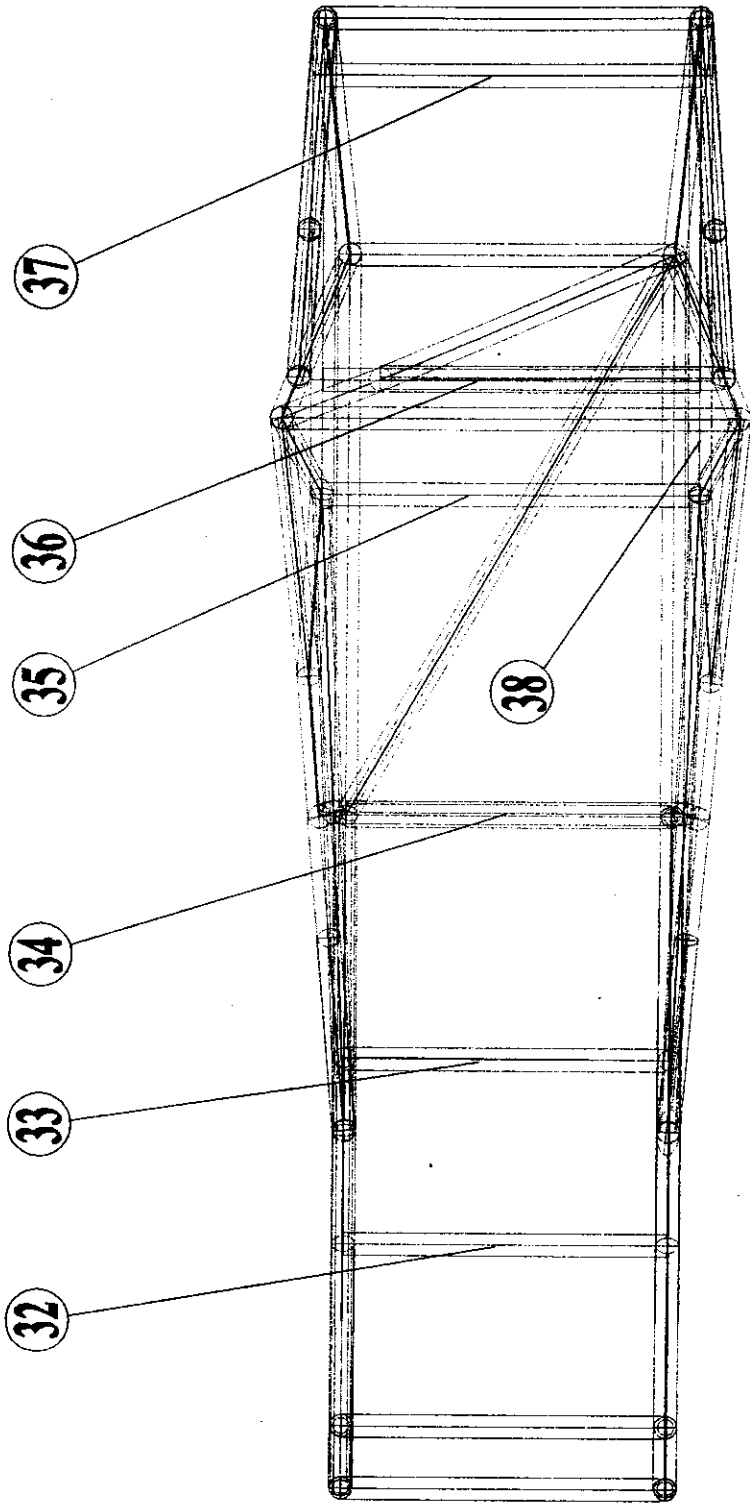
## **APÉNDICE A**

En este apéndice se presentan todos los planos de manufactura del chasis así como su despiece de cada parte a fabricar y su correspondiente ensamble.



Fecha		Nombre		Tot. no indicadas UNE EN 22768-m	
Dibujado	151819	Osbaldo Hernandez	Gerardo Lopez	Escala:	1:1
Comprobado	151819	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		UAG	
Conjunto:		Estructura		Plano N.º: 1.00	
Titulo:		Plano de conjunto			

Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013



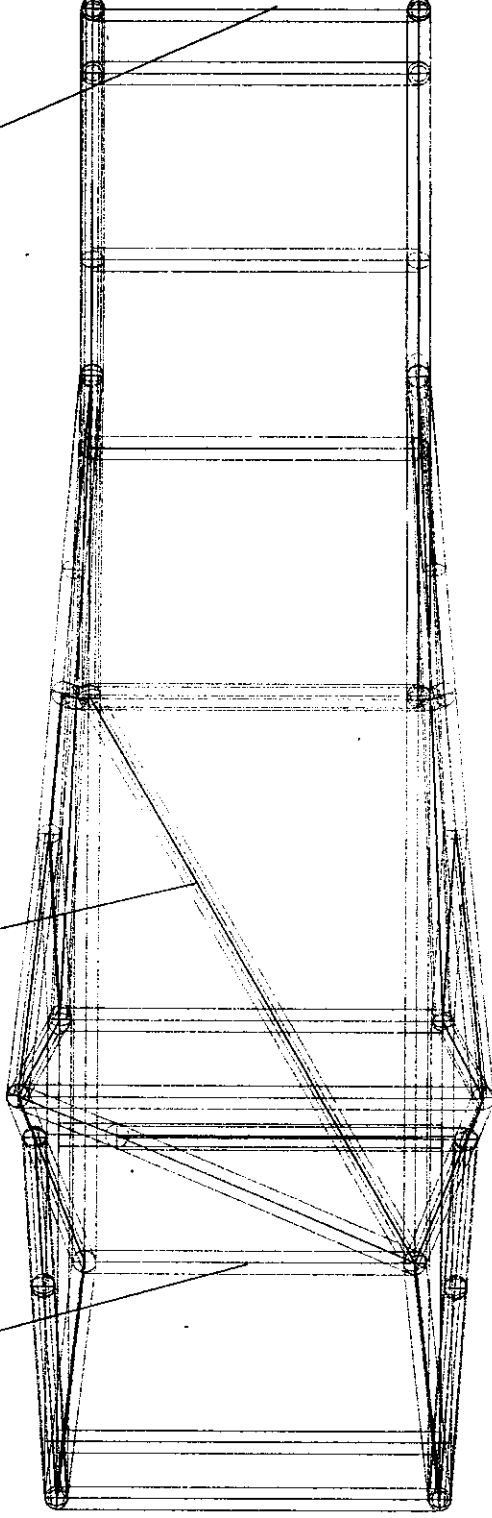
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tel. no. indicados UNE EN 22768-m
Dibujado 150809	Osbaldo Hernandez	Escala 1:10
Comprobado 150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	U.A.Q
Conjunto	Estructura	Plano N° 1.00
Titulo	Plano de conjunto	

