



Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería  
Maestría en Instrumentación y Control Automático

Sistema de calibración de posición para manipulador tipo PUMA

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

**Presenta:**

Alfonso Aguado Acosta

**Dirigido por:**

M. C. Manuel García Quijada

**SINODALES**

M.C. Manuel García Quijada  
Presidente

Dr. Aurelio Domínguez González  
Secretario

Dr. Roque Alfredo Osorio Ríos  
Vocal

M.C. Luis Alberto Morales Hernández  
Suplente

Dr. Juan Primo Benítez Rangel  
Suplente

Dr. Gilberto Herrera Ruiz  
Director de la Facultad

Firma

Firma

Firma

Firma

Firma

Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval  
Director de Investigación y  
Posgrado

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
Octubre, 2009  
México

## RESUMEN

El conocer la ubicación exacta del efector final de un robot serial es un dato esencial para lograr obtener un procedimiento de calibración adecuado. En este trabajo se presenta el desarrollo de un método para obtener la posición, dentro del espacio Euclidiano tridimensional, del punto de operación del órgano terminal de un robot serial desacoplado. El método permite llevar a cabo la cuantificación de desplazamiento del punto de operación del órgano terminal de un brazo manipulador, con el fin de evaluar el error de posición ocasionado por la acumulación de errores en cada iteración de la tarea programada. La imagen de un círculo es proyectada desde el punto de operación del órgano terminal del robot serial hacia una superficie plana, la intersección de las líneas proyectantes con esta superficie genera la imagen de un círculo, cuyos parámetros están relacionados con la posición en el espacio del punto desde el cual la imagen del círculo es proyectada. La posición del foco de proyección puede ser estimada al realizar la medición, mediante técnicas de procesamiento de imágenes, de los parámetros del círculo descrito en la superficie plana. Las pruebas experimentales fueron realizadas en un centro de maquinado de alta resolución, logrando así la validación de la metodología propuesta para la compensación del error de posicionamiento del punto de operación del órgano terminal. La implementación física del sistema fue realizada en un robot serial tipo PUMA de 6 grados de libertad.

**(Palabras clave:** calibración, robot serial, compensación de error de posición, procesamiento de imágenes)

## SUMMARY

It is essential to know in a serial robot the exact location of its end-effector, in order to have an effective calibration procedure. This work presents the development of a new method to obtain the operation point position of the end-effector, on Euclidean three-dimensional space, in a decoupled serial robot. This method allows the movement quantification of the operation point position in a manipulator, in order to evaluate the pose error caused by the combined errors on each iteration of the programmed task. A circle image is projected from the robot's end-effector to a planar surface, the projection and the surface intersection generates the image of a circle, and its geometric parameters are related to the point position from where the image is generated. The center of projection position can be estimated by measuring these circle parameters with image processing techniques. Experimental tests were performed in a high resolution machining center in order to validate the proposed methodologies. The physical implementation of the system was performed on a PUMA robot, which is a 6-Degree of freedom decoupled serial robot.

**(Key words:** calibration, serial robot, pose error compensation, image processing)

**A todas y cada una de las personas  
que hicieron posible este sueño**

Gracias...

## AGRADECIMIENTOS

*A mi madre...*

*Fuente incansable y permanente de ejemplo y motivación  
Dora Agnela Acosta Zenil*

*A mi hermano...*

*Sin su apoyo y aliento, la culminación de este proyecto habría sido solo un sueño  
Marco Antonio Aguado Acosta*

*A mi amor...*

*Su amor, ayuda y comprensión permitieron ver de nuevo el camino perdido  
Judith Elideth Salazar Chong*

*A mis Abuelos...*

*Pocas cosas en la vida son tan gratificantes como compartir esto con ustedes  
Onésimo Acosta Lora, Raymunda Zenil González*

*A mis compañeros de generación...*

*Mis maestros, pues en ellos descansa el verdadero espíritu de enseñanza  
Lev Yashin Bello León, Ángel Pérez Cruz*

*A mis amigos...*

*Por hacer valer el significado de la palabra amistad  
Rafael Santos Cruz, Abdiel García Moreno*

*A mis amigos...*

*Por brindarme el sabio consejo acerca de un camino ya conocido por ustedes  
Jesús Rooney Rivera Guillén, Luis Morales Velázquez, J. Jesús de Santiago Pérez*

*A mi amigo...*

*Por su oportuna e invaluable colaboración en momentos donde guías son cegados por el  
egocentrismo y faltan a la más noble de las tareas  
Oscar Islas Gómez*

*... Y a todas las personas que supieron tratarme como un amigo, que dejaron parte de sí  
en cada palabra de aliento, que colaboraron, compartieron, rieron, vivieron e hicieron  
posible esta experiencia que hoy se vuelve anécdota...*

*Gracias...*

# INDICE

	<b>Página</b>
Resumen.....	i
Summary.....	ii
Dedicatorias.....	iii
Agradecimientos.....	iv
Índice.....	v
Índice de tablas.....	viii
Índice de figuras.....	lx
I. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Antecedentes.....	2
1.2 Objetivos.....	3
1.3 Justificación.....	5
1.4 Planteamiento General.....	6
II. REVISIÓN DE LITERATURA.....	10
2.1 Estado del Arte.....	10
2.1.1 Transformaciones Lineales Básicas.....	11
2.2 Fundamentos de Robótica.....	16
2.2.1 Conceptos y Terminología.....	16
2.2.2 Cinetostática del manipulador PUMA.....	22
2.2.3 Propiedades importantes del manipulador PUMA.....	22
2.2.4 La notación Denavit-Hartenberg.....	26
2.2.5 Cinemática Directa e Inversa.....	29
2.2.6 Cinemática Inversa del robot PUMA.....	32
2.3 Calibración.....	42
2.3.1 Parámetros de Calibración.....	42
2.3.2 Sistemas de Calibración Actuales.....	44
2.3.3 Factores de error de Calibración.....	46

2.4	Fundamentación matemática.....	47
2.4.1	Secciones cónicas.....	47
2.4.2	Ecuación general de segundo grado.....	50
2.4.3	Circunferencia.....	52
2.4.4	Teorema de Tales.....	55
2.4.5	Transformación de Coordenadas.....	56
2.5	Procesamiento de imágenes.....	60
2.5.1	Introducción.....	60
2.5.2	Representación digital de imágenes.....	61
2.5.3	Resolución.....	63
2.5.4	Etapas del procesamiento de imágenes.....	64
2.5.5	Mejora de la imagen.....	66
III.	METODOLOGÍA.....	67
3.1	Perspectiva general.....	67
3.2	Sistema de proyección.....	68
3.2.1	Definición de figura patrón.....	68
3.2.2	Elementos de proyección.....	71
3.2.3	Diseño y maquinado del sistema de proyección.....	72
3.3	Análisis de error de posición.....	74
3.3.1	Análisis geométrico de proyección de referencia.....	74
3.3.2	Error en el plano $xy$ .....	75
3.3.3	Error en el eje $z$ .....	76
3.4	Superficie de calibración.....	77
3.4.1	Especificaciones.....	78
3.4.2	Filtrado.....	78
3.4.3	Definición del sentido de incremento.....	78
3.5	Sistema de adquisición.....	79
3.5.1	Dispositivo de adquisición de imagen digital.....	79
3.5.2	Ubicación.....	81
3.5.3	Escala.....	82

3.6	Algoritmo de error de posición.....	83
3.6.1	Descripción del algoritmo.....	84
3.6.2	Diagrama de bloques.....	86
IV.	RESULTADOS.....	87
4.1	Simulaciones.....	87
4.1.1	AutoCAD.....	87
4.2	Pruebas.....	91
4.2.1	DYNA.....	91
4.2.2	Robot PUMA.....	96
V.	CONCLUSIONES.....	101
	REFERENCIAS.....	102

## INDICE DE TABLAS

<b>Tabla</b>		<b>Página</b>
1	Parámetros de las juntas del PUMA	33
2	Causas de desviación en la trayectoria de robots industriales	46
3	Secciones cónicas	50
4	Evaluación del discriminante	51
5	Valor de parámetros del cono de referencia	70
6	Datos de entrada del algoritmo	84
7	Coordenadas de los puntos	88
8	Pruebas en el centro de maquinado	92
9	Pruebas con resolución de imagen de 1936x1296 pixeles	95
10	Pruebas con resolución de imagen de 640x480 pixeles	96
11	Pruebas con resolución de imagen de 1280x960 pixeles	97

## INDICE DE FIGURAS

<b>Figura</b>		<b>Página</b>
1.1	Diagrama de Bloques	9
2.1	Manipulador tipo PUMA	16
2.2	Pares Inferiores	19
2.3	Estructuras con dos eslabones	21
2.4	Estructura de un robot serial	24
2.5	Diagrama esquemático de la muñeca esférica	25
2.6	Parámetros D-H	28
2.7	Ejemplo de robot con 2 eslabones	29
2.8	Mecanismo plano	30
2.9	Configuraciones de un robot tipo PUMA	31
2.10	Asignación de marcos de referencia	32
2.11	Precisión y repetibilidad	44
2.12	Intersección de un cono recto y un plano	49
2.13	Circunferencia	52
2.14	Teorema de Tales	55
2.15	Transformación de coordenadas	58
2.16	Marcos de coordenadas con desplazamiento del origen	60
2.17	Convenio de ejes utilizado	61
2.18	Imágenes con distinta resolución	63
2.19	Etapas del procesamiento de imágenes	64
3.1	Figura patrón	69
3.2	Laser económico	72
3.3	Sistema de proyección	73
3.4	Proyección sobre una superficie	74
3.5	Error en el plano xy	75
3.6	Error en el eje z	76
3.7	Marco de coordenadas	79
3.8	Conexión por USB	80
3.9	Cámara Digital	81
3.10	Superficie de Calibración y Sistema de Adquisición	82
3.11	Diagrama de bloques del algoritmo	86
4.1	Marcos de coordenadas	88
4.2	Plano xy	89
4.3	Gráfica de resultados	96
4.4	Pruebas de robot PUMA	99
4.5	Implementación física	100

## I. INTRODUCCIÓN.

En la presente tesis se expone el proceso de diseño e implementación de un sistema de calibración para un manipulador tipo PUMA (*Programmable Universal Machine for Assembly, Programmable Universal Manipulation Arm*). La investigación se ha dividido en 6 capítulos.

El capítulo I tiene por objetivo introducir diversos conceptos importantes para establecer claramente los alcances del trabajo. Además en el transcurso del capítulo se exponen antecedentes y objetivos de la investigación, para conocer y establecer los estudios realizados en esta materia; así como la justificación y planteamiento general, para delimitar de manera clara el problema y entender de manera general cual será la metodología utilizada para resolverlo.

El capítulo II provee todos los fundamentos teóricos, necesarios e indispensables, para dar seguimiento al trabajo de investigación de una manera efectiva y clara. Los diversos temas presentados en este capítulo son un compendio de investigaciones, conocimientos y fundamentos teóricos que pertenecen a diversos campos de la ciencia, y brindan sustento al trabajo de investigación.

En el capítulo III se expone a detalle la metodología utilizada para resolver el problema planteado, la cual tiene sustento en los aspectos teóricos expuestos en el capítulo anterior. Además se explica el proceso a seguir para la realización de las pruebas realizadas en este trabajo de investigación. También se presentan las especificaciones y características de cada uno de los materiales utilizados para llevar a cabo la implementación física del sistema.

En el capítulo IV se observan y comentan los resultados obtenidos de las diferentes pruebas realizadas, tanto en las simulaciones como en la implementación física. En el capítulo V se exponen las conclusiones obtenidas acerca del trabajo de investigación, así como comentarios y observaciones finales.

## **1.1. Antecedentes.**

Referente a los trabajos e investigaciones, en un marco local, en la Universidad Autónoma de Querétaro se han realizado diversos trabajos relacionados con manipuladores robóticos. Algunos de los trabajos más relevantes en el tema de calibración son citados a continuación:

Martínez (2001) realizó un programa que simula los movimientos de un robot manipulador tipo PUMA desacoplado de seis grados de libertad. En este trabajo, a partir del modelo geométrico del manipulador, se obtuvieron la cinemática directa e inversa de posición y velocidad. El simulador permite visualizar el comportamiento del robot en el seguimiento de trayectorias antes de su ejecución real, también presenta una interface que permite al usuario interactuar con la simulación y elegir la configuración para el seguimiento de trayectorias que sea más eficiente o que mejor le convenga.

Por otra parte, López (2002) realizó la validación de la cinemática directa de un robot industrial de manera experimental, empleando la metodología propuesta por Denavit y Hartenberg y dirigiendo sus resultados al desarrollo de controladores de posición, todo esto como parte del proyecto de desarrollo de una estación robotizada de soldadura realizado en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

Chaparro (2002) diseñó un sistema de control de posicionamiento para mejorar el desempeño de los sistemas donde la precisión es uno de los puntos fundamentales de diseño, considero compensar las perturbaciones internas, como la fuerza de fricción; y las perturbaciones externas, como los cambios de temperatura y humedad entre otros.

Un algoritmo para el cálculo de la cinemática inversa de cualquier robot manipulador serial redundante del tipo 7R fue desarrollado por Mejía (2003); mediante el método de mínimos cuadrados ponderados obtiene la solución a los ángulos de las articulaciones para después optimizar un índice de desempeño cinemático con restricciones en la planeación de tareas del manipulador, además

presenta un programa que muestra la solución de manera gráfica y donde incluye un ejemplo de aplicación del algoritmo para el robot Cybotech P15.

A nivel mundial se utilizan diversas técnicas para llevar a cabo la calibración de los robots seriales, como algoritmos matemáticos de optimización (método *Steepest-Gradient*), métodos estadístico-numéricos (método de *Monte Carlo*), así como métodos basados en la implementación de diversos dispositivos, tales como sensores de distancia, rayos láser interferométricos, teodolitos, calibradores; o en la implementación de técnicas como la *identificación global*, *precisión absoluta*, o la *triangulación láser*.

Sin embargo la gran mayoría de las técnicas para lograr la calibración de un robot serial requieren de dispositivos complicados y muy costosos.

Partiendo de estos antecedentes, y realizando un estudio de los diferentes sistemas de calibración que existen en la actualidad, se realiza un sistema de calibración para un manipulador que permite evaluar el error de posición del órgano terminal, y además es una alternativa confiable, eficiente y accesible.

## **1.2. Objetivos.**

Para lograr definir de manera única un trabajo de investigación tecnológica, es indispensable establecer de manera clara los objetivos que persigue dicha investigación. El logro de los objetivos planteados permite la obtención de resultados concretos, que a su vez apoyan y sirven de base para el desarrollo tecnológico y la generación de nuevos temas de estudio.

Los objetivos que se plantean en esta sección corresponden a cada una de las etapas que conforman el trabajo de investigación.

De manera general, se busca realizar un sistema que ofrezca una alternativa útil y eficiente para permitir una correcta evaluación del error de

desplazamiento de un brazo robótico, con el fin de mejorar la exactitud en la posición y orientación de la herramienta unida al elemento final del manipulador. También debe considerarse que la solución a esta problemática busca ser una alternativa que, por su bajo costo, sea rentable y accesible para el empresario.

#### *1.2.1. Objetivo General.*

Desarrollar e implementar diversas técnicas y principios científicos a fin de definir un método o sistema eficiente y económico que permita llevar a cabo la cuantificación de desplazamiento del punto de operación del órgano terminal de un brazo manipulador, con el fin de evaluar el error de posición ocasionado por la acumulación de errores en cada iteración de la tarea programada.

#### *1.2.2. Objetivos Particulares.*

- a) Cuantificar el error de posición de inicio (*home*) con el fin de evaluarlo, y con ello obtener criterios certeros que permitan llevar a cabo la compensación de dicho error. Esto contribuirá en gran medida a mejorar la precisión de la tarea realizada por el brazo manipulador. Como puede intuirse, esta evaluación tiene un impacto importante en la compensación del error de posicionamiento del OT.
- b) Diseñar el sistema de calibración en base a los requerimientos del brazo manipulador.
- c) Garantizar la rentabilidad del sistema de calibración mediante la utilización de materiales de bajo costo, partiendo del estudio de diferentes sistemas implementados en la actualidad. Este estudio permitirá garantizar la rentabilidad del sistema de calibración. Se pretende obtener una alternativa que, por su bajo costo, sea rentable y accesible para el empresario.

- d) Desarrollar formalismos y algoritmos apropiados que permitan describir y definir los movimientos del brazo manipulador entre los puntos extremos de la trayectoria que recorre. Este es un punto de suma importancia a fin de llevar a cabo la medición y evaluación de la posición del órgano terminal.

### 1.2.3. Hipótesis.

La medición del desplazamiento del OT, de manera externa al propio manipulador, contribuirá en gran medida a mejorar la evaluación del error de posición del punto de operación del brazo manipulador. Todo ello a partir de la realización de algoritmos e implementación física de sistemas que cuantifiquen los errores de posicionamiento del brazo robótico.

## 1.3. Justificación.

Una de las barreras tecnológicas en la industria de la robótica ha sido lograr la reducción del error que se presenta entre la posición real del órgano terminal y la posición deseada programada de un brazo robótico. La mayoría de las aplicaciones industriales requieren de una buena precisión de posición y repetibilidad del brazo manipulador (Conrad *et al.*, 2000).

Después de realizar cierto número de tareas repetitivas, el brazo manipulador presenta un error en el posicionamiento del Órgano Terminal (OT) con respecto a la posición programada deseada, este error es inducido por diversos factores, los cuales serán estudiados más adelante.

La industria busca una respuesta contundente a los requerimientos de precisión, cada vez mayores, que el sector productivo demanda a los fabricantes de máquina herramienta. En la actualidad es muy costoso lograr una alta repetitividad y precisión en el diseño de cualquier manipulador. Es importante primero establecer a que se refiere el término “bueno” o “malo” cuando se habla de precisión y repetitividad.

En gran medida la precisión de un robot industrial, en especial si se trata de un modelo específico, depende de los detalles de su fabricación, y no de su diseño. Por ejemplo, resultaría absurdo diseñar un robot de pintura con pistola de aire para ser preciso dentro de un margen de 0.001 pulgadas cuando el diámetro del punto que se va a pintar es de  $8 \pm 2$  pulgadas.

La alta precisión se logra mediante un conocimiento amplio de los parámetros de la fabricación, es decir, se necesita brindar especial atención a las tolerancias durante el proceso de fabricación, o bien realizar mediciones precisas al manipulador después de su fabricación para asegurar que cumpla con los parámetros especificados en el diseño (Craig, 2006).

Los robots manipuladores requieren de un sistema de calibración el cual permita realizar, con un nivel aceptable de precisión, las tareas que le sean demandadas por el usuario u operador.

#### **1.4. Planteamiento General.**

A fin de lograr los objetivos de este trabajo, que han discutidos con anterioridad, se plantean las siguientes actividades las cuales permitirán alcanzar los resultados esperados de esta investigación:

- Elaborar el Sistema de Proyección.
- Elaborar la Superficie de Calibración.
- Realizar la Adquisición de Datos.
- Realizar el Procesamiento de Imágenes.
- Elaborar un Algoritmo de Posicionamiento.
- Programación de Software.
- Medir la posición del OT.
- Evaluar el error de posicionamiento del OT.

Es necesario contar con un sistema que permita lograr la medición de posicionamiento del OT de manera precisa. Este sistema es parte fundamental del

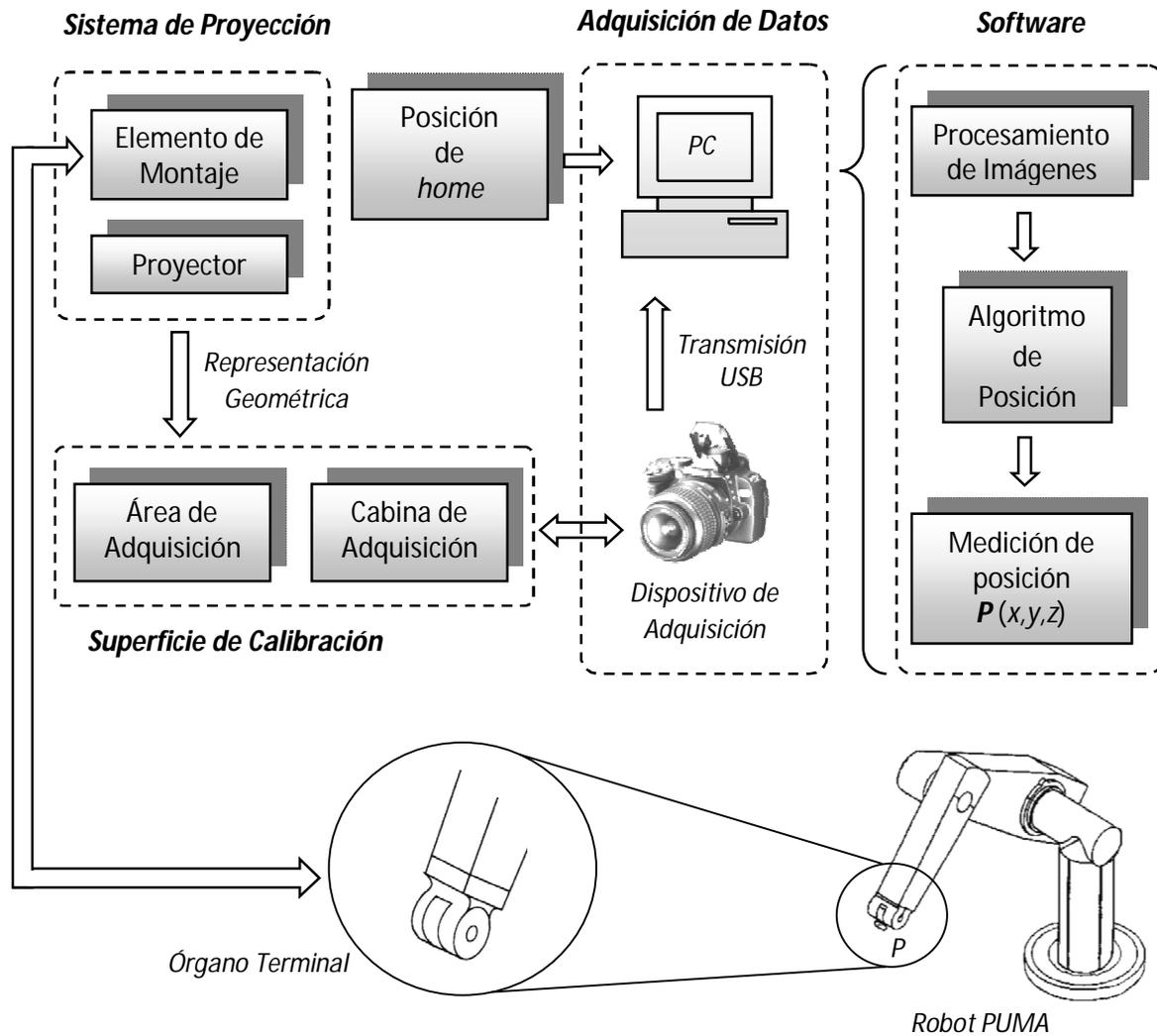
proyecto pues de él depende en gran medida la obtención de buenos o malos resultados. A continuación se enlistan los diferentes módulos que componen al sistema, así como una breve descripción del funcionamiento y de las partes que conforman a cada modulo:

1. **Sistema de Proyección.** Este sistema está conformado por dos elementos principales. El primero es el *Elemento de Montaje*, el cual permite realizar la sujeción de todo el sistema de proyección al OT del manipulador. El segundo es el *Proyector* conformado por rayos laser, los cuales tienen la tarea de proyectar una figura geométrica que mantiene una relación directa con la posición real del OT.
2. **Superficie de Calibración.** La Superficie de Calibración recibe los rayos emitidos por el *Proyector* desde el OT del manipulador. Está diseñada con dos elementos principales: el *Área de Adquisición* y la *Cabina de Adquisición*. La figura que proviene del Sistema de Proyección genera una imagen bidimensional, la cual queda descrita sobre el *Área de Adquisición* de la Superficie de Calibración. Ésta imagen bidimensional es enviada a la PC a través de un dispositivo de adquisición de imágenes, colocado en la *Cabina de Adquisición*.
3. **Adquisición de Datos.** Éste sistema se encarga de tomar la imagen bidimensional descrita en el *Área de Adquisición* de la Superficie de Calibración y enviarla hacia la PC mediante transmisión USB. Está conformado por dos elementos principales. El primero es el *Dispositivo de Adquisición de Imágenes* cuya tarea principal es capturar la imagen y digitalizarla; el segundo es el *Software*, el cual obtiene la imagen desde el Dispositivo de Adquisición por transmisión de datos por USB.
4. **Procesamiento de Imágenes.** La etapa de procesamiento de imágenes la realiza en su totalidad el *Software* programado en éste trabajo de

investigación. En esta etapa la imagen adquirida es mejorada y analizada con el fin de obtener los datos de entrada necesarios para el Algoritmo de Posicionamiento.

