Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias (Matemáticas)

“Propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas enfocada en uso didáctico de errores para la multiplicación algebraica”

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestro en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias (Matemáticas)

Presenta:
Jessica Marisol Martínez Martínez

Dirigida por:
M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez

Presidente: M en C. Patricia I. Spíndola Yáñez

Secretario: M en C. Luisa Ramírez Granados

Vocal: M. en D. M. Carmen Sosa Garza

Suplente: Dr. Víctor Larios Osorio

Suplente: Dr. Víctor A. Aguilar Arteaga

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Fecha de aprobación por el Consejo Universitario
México

Dedicatoria

Este proyecto se lo dedico a mi esposo Alex, que estuvo en todo momento a mi lado apoyándome en este proceso que fue difícil debido a la pandemia que vivimos, él que nunca soltó mi mano a pesar de los problemas que llegué a tener, a él que me escuchó cuando ya no quería seguir en esto y que me impulso a ser mejor cada día, te agradezco y te amo infinitamente, esto no sería posible sin ti.

A mi hijo Darío, el cual me da un motivo para levantarme cada día y ser una mejor versión de mi misma, el que con su sonrisa anima cualquier día gris y me da la fuerza para afrontar cualquier situación.

A mis padres que siempre están ahí para apoyarme en cualquier situación y momento, a mis hermanos que siempre tienen palabras de aliento y algún chiste malo para reír un rato, los amo infinitamente y les agradezco que sean mi familia. A mi abuelita que ha estado presente en cada uno de mis logros, esto también es tuyo.

A mis profesores de la maestría que me enseñaron diferentes formas de aprendizaje, aquellos que fueron inspiración para cada día ser un mejor profesor, en especial a mi directora Paty que gracias a su dedicación pudo ser posible este proyecto, a la maestra Luisa que siempre estuvo ahí sin importar el tema o situación apoyandome, a la maestra Carmen que gracias a su visión de las matemáticas me ayudo a comprenderlas un poco mejor y a entender otros procesos en el camino y al Dr. Larios que con sus ocurrencias y su paciencia logramos esto, sin ellos nada de esto sería posible. A mis compañeras que se convirtieron en amigas Lety y Sandra que sin sus pláticas, su apoyo, paciencia y ayuda durante todo este trayecto no sería posible, gracias por esos chats interminables resolviendo dudas, esas reuniones en épocas de exámenes y su forma tan diferente de afrontar las situaciones me ayudaron a crecer como persona y como docente.

Agradecimientos

El autor agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por los recursos otorgados para la realización de esta tesis.

Índice

Índice de figuras

Resumen

La educación matemática juega un papel importante debido a que tiene un valor formativo, que ayuda a estructurar todo el pensamiento y a agilizar el razonamiento deductivo, así mismo es una herramienta que se utiliza en la mayoría de las actividades laborales. En este contexto los errores se consideran como un proceso de construcción de conocimiento propio de cada individuo en el que interactúan el profesor, el estudiante, el contexto, el curriculum, entre otros. En el presente trabajo se analizaron los principales errores algebraicos cometidos por estudiantes durante el examen de admisión para ingresar a un programa educativo perteneciente a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro en el año 2019, con esta información se realizó una propuesta didáctica para ayudar a soslayar dichos errores encontrados. La detección, análisis y clasificación de errores se realizó utilizando la propuesta de Radatz que permitió determinar las diferentes áreas de oportunidad. Los resultados obtenidos sentaron la base para la segunda etapa que consistió en presentar de manera concisa conceptos teóricos ligados a una serie de ejercicios, dicha presentación se basa en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brosseau (fase a-didáctica y didáctica). Se concluye que, si bien se observa que la mayoría de los errores son debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, no son los únicos factores que determinan el por qué un alumno durante un examen no es capaz de contestar de manera correcta todos los reactivos. La participación, el enlace profesor-alumno, alumno-alumno en el reconocimiento de errores y socialización de dudas, así como la intervención del profesor en proponer preguntas clave que aumenten la curiosidad del alumno, pueden ayudar a disminuir la apatía y falta de empeño del estudiante durante la clase, y con ello disminuir los errores en evaluaciones, pero principalmente ayudar a obtener un aprendizaje significativo.

Palabras Clave: Educación, matemáticas, errores, didáctica, TSD, Radatz

Abstract

Mathematical education plays an important role because of its formative value that helps build our thinking and sharps deductive reasoning, aside from being a tool used in most activities at work. With this context, mistakes are considered as a knowledge building process unique for each person in which professor, student, contex and other factors interact with each other. In this work, the most common algebraic mistakes made by students during the 2019 admission test to the Universidad Autónoma de Querétaro's Facultad de Ingeniería were analized, With that information a didactic proposal was made in order to circumvent those mistakes. Mistakes' detection, analysis and classification was made using Radatz's proposal, allowing the determination of opportunity areas. These results where the base of the second phase which consisted on presenting succintly theorical concepts linked to a series of exercises, based on Brousseau's Theory of Didactical Situations (TDS). We can conclude that, even if most mistakes are because of a deficient learning of facts, skills and previous concepts, those are not the only reasons why a student isn't capable of answering correctly during a test. Engagement, relationship with the professor and other students during mistake recognition, as well as professor intervention by proposing key questions to increase students' curiosity, can help minimize apathy and lack of commitment in class, which helps with mistakes during tests, but most importantly, help gaining a significant learning.

Key words: Education, mathematics, mistakes, didactic, TDS, Radatz

I. INTRODUCCIÓN

En México, como en otros países, las matemáticas ocupan un lugar central en los programas y planes de estudios, tanto en los niveles básico como medio superior, con el objetivo principal de desarrollar las habilidades de razonamiento de los estudiantes para que puedan resolver problemas de manera creativa, sin aplicar algoritmos y procedimientos de rutina (SEP, 2012).

Es por esto que Kaput y Blanton (2000) apoyan la introducción de contenidos algebraicos en los currículos, reconociendo que no existe una posición suficientemente clara sobre la naturaleza del razonamiento algebraico en educación primaria y media, sin embargo, si es claro que en el marco de la enseñanza de las matemáticas, el álgebra es una asignatura importante porque constituye un eje temático que contiene los fundamentos de la formación de los estudiantes y de la vida social.

Rico (1995) señaló que los errores y las dificultades forman parte del trabajo del alumno y suelen constituir dos elementos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles del sistema educativo.

Al respecto, Filloy (2008) menciona que los estudiantes deben entender que "la forma básica de la notación algebraica es la misma que la de la aritmética", sin embargo, si no se le da sentido, pueden surgir problemas de comprensión y conflictos durante la ejecución de las mismas. formular expresiones algebraicas. Cuando hay dificultad entre leer y escribir expresiones algebraicas, "se manifiesta como una tensión entre el uso de sistemas de notación aritmética, del lenguaje natural y la necesidad de dar significado a las oraciones y símbolos algebraicos".

Socas (1997) menciona que gran parte de la investigación en curso en la enseñanza de las matemáticas se deriva del hecho observable de que los estudiantes cometen errores cuando se les pide que realicen ciertas actividades. Asimismo, se considera que el correcto aprendizaje de las matemáticas es un objetivo común en el proceso de enseñanza, entonces es claro que las respuestas incorrectas a las preguntas planteadas por los estudiantes serán vistas como indicadores de deficiencias.

Es por ello que la matemática significa un proceso con diferentes etapas en las que el alumno tendrá la oportunidad de dar sentido a lo que hace y de redefinir conocimientos que en algún momento no tienen sentido, socializando y lidiando con la vida cotidiana condiciones que benefician las cuestiones de aprendizaje. Al cobrar importancia y perpetuarse, los conocimientos de otras disciplinas pueden integrarse al mismo tiempo para buscar la transversalidad y potenciar el conocimiento de los estudiantes.

Estudiar matemáticas en el nivel medio superior representa un requisito previo básico para el estudio de algún campo específico en un nivel superior, además de ser un conjunto básico de conocimientos y habilidades que se pueden desempeñar satisfactoriamente en cualquier campo del mismo nivel (Rodríguez 2003) . Asimismo, Pinto (1996) comentó que “la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato deben ser estudiados porque representa un problema ampliamente reconocido”, para lo cual se hace necesaria una investigación profesional que propicie el éxito de los propios estudiantes.

Por lo que para ingresar en un programa educativo en la Facultad de Ingeniería de la UAQ uno de los requisitos es el de presentar un examen, debido a esto y al número de aspirantes que ingresan se ha podido observar que los alumnos cometen diversos errores durante estos exámenes, sin embargo, no se han analizado los diferentes tipos de errores que cometen, tampoco si estos son recurrentes, ni como sería la mejor forma de apoyarlos para evitar que se vuelvan constantes, es por esto que es de nuestro interés realizar una propuesta didáctica la cual pueda ser utilizada para soslayar dicha problemática.

II. ANTECEDENTES

Las matemáticas en contexto ayudan a los estudiantes a construir su propio conocimiento y construir conexiones fuertes, duraderas y no volátiles, y refuerzan el desarrollo de habilidades mentales al resolver problemas relacionados con los intereses de los estudiantes (Camarena, 1996).

Se ha observado que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se manifiestan en los estudiantes y provienen de diferentes aspectos, tales como: la organización de los cursos de matemáticas, la conceptualización de los estudiantes, problemas en la enseñanza, etc., según Socas (1997), estas dificultades se entrelazan en estructuras más complejas conectadas y fortalecidas, estas se materializan en la práctica como obstáculos y se manifiestan de forma de errores para los estudiantes.

Según Sessa (2005) para los profesores, el álgebra representa una excelente herramienta matemática, sin embargo, son complejas ya que son bastante rigurosas y sólidas, por ello son consideradas una fuente inagotable de sinsentido por los alumnos ya que tienen dificultades en sus fundamentos, creando una discapacidad de aprendizaje.

La enseñanza de álgebra en un ámbito escolar viene acompañada de algunas dificultades que tienen los niños, estas pueden ser de tipo cognitivo, ya que no todos los alumnos que inician un curso de álgebra tienen un conocimiento sólido de aritmética, pues caen constantemente en el error debido a una generalización abusiva; esto se debe a su actitud porque mucha gente piensa que es difícil y que basta con operar unas letras aritméticamente; por lo tanto, los estudiantes se limitan a memorizar conceptos y no se toman el tiempo de comprender su significado ni establecer una relación entre la aritmética y el álgebra.

Por otro lado, como meta eterna de la enseñanza de las matemáticas en el sistema escolar es lograr un correcto aprendizaje de todos los estudiantes, cuando se observa que un determinado número de estudiantes continúa teniendo respuestas incorrectas a las diversas preguntas planteadas, se considera como objetivo no alcanzado el correcto aprendizaje o el aprendizaje significativo que se busca constantemente dentro del aula (Kilpatrick et al., 1998).

Estas dificultades matemáticas se expresan como errores al realizar exámenes o ejercicios, los cuales se definen como “errores en algo” según Molinier (1986). Pero para analizar estos errores, debemos tener en cuenta el proceso de enseñanza, ya que dicho proceso de será fundamental para el aprendizaje de las matemáticas de una manera significativa (Borasi, 1987) .

Las razones del fracaso en el aprendizaje de las matemáticas se atribuyen a una variedad de factores en el nivel medio, por ejemplo, la deserción excesiva, el incumplimiento de los contenidos curriculares, la insuficiente motivación para aprender matemáticas, los malos hábitos de estudio, etc. Según Espinosa (2000), el bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas y materias afines se debe a una variedad de factores, uno de los cuales son los errores de los estudiantes en las tareas de matemáticas.

Las dificultades que encuentran los estudiantes se demuestran a través de sus errores, por lo que es importante reflexionar sobre su significado y orígenes. Tradicionalmente, los errores relacionados con la enseñanza se basan entre las expectativas de los docentes sobre las respuestas de los estudiantes y lo que los estudiantes brindan, pero algunos investigadores han propuesto definiciones que difieren radicalmente de las propuestas por la enseñanza tradicional. En este sentido, la enseñanza constructivista ve en los errores una fuente de información para que los docentes comprendan qué han aprendido los alumnos y cómo lo han aprendido (Borasi, 1987).

Con respecto a esto, Rico (1995) ve el error como una posibilidad permanente de adquirir y consolidar conocimientos que pueden formar parte del conocimiento científico utilizado por personas o grupos. Para Piaget (1978), citado por Pessoa (1997), los "errores" son problemas en los sistemas cognitivos que no resuelven las cosas, que, según él, se esfuerzan por construir soluciones a problemas de medios y estrategias adecuadas para la solución de un problema propuesto.

Socas (1997) identificó los errores como resultado de una inadecuada planificación cognitiva en los estudiantes y no meramente de un desconocimiento u olvido puntual. Según Brousseau (1997), los errores además de ser efecto de la ignorancia, la inseguridad, el azar, también pueden ser el resultado de un conocimiento previo.

Así, en palabras de Barrantes (2006) "los errores se caracterizan por ser predecibles", es posible determinar qué tipo de errores se producirán si se conoce el entorno o situación (el medio didáctico construye un entorno de enseñanza para el conocimiento) , porque el obstáculo es precisamente el conocimiento que el estudiante construye, correcta o incorrectamente.

Diversos estudios nacionales realizados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) han mostrado dos tipos de resultados con respecto a las matemáticas en México:

- Los estudiantes mexicanos de educación básica logran niveles de desempeño muy inferiores a los esperados.
- Existe una gran inequidad en la distribución de los aprendizajes, cuando se toman en cuenta las condiciones socioculturales de los estudiantes (Backhoff et al., 2007).

Esto ha llevado a varios hallazgos reportados por INEE, que a nivel nacional, el 9% de los preescolares de tercer grado no logran adquirir las habilidades de pensamiento matemático establecidas en el currículo (Backhoff et al., 2007), y el 17% de sexto grado el 51% de los alumnos de tercero adquieren conocimientos y habilidades matemáticas mínimas (Caso y González, 2011). En otras palabras, se puede observar que a medida que aumenta el nivel educativo, el problema se agudiza.

Sin embargo, a nivel medio superior, se realizan pocos estudios nacionales e internacionales para comprender el logro educativo de los estudiantes al final de sus estudios. A nivel internacional, México no tiene experiencia, y a nivel nacional, podemos destacar dos esfuerzos recientes, uno de ellos está relacionado con el examen de bachillerato ENLACE coordinado por la SEP y el otro está relacionado con el examen Excale-12 coordinado por el INEE, ambas herramientas están diseñadas para evaluar las habilidades adquiridas por los estudiantes que completan su tercer grado de bachillerato. Sin embargo, mientras que la prueba Excale-12 se encuentra en una fase piloto y se desconocen sus resultados, la prueba ENLACE arrojó sus primeros resultados en 2008.

En el primer estudio a nivel de bachillerato se demostró que el 45% de los estudiantes que culminaron sus estudios se encontraban en un nivel deficiente de habilidades matemáticas (SEP, 2012), reforzando la idea de que los estudiantes mexicanos no se desempeñan bien en la escuela en los diferentes niveles educativos (INEE, 2011).

Artigue (1995) menciona que "se necesita más investigación para comprender cómo la cultura afecta la forma en que se aprende y se enseñan las matemáticas. La búsqueda de explicaciones para estos "resultados" y "actitudes" de los estudiantes, se resume en "factores culturales" como posible interpretación de resultados y actitudes. Entre ellos: el valor de la disciplina, la autoridad docente y la educación como factor social.

III. JUSTIFICACIÓN

Las matemáticas se consideran esenciales para el desarrollo y funcionamiento de la sociedad y son fundamentales en la formación integral del ser humano, constituyendo un elemento desde la infancia (Oliveros, 2011). Sin embargo, además del bajo rendimiento académico, las dificultades de aprendizaje también son causa de deserción y exclusión social, ya que puede conducir a la deserción dentro del sistema educativo (Rivas, 2005).

Se ha observado que a medida que avanzan las matemáticas entre niveles escolares, aumenta la complejidad de la materia, con consecuencias si existen dificultades entre conceptos previos, nuevos conceptos, terminología y su implementación desde el nivel base. Por lo tanto, se puede observar que en los estudiantes de bachillerato estos procesos aritmético-algebraicos deben ser fortalecidos nuevamente en el primer semestre, ya que es un tema recurrente de aplicación de procesos posteriores.

Entre estos temas que necesitan ser fortalecidos, se destaca el uso y conceptos de las leyes de exponentes, ya que serán una base necesaria para comprender temas más complejos en cálculo, lo cual es importante dentro una ingeniería. Cuando hablamos de leyes de exponentes, nos damos cuenta de que los errores que cometen los estudiantes se repiten por una variedad de razones, tales como:

- No logran comprender en su totalidad dichas leyes por lo cual recurren a la memorización.
- Debido a la memorización tienden a mecanizar los procesos (siguiendo siempre los mismos pasos) esto ocasiona que cuando el ejercicio o el problema cambia no sean capaces de aplicar de manera correcta la ley.

Por eso es deseable enseñar contenidos de forma didáctica y de forma jerárquica, desde temas simples a otros más complejos, para tratar de facilitar un aprendizaje significativo, según Ausubel, “cuando las cosas le importan a un individuo al compararlas con sus conocimientos previos se conectan”. , es decir, cuando el estudiante haya comprendido las diversas leyes, será capaz de aplicarlas a varios problemas incluso prácticos.

Al respecto, se han observado diversos fenómenos didácticos a lo largo de la historia de las matemáticas, como Martínez (2002), observó y concluyó al estudiar a algunos estudiantes de diferentes niveles escolares (secundaria, bachillerato y licenciatura) que el estudiante no comprende o le queda claro el concepto de exponentes no naturales y tampoco logra la estabilidad requerida para establecer el conocimiento de las funciones exponenciales. Por ello observó que los estudiantes estaban muy influenciados por el concepto de exponenciación natural (multiplicación repetida), las respuestas que daban eran cero para nada o ninguno, se usaba el signo "menos" para dividir números negativos "como positivos", y además, los estudiantes al observar un radical procedieron a ignorarlo y su resultado no se interpreta como exponenciación.

De acuerdo con la revisión de varios libros de secundaria y de álgebra de diferentes niveles escolares Alarcón (2000) observa que la mayoría de ellos realizan el siguiente tratamiento:

- La secuencia de los exponentes es la siguiente: como abreviación de la multiplicación reiterada (naturales), cero, negativo y fraccionario.
- Sus argumentos son de tal manera que se conservan las leyes de los exponentes naturales; pero en realidad no son "objetos de estudio".