39

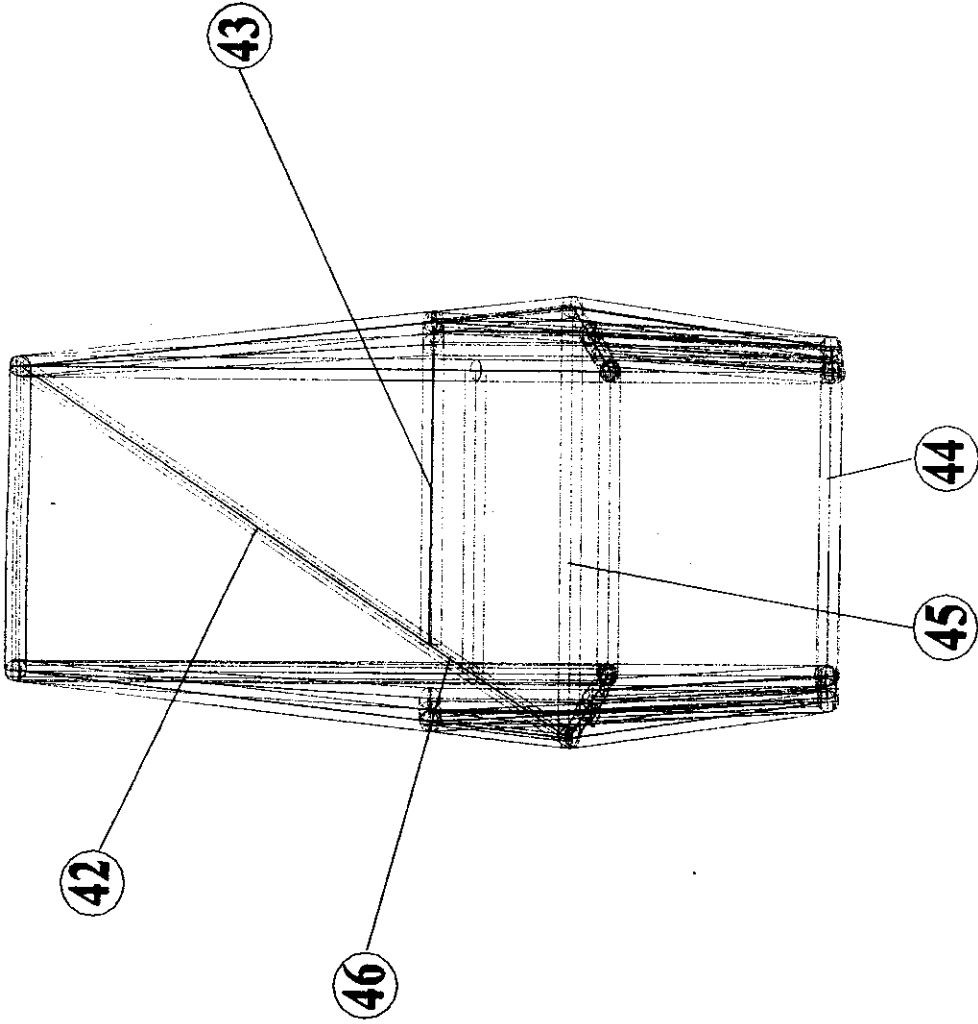
40

41



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013


Fecha		Nombre		Tot. no indicados UNE EN 22768-n	
Dibu. jado	150809	Osbaldo Hernández	Gerardo Lopez	Escala:	1:10
Comprado	150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez			
Conjunto		Estructura		UAG	
Titulo				Plano N°	
Plano de conjunto				1.00	



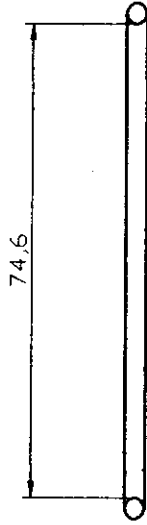
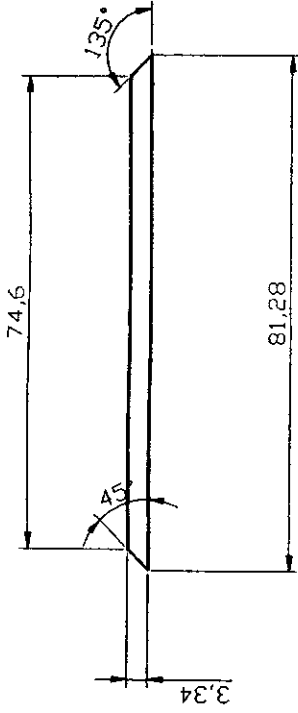
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tal. no indicadas UNE EN 22768-m
Dibujado 150809	Dibuido Hernandez Gerardo Lopez	Escala 1:10
Comprobado 150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	
Conjunto Estructura		UAG
Titulo Plano de conjunto		Plano N: 1.00

14	1	E62	0.1271	AS 118
15	1	E35	0.1271	AS 118
16	1	E35	0.1271	AS 118
17	1	E36	0.1271	AS 118
18	1	E39	0.1271	AS 118
19	2	E31-E67	0.1271	AS 118
20	1	E77	0.1271	AS 118
21	2	E34-E74	0.1271	AS 118
22	2	E3-E11	0.1271	AS 118
23	1	E16	0.1271	AS 118
24	1	E17	0.1271	AS 118
25	1	E18	0.1271	AS 118
26	1	E81	0.1271	AS 118
27	1	E19	0.1271	AS 118
28	2	E78-E79	0.1271	AS 118
29	2	E72-E73	0.1271	AS 118
30	2	E75-E76	0.1271	AS 118
31	2	E63-E64	0.1271	AS 118
32	2	E65-E66	0.1271	AS 118
33	2	E51-E52	0.1271	AS 118
34	2	E59-E61	0.1271	AS 118
35	2	E55-E56	0.1271	AS 118
36	2	E53-E54	0.1271	AS 118
37	2	E55-E56	0.1271	AS 118
38	2	E67-E68	0.1271	AS 118
39	2	E61-E62	0.1271	AS 118
40	2	E24-E27	0.1271	AS 118
41	2	E25-E31	0.1271	AS 118
42	2	E37-E38	0.1271	AS 118
43	2	E39-E41	0.1271	AS 118
44	2	E21-E31	0.1271	AS 118
45	2	E21-E22	0.1271	AS 118
46	2	E1-E28	0.1271	AS 118
47	2	E4-E11	0.1271	AS 118
48	2	E5-E12	0.1271	AS 118
49	2	E57-E58	0.1271	AS 118
50	2	E6-E13	0.1271	AS 118
51	2	E65-E66	0.1271	AS 118
52	2	E61-E62	0.1271	AS 118
53	2	E63-E64	0.1271	AS 118
54	2	E65-E66	0.1271	AS 118
55	2	E78-E79	0.1271	AS 118
56	2	E75-E76	0.1271	AS 118
57	2	E71-E72	0.1271	AS 118