5. **Algoritmo de Posicionamiento.** Es el encargado de realizar el cálculo de la posición del punto de operación del órgano terminal utilizando únicamente como datos los parámetros geométricos de la figura bidimensional descrita en el Área de Adquisición de la Superficie de Calibración.
6. **Software.** El software realizado a lo largo del trabajo de investigación interviene en varios aspectos y realiza diversos procesos importantes para la obtención de resultados:
  - a. Realiza parte del proceso de adquisición de imágenes.
  - b. Realiza el procesamiento de imágenes mediante subrutinas programadas.
  - c. Realiza el cálculo de posicionamiento del OT a partir del resultado del procesamiento de imágenes, mediante el algoritmo programado.
  - d. Obtiene el error de posicionamiento del manipulador, a partir del cálculo de la magnitud del desplazamiento del punto de operación del OT, mediante la comparación de imágenes.
7. **Medición de posición del OT.** Obtener ésta medición consiste en adquirir una imagen inicial de entrada al sistema, obtener los datos de entrada para el algoritmo de posicionamiento mediante el procesamiento de imágenes, y realizar el cálculo de la posición real en tres dimensiones del punto de operación del OT.
8. **Evaluación del error de posicionamiento.** Consiste en la comparación de dos medidas de posicionamiento del punto de operación del OT. La primera medida es de la posición inicial del manipulador, llamada posición de “home”. La segunda medida es de la posición del punto de operación después de haber realizado cierto número de tareas programadas.

La Figura 1 muestra un diagrama de bloques de los diferentes módulos que conforman el sistema de calibración, así como un esquema general del flujo de datos e información a través de dichos módulos.



**Figura 1.1. Diagrama a bloques.**

## II. REVISIÓN DE LITERATURA.

### 2.1. Estado del Arte.

La robótica es un campo relativamente nuevo de la tecnología moderna. Para lograr comprender la complejidad de los robots y sus aplicaciones es necesario tener conocimientos de varias ramas de la ciencia, tales como: mecánica, eléctrica, industrial, computación, matemáticas, entre otras.

Pero la idea de concebir la existencia de individuos autónomos artificiales y además tan detallados que aparenten estar vivos, incluso con conciencia y voluntad, no es tan novedosa como podría pensarse. Algunas muestras de esta idea son:

- El mito de Pigmalión, cuya estatua llamada Galatea cobro vida por la gracia de la diosa griega Afrodita.
- Los sirvientes mecánicos hechos de oro creados por Vulcano, el mitológico dios del fuego.
- La leyenda hebrea relacionada al Gólem, una estatua de cerámica animada a través de magia cabalística.

Estos son solo algunos ejemplos que muestran que la idea de crear individuos autónomos no es exclusiva de la era moderna.

No obstante, lo que en algún intervalo de tiempo determinado el hombre ha considerado como “ficción”, poco a poco se ha convertido en realidad, gracias al ingenio y a través de la propia mano del hombre. Como ejemplo se pueden citar las máquinas autómatas surgidas en la Edad Media, estas eran capaces de ejecutar rutinas para impresionar al público con mecanismos hasta entonces desconocidos.

De acuerdo a lo que expone la Real Academia de la Lengua, un Robot es una “Máquina o ingenio electrónico programable, capaz de manipular objetos y realizar operaciones antes reservadas solo a las personas”.

El término **robot** fue empleado por primera vez en 1921 con la obra teatral “Rossum's Universal Robots (R.U.R.)” del autor checo Karel Capek, escrita en 1920. La palabra **robota** proviene del vocablo checo y se refiere a “trabajo forzado”, “servidumbre”, “esclavitud”. Desde entonces este término ha sido aplicado a una gran variedad de dispositivos mecánicos. Prácticamente cualquier dispositivo que es capaz de operar con cierto grado de autonomía en algún momento puede ser llamado robot.

Una definición oficial de lo que es un robot es dada por el *Robot Institute of America* (RIA):

*“A robot is a reprogrammable multifunctional manipulator designed to move material, parts, tools, or specialized devices through variable programmed motions for the performance of a variety of tasks”.*

*“Un robot es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas, o dispositivos especializados mediante movimientos programados variables para la realización de una variedad de tareas”.*

Se puede considerar que el robot surge de la fusión de dos tecnologías:

- Teleoperados. Desarrollada en la segunda guerra mundial para manipular materiales radiactivos
- Control Numérico por Computadora (CNC). Desarrollado en la década de los 70 cuando se comenzaron a usar computadoras en vez de unidades controladoras en los sistemas de CN.

En 1954 el estadounidense George Devol inventó un brazo primitivo que podía ser programado para realizar algunas tareas. Patentó el que se considera el primer robot industrial, un dispositivo que combinaba la articulación de un

teleoperador con el eje servocontrolado de una máquina de control numérico (Ollero, 2001).

En 1969 en la Universidad de Stanford, el estudiante de ingeniería mecánica Victor Scheinman desarrollo el brazo Stanford, un robot creado exclusivamente para llevar a cabo el control por computadora, de 6 grados de libertad con un par prismático y cinco pares rotativos. Más tarde en 1975, desarrolló un manipulador polivalente flexible conocido como Brazo Manipulador Universal Programable, PUMA por sus siglas en inglés. Éste mecanismo era capaz de mover un objeto y colocarlo en un lugar deseado que estuviera a su alcance. A grandes rasgos, el concepto básico de multiarticulación empleado por el PUMA es la base de la mayoría de los robots actuales (Kurfess, 2005).

El término Robótica fue abordado por primera vez en 1942, cuando el escritor de origen Ruso, Isaac Asimov la utilizó en su obra "Runaround", dándole el sentido de disciplina científica encargada de construir y programar robots. Asimov fue un visionario del campo de la Robótica, plantea que las acciones que desarrolla un robot deben ser dirigidas por una serie de reglas morales, llamadas las "Tres leyes de la robótica". En términos simples estas leyes consignan a los robots como elementos que obedecen órdenes humanas, y que interactúan con humanos sin causar daño alguno. Las leyes de Isaac Asimov establecen lo siguiente:

1. Un robot no debe dañar a un ser humano o, por su inacción, dejar que un ser humano sufra daño.
2. Un robot debe obedecer las órdenes que le son dadas por un ser humano, excepto si estas órdenes entran en conflicto con la Primera Ley.
3. Un robot debe proteger su propia existencia, hasta donde esta protección no entre en conflicto con la Primera o la Segunda Ley.

En la década de los 80's ocurrió el gran *boom* en la industria de la robótica, debido principalmente a la gran demanda de procesos automáticos más económicos y flexibles en la industria automotriz y la exploración espacial (Tsai, 1999).

Para la década de los 90's los robots manipuladores ya se habían convertido en herramientas de gran importancia en varios de los procesos industriales de manufactura. En 1997 se estima que más de 700'000 robots eran utilizados en varias ramas de la industria (Maas, 1997).

A partir de ese momento el número de robots instalados por año en las principales regiones del mundo fue creciendo. Una de las principales razones del crecimiento del uso de robots en el ámbito industrial fue y sigue siendo la reducción en costos de adquisición, además el paso del tiempo y el avance científico y tecnológico ha permitido el desarrollo de los manipuladores, haciéndolos rápidos, precisos y flexibles, es decir, más efectivos.

La tendencia principal que impulsa el crecimiento del mercado de los robots es el aumento continuo del costo de la mano de obra humana, en contraste con el abatimiento de los costos para la adquisición de robots manipuladores, que día con día se vuelven más eficaces. Además, a medida de que los robots se vuelvan más *capaces*, podrán hacer tareas que se consideran peligrosas o imposibles de realizar por los trabajadores humanos.

En el año 2000, aproximadamente el 78% de los robots instalados en Estados Unidos fueron robots para soldadura o manejo de materiales (Craig, 2006).

Las aplicaciones que llevan a cabo los robots industriales se vuelven cada vez más sofisticadas. Hoy día existe una amplia gama de robots, los mayormente conocidos y utilizados son los robots industriales para labores de ensamble, soldadura, entre otras tareas. No obstante, también se están creando robots móviles como la mascota AIBO de una reconocida marca japonesa, con apariencia canina que es capaz de "entender" lenguaje y por ende, obedecer a su

amo (Lahoz-Beltrá, 2004). Algunas otras líneas de investigación van más allá, centrandó su atención en el modelo humano, como es el caso del robot antropomorfo ASIMO producto del ingenio japonés (Faust, 2006).

Las aplicaciones que se le dan hoy día a los robots industriales son muy variadas, pero el requerimiento permanece constante y claro, es necesario que los manipuladores cuenten con una buena precisión y repetibilidad al realizar la tarea programada, ya que la insuficiencia de estas dos características en campos como la medicina o la industria química pueden conllevar a fallas en sistemas, errores en la manipulación de materias peligrosas, y provocar accidentes industriales.

### 2.1.1. Transformaciones Lineales Básicas.

Un espacio vectorial es un conjunto de objetos llamados vectores que cumplen o siguen ciertas reglas algebraicas. El espacio tridimensional (3-D) es un caso particular de un espacio vectorial. Se define  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $w$  como elementos del espacio vectorial  $V$ , el cual está definido sobre el campo de los reales. También se define  $\alpha$  y  $\beta$  como 2 elementos que pertenecen a este campo, son 2 números reales. Las reglas son las siguientes:

- i.* La suma de  $v_1$  y  $v_2$ , denotada por  $v_1 + v_2$ , es un elemento de  $V$  y es *conmutativa*:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad (2.1)$$

- ii.*  $V$  contiene un elemento 0, llamado *vector cero* de  $V$ , el cual cuando se suma con otro elemento  $v$  de  $V$ , este no sufre ningún cambio:

$$v + 0 = v \quad (2.2)$$

- iii.* La suma definida en (*i.*) es asociativa, es decir:

$$v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3 \quad (2.3)$$

- iv. Para cualquier elemento  $v$  de  $V$ , existe un elemento correspondiente  $w$ , también elemento de  $V$ , tal que al realizar la suma con  $v$  produce el *vector cero*.

$$v + w = 0 \quad (2.4)$$

- v. El producto  $\alpha v$ , o  $v\alpha$ , es también un elemento de  $V$ , para cualquier  $v$  elemento de  $V$  y  $\alpha$  elemento de los reales. Este producto es asociativo:

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \quad (2.5)$$

- vi. Si  $\alpha$  es la unidad real, entonces  $\alpha v$  es idéntico a  $v$ .

- vii. El producto definido en (v.) es distributivo:

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad (2.6)$$

$$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 \quad (2.7)$$

Una transformación lineal, representada por el operador  $L$ , de un espacio vectorial  $U$  en un espacio vectorial  $V$ , es una regla que asigna para cada vector  $u$  elemento de  $U$  al menos un vector  $v$  elemento de  $V$ , representado como  $v = Lu$ . La transformación lineal  $L$  cumple con 2 propiedades fundamentales:

Homogeneidad: 
$$L(\alpha u) = \alpha v \quad (2.8)$$

Aditividad: 
$$L(u_1 + u_2) = v_1 + v_2 \quad (2.9)$$

Ejemplos particulares de transformaciones lineales en el espacio euclidiano tridimensional son las proyecciones, reflexiones y rotaciones (Angeles, 2007).

## 2.2. Fundamentos de Robótica.

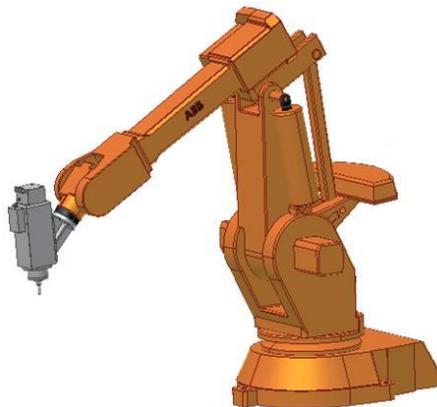
Una de las primeras tareas para comenzar el análisis de un brazo manipulador es realizar su modelado geométrico, con el fin de brindar instrucciones para lograr la correcta manipulación del brazo. Antes es conveniente introducir varios conceptos.

### 2.2.1. Conceptos y terminología.

Un **manipulador** es un sistema mecánico orientado a la manipulación de objetos, esto significa que es capaz de mover alguna cosa o dispositivo con sus propias manos. La palabra proviene del latín *manus*, que significa, mano. En otras palabras es cualquier dispositivo que ayuda al hombre a realizar tareas de manipulación, tales como:

- Montaje de piezas en líneas de producción.
- Manipulación de sustancias químicas tóxicas o peligrosas.
- Cirugías robóticas de mayor precisión.

Durante la segunda guerra mundial, la necesidad de manipular sustancias radioactivas llevó al desarrollo de los primeros manipuladores de seis grados de libertad. En la Figura 2.1. Manipulador tipo PUMA. se muestra un ejemplo de este tipo de manipulador.



**Figura 2.1. Manipulador tipo PUMA.**

### ***Eslabón.***

Se puede definir como la conexión rígida entre dos o más elementos de diferentes pares cinemáticos (Uicker et al., 2003).

Un eslabón es una pieza que es parte de una máquina, es decir, es un componente de un mecanismo, por lo general se parte de la suposición de que un eslabón es completamente rígido. Los eslabones de un mecanismo se deben conectar entre sí de manera que permitan la transmisión del movimiento del eslabón de entrada, también conocido como ***impulsor***, hacia el eslabón de salida, o ***seguidor***.

El objetivo principal de un eslabón es mantener una relación espacial constante entre los elementos de sus pares.

Los eslabones que contienen solo un par de conexiones de elementos se denominan eslabones ***binarios***, los que tienen tres son llamados ***ternarios*** y así sucesivamente.

El ***eslabón fijo*** es un concepto que hace referencia a aquel eslabón que se elige como marco de referencia para todos los demás eslabones, es decir, los movimientos de todos los demás puntos de eslabonamiento se medirán con respecto al eslabón ***marco*** o ***base***, el cual se considera fijo.

### ***Juntas o Pares Cinemáticos.***

A las conexiones entre los eslabones, es decir a las “articulaciones”, se les llama ***pares cinemáticos***. Cada conexión se compone de dos elementos, con cada superficie pareada formando parte de cada uno de los eslabones articulados.

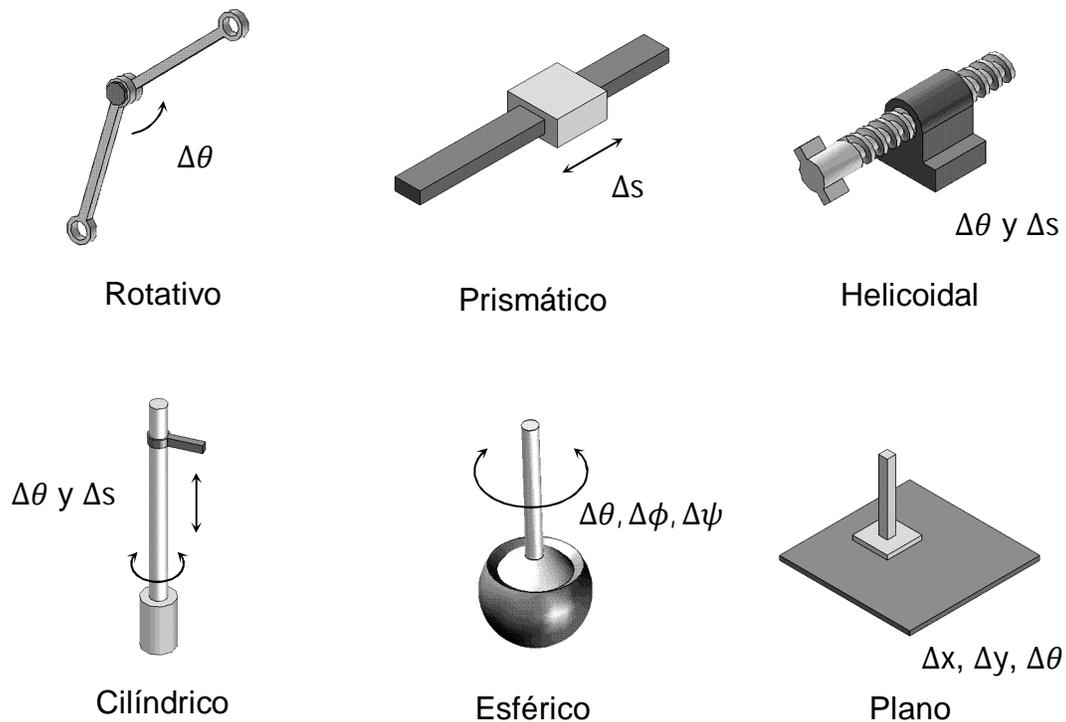
Entonces, un par cinemático es la unión de dos cuerpos rígidos que presentan un movimiento relativo entre ellos.

Los pares cinemáticos pueden dividirse en 2 clasificaciones: superiores e inferiores. En los pares superiores el contacto entre las superficies elementales es en una línea o en un punto; mientras que en los pares inferiores los elementos del par hacen contacto en una superficie.

Ejemplos clásicos de pares superiores son: los dientes de engranes acopados, una rueda sobre un riel, una bola que rueda sobre una superficie plana y una leva que hace contacto con su seguidor de rodillo.

Existen 6 tipos diferentes de pares inferiores, los cuales se muestran en la Figura 2.2. Pares Inferiores. A continuación se enuncia cada uno de ellos.

- **Rotativo o revoluta (R).** Solo permite rotación relativa y, por consiguiente, posee un solo grado de libertad.
- **Prismático (P).** Solo permite movimiento relativo de deslizamiento, además tiene solo un grado de libertad.
- **Helicoidal o de tornillo.** Tiene solo un grado de libertad, ya que los movimientos de deslizamiento y de rotación están relacionados por el ángulo de hélice de la rosca. Nótese que este se convierte en revoluta si el ángulo de hélice se hace cero, y en par prismático si dicho ángulo se hace de  $90^\circ$ .
- **Cilíndrico.** Permite tanto la rotación angular como el movimiento de deslizamiento independiente. Este par tiene dos grados de libertad.
- **Esférico o globular.** Es una articulación de rotula, tiene tres grados de libertad, una rotación en torno a cada uno de los ejes coordenados.
- **Plano.** Tiene tres grados de libertad, y rara vez se encuentra en los mecanismos en su forma no disfrazada.



**Figura 2.2. Pares Inferiores.**

Los pares inferiores más empleados son el par rotativo o revoluta (R), y el par prismático (P).

### ***Cadena Cinemática.***

Cuando varios eslabones están conectados de manera móvil por medio de articulaciones, se dice que estos forman una ***cadena cinemática***. En otras palabras, una cadena cinemática es un conjunto de cuerpos rígidos, también llamados ***eslabones*** (*links*), los cuales están acoplados por medio de ***juntas*** o ***pares cinemáticos***. Si cada eslabón de la cadena se conecta por lo menos con otros dos, ésta forma uno o más circuitos cerrados y, en ese caso, recibe el nombre de ***cadena cinemática cerrada***; de no ser así, la cadena es llamada

**cadena cinemática abierta.** En caso de no realizar ninguna especificación al respecto, se supone que la cadena es cerrada. Si la cadena se compone totalmente de eslabones binarios es *cerrada simple*. Las cadenas *cerradas compuestas* incluyen otros eslabones binarios, como consecuencia forman más de un solo circuito cerrado (Uicker *et al.*, 2003).

El término de *cadena cinemática* se usa para especificar una disposición particular de eslabones y juntas cuando no se ha especificado cual eslabón será utilizado como marco de referencia. Una vez que ha sido estipulado el eslabón de referencia, la cadena cinemática se convierte en **mecanismo** (Uicker *et al.*, 2003).

### ***Espacio de Trabajo.***

Por lo general, un robot manipulador tiende a tener una geometría fija, y limitada. El espacio de trabajo de un manipulador es el volumen total barrido que describe el órgano terminal mientras el manipulador ejecuta todos los movimientos posibles (Uicker *et al.*, 2003). En otras palabras, es el conjunto de puntos en los cuales puede situarse el órgano terminal del manipulador.

El espacio de trabajo tiene un volumen igual al volumen encerrado por la superficie determinada por los puntos a los cuales accede el manipulador con su estructura totalmente extendida.

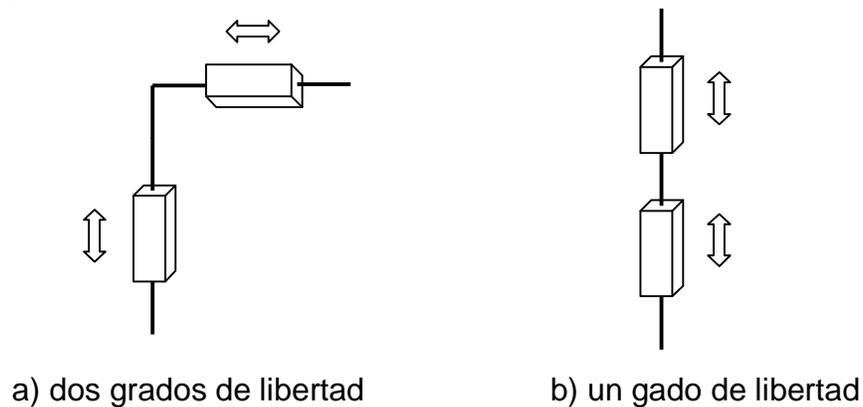
Por otra parte, los puntos que constituyen el espacio de trabajo no tienen la misma accesibilidad. Los puntos de accesibilidad mínima son aquellos que forman las superficies que delimitan el espacio de trabajo del manipulador, ya que a estos puntos solo son alcanzables con una única orientación.