Con base en esto y en la experiencia en el aula, podemos decir que aún hoy en día existen ciertos problemas con estos objetos matemáticos porque los estudiantes no perciben la naturaleza convencional del manejo de exponentes. Es por esto que se sugiere compaginar los diversos temas de aritmética-álgebra, ya que los principales temas donde observamos errores son: la ley de los signos, la jerarquía de las operaciones, la multiplicación de exponentes enteros, la ley de los exponentes números negativos, la elevación de potencias a otras potencias, suma de productos de potencias y operaciones con fracciones.

Pérez (2014) demuestra que con estos errores observables en los distintos temas aritmético – algebraico, es posible realizar un análisis de cómo los estudiantes de secundaria recurren continuamente a estas dificultades, enumerando los errores más comunes que de nuevo coinciden con la experiencia de errores observables en el aula. , encontró lo siguiente:

- Cuando a un *polinomio le antecede un signo negativo*, todos los signos del polinomio cambian. Es muy común ver que los estudiantes sólo cambian el signo del primer término del polinomio.

- *Multiplicación de monomios* con el mismo coeficiente y diferente parte literal. Algunos estudiantes sólo multiplican la parte literal, pero conservan el mismo coeficiente.
- *Jerarquía de operaciones*: el error común cometido por los estudiantes es el realizar las operaciones sin respetar la jerarquía.
- *Suma o resta de fracciones algebraicas.* Algunos estudiantes suman los numeradores y también los denominadores directamente, sin buscar el mínimo común múltiplo.
- *Leyes de los exponentes: e*xiste confusión entre los estudiantes al resolver operaciones con expresiones algebraicas donde tienen que aplicar las leyes de los exponentes. Con frecuencia confunden la potencia de potencia con la multiplicación.

Por otro lado, es importante señalar que los exámenes de ingreso a las instituciones de educación superior tienen el potencial de brindar información sobre las habilidades que adquieren los estudiantes durante la educación básica y media superior (Martínez, 2002). Es por esto que se puede observar que, debido a diversos factores (pueden ser el entorno, los estudiantes o la forma en que se enseñan las matemáticas), el bajo rendimiento académico hace que los estudiantes pierdan interés y tengan frustración en la materia esto debido a que muchas veces el alumno confunde el tema o procedimiento a realizar.

Es por ello que se convierte en un tema de interés, el análisis de los errores que cometen los alumnos a la hora de realizar un examen de ingreso a un programa educativo de nivel licenciatura, ya que dichos temas en donde el alumno comete errores son constantes debido a los diversos factores como son: los métodos de aprendizaje, las diferentes habilidades del alumno, su nivel de conocimiento adquirido en los diversos temas matemáticos, entre otros factores. Con base en las respuestas que el alumno arrojó en dicho examen y el análisis del mismo, se realizó una propuesta que servirá de apoyo para el profesor y el alumno, la cual tiene la finalidad de soslayar dicha problemática recurrente.

IV. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El aprendizaje de las matemáticas ha sido y sigue siendo una fuente de depresión y ansiedad para un número considerable de estudiantes, sin embargo, se considera un pilar de la escolarización por su énfasis en la formación analítica y el procesamiento del lenguaje simbólico (Macías & Hernández, 2007). En concordancia con los resultados presentados por el INEE y la SEP, investigaciones internacionales confirman que, en comparación con otros países, los estudiantes mexicanos logran adquirir habilidades matemáticas en niveles muy por debajo de los especificados en el currículo nacional (SEP, 2012), y los problemas en los niveles educativos superiores son mayores.

Hablando histórica y concretamente de la enseñanza del álgebra, se ha observado que no ha producido los resultados esperados en la formación educativa de los estudiantes de secundaria y preparatoria (Hodgen et al., 2009). En la actualidad, esta situación no ha cambiado, lo que se refleja en el desempeño de los estudiantes, quienes tienen un rendimiento académico bajo después de ingresar a la universidad, tienen poca comprensión de los conceptos de álgebra elemental y muestran muchas ideas confusas que son difíciles de absorber o retener, provocando a la largar mayores dificultades en el alumno (Ferreyra et al., 2010).

Esto lleva a que varios problemas observados por los estudiantes al resolver un ejercicio se deban a la falta de razonamiento matemático, el cual se basa en realizar algún proceso de identificación y descripción, utilizando o definiendo, clasificando y justificando de acuerdo a la tarea presentada (Gutiérrez & Jaime, 1998); si bien el estudiante es capaz de replicar los ejercicios presentados en clase, muchas veces se le dificulta formular y analizar lo que se le pide, por lo que los estudiantes son propensos a cometer errores al momento de realizar ejercicios o exámenes.

Backhoff y Tirado (1993) afirmaron que más de la mitad de los estudiantes universitarios que participaron en el estudio no dominaban los conceptos básicos de álgebra enseñados en la escuela secundaria (comprensión de incógnitas, evaluación de expresiones algebraicas, simplificación de ecuaciones algebraicas lineales, solución de problemas de primer orden). ecuaciones y métodos de problemas de ecuaciones). Es por ello que Usiskin (1988) señaló que en el aprendizaje de álgebra, es un tema muy difícil a pesar de ser tareas que se enfocan en operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división de expresiones) .

Ruano et al. (2008) señalaron algunas dificultades y errores específicos que los estudiantes mostraban al convertir expresiones algebraicas, como el uso inapropiado o inexistente de paréntesis, concatenación de ecuaciones, falta de comprensión de las expresiones y generalización de las propiedades distributivas de la multiplicación. aceptación del signo igual como expresión equivalente, orden incorrecto de las operaciones y separación de números del signo de operación que los precede.

García (2010) analizó de manera simbólica los errores y dificultades de estudiantes de primer año de un nivel superior en México el cual consistía en resolver tareas algebraicas, y en su investigación identificó al menos una docena de errores específicos en la resolución de problemas, siendo los más destacados: operaciones aritmético-algebraicas. , usar aritmética básica ignora las reglas del álgebra y comete errores al hacer productos de polinomios. De acuerdo con una revisión bibliográfica realizada, estos errores se relacionan con los señalados en Radatz (1979): "Errores resultantes de un aprendizaje deficiente de hechos, habilidades y conceptos previos, incluyendo todas las deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos ". Estudios como estos muestran que los errores relacionados con el álgebra que se encuentran entre los estudiantes de nivel escolar persisten, incluso durante la educación superior.

Debido a eso muchos docentes coinciden en afirmar que la mayoría de los alumnos cometen los mismos errores en la multiplicación algebraica y las leyes de exponentes de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje. Estos problemas parecen estar relacionados con una serie de deficiencias en comprensión de conceptos y en la forma de enfocar el álgebra que traen como consecuencia inmediata una forma errónea de enfrentarse con su aprendizaje; en la mayoría de los casos los alumnos memorizan sin comprender las reglas y procedimientos y las aplican automáticamente, lo que les lleva a cometer las mismas equivocaciones de manera persistente, además, los errores suelen ser considerados por el docente como falta de estudio o de atención, cuando en realidad indican una fuerte carencia de comprensión.

Es por esto que el problema de estudio se basa en que los alumnos que acaban de terminar su bachillerato y desean ingresar a la universidad tienen problemas en resolver operaciones matemáticas centradas en el álgebra específicamente en las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Enfocándose específicamente en la multiplicación de expresiones podemos observar que tienen dificultades en entender el concepto y su ejecución, ya que tienden a cometer errores debido a que no comprenden cómo desarrollar la propiedad distributiva, ni las leyes de los exponentes, esto se ha observado repetidamente en los resultados generados en los alumnos durante los exámenes de admisión.

Por lo anterior expuesto, durante este trabajo se diseñó una propuesta didáctica a partir de los errores que comete un alumno al presentar un examen de admisión, se tomará en cuenta que son alumnos que acaban de terminar el bachillerato y desean ingresar a la Universidad, estos errores serán analizados a partir de la propuesta hecha por Radatz (1979), los errores que se analizarán serán aquellos que suceden durante las operaciones algebraicas de multiplicación (leyes de exponentes y propiedad distributiva), para el diseño de esta propuesta se utilizará la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau y tiene como objetivo soslayar los errores que los alumnos cometen recurrentemente durante un examen con el fin de que no sólo sea cuestión de memorización, ya que como mencionan Hodgen et al. (2009) los alumnos están más asociados con una enseñanza para el test que a una comprensión genuina de la matemática.

V. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La fundamentación teórica está basada en la *propuesta de Radatz* (1979) sobre la taxonomía para clasificar errores y en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), a continuación, se detalla cada una.

La clasificación propuesta por Radatz (1979) ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis.

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje

El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Se cometen errores al intentar traducir de un lenguaje coloquial o común a un lenguaje matemático y viceversa.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado, están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

La *Teoría de Situaciones Didácticas* mejor conocida como TSD, realizada por Brousseau se basa en una teoría de la enseñanza, bajo la hipótesis de que el conocimiento no se construye de manera espontánea (1997). Una situación didáctica es construida intencionalmente para que el alumno adquiera un saber determinado, para Brousseau es un conjunto de relaciones entre el *alumno, el saber y el sistema educativo (profesor).*

Dicha teoría está sustentada en una concepción constructivista (en el sentido piagetiano) del aprendizaje, concepción que es caracterizada por Brousseau (1986) de esta manera: “el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como la sociedad humana. Este saber, es fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje”

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrezcan al alumno posibilidades de construcción del conocimiento dio lugar a la necesidad de organizar la enseñanza en diversos momentos de aprendizaje, las cuales se describen a continuación:

Según la definición de Brousseau (1986) sobre “una situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.”

- **Fase a-didáctica:** cuando el alumno se encuentra frente a un problema e intenta resolverlo sin intervención del profesor, se basa en poner al alumno en situaciones que produzcan conocimiento a partir de la reformulación y la lucha contra conocimientos anteriores frente a un problema, antes de la intención de la enseñanza (docente).

Esta definición de situaciones a-didácticas contiene distintos aspectos que conviene analizar por separado, los cuales son: *la necesidad de los conocimientos, la noción de sanción y la no intervención del maestro en relación al saber*.

- ***Necesidad de conocimiento:*** se organiza de manera que el conocimiento al que se apunta sea necesario para la resolución, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende enseñar.

  Dentro de la experiencia se puede observar esta necesidad que se tiene en que los alumnos tengan muy presente el concepto matemático y el desarrollo para la resolución de un problema, sin embargo, podemos generar confusión cuando el alumno no ha dominado ninguna de las dos situaciones (la teoría ni la práctica).

- ***La noción de sanción***: no debe entenderse como castigo o equivocación. Una idea es presentar la situación para que el alumno interactúe con un medio que le ofrezca información sobre su producción, que pueda juzgar por sí mismo los resultados de su acción y que visualice otras posibilidades de respuesta con el fin de establecer relaciones entre sus elecciones y los resultados obtenidos.

  De aquí la importancia de la "no intervención" en primera instancia del docente, ya que los alumnos deben encontrar por si mismos relaciones entre sus elecciones y los resultados obtenidos, esta situación es concebida como un momento de aprendizaje.

- ***La no intervención del maestro en relación al saber:*** aunque el maestro no debe intervenir en esta fase, es él quien debe gestionarla, aquí el alumno es responsable de sus elecciones y debe aceptar sus consecuencias.

  No significa que el docente se desvincule, sino más bien deberá buscar formas para que el alumno recuerde procesos previos a través de discusiones, indicando que para llegar a una solución existen diversas maneras e incitando a que el alumno trabaje con lo que sabe para llegar a un resultado.

Con respecto a las situaciones didácticas Brousseau (1986) menciona "que son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propios de un conocimiento bien determinado."

- **Fase didáctica:** es una situación que contiene la intención absoluta de que alguien aprenda algo.

Existen tres tipos de situaciones didácticas: *la de formulación, acción y validación*.

- ***Situación de acción***: el alumno deberá interactuar sobre un medio, la situación requiere solamente de la puesta de conocimientos implícitos.
- ***Situación de formulación:*** el alumno "emisor" formula explícitamente un mensaje destinado a otro alumno y el "receptor" debe comprender el mensaje y actuar en base al conocimiento contenido en el mensaje.
- ***Situación de validación:*** se afirman resultados a un grupo de alumnos los cuales lo ponen a consideración de otro grupo, aquí deben ser capaces de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas o proponer nuevos resultados hasta llegar a un consenso.

Existe la creencia de que se deben pasar por estas tres situaciones para lograr el aprendizaje, sin embargo, bajo la experiencia es que podemos reordenarlas u omitir alguna. Existen conocimientos que funcionan implícitamente y que su formulación explícita será apropiada mucho después, o bien que conocimientos que sea oportuno formular, pero cuya validación explícita no sea apropiada para estos niveles de escolaridad.

- **Institucionalización:** es el proceso de aprendizaje donde los alumnos construyen, definen las relaciones entre las producciones y el saber cultural/científico, por lo cual supone preservar el sentido de los conocimientos construidos en las dos fases anteriores.

La fase a-didáctica suele ser la que conlleva mayor dificultad para poder gestionarse dentro de una institución ya que se debe cumplir con un temario y con una cierta cantidad de contenidos, todo esto en un tiempo determinado, es por ello que recurrimos constantemente en la una enseñanza didáctica o tradicional, que si bien hemos visto que es parte fundamental para el aprendizaje, necesita de esta fase a-didáctica para que el alumno cree sus propias conexiones relacionados con el contenido, permitiendo que este pueda equivocarse y aprender para futuras ocasiones, volviéndose así un aprendizaje más completo al pasar por las fases descritas por Brousseau en la TSD.

Una explicación de este fenómeno lo describe Brousseau (1994) "Las situaciones de enseñanza tradicionales son situaciones de institucionalización, pero sin que el maestro se ocupe de la creación del sentido: se dice lo que se desea que el niño sepa, se le explica y se verifica que lo haya aprendido".

La institucionalización supone establecer relaciones entre los alumnos y el saber, no se reduce a una presentación de la enseñanza desvinculado del trabajo anterior de la clase (situaciones a-didácticas). Aquí se debe ordenar, sistematizar, sacar conclusiones con la finalidad de establecer relaciones entre el aprendizaje y el saber del alumno.

VI. OBJETIVOS

a) Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica a partir de los errores cometidos por el alumno en exámenes de admisión a un programa educativo perteneciente a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autonóma de Querétaro del año 2019, la cual se basa en la propuesta de Radatz sobre la clasificación de errores y la teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (TSD), esto con la finalidad de soslayar los errores cometidos por los estudiantes durante los exámenes y que a su vez pueda ayudar al alumno a una mejor comprensión de la relación existente entre los temas aritméticos y algebraicos.

b) Objetivos específicos

- Analizar los principales errores cometidos a partir de la propuesta de Radatz en multiplicación algebraica, enfocándose a la propiedad distributiva y leyes de exponentes en los exámenes de admisión a un programa educativo.
- Detectar y categorizar los errores que cometen los alumnos con base en la propiedad distributiva y leyes de exponentes en los exámenes de admisión a un programa educativo.

VII. METODOLOGÍA

Esta investigación será de tipo cualitativo, este método es relevante cuando se investigan fenómenos sociales complejos que son difíciles de capturar desde la perspectiva cuantitativa, como señala Barrantes en 2014 "se centra en el estudio de las acciones humanas y de la vida social".

Con respecto a lo anterior, Flick (2015) plantea que al hacer investigación cualitativa los mismos investigadores son parte importante del proceso de investigación, bien desde el punto de vista de su propia experiencia personal como investigadores o desde el de sus experiencias en el campo, y con la reflexividad que aportan al rol que desempeñan, pues son miembros del campo que es objeto de estudio.

Es por ello que la propuesta didáctica se basa en la *ingeniería didáctica* la cual proviene de la TSD, la cual tiene como objetivo considerar a la didáctica de las matemáticas como un conjunto de interacciones el cual se sustenta del sistema educativo (institución – docente), de los alumnos, de procesos didácticos y a-didácticos con la finalidad de optimizar la apropiación de saberes en el sujeto.

Como metodología de investigación la ingeniería didáctica se caracteriza:

1. Por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
2. Por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre un análisis antes y después del proyecto.

Dentro de la ingeniería didáctica hay un nivel denominado micro – ingeniería en el cual está basado nuestra propuesta ya que aquí las investigaciones tienen por objeto de estudio un tema determinado y específico, son locales y ocurren principalmente como un fenómeno dentro del aula (en este caso fue durante un examen).

Dicha propuesta se realizó a partir de exámenes de admisión a un programa educativo de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, en donde se analizaron los errores algebraicos cometidos por el alumno en relación con la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes, dichos temas comparados con la bibliografía y la experiencia dentro del aula nos permite observar los errores que de manera frecuente son detectados durante los exámenes y los cuales se arrastran desde niveles básicos hasta después del ingreso a la universidad (incluso durante toda su carrera).

La propuesta tiene como finalidad apoyarse de la TSD para buscar un aprendizaje que ayude al alumno a soslayar los errores detectados con ayuda de Radatz. Se debe tomar en cuenta que la propuesta didáctica está diseñada para ser utilizada durante las clases presenciales, sin embargo, por la pandemia causada por el COVID-19, dicha propuesta se utilizará durante las sesiones síncronas.

a) Selección de la muestra

Para seleccionar la muestra se tomó en cuenta los exámenes de admisión (escritos) a un programa educativo de la Facultad de ingeniería de la generación 2019 de la Universidad Autónoma de Querétaro. Para poder realizar el análisis, categorización y detección de errores de dichos exámenes primero se realizó un muestreo aleatorio simple de población finita para poder determinar el número de la muestra, para que dicha muestra fuera representativa.

Técnica de muestreo: Muestreo probabilístico

El muestreo probabilístico está basado en un proceso de azar y las unidades que componen la muestra se seleccionan aleatoriamente. Este procedimiento es el único que es científico y permite medir o acotar el error de muestreo. Existen diversos procedimientos de este tipo de muestro, el que nosotros utilizamos será el *muestreo aleatorio simple*.

El muestreo aleatorio simple consiste en extraer una muestra de tamaño n, de una población de tamaño N de manera totalmente aleatoria. Para elegir la muestra es necesario disponer de un “marco”, es decir, de un listado de componentes de esa población, de manera que se puedan elegir mediante un proceso al azar.