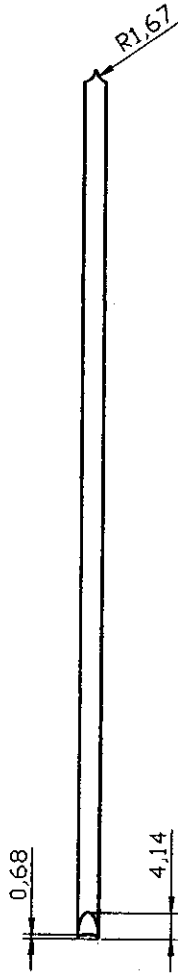
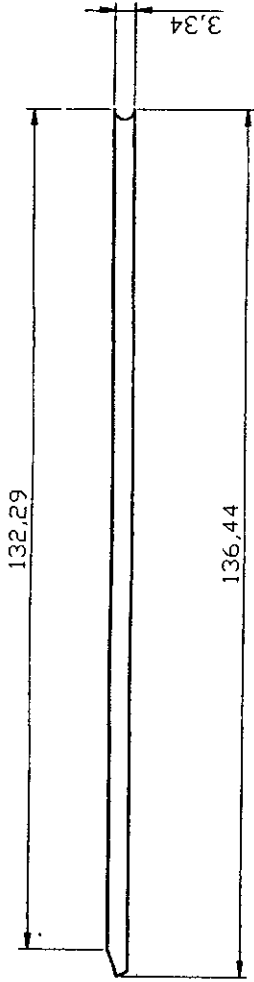
Marca	Nº Pieza	Designacion	Espesor de pared	Material
Adf. cm	Fecha	Nombre	Tel. no indicadas UNE EN 22768-m	
Dibujado	271916	Obisalon Hernandez Gerardo Lopez	Escala: 1:1	
Conprobado	271916	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		
Conjunto:	Estructura		U A Q	
Título:	Plano de conjunto		Plano N: Lista de elementos 1.00	





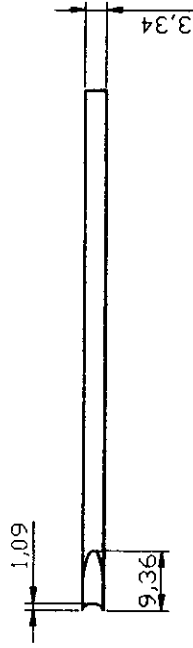
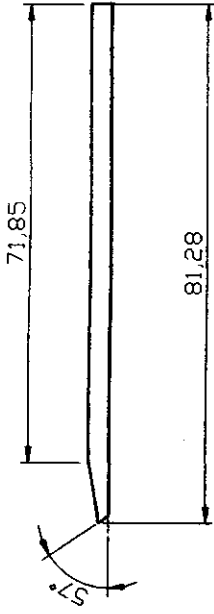
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Año	CM	Fecha	Nombre	Tal. no	Indicados UNE EN 22768-m
Dibujado	280809	280809	Osvaldo Hernandez	Gerardo Lopez	Escala: 1:10
Comprobado	280809	280809	Dr. Aurelio Dominguez	Conzalez	
Objeto				Estructura	
Titulo				Elemento (E75,76)	
				Plano N° 1.01	



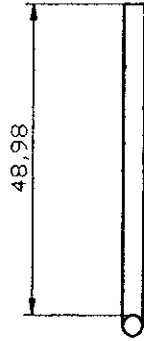
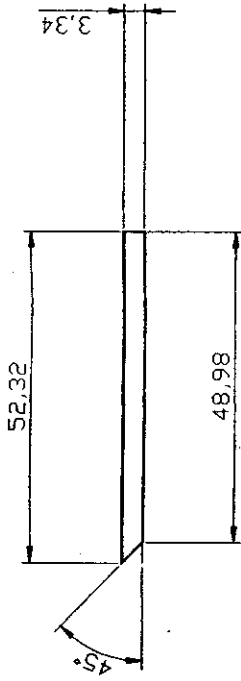
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Hombre	Tol. no indicadas LINE EN 22768-11
15/08/09	Ubaldo Hernandez	Escala
15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	1:10
Conjunto	Estructura	UAG
Titulo		Plano N°
Elemento (E70-E71)		1.02



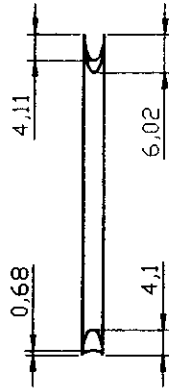
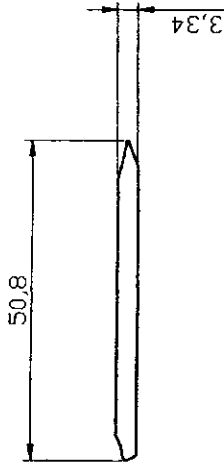
Nota: soldar todo alrededor E6013

Dibujado		Fecha		Nombre		Tol. no Indicados UNE EN 22768-n	
150809		150809		Domingo Hernandez		Escala	
Comprobado				Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		1:10	
Conjunto				Estructura		UAC	
Titulo				Elemento (E68-E69)		Plano N°	
						1.03	



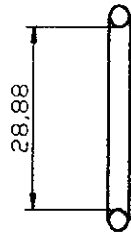
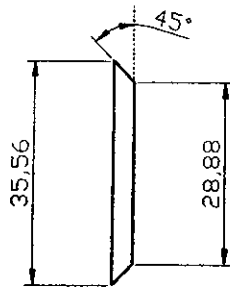
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Diseñado	150809	Fecha	150809	Nombre	Isabel Hernández	Col. no indicados	UNE EN 22768-m
Comprobado	150809			Dr. Aurelio Domínguez González	Escuela	1:10	
Conjunto				Estructura		UAG	
Título				Elemento (E63-E64)		Plano N° 1.04	



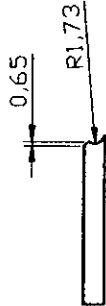
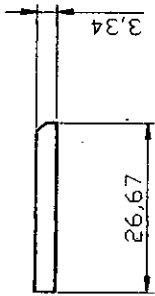
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Dibujada	Fecha	Nombre	Tol. no indicado UNE EN 22768-H
Corregido	15/08/09	Isabelo Hernández	Escala: 1:10
Conjunto	15/08/09	Dr. Aurelio Domínguez González	UAB
Estructura			Plano N°
Elemento (E61-E62)			1.05