La existencia o inexistencia de una solución cinemática define el espacio de trabajo de un manipulador dado. La falta de una solución significa que el manipulador no puede obtener la posición y orientación deseadas, ya que se encuentran fuera del espacio de trabajo del manipulador (Craig, 2006).

### **Grados de libertad.**

El número de grados de libertad que posee un manipulador es el número de variables de posición independientes que tendrían que especificarse para poder localizar todas las piezas del mecanismo. En caso de los robots industriales comunes, los manipuladores son generalmente una cadena cinemática abierta y como la posición de cada par o junta se define generalmente con una variable, comúnmente el número de pares es igual al número de grados de libertad (Craig, 2006), sin embargo pueden existir casos en los que esta condición no se cumpla.

Por ejemplo en la Figura 2.3 se presentan dos configuraciones diferentes, sin embargo ambas cuentan con dos eslabones y dos juntas. La Figura 2.3a posee un par de eslabones y un par de juntas de tipo prismático, y al mismo tiempo tiene dos grados de libertad. Por el contrario es posible observar que la configuración de la Figura 2.3b posee un solo grado de libertad, a pesar de contar con el mismo número de eslabones y de juntas. Entonces se establece que el número de grados de libertad es independiente del número de eslabones y/o del número de juntas.



**Figura 2.3. Estructuras con dos eslabones.**

En conclusión los grados de libertad son el número de parámetros independientes que fijan la situación del órgano terminal, y en general el número de grados de libertad es menor o igual que en número de eslabones de la cadena cinemática.

### ***Punto de Operación.***

El punto de operación del Órgano Terminal es la ubicación específica en el espacio del origen del último marco de referencia establecido en el robot. Se denota mediante la letra ***P*** y es utilizado para definir la posición de la mano o brazo de tarea.

### **2.2.2. Cinetostática del manipulador PUMA.**

El robot PUMA es un manipulador de seis grados de libertad con todas sus juntas de tipo rotativas, es decir, es un mecanismo 6R, diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especiales a través de diferentes movimientos programados.

### **2.2.3. Propiedades importantes del manipulador PUMA.**

Existen ciertas propiedades físicas propias del manipulador tipo PUMA que juegan un papel muy importante para el desarrollo y la realización de los objetivos planteados en este trabajo de investigación. A continuación se estudian con mayor detenimiento cada una de ellas.

#### **2.2.3.1. Configuración Serial.**

Cuando se habla de un robot de ***tipo serial*** se hace referencia a que el manipulador está conformado por varios eslabones unidos entre sí de forma serial por diferentes tipos de juntas.

Entonces es posible asumir que un extremo del manipulador se encuentra sujeto al suelo y el otro extremo se encuentra libre para moverse a través del espacio de trabajo del manipulador. El final del último eslabón de la cadena cinemática es el punto de operación del órgano terminal.

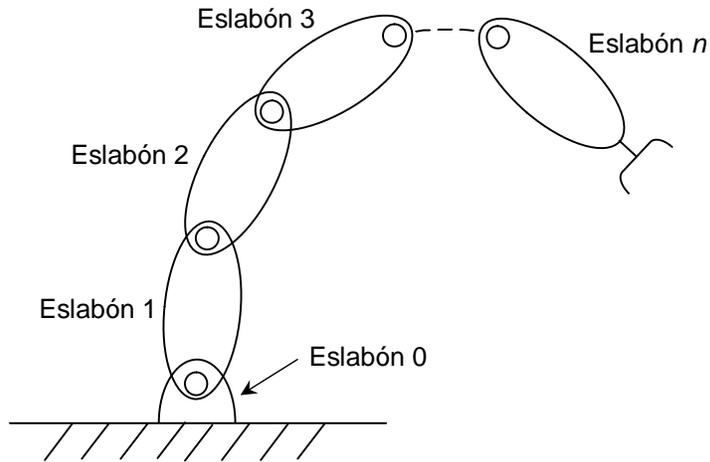
Es decir que el manipulador puede ser considerado como una cadena cinemática simple y abierta, donde el primer eslabón se conoce como *base del manipulador* y al último eslabón se le denomina *Órgano Terminal (OT)*.

Un robot serial está compuesto de una secuencia de  $n + 1$  eslabones y  $n$  juntas. Se asume que los eslabones son completamente rígidos. Las juntas pueden ser de tipo rotativo (revoluta) o bien prismáticas. También se asume que las juntas son ideales, es decir, no existe elasticidad ni errores por el acoplamiento de los engranes (Khalil y Dombre, 2004).

Una junta compleja puede ser representada por la combinación equivalente de una junta tipo revoluta y una tipo prismática, considerando los eslabones que unen sin masa y de longitud igual a cero. Los eslabones son numerados desde el eslabón cero que constituye la base del robot y hasta el eslabón  $n$  el cual representa el eslabón final. Esta configuración se muestra en la Figura 2.4.

La junta  $j$  conecta el eslabon  $j$  con el eslabon  $j - 1$  y la variable se denota por  $q_j$ . Con el fin de definir la relación existente entre la localización de los eslabones, se asigna el marco  $R_j$  asignado a cada eslabon  $j$  como sigue:

- El eje  $z_j$  coincide con el eje de la junta  $j$ .
- El eje  $x_j$  esta alineado con la normal común entre  $z_j$  y  $z_{j+1}$ . Si  $z_j$  y  $z_{j+1}$  son paralelos o colineales, la elección de  $x_j$  no es única. La intersección de  $x_j$  y  $z_j$  define el origen  $O_j$ . En caso de que los ejes de las juntas se intercepten, el origen se encuentra en el punto de intersección de los ejes de las juntas.
- El eje  $y_j$  se asigna por la regla de la mano derecha para completar el sistema de coordenadas  $(x_j, y_j, z_j)$ .



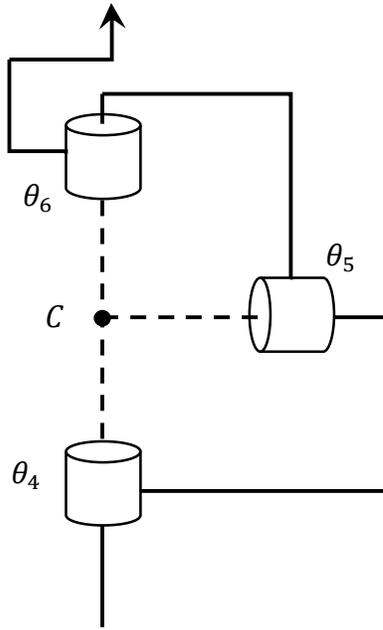
**Figura 2.4. Estructura de un robot serial.**

Una característica importante acerca de los manipuladores de tipo serial es que el número de articulaciones que posee es igual al número de grados de libertad que tiene.

### **2.2.3.2. Manipuladores Desacoplados.**

La mayoría de los manipuladores están diseñados de manera que las últimas 3 articulaciones se encargan de la orientación del órgano terminal, y además los ejes de dichas articulaciones tienen ejes que se intersecan en un punto de la muñeca esférica. Las primeras articulaciones se encargan entonces de posicionar dicho punto de intersección.

El tipo de robots denominados *desacoplados* poseen la característica de que los tres últimos eslabones del robot forman una subcadena cinemática conocida como **muñeca esférica**. Los ejes de las juntas que unen a estos últimos tres eslabones de la estructura se intersecan en un solo punto, y de hecho estos tres ejes son mutuamente ortogonales. El mecanismo de muñeca que se forma se muestra en la Figura 2.5.



**Figura 2.5. Diagrama esquemático de la muñeca esférica.**

Después de establecer que los ejes de las últimas tres juntas de un manipulador desacoplado son ortogonales, y además se intersectan en un punto en específico, conocido como punto  $C$ , es necesario hacer especial énfasis en la importancia que tiene esta disposición de los ejes del manipulador.

Bajo estas condiciones de diseño se establece que todos los puntos en los que puede ser ubicado el punto de operación del órgano terminal, utilizando solamente los tres últimos ejes o juntas, se desplazan en esferas concéntricas con respecto al punto  $C$ . Por esta razón la subcadena comprendida por los últimos tres eslabones es conocida como **muñeca esférica**, donde el punto  $C$  es el centro de esta esfera.

Esta característica de los manipuladores desacoplados implica que la orientación del OT del manipulador únicamente depende de los últimos tres eslabones, con esto se establece que la posición del OT del manipulador es independiente de la orientación del mismo.

Se puede decir que este tipo de robots están compuestos de una estructura de posicionamiento, seguida de una estructura de orientación, independiente una de la otra.

El movimiento de un brazo robótico de este tipo, es decir, que posee una muñeca esférica con un órgano terminal, es frecuente tratarlo en dos pasos. En primer lugar se mueve el brazo para posicionar el extremo del último eslabón, y después es orientada la muñeca esférica con el fin de que el órgano terminal tenga la orientación requerida.

La estructura encargada de llevar a cabo el posicionamiento del centro de la muñeca esférica está diseñada para ser cinemáticamente simple, con torsiones de en los eslabones de  $0^\circ$  ó  $90^\circ$ , y con muchas de sus longitudes y desplazamientos iguales a cero.

Es costumbre clasificar los manipuladores de estructura cinemática simple de acuerdo al diseño de la estructura de posicionamiento.

#### **2.2.4. La notación Denavit-Hartenberg.**

Como se estudio anteriormente, una cadena cinemática cerrada simple puede ser cerrada o abierta. Si es cerrada y cada eslabón está acoplado al menos a otros dos eslabones, la cadena se llama entonces eslabonamiento. Es abierta si contiene exactamente dos eslabones, un final que está acoplado únicamente a otro eslabón. El primer eslabón se le nombra base del manipulador y al último eslabón se le conoce como órgano terminal (*end-effector*). La cadena cinemática asociada con los manipuladores de tipo serie está compuesta de eslabones binarios (Angeles, 2007).

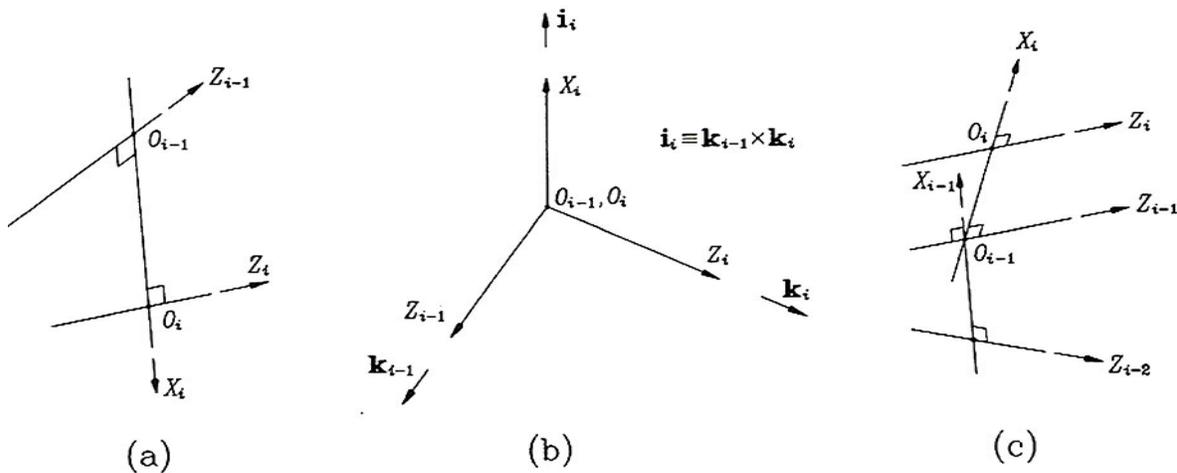
La nomenclatura de Denavit–Hartenberg (D-H) se emplea a fin de definir de manera única la arquitectura de la cadena cinemática, es decir, definir la ubicación relativa y orientación de los ejes de los pares vecinos.

Para este fin, los eslabones se enumeran con  $0, 1, \dots, n$ , el  $i$  -ésimo par se define como el que acopla el eslabón  $(i-1)$  con el eslabón  $i$ . De aquí, se asume que el manipulador está compuesto de  $n + 1$  eslabones y  $n$  pares; éstos últimos pueden ser  $R$  o  $P$ , dónde el eslabón  $0$  es el que está fijo a la base, mientras que el eslabón  $n$  es el órgano terminal. Luego, un marco de coordenadas  $\mathfrak{T}_i$  está definido con el origen  $O_i$  y los ejes  $X_i, Y_i, Z_i$ . Éste marco está ligado al eslabón  $(i-1)$  —¡no al eslabón  $i$  -ésimo !— para  $i=1, \dots, n+1$ . Para los primeros  $n$  marcos, se deben seguir las siguientes reglas:

1.  $Z_i$  es el eje del  $i$  -ésimo par, note que existen dos posibilidades de definir la dirección positiva de éste eje, ya que cada eje del par es únicamente una línea, no un segmento dirigido. Además, el eje  $Z_i$  de un par prismático puede ser ubicado arbitrariamente, ya que únicamente su dirección está definida por el eje de este par.
2.  $X_i$  se define como la perpendicular común a  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ , dirigido del anterior al último como se muestra en la Figura 2.6a. Nótese que si éstos dos ejes se intersecan, la dirección positiva de  $X_i$  es indefinida y puede ser libremente asignada. En lo sucesivo, tal caso se regirá por la regla de la mano derecha. Esto significa que si los vectores unitarios  $\mathbf{i}_i, \mathbf{k}_{i-1}$  y  $\mathbf{k}_i$  están ligados a los ejes  $X_i, Z_{i-1}$  y  $Z_i$  respectivamente como se indica en la Figura 2.6b, entonces  $\mathbf{i}_i$  se define como  $\mathbf{k}_{i-1} \times \mathbf{k}_i$ . Además, si  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  son paralelos, la ubicación de  $X_i$  es indefinida. A fin de definirla de manera única, se estipula que  $X_i$  pase a través del origen del marco  $(i-1)$  como se muestre en la Figura 2.6c.
3. La distancia entre  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$  se define como  $a_i$  y es no-negativa.
4. La coordenada  $Z_i$  de la intersección  $O'_i$  de  $Z_i$  con  $X_{i+1}$  se denota por  $b_i$ . Dado que ésta cantidad es una coordenada, puede ser positiva o negativa. Su

valor absoluto es la distancia entre  $X_i$  y  $X_{i+1}$ , también nombrada como la *compensación* (offset) entre perpendiculares comunes sucesivas.

5. El ángulo entre  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$  está definido como  $\alpha_i$  y se mide sobre la dirección positiva de  $X_{i+1}$ . Éste término se conoce como el *ángulo de torsión* (twist angle) entre ejes de pares sucesivos.
6. El ángulo entre  $X_i$  y  $X_{i+1}$  se define como  $\theta_i$  y se mide sobre la dirección positiva de  $Z_i$ .



**Figura 2.6. Parametros D-H.**

El marco de coordenadas  $(n-1)$  está ligado al último extremo del eslabón  $n$ -ésimo. Dado que el manipulado no tiene un eslabón  $(n+1)$ , las reglas anteriores no sirven para la definición del último marco. El analista, de éste modo, tiene la libertad de definir éste marco como mejor se ajuste a la operación a realizar. Nótese que los  $(n+1)$  marcos se definen como  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_{n+1}$ , considerando a los eslabones numerados de 0 a  $n$ . En resumen, un manipulador de  $n$ -ejes está compuesto de  $n + 1$  eslabones y  $n + 1$  marcos de coordenadas (Angeles, 2007).

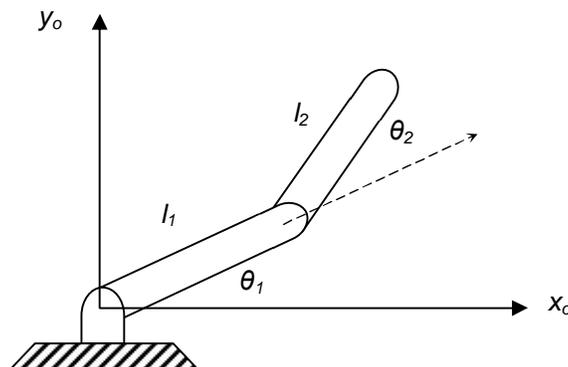
### 2.2.5. Cinemática directa e inversa.

La cinemática es la ciencia que trata el movimiento sin considerar las fuerzas que lo ocasionan. El estudio de la cinemática de los manipuladores se refiere a todas las propiedades del movimiento, las geométricas y las basadas en el tiempo. (Craig, 2006).

El problema de la **cinemática directa** consiste primordialmente en determinar la posición y orientación del órgano terminal, a partir de las variables de las juntas del robot. Las variables de las juntas son, en el caso de juntas rotacionales o revolutas, los ángulos formados entre los eslabones; y en el caso de las juntas prismáticas, la extensión del eslabón.

El primer problema es describir tanto la posición de la herramienta como la localización de los puntos de partida y llegada del brazo manipulador con respecto a un sistema común de coordenadas.

En la Figura 2.7 se muestran 2 cuerpos rígidos unidos por un par rotativo. En el problema de cinemática directa, los datos de entrada son los ángulos de las juntas ( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ) y las longitudes de los eslabones ( $l_1$  y  $l_2$ ), dados estos parámetros se busca obtener la posición y orientación del órgano terminal.

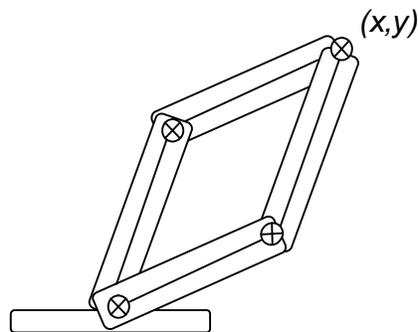


**Figura 2.7. Ejemplo de robot con 2 eslabones.**

Típicamente, el sistema de calibración deberá ser capaz de medir la posición del manipulador de alguna forma. Se puede pensar en sensores internos ubicados en las juntas, los cuales pueden medir directamente los ángulos que forman estas respecto a un marco de referencia. También serán necesarias las expresiones de la posición inicial y la posición final en términos de estos ángulos. Se acostumbra establecer un sistema de coordenadas, llamado marco de referencia, todos los objetos, incluyendo al propio manipulador, están referidos a este marco. Con el cálculo de la cinemática directa se determina la posición y orientación del órgano terminal o herramienta de trabajo en términos de las variables de las juntas.

El problema de la **cinemática inversa** no es tan simple como el de la cinemática directa, debido a que las ecuaciones cinemáticas son no lineales, su solución no siempre es sencilla (Craig, 2006). El problema de la cinemática inversa puede establecerse como sigue: dadas la posición y orientación deseadas para el órgano terminal del robot, determinar el conjunto de variables de las juntas que permitan alcanzar la posición y orientación deseadas.

En este caso dados los ángulos de las juntas es posible determinar las coordenadas del órgano terminal  $x$  e  $y$ . Con el fin de lograr que el brazo manipulador alcance la posición final deseada es necesario el cálculo de la cinemática inversa, en otras palabras, se requiere conocer las variables de las juntas, en este caso los ángulos, en términos de las coordenadas  $x$  e  $y$  de la posición final.

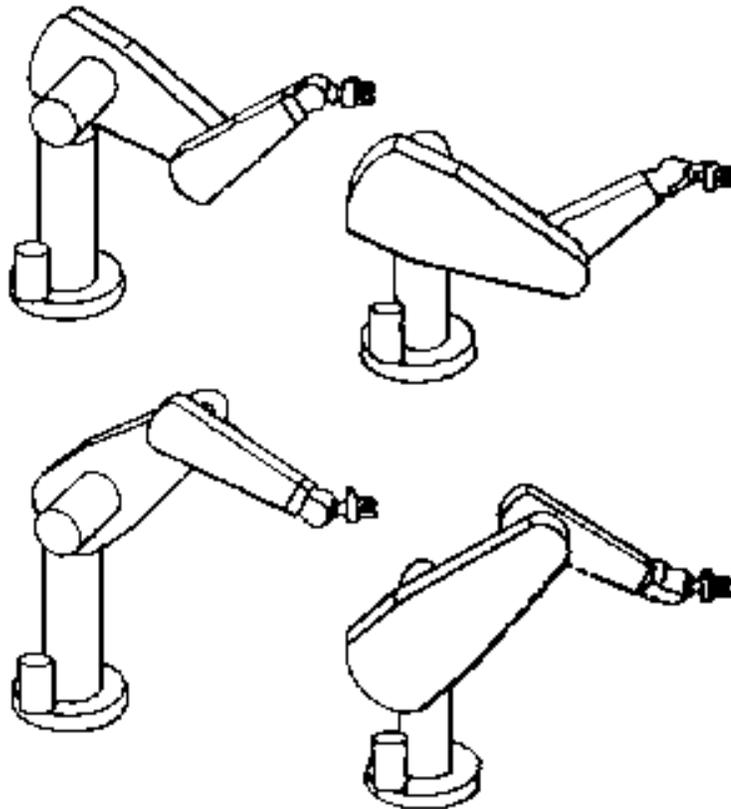


**Figura 2.8. Mecanismo plano.**

Debido a que las ecuaciones que describen la cinemática directa son no lineales, puede que la solución no sea única. Por ejemplo, en la Figura 2.7, se muestra un mecanismo plano de dos eslabones el cual puede no tener solución si las coordenadas dadas  $(x,y)$  están fuera del alcance del manipulador, es decir, de su espacio de trabajo.

Sin embargo, si las coordenadas dadas por  $(x,y)$  se encuentran dentro del alcance del brazo robótico, entonces puede haber 2 soluciones como puede observarse en la Figura 2.8, o puede haber exactamente una solución si el manipulador se encuentra totalmente extendido para alcanzar el punto final deseado.

En un manipulador tipo PUMA de 6 grados de libertad existen cuatro diferentes posiciones para las cuales el órgano terminal mantiene su orientación constante. Este caso se ilustra en la Figura 2.9.



**Figura 2.9. Configuraciones de un robot tipo PUMA.**

### 2.2.6. Cinemática Inversa del robot PUMA.

El robot PUMA 560 posee 6 grados de libertad y todas sus juntas son pares rotativos, posee siete eslabones numerados desde el 0 hasta el 6, y le son asignados 7 marcos de referencia, estos últimos numerados del 1 al 7. Este robot es un manipulador desacoplado, es decir, los ejes de las juntas 4, 5 y 6 se intersecan todos en un punto en común, y este punto de intersección coincide con el origen de los marcos de referencia {4},{5} y {6}. Además, los ejes de estas tres últimas juntas son mutuamente ortogonales

En la Figura 2.10 se muestran los marcos de referencia en la posición donde todos los ángulos de las juntas son iguales a cero.