1. Población (**N**): Aquel conjunto de individuos o elementos que podemos observar, medir una característica o atributo
2. Muestra (**n**): parte de la población en la que se miden las características estudiadas (número de individuos de la muestra: tamaño de la muestra)
3. Error (**e**): Medida de variabilidad de las estimaciones de muestras repetidas en torno al valor de la población
4. Nivel de confianza (**Z**): Probabilidad de que el intervalo construido entorno a un estadístico capte el verdadero valor del parámetro, este puede oscilar entre el 90 – 99% y dependerá del tamaño de la muestra deseada (entre mayor sea mayor será la muestra).
5. Variabilidad positiva y negativa (**p** y **q**): Ambas son complementarias por lo cual la suma de estas es igual a la unidad, si hablamos de la máxima variabilidad se utilizará cuando no existan antecedentes sobre la investigación o no se pueda aplicar una prueba previa y su valor sera de 0.5 para ambos casos.

Definiciones pertinentes para el análisis:

n: Es el tamaño de la muestra que deseamos determinar

Z: Representa el nivel de confianza se utilizó el del 95% =1.96

N: Población (número total de exámenes)

p: Variabilidad positiva (0.5)

q: Variabilidad negativa (0.5)

e: Precisión o error

$$n = \frac{(Z^2)(p)(q)(N)}{(N-1)(e^2) + (Z^2)(p)(q)}$$

Se utilizó la siguiente fórmula para determinar el tamaño de nuestra muestra ya que conocemos su tamaño y por ende se utilizaron los parámetros descritos con anterioridad.

Es por esto que para determinar el tamaño de la muestra (n) en el muestreo aleatorio simple utilizado lo primero que se necesitó fue conocer el tamaño de la población la cual fue de 2364 exámenes (N), en el cual se determinó el nivel de confianza del 95% $(Z = 1.96)$, para la variabilidad positiva (p) y la negativa (q) se le dio un valor de 0.5 en ambos casos ya que son complementarias y debido a que no hay antecedentes sobre la investigación entonces sus valores de variabilidad serán $p = q = 0.5$, el porcentaje de error (e) utilizado fue del 5%.

Al utilizar nuestra fórmula para encontrar el tamaño de la muestra pudimos observar que el total fue de 331 exámenes.

$$n = \frac{(Z^2)(p)(q)(N)}{(N-1)(e^2) + (Z^2)(p)(q)} = \frac{(1.96)^2(0.5)(0.5)(2364)}{(2364-1)(0.005)^2 + (1.96)^2(0.5)(0.5)} \approx 330.57 = 331$$

Para tomar una muestra representativa de los exámenes de admisión para nuestra propuesta, lo primero que se realizó fue ordenarlos alfabéticamente y así pudimos observar que contábamos con exámenes de la A a la H, los cuales no tenían la misma cantidad de alumnos (estos oscilaban entre 20 hasta 40 alumnos), a su vez, contábamos con dos exámenes equivalentes que también fueron tomados en cuenta para nuestro análisis (aquí teníamos aproximadamente 10 por cada uno). Es por esto que se determinó que de los 2364 exámenes el cual representa el número total de la población (N) se dividió entre el tamaño de la muestra (n) el cual está representado por 331 exámenes, con la finalidad de tomar de manera aleatoria un examen por cada 8 para nuestro análisis con el objetivo de poder representar a todos nuestros diferentes tipos de exámenes.

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}} = \frac{2364}{331} \approx 7.14 \ = 8$$

Después de realizar este proceso se observó que en algunos casos había exámenes en blanco en diversos grupos, es por ello que no se contabilizaron para el análisis lo cual arrojó un total de 325 exámenes en total de los 331 que eran al inicio.

b) **Análisis, categorización y detección de errores**

Se utilizó un documento en Excel en donde se capturaron ciertos elementos, entre ellos:

- Número de examen
- Número de pregunta
- Reactivo correcto, incorrecto o no contestado
- Descripción del error cometido

A partir de estos datos, se procedió a clasificar los errores cometidos por los alumnos con base a la experiencia dentro del aula para su descripción y de la teoría propuesta por Radatz, esto nos llevó a concluir que muchos de los errores cometidos son repetitivos y muy parecidos entre sí, es por ello que para su mejor comprensión se realizaron los siguientes procesos:

- Categorización de los principales errores encontrados por los alumnos en sus exámenes de admisión a partir de la elaboración de una tabla, se realizó una descripción de los principales temas en donde el alumno cometía dichos errores y la descripción explícita del mismo, también se contabilizó la cantidad de veces que se observan los errores de acuerdo a la teoría.
- Diseño de un gráfico de los errores observados para determinar cuáles son

los que más se repiten y darles mayor visibilidad.

c) **Propuesta didáctica**

A partir de los resultados obtenidos de la clasificación de errores propuesta por Radatz y basados en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (TSD) se realizó una propuesta didáctica, la cual se basa en utilizar las diferentes situaciones descritas con anterioridad (didácticas y a-didácticas) ya que fueron la base para buscar soslayar los errores cometidos por los alumnos durante sus exámenes, todo esto con la finalidad de buscar un aprendizaje a largo plazo.

La propuesta se dividirá en 2 fases fundamentales:

1) Fase a-didáctica:

Durante esta fase el alumno deberá resolver una serie de reactivos sin intervención del profesor, estos pueden ir desde temas simples a más complejos de acuerdo a los resultados obtenidos en el análisis previo con base en los errores documentados según Radatz, esto se realiza con la intención de que el alumno pueda estar en una situación en donde necesite de sus conocimientos previos para lograr la resolución de un problema, permitiéndole equivocarse, buscar opciones para resolverlo antes de que el docente le muestre el camino, esto le permite al alumno tener más opciones a la hora de resolver, tener dudas y poder adueñarse del conocimiento.

2) Fase didáctica:

Para esta fase es necesaria la intervención del profesor, es por ello que se le dará el apoyo a este con una breve explicación sobre los diversos temas observados en donde los alumnos tienen errores basándonos en la experiencia y lo propuesto por Radatz, esta información también es útil para los alumnos ya que podrán consultarlo de manera independiente si así lo desean.

También cuenta con una serie de ejercicios que el profesor puede utilizar para explicar nuevamente el tema, permitiendo que el alumno interactúe con la parte a-didáctica de la fase anterior mezclándolo con los conocimientos que el profesor nuevamente instruyo, es por ello que en esta sección se mezcla la parte aritmética y algebraica las cuales deben interrelacionarse para un mayor entendimiento, propiciando que el alumno los vea como un solo tema y no algo aislado.

VIII. MATERIALES A UTILIZAR

Para el diseño de esta propuesta se utilizarán los siguientes recursos:

- Exámenes de admisión (escritos) de la Facultad de ingeniería de la generación 2019 de la Universidad Autónoma de Querétaro exámenes de admisión.
- Programa de Excel para la captura de los datos siguiendo la metodología de Radatz, así como para realizar tablas de frecuencia que se mostrarán durante el análisis (de acuerdo a los diferentes tipos de errores encontrados).
- Programa informático orientado al procesamiento de textos (Word) para el diseño de la propuesta didáctica a partir de la TSD.

No se utilizarán recursos humanos ya que la propuesta se diseña bajo material que ya está disponible (exámenes de admisión), por lo cual no hay conflicto de intereses y en la parte final del documento se puede encontrar la carta de confidencialidad que he firmado para mantener resguardados y seguros los datos utilizados (ANEXO 1).

IX. RESULTADOS DEL ANÁLISIS

a) Categorización y detección de errores

Se utilizó un programa de software de hojas de cálculo (Excel) para llevar un control de la población en donde se realizó el vaciado de los datos (nombre, sexo, carrera a la que aspiran y calificación obtenida) estos simplemente para conocer la mayor información posible del estudiante, también se analizaron tres reactivos los cuales involucraban los diferentes temas que se deseaba observar (leyes de exponentes, leyes de signos, multiplicación algebraica).

Para el manejo adecuado de los reactivos se determinaron las siguientes categorías:

- Ejercicio **correcto**: si el procedimiento lo llevo a la resolución adecuada del ejercicio.
- Ejercicio **no contestado**: si el alumno no contestó el reactivo por desconocimiento del tema, de la instrucción o por alguna otra cuestión como el tiempo.
- Ejercicio **incorrecto:** Se utilizaron dos subcategorías en esta sección
    - Incompleto: si el alumno empezó a resolver el ejercicio, pero lo dejo incompleto sin ninguna explicación.
    - Incorrecto: Si el alumno contestó el reactivo, pero el procedimiento fue erróneo lo cual lo llevo a una respuesta equivocada.

Para cada reactivo se destinó una casilla en Excel en donde se fue describiendo detalladamente lo que el alumno realizó de acuerdo a las categorías anteriores:

- Se describe que el ejercicio es correcto cuando el alumno resuelve el ejercicio de forma esperada utilizando procedimientos válidos y lógicos.
- Se describe el ejercicio no contestado cuando el alumno no realiza ningún procedimiento por el cual no podemos averiguar cuál fue el error cometido según Radatz.
- Se describe el ejercicio incompleto cuando el procedimiento del alumno es adecuado en algún punto del mismo, es decir, utiliza jerarquía de operaciones, sumas de fracciones, leyes de exponentes de manera correcta ya sea al inicio del

ejercicio o al final del mismo, pero hay una sección errónea ya que confunde temas o los procedimientos, es por eso que el alumno no llega a la solución correcta.

- Se describe el ejercicio incorrecto cuando el procedimiento no utiliza ningún proceso válido ni lógico, sin embargo, el alumno intenta resolverlo utilizando las leyes de signos, la multiplicación algebraica, la suma de fracciones, entre otros recursos matemáticos que él considera válidos, aunque claramente no lo son, lo cual conlleva a no llegar a la respuesta esperada.

Utilizando nuestra hoja de Excel procedimos a vaciar nuestros datos en columnas para un mayor control de la siguiente manera:

1. Número de examen (total 325)
2. Nombre del alumno
3. Género (H o M)
4. Carrera a la que aspiraban
5. Calificación final
6. Tipo de examen (A-H o equivalentes)
7. Ejercicio correcto
8. Ejercicio no contestado
9. Ejercicio incorrecto
10. Comentarios

Aunque se debe aclarar que los datos del punto 1 al 6 simplemente nos sirvieron para el control del proyecto, para que tuviera un orden y fuera más fácil la manipulación a la hora de estudiarlos, sin embargo, dichos datos no fueron compartidos dentro de la propuesta debido al acuerdo de confidencialidad que se tiene con la institución y los alumnos.

Mientras que los datos del punto 7 al 9 fueron realizados por triplicado, ya que se analizaron tres diferentes reactivos para poder observar los distintos temas de estudio (leyes de exponentes, leyes de signos, multiplicación algebraica). Aquí fueron marcados con 0 y 1 según la categoría a la que pertenecían (correcto, no contestado e incorrecto) lo cual nos fue de vital importancia para el punto 10.

En la sección de comentarios (punto 10) el cual también se realizó por triplicado, pudimos explicar con palabras cual fue el procedimiento realizado por el alumno según lo observado:

- Cuando el procedimiento era correcto utilizando los procesos adecuados para la resolución del problema.
- Cuando no realizaba nada, ya sea porque empezó el ejercicio, pero no continuo o simplemente cuando lo dejaba en blanco (para así observar que temas se les dificultaban más).
- Cuando el resultado era incorrecto ya que podíamos hacer una descripción clara del por qué se habían equivocado, ya sea por desconocimiento del tema, confusión entre temas, procesos no válidos o simplemente descuido al realizar el ejercicio, esta sección era la más importante ya que nos ayudó a visualizar en mayor medida cuales eran los principales errores cometidos y el por qué, para así dentro de nuestra propuesta poder intentar soslayar dichos problemas.

Para finalizar por cada uno de los reactivos se destinaron otras cuatro columnas las cuales se marcaron con 0 y 1 para indicar si se encontró aquí el error propuesto por Radatz o no, para poder identificar el error se tomó en cuenta la descripción dada por Radatz, la interpretación que se le dio de acuerdo a la experiencia para así después hacer dicha clasificación con lo observado en los exámenes.

Para un mejor entendimiento de los resultados encontrados y capturados en nuestra hoja de cálculo se determinó que era necesario condensarlos en gráficas para visualizar los diferentes errores encontrados según Radatz y con base a nuestra experiencia, para poder encontrar la mejor estrategia de trabajo en nuestra propuesta.

Se realizaron tres figuras las cuales fueron condensadas principalmente de la siguiente manera:

1. **Reactivo uno**, aquí se observaron temas como: leyes de exponentes, sumas de fracciones, simplificación de fracciones
2. **Reactivo dos**, aquí se observaron temas como: simplificación de fracciones, sustitución, leyes de signos, multiplicación algebraica.
3. **Reactivo tres**, aquí se observaron temas como: jerarquía de operaciones, leyes de signos, simplificación de fracciones complejas

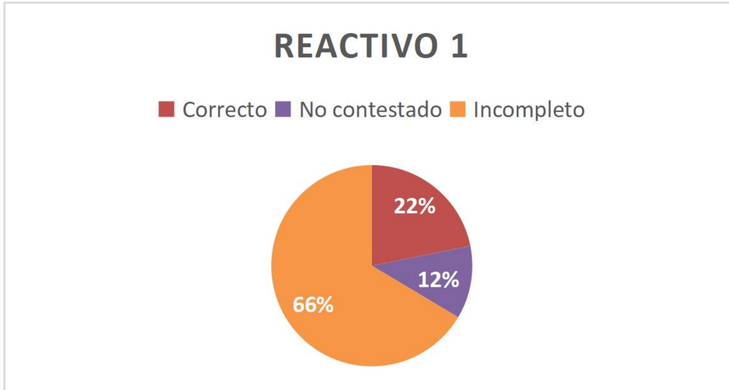
Para el caso del reactivo uno (Figura 1) podemos observar que la mayoría de los alumnos contestaron el reactivo (88%), sin embargo, de aquí el 66% de los alumnos intentaron resolver el ejercicio pero no lograron llegar al resultado correcto (por lo que se le categorizó en la columna de incompleto) ya que hubo errores dentro de su procedimiento, ya sea porque no lograron identificar la ley de exponentes que se les pedía, que tuvieron errores al resolver una suma de fracciones ya que la confundían con un producto y por lo tanto al resolver o intentar simplificar las fracciones el resultado era incorrecto.

De aquí podemos observar que el 22% de los alumnos lograron contestar de manera correcta el reactivo, siguiendo los procedimientos lógicos y válidos, esto nos puede indicar que para este ejercicio el alumno es capaz de identificar lo que se le está pidiendo ya sea en los diferentes temas algebraicos, como en la ejecución de los mismos.

Para finalizar se observa que la minoría (12%) de los alumnos no fue capaz de contestar el ejercicio y aquí podríamos tener una serie de factores que en el examen no podemos identificar tan fácilmente, como es: si el tiempo del examen no fue suficiente para alcanzar a resolverlo, si el alumno desconocía los temas presentados en el reactivo, si la indicación no fue clara para él o si simplemente no sabía qué hacer.

Figura 1

Distribución resultados en el reactivo uno (elaboración propia)



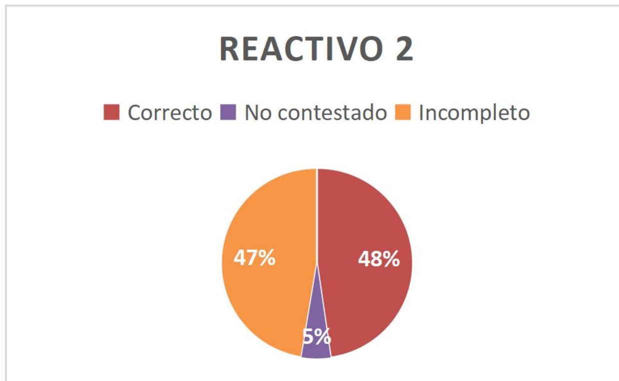
Para el caso del reactivo dos (Figura 2) podemos observar que tenemos una cantidad mayor de respuestas ejecutadas con un 95%, sin embargo aquí podemos desglosarlo en dos partes casi iguales, el 48% de los alumnos contesto de manera correcta el ejercicio ejecutando de manera lógica y eficiente los diferentes temas que se solicitaban, se observa que son capaces de sustituir un valor algebraico en una variable, también tienen un dominio en la ley de signos y la ejecución en la simplificación de las fracciones.

Es importante destacar que se observa también que el 47% de estos alumnos no llegaron a una solución correcta, aquí pudimos ver que la mayoría de los alumnos se dieron cuenta q que existían dos maneras de resolver el ejercicio, lo cual causo bastante confusión ya que podían resolver primero el ejercicio y al final sustituir cuando ya fuera una fracción más simple o podían sustituir desde el inicio y resolverlo, el problema fue que olvidaban en su mayoría las leyes de los signos, la multiplicación de un termino con un signo o de un polinomio, así como la simplificación de términos semejantes, lo cual ocasionó que el ejercicio estuviera incorrecto o incompleto ya que lo dejaban a medias.

Lo destacable es que solo el 5% de los alumnos desconocían la manera de resolverlo, esto podría ser debido a que la indicación era bastante clara, que el reactivo quizá era bastante común y por lo tanto identificaban que hacer o simplemente porque es un tema bastante recurrente cuando estamos hablando de la transición aritmético – algebraico, sin embargo, esto no garantiza que aunque sea un tema repetitivo el alumno lo haya logrado entender en su totalidad, esto podemos corroborarlo con que más de la mitad de los alumnos no lograron un resultado correcto.

Figura 2

Distribución de resultados en el reactivo dos (elaboración propia)



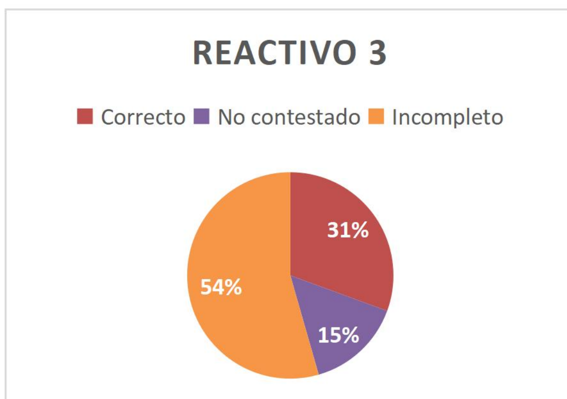
De acuerdo a lo obtenido para nuestro reactivo tres (Figura 3) se observa una tendencia muy parecida al reactivo uno, en donde un 85% de los alumnos contestaron el reactivo, pero de igual manera el 54% de estos no lograron una respuesta correcta, se quedaron en una forma incompleta de su ejercicio o incorrecta ya que aquí lo que se les solicitaba era un despeje de una variable, en donde principalmente debía recurrir a la jerarquía de operaciones a cual omitían claramente ya que simplemente cambiaban a su disposición la variable a convenir, no respetaban las leyes de los signos y aunque había algunos que lo logran realizar de la manera correcta a la hora de simplificar la fracción compleja resultante simplemente no lo hacían, no podemos definir si no lo terminaron por que la instrucción no lo pedía, por falta de tiempo o simplemente porque pensaron que hasta ahí terminaba el ejercicio.