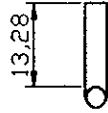
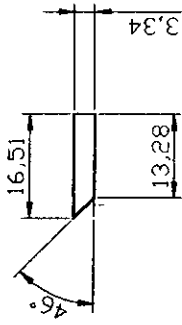
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha		Nombre		Tab. no indicadas UNE EN 22768-m	
15/08/09		Dabido Hernandez		Escala 1:10	
Dibujado		Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		Estructura	
Comprobado				UAG.	
Conjunto				Plano N. 1.06	
Título		Elemento (E65-E66)			



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

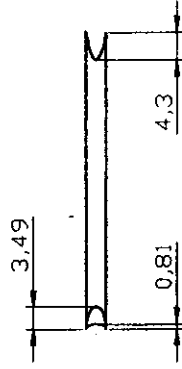
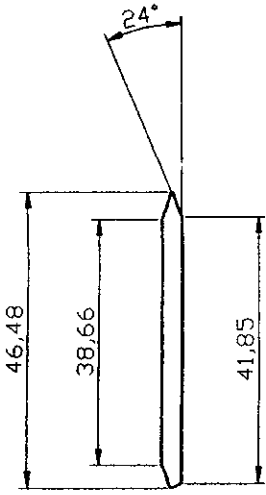
Fecha	Nombre	Tot. no indicadas UNE EN 22768-m	
Dibujado 150809	Dibujado Herrero	Gerado Lopez	Escale 1:10
Comprobado Conjunta	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	UAG	
Titulo Estructura		Plano N. 1.07	
Elemento (E7-E14)			



Nota: soldar todo alrededor E6013

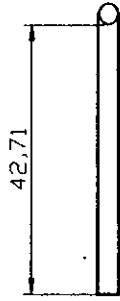
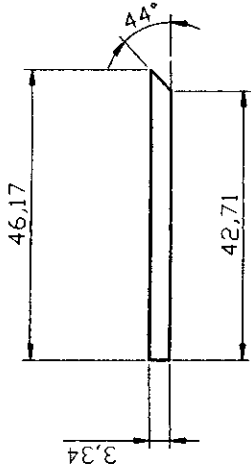
Fecha	Nombre	Tot. no indicados INE EN 22768-n
150809	Basilio Hernandez, Gerardo Lopez	Escola
150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	1:10
Conjunto		UAG
Título		Plano N:
Elemento (E6-E13)		1.08





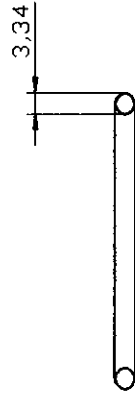
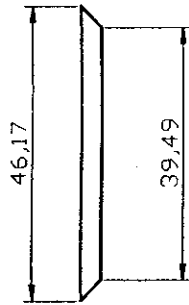
Nota: soldar todo alrededor E6013

Fecha	Nombre	Tel. no. indicados UNE EN 22768-m	
Dibujado 150809	Dibujado Hernández	Gerardo Lopez	Escola: 1:10
Corregido 150809	Dr. Aurelio, Dominguez Gonzalez		
Conjunto	Estructura		UAG
Título	Elemento (E57-E58)		Plano N° 1.09



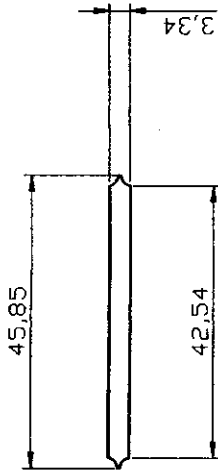
Nota: soldar todo alrededor E6013

Fecha	Nombre	Tot. no. Indicados	UNE EN 22749-n
Diseñado 15/08/09	Eduardo Hernández	Gerardo Lopez	Escala 1:10
Comprobado 15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		
Conjunto	Estructura	UAG	
Título	Elementos (E5-E12)		Plano N: 1.10



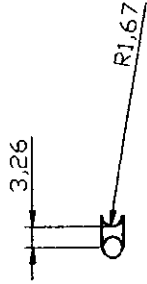
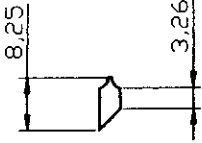
Nota: soldar todo alrededor E6013

Dibujado	150809	Nombre	Osbaldo Hernandez		Tol. no indicadas	UNE EN 22769-n
Comprobado	150809	Nombre	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		Escala:	1:10
Conjunto	Estructura		UAG			
Titulo:	Elemento (E4-E11)		Plano N°		1.11	




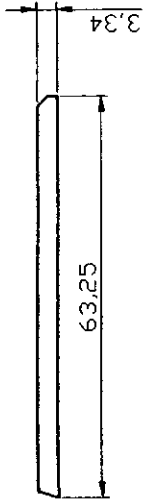
Nota: soldar todo alrededor E6013

Fecha	Nombre	Tol. no indicadas UNE EN 22768-n	
15/08/09	Dámaso Hernández	Gerardo Lopez	Escala
15/08/09	Dr. Aurelio Boteguez Gonzalez		1:10
Conjunto		Estructura	
Título		Plano N°	
Elemento (E2-E9)		1.12	



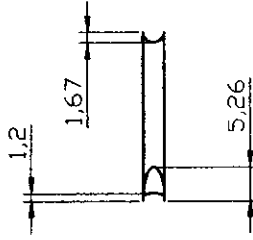
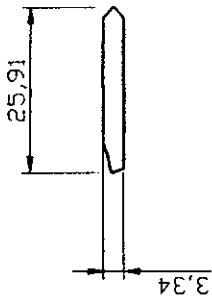
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Tol. no indicados UNE EN 22768-m	
Fecha	Nombre
15/08/09	Diego Hernandez Gerardo Lopez
15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez
Escala: 1:10	
	
Conjunto	
Estructura	
UAG	
Titulo	
Elementos (EJ-E8)	
Plano N° 1.13	



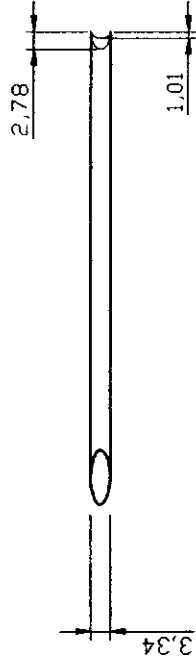
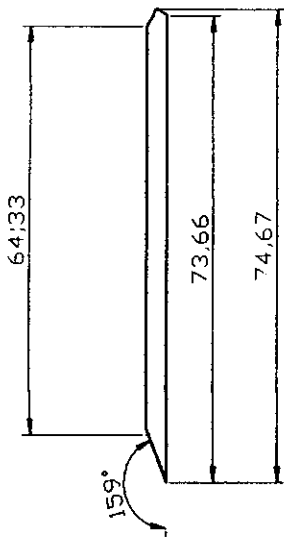
Nota: soldar todo alrededor E6013