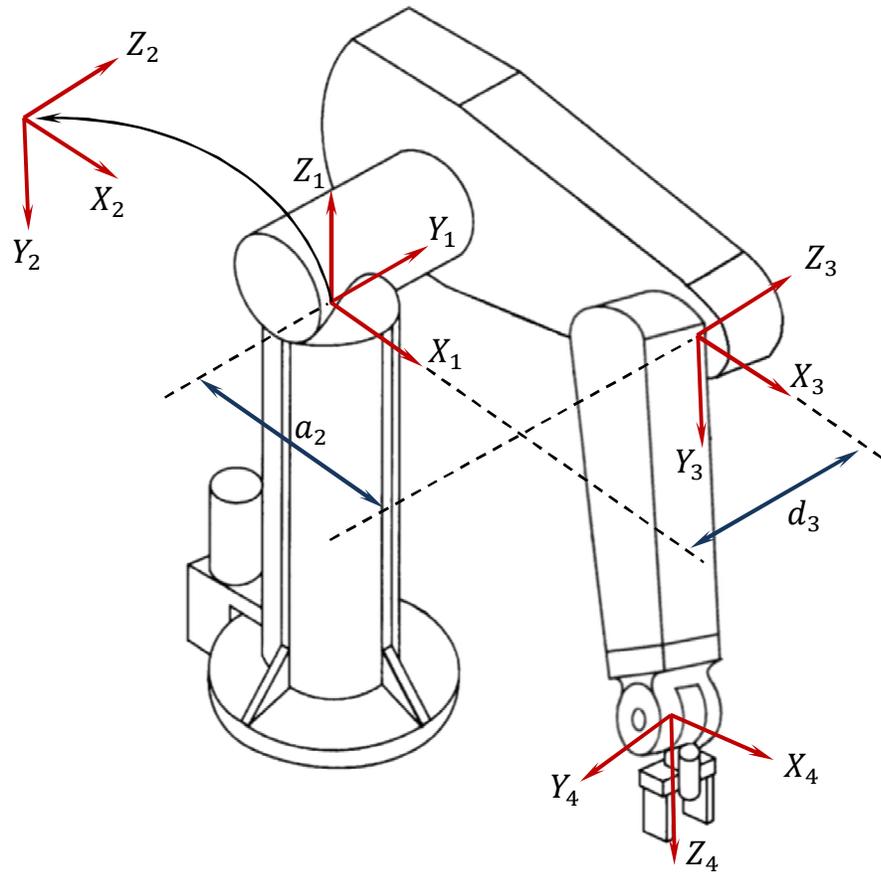


Figura 2.10. Asignación de marcos de referencia.

Se observa que el marco de referencia {0} coincide con el marco de referencia {1} cuando  $\theta_1$  es cero. Los parámetros de las juntas que corresponden a esta disposición de marcos de referencia se muestran en la Tabla 1. Parámetros de las juntas del PUMA

**Tabla 1. Parámetros de las juntas del PUMA**

$i$	$a_i - 1$	$b_i$	$\alpha_i - 1$	$\theta_i$
1	0	0	0°	$\theta_1$
2	0	0	-90°	$\theta_2$
3	$a_2$	$b_3$	0°	$\theta_3$
4	$a_3$	$b_4$	-90°	$\theta_4$
5	0	0	90°	$\theta_5$
6	0	0	-90°	$\theta_6$

Las matrices de transformación entre marcos de referencia son:

$${}^0_1A = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$${}^1_2A = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$${}^2_3A = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$${}^3_4A = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$${}^4_5A = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$${}^5_6A = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Para el problema de cinemática inversa se desea encontrar todos los ángulos de las juntas rotativas del manipulador  $\theta_i$ , cuando se da  ${}^0_6A$  en forma de valores numéricos. Esto es:

$${}^0_6A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1A(\theta_1) \quad {}^1_2A(\theta_2) \quad {}^2_3A(\theta_3) \quad {}^3_4A(\theta_4) \quad {}^4_5A(\theta_5) \quad {}^5_6A(\theta_6) \quad (2.16)$$

$$[{}^0_1A(\theta_1)]^{-1} {}^0_6A = {}^1_2A(\theta_2) \quad {}^2_3A(\theta_3) \quad {}^3_4A(\theta_4) \quad {}^4_5A(\theta_5) \quad {}^5_6A(\theta_6) \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6A \quad (2.18)$$

La matriz  ${}^1_6A$  esta dada por la multiplicación de las matrices de rotación que van desde el órgano terminal, es decir, desde el último marco de referencia, hasta el marco de referencia 1.

$${}^1_6A = {}^1_2A \quad {}^2_3A \quad {}^3_4A \quad {}^4_5A \quad {}^5_6A = \begin{bmatrix} {}^1r_{11} & {}^1r_{12} & {}^1r_{13} & {}^1p_x \\ {}^1r_{21} & {}^1r_{22} & {}^1r_{23} & {}^1p_y \\ {}^1r_{31} & {}^1r_{32} & {}^1r_{33} & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

En donde:

$$\begin{aligned}
 {}^1r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5s_6 \\
 {}^1r_{21} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\
 {}^1r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6 \\
 {}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + s_{23}s_5s_6 \\
 {}^1r_{22} &= s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\
 {}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + c_{23}s_5s_6 \\
 {}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 \\
 {}^1r_{23} &= s_4s_5 \\
 {}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\
 {}^1p_x &= a_2c_2 + a_3c_{23} - b_4s_{23} \\
 {}^1p_y &= b_3 \\
 {}^1p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - b_4c_{23}
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Igualando los elementos (2,4) de ambos lados de la ecuación (2.18) se tiene que:

$$s_1p_x + c_1p_y = b_3 \tag{2.21}$$

Realizando las siguientes sustituciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}
 p_x &= \rho \cos \phi \\
 p_y &= \rho \sin \phi
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

En donde:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \phi &= \text{Atan2}(p_y, p_x)\end{aligned}\tag{2.23}$$

Sustituyendo la ecuación (2.22) en (2.21) se obtiene:

$$c_1 s_\phi - s_1 c_\phi = \frac{b_3}{\rho}\tag{2.24}$$

Aplicando la identidad trigonométrica de diferencia de ángulos:

$$\sin(\phi - \theta_1) = \frac{b_3}{\rho}\tag{2.25}$$

Por lo tanto:

$$\cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{b_3}{\rho}\right)^2}\tag{2.26}$$

Y también:

$$\phi - \theta_1 = \text{Atan2}\left(\frac{b_3}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{b_3}{\rho}\right)^2}\right)\tag{2.27}$$

Al despejarla ecuación (2.27), se obtiene la solución para  $\theta_1$  y puede escribirse como:

$$\theta_1 = \text{Atan2}(p_y, p_x) - \text{Atan2}\left(b_3, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - b_3^2}\right)\tag{2.28}$$

Con esta última fórmula (2.28) se observa que se han encontrado dos posibles soluciones para el ángulo  $\theta_1$ . Ahora que el valor de este ángulo es conocido, también lo es el lado izquierdo de la ecuación (2.18).

Igualando los elementos (1,4) de ambos lados de la ecuación (2.18), así como los elementos (3,4), se obtiene:

$$\begin{aligned} c_1 p_x + s_1 p_y &= a_2 c_2 + a_3 c_{23} - b_4 s_{23} \\ -p_z &= a_3 s_{23} + a_2 s_2 + b_4 c_{23} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (2.29) y (2.21) y sumando las ecuaciones resultantes se tiene:

$$a_3 c_3 - b_4 s_3 = K \quad (2.30)$$

Donde:

$$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - b_3^2 - b_4^2}{2a_2} \quad (2.31)$$

Con esto se ha quitado la dependencia de  $\theta_1$  de la ecuación (2.30). Y esta ecuación ha adquirido la forma de la ecuación (2.21), por lo que es posible resolverse por el mismo tipo de sustitución trigonométrica y así generar una solución para  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = \text{Atan2}(a_3, d_4) - \text{Atan2}\left(K, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2}\right) \quad (2.32)$$

El signo positivo o negativo de ésta ecuación conduce a dos distintas soluciones para  $\theta_3$ .

Reescribiendo la ecuación (2.16) de manera que el lado izquierdo está en función de las variables conocidas y de  $\theta_2$ :

$$[{}^0_3A(\theta_2)]^{-1} {}^0_6A = {}^3_4A(\theta_4) {}^4_5A(\theta_5) {}^5_6A(\theta_6) \quad (2.33)$$

O bien:

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & -s_{23} & -a_2 c_3 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 \\ -s_1 & c_1 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3_6A \quad (2.34)$$

Donde  ${}^3_6A$  esta dada por:

$${}^3_6A = {}^3_4A {}^4_5A {}^5_6A = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & a_3 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Igualando los elementos de (1,4) y (2,4) de los dos lados de la ecuación (2.34) se obtiene:

$$\begin{aligned} c_1 c_{23} p_x + s_1 c_{23} p_y - s_{23} p_z - a_2 c_3 &= a_3 \\ -c_1 s_{23} p_x - s_1 s_{23} p_y - c_{23} p_z + a_2 s_3 &= d_4 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Estas ecuaciones se resuelven simultáneamente para obtener:

$$\begin{aligned} s_{23} &= \frac{(-a_3 - a_2 c_3) p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \\ c_{23} &= \frac{(a_2 s_3 - d_4) p_z - (a_3 + a_2 c_3)(c_1 p_x + s_1 p_y)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Los denominadores son iguales y positivos, por lo que resolvemos para la suma de  $\theta_2$  y  $\theta_3$  como:

$$\begin{aligned} \theta_{23} &= A \tan 2 \left[ \frac{(-a_3 - a_2 c_3) p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(d_4 - a_2 s_3)}{(a_2 s_3 - d_4) p_z - (a_3 + a_2 c_3)(c_1 p_x + s_1 p_y)} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) calcula cuatro valores de  $\theta_{23}$ , de acuerdo con las cuatro posibles combinaciones de las soluciones para  $\theta_1$  y  $\theta_3$ ; por lo cual las cuatro posibles soluciones para  $\theta_2$  se pueden calcular como:

$$\theta_2 = \theta_{23} - \theta_3 \quad (2.39)$$

En donde la solución apropiada para  $\theta_3$  se obtiene al formar la diferencia.

Ahora ya es conocido todo el lado izquierdo de la ecuación (2.34). Igualando los elementos (1,3) y (3,3) de ambos lados de (2.34) se tiene:

$$\begin{aligned} r_{13}c_1c_{23} + r_{23}s_1c_{23} - r_{33}s_{23} &= -c_4s_5 \\ -r_{13}s_1 + r_{23}c_1 &= s_4s_5 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si  $s_5 \neq 0$ , es posible resolver para  $\theta_4$  de la siguiente manera:

$$\theta_4 = \text{Atan2}(-r_{13}s_1 + r_{23}c_1, -r_{13}c_1c_{23} - r_{23}s_1c_{23} + r_{33}s_{23}) \quad (2.41)$$

Cuando  $\theta_5 = 0$ , el manipulador se encuentra en una configuración singular en la que los ejes de las juntas 4 y 6 se alinean y producen el mismo movimiento del último eslabón del robot. En este caso todo lo que puede resolverse es la suma o diferencia de  $\theta_4$  y  $\theta_6$ .

Esta situación se detecta comprobando si ambos argumentos de la función *Atan2* en la ecuación (2.41) están cerca de cero. De ser así,  $\theta_4$  se elige arbitrariamente y cuando se lleve a cabo posteriormente el cálculo de  $\theta_6$ , éste se hará acorde con ello.

Ahora es posible reescribir la ecuación (2.18) de manera que todo el lado izquierdo sea una función solamente de variables conocidas y  $\theta_4$ :

$$[{}^0_4A(\theta_4)]^{-1} {}^0_6A = {}^4_5A(\theta_5) {}^5_6A(\theta_6) \quad (2.42)$$

Donde  $[{}^0_4A(\theta_4)]^{-1}$  esta dada por:

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + b_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1c_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + b_3c_4 + a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Y  ${}^4_6A$  esta dada por:

$${}^4_6A = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Igualando los elementos (1,3) y (3,3) de ambos lados de la ecuación (2.42) obtenemos:

$$\begin{aligned} r_{13}(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + r_{23}(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - r_{33}(s_{23}c_4) &= -s_5 \\ r_{13}(-c_1s_{23}) + r_{23}(-s_1s_{23}) + r_{33}(-c_{23}) &= c_5 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por lo tanto es posible resolver para  $\theta_5$  de la siguiente manera:

$$\theta_5 = \text{Atan2}(s_5, c_5) \quad (2.46)$$

Donde  $s_5$  y  $c_5$  se obtienen mediante la ecuación (2.45).

Ahora, aplicando el mismo método, se calcula  ${}^0_5A^{-1}$  y se escribe la ecuación (2.16) como:

$${}^0_5A^{-1} {}^0_6A = {}^5_6A(\theta_6) \quad (2.47)$$

Igualando los elementos (3,1) y (1,1) de ambos lados de la ecuación (2.42) se obtiene:

$$\theta_6 = \text{Atan2}(s_6, c_6) \quad (2.48)$$

Donde:

$$s_6 = -r_{11}(c_1c_{23}s_4 - s_1c_4) - r_{21}(s_1c_{23}s_4 + c_1c_4) + r_{31}(s_{23}s_4)$$

$$c_6 = r_{11}[(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4)c_5 - c_1s_{23}s_5] + r_{21}[(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4)c_5 - s_1s_{23}]$$

$$- r_{31}(s_{23}c_4c_5 + c_{23}s_5)$$

Puesto que las ecuaciones (2.28) y (2.32) presentan signos negativo y positivo, se presentan cuatro diferentes soluciones. Además existen 4 soluciones que se obtienen “volteando” la muñeca del manipulador. Para cada una de las cuatro soluciones calculadas antes, obtenemos la solución inversa mediante:

$$\theta_4' = \theta_4 + 180^\circ$$

$$\theta_5' = -\theta_5 \quad (2.49)$$

$$\theta_6' = \theta_6 + 180^\circ$$

De las ocho soluciones calculadas, algunas deberán ser descartadas por las limitaciones físicas del manipulador (Craig, 2006).

## **2.3. Calibración.**

Calibración es un término utilizado para describir el proceso de identificación de los parámetros geométricos reales en la estructura cinemática de un robot industrial, es decir, la posición relativa y la orientación de los eslabones y las juntas en el robot. Según Motta (2005) la calibración es un término que se aplica a los diversos procesos utilizados para determinar los valores actuales que describen las dimensiones geométricas y las características mecánicas de un robot o brazo manipulador.

Un robot calibrado tiene una mayor precisión absoluta de posición que uno que no está calibrado, *i.e.*, la posición real del órgano terminal del robot corresponde mejor a la posición calculada a partir del modelo matemático del robot.

Calibración es el proceso mediante el que se establece la relación entre la variable medida y la señal de salida. La calibración de robots se puede definir como una técnica dirigida a la creación del modelo del robot y la medida e identificación de parámetros del mismo. Para llevar a cabo la calibración para uso industrial son necesarias herramientas para medir con precisión y agilidad la posición absoluta del robot. La calibración debe poder realizarse de manera sencilla y además no debe precisar una recalibración frecuente.

### **2.3.1. Parámetros de Calibración.**

Los parámetros de identificación relacionados a la calibración de robots manipuladores son: exactitud, repetibilidad y resolución. La precisión de movimientos que pueda realizar un robot industrial depende de estos tres parámetros. Cada uno de ellos depende a su vez de los componentes usados en su construcción (encoders, motores, enlaces), del propio proceso de ensamble del robot, y de las posibilidades o especificaciones del controlador (Conrad *et al.*, 2000).

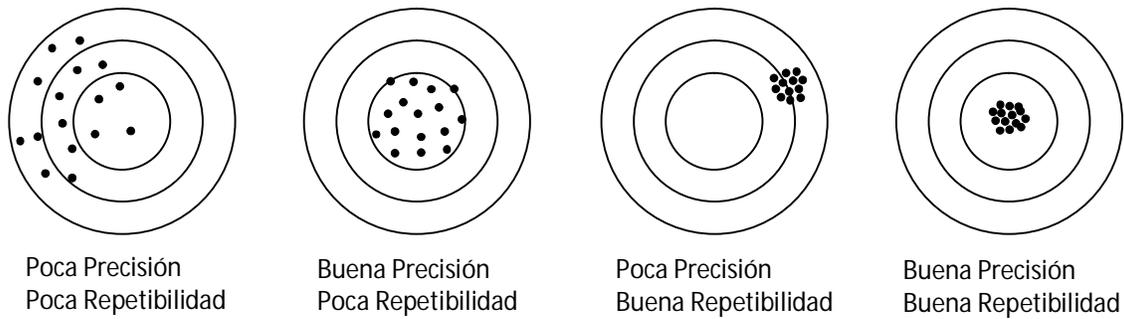
La **precisión** se refiere a la dispersión del conjunto de valores obtenidos de mediciones repetidas de una magnitud. Cuanto menor es la dispersión mayor la precisión. Una medida común de la variabilidad es la desviación estándar de las mediciones y la precisión se puede estimar como una función de ella.

La **exactitud** es la capacidad de un robot para situar el extremo de su muñeca en un punto señalado dentro del volumen de trabajo. Exactitud es la habilidad del robot para realizar un movimiento preciso al punto deseado en el espacio tridimensional (Conrad *et al.*, 2000). Es decir, posicionar el órgano terminal en un punto señalado dentro de su volumen de trabajo. Es una medición de que tan cerca puede llegar el manipulador a un punto dado dentro de su área de trabajo. Mide la distancia entre la posición especificada, y la posición real del órgano terminal del robot.

Un robot presenta una mayor exactitud cuando su brazo opera cerca de la base. A medida que el brazo se aleja de la base, la exactitud se irá haciendo menor. Esto se debe a que las inexactitudes mecánicas se incrementan al ser extendido el brazo. Otro factor que afecta a la exactitud es el peso de la carga; las cargas más pesadas reducen la exactitud (al incrementar las inexactitudes mecánicas). El peso de la carga también afecta la velocidad de los movimientos del brazo y la resistencia mecánica.

La **resolución** es la capacidad del control del robot de dividir en incrementos muy pequeños el volumen de trabajo. Es decir, la resolución es el incremento más pequeño de movimiento que puede ejecutar físicamente un robot (Shiakolas *et al.*, 2002). Depende directamente del control del sistema y de las inexactitudes mecánicas del manipulador.

La **repetibilidad** se refiere a la capacidad del robot de regresar al punto programado las veces que sean necesarias. Esta magnitud establece el grado de exactitud en la repetición de los movimientos de un manipulador al realizar una tarea programada. La repetibilidad es una medición de la habilidad del robot para regresar a la posición deseada (Conrad *et al.*, 2000).



**Figura 2.11. Precisión y repetibilidad.**

En la Figura 2.11 se muestran gráficamente los conceptos de precisión y repetibilidad. Cada uno de estos parámetros dependen de varios factores diferentes, como la fricción, temperatura, carga, y tolerancias de manufactura (Conrad et al., 2000). En la actualidad la mayoría de los manipuladores utilizados en la industria poseen una buena repetibilidad, pero no son muy precisos en la realización de las tareas que les han sido programadas. El principal método utilizado para medir errores en el posicionamiento en la actualidad es la colocación de encoders de posición en las juntas.

### **2.3.2. Sistemas de Calibración Actuales.**

En la actualidad existen varias y diversas opciones para lograr la medición de la posición en robots industriales, por ejemplo, implementando sistemas basados en la utilización de dispositivos específicos tales como: sensores de distancia, rayos láser interferométricos, teodolitos, calibradores, etc. También existen algoritmos matemáticos de optimización y métodos estadístico-numéricos, ejemplos de estos son el *método Steepest-Gradient* y el *método de Monte Carlo* respectivamente. Además se han desarrollado diversas técnicas como la *Triangulación Láser*, *Identificación Global*, o la *Precisión Absoluta*. Sin embargo, la mayoría de las técnicas de calibración cinemática requieren dispositivos demasiado complicados o caros, (Ikits, 2003).

Además existen sistemas de cámaras los cuales pueden ser colocados en los robots para poder adquirir la posición de un objeto de referencia. En estos sistemas la cámara es montada en el órgano terminal y es usada para obtener la posición relativa entre el objetivo y el brazo manipulador, y así obtener la ley de control (Kim, 2001). Los sistemas de calibración, así como las mediciones en 3D, son realizados por muchas compañías.

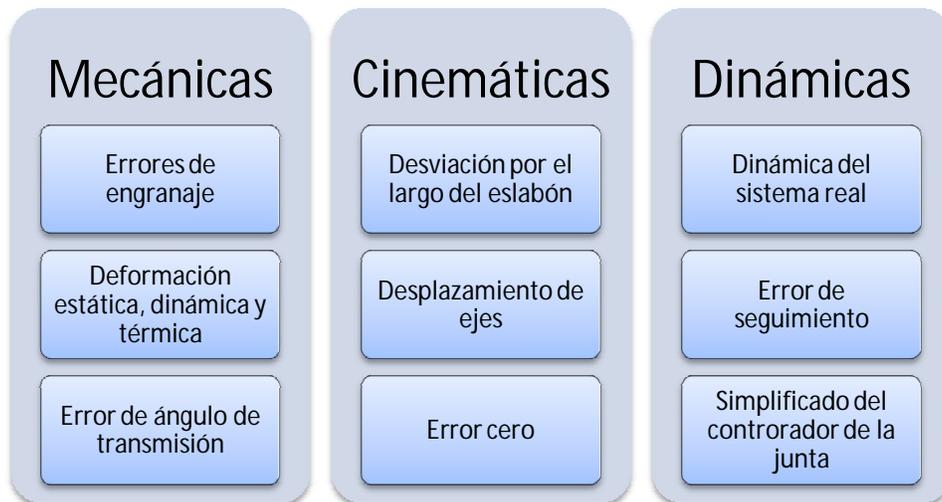
En las aplicaciones de *Seam Laser Tracking* en robots utilizados para soldadura, y en la mayoría de las estaciones de medición de robots basadas en estéreo visión, la calibración del robot es el paso más difícil en llevar a cabo durante todo el proceso del sistema de calibración. La localización exacta del marco base debe de ser conocida, sin importar cual método se use. Para obtener la posición exacta de este marco de coordenadas en el año 2006 se desarrolló un algoritmo iterativo, el cual es un método donde se emplea cinemática diferencial para lograr obtener los parámetros de los eslabones (Ye *et al.*, 2006).

Uno de los métodos empleados para la calibración de un robot seria de tipo industrial se denomina *Identificación Global*. En este método se programa el manipulador para que se sitúe en un conjunto de posiciones bien distribuidas dentro de su espacio de trabajo. Un sistema externo de medida, sin contacto, registra todas las coordenadas cartesianas de esas posiciones, mediante la ubicación del extremo del robot, es decir, el punto de operación del órgano terminal. Estas mediciones las compara con los valores teóricos de coordenadas que ofrece el controlador del robot para esas mismas posiciones. Las diferencias entre las posiciones teóricas y las posiciones que fueron medidas las utiliza un algoritmo de identificación, obteniendo así un modelo de la cinemática del robot más aproximado a la cinemática real de este. Utilizando este modelo identificado es posible eliminar las fuentes de error del modelo teórico del robot que influyen en la poca precisión al llevar a cabo el posicionamiento de la herramienta final. En esta fase de identificación se pueden incluir parámetros relativos a flexibilidad, geometría y *offsets* de encoders en los accionamientos.