Para este ejercicio el 31% de los alumnos contestaron de manera correcta, utilizaron la jerarquía de operaciones sin problemas, así como la ejecución en la simplificación de la fracción compleja, aquí podríamos tener una discrepancia entre por que algunos alumnos si terminaron el ejercicio y otros no, pero como ya se menciono puede deberse a factores externos (los profesores que les dieron clases), a la forma en que interpretaron el ejercicio (error debido a la dificultad en el lenguaje) o simplemente porque distinguían que el ejercicio aún podía reducirse o simplificarse más.

Solamente el 15% de los alumnos no contestaron el ejercicio, pues en su mayoría dejaron la casilla en blanco o pusieron alguna respuesta aleatoria sin procedimiento que avalara su respuesta (la cual era incorrecta de cualquier manera) lo cual nos da un área de oportunidad ya que podrían ser muchos los factores que ocasionaron esta falta de respuesta por parte del alumno.

Figura 3

Distribución de resultados en el reactivo tres (elaboración propia)

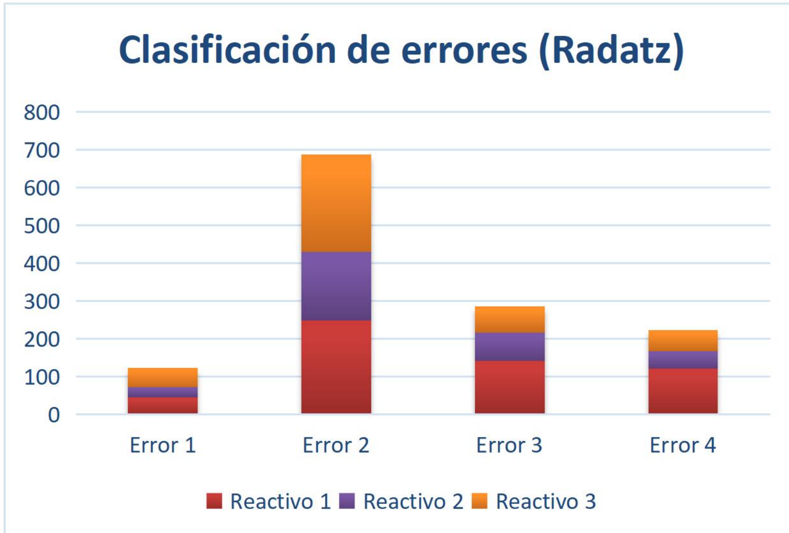


Para el caso de la clasificación de errores (Figura 4) lo que se realizó fue comparar la bibliografía con la experiencia frente al grupo, para así poder observar y describir el procedimiento del alumno durante el examen, con esto se logró categorizar en alguno de los errores que Radatz nos menciona.

Para ello con ayuda de nuestro documento en Excel se realizó una gráfica en la que se visualizan los diferentes tipos de errores cometidos.

Figura 4

Distribución de errores utilizando la clasificación de Radatz (elaboración propia)



Con base a lo propuesto por Radatz, la interpretación dada por la experiencia laboral y la forma en la que se observa en los diferentes tipos de exámenes se realizó una breve descripción de cómo se categorizó para su mayor entendimiento:

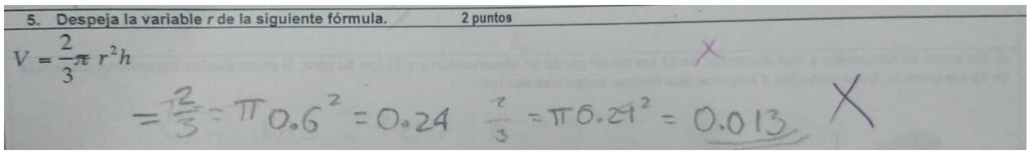
1. *Errores debidos a dificultades de lenguaje*

Interpretación: Aquí tenemos dos opciones, la primera es que el alumno no comprende la instrucción que se le está dando para la resolución del ejercicio y la segunda es que, aunque entiende que debe de hacer no es capaz de traducir el concepto algebraico a algo conocido (quizá algún ejercicio previo), es por esto que no realiza el ejercicio o lo empieza, pero no logra avanzar. Se observa que los principales problemas son que no leen completamente el ejercicio o tienen errores de notación.

Descripción gráfica (examen):

Figura 5

Interpretación en examen de errores debidos a dificultades de lenguaje



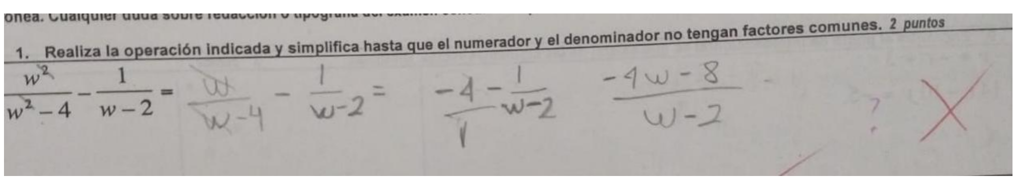
2. *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*

Interpretación: Cuando un procedimiento realizado por el alumno está incompleto, esto puede ser por diversas razones: desconocimiento parcial del concepto, el contenido del tema es deficiente ya que lo confunde o lo ha olvidado, no recuerda la secuencia que debe llevar o el proceso que debe tener dicho tema para llegar a la resolución de un problema dado.

Descripción gráfica (examen):

Figura 6

Interpretación en examen de errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos



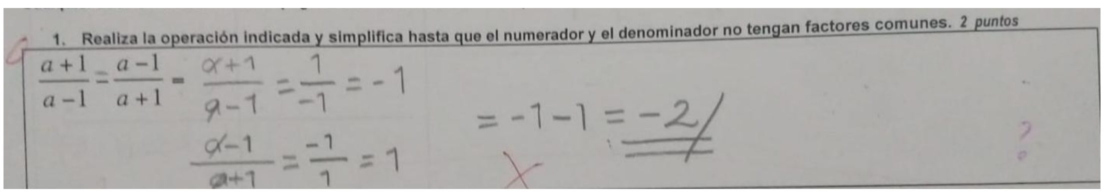
3. *Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.*

Interpretación: Cuando pasamos de la parte aritmética a la algebraica constantemente el alumno tiende a confundir o asociar de manera incorrecta los diferentes temas, ya que se queda atascado en los previos y no da oportunidad de aprender unos nuevos, esto origina que al realizar procedimientos algebraicos el alumno no logré adaptarse a una situación nueva y repita los patrones de los temas aprendidos con anterioridad. En esta situación casi siempre suele observarse como tienen idea del tema, pero no logran llevarlo a cabo debido a su confusión.

Descripción gráfica (examen):

Figura 7

Interpretación en examen de errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento



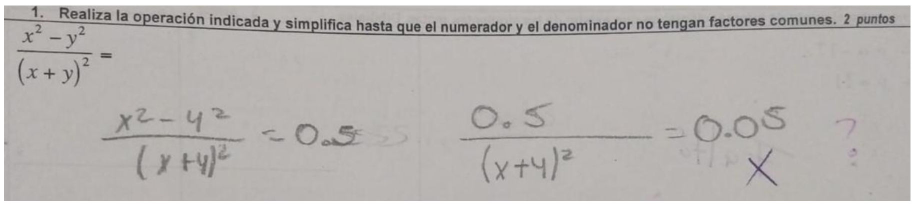
4. *Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes*

Interpretación: Aquí se ha podido observar como el alumno sigue técnicas de Internet para facilitar procesos o confunde temas mezclándolos por que en algún punto le fueron de utilidad, por ejemplo, cuando en una multiplicación algebraica entre monomios o polinomios los alumnos no son capaces de respetar las leyes de los signos, es por ello que existe confusión o errores al intentar resolver el ejercicio.

Descripción gráfica (examen):

Figura 8

Interpretación en examen de errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes



A partir de las descripciones, la experiencia y las respuestas dadas por lo alumnos, podemos resumir que para los tres reactivos la respuesta categoría del error que se presenta en mayor porcentaje es “***Errores debidos a asociaciones incorrectas”***.

Dentro del análisis se pudo observar que aproximadamente el 11% de los alumnos no contestaron alguno de los tres reactivos, sin embargo, no podemos determinar debido a cuál de los cuatro errores a estudiar se le puede atribuir este suceso ya que en un examen existen diferentes factores que podrían causarlo.

Por ello se determinó que no se debe dejar de lado ninguno de los errores que aquí se presentan ya que todos son pilares fundamentales en mayor o menor medida de los resultados y del éxito que nuestros alumnos puedan llegar a tener.

b) Análisis de errores cometidos de manera algebraica

Para realizar el análisis de los errores cometidos por los alumnos durante el examen se tomaron en cuenta diversos factores que fueron:

- Propuesta de errores descrita por Radatz.
- Experiencia frente al aula, lo cual permitía determinar si ese error era más o menos frecuente de acuerdo al reactivo.

- Los temas aritméticos – algebraicos involucrados en cada uno de los reactivos.
- Las posibles formas de resolverlos de acuerdo a su complejidad.
- Descripción paso a paso del ejercicio para poder comprobar en qué momento el alumno cometía un error que lo llevara a no encontrar la solución del mismo.

Todos estos factores involucrados, nos permitieron observar las diferentes áreas de oportunidad para la realización de nuestra propuesta didáctica.

Para hacerlo más entendible, en cada uno de los reactivos se dará una breve explicación de los principales temas involucrados, cuáles eran los principales errores que podían enlazarse según la propuesta de Radatz y una breve conclusión basado en la experiencia.

Reactivo uno:

- El alumno debería contar con el conocimiento de temas como productos notables, sumas de fracciones, simplificación de términos semejantes.
- Se observó que en orden de errores presentados de acuerdo a Radatz fue 2, 3, 4 y 1 (los cuales ya fueron descritos en la sección anterior) con un porcentaje de 45%, 25%, 22% y 8% respectivamente.
- Esto nos lleva a pensar de acuerdo a la experiencia y los datos anteriores que el alumno tiene una gran cantidad de errores debido a los aprendizajes deficientes y conceptos previos que no está dominando por lo cual no llega a la resolución de un problema planteado y que es muy común observar dentro del aula.

Reactivo dos:

- El alumno debería contar con el conocimiento de temas como sustitución, multiplicación aritmética – algebraica, leyes de signos, fracciones mixtas, simplificación de fracciones.
- Se observó que en orden de errores presentados de acuerdo a Radatz fue 2, 3, 4 y 1 (los cuales ya fueron descritos en la sección anterior) con un porcentaje de 55%, 23%, 14% y 8% respectivamente.

- Para este reactivo observamos patrones similares al anterior, en donde el alumno tiene deficiencias por sus aprendizajes previos y conceptos mal aprendidos, aquí el porcentaje es mayor ya que debían hacer uso de temas tanto aritmético como algebraicos lo cual considero que les causo un mayor conflicto por que no sabían por dónde empezar, lo que provocaba confusión en los procedimientos y por lo tanto no les era posible llegar a una solución correcta.

Reactivo tres:

- El alumno debía contar con el conocimiento de temas como inversos multiplicativos y aditivos, operaciones algebraicas con fracciones principalmente.
- Se observó que en orden de errores presentados de acuerdo a Radatz fue 2, 3, 4 y 1 (los cuales ya fueron descritos en la sección anterior) con un porcentaje de 59%, 16%, 13% y 12% respectivamente.
- Se sigue repitiendo que el error predominante en mayor medida que en los otros dos reactivos es debido a aprendizajes y conceptos previos deficientes, esto nos lleva a pensar que el alumno sigue relacionando temas de manera equivocada ya que pudimos observar que dejaban incompleto el reactivo pues no sabían cómo terminarlo probablemente debido a esta falta de bases previas.

A continuación, se observan algunas de las respuestas planteadas por los alumnos para los reactivos, se realiza una breve descripción matemática del error para su mayor entendimiento y se anexa una imagen del procedimiento mismo.

A su vez se describe brevemente con base a la experiencia en la docencia y lo propuesto por Radatz sobre los errores el por qué se categorizó de esa manera, ya que pudimos observar que el alumno comete más de un error por reactivo, pues se puede ver que están interrelacionados.

<u>Reactivo 1</u>

Podemos observar que en este reactivo el alumno cancela términos semejantes entre numerador y denominador, sin darse cuenta que estos términos están en una suma, es decir, no son factores que puedan cancelarse, no realiza bien el producto notable del binomio al cuadrado $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{2}$ y además de que se le olvida poner el signo igual.

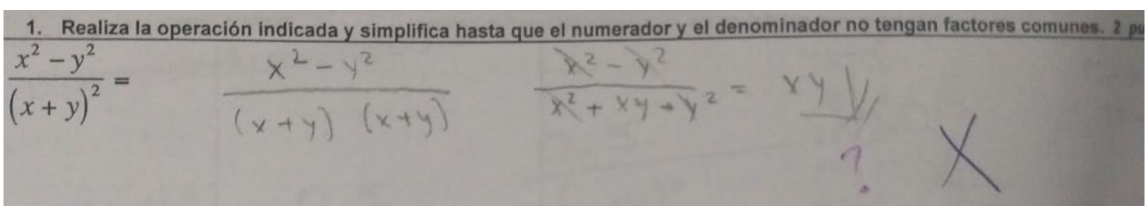
Se observa un *error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos* pues no es capaz de darse cuenta del producto notable en cuestión ni que esa no era la forma de simplificar esa fracción.

También se muestra un *error debido a asociaciones incorrectas* ya que el alumno continúa empleando operaciones como la simplificación de fracciones y no está asociando que lo que debe realizar pertenece a un nuevo tema.

Esto a su vez está asociado con *errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes*, pues aunque en otro momento se pudieron cancelar términos semejantes en una fracción, no toma en cuenta que es una suma y esto no lo hace posible.

Figura 9

Muestra representativa de errores algebraicos (reactivo 1)



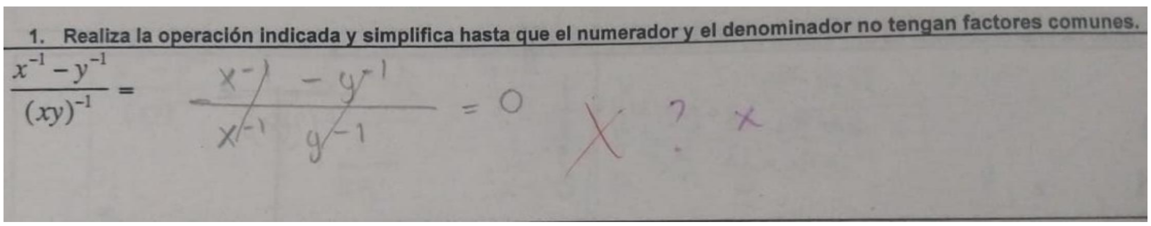
Para este reactivo sucede lo mismo que con el alumno anterior, nuevamente cancela términos semejantes entre el numerador y denominador, sin observar que los términos del numerador están en una suma, por lo cual no llega al resultado correcto.

Con esto podemos decir que se observan *errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*, ya que el alumno se confunde constantemente en los procesos y, por tanto, llega a un resultado erróneo.

Para el caso de este reactivo podemos decir que tiene un *error debido a aplicación de reglas o estrategias irrelevante*s pues, aunque cancela términos que le resultan similares no toma en cuenta ley del exponente negativo y procede a cancelar cuando tiene una fracción en forma de suma la cual le impide realizar esa operación.

Figura 10

Muestra representativa de errores algebraicos (reactivo 1)



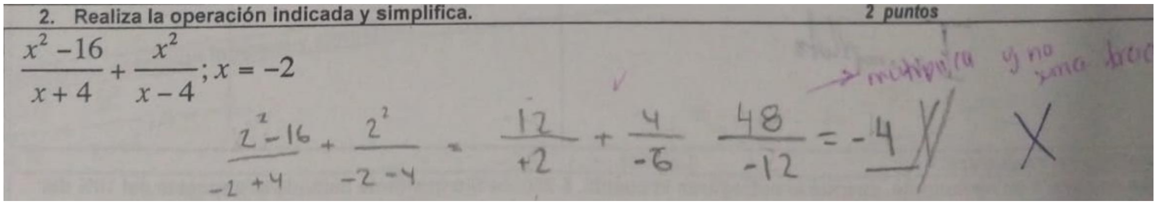
<u>Reactivo 2</u>

Para este caso observamos que el alumno sustituye adecuadamente, realiza las potencias y las sumas correspondientes de manera correcta siguiendo la jerarquía de operaciones, sin embargo, el primer error que comete es que no realiza correctamente una resta, posteriormente no realiza bien la suma de fracciones (el algoritmo de la suma es incorrecto) y después se le olvida poner un signo y de ahí todo el resultado es incorrecto.

En este reactivo el alumno demuestra *errores debidos a dificultades del lenguaje*, pues confunde por errores de notación una resta, también olvida algunos signos, lo cual lo lleva a tener un segundo *error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos* pues olvida la manera de realizar una suma dentro de una fracción lo cual lo lleva a una solución incorrecta del reactivo.

Figura 11

Muestra representativa de errores algebraicos (reactivo 2)



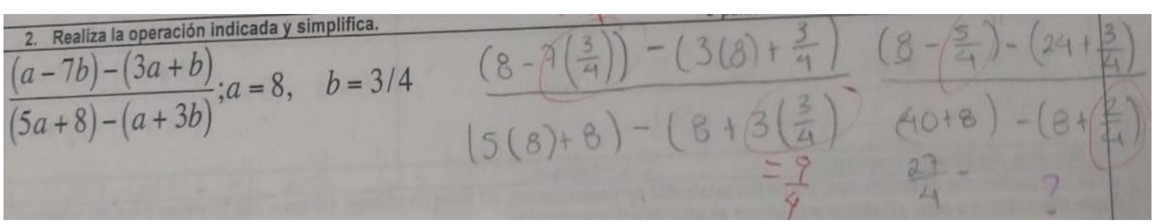
Para este reactivo el alumno sustituye de la manera correcta, pero el concepto de fracción mixta no lo reconoce, posteriormente no realiza las operaciones algebraicas de suma y resta combinadas en fracciones y enteros, por lo tanto, no sabe trabajar las fracciones mixtas y no es capaz de convertir enteros en fracciones.