Fecha	Nombre	Tot. no. Indicados UNE EN 22768-M	
15/08/09	Isabelín Hernández	Escala	1:10
15/08/09	Dr. Aurelio Domínguez González	UAG	
Conjuntor	Estructura		
Título		Plano N°	
Elemento (E21-E27)		1.14	



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

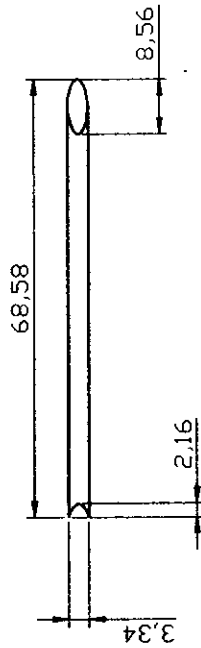
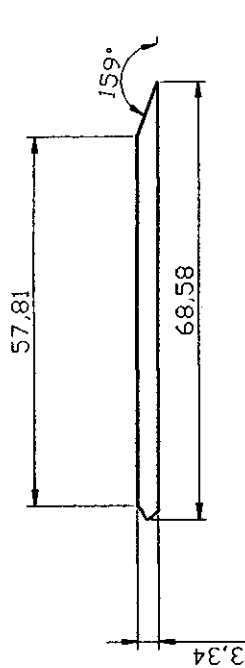
Fecha	Nombre	Td. no indicados	UNE EN 22768-n
Dibujado 15/08/09	Dibuido: Hernandez	Gerardo Lopez	Escala
Corregido 15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		1:10
Conjunto	Estructura		UAG
Titulo	Elemento (E24-E30)	Plano N°	1.15



Nota: soldar todo alrededor E6013

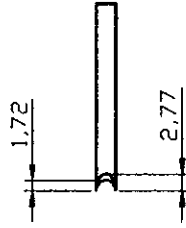
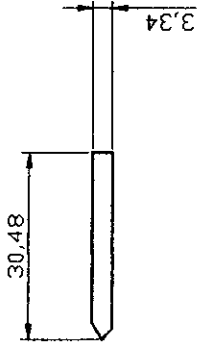
Fecha	Nombre	Tol. no indicados UNE EN 22768-n	
15/08/09	Gerardo Lopez	Escola	1:10
15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	UAG	
Conjunto		Estructura	
Titulo		Elemento (E33-E34)	
		Plano N° 1.16	





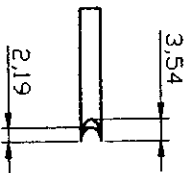
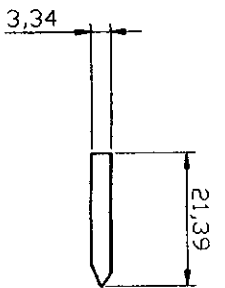
Nota: soldar todo alrededor E6013

Fecha	Nombre	Tol. no indicadas UNE EN 22768-n
15/08/09	Usbaida Hernandez	Escala: 1:10
15/08/09	Gerardo Lopez	
	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	
Conjunto		UAG
Titulo		Plano N: 1.17
Elemento (E37-E38)		



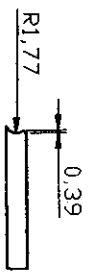
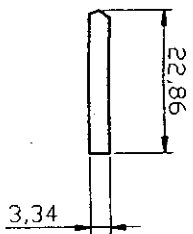
Nota: soldar todo alrededor E6013

Dibujado		Fecha		Tol. no indicadas UNE EN 22769-m	
150809	150809	Nombre		Escala	
Comprobado	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	Diseño		1:10	
Conjunto	Gerardo Lopez	Estructura		UAG	
Titulo		Elemento (E25-E31)		Plano N°	
				1.18	



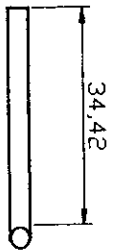
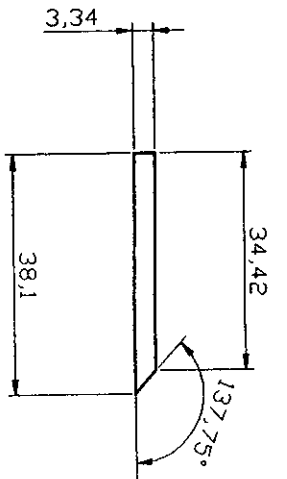
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha		Número		Tol. no indicadas UNE EN 22768-n	
Dibujo de	150809	Dibujó	Hernández	Gerardo López	Escala
Corrobado	150809	Dr.	Aurelio Domínguez	Gerardo López	1:10
Compañía		Estructura		UAG	
Título		Elemento (E26-E32)		Forma N° 1.19	



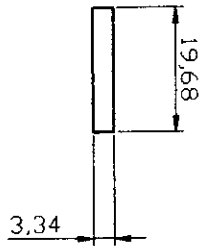
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha		Nombre		Tol. no indicados UNE EN 22768-m	
Dibu Jado	130809	Dibido	Hernandez	Gerardo Lopez	Escala
Comprobado	130809	Dr. Ayudante	Dominguez	Gonzalez	1:10
Conjunto		Estructura		U A Q	
Titulo		Elemento (E40-E41)		Pano N°	
				1.20	



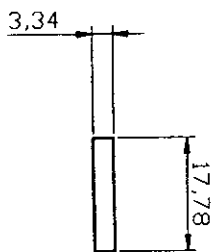
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol. no	Indicados	UNE	EN	22768-n
15/08/09	Daniel Hernandez	Gerente	Legista			
15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez					
Conjunte		Estructura		UAG		
Titulo		Elemento (E47-E48)		Pano No. 1.21		



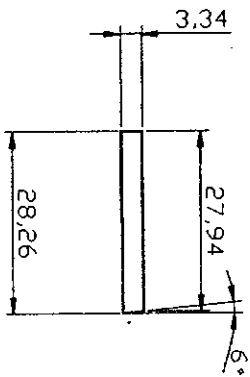
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha		Nombre		Tol. no indicadas UNF EN 22768-m	
Dibuñado	150809	Dibujado	David Hernandez	Escala	1:10
Comprobado	150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez			
Compartes		Estructura		UAG	
Titulo		Elemento (E49-E50)		Plano No 1.22	





Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

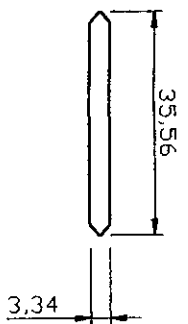
Fecha		Nombre		Tol. no indicados UNE EN 22768-h	
Dibu Jado	150809	Desido Hernandez	Gerardo Lopez	Escala	1:10
Corporativo	150809	Dr. Aurelio Benitez Gonzalez			
Compañia		Estructura		U A Q	
Titulo		Elemento (E53-E54)		Plano N° 1.23	