### 2.3.3. Factores de Error de Calibración.

Si los errores dinámicos del manipulador, como la desviación de trayectoria, son medidos con los sensores internos del robot, no todos los parámetros relevantes pueden ser registrados. Los sensores internos del robot normalmente miden el ángulo de posición de la junta, consecuentemente los errores en el engranado no pueden ser medidos por los sensores internos del robot. Los sistemas tradicionales de medida, hablando de encoders o reglas específicamente, tienen limitaciones intrínsecas debido a que el punto de captación de la posición está lejos de la punta del órgano terminal, y por lo tanto lejos también de la propia herramienta. La medida obtenida por estos métodos tradicionales queda entonces desvirtuada por la falta de perpendicularidad entre los ejes, las deformaciones debidas a esfuerzos actuantes y las deformaciones térmicas. Los encoders no son capaces de detectar los errores de posicionamiento en direcciones perpendiculares a los propios ejes cuando se mide a lo largo de este. Estos errores pueden deberse a la falta de rectitud en la dirección de los ejes. Los encoders tampoco detectan errores angulares que se producen en cada uno de los ejes en forma particular. Las causas más importantes que originan desviación en la trayectoria en robots industriales son listadas en la Tabla 2 (Alban, 2000).

**Tabla 2. Causas de desviación en la trayectoria de robots industriales.**



## 2.4. Fundamentación matemática.

En esta sección se presentan los aspectos teóricos matemáticos más importantes utilizados en la realización de este trabajo de investigación. La compilación de los diversos temas que se presentan a continuación permite una comprensión más clara de la metodología utilizada, además brinda sustento a las pruebas y resultados obtenidos.

### 2.4.1. Secciones cónicas.

La importancia de las cónicas es de gran relevancia para el estudio realizado en esta investigación, en esta sección se describe a detalle los aspectos teóricos fundamentales necesarios para realizar un análisis eficiente de este tipo de figuras bidimensionales.

Antes de presentar la definición de una sección cónica es necesario establecer algunos conceptos básicos para comprender de manera conjunta el concepto de sección cónica y su representación en un plano.

Un **cono** es un sólido de revolución, generado al realizar el giro de un triángulo rectángulo alrededor de cualquiera de sus dos catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina **base** del cono y al punto donde confluyen las generatrices se llama **vértice**.

La **superficie cónica** es toda superficie reglada la cual es conformada por un conjunto de rectas que tienen un punto en común e intersecan a una circunferencia no coplanaria.

La clasificación de los conos es:

- cono recto, si el vértice equidista de la base circular
- cono oblicuo, si el vértice no equidista de su base
- cono elíptico, si la base es una elipse. Pueden ser rectos u oblicuos.

La **generatriz** de un cono es cada uno de los segmentos cuyos extremos son el vértice y un punto de la circunferencia de la base.

La **altura** de un cono es la distancia del vértice al plano de la base. En los conos rectos será la distancia del vértice al centro de la circunferencia de la base.

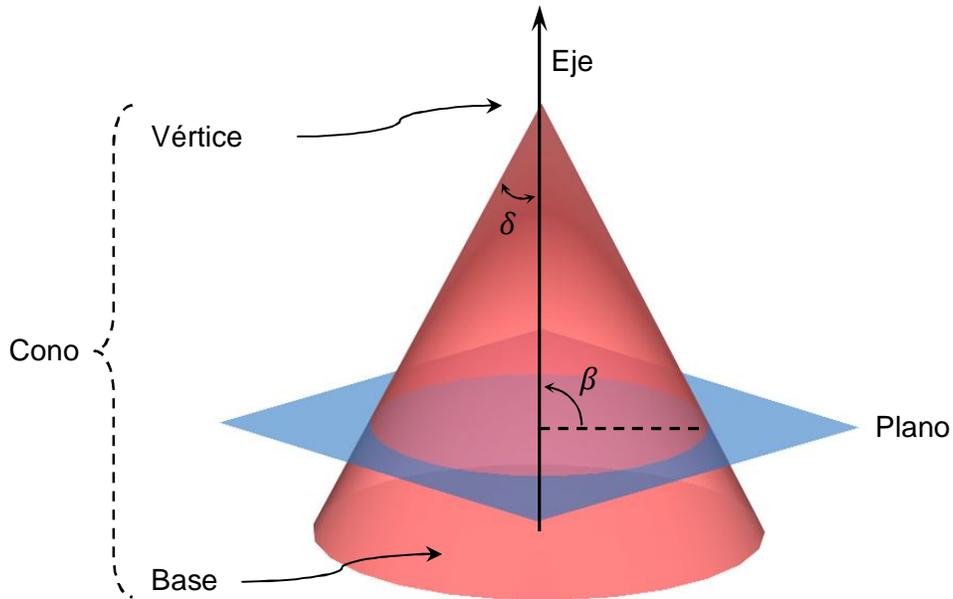
Se llama **cónica** al conjunto de puntos que forman la intersección de un plano con un cono de revolución. Al realizar la intersección de un plano con una superficie cónica, se obtienen curvas que definen distintas figuras geométricas, estas curvas generadas se denominan **secciones cónicas**.

Si el plano pasa por el vértice la intersección podrá ser: una recta, un par de rectas cruzadas o un punto (el vértice). Dependiendo del ángulo de inclinación y la posición relativa entre el plano y la superficie cónica, estas secciones pueden ser diferentes figuras. En función de la relación existente entre el ángulo de conicidad, ( $\delta$ ) y la inclinación del plano respecto del eje del cono ( $\beta$ ), pueden obtenerse diferentes secciones cónicas. Si el plano pasa por el vértice del cono, se puede comprobar que:

- Cuando  $\beta > \delta$  la intersección es un único punto (el vértice).
- Cuando  $\beta = \delta$  la intersección es una recta generatriz del cono (el plano será tangente al cono).
- Cuando  $\beta < \delta$  la intersección vendrá dada por dos rectas que se cortan en el vértice. El ángulo formado por las rectas irá aumentando a medida que  $\beta$  disminuye, hasta alcanzar el máximo ( $\delta$ ) cuando el plano contenga al eje del cono ( $\beta = 0$ ).

Entonces, una sección cónica es la curva intersección que se genera entre un cono con un plano que no pasa por su vértice. En otras palabras, es un conjunto de puntos que forman la intersección de un plano con un cono de revolución.

En la Figura 2.12 es mostrada la intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice, y son indicados el ángulo de conicidad ( $\delta$ ) y el ángulo de la inclinación del plano respecto al cono ( $\beta$ ).



**Figura 2.12. Intersección de un cono recto y un plano.**

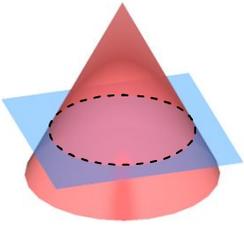
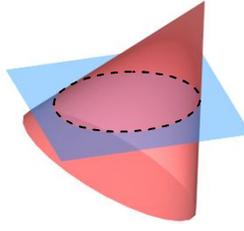
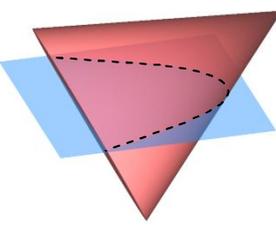
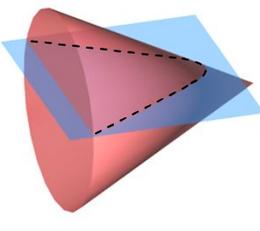
En la Tabla 3 se muestran las diferentes secciones cónicas que pueden ser obtenidas a partir de la intersección del cono con el plano.

Si el plano corta todas las generatrices del cono, la sección cónica generada es una **elipse**. Se considera el caso particular de, en este caso la sección generada es una **circunferencia**, y esta puede ser considerada como un caso particular de la elipse.

Si el plano es paralelo a una sola generatriz del cono, la sección generada es una **parábola**.

Si el plano es paralelo a dos generatrices, la sección generada es una **hipérbola**.

**Tabla 3. Secciones cónicas.**

$\beta = 90^\circ$ Circunferencia	$\beta > \delta$ Elipse	$\beta = \delta$ Parábola	$\beta < \delta$ Hipérbola
			

### 2.4.2. Ecuación general de segundo grado.

La cónica es un lugar geométrico de los puntos del plano que satisfacen una ecuación general completa de segundo grado.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.50)$$

Donde los coeficientes  $A, B, C, D, E, F$  son números reales que determinan el tipo de curva correspondiente. En caso de existir, la ecuación verifica una línea recta, una circunferencia, una elipse, una parábola o bien una hipérbola. En otros casos, la curva puede presentarse como una recta, un par de rectas, un solo punto o inclusive el conjunto vacío.

La ecuación (2.50) puede expresarse de forma matricial como:

$$[1 \ x \ y] \begin{bmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & B/2 \\ E/2 & B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Las figuras que representan a las ecuaciones cuadráticas pueden ser, como ya se ha visto, elipses, hipérbolas y parábolas, pero además pueden ser también pares de rectas tanto secantes como paralelas. Las paralelas pueden ser a su vez distintas o coincidentes. También puede darse el caso de que la ecuación

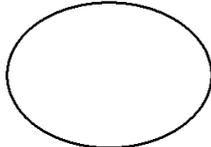
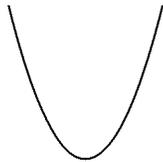
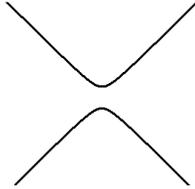
de segundo grado sea verificada solamente por un único punto, o bien, por ninguno.

La elipse, la parábola y la hipérbola, además de secciones cónicas, reciben el nombre general de **curvas de segundo grado** debido a que cada una de ellas está representada por una ecuación de segundo grado.

Los coeficientes de cada uno de los términos de la ecuación de segundo grado (2.50) son los que definen la forma, tipo y parámetros de la curva correspondiente que esta ecuación representa. El término  $Bxy$  aparece solamente cuando la curva tiene los ejes inclinados con respecto a los ejes cartesianos.

A partir de (2.50) es posible saber que sección cónica es la que esta describe, solamente recurriendo al término  $B^2 - 4AC$  el cual es llamado **discriminante** de la ecuación. El valor del discriminante presenta diferentes casos. Por ejemplo, si el valor del discriminante de la ecuación es negativo, la sección cónica corresponde a una elipse; si el valor es cero, la sección es una parábola; y por último, si el valor es positivo, la curva corresponde a una hipérbola. La Tabla 4 ilustra estos diferentes casos.

**Tabla 4. Evaluación del discriminante.**

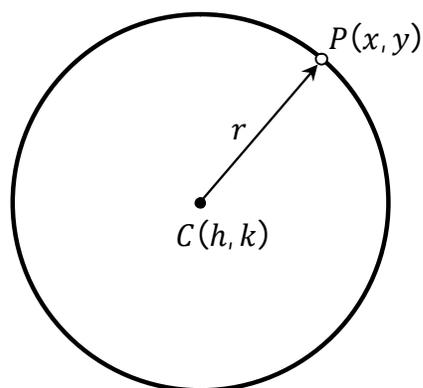
$B^2 - 4AC < 0$	Elipse	
$B^2 - 4AC = 0$	Parábola	
$B^2 - 4AC > 0$	Hipérbola	

Una cónica se tendrá determinada en definitiva si se conocen cinco elementos de esta, a partir de los cuales siempre es posible elegir un sistema de homología que aplicado a una circunferencia, permite trazarla. Para lograr esto solamente será necesario conocer de la cónica una combinación cualquiera de cinco puntos y/o tangentes (Gomis, 1996).

### 2.4.3. Circunferencia.

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya distancia a un punto, denominado *centro*, es constante. A la distancia desde cualquiera de los puntos al centro de la circunferencia se le conoce como *radio*.

Es común confundir los conceptos de círculo y circunferencia. El círculo es el lugar geométrico descrito por los puntos que están contenidos dentro de una circunferencia determinada. Es decir, la circunferencia es el perímetro del círculo que describe y del cual contiene su superficie, por este motivo se considera que la circunferencia solo posee longitud. Los datos necesarios para representar una circunferencia son su plano, centro y radio. En la Figura 2.13 se presenta una circunferencia con sus datos principales.



**Figura 2.13. Circunferencia.**

La circunferencia es un caso particular de la elipse, bajo este contexto es posible definirla como una elipse sin excentricidad. Desde el punto de vista del estudio de las cónicas, la circunferencia es la sección perpendicular al eje de rotación de una superficie cónica, o bien cilíndrica. Otra forma de concebirla en geometría es como un polígono con un número de lados infinitos, y cuya apotema coincide con su radio.

Si una circunferencia conserva una posición cualquiera en el espacio y es proyectada sobre un plano determinado, la proyección obtenida sobre este es, en general, una elipse. Entonces resulta que la elipse es la imagen afín de la circunferencia, así que las propiedades de la circunferencia que sean invariantes en la proyección pueden convertirse en propiedades de la elipse.

Entre todos los pares de diámetros ortogonales de la circunferencia hay uno al que le corresponde un par de diámetros también ortogonales de la elipse, es decir, entre todos los pares de diámetros conjugados de la elipse hay uno, y solo uno, que es al mismo tiempo ortogonal. Este par de diámetros son los **ejes principales** de la elipse. Los elementos principales de la circunferencia son:

- El **centro** es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia y se denota como  $C(h, k)$ .
- El **radio** es la distancia desde el centro a un punto de la circunferencia y se denota por la letra  $r$ .
- El **diámetro** es el mayor segmento que une dos puntos de la circunferencia y, lógicamente, pasa por el centro.

La circunferencia, cuyo centro es el punto  $C(h, k)$  y cuyo radio es una constante denotada por  $r$ , se encuentra constituida por todos los puntos que verifican la ecuación (2.52).

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (2.52)$$

Esta es la ecuación *ordinaria* de la circunferencia. Se designa como ecuación ordinaria de una curva a aquella ecuación que permita obtener de una manera rápida y sencilla sus características principales. Así, a partir de la (2.52) es posible obtener por simple inspección el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia.

Al desarrollar la ecuación se obtiene la *forma general* de la ecuación de una circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.53)$$

Donde:

$$D = -2h, \quad E = -2k, \quad F = h^2 + k^2 - r^2 \quad (2.54)$$

A partir de la ecuación general de la circunferencia es posible obtener las coordenadas del centro y el radio mediante (2.55).

$$h = -\frac{D}{2} \quad k = -\frac{E}{2} \quad (2.55)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \sqrt{h^2 + k^2 - F} \quad (2.56)$$

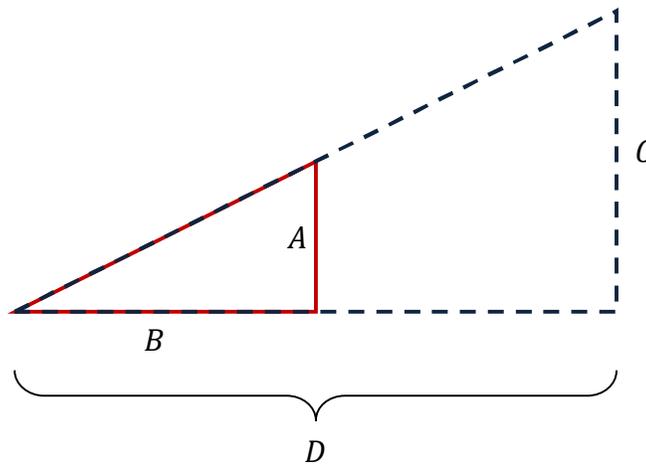
La longitud  $l$  de una circunferencia puede ser calculada conociendo su radio, mediante la ecuación (2.57).

$$l = 2\pi r \quad (2.57)$$

#### 2.4.4. Teorema de Tales.

Este teorema establece la relación que existe entre dos triángulos semejantes. Dos triángulos son semejantes si tienen la misma *forma*. Para el caso de un triángulo, la forma solo depende del valor de sus ángulos. Además estos triángulos cumplen con que las razones de los *lados correspondientes* son congruentes.

El primer **Teorema de Tales** establece que si a un triángulo cualquiera le es trazada una recta paralela a cualquiera de sus lados, el resultado son dos triángulos *semejantes*. Si los ángulos de dos triángulos son iguales, y sus lados son proporcionales, entonces dichos triángulos son *semejantes*. La Figura 2.14 muestra dos triángulos semejantes y la interpretación del Teorema de Tales.



**Figura 2.14. Teorema de Tales.**

El Teorema de Tales se establece con la siguiente ecuación (2.58).

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad (2.58)$$

#### 2.4.5. Transformación de coordenadas.

La determinación de las propiedades de diversas figuras geométricas es objeto principal de la geometría analítica. Una transformación es el proceso que consiste en cambiar una relación, expresión o figura en otra. Es posible transformar, por ejemplo, una ecuación algebraica en otra ecuación cada una de cuyas raíces sea el triple de la raíz correspondiente de la ecuación dada; o bien es posible transformar una expresión trigonométrica en otra utilizando relaciones trigonométricas fundamentales.

Una **transformación** es una operación por la cual una relación, expresión o figura se cambia en otra siguiendo una ley dada.

En el campo del estudio de la robótica es indispensable llevar a cabo la descripción certera y fiel de las relaciones geométricas entre todos los cuerpos que se encuentran dentro y fuera del espacio de trabajo del robot. Estas relaciones son establecidas mediante *marcos de coordenadas*, los cuales son asignados a cada cuerpo rígido que se encuentra en el ambiente del robot, incluyendo sus propios eslabones. Los orígenes de cada uno de estos marcos son posicionados en puntos específicos con orientaciones definidas.

Por ejemplo, en el caso del robot PUMA, los diferentes marcos de coordenadas son asignados a cada uno de los eslabones que lo componen, y que se encuentran distribuidos de una manera serial. El origen de cada marco se encuentra exactamente en el punto donde los ejes de dos juntas se unen para enlazar el eslabón actual con sus dos eslabones vecinos.

#### Origen común.

A continuación se estudia la transformación entre dos marcos de coordenadas con origen común. Se definen dos marcos de coordenadas como  $\mathcal{A} = \{X, Y, Z\}$  y  $\mathcal{B} = \{X, Y, Z\}$ . También se define la matriz de rotación  $\mathcal{Q}$  como la matriz que lleva del marco de coordenadas  $\mathcal{A}$  al marco de coordenadas  $\mathcal{B}$ .

Se requiere establecer la relación entre las representaciones de un vector de posición, definido como  $P$ , en los dos marcos de coordenadas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Para esto, el vector de posición se denota de dos diferentes maneras, una con respecto a cada marco de coordenadas. Estas dos representaciones se definen como  $[\mathbb{p}]_{\mathcal{A}}$  y  $[\mathbb{p}]_{\mathcal{B}}$  respectivamente.

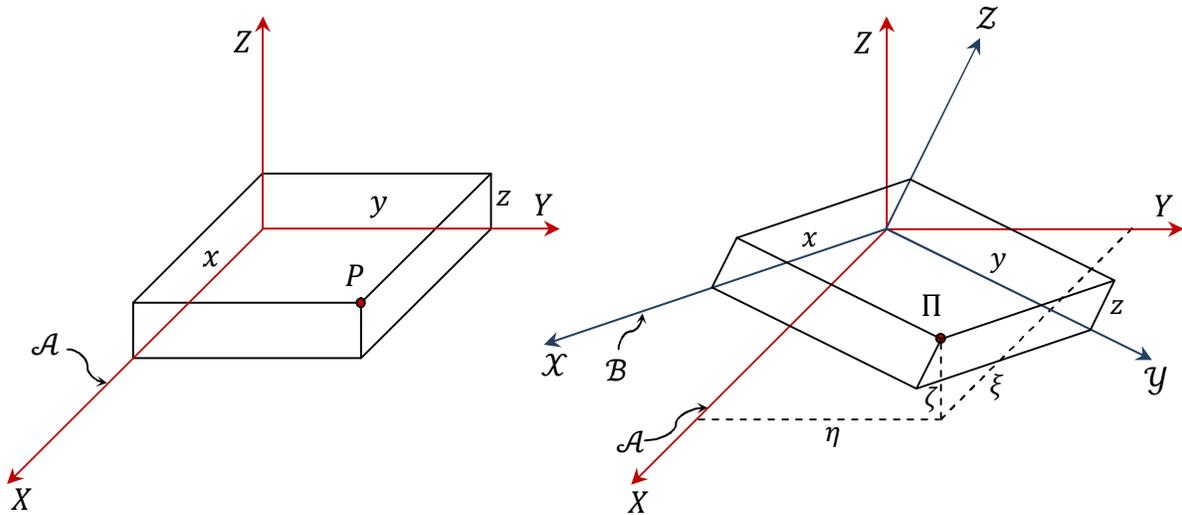
Los ejes coordenados que componen al marco  $\mathcal{A}$  son  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . El vector tiene componentes rectangulares sobre estos tres ejes coordenados, las cuales son  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. Definiendo el vector que va del origen del marco  $\mathcal{A}$  a un punto determinado dentro del mismo marco, esto es el punto  $P$ , se obtiene (2.59). Este vector se observa en la Figura 2.15.

$$[\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Se desea entonces encontrar el vector  $[\mathbb{p}]_{\mathcal{B}}$  en términos de  $[\mathbb{p}]_{\mathcal{A}}$  y de la matriz de rotación  $\mathbb{Q}$ , tomando en cuenta que esta última puede ser definida en cualquiera de los dos marcos. El punto  $P$  se encuentra inicialmente en una posición determinada en el marco de coordenadas  $\mathcal{A}$ , y esta posición está definida por  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Este marco inicial de coordenadas se muestra en la Figura 2.15.

Al realizar la rotación del marco  $\mathcal{A}$  con respecto a su origen, el punto  $P$  no cambia su posición respecto a este marco, pero se genera una nueva definición de la posición del punto  $P$  en el espacio, puesto que la rotación genera un nuevo marco de coordenadas. Al marco que sufrió una rotación se denota como  $\mathcal{B}$  y tiene como ejes coordenados a  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  y  $\mathcal{Z}$ . La rotación se muestra en la Figura 2.15.

Es definido un vector de posición  $\boldsymbol{\pi}$ , este va desde el origen del marco de coordenadas que ha sido rotado, es decir el marco  $\mathcal{B}$ , hacia el punto en el espacio que define al vector  $[\mathbb{p}]_{\mathcal{A}}$ . Es decir, es el vector que está definido en el marco  $\mathcal{B}$  y que representa la misma posición en el espacio que el punto inicial  $P$  en el marco  $\mathcal{A}$ . Esta representación se muestra en (2.60).



a) Coordenadas del punto  $P$  en el marco  $\mathcal{A}$ .      b) Orientación del marco  $\mathcal{A}$  respecto a  $\mathcal{B}$ .

**Figura 2.15. Transformación de coordenadas.**

$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [p]_{\mathcal{A}} \quad (2.60)$$

A su vez este último vector puede ser definido desde el marco anterior  $\mathcal{A}$  como en (2.61).

$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

La representación del vector de posición  $\boldsymbol{\pi}$  en cualquier punto dentro de los marcos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , denotados como  $[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{A}}$  y  $[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}}$  respectivamente se encuentra denotada por (2.62).

$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{A}} = [Q]_{\mathcal{A}} [\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} \quad (2.62)$$

Además, la representación de la matriz de rotación que lleva de un marco a otro es la misma para cualquiera de estos dos marcos, como es muestra en (2.63).

$$[Q]_{\mathcal{A}} = [Q]_{\mathcal{B}} \quad (2.63)$$

La relación inversa de (2.62) está dada por (2.64).

$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} = [Q^T][\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{A}} \quad (2.64)$$

### Desplazamiento del origen.

Para evaluar la transformación de un marco de coordenadas a otro cuando los orígenes ya no son coincidentes, es necesario definir un vector de posición  $\mathbb{b}$ , el cual va desde el origen del marco  $\mathcal{A}$  hasta el origen del marco  $\mathcal{B}$ .