Aquí claramente observamos *errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos* pues ha olvidado las fracciones mixtas lo cual lo lleva a confundir la manera en que se realiza una multiplicación de fracciones.

También tiene *errores debidos a dificultades del lenguaje* pues comete errores de notación al realizar una multiplicación de enteros con fracciones lo cual va en conjunto con los *errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes* pues omite procesos y procedimientos que no son válidos, lo cual le genera confusión y por tanto el ejercicio queda incompleto.

Figura 12

Muestra representativa de errores algebraicos (reactivo 2)

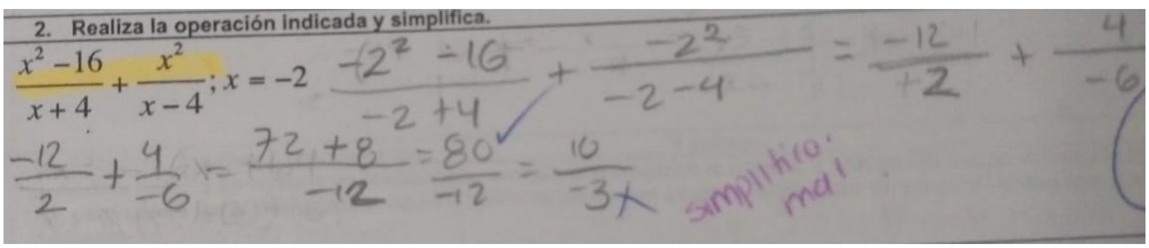


En el caso de este reactivo, podemos observar que el alumno realiza correctamente el algoritmo de la suma, sin embargo, la simplificación de la última expresión es incorrecto. El error cometido por el alumno es de tipo conceptual, más no de notación.

Aquí podemos observar que el error cometido según la bibliografía es por *errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos* pues podemos ver que, aunque realiza correctamente los procesos de la suma, no es capaz de simplificar la última fracción probablemente porque no recuerda cómo hacerlo o porque el concepto de la simplificación no es algo que el maneje como concepto.

Figura 13

Muestra representativa de errores algebraicos (reactivo 2)



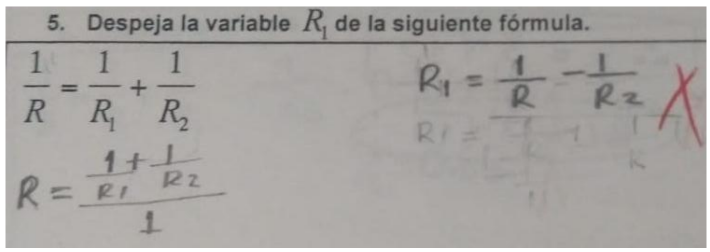
<u>Reactivo 3</u>

Para este reactivo podemos observar que en la fracción algebraica el alumno no identifica los inversos multiplicativos, ni los inversos aditivos, por lo cual no sabe tampoco realizar la operación con expresiones algebraicas con fracciones, es por ello que en operaciones combinadas tampoco es capaz de resolverlo. Por lo tanto, podemos decir que existe un aprendizaje deficiente en hechos y destrezas a la hora de aplicar los diferentes temas necesarios para la resolución del tema.

Para este reactivo el alumno tiene muchos problemas a la hora de resolver el ejercicio lo cual se puede traducir en que tiene una serie de *errores debidos a asociaciones incorrecta* (no identifica los diversos inversos necesarios en la aplicación de una fracción), *errores* *debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos* (probablemente porque ha olvidado o nunca estuvo seguro de cómo resolver el reactivo, esto implica que no sea capaz de aplicar diferentes temas para la resolución de un reactivo dado.

Figura 14

Muestra representativa de errores algebraicos (reactivo 3)

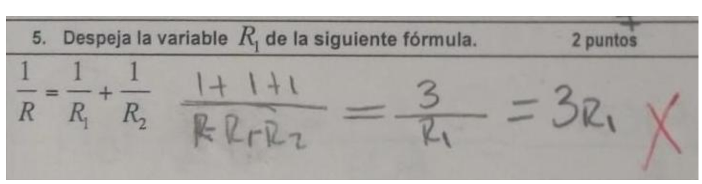


En este reactivo el alumno olvida la ecuación planteada, la convierte en una sola expresión y realiza una operación de suma de fracciones algebraicas incorrecta, posteriormente olvida los otros factores en el denominador y por último considera el inverso de un número como el mismo, por lo cual la solución es incorrecta.

En el caso de este reactivo el alumno tiene *errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes* pues realiza operaciones que no son correctas para la suma de fracciones, lo cual provoca *errores debido a asociaciones incorrectas* en una suma, lo cual puede estar enlazado o derivado a *errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*, pues claramente no recuerda los inversos en una fracción, la manera de sumar y de simplificar la misma, provocando una solución incorrecta.

Figura 15

Muestra representativa de errores algebraicos (reactivo 3)



X. PROPUESTA DIDÁCTICA

a) Sección a-didáctica

En esta sección se pueden encontrar una serie de ejercicios basados en los principales temas aritmético – algebraico en donde el alumno mostró tener una deficiencia tras el análisis realizado, esta primera etapa se apoya en lo descrito por Brousseau sobre la TSD y es realizada en combinación con los errores propuestos por Radatz.

Para llevar a cabo esta etapa es necesario dejar en claro que será necesario que exista un "contrato didáctico" el cual se basa en una obligación recíproca entre el alumno y el profesor con la finalidad de que los saberes de los alumnos adquieran nuevos significados o recuperen su significados inicial a partir de observar el fracaso matemático que podría generar dicha fase a-didáctica para así producir aprendizaje, lo cual nos demuestra que el aprendizaje no se trata solo de producir conocimiento sino se trata de actitudes, lenguajes y comportamientos entre dicha interacción dentro de un contenido matemático.

Por ello en esta primera etapa el profesor cuenta con recursos que puede proporcionará al alumno para que realice de manera individual o grupal según lo necesite, propiciando que estos se apoyen de sus habilidades y conocimientos previos para la resolución de los mismos, recordando que el profesor no debe intervenir ya que esta fase es fundamental para que el alumno logre la institucionalización en una etapa posterior.

Actividad a-didáctica

Esta actividad se sugiere realizar como un examen ya sea de manera sincrona como asíncrona de manera individual, esto con la finalidad de que el alumno pueda intentar resolver dichos ejercicios utilizando los conocimientos previos que tiene con el entendido de que es parte de una evaluación de autoaprendizaje (las respuestas se encuentran en el ANEXO 2)

1. Realiza la operación indicada y simplifica

i. $\frac{x+y}{y}+\frac{y}{x-y}$

ii. $\frac{r-s}{3r+6s}-\frac{r-2s}{4r+8s}$

iii. $3t+1+\frac{2}{3t-1}$

iv. Mario camina todos los días $2\ \frac{1}{2}$ km. Un día de lluvia le obligó a detener su caminata después de $\frac{3}{4}$ km. ¿Por cuantos km acortó su caminata?

1. Simplifica el siguiente reactivo y sustituye para encontrar su valor numérico

i. Para $a=2, b=-3, c=1$

$$\frac{(a^{-2}b^{-1}c^{3})^{3}}{(ab^{2}c)^{-2}}$$

ii. Para $a=2, m=3, x=-2, y=-1$

$$\frac{3a}{x}+\frac{2y}{m}+2(x^{3}+4)$$

iii. Para $a=2, x=-4, n=\frac{1}{2}, m=3$

$$(a+x)^{-2}+x(m-n)$$

iv. En un restaurante se ganaron \$275 dólares de propinas, los cuales deben repartirse entre el encargado, el mesero y el mozo. Se sabe que el mesero gana \$25 dólares más que el triple de lo que recibe el mozo y el encargado recibirá \$50 más que el mozo. Entonces ¿Cuánto recibe el mesero?

1. Despeja la variable que se te pide de cada reactivo

i. Despeja h $\boldsymbol{A = \frac{bh}{2}}$

ii. Despeja c $\boldsymbol{A = (b + cd)^2}$

iii. Despeja t $\boldsymbol{M = \frac{1}{t-1}}$

iv. Halla las medidas de los tres ángulos de un triángulo.

Condiciones:

- El segundo es tres veces más grande que el primero
- El tercero mide dos veces más que el segundo

2. Resuelve los siguientes ejercicios complejos

i. $$\boldsymbol{\frac{1-\frac{6}{y}}{3-\frac{2}{y}}}$$

ii. $$\boldsymbol{\frac{\frac{6}{x}+2}{\frac{3}{x}+4}}$$

b) Sección didáctica

Brousseau plantea en su TSD que durante esta sección el profesor debe apoyar al alumno para la corrección de los errores cometidos en la sección a-didáctica, estos errores se pueden clasificar de acuerdo a Radatz y con esto buscar la manera de soslayarlos, con esta propuesta pudimos observar que existen diversos temas en el área de matemáticas los cuales son áreas de oportunidad para el aprendizaje a largo plazo de nuestros alumnos.

Es por ello que durante esta propuesta se consideró realizar un desglose de diversos temas aritmético – algebraico los cuales se consideraron los más importantes de acuerdo a nuestros resultados con el fin de apoyar al profesor – alumno en la búsqueda de un aprendizaje significativo.

A) Suma y multiplicación

Las operaciones principales en los números reales son la suma y la multiplicación, las cuales cuentan con ciertas propiedades para cumplirse, estás serán explicadas a continuación para su mayor entendimiento.

<u>Suma</u>

A cada par de números reales $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se le asigna el número real $\boldsymbol{a+b}$. Esta operación cumple con cuatro propiedades:

- **Ley asociativa para la suma**. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son números reales cualesquiera, entonces $\boldsymbol{a+(b+c) = (a+b)+c}$.

Ejemplo 1 $\boldsymbol{3+(5+2)=(3+5)+2}$

Ejemplo 2 $\boldsymbol{a+(4b+3c)=(a+4b)+3c}$ **, con** $\boldsymbol{a, b, c,}$ **números reales.**

- **Existencia del neutro aditivo para la suma**. Existe un número real, llamado cero, que tiene la propiedad que para todo número real $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Ejemplo 1 $\mathbf{3+0=0+3=3}$

Ejemplo 2 $\mathbf{10\boldsymbol{a}+50\boldsymbol{b}+0=10\boldsymbol{a}+50\boldsymbol{b}}$**, con** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ **números reales.**

- **Existencia de inversos para la suma**. Para todo número real $\boldsymbol{a}$ existe un número real, llamado $-\boldsymbol{a}$, tal que $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}= \mathbf{0}$.

Ejemplo 1 $-\mathbf{5}$ es el inverso aditivo de $\mathbf{5}$ por que $\mathbf{5}+(-\mathbf{5}) = \mathbf{0}$

Ejemplo 2 El inverso aditivo de $\mathbf{4}\boldsymbol{ab}$ es $-\mathbf{4}\boldsymbol{ab}$ por que $\mathbf{4}\boldsymbol{ab}+(-\mathbf{4}\boldsymbol{ab})= \mathbf{0}$, con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ números reales.

- **Ley conmutativa para la suma**. Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos números reales cualesquiera, entonces $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 1 $\mathbf{5+10=10+5=15}$

Ejemplo 2 $\mathbf{23\boldsymbol{ab}+5\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{c}+23\boldsymbol{ab}}$ $\boldsymbol{con\ a, b, c}$ **n**$\boldsymbol{úmero\ reales}$

Multiplicación

Para cada par de números reales $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{b}$, se le asigna un número real, denominado $\boldsymbol{ab}$. La multiplicación cumple con 4 propiedades muy parecidas a las de la suma.

- **Ley asociativa para la multiplicación**. Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son números reales cualesquiera, entonces $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})=(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$.

Ejemplo 1 $\mathbf{3(5(6)) = (3(5))6}$

Ejemplo 2 $\boldsymbol{a(4b(3c)) = (a(4b))(3c)\ con\ a, b, c\ número\ reales}$.

- **Existencia del neutro multiplicativo**. Existe un número real, llamado uno, tal que tiene la propiedad que para todo número real $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{(a)(1) = (1)(a) = a}$.

Ejemplo 1 $\mathbf{(3)(1) = (1)(3) = 3}$

Ejemplo 2 $\boldsymbol{1(50b) = (50b)(1) \ = \ 50b\ con\ b\ un\ número\ real.}$

- **Existencia de inversos multiplicativos**. Para todo número real $\boldsymbol{a, a \neq 0}$ existe un número real $\boldsymbol{a^{-1}}$ tal que $\boldsymbol{(a)(a^{-1}) = (a^{-1})(a) = 1}$.

Ejemplo 1 $\mathbf{5^{-1} = \frac{1}{5}}$ es el inverso multiplicativo de 5 porque $\mathbf{(5)(5^{-1}) = 1}$.

Ejemplo 2 El inverso multiplicativo de $\boldsymbol{4ab}$ es $\boldsymbol{(4ab)^{-1}}$ por que $\boldsymbol{(4ab)(4ab)^{-1} = 1}$, con $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ números reales distintos a cero.

- **Ley conmutativa para la multiplicación**. Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos números reales cualesquiera, entonces $\boldsymbol{ab \ = ba}$.

Ejemplo 1 $\mathbf{(5)(10) = (10)(5) = 50}$

Ejemplo 2 $\boldsymbol{(23ab)(5c) = (5)(23ab)\ con\ a, b, c}$ **números reales**

- **Ley distributiva**. Si $\boldsymbol{a, b}$ y $\boldsymbol{c}$ son números reales cualesquiera, entonces $\boldsymbol{(a)(a + b) = (a)(b) + (a)(c)}$.

Ejemplo 1 $\mathbf{(5)(1 + 7) = (5)(1) + (5)(7)}$

Ejemplo 2 $(\mathbf{23ab})(\mathbf{5c}+\mathbf{4ac}) = (\mathbf{23ab})(\mathbf{4ac})$ $\boldsymbol{con\ a, b, c\ n}$ú$\boldsymbol{meros\ reales}$.

Con esta explicación previa nos es posible resolver los siguientes ejercicios:

i. $(-\mathbf{3a})(\mathbf{5b})(\mathbf{4c})$

ii. $(\mathbf{7b})(\mathbf{2a})(-\mathbf{3c})(\mathbf{4d})$

iii. $\mathbf{2a}(\mathbf{b}) + \mathbf{3c}(\mathbf{4b}+\mathbf{2d})$

iv. $-\mathbf{a}(\mathbf{4b}+\mathbf{7c}) - \mathbf{3c}(-\mathbf{a}+\mathbf{2d})$

v. $\mathbf{3}(-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a})(\mathbf{b}) + \mathbf{10}(-\mathbf{2})$

vi. $\mathbf{4}(-\mathbf{b})(\mathbf{c}) + (-\mathbf{3a})(\mathbf{2}) + (-\mathbf{1})$

vii. $(\mathbf{ab})(-\mathbf{9}) + (-\mathbf{7b})(-\mathbf{2a})(-\mathbf{3})$

viii. $-(-\mathbf{9c})(\mathbf{a})(-\mathbf{3b}) - (-\mathbf{3})(-\mathbf{abc})$

ix. $(\mathbf{2a})(-\mathbf{bc})(-\mathbf{4}) + (-\mathbf{2})(-\mathbf{a})(\mathbf{9b})$

x. $-(\mathbf{2})(\mathbf{6ab})(-\mathbf{c}) + (-\mathbf{4})(-\mathbf{5a})$

<u>Ejercicios resueltos</u>

i $(-\mathbf{3a})(\mathbf{5b})(\mathbf{4c}) = (-\mathbf{15ab})(\mathbf{4c}) = -\mathbf{60abc}$

vii.
$$\begin{aligned}(\mathbf{ab})(-\mathbf{9}) + (-\mathbf{7b})(-\mathbf{2a})(-\mathbf{3}) &= -\mathbf{9ab} + (\mathbf{14ab})(-\mathbf{3})\\ &= -\mathbf{9ab} + (-\mathbf{42ab})\\ &= -\mathbf{9ab} - \mathbf{42ab}\end{aligned}$$

x.
$$\begin{aligned}-(\mathbf{2})(\mathbf{6ab})(-\mathbf{c}) + (-\mathbf{4})(-\mathbf{5a}) &= -(\mathbf{12abc})(-\mathbf{c}) + (+\mathbf{20a})\\ &= -(-\mathbf{12abc^2}) + \mathbf{20a} = \mathbf{12abc^2} + \mathbf{20}^{\text{a}}\end{aligned}$$

Números reales: positivos, negativos y el cero

El conjunto de los números reales está conformado por el de los números racionales $\mathbb{Q}$ (enteros positivos, negativos y el cero, así como las fracciones de la forma $\boldsymbol{a/b}$ siendo $\boldsymbol{a\ y\ b}$ números enteros) y el de los números irracionales $\mathbb{I}$ (de infinitas cifras decimales como por ejemplo $\sqrt{\mathbf{2}} = \mathbf{1.4142}$... o $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{3.1415}$... que no pueden expresarse como un cociente de enteros).

A su vez podemos saber que el conjunto de números reales, simbolizado por $\mathbb{R}$ esta conformado por los números reales negativos, los números reales positivos y el cero.

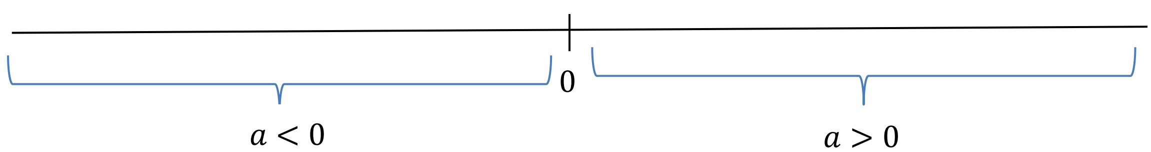
El cual puede ser representado de la siguiente manera:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{-} \cup \{\mathbf{0}\} \cup \mathbb{R}^{+}$$

Una forma de entender intuitivamente el conjunto de los números positivos y negativos es a través de su representación en una recta (Figura 16).

Figura 16

Recta numérica (elaboración propia)



Por lo tanto, podemos decir que:

- *El signo de un número real* $\boldsymbol{a}$ *es positivo si* $\boldsymbol{a}$ *es mayor que cero.*
- *El signo de un número real* $\boldsymbol{a}$ *es negativo si* $\boldsymbol{a}$ *es menos que cero.*

Leyes de los signos.

Utilizando las propiedades anteriormente descritas para la suma y la multiplicación podemos considerar algunas situaciones para los signos que intervienen en estas operaciones:

- *Cuando se multiplican dos números con igual signo, el resultado será positivo.*
- *Cuando se multiplican dos números con diferente signo, el resultado será negativo.*

Cuando se realiza el producto de más de dos números, se calcula el producto siguiendo un orden y respetando las operaciones de los números reales vistas con anterioridad.