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

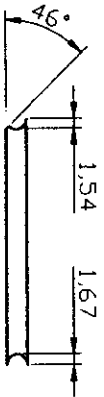
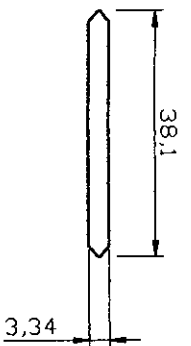
	Fecha	Nombre	Tol. no indicados UNE EN 22768-m
Dibu. hecho	15/08/09	Daniel Hernandez Lopez	Escala: 1:10
Comprobado	15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	 
Componente	Estructura		U A Q
Título	Elemento (E55-E56)		Plano N.º 1.24





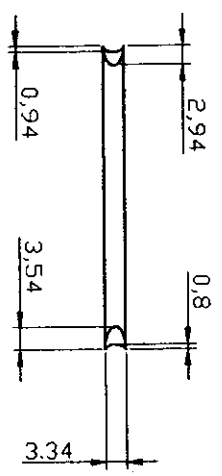
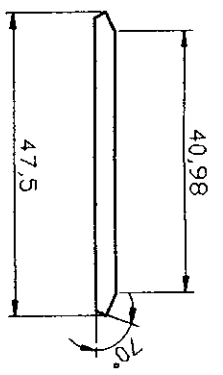
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Dibu Jado	150809	Nombre	Deilda Hernandez Gervio Lopez	Tot. no indicados UNE EN 22768-n
Comprobado	150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		Escala
Conjunto		Estructura	U A Q	
Titulo		Elemento (E59-E60)	Plano N°	1,25



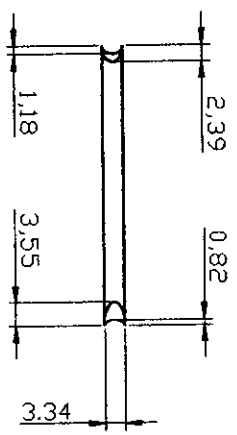
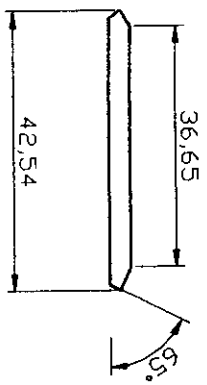
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol. no indicadas UNE EN 22768-m
Dibujado 150809	Basilio Hernandez, Gerardo Lopez	Escala 1:10
Comprado 150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	U A Q
Conjunto	Estructura	
Título	Elemento (E51-E52)	Plano N° 1.26



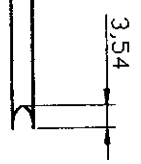
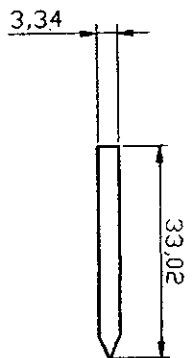
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol. no verificados UNE EN 22768-r
15/08/09	David Hernandez Gonzalez Lopez	Escala 1:10
15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	UAG
Conjunto	Estructura	
Título	Elemento (E45-E46)	Plano No 1.27



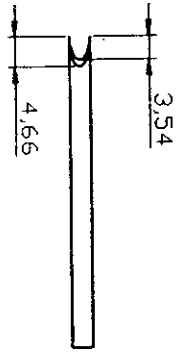
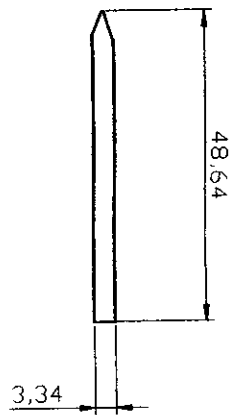
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Titulo		Elemento (E43-E44)		Perno N°		1.28	
Fecha	Nombre	Tol. no indicadas UNE EN 22768-n		Escala		1:10	
DibuJado	Dibado	Gerardo Lopez					
Correido	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez						
Comparte		Estructura		UAG			



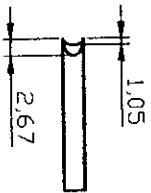
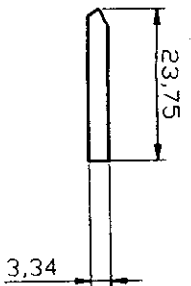
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol. no	Indicados UNE EN 23128-m
15/08/09	Ibañeta Hernández, Gerardo Lopez	Escala	1:10
Elaborado	Dr. Aurelio Domínguez González	UAG	
Conjunto	Estructura		
Título	Elemento (E23-E29)	Plano N°	1.29



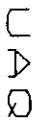


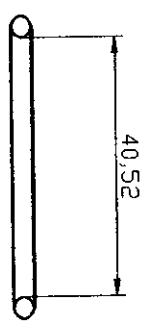
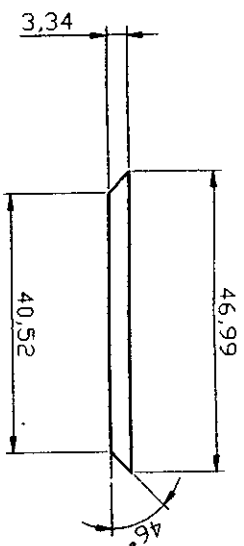
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

	Fecha	Nombre		Tol no indicada UNE-EN 22769-m
Dibu Jefe	15/08/09	Basilio Hernandez	Gerardo Lopez	Escala 1:10
Comprobado	15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		
Conjunto		Estructura		UAG
Título	Elemento (E22-E28)			Plano N° 1.30



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

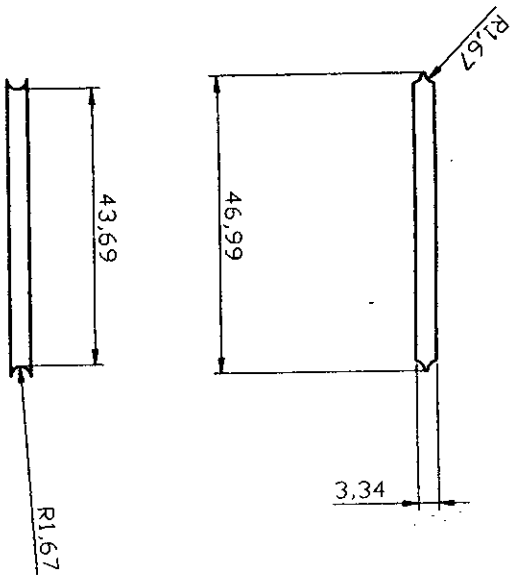
Fecha	15/08/09	Nombre	Isabelo Hernandez, Gerardo Lopez		Tal. no indicadas UNE EN 22768-m
Dibujado	15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	Escala	1:10	 
Comprobado	15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	Estructura		
Conjunto			Estructura		
Titulo			Elemento (E78-E79)		