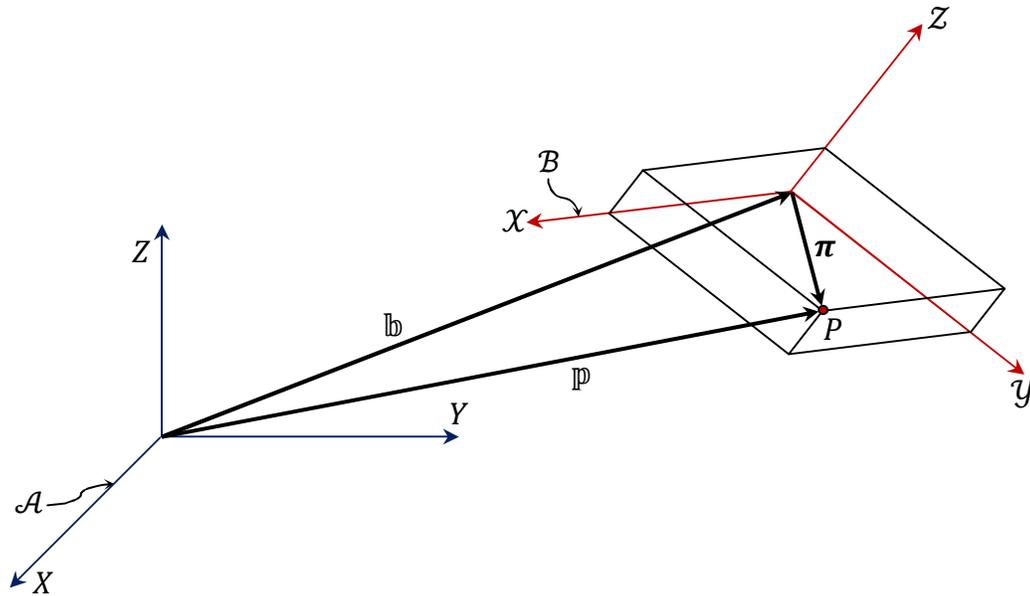
Las representaciones del vector de posición  $\mathbb{p}$  de un punto  $P$  del espacio euclidiano tridimensional en dos marcos de coordenadas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  están relacionadas por la (2.65).

$$[\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} = [\mathbb{b}]_{\mathcal{A}} + [\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{A}} = [\mathbb{b}]_{\mathcal{A}} + [Q]_{\mathcal{A}}[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} \quad (2.65)$$

Despejando y recordando que  $[Q]_{\mathcal{A}} = [Q]_{\mathcal{B}}$  se obtiene (2.66).

$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} = [Q^T]_{\mathcal{B}}([\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} - [\mathbb{b}]_{\mathcal{A}}) \quad (2.66)$$

Donde el vector  $\boldsymbol{\pi}$  que va desde el origen del marco  $\mathcal{B}$  hacia el punto  $P$ . Esta transformación de coordenadas se muestra en la Figura 2.16.



**Figura 2.16. Marcos de coordenadas con desplazamiento del origen.**

## 2.5. Procesamiento de imágenes.

Esta sección brinda los aspectos teóricos fundamentales relacionados con el procesamiento de imágenes, los cuales han sido utilizados en éste trabajo de investigación. A lo largo de ésta sección son presentados diversos conceptos básicos, así como el desarrollo de las etapas en las cuales se divide el procesamiento de imágenes.

### 2.5.1. Introducción.

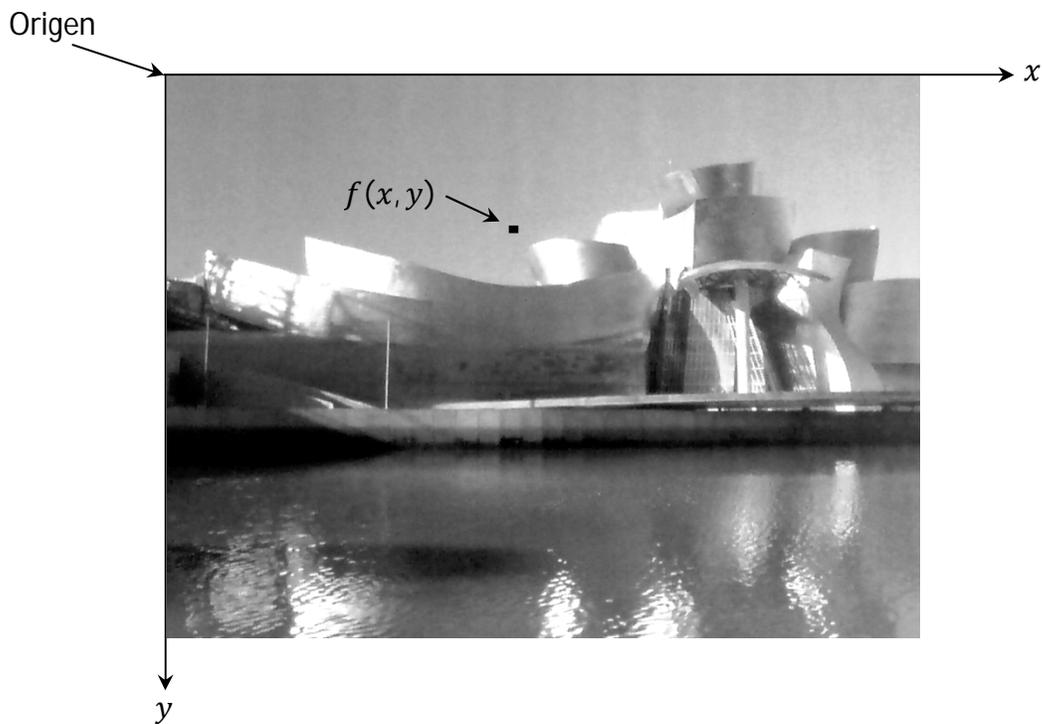
A continuación se estudian los fundamentos básicos de procesamiento de imágenes, lo cual permitirá entender de una mejor manera los algoritmos y procesos propuestos en este trabajo de investigación.

La palabra **imagen** proviene del latín *imago*, y el concepto se refiere a la representación visual de un objeto mediante diferentes técnicas de varias ramas, tales como el diseño, la pintura, la fotografía, el video, etc.

### 2.5.2. Representación digital de imágenes.

Cuando se habla de imagen monocroma, el término se refiere a una función bidimensional de intensidad de luz  $f(x, y)$ , donde  $x$  e  $y$  representan las coordenadas en el espacio, y el valor de  $f$  en un punto cualquiera  $(x, y)$  es proporcional al nivel de gris de la imagen en ese punto.

Si se adopta como convenio el asignar valores proporcionalmente más altos de niveles de gris a las áreas de mayor brillo, la Figura 2.17 presenta el convenio de ejes normalmente utilizado para el procesamiento de imágenes.



**Figura 2.17. Convenio de ejes utilizado.**

Una **imagen digital** es una imagen  $f(x, y)$  que se ha discretizado tanto en las coordenadas espaciales como en el brillo (González y Woods, 2008). Ejemplos de imágenes digitales son una fotografía, un fotograma de vídeo o un gráfico.

En otras palabras, una imagen digital puede ser considerada como una matriz cuyos índices de fila y columna identifican un punto de la imagen, y el valor del correspondiente elemento de la matriz indica el nivel en escala de grises en ese punto.

Cada uno de los elementos de este tipo de distribución digital se denomina **elemento de la imagen**, estos son mayormente conocidos como **pixels** por su abreviatura en ingles *picture elements*.

El tamaño de una imagen digital es variable, dependiendo de su aplicación. Comúnmente se seleccionan matrices cuadradas con tamaños y número de niveles de gris que sean potencias enteras de 2.

### **Definición de Pixel.**

La palabra **Pixel** ó **Píxel** es el acrónimo de “Picture Element” en el idioma inglés y significa “elemento de imagen”. Es un único punto en una imagen gráfica, y este punto es a su vez la menor unidad homogénea que forma parte de dicha imagen.

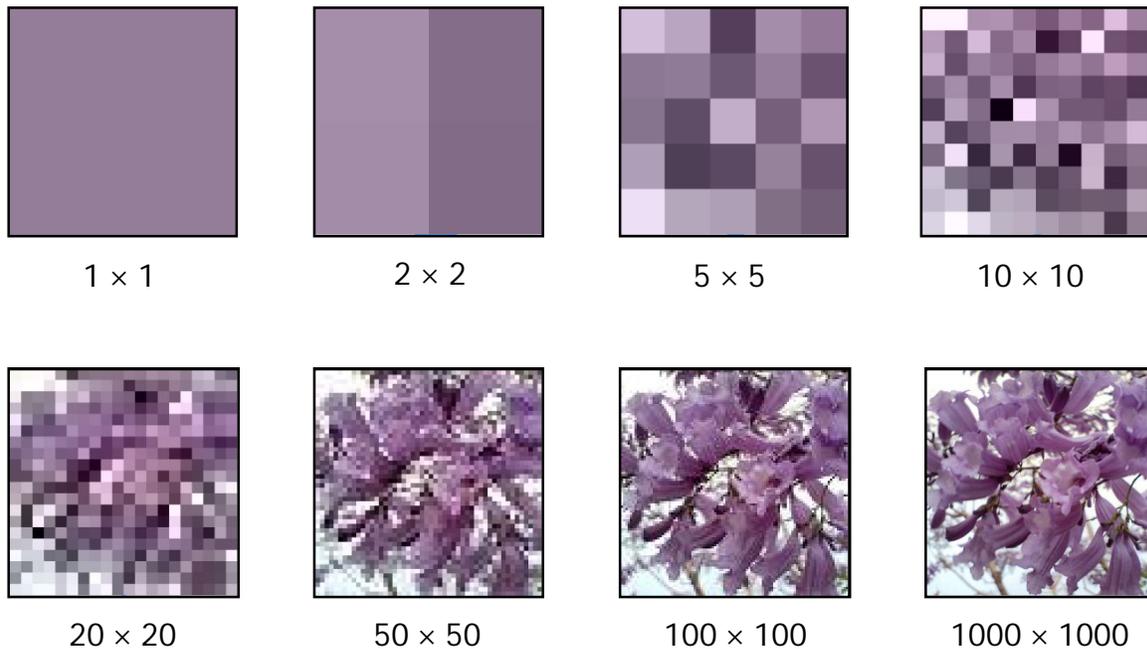
Los monitores gráficos muestran imágenes dividiendo la pantalla en miles (o millones) de pixeles, dispuestos en filas y columnas. Los pixeles están tan juntos que parece que estén conectados y aparecen como pequeños cuadrados o rectángulos en color, en blanco o en negro, o en matices de gris.

El número de bits usados para representar cada pixel determina cuántos colores o gamas de gris pueden ser mostrados. Por ejemplo, en modo color de 8-bits, el monitor en color utiliza 8 bits para cada pixel, esto permite mostrar  $2^8 = 256$  colores diferente. En monitores de color, cada pixel está compuesto realmente de tres puntos (uno rojo, uno azul, y uno verde).

### 2.5.3. Resolución.

La resolución indica la cantidad de detalle que puede observarse en una imagen, el término se refiere a la agudeza y claridad de dicha imagen. Al tener mayor resolución se entiende que entonces se logra obtener una imagen con mayor calidad visual. La calidad de un sistema de visualización depende en gran medida de su resolución, es decir, cuántos bits utilizan para representar cada pixel. La convención utilizada para las imágenes digitales es describir la resolución de la imagen con dos números enteros.

El primer número indica cuántos píxeles tiene la imagen a lo ancho, es decir, este número es la cantidad de columnas de píxeles que posee la imagen digital. El segundo indica cuántos píxeles tiene la imagen a lo alto, esto es la cantidad de filas de píxeles. Otra convención muy utilizada es indicar el número total de píxeles que conforman en su totalidad a la imagen digital. Existen otras convenciones, por ejemplo el describir la resolución en píxeles por unidad de superficie. En la Figura 2.18 se presenta una imagen en diferentes resoluciones.



**Figura 2.18. Imágenes con distinta resolución.**

#### 2.5.4. Etapas del procesamiento de imágenes.

Es por demás destacar el hecho de que el objetivo general de llevar a cabo un procesamiento de imágenes es el producir un resultado satisfactorio a partir del planteamiento de un determinado problema.

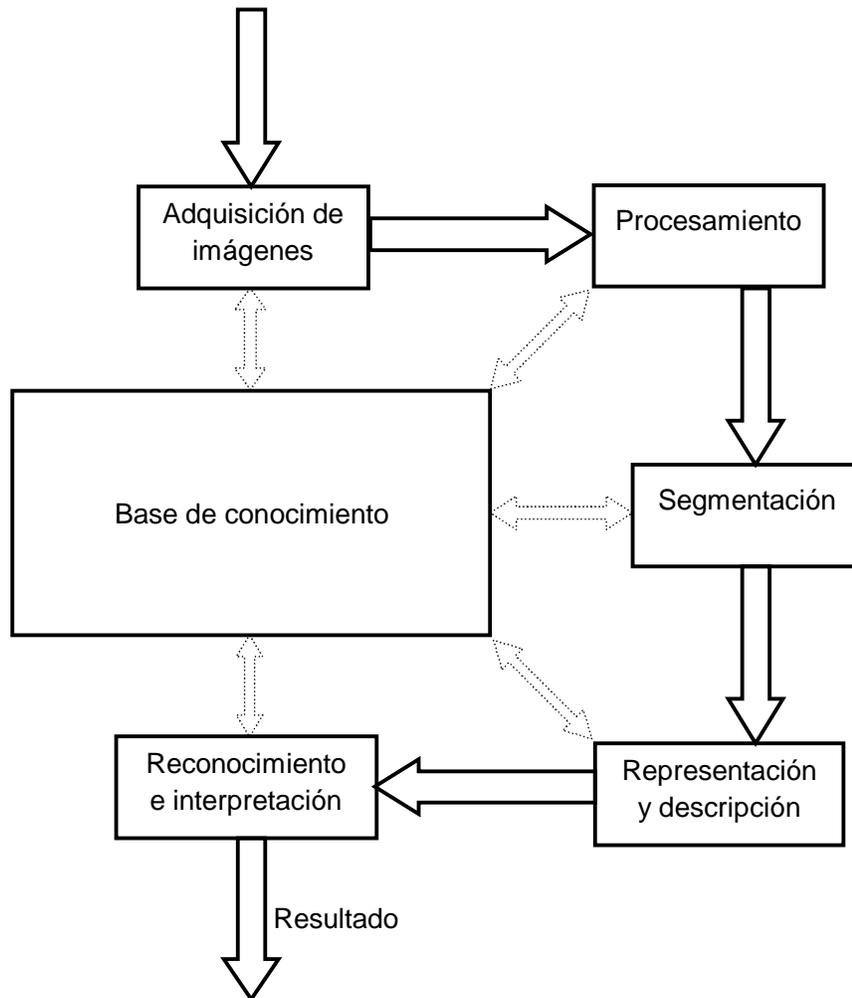


Figura 2.19. Etapas del procesamiento de imágenes.

La primera etapa del proceso de imágenes es la **adquisición de la imagen**. Para llevar a cabo este paso es necesario contar con un sensor de imágenes y con la posibilidad de digitalizar la señal que se produce a partir de este sensor. Ejemplos de sensores son las cámaras de televisión o las cámaras de barrido de líneas.

Una vez obtenida la imagen digital, la etapa siguiente es el llevar a cabo el **procesamiento de imagen**. El objetivo básico de esta etapa es mejorar la imagen de tal manera que las posibilidades de éxito de los procesos anteriores se vean incrementadas. Entre algunas técnicas de procesamiento de imágenes pueden nombrarse el mejorar el contraste, eliminar el ruido y aislar regiones de texturas que indican la probabilidad de información de la imagen.

La siguiente etapa es la **segmentación**, la cual consiste en partir una imagen de entrada en las partes u objetos que la constituyen. En general este proceso es de las labores más difíciles en el procesamiento de imágenes, ya que el llevar a cabo una segmentación errónea o errática puede provocar diversas dificultades en el proceso, desde retrasar el tiempo para obtener una solución satisfactoria, hasta permitir que errores no resueltos en etapas anteriores continúen arrastrándose a lo largo de todo el proceso.

La salida del proceso de segmentación normalmente presenta los datos de pixel en bruto, los cuales por ejemplo pueden constituir el contorno de una región o bien los puntos de una región determinada. En cada caso especial es necesario convertir los datos del pixel a una forma adecuada para el procesamiento por computadora, en esto consiste el proceso de **representación**. La primera decisión a tomar es si los datos se representarán como una región completa o como un contorno, aunque en algunas aplicaciones ambas representaciones coexisten. El obtener la ubicación de un solo pixel dentro de una imagen puede constituir por si mismo un dato muy importante para ciertos procesos. Además de elegir la correcta representación de los datos del pixel para después ser procesados por la computadora, también es indispensable indicar un método para describir estos datos de forma que se resalten los datos de interés. El proceso de **descripción** consiste en extraer los rasgos con alguna información cuantitativa que sea fundamental para diferenciar una clase de objetos de otra.

Por último, el **reconocimiento** es el proceso en el que se asigna una etiqueta a un objeto basándose en la información proporcionada por la descripción. La **interpretación** es asignar un “significado” a un conjunto de objetos reconocidos.

### 2.5.5. Mejora de una imagen.

La umbralización de una imagen es una de las transformaciones más utilizadas, es uno de los métodos de segmentación más importantes. Consiste básicamente en elegir un valor de umbral llamado  $T$ , el cual separa el “fondo” de una imagen de los “objetos” que la componen. Por ejemplo, en una imagen  $f(x, y)$  que posee diferentes objetos luminosos sobre un fondo oscuro, es posible extraer dichos objetos al escoger un valor de umbral  $T$  que los separe.

Cualquier punto  $(x, y)$  para el cual se cumple que  $f(x, y) > T$  se denomina punto perteneciente al objeto; mientras que en caso de no cumplir con la condición, entonces el punto es denominado perteneciente al fondo (González y Woods, 2007). La umbralización se puede percibir como una operación que implica verificar una condición dada. En base a lo anterior una imagen umbralizada  $g(x, y)$  se define como en (2.66).

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x, y) > T \\ 0 & \text{si } f(x, y) \leq T \end{cases} \quad (2.67)$$

Así, ciertos pixeles que componen a la imagen se encuentran “marcados” con 1, mientras que los demás están “marcados” con 0. Cabe aclarar que el 1 representa cualquier nivel conveniente de intensidad para la imagen. Los pixeles que se encuentran marcados con 1 corresponden entonces a objetos, mientras que los pixeles marcados con 0 corresponden al fondo. Cuando  $T$  depende solamente de  $f(x, y)$ , el umbral se denomina **global**. La segmentación se completa escaneando la imagen pixel a pixel y etiquetando cada pixel como perteneciente al objeto o al fondo, dependiendo de que el nivel de gris de ese pixel sea mayor o menor que el valor de  $T$ .

La **umbralización global** tiene gran éxito cuando es aplicada en entornos muy bien controlados, como por ejemplo en las aplicaciones de inspección industrial donde es posible controlar el nivel de iluminación con relativa facilidad.

### **III. METODOLOGÍA.**

En este capítulo se exponen y se detallan las actividades realizadas a lo largo del trabajo de investigación, con el fin de obtener una solución a la problemática expuesta anteriormente.

También se describe el desarrollo del sistema de calibración de posición para un manipulador serial tipo PUMA, enfatizando en aspectos de aportación tecnológica como los detalles del proceso de fabricación de los elementos que componen al sistema, así como en la programación y elaboración de cada uno de los elementos de software.

#### **3.1. Perspectiva General.**

El método que consiste básicamente en realizar la proyección de una figura geométrica cónica, en este caso un cono recto, cuyo vértice o ápice coincide con el punto de operación del OT. Dicha proyección se realiza sobre una superficie plana, de la cual es posible conocer su posición relativa respecto al marco de referencia del manipulador.

En la superficie se describe una forma geométrica que posteriormente es adquirida por la webcam y analizada por el software de calibración. La proyección se efectúa con haces de luz láser que parten desde el órgano terminal y cuya intersección con la superficie forma la base de un cono.

Resulta evidente que la imagen de un cono proyectado sobre la superficie de calibración varía en función de la posición del OT. Al realizar el análisis de la circunferencia que se obtiene sobre la superficie, es posible determinar el vértice del cono proyectado.

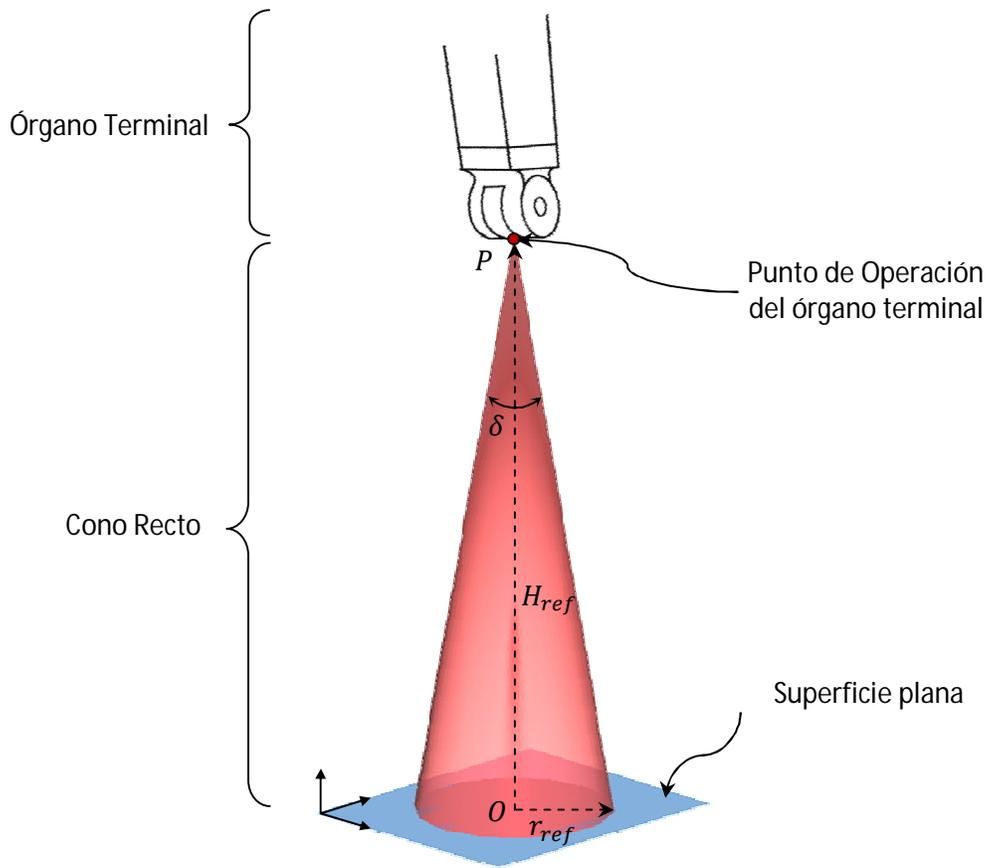
### **3.2. Sistema de proyección.**

El sistema de proyección desarrollado a lo largo del trabajo de investigación tiene como objetivo principal el brindar una *figura de referencia* ó *figura patrón* la cual representa la posición real del OT del manipulador tipo PUMA. Los errores en la interpretación de dicha posición pueden ser reducidos de manera importante al llevar a cabo la fabricación de este sistema con especial detalle en su diseño.