Ejemplo 1 $(-2)(-3)(-5) = (6)(-5) \;=-3$

Ejemplo 2 $(-2)(-3)(-5)(-4) = (-6)(-5)(-4) = (-30)(-4) = 120$

Con esta explicación previa nos es posible resolver los siguientes ejercicios:

i. $-9 + (-7) + 11$

ii. $6 + (-2)(2) + (-10)$

iii. $2(-4)(10) + 5(-3)(15)$

iv. $-1(+2)(+3) - (-4)(-6)(+10)$

v. $(-12)(-10) - (-4)(5)(+2)$

vi. $(5)(4)(2) - (-1)(-5)(-3)(2)$

vii. $(-4)(-10)(2) + 4(7)(-9)$

viii. $-2 + (-3) + 7 - 9(-3) + 23$

ix. $(2)(-8)(-2) - 4(3)(-8)$

x. $(-1)(-1)(2) + 4 - (3)(-3)$

<u>Ejercicios resueltos</u>

iii $2(-4)(10) + 5(-3)(15) = (-8)(10) + (-15)(15)$

$$=-80 + (-225)$$

$$=-80 - 225$$

$$= -305$$

vi. $(5)(4)(2) - (-1)(-5)(-3)(2) = (20)(2) - (5)(-3)(2) = 40 - (-15)(2)$

$$= 40 - (-30) = 40 + 30 = 70$$

xi. $(-1)(-1)(2) + 4 - (3)(-3) = (1)(2) + 4 - (-9) = 2 + 4 + 9 = 15$

B) Jerarquía de operaciones

Cuando debemos realizar más de una operación en una misma expresión, hay que establecer cuál es el orden para realizarlas, basándose en las propiedades de los números y el uso correcto de la ley distributiva de las operaciones es fácil resolver dichas operaciones y establecer una jerarquía como se muestra en la figura 17.

Figura 17

Esquema que muestra el orden en la jerarquía de operaciones (elaboración propia)

Cada sumando divide a la expresión en términos, lo cual nos permite utilizar las propiedades de la suma vistas con anterioridad y así poder realizar las operaciones correspondientes siguiendo la ley distributiva correcta.

Con base a esta información previa, realiza los siguientes ejercicios:

i. $\mathbf{23 + 10 \div 2 + (5)3 + 4 - (5)2}$

ii. $\mathbf{74 \div 14 - 3\ [10 - 2(8 - 3)]}$

iii. $\mathbf{18 + (4)4 + 4 \div 2 - 2^2}$

iv. $\mathbf{\frac{1}{2} - \left(-\frac{7}{6}\right)}$

v. $\mathbf{7 - [2 \times 9 - (4 + 13) + 4 \div 2]}$

vi. $\mathbf{\frac{3}{8} \div \frac{5}{3} - \frac{3}{2}}$

vii. $[6 + (-14)] - 11 \times [10 + (-7)]$

viii. $\frac{7}{3}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{7}\right) - 1$

ix. $\frac{-8[5-(-2)]-48}{6+(-14)}$

x. $2^2 + 6 - 5(3) + 3 - (5 - 2^3 \div 2)$

<u>**Ejercicios resueltos**</u>

iii $$18 + (4)4 + 4 \div 2 - 2^2 = 18 + 16 + 2 - 4 = 32$$

iv. $$\frac{1}{2} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{6} = \frac{6+14}{12} = \frac{20}{12} = \frac{(2)(2)(5)}{(2)(2)(3)} = \frac{5}{3}$$

Hay que recordar que debemos simplificar nuestra expresión matemática

ix. $$\frac{-8[5-(-2)]-48}{6+(-14)} = \frac{-8(5+2)-48}{6-14} = \frac{-8(7)-48}{-8} = \frac{-56-48}{-8}$$

$$= \frac{-104}{-8} = \frac{(2^3)(13)}{2^3} = 13$$

xi. $$2^2 + 6 - 5(3) + 3 - (5 - 2^3 \div 2) = 4 + 6 - 15 + 3 - (5 - 8 \div 2)$$

$$= -2 - (5 - 4) = -2 - (1)$$

$$= -2 - 1 = -3$$

C) Leyes de exponentes

Existen diversas leyes de exponentes, las cuales nos ayudan a realizar una operación de la manera adecuada para llegar a la solución correcta, para esta propuesta se han elegido aquellas en donde se observó mayor área de oportunidad y son las siguientes:

Para x^n **, x es la base y n el exponente**. Un exponente que es un número natural nos dice cuántas veces aparece x como factor en el producto, x^n es la *n-ésima potencia de x*.

Calcular o evaluar una expresión con una base numérica significa multiplicar la expresión tantas veces como nos pida el exponente, por ejemplo:

Ejemplo 1 $\mathbf{2^3 = (2)\,(2)(2)\ = 8}$

Ejemplo 2 $\mathbf{(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2)\ = 16}$

Ejemplo 3 $\mathbf{-2^5 =-\left(2^5\right) =-[(2)(2)(\,2)(\,2)(2)] =-32}$

Ejemplo 4 $\boldsymbol{a^2b(ab^3c^3) = a^{2+1}b^{1+3}c^3 = a^3b^4c^3}$

Recuerda que el exponente se aplica sólo al número real que se encuentra inmediatamente a la izquierda.

Con esta explicación previa nos es posible resolver los siguientes ejercicios:

i.	$\mathbf{-(5^3)(-2)^2}$	ii.	$\mathbf{(-2^2)(-6^2)(3)}$
iii.	$\mathbf{(3^3)(2^3)(4)^2}$	iv.	$\mathbf{5^2(-3^2)-(4^2)}$
v.	$\mathbf{(1^3)(-2^2)(4)^1}$	vi.	$\mathbf{-(5^3)(3)^2(2)^2}$
vii.	$\mathbf{(1)^2(2^4)(-3)^2}$	viii.	$\mathbf{-(3^3)(-2^3)(4)^2}$
ix.	$\mathbf{(6^2)(7^1)(-4^3)}$	x.	$\mathbf{(3^3)(2^3)(-4)^2}$
xi.	$\mathbf{(6^2a)(3a^2b)}$	xii.	$\mathbf{(2a^3)(3b^2)}$
xiii.	$\boldsymbol{(2^3abc)(bc^3)}$	xiv.	$\boldsymbol{(7^2b^2c)(a^2c^2)}$

<u>Ejercicios resueltos</u>

ix. $\mathbf{(-2^2)(-6^2)(3) = (-4)(-36)(3) = (-12)(-36) = 432}$

ix. $(\mathbf{6^2})(\mathbf{7^1})(-\mathbf{4^3}) = (\mathbf{36})(\mathbf{7})(-\mathbf{64}) = \mathbf{252}(-\mathbf{64}) =-\mathbf{16128}$

xi. $(\mathbf{6^2a})(\mathbf{3a^2b}) = (\mathbf{36a})(\mathbf{3a^2}\boldsymbol{b}) = \mathbf{108}\boldsymbol{a}^{\mathbf{1+2}}\boldsymbol{b} = \mathbf{108}\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{b}$

xiv. $(\mathbf{7^2}\boldsymbol{b^2c})(\boldsymbol{a^2c^2}) = (\mathbf{49}\boldsymbol{b^2c})(\boldsymbol{a^2c^2}) = \mathbf{49}\boldsymbol{a^2b^2c^{1+2}} = \mathbf{49}\boldsymbol{a^2b^2c^3}$

- **Potencia del producto**

Sabemos que cuando se multiplican dos potencias de la misma base $\boldsymbol{a}$ elevada a una potencia $\boldsymbol{m}$ y se multiplica por la misma base $\boldsymbol{a}$ pero elevada a la $\boldsymbol{n}$ el resultado que obtendremos es la misma base pero a una potencia igual a la suma de las potencias de los factores, es decir:

$$(\boldsymbol{x^m})\boldsymbol{x^n} = \boldsymbol{x^{m+n}}$$

La suma de estas potencias solo se dará entre aquellas bases que sean iguales, algunos ejemplos de esta ley de exponentes son:

Ejemplo 1 $\mathbf{2^3(2^2) = 2^{3+2} = 2^5}$

Ejemplo 2 $(\boldsymbol{x^5})(\boldsymbol{x^2})(\boldsymbol{x^6}) = \boldsymbol{x^{5+2+6}} = \boldsymbol{x^{13}}$

Ejemplo 3 $\boldsymbol{a^2b^3c^5(b^4c^3) = a^2b^{3+4}c^{5+3} = a^2b^7c^8}$

Con esta explicación previa nos es posible resolver los siguientes ejercicios:

i. $\mathbf{3^5(3^{10})}$ ii. $\mathbf{6^3(6^8)(6)}$

iii. $\boldsymbol{xy(x^2y^3)}$ iv. $(\mathbf{2^3}\boldsymbol{a^2bc^4})(\mathbf{2}\boldsymbol{b^3c^2})$

v. $\boldsymbol{a^6(abc)(c^4)}$ vi. $(\boldsymbol{x^2y^3z^2})(\boldsymbol{ab^3xy})(\boldsymbol{a^5bz}$

vii. $\boldsymbol{a^2b^4d(ab)(a^3)}$ viii. $\boldsymbol{x^2y^3(abc^2)(xy)(a^2)^2}$

ix. $\boldsymbol{-(3^2b^4)(2^3a^3b^2c^4)(3a}$ x. $\boldsymbol{(2^3x^2y^3)(3^2yz^3)(-}$
$\boldsymbol{4^2xy^3z^2)}$

<u>Ejercicios resueltos</u>

ii. $\boldsymbol{6^3(6^8)(6) = 6^{3+8+1} = 6^{12}}$

v. $\boldsymbol{a^6(abc)(c^4) = (a^{6+1}bc)(c^4) = a^7bc^{1+4} = a^7bc^5}$

viii. $\boldsymbol{x^2y^3(abc^2)(xy)(a^2)^2} = (x^{2+1}y^{3+1})(abc^2)(a^4) = (x^3y^4)(a^{1+4}bc^2)$

$$= \boldsymbol{(x^3y^4)\left(a^5bc^2\right) = a^5bc^2x^3y^4}$$

ix. $$\boldsymbol{-(3^2b^4)(3^3a^3b^2c^4)(3a)^2 =-(3^{2+3}a^3b^{4+2}c^4)(3^2a^2)}$$
$$\boldsymbol{=-\left(3^5a^3b^6c^4\right)(3^2a^2) = -(3^{5+2}a^{3+2}b^6c^4)}$$
$$\boldsymbol{= -\left(3^7a^5b^6c^4\right) = -3^7a^5b^6c^4}$$
$$\boldsymbol{= -2187a^5b^6c^4}$$

El resultado de puede quedar en números primos o se puede resolver el exponente.

- **Potencia elevada a otra potencia**

Ahora consideremos cuando un número real $\boldsymbol{x}$ esta elevado a una potencia $\boldsymbol{m}$ y este a su vez a una potencia $\boldsymbol{n}$, siendo $\boldsymbol{m, n}$ números naturales, ambos exponentes se multiplican y obtendremos un solo producto, es decir:

$$\boldsymbol{(x^m)^n = x^{mn}}$$

Ejemplo $\boldsymbol{(x^4)^2 = (x^4)(x^4) = x^{4+4} = x^{(4)2} = x^8}$

En el caso de que dos números cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ estén elevados a una potencia $\boldsymbol{n}$, el resultado será, el producto de cada uno de los elementos elevados a la $\boldsymbol{m}$

$$(\boldsymbol{xy})^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{m}}$$

Ejemplo $(\boldsymbol{ab})^{3} = \boldsymbol{a}^{3}\boldsymbol{b}^{3}$

En el caso de que dos números cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ ya estén elevados a una potencia n es igual al número del primer elemento se aplicarán ambas leyes, por ejemplo:

Ejemplo 1 $(\boldsymbol{b}^{4}\boldsymbol{c}^{3})^{2} = \boldsymbol{b}^{(4)2}\boldsymbol{c}^{(3)2} = \boldsymbol{b}^{8}\boldsymbol{c}^{6}$

Ejemplo 2 $(\boldsymbol{2a}^{2}\boldsymbol{b}^{3}\boldsymbol{c}^{5})^{3} = \boldsymbol{2}^{3}\boldsymbol{a}^{(2)3}\boldsymbol{b}^{(3)3}\boldsymbol{c}^{(5)3} = \boldsymbol{8a}^{6}\boldsymbol{b}^{9}\boldsymbol{c}^{15}$

Cuando el número es una fracción y se eleva a una potencia entonces el resultado es la división de cada uno de los números elevados a la potencia $\boldsymbol{m}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}}{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{m}}}$$

Ejemplo 1 $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{3} = \frac{\boldsymbol{a}^{3}}{\boldsymbol{b}^{3}}$

Ejemplo 2 $\left(\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{y}}\right)^{2} = \frac{\boldsymbol{2}^{2}\boldsymbol{x}^{2}}{\boldsymbol{y}^{2}} = \frac{\boldsymbol{4x}^{2}}{\boldsymbol{y}^{2}}$

En este ejemplo ocuparemos las leyes vistas anteriormente*

Ejemplo 3 $\left(\frac{\boldsymbol{3x}^{2}}{\boldsymbol{y}^{4}}\right)^{2} = \frac{\boldsymbol{3}^{2}\boldsymbol{x}^{(2)2}}{\boldsymbol{y}^{(4)2}} = \frac{\boldsymbol{9x}^{4}}{\boldsymbol{y}^{8}}$

Con esta explicación previa nos es posible resolver los siguientes ejercicios:

i. $(\boldsymbol{3xy})^{5}$ ii. $(-\boldsymbol{3m}^{3}\boldsymbol{n})^{3}$

iii. $-(-\boldsymbol{6a}^{2}\boldsymbol{b}^{2})^{2}$ iv. $(\boldsymbol{8x}^{5}\boldsymbol{y}^{6}\boldsymbol{z}^{8})^{2}$

v. $\left(-\frac{1}{3}mn^2\right)^3$ vi. $-\left(\frac{2ab^2}{3m^3}\right)^4$

vii. $(-3m^3n)^3$ viii. $\left(\frac{2m^3n}{3x^4}\right)^5$

ix. $(a^mb^n)^x$ x. $\frac{(-2m^3n)^3}{(2m^4n^3)^2}$

Ejercicios resueltos

iii $-(-6a^2b^2)^2 =-\left((-6)^2a^{2(2)}b^{2(2)}\right) =-(6^2a^4b^4) =-36a^4b^4$

vi. $-\left(\frac{2ab^2}{3m^3}\right)^4 =-\left(\frac{2^{1(4)}a^{1(4)}b^{2(4)}}{3^{1(4)}m^{3(4)}}\right) =-\left(\frac{2^4a^4b^8}{3^4m^{12}}\right) =-\frac{2^4a^4b^8}{3^4m^{12}}$

ix. $(a^mb^n)^x = a^{m(x)}b^{n(x)} = a^{mx}b^{nx}$

x. $\frac{(-2m^3n)^3}{(2m^4n^3)^2} = \frac{(-2)^{1(3)}m^{3(3)}n^{1(3)}}{2^{1(2)}m^{4(2)}n^{3(2)}} = \frac{-2^3m^9n^3}{2^2m^8n^6} = \frac{-2m}{n^3} =-\frac{2m}{n^3}$

- **Exponente negativo**

Debemos considerar que $x^{-n},\ x \neq 0$ representa un número y que se aplica a exponentes de este tipo. Si multiplicamos x^n por x^n/x^n, se obtiene lo siguiente:

$$x^{-n} = x^{-n}\left(\frac{x^n}{x^n}\right) = \frac{x^{-n+n}}{x^n} = \frac{x^0}{x^n} = \frac{1}{x^n}$$

Por lo tanto se concluye que $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, si $x \neq 0$ a su vez si un exponente es negativo en el denominador podemos decir que:

$$\frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{x^{-n}}\left(\frac{x^n}{x^n}\right) = \frac{x^n}{x^{-n+n}} = \frac{x^n}{x^0} = \frac{x^n}{1} = x^n$$

Ejemplo 1 $(xyz)^{-2} = (xyz)^{-2}\frac{(xyz)^2}{(xyz)^2}$

$$= \frac{(xyz)^{-2+2}}{(xyz)^2} = \frac{(xyz)^0}{x^2y^2z^2}$$

$$= \frac{1}{x^2y^2z^2}$$

Ejemplo 2 $\left(\frac{2x}{y}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}x^{-2}}{y^{-2}} = \frac{y^2}{4x^2}$

Los pasos intermedios pueden omitirse como en el ejemplo 2, sin embargo, son útiles mientras estamos aprendiendo, también es importante seguir la jerarquía de operaciones, el orden y las leyes de exponentes que vimos con anterioridad.

Ejemplo 3 $\frac{a^7}{a^9} = a^{7-9} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

Con esta explicación previa nos es posible resolver los siguientes ejercicios:

i. $(ab)^{-3}$

ii. $\frac{4x^{-2}}{2y^{-3}}$

iii. $\frac{a^4m^3x^2}{a^3m}$

iv. $\frac{x^6}{x^3}$

v. $\frac{(a^2b)^3}{(ab)^{-3}}$

vi. $(x^2y^5)^{-3}$

vii. $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2}\left(\frac{2^2}{3^3}\right)$

viii. $\frac{26x^3y^2}{2x^4y^2}$

ix. $\left(\frac{\frac{2^3}{a^2}}{\frac{c^3}{3^2}}\right)^{-2}$

x. $\frac{5[(3^2)(10)]^2}{(3^2)(6^2)}$

Ejercicios resueltos

iii. $\frac{a^4m^3x^2}{a^3m} = a^{4-3}\,m^{3-1}x^2 = a^1m^2x^2 = am^2x^2$

vi. $(x^2y^5)^{-3} = x^{2(-3)}y^{5(-3)} = x^{-6}y^{-15} = \frac{1}{x^6y}$

vii. $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2}\left(\frac{2^2}{3^3}\right) = \left(\frac{2^{-2}}{3^{2(-2)}}\right)\left(\frac{2^2}{3^3}\right) = \left(\frac{2^{-2}}{3^{-4}}\right)\left(\frac{2^2}{3^3}\right) = \frac{2^{-2+2}}{3^{-4+3}} \quad = \frac{2^0}{3^{-1}} =$

$3^1 = 3$

ix. $\left(\frac{\frac{2^3}{a^2}}{\frac{c^3}{3^2}}\right)^{-2} = \left(\frac{2^3 3^2}{a^2c^3}\right)^{-2} = \frac{2^{3(-2)}3^{2(-2)}}{a^{2(-2)}c^{3(-2)}} = \frac{2^{-6}3^{-4}}{a^{-4}c^{-6}} = \frac{a^4c^6}{2^6 3^4}$

- **División de potencias de igual base**

Cuando se dividen dos potencias de la misma base, su cociente es la misma base elevada a una potencia igual a la diferencia entre la potencia del dividendo y la del divisor siempre y cuando nuestra base $x \neq 0, m\ y\ n\ sean\ enteros$ se obtiene:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Ejemplo 1 $\frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x^1 = x$

Ejemplo 2 $\frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

Ejemplo 3 $\frac{a^4b^2c}{a^2b} = a^{4-2}b^{2-1}c = a^2bc$

Ejemplo 4 $\frac{a^4b^2c}{a^2b^5c^3} = a^{4-2}b^{2-5}c^{1-3} = a^2b^{-3}c^{-2} = \frac{a^2}{b^3c^2}$

Para el ejemplo 2 y 4 también se utilizó la ley del exponente negativo.