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

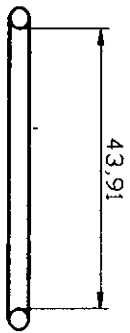
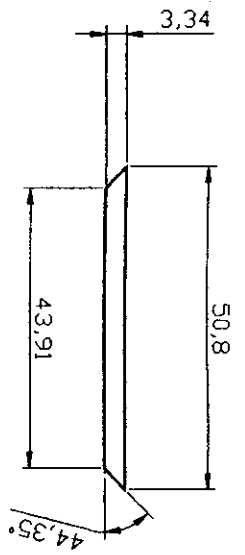
Fecha		Nombre		Tol. no indicadas UNE EN 22768-m	
Dibujado	150809	Dibujado	Daniel Hernandez Garrote Lopez	Escala	1:10
Comprobado	150809	Comprobado	D. Aurelio Rodriguez Gonzalez		
Conjunto		Estructura		U.A.Q.	
Titulo		Elemento (E19)		Folio N° 1.32	





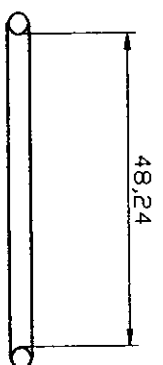
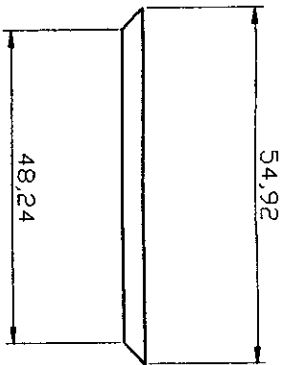
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol. no indicados UNE EN 22768-n	
15/08/09	Osbaldo Hernandez Garvito Lopez	Escala	1:10
15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		
Conjunto Estructura			
Titulo		Plano N°	1.33
Elemento (E72)			



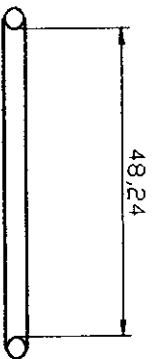
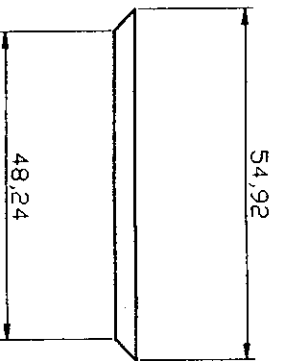
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

	Fecha	Nombre	Tot. no indicadas LINE	EN 22768-m
Dibujado	15/08/09	Diego Hernandez Guerra Lopez	Escala	1:10
Comprobado	15/08/09	D. Aurelio Dominguez Gonzalez		
Conjunto		Structuro	U A Q	
Título		Elemento <E80>	Plano N°	1.34



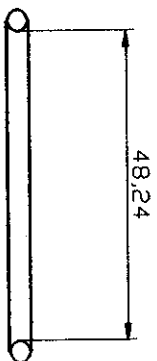
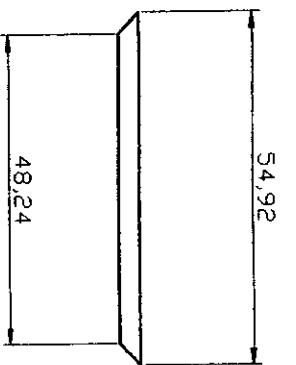
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Nombre		Tol. no indicadas, UNE EN 22769-n	
Dibu. Jefe	Fecha	Dibujado	Escala
150809		Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	1:10
Corredado	150809	Compartir	
Estructura		UAG	
Titulo		Plano N°	
Elemento (E18)		1.35	



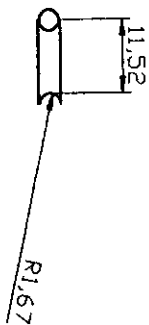
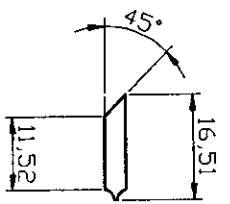
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol no indicadas UNE EN 22769-1
15/08/09	Danielo Hernandez Gerardo Lopez	Escala 1:10
15/08/09	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	UAG
Componente	Estructura	
Titulo	Elemento (E17)	Plano N° 1.36



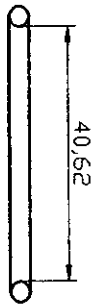
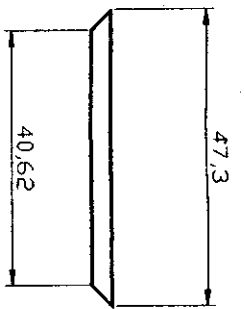
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol. no indicados UNE EN 22768-m
Dibujo No 150809	Rubio Hernandez Gerardo Lopez	Escala: 1:10
Compuesto 150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	
Componente	Estructura	UAG
Título	Elemento (E16)	Plano N° 137



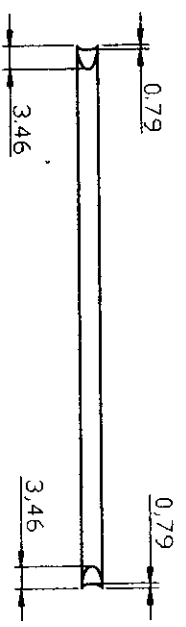
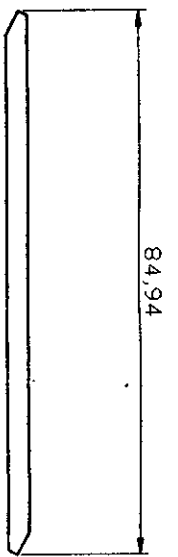
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol. no indicados LINE EN 22768-m	
15/08/09	Isabelo Hernandez Gerardo Lopez	Escala	1:10
Elaborado	Dr. Aurelio Domínguez González		
Conjunte	Structura	UAD	
Titulo		Plano N°	1.38
Elemento (E3-E10)			



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tel. no	Indicaciones UNE EN 22768-1
01/006	Ibailiz Hermeiz Gervido Lopez		
01/006	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	Escala	1:10
Compañia	ESTRUCTURA	UAG	
Titulo	Elemento (73-74)	Plano N.	1.39