El sistema de proyección cumple con dos funciones indispensables para lograr ubicar el OT en el espacio de una manera eficiente. La primera de ellas es la función de proyección, esta se refiere a los elementos encargados de realizar de manera física la proyección de una *figura inicial* o *figura patrón*. La segunda función es la de sujeción, es decir, el sistema de proyección se encuentra unido al órgano terminal del robot manipulador, de tal manera que el punto de operación se encuentra en un extremo establecido y conocido del elemento de proyección.

#### **3.2.1. Definición de figura patrón.**

Es importante aclarar que el punto importante del sistema es brindar una solución para llevar a cabo la calibración del robot manipulador. Como se ha establecido con anterioridad, la compensación del error de posicionamiento es independiente del error de orientación que se genera en el punto de operación del OT, debido a que el robot PUMA es un manipulador tipo *serial* y *desacoplado*. Por tal motivo, la figura patrón seleccionada e implementada en el método es la de un cono recto. La generación de este cono se explica con mayor detalle a continuación. La imagen de una circunferencia es proyectada desde el punto de operación del órgano terminal hacia una superficie plana conocida. Al realizar la proyección de esta imagen, se forma en el espacio la figura de un cono recto cuyo vértice coincide con el punto de operación del órgano terminal, y cuya base circular queda descrita sobre la superficie conocida. En la Figura 3.1 se muestra lo anterior.



**Figura 3.1. Figura patrón.**

Se desea que el vértice de este cono recto sea coincidente con la posición real del punto de operación del OT, el grado de error de esta estimación depende en gran medida de factores físicos y de diseño.

El punto que representa el vértice del cono recto es al mismo tiempo el elemento denominado *objeto* del sistema de proyección general establecido anteriormente. El punto en el espacio euclidiano tridimensional que representa la posición de punto de operación del órgano terminal del manipulador tipo PUMA se define como en (3.1)

$$P(x_p, y_p, z_p) \quad (3.1)$$

Existe un punto que queda descrito en la superficie cuando se extiende el eje de rotación de la figura cónica descrita en el espacio. Éste punto es la proyección del eje de rotación del cono sobre la superficie, y es definido en (3.2).

$$O(x_0, y_0, 0) \quad (3.2)$$

Este punto pertenece al plano  $xy$ , por lo tanto la componente en el eje  $z$  de este punto es 0. Es importante aclarar que este punto coincide con el centro de la circunferencia descrita sobre la superficie, pero solo cuando el órgano terminal sufre un cambio de posición. En caso de ocurrir un cambio en la orientación del OT, el punto  $O$  y el centro de la circunferencia no serán coincidentes.

Además son definidos los parámetros que dan forma al cono, como son el radio de su base  $r_{ref}$  y la altura  $H_{ref}$ . El ángulo de conicidad ( $\delta$ ) puede ser calculado entonces directamente por la (3.3).

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{r_{ref}}{H_{ref}} \quad (3.3)$$

La Tabla 5 muestra los valores establecidos de los parámetros que definen la figura del cono recto que se emplea a lo largo de las pruebas.

**Tabla 5. Valor de parámetros del cono de referencia.**

Parámetro	Valor
$r_{ref}$	100 mm
$H_{ref}$	600 mm
$\delta$	18.9246°

### 3.2.2. Elementos de Proyección.

La función de los elementos proyectantes es la de definir en el espacio la figura cónica mediante haces de luz laser.

La palabra **láser** es el acrónimo de “*Ligth Amplification by Stimulated Emission of Radiation*”, es decir, se trata de un dispositivo que produce luz amplificada por emisión estimulada, lo que genera un haz de gran intensidad, direccionalidad y coherencia (González, 2003). Las principales propiedades del rayo láser son:

1. **Monocromaticidad.** El haz emitido por el sistema presenta una longitud de onda con una dispersión o ancho de banda muy reducido.
2. **Gran coherencia en el tiempo y en el espacio.** Para algunos sistemas, las longitudes de coherencia son del orden de los kilómetros.
3. **Intensidad.** El rayo láser presenta una intensidad mayor que la de cualquier otra fuente de luz. Por intensidad se considera aquí la energía emitida por unidad de tiempo por unidad de área.
4. **Estrechez.** Además de tener un ancho angular del haz muy pequeño, éste presenta una reducida divergencia (muy pequeños incrementos en la sección transversal del haz); esto determina su alto grado de direccionalidad.

Los haces parten del punto final de operación del Órgano Terminal (aunque no llegan a este punto, mas tarde se explicara esta característica) e interceptan en uno o en varios puntos a la superficie de calibración. Los haces son dirigidos hacia la superficie con el fin de obtener en esta la proyección bidimensional de una figura geométrica, la cual se genera al interceptar los haces de luz laser con la superficie de calibración. Esta figura geométrica, que en este caso es una circunferencia, presenta una deformación geométrica cuando ocurre un desplazamiento del punto de operación del OT.



**Figura 3.2. Laser económico.**

### **3.2.3. Diseño y maquinado del Sistema de Proyección.**

El diseño del sistema de proyección permite realizar el acoplamiento mecánico del proyector con el Órgano Terminal del manipulador PUMA. Esta tarea es de gran relevancia, ya que una mala sujeción del sistema de proyección puede llevar a errores graves en la interpretación de la posición real del punto de operación del Órgano Terminal, importante es destacar que este elemento es diseñado con el fin de minimizar errores en la proyección.

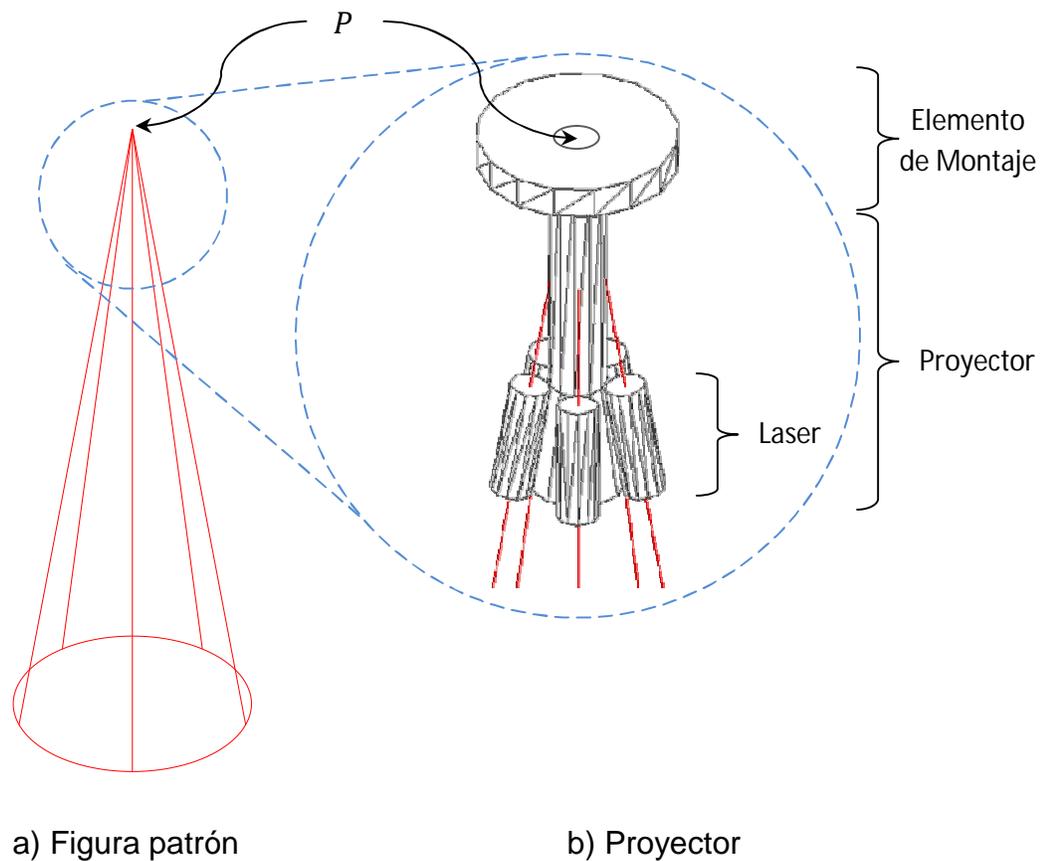
Una vez establecidos valores que definen a la figura cónica, es decir,  $r_{ref} = 100\text{ mm}$  y  $h_{ref} = 600\text{ mm}$ , se realizó en AutoCAD el diseño del sistema de proyección de manera que cumpliera con los requerimientos y las dimensiones de esta figura patrón. Primero fue dibujado el cono recto, con el fin de obtener una visión clara de la figura patrón que debe ser generada por el proyector y con esto obtener sus dimensiones físicas. El diseño del sistema de proyección obtenido a partir de la figura patrón es el que se muestra en la Figura 3.3 y consta de las siguientes partes:

- **Elemento de Montaje.** Encargado de realizar el acoplamiento del proyector con el OT.
- **Proyector.** El cual permite la unión de los dispositivos laser con el proyector.

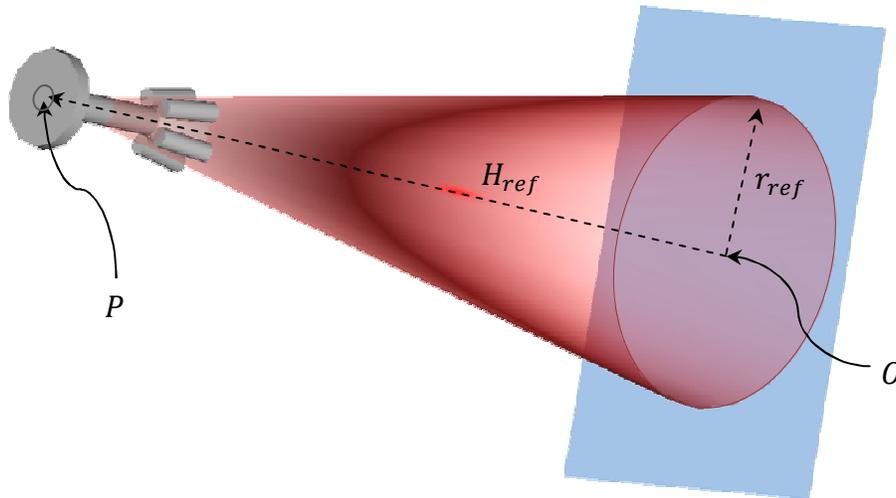
El *elemento de montaje* realiza el acoplamiento mecánico con el órgano terminal del robot PUMA mediante la sujeción de 4 tornillos distribuidos de manera uniforme y simétrica en su base circular, y de acuerdo con las características que presenta el órgano terminal para permitir el acoplamiento de diferentes dispositivos.

Puede observarse en la Figura 3.4 que el diseño de la pieza permite que los ejes focales de los laser converjan en un único punto ( $P$ ). El centro de la base del proyector donde todos los rayos convergen representa el vértice del cono recto, y a su vez es el punto de operación del órgano terminal del robot.

La pieza fue maquinada en aluminio, debido a que este material presenta ventajas en características físicas importantes, como lo es el peso; y en características eléctricas, como la conductividad.



**Figura 3.3. Sistema de Proyección.**



**Figura 3.4. Proyección sobre una superficie.**

### **3.3. Análisis de error de posición.**

Se sabe que el error total acumulado en el OT de manipuladores seriales desacoplados puede deberse a errores de posicionamiento y errores de orientación. Para este trabajo de investigación, se considera que el error de orientación que presenta el manipulador es despreciable en comparación con el error de posicionamiento. Se analiza el efecto obtenido en la proyección bidimensional en el plano  $xy$  para diversos errores inducidos de posicionamiento tridimensional del OT, manteniendo la orientación constante.

#### **3.3.1. Análisis geométrico de proyección de referencia.**

Debido a que uno de los objetivos principales de este trabajo de investigación es cuantificar el desplazamiento para evaluar el error de posición del OT, considerando la orientación constante, se ha realizado el análisis de la figura geométrica que es proyectada en la superficie cuando el elemento proyector solamente presenta variación en su posición. Se desea que la disposición inicial del proyector sea perpendicular a la superficie. En estas condiciones la figura que proyecta es una circunferencia, cuyo radio varía de acuerdo a la distancia entre el

proyector y la superficie. Si el proyector no presenta variación en su orientación, el ángulo de la inclinación del plano respecto al cono recto ( $\beta$ ) permanece **constante** y con un valor de  $\beta = 90^\circ$ . Entonces, considerando únicamente el error de posicionamiento del sistema de proyección, la figura que se proyecta sobre la superficie siempre será una **circunferencia** cuyo radio varía en función del error de posición en el eje z, y cuyo centro cambiara su ubicación relativa en el plano  $xy$ .

### 3.3.2. Error en el plano $xy$ .

Este error de posicionamiento bidimensional puede ser medido directamente en el plano al conocer el vector de desplazamiento del punto  $O$  sobre el plano  $xy$ . La medición directa de este vector brinda información necesaria y suficiente para establecer el error de posición del OT en el plano  $xy$ . La ilustración de este caso se muestra en la Figura 3.5.

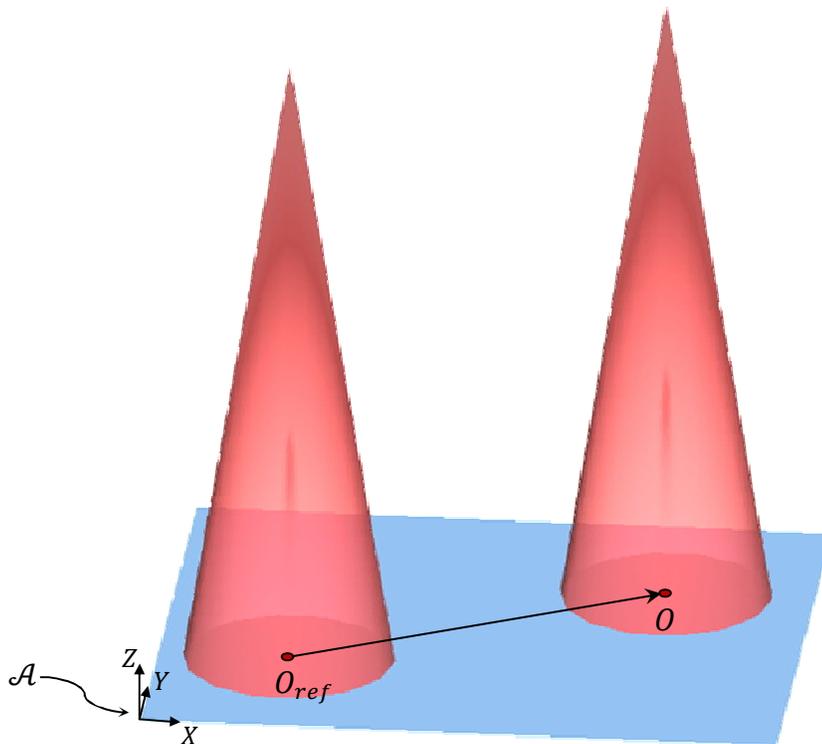


Figura 3.5. Error en el plano  $xy$ .

### 3.3.3. Error en el eje z.

Al presentarse un error de posición del punto de operación sobre el eje  $z$ , las coordenadas sobre los ejes  $x$  e  $y$  del punto  $P$  permanecen constantes. El desplazamiento sobre el eje  $z$  genera como resultado un efecto de “escala geométrica” en la proyección de la circunferencia sobre la superficie, es decir, el diámetro de la base circular del cono recto aumentará o disminuirá en proporción directa con la distancia a la cual se encuentra el OT del plano  $xy$ .

Un primer caso de evaluación se da cuando ocurre un desplazamiento en dirección positiva sobre el eje  $z$ , este error genera una proyección igualmente circular sobre la superficie de calibración, pero con un diámetro mayor al de la figura de referencia.

El segundo caso de análisis es cuando el desplazamiento ocurre en dirección negativa sobre el eje  $z$ , este error genera una proyección circular, pero con un diámetro menor que la figura de referencia. Los dos casos mencionados anteriormente son ilustrados en la Figura 3.6.

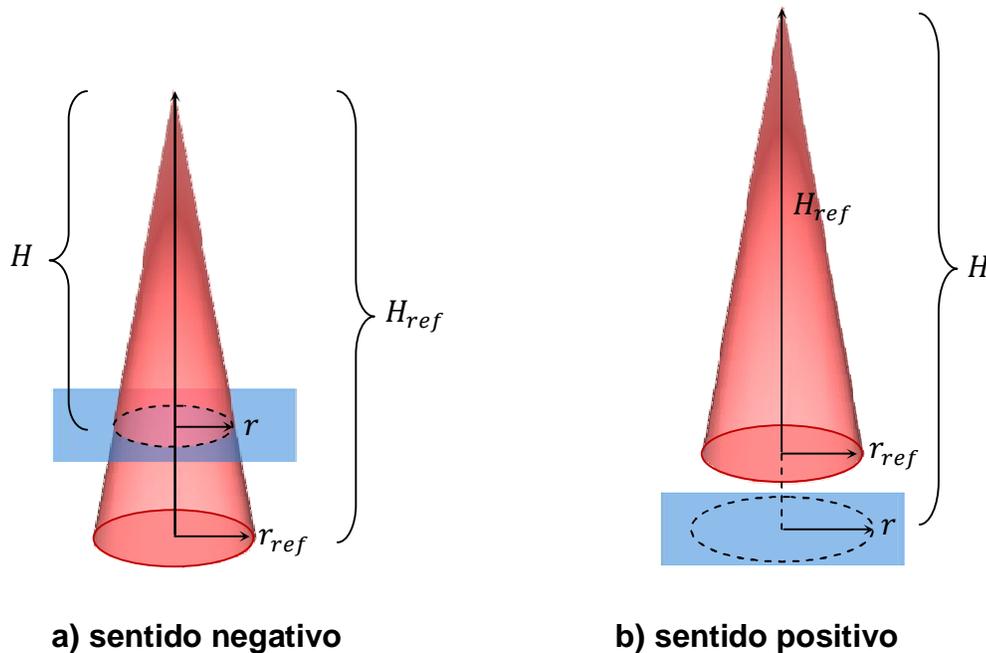


Figura 3.6. Error en el eje z.

Realizando un corte transversal al cono de referencia con un plano paralelo al eje  $z$ , el problema de ubicación del punto  $P$  se simplifica al análisis de los triángulos rectángulos semejantes, donde el cateto mayor corresponde a la altura ( $H$ ), el cateto menor corresponde al radio de la base circular ( $r$ ), y la hipotenusa corresponde a la generatriz del cono que une a estos dos catetos. La razón de alturas es igual a la razón entre radios, Teorema de Tales (Coxeter, 1989), como se expresa en (3.4).

$$\frac{H}{r} = \frac{H_{ref}}{r_{ref}} \quad (3.4)$$

Donde  $H_{ref}$  y  $r_{ref}$  son la altura y el radio del cono de referencia respectivamente. La altura del cono recto  $H$  calculada es igual a la componente en el eje  $z$  del punto  $P$ . Así, con los datos del cono de referencia, y además evaluando la variación en la dimensión del radio, es posible calcular la altura del cono y ubicar su vértice.

### **3.4. Superficie de calibración.**

La superficie de calibración es el elemento del sistema encargado de “recibir” los haces de rayos laser que emite el proyector. Esta debe permitir que los rayos incidan en su superficie, y a la vez lograr que la dispersión del haz de luz sea mínima, con el fin de obtener un punto de tamaño relativamente pequeño que representa de manera fiel al haz de luz. Además, el diseño de la superficie permite que el dispositivo de adquisición de imágenes obtenga una imagen de manera precisa. La superficie de calibración consta de dos partes principales: el Área de Adquisición y la Cabina de Adquisición.

### **3.4.1. Especificaciones.**

El área destinada para realizar la adquisición de la imagen tiene una superficie de  $225\text{ mm}$  de ancho por  $300\text{ mm}$  de largo. Mientras se obtenga una imagen completa de la circunferencia dentro de esta área, es posible realizar el análisis de error de posición del OT. La cabina de adquisición tiene dimensiones de  $330\text{ mm}$  de largo por  $250\text{ mm}$  de ancho y  $360\text{ mm}$  de altura. En esta cabina es colocado el dispositivo de adquisición de imágenes que permite obtener una imagen que representa la posición real del OT.

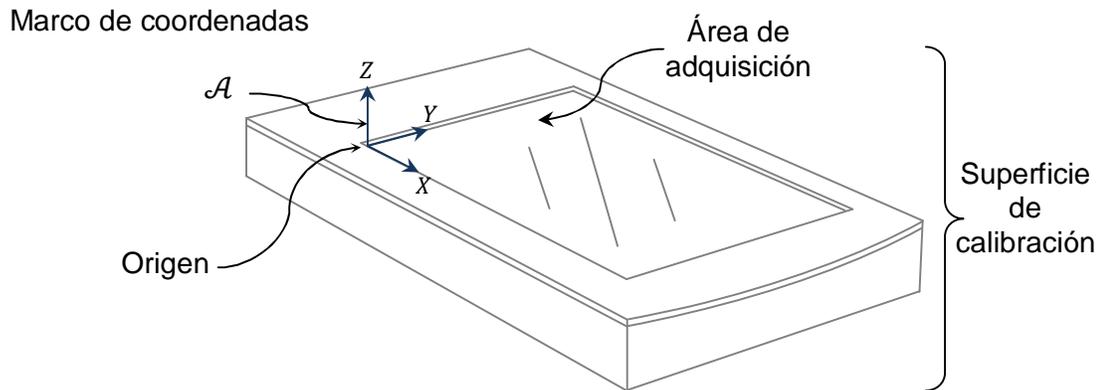
### **3.4.2. Filtrado.**

Con el fin de mejorar el contraste de la imagen obtenida, fue colocado un filtro de color rojo en el área de adquisición de la imagen. El color es debido a que al realizar la adquisición de la imagen los haces de luz laser tienden a verse llenos de iluminación, debido a que la luz que emiten es también roja, mientras que el área sobrante de la imagen adquirida presenta menor iluminación. Entonces los haces de luz laser se consideran como puntos blancos en la imagen, los cuales tienen un nivel de 255, mientras que el área de adquisición se considera como espacio vacío con un nivel de 0.

### **3.4.3. Definición del sentido de incremento.**

A la superficie de calibración le es asignado un marco de coordenadas, el cual es el marco  $\mathcal{A}$ . Este marco tiene origen en una de las esquinas de la superficie de calibración. La adquisición de la imagen se hace considerando solo el primer cuadrante del plano cartesiano, es decir, el eje  $x$  se encuentra a lo largo del área de adquisición, mientras que el eje  $y$  se encuentra a lo ancho. El eje  $z$  es perpendicular a la superficie de calibración y el sentido positivo de este eje se considera hacia el exterior de la propia superficie, es decir, el sentido negativo es

hacia la cabina de adquisición. El marco de coordenadas establecido para la superficie de calibración se puede observar en la Figura 3.7.