Con esta información previa, es posible resolver los siguientes ejercicios, recuerda primero simplificar antes de resolver operaciones más complejas:

i. $\frac{12b^5}{4b^2}$ ii. $\frac{16ab^2c}{8b^2a^5}$

iii. $\frac{20a}{a^2}$ iv. $\frac{-6a^2b^2}{a^2b^2c}$

v. $\frac{13ab}{a^2} + \frac{25ab}{5ab^2}$ vi. $\frac{3^3a^2c^3}{3b} + \frac{7^2c^3}{7bc^2}$

vii. $\frac{75abc}{5c^2b^3} - \frac{24b^4c}{8c}$ viii. $\frac{125}{5abc} + \frac{28c^2b}{14b}$

ix. $\frac{20a}{5a^2b} + \frac{12ab^2}{6ab} - \frac{24c}{2b^2}$ x. $\frac{12abc^2}{3bc^3} + \frac{2c}{7b} - \frac{36}{12c^2}$

<u>**Ejercicios resueltos**</u>

iv. $\frac{-6a^2b^2}{a^2b^2c} = -\frac{6a^{2-2}b^{2-2}}{c} = -\frac{6}{c}$

vi. $\frac{3^3a^2c^3}{3b} + \frac{7^2c^3}{7bc^2} = \frac{3^{3-1}\,a^2c^3}{b} + \frac{7^{2-1}c^{3-2}}{b} = \frac{3^2a^2c^3}{b} + \frac{7c}{b} =$

$$\frac{9a^2c^3+7c}{b}$$

x. $$\frac{12abc^2}{3bc^3}+\frac{2c}{7b}-\frac{36}{12c^2}=4ab^{1-1}\,c^{2-3}\;+\frac{2c}{7b}-\frac{3}{c^2}=4ac^{-1}+\frac{2c}{7b}-\frac{3}{c^2}$$

$$=\frac{4a}{c}+\frac{2c}{7b}-\frac{3}{c^2}=\;\frac{4a(7bc)+2c\left(c^2\right)-3(7b)}{7bc^2}$$

$$=\frac{28abc+2c^3-21b}{7bc^2}$$

Primero se simplifico el ejercicio y posteriormente se realizó la suma**.**

D) Operaciones con fracciones y números racionales

Los números racionales son aquellos que puedes escribirse como el cociente entre dos enteros $\frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$, denotaremos el al conjunto de los números racionales con la letra $\mathbb{Q}$ es decir,

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\;\middle|\,p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0\right\}$$

En donde $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$ si y solo si $pq'=qp'$

Por ejemplo, los siguientes números son racionales $\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{7}$, $3\frac{2}{17}$, $-12=\frac{12}{-1}$, $3.19=\frac{319}{100}$

Dos fracciones pueden representar al mismo número por ejemplo $\frac{1}{2}\,y\,\frac{2}{4}$ representan al mismo número, que en expresión decimal será 0.5, por que $1(2)$ es igual a $2(4)$.

Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número entero distinto de cero, se obtiene una fracción igual a ella.

$$\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}=\frac{\boldsymbol{mp}}{\boldsymbol{mq}} \text{ por que } \boldsymbol{p}(\boldsymbol{mq}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{mp})$$

Hay veces que no es muy evidente esta situación de igualdad por ejemplo $\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{28}}$ y $\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{20}}$ por que $(\mathbf{21})(\mathbf{20}) = (\mathbf{28})(\mathbf{15})$ y observamos que $\mathbf{420} = \mathbf{420}$.

- **Sumas y restas con números racionales**

Para sumar o restar dos fracciones que tengan el mismo denominador, simplemente se suman los numeradores y se pone el mismo denominador

Ejemplo 1 $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{5}}$

Ejemplo 2 $\frac{\mathbf{11}\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}\boldsymbol{b}}+\frac{-\mathbf{7}\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}\boldsymbol{b}}=\frac{\mathbf{11}\boldsymbol{a}+(-\mathbf{7}\boldsymbol{a})}{\mathbf{5}\boldsymbol{b}}=\frac{\mathbf{11}\boldsymbol{a}-\mathbf{7}\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}\boldsymbol{b}}=\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{a}}{\mathbf{5}\boldsymbol{b}}$

Cuando las fracciones tienen un denominador diferente, lo primero que debemos hacer es realizar las operaciones necesarias para que tengan el mismo denominador (podemos utilizar el procedimiento de la sección anterior).

Ejemplo 1 $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{8}}\right)+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}\right) =\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{5(8)}}+\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{5(8)}} =\frac{\mathbf{59}}{\mathbf{5(8)}} =\frac{\mathbf{59}}{\mathbf{40}}$

Podemos concluir de manera general, que para las sumas con diferente denominador se aplica:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{bd}}$$

Por supuesto que hay veces que podemos multiplicar por números más pequeños para obtener el mínimo común denominador, de esta forma se trabaja con números más pequeños obteniendo el mismo resultado.

Ejemplo 2 $$\frac{5}{6}+\frac{3}{10}=\frac{5}{2(3)}+\frac{3}{2(5)}=\frac{5(5)}{2(3)(5)}+\frac{3(3)}{2(3)(5)}$$
$$=\frac{5(5)+3(3)}{2(3)(5)}=\frac{25+9}{30}=\frac{34}{30}=\frac{17}{15}$$

Derivado de esta información y de los inversos aditivos podemos realizar operaciones como la resta $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, la cual se define como $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)$, de manera simplificada podemos decir:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Recuerda que el inverso aditivo de $\frac{c}{d}$ $\boldsymbol{es}$ $-\frac{c}{d}=\frac{-c}{d}=\frac{c}{-d}$ porque $\frac{c}{d}+\frac{-c}{d}=\frac{c+(-c)}{d}=\frac{0}{d}=$ $\mathbf{0}$ y como el inverso aditivo es único, entonces $-\frac{c}{d}=\frac{-c}{d}$ análogamente se puede demostrar que $\frac{-c}{d}=\frac{c}{-d}$ ya que $(-\boldsymbol{c})(-\boldsymbol{d})=\boldsymbol{cd}$.

Ejemplo 1 $$\frac{4}{3}-\frac{7}{5}=\frac{4(5)-3(7)}{3(5)}=\frac{20-21}{15}=\frac{-1}{15}=-\frac{1}{15}$$

- **Producto y división de números racionales**

Para poder realizar la multiplicación de dos fracciones, debemos multiplicar el numerador por numerador y denominador por denominador, los resultados se colocan numerador y denominador respectivamente**.**

$$\frac{a}{b}x\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplo 1 $$\frac{2}{3}\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{2(5)}{3(8)}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

Dos números racionales son recíprocos (inversos multiplicativos uno del otro) si su producto es 1, por ejemplo $\frac{2}{3} \boldsymbol{y} \frac{3}{2}$ lo son ya que $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \mathbf{1}$. En general, si $\boldsymbol{a\ y\ b}$ son distintos de cero, el recíproco de $\frac{a}{b}\ \boldsymbol{es} \frac{b}{a}$ es decir, es recíproco $\boldsymbol{de} \frac{a}{b}$ es su inverso multiplicativo descrito por $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$. Por los anteriores resultados se tiene que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}} = \frac{b}{a}$.

Se define el cociente de dos números racionales $\frac{a}{b}\ \boldsymbol{y} \frac{c}{d}$, llamado $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ con $\frac{c}{d} \neq \mathbf{0}$, como el producto de $\frac{a}{b}$ y el recíproco de $\frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$$

Podemos observar que la regla para dividir consiste en efectuar multiplicaciones de manera cruzada.

Ejemplo 1 $\quad \frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{21}{20}$

Con esta información previa, es posible resolver los siguientes ejercicios, recuerda dar el resultado simplificado.

i.	$\frac{10}{4} + \frac{6}{5}$	ii.	$\frac{12}{20} + \frac{15}{5}$
iii.	$\frac{18}{3} - \frac{24}{7}$	iv.	$\frac{40}{21} - \frac{35}{8}$
v.	$\frac{-24}{8} + \frac{63}{7}$	vi.	$\frac{6a^2}{3b} + \frac{2c}{7b}$
vii.	$\frac{12ab}{8} + \frac{6a}{7}$	viii.	$\frac{-18ab}{9} + \frac{45}{5c}$

ix.	$\frac{3}{10}\left(\frac{5}{2}\right)$	x.	$\frac{4}{21}\left(\frac{9}{4}\right)$
xi.	$\frac{8ab}{3c}\left(\frac{4bc}{7a}\right)$	xii.	$\frac{3b}{5d}\ \left(\frac{14a^2}{6ab}\right)$
xiii.	$\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)$	xiv.	$\left(-\frac{84abc}{24bc}\right)\div\frac{2ab}{7c}$
xv.	$\left(\frac{5b^2c}{9a}\div\frac{20abc}{3bc}\right)\left(-\frac{6a}{5b}\right)$	xvi.	$-\left(\frac{25}{6}\div\frac{5}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)$

Ejercicios resueltos

v. $\frac{-24}{8}+\frac{63}{7}=\ -3+9=6$

viii. $\frac{-18ab}{9}+\frac{45}{5c}=-2ab+\frac{9}{c}=\frac{-2ab(c)+9}{c}=\ \frac{-2abc+9}{c}$

xv. $\left(\frac{5b^2c}{9a}\div\frac{20abc}{3bc}\right)\left(-\frac{6a}{5b}\right)=\left[\left(\frac{5b^2c}{9a}\right)\left(\frac{3bc}{20abc}\right)\right]\left(-\frac{6a}{5b}\right)$

$$=\left(\frac{15b^{2+1}c^{1+1}}{180a^{1+1}bc}\right)\left(-\frac{6a}{5b}\right)=\left(\frac{15b^3c^2}{180a^2bc}\right)\left(-\frac{6a}{5b}\right)$$

$$=\left(\frac{1b^{3-1}c^{2-1}}{12a^2}\right)\left(-\frac{6a}{5b}\right)=\left(\frac{b^2c}{12a^2}\right)\left(-\frac{6a}{5b}\right)$$

$$=-\frac{6ab^2c}{6(10)a^2b}=-\frac{1a^{1-2}\,b^{2-1}c}{10}=\ -\frac{a^{-1}bc}{10}$$

$$=-\frac{bc}{10a}$$

E) Fracciones complejas

Una *fracción compleja* se define así cuando el numerador o denominador de una fracción, o ambos, contienen a su vez fracciones. Existen varios métodos para reducir una fracción compleja a una simple:

Una de ellas es utilizar las propiedades de la suma, resta, división y multiplicación con la finalidad de convertir una fracción compleja en una simple.

$$\frac{\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}=\frac{\frac{(\mathbf{1}\boldsymbol{y})+(\mathbf{1}\boldsymbol{x})}{(\mathbf{1}\boldsymbol{y})}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}=\frac{\frac{(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{y}}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}=\frac{(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})(\mathbf{1})}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y})}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}$$

- Si las expresiones en la fracción compleja son complicadas como se observa en el ejercicio de arriba, resulta a veces más fácil reducir el numerador y el denominador a fracciones simples (resolverlas por separado) y luego proceder a realizar la división.

Ejemplo 1

$$\frac{\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}}{\frac{\mathbf{3}-\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}\boldsymbol{x}}}$$

Fracción del numerador

$$\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{1}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})+(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})}=\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}+\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})}=\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}$$

Ya que simplificamos la fracción compleja, podemos resolver utilizando la propiedad que dice: “que el producto de los extremos es igual al producto de los medios”

$$\frac{\frac{2x}{x-3}}{\frac{3-x}{3x}} = \frac{(2x)(3x)}{(x-3)(3-x)} = \frac{6x^2}{(x-3)(3-x)} = \frac{6x^2}{(x-3)*(-(x-3))} =- \frac{6x^2}{(x-3)^2}$$

Con esta información previa, es posible simplificar las siguientes fracciones complejas:

iii. $\frac{\frac{3}{x}}{\frac{9}{y}}$

iv. $\frac{\frac{-6}{a}}{\frac{8}{b}}$

v. $\frac{1-\frac{6}{y}}{3-\frac{2}{y}}$

vi. $\frac{\frac{6}{\mathrm{x}}+2}{\frac{3}{\mathrm{x}}+4}$

vii. $\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}{\frac{5}{x}-\frac{1}{y}}$

viii. $\frac{\frac{1}{y}-\frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x}-\frac{1}{y}}$

ix. $\frac{\frac{3}{2x^2}-\frac{4}{x}}{\frac{5}{3x}+\frac{7}{x^2}}$

x. $\frac{\frac{4}{3x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{7}{4x}-\frac{9}{x}}$

xi. $\frac{\frac{x+2}{4}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{2}}$

xii. $\frac{\frac{3}{x+1}+2}{-4+\frac{2}{x+1}}$

Ejercicios resueltos

i. $$\frac{\frac{3}{x}}{\frac{9}{y}} = \frac{(3)(y)}{(x)(9)} = \frac{3y}{9x} = \frac{y}{3x}$$

v. $$\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}{\frac{5}{x}-\frac{1}{y}} = \frac{\frac{2(y)+3(x)}{xy}}{\frac{5(y)-1(x)}{xy}} = \frac{\frac{2y+3x}{xy}}{\frac{5y-x}{xy}} = \frac{(xy)(2y+3x)}{(xy)(5y-x)} = \frac{2y+3x}{5y-x}$$

ix. $$\frac{\frac{x+2}{4}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{x+2}{4}}{\frac{1(2)+3(x)}{2x}}=\frac{\frac{x+2}{4}}{\frac{2+3x}{2x}}=\frac{(x+2)(2x)}{(4)(2+3x)}=\frac{(x+2)(2)(x)}{(2^2)(2+3x)}=\frac{x^2+2x}{4+6x}$$

x. $$\frac{\frac{3}{x+1}+2}{-4+\frac{2}{x+1}}=\frac{\frac{3+2(x+1)}{(x+1)}}{\frac{-4(x+1)+2}{(x+1)}}=\frac{\frac{3+2x+2}{(x+1)}}{\frac{-4x-4+2}{(x+1)}}=\frac{\frac{2x+5}{(x+1)}}{\frac{-4x-2}{(x+1)}}=\frac{(x+1)(2x+5)}{(x+1)(-4x-2)}$$

$$=\frac{(2x+5)}{(-4x-2)}=\frac{2x+5}{-(4x+2)}=-\frac{2x+5}{4x+2}$$

F) Sustitución

En una expresión algebraica podemos encontrar signos de operación (sumas, restas, multiplicación, división, etc.), de agrupación (corchetes, paréntesis, llaves), números y variables. Una variable la podemos definir como una letra que representa a un número y los números son los valores de nuestra variable.

Se le llamará sustitución de una variable cuando se cambie por un número y posteriormente se efectuarán las operaciones correspondientes, a esto se le llama *evaluación de una expresión algebraica*, el resultado de esta operación es el valor de la misma y depende del número reemplazado.

Ejemplo 1 Encuentra el valor de la siguiente expresión algebraica $2(x+5)-3$ para $x=2$

$$2(x+5)-3=2(2+5)-3=2(7)-3=14-3=11$$

Ejemplo 2 Encuentra el valor de la siguiente expresión algebraica $(x^2yz)-(3zy)+(z)^2$ para $x=-1, y=9, z=5$

$$(x^2yz) - (3zy) + (z)^2 = (-1^2)(9)(5) - (3)(5)(9) + (5)^2$$
$$= 45 - (15)(9) + 25$$
$$= 45 - 135 + 25 = -65$$

Con base a esta información previa, realiza los siguientes ejercicios, encontrando el valor numérico de las expresiones siguientes para:

$$a = 1\,,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 4,\ m = \frac{1}{2},\ n = \frac{2}{3},\ p = \frac{1}{4},\ x = 0$$

i. $(a + b)c - d$

ii. $2mx + 6(b^2 + c^2) - 4d^2$

iii. $(4m + 8p)(a^2 + b^2)(6n - d)$

iv. $b^2(c + d) - a^2(m + n) + 2x$

v. $x + m(a + d^3 - c^2)$

vi. $\left(\frac{8m}{9n} + \frac{16p}{b}\right)a$

vii. $c^2(m + n) - d^2(m + p) + b^2$

viii. $\frac{a+\frac{d}{b}}{d-b}$

ix. $\frac{b^2-\frac{c}{3}}{2ab-m}$

x. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)x$

<u>Ejercicios resueltos</u>

i. $(a + b)c - d = (1 + 2)3 - 4 = (3)(3) - 4 = 9 - 4 = 5$

v. $x + m(a + d^3 - c^2) = 0 + \frac{1}{2}[1 + (4)^3 - (3)^2] = \frac{1}{2}(1 + 64 - 9)$

$$= \frac{1}{2}(56) = \frac{56}{2} = 28$$

viii $\frac{a+\frac{d}{b}}{d-b} = \frac{\frac{ab+d}{b}}{d-b} = \frac{(ab+d)(d-b)}{b} = \frac{[(1)(2)+4](4-2)}{2} = \frac{(2+4)(2)}{2} = \frac{6(2)}{2} = 6$

x. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\boldsymbol{x}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)0=0$

XI. CONCLUSIONES

Hoy en día México intenta está a la par de la educación en matemáticas comparado con países de primer mundo, sin embargo, la educación tradicional a pesar de que es muy buena y ha dado frutos durante muchos años no ha sido suficiente para dar resultados tan altos como en dichos países, debido a múltiples factores como son la apatía del alumno frente a la clase, los temarios son extensos y los tiempos cortos para el correcto entendimiento de los mismos, por esto se busca compaginar el uso de otras estrategias para aumentar el aprendizaje del alumno como son las herramientas tecnológicas, el uso de propuestas didácticas, clases asíncronas, entre otros.