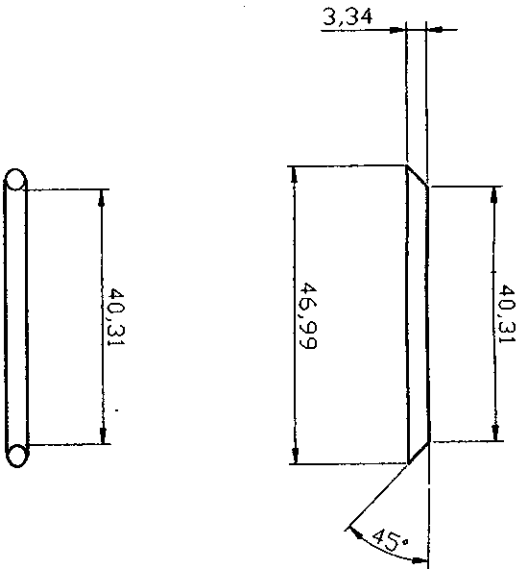


Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha		Nombre		Tol. no habidos UNE EN 22768*	
Dibujado	150809	Dibujado	Hernández	Gerardo Lopez	
Construido	150809	Construido	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		
Conjunto			Estructura		
Titulo			Elemento (E77)		
			Plano N°		
			1.40		

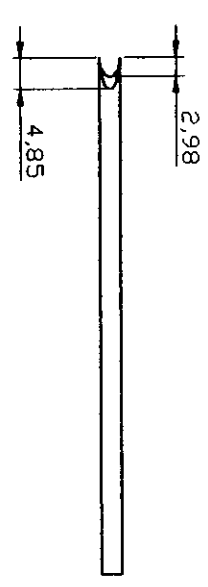
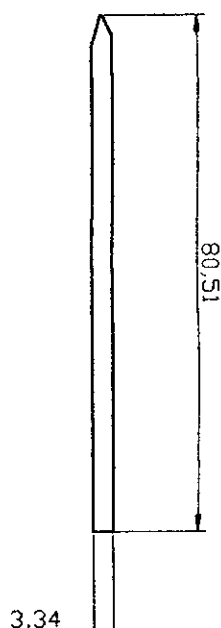
UAC







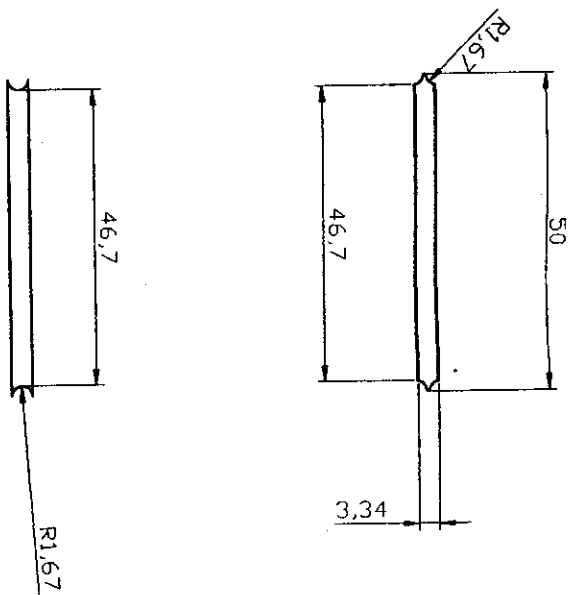
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha		Módulo		Tel. no habilitado UNE EN 22768-m	
Dibujo	150889	Diseño	Hernández Gerardo Lopez	Escala	1:10
Comprobado	150889	Dr. Aurelio Domínguez González			
Conjunto			Estructura		
Título			Plano N°		
Elemento (E20-E67)			1.41		



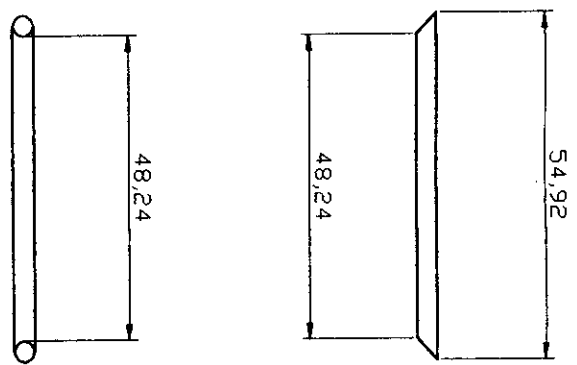
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha		Nombre		Tol. no indicadas UNE EN 22768-n	
Dibujado	15/08/09	Disenio	Hernandez Gerardo Lopez	Escala	1:10
Comprobado	15/08/09	Dir.	Aurelio Domínguez González	 	
Conjuntos			Estructura		
Titulo				Plano N°	
Elemento (E39)				1,42	



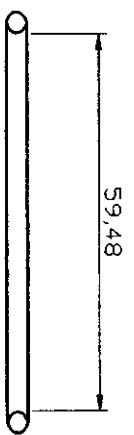
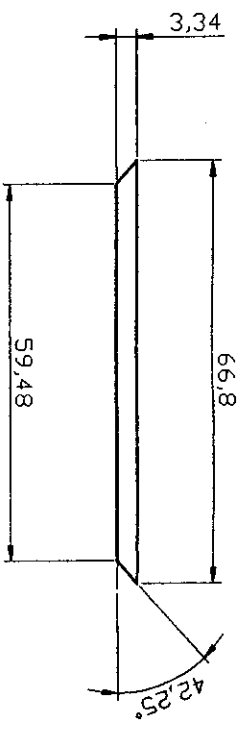
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	15/08/09	Número	Davido Hernandez Garza Lopez	Tol. no indicadas UNE EN 22768-r
Dibuñado	13/08/09	Escala	1:10	⊕
Comprobado		Campeo	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez	⊕
Objeto	Estructura		U A Q	
Título	Elemento (E36)		Plano N°	1.43



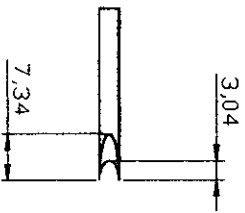
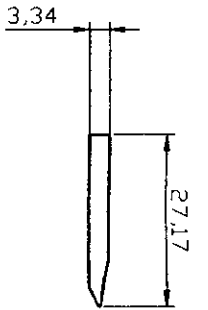
Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha		Número		Tol. no indicadas UNE EN 22768-m	
Dibu Jodio	150809	Dibaino Hernandez	Gerardo Lopez	Escala	1:10
Comprobado	150809	Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez			
Conjunto		Estructura		UAB	
Titulo		Elemento (E15)		Plano nº 1.44	



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Dibu. Jado		Fecha	Nombre		Tot. no indicados UNE EN 22768-m	
Comprobado		15/08/09	Doroteo Hernandez, Gerardo Lopez Dr. Aurelio Dominguez Gonzalez		Escala	1:10
Conjuntos		Estructura		U A Q		
Titulo				Plano N°		1,45
Elemento (E35)						



Nota: soldar todo alrededor con soldadura E6013

Fecha	Nombre	Tol. en Indicación UNE EN 22768-m	
Dibujado 15/08/09	Dibujado Hernandez Gerardo Lopez	Escala	1:10
Comprobado 15/08/09	Dr. Aurelio Domínguez González		
Conjunto	Estructura	UAG	
Titular	Elemento (E42)	Plano N°	1.46