Debido a esto fue de interés observar por que los alumnos siguen cometiendo los mismos errores matemáticos dentro del aula, así como durante los exámenes sin importar la etapa académica en la que se encuentren, esto nos hizo pensar que dichos errores son repetitivos y que se puede utilizar esta propuesta como una estrategia dentro y fuera del aula para fomentar un aprendizaje a largo plazo.

Para la observación de errores que cometen los alumnos constantemente dentro y fuera del aula en cuestiones matemáticas, se utilizó la aplicación de un examen de admisión a un programa educativo y fue necesario utilizar la experiencia frente al aula y la descripción de errores realizada por Radatz, esto nos permitió realizar un desglose mostrando que efectivamente los alumnos tienen ciertas tendencias a cometer dicho error y esto nos permitió buscar que esta propuesta sea una mejor estrategia para docentes y alumnos para fortalecer el conocimiento a largo plazo.

Con el análisis de los exámenes y el apoyo de Radatz con respecto a los errores se observó que existen distintos factores que pueden influir en nuestros alumnos a la hora de realizar un examen y algunos de estos resultados son:

- Que el alumno no haya tenido el tiempo necesario para resolverlo o que desconocieron el procedimiento que necesitaban, ya sea porque no entendieron la instrucción o por que no reconocían el tema del que se trataba.
- Los errores cometidos y las respuestas obtenidas o los ejercicios no contestados podrían no ser derivados tanto por el ejercicio mismo, sino más bien debido a que los temas que sustentan la respuesta tienen bases frágiles o desconocimiento, demostrando en nuestro estudio que este factor provoca errores con mayor frecuencia.
- El alumno asocia de manera incorrecta los temas, los confunde con otros o simplemente crea nuevas estrategias que considera correctas para la resolución del ejercicio, ya sean válidas o no. Esto nos hace pensar que probablemente algunos alumnos no procesan la información en un corto periodo de tiempo por lo cual no les permite crear asociaciones coherentes en temas más complejos.
- Podríamos pensar que algunos errores se deben a dificultades del lenguaje, ya que muchas veces el alumno no conoce o no entiende lo que la oración está pidiendo, sin embargo, en otros casos el alumno confundió lo que se pedía con lo que realizó.

Así mismo, se decidió utilizar la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau para la realización de la propuesta, la cual estuvo dividida en dos secciones, la primera a-didáctica realizada con la finalidad de que el alumno con sus conocimientos previos intentara resolver cierta cantidad de ejercicios sin intervención del profesor para fomentar que buscaran estrategias y recursos propios para llegar a la respuesta correcta. Podemos concluir que la fase a-didáctica suele ser la más difícil de llevar a cabo dentro de la institución por los diversos factores mencionados (tiempo, temario, etc.), sin embargo, se invita a realizar este tipo de actividades dentro de algún taller, clases extracurriculares pues es parte fundamental para el aprendizaje. La segunda fase didáctica se formuló mediante la premisa de que el alumno carece de ciertos aprendizajes por diversas cuestiones y que necesita que el profesor le ayude a repasar el tema tanto desde el punto teórico como el práctico, para así disminuir las posibilidades de que el alumno cometa nuevamente el mismo error.

Podemos concluir que la enseñanza tradicional sigue siendo fundamental para el aprendizaje, pues es la base que ha funcionado a través de los años pero que puede ser complementada como lo menciona Brousseau en su TSD con la fase a-didáctica para así generar un aprendizaje más completo a partir de las conexiones que el alumno realiza entre el error y el aprendizaje.

Es por ello que esta propuesta busca disminuir la cantidad de errores cometidos por el alumno durante un examen, durante algún ejercicio o problema dentro del salón, así como en sus tareas pues estará compaginando la enseñanza tradicional (didáctica) y la a-didáctica provocando que el alumno se cuestione el por qué se equivoca, con esto podría ayudar a disminuir la apatía que tienen durante la clase pues podrá generar participación, dudas, preguntas dentro del aula promoviendo un aprendizaje significativo y de largo plazo.

El diseño de la propuesta pretende apoyar tanto al alumno como al profesor, ya que está escrita de tal manera que el alumno pueda consultarlo de manera autodidacta y fuera del aula, ya que por la manera concisa en que está redactada pueda apoyar a su mayor entendimiento en los diversos temas que se manejan. A su vez puede apoyar al profesor pues le sirve como una herramienta de apoyo para generar mayor contenido dentro o fuera del aula, promoviendo la participación del alumno mediante las actividades ahí descritas, lo cual a la larga se vería reflejado en exámenes con un mayor y mejor desempeño a la hora de una evaluación.

XII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alarcón, G. (2000). Matemáticas, Aritmética y Álgebra. México: Editorial Iberoamericana. p. 95 – 105

Artigue M. (1995). Ingeniería didáctica. En Ingeniería didáctica en educación matemática, 33- 59. Lugar: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. & una empresa docente. https://www.researchgate.net/publication/277733635_Ingenieria_didactica_en_educacio n_matematica/link/559e491308ae76bed0bb8948/download

Backhoff, E. & Tirado, F. (1993). "Habilidades y conocimientos básicos del estudiante universitario: hacia los estándares nacionales", Revista de Educación Superior, México: ANUIES, vol. XXI, núm. 3 (88), pp. 45-65.

Backhoff, E., Bouzas, A., Hernández, E. & García, M. (2007). Aprendizaje y desigualdad social en México. Implicaciones de política educativa en el nivel básico, Ciudad de México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Barrantes, H. (2006). Centro de investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR. p. 80

Barrantes, R. (2014). Investigación: Un camino al conocimiento, Un enfoque Cualitativo, cuantitativo y mixto. San José, Costa Rica: EUNED. p. 82

Borasi, R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. For the Learning of Mathematics 7, 3. pp. 2-9. Montreal: FLM Publishing Association.

Brousseau G. (1986): Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau G. (1994): "Los diferentes roles del maestro" en Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones, C. Parra; I. Saiz (comp.) Buenos Aires, Paidós Educador.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. En: Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. (eds). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las Matemáticas. Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamérica. p. 5-38

Camarena G. (1996). El contexto y las ecuaciones diferenciales lineales. Memorias del 6º Coloquio Académico de la ESIME-IPN, México.

Caso, N. & González, B. (2011). Variables personales y académicas que afectan el rendimiento académico en la educación secundaria: el caso de Baja California Aportaciones de la investigación a la evaluación de estudiantes y docentes. Ciudad de México, Universidad Autónoma de Baja California y Miguel Ángel Porrúa.

Ferreyra, N., Rechimont, E., Parodi, C. & Castro, N. (2010). De la aritmética al álgebra. Experiencia de trabajo con estudiantes universitarios. UNION.Revista Iberoamericana de Educación Matemática, La laguna, no. 21, p. 59-67

Filloy, E. P. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. México: Enseñanza de las Ciencias

Flick, U. (2015). El diseño de Investigación Cualitativa. Madrid, España: Ediciones Morata. p. 13

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics. p. 27-46

Heck, A. & Van Gastel, L. (2006). Mathematics on the threshold. International Journal of mathematical education in science and technology, 37(8). p.925-945.

Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M. & Coe, R. (2009). Children's understandings of algebra 30 years. Research in Mathematics Education, Reston, vol. 11, no. 2, p. 193-194

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2011). La Educación Media Superior en México, Ciudad de México: INEE.

Kaput, J., y Blanton, M. L. (2000). El razonamiento algebraico en el contexto de la matemática elemental: su implementación en una escala masiva. Reunión anual de la Asociación de Investigación Educativa de América del Norte, Montreal, Canadá.

Kilpatrick, J., Gómez, P. & Rico, L. (1998). Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. Bogotá: una empresa docente.

Macías M. & Hernández P. (2007). Indicadores conductuales de ansiedad escolar en bachilleres en función de sus calificaciones en un examen de matemáticas. Universitas Psychologica, 7(3), p. 767-786. Recuperado a partir de: https://revistas.javeriana.edu.co/index.php/revPsycho/article/view/391

Martínez, G. (2002). Explicación Sistémica de Fenómenos Didácticos ligados a las Convenciones Matemáticas. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 5(1), p. 45-78.

Martio, O. (2009). Long term effects in learning mathematics in Finland-curriculum changes and calculators. Teaching of Mathematics, 12(2), p. 51- 56.

Moliner, M. (1986). Diccionario del Uso del Español. Madrid: Editorial Gredos.

Oliveros, S. (2011). La enseñanza de la matemática para los docentes de educación integral. Revista Iberoamericana de Educación (55), p.1-15.

Pérez, J. (2014). Errores algebraicos más comunes que cometen los alumnos de bachillerato. *Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 3*. Recuperado a partir de: https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/article/view/1644

Pinto, J. (1996). Perfil académico de estudiantes de alto y bajo rendimiento académico en matemática de primero de preparatoria. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida Yucatán, México.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, no.9, p.163-172.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrik, J.; Gómez, P., Y Rico, L.: Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Rivas, P. (2005). La educación matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. Red Revista Educere, no.9, p.165-170.

Rodríguez, J. (2003). Conceptuaciones de los profesores de matemáticas acerca de la enseñanza y el aprendizaje. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida Yucatán, México.

Ruano, R., Socas, M. & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores 'cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización 'y modelización en álgebra. p. 61 - 74

Sadovsky, P. (2005). La TSD: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Reflexiones teóricas para la Educación Matemática, p. 13 – 68.

Secretaría de Educación Pública (2012). Educación por Niveles. Ciudad de México: SEP. Recuperado a partir de: http://www.sep.gob.mx/es/sep1/educacion_por_niveles

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zarzal.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En: Rico, L. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: ICE/Horsori.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In: A. F. COXFORD. The Ideas of Algebra, K-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. p. 8-19.

ANEXO 1

CARTA DE CONFIDENCIALIDAD

A quien corresponda:

Por medio de la presente, yo Jessica Marisol Martínez Martínez, estudiante de la maestría en Didáctica de las Matemáticas la cual se encuentra desarrollando el proyecto de tesis titulada "Propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas enfocada en el uso didáctico de errores para la multiplicación algebraica" y teniendo acceso a la información obtenida de este, me comprometo indefinidamente a:

1. Mantener la reserva y estricta confidencialidad de datos obtenidos, referenciándolos con un código clave que ocultará la identidad de los participantes.
2. No divulgar a terceras personas físicas o morales el contenido de la información.
3. No usar la información directa o indirectamente en beneficio propio o de terceros, excepto para cumplir a cabalidad el análisis relacionado al proyecto mencionado.
4. No revelar ni compartir total ni parcialmente a ningún tercero la información obtenida como consecuencia directa o indirecta de la aplicación de las actividades.
5. En general, resguardar y reservar la confidencialidad de los asuntos que lleguen a mi conocimiento con motivo del proyecto aplicado y en específico a la información precisada.

En caso de incumplimiento de lo estipulado en el presente documento, me haré acreedor a la sanción que la Universidad Autónoma de Querétaro considere conveniente. Deslindo a la Universidad Autónoma de Querétaro de cualquier responsabilidad a consecuencia de la falta de cumplimiento de la presente carta.

Atentamente

____

Jessica Marisol Martínez Martínez estudiante de MDM

ANEXO 2

A continuación se muestra la resolución de los problemas planteados en la sección a-didáctica.

1. Realiza la operación indicada y simplifica

v. $\frac{\mathbf{x+y}}{\mathbf{y}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x-y}} = \frac{(x+y)(x-y)+(y)(y)}{(y)(x-y)} = \frac{x^2+xy-xy-y^2+y^2}{(y)(x-y)} = \frac{x^2}{(y)(x-y)}$

vi. $\frac{\boldsymbol{r-s}}{\boldsymbol{3r+6s}} - \frac{\boldsymbol{r-2s}}{\boldsymbol{4r+8s}} = \frac{r-s}{3(r+2s)} - \frac{r-2s}{4(r+2s)} = \frac{(4)(r-s)-(3)(r-2s)}{(3)(4)(r+2s)}$

$$= \frac{4r-4s-3r+6s}{(3)(4)(r+2s)} = \frac{(r+2s)}{12(r+2s)} = \frac{1}{12}$$

vii. $\mathbf{3t+1} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3t-1}} = \frac{(3t)(3t-1)+(1)(3t-1)+2}{(3t-1)} = \frac{9t^2-3t+3t-1+2}{(3t-1)} = \frac{9t^2+1}{(3t-1)}$

v. Mario camina todos los días $\mathbf{2\,\frac{1}{2}}$ km. Un día de lluvia le obligó a detener su caminata después de $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ km. ¿Por cuantos km acortó su caminata?

Mario dejo de recorrer o acorto su caminata en $1\frac{3}{4}\ km$

Justificación $2\frac{1}{2}\, es\ equivalente\ a\ \frac{5}{2}$

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{(2)(5)-3}{4} = \frac{7}{4}\ es\ equivalente\ a\ 1\frac{3}{4}\ km$$

2. Simplifica el siguiente reactivo y sustituye para encontrar su valor numérico

ii. Para $\boldsymbol{a = 2, b = -3, c = 1}$

$$\frac{(\boldsymbol{a^{-2}b^{-1}c^{3}})^{3}}{(\boldsymbol{ab^{2}c})^{-2}} = \frac{a^{-6}b^{-3}c^{9}}{a^{-2}b^{-4}c^{-2}} = \frac{a^{2}b^{4}c^{2}c^{9}}{a^{6}b^{3}} = \frac{bc^{11}}{a^{4}} = \frac{(-3)^{1}(1)^{11}}{2^{4}} = -\frac{3}{16}$$

$$\frac{(\boldsymbol{a^{-2}b^{-1}c^{3}})^{3}}{(\boldsymbol{ab^{2}c})^{-2}} = \frac{2^{-6}(-3)^{-3}1^{9}}{2^{-2}(-3)^{-4}1^{-2}} = \frac{-3}{2^{4}} = -\frac{3}{16}$$

iv. Para $\boldsymbol{a=2, m=\ 3, x=-\,2, y=-\,1}$

$$\boldsymbol{\frac{3a}{x}+\frac{2y}{m}+2(x^3+4)}=\frac{3(2)}{-2}+\frac{2(-1)}{3}+2((-2)^3+4)=-3-\frac{2}{3}+2(-8+4)$$

$$=-3-\frac{2}{3}+2(-8+4)=\frac{-3(3)-2-8(3)}{3}=\frac{-9-2-24}{3}=-\frac{35}{3}$$

v. Para $\boldsymbol{a=2, x=-\,4,\ n=\frac{1}{2}, m=3}$

$$\boldsymbol{(a+x)^{-2}+x(m-n)}=[(2+(-4)]^{-2}+(-4)\left(3-\frac{1}{2}\right)$$

$$=(-2)^{-2}+\left(-12+\frac{4}{2}\right)=\frac{1}{(-2)^2}-10=\frac{1-4(10)}{4}=-\frac{39}{2}$$

viii. En un restaurante se ganaron \$275 dólares de propinas, los cuales deben repartirse entre el encargado, el mesero y el mozo. Se sabe que el mesero gana \$25 dólares más que el triple de lo que recibe el mozo y el encargado recibirá \$50 más que el mozo. Entonces ¿Cuánto recibe el mesero?

$encargado\ (z) \rightarrow z=50\ +x$

$mesero\ (y) \rightarrow y=25\ +3x$

$mozo(x) \rightarrow x$

$$\boldsymbol{x+y+z=275}$$

Sustitución

$x+(25+3x)+(50+x)=275$

$x+25+3x+50+x=275$

$5x=275-75$

$x=\frac{200}{5}\ =\ 40\ gana\ el\ mozo$

El mesero gana 145 dólares ya que

$y=50+3(40)=\ 145$

3. Despeja la variable que se te pide de cada reactivo

v. Despeja h $\quad \boldsymbol{A = \frac{bh}{2}}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{2}) = \frac{\boldsymbol{bh}}{\boldsymbol{2}}(2) \rightarrow 2A = bh \rightarrow (\tfrac{1}{b})2A = bh(\tfrac{1}{b}) \rightarrow \frac{2A}{b} = h$$

vi. Despeja c $\quad \boldsymbol{A = (b + cd)^2}$

$$\sqrt{A} = \sqrt{(b+cd)^2} \rightarrow \sqrt{A} = (b+cd) \rightarrow -\mathrm{b} + \sqrt{A} =- b + b + cd$$

$$\rightarrow (\tfrac{1}{d})(-\mathrm{b} + \sqrt{A}) = cd(\tfrac{1}{d}) \rightarrow \frac{-\mathrm{b}+\sqrt{A}}{d} = c$$

vii. Despeja t $\quad \boldsymbol{M = \frac{1}{t-1}}$

$$(\boldsymbol{t-1})\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{t-1}}(t-1) \rightarrow (\boldsymbol{t-1})\boldsymbol{M}(\tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{M}}) = \boldsymbol{1}(\tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{M}}) \rightarrow \boldsymbol{t - 1 + 1 = \frac{1}{M} + 1}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{1+M}}{\boldsymbol{M}}$$

viii. Halla las medidas de los tres ángulos de un triángulo.

Condiciones:

- El segundo es tres veces más grande que el primero $(\boldsymbol{A_2 = 3A_1})$
- El tercero mide dos veces más que el segundo $(\boldsymbol{A_3 = 2A_2})$

$$\boldsymbol{180 = A_1 + A_2 + A_3}$$

Sustitución

$$180 = A_1 + 3A_1 + 2(3A_1)$$

$$180 = A_1 + 3A_1 + 6A_1 \rightarrow 180 = 10A_1 \rightarrow \frac{180}{10} = A_1 \rightarrow 18 = A_1$$

$$A_2 = 3A_1 = 3(18) = 54$$

$$\boldsymbol{A_3} = 2A_2 = 2(54) = 108$$

4. Resuelve los siguientes ejercicios complejos

xiii. $$\frac{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{y}}}{\mathbf{3}-\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{y}}}=\frac{\frac{(1)y-6}{y}}{\frac{(3)y-2}{y}}=\frac{y(y-6)}{y(3y-2)}=\frac{y-6}{3y-2}$$

xiv. $$\frac{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{x}}+\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x}}+\mathbf{4}}=\frac{\frac{6+2x}{x}}{\frac{3+4x}{x}}=\frac{x(6+2x)}{x(3+4x)}=\frac{2x+6}{4x+3}$$