**Figura 3.7. Marco de coordenadas.**

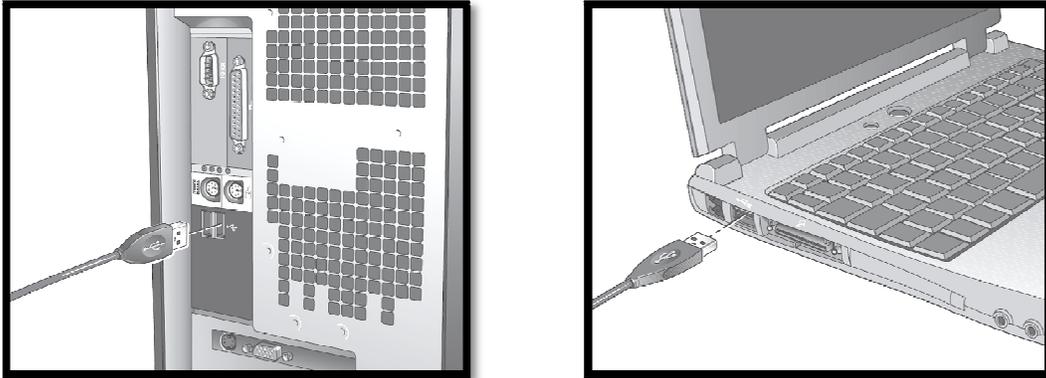
### **3.5. Sistema de Adquisición.**

El Sistema de Adquisición es el encargado de obtener la imagen digital que pueda ser analizada por la PC, a partir de la forma geométrica que genera el sistema de proyección sobre la superficie de calibración. Está compuesto principalmente de una cámara digital convencional y de un software especializado que ha sido desarrollado para este fin. Mediante procesamiento de Imágenes es posible digitalizar la imagen que captura una webcam con el fin de que ésta pueda ser procesada y analizada en la PC.

#### **3.5.1. Dispositivos de adquisición de imagen digital.**

Para el desarrollo del presente trabajo de investigación es necesario contar con este elemento. Una cámara digital es un pequeño dispositivo electrónico usado para capturar y almacenar fotografías electrónicamente en un formato digital. Usualmente es conectada a una computadora a través del puerto

USB como se muestra en la Figura 3.8. Puede capturar imágenes y transmitir las a través de Internet en directo, ya sea a una página web o a otra u otras computadoras de forma privada.



**Figura 3.8. Conexión por USB.**

Se denomina *frame* en inglés a un fotograma o cuadro, es una imagen particular dentro de una sucesión de imágenes que componen una animación. La continua sucesión de estos fotogramas producen a la vista la sensación de movimiento, fenómeno dado por las pequeñas diferencias que hay entre cada uno de ellos.

Para la realización de las pruebas se utilizó como dispositivo de adquisición de imágenes una cámara tipo réflex digital de objetivo único con las siguientes características:

- Sensor CCD de 23.6 x 15.8 mm.
- 10.75 millones de píxeles totales.
- Obturador de plano focal de desplazamiento vertical controlado electrónicamente.
- Tamaño de imagen de 1936 x 1296 píxeles.



**Figura 3.9. Cámara Digital.**

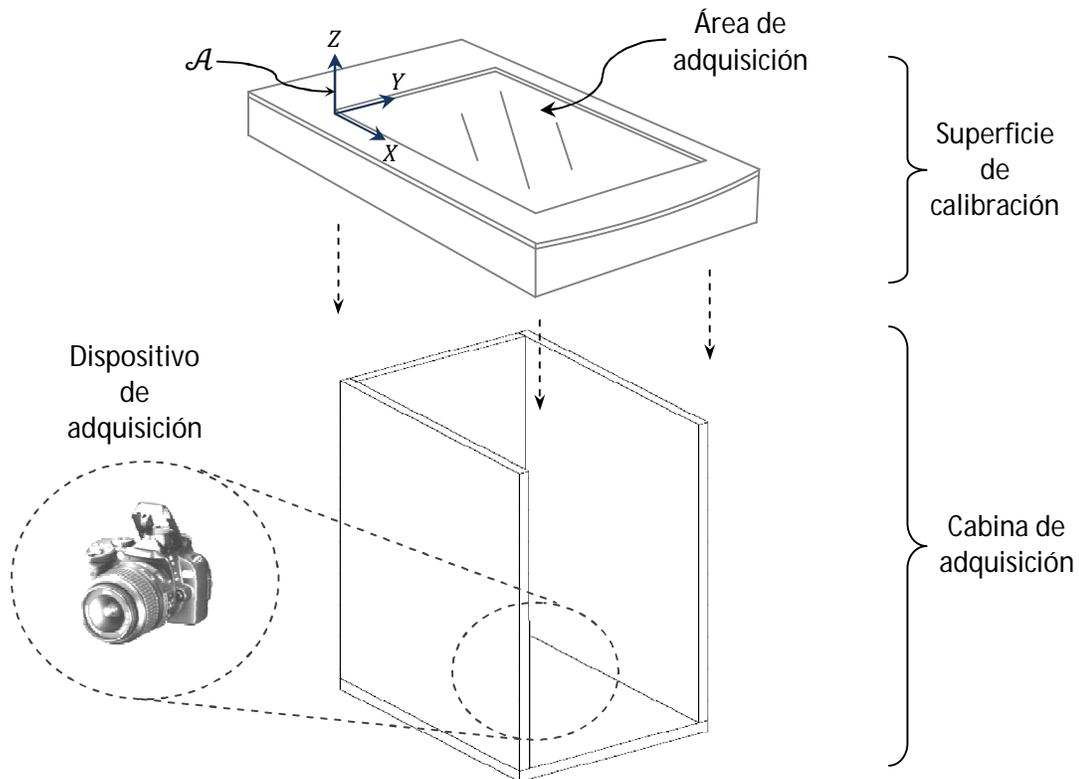
Esta cámara digital pertenece al sistema de Adquisición, y tiene el fin de obtener una imagen o frame de la figura geométrica proyectada en un momento dado sobre la superficie de calibración. Una vez obtenida dicha imagen, esta es enviada hacia el Ordenador por medio del puerto USB.

Se llevo a cabo la instalación tanto de los controladores como del software proporcionado, siguiendo las indicaciones especificadas por el fabricante, a fin de verificar el correcto funcionamiento de la cámara. Una vez que este dispositivo se encontró trabajando con normalidad, se dio por terminada la parte correspondiente a establecer comunicación entre ésta cámara y la PC.

### **3.5.2. Ubicación.**

La cámara digital se encuentra centrada en la zona destinada para el dispositivo de adquisición de imagen, esto es la *cabina de adquisición*, ubicada en la parte inferior del *área de adquisición*. El eje focal de la cámara digital esta perpendicular a la superficie de calibración, y pasa por el centro del área de adquisición. De manera tal que la cámara digital capta el total de los 225 x 300 mm de superficie. La disposición de la superficie de calibración y la ubicación de los elementos del sistema de adquisición se muestran en la Figura 3.10.

La resolución de la cámara es variable, sin embargo para la realización de las pruebas se utilizó una resolución de 1936 x 1296 pixeles.



**Figura 3.10. Superficie de Calibración y Sistema de Adquisición.**

### 3.5.3. Escala.

La imagen obtenida mediante el dispositivo de adquisición representa la posición del punto  $P$ , o bien, la del punto de operación del OT. Es necesario realizar una equivalencia entre las unidades de longitud y los elementos de la imagen adquirida, es decir, los pixeles. Esta equivalencia depende directamente de la resolución utilizada para realizar la adquisición de la imagen. Debido a que el

área de adquisición cuenta con una relación de aspecto de 4:3, y que la relación de aspecto del tamaño de la imagen del dispositivo de adquisición es diferente, se ha establecido que el largo de la imagen adquirida por la cámara corresponda al eje  $x$  (largo) del área de adquisición, ya que esta disposición ofrece una mayor resolución como puede observarse en (3.5).

$$\frac{\text{largo del área de adquisición}}{\text{largo del tamaño de imagen}} = \frac{300 \text{ mm}}{1936 \text{ pixeles}} = 0.154958 \text{ mm/pixel} \quad (3.5)$$

$$\frac{\text{ancho del área de adquisición}}{\text{ancho del tamaño de imagen}} = \frac{255 \text{ mm}}{1296 \text{ pixeles}} = 0.196759 \text{ mm/pixel}$$

Es decir, en el caso de la resolución de 1936 x 1296 pixeles, el dispositivo de adquisición obtendrá una imagen que capta los 300 mm de largo (eje  $x$ ) que tiene el área de adquisición en su totalidad. Sin embargo la imagen no podrá captar los 225 mm que abarca el área de adquisición. Así que se establece que el ancho requerido del área de adquisición es de 200.826 mm.

Esto quiere decir que cada pixel representa 0.154958 mm de longitud para un tamaño de imagen de 1936 x 1296 captada por el dispositivo de adquisición.

### 3.6. Algoritmo de error de posición.

El presente algoritmo describe el conjunto de pasos a seguir para obtener las coordenadas rectangulares en tres dimensiones del punto  $P$ . Estas se obtienen a partir de conocer las coordenadas de 6 puntos del plano  $xy$ . Cinco de estos puntos definen la circunferencia, mientras que el sexto punto es la proyección sobre el plano  $xy$  del eje de rotación del cono.

### 3.6.1. Descripción del algoritmo.

Los datos de entrada que requiere el algoritmo son las coordenadas del punto que es la proyección sobre el área de adquisición del eje de rotación del cono generado por el sistema de proyección, así como los pares de coordenadas de los puntos que definen a la circunferencia. Estas coordenadas de entrada se muestran en la Tabla 6.

**Tabla 6. Datos de entrada del algoritmo.**

<i>Circunferencia</i>	<i>Proyección del eje de rotación</i>
$a(x_a, y_a)$	
$b(x_b, y_b)$	
$c(x_c, y_c)$	$O(x_0, y_0)$
$d(x_d, y_d)$	
$e(x_e, y_e)$	

El valor de las coordenadas  $x_0$  e  $y_0$  son obtenidos directamente mediante el software desarrollado a lo largo de este trabajo de investigación. Más adelante se explica con mayor detalle la forma en que se obtienen estos valores.

Estas coordenadas que definen al punto  $O$ , el cual pertenece al plano  $xy$ , coinciden con el punto central de la circunferencia proyectada sobre la superficie de calibración, definido como en (3.6). Las coordenadas del punto  $C$  se expresan respecto al marco  $\mathcal{A}$ .

$$[C]_{\mathcal{A}} = (h, k) \quad (3.6)$$

Con esto es posible establecer que, cuando se presenta un error de posición del vértice del cono recto, el centro de la circunferencia coincide con la proyección del eje de rotación del cono recto. Entonces se tiene la relación de (3.7).

$$h = x_0 \quad y \quad k = y_0 \quad (3.7)$$

Una vez establecida esta relación, es posible encontrar los parámetros  $D$  y  $E$  de la ecuación general de la circunferencia (2.53) mediante (2.54).

$$D = -2x_0 \quad y \quad E = -2y_0 \quad (3.8)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación general de la circunferencia es posible encontrar el valor del parámetro faltante  $F$ . Despejando (2.53) y sustituyendo las coordenadas de cualquiera de los cinco puntos que definen a la circunferencia  $(a, b, c, d, e)$  se obtiene (3.9).

$$F = -(x^2 + y^2 + Dx + Ey) \quad (3.9)$$

Una vez obtenidas todos los coeficientes de la ecuación general de la circunferencia, solo resta sustituir en (2.56) para encontrar el valor de la magnitud del radio.

Por último, conociendo el radio de la base del cono recto, y al compararlo con el radio inicial o de referencia mediante el Teorema de Tales, es posible conocer cuál fue la variación de posición que sufrió la figura sustituyendo en (3.4).

$$H = r \frac{H_{ref}}{r_{ref}} \quad (3.10)$$

La posición final del punto de operación del órgano terminal queda entonces definida por (3.11), respecto al marco de la superficie de calibración, es decir, el marco  $\mathcal{A}$ .

$$[p]_{\mathcal{A}} = (h, k, H) = (x_0, y_0, H) \quad (3.11)$$

### 3.6.2. Diagrama de bloques.

El diagrama de bloques del algoritmo realizado se muestra en la Figura 3.11.

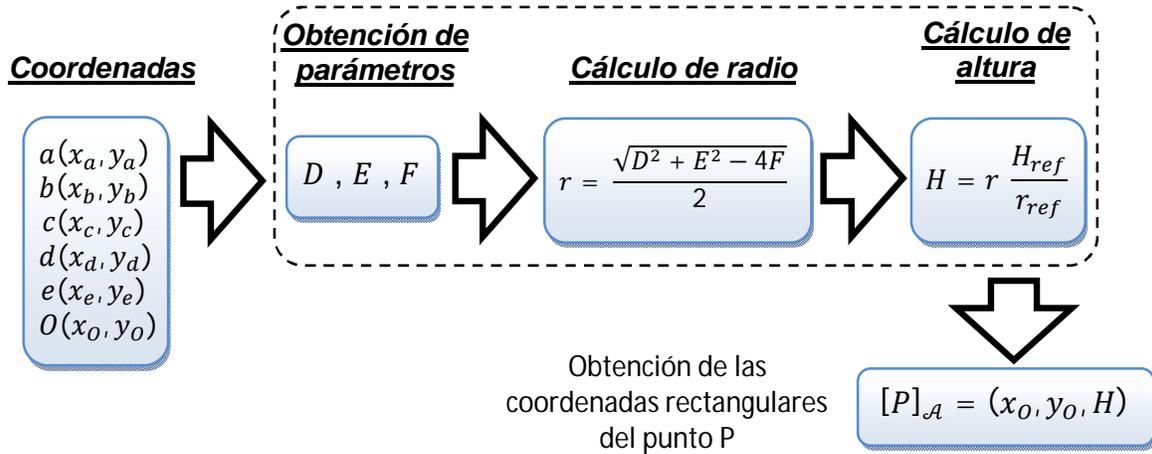


Figura 3.11. Diagrama de bloques del algoritmo.

## IV. RESULTADOS.

### 4.1. Simulaciones.

Se realizó una prueba en AutoCAD que consistió en realizar la simulación del desplazamiento del cono de referencia en 100, 100 y -100 mm sobre el eje  $z$ ,  $x$  e  $y$  respectivamente. Los valores o parámetros del cono de referencia se establecieron con los valores que muestra la Tabla 5.

#### 4.1.1. AutoCAD.

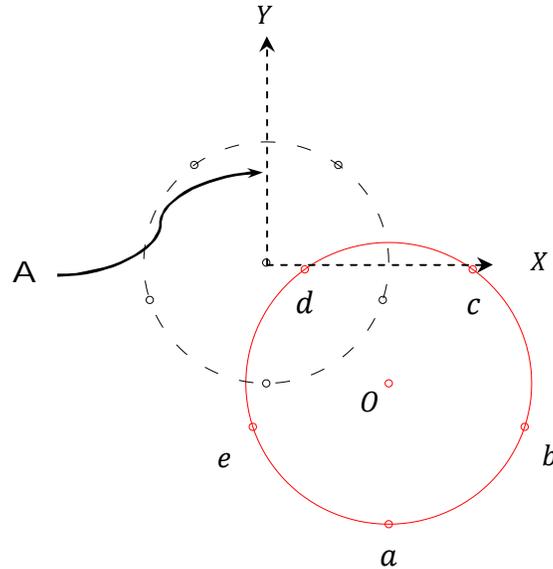
Para llevar a cabo la simulación se establece un marco de coordenadas en la posición inicial del punto de operación del órgano terminal, este marco se denota como  $\mathcal{B}$ . Además, los ejes coordenados de este marco son paralelos a los ejes coordenados del marco  $\mathcal{A}$ . Puede considerarse que el marco de coordenadas  $\mathcal{B}$  solamente presenta un desplazamiento respecto al marco de coordenadas  $\mathcal{A}$ . Por lo tanto la matriz de rotación que lleva de un marco a otro es la matriz identidad.

$$[Q]_{\mathcal{A}} = [Q]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Una vez establecidos los dos marcos de coordenadas, se puede obtener por inspección el vector de posición  $\mathbb{b}$ , el cual va desde el origen del marco  $\mathcal{A}$  hasta el origen del marco  $\mathcal{B}$ .

$$[\mathbb{b}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$





**Figura 4.2. Plano xy.**

Las coordenadas del centro de la circunferencia respecto al marco  $\mathcal{A}$  se obtienen sustituyendo en (4.3).

$$[C]_{\mathcal{A}} = (h, k) = (x_0, y_0) = (100, -100) \quad (4.3)$$

Estas coordenadas representan el desplazamiento del punto P sobre el eje  $x$  e  $y$ . Ahora se evalúa el desplazamiento sobre el eje  $z$ . Al sustituir en (2.55) los valores de  $h$  y  $k$ , se obtienen dos de los tres coeficientes requeridos para la ecuación general de la circunferencia, estos se muestran en (4.4).

$$D = -200 \quad \text{y} \quad E = 200 \quad (4.4)$$

El valor del coeficiente  $F$  se encuentra sustituyendo en (2.53) las coordenadas en  $x$  e  $y$  de cualquiera de los puntos obtenidos directamente con AutoCAD que definen la a circunferencia sobre el plano  $xy$ . Entonces se obtiene el valor del coeficiente como en (4.5).

$$F = 6388.8758 \quad (4.5)$$

Una vez obtenidos todos los coeficientes de la ecuación general de la circunferencia, la magnitud del radio es calculada sustituyendo en (2.56).

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = 116.6667 \quad (4.6)$$

Por último, solo resta sustituir los valores conocidos en (3.4) para lograr encontrar el valor de la altura del cono, es decir, el valor del desplazamiento del cono de referencia sobre el eje  $z$ .

$$H = r \frac{H_{ref}}{r_{ref}} = 116.6667 \frac{600}{100} = 700 \quad (4.7)$$

Al sustituir en (3.11) se encuentra el vector  $\mathbb{p}$  respecto al marco  $\mathcal{A}$ , como puede observarse en (4.8).

$$[\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 700 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Para encontrar el vector de desplazamiento del vértice del cono  $[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}}$  se realiza la sustitución en (2.66) de los vectores obtenidos.

$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} = [\mathbb{Q}^T]_{\mathcal{B}}([\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} - [\mathbb{b}]_{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 700 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix} \right)$$

$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 100 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Se observa entonces que el método para encontrar las coordenadas rectangulares del vértice de un cono recto a partir solamente del análisis de la base circular bidimensional que proyecta en el plano  $xy$  resulta válido. El algoritmo permite encontrar la ubicación precisa del punto de operación del órgano terminal, siempre y cuando las coordenadas de los puntos que definen a la circunferencia, así como las coordenadas del punto de proyección correspondiente al eje de rotación del cono, sean precisas.

## **4.2. Pruebas.**

Se realizaron pruebas en diferentes dispositivos para comprobar que el método presentado en esta investigación es eficiente. Para estas pruebas es importante tomar en cuenta que el objetivo principal es obtener la medición del error de posicionamiento del órgano terminal, por lo tanto se asume que el error que presenta el punto de operación respecto a la orientación es cero.

### **4.2.1. DYNA.**

Las pruebas de error de posición se realizaron en el centro de maquinado DYNA DM4322, en el cual pueden programarse desplazamientos dentro de un espacio de trabajo de 1100 mm, 560 mm y 565 mm en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

El sistema de proyección es montado en centro de maquinado y 6 haces de luz laser son dirigidos hacia la superficie de calibración. Se proyecta la imagen de un cono recto con las especificaciones de la Tabla 5.

La adquisición de la imagen proyectada en el área de adquisición de la superficie de calibración se realiza a partir de una cámara fotográfica digital, la cual fue descrita anteriormente, y cuyo eje focal es normal al plano.

La imagen de mapa de bits es considerada como un arreglo matricial. A partir de la rutina programada en el software desarrollado se obtienen las coordenadas de los 6 pixeles de la imagen que representan la proyección de los haces de luz laser sobre la superficie de calibración. Por limitaciones físicas existe un error en la estimación de las coordenadas de los puntos.

Se han realizado algoritmos para optimizar la localización exacta de los puntos proyectados, como la programación de una rutina de localización del centro de masa. Esta rutina permite obtener las coordenadas del pixel que representa el centro de masa de una región delimitada dentro de una imagen obtenida. La Tabla 8 enlista las pruebas realizadas en el centro de maquinado.

**Tabla 8. Pruebas en el centro de maquinado.**

Numero de Prueba	Desplazamiento (mm) (x,y,z)
I	(50,0,0)
II	(-25,0,0)
III	(0,25,0)
IV	(0,10,0)
V	(0,0,80)
VI	(0,0,-50)
VII	(60,15,35)
VIII	(-55,20,30)
IX	(-10,-15,40)
X	(13,-5,60)
XI	(14,30,-55)
XII	(-30,15,-40)
XIII	(-50,-18,-80)
XIV	(43,-32,-90)

Se describe a continuación la metodología para llevar a cabo la prueba I. Una primera imagen es adquirida con una resolución de 1936 x 1296 pixeles, ésta es analizada con el fin de establecer la posición de “home”, es decir, la posición en el espacio la cual es considerada como posición inicial.

La primera evaluación de la imagen indica que el vértice del cono recto se encuentra en el punto (141.157 mm, 100.372 mm, 435.620 mm) respecto al marco de coordenadas  $\mathcal{A}$ . Este punto es el origen del marco de coordenadas  $\mathcal{B}$ . Con estos valores de coordenadas se define el vector de posición  $\mathbb{b}$ , el cual parte desde el origen del marco  $\mathcal{A}$  hasta el origen del marco  $\mathcal{B}$ .

$$[\mathbb{b}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 141.157 \\ 100.372 \\ 435.620 \end{bmatrix} mm \quad (4.10)$$

Una vez establecidas las coordenadas que definen el origen de cada uno de los dos marcos de coordenadas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , se realizó el desplazamiento del punto  $P$  con el centro de maquinado. Fue programado un movimiento de 50, 0 y 0 mm sobre los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

Después de haberse llevado a cabo el desplazamiento, una segunda imagen es obtenida a través del dispositivo de adquisición. También mediante el programa desarrollado se obtiene el *nuevo* valor de las coordenadas del punto central de la circunferencia expresados en (4.11).

$$[C]_{\mathcal{A}} = (191.632, 101.384) mm \quad (4.11)$$

Empleando únicamente estas coordenadas bidimensionales como datos, se obtienen los valores de dos de los coeficientes de la ecuación general de la circunferencia. Al sustituir en (2.54) se obtiene (4.12).

$$D = -2x_0 = -383.264 \quad y \quad E = -2y_0 = -202.769 \quad (4.12)$$

El coeficiente restante  $F$  se obtiene sustituyendo cualquiera de los puntos que definen a la circunferencia en la ecuación general, y despejándola.

$$F = -(x^2 + y^2 + Dx + Ey) = 41723.445 \quad (4.13)$$

Una vez obtenidos todos los coeficientes de la ecuación general de la circunferencia, la magnitud del radio es calculada sustituyendo en (2.56).

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = 72.652 \text{ mm} \quad (4.14)$$

Con el valor del radio es posible calcular la altura del cono recto con (3.4).

$$H = r \frac{H_{ref}}{r_{ref}} = 72.652 \text{ mm} * \frac{600 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = 435.909 \text{ mm} \quad (4.15)$$

Al sustituir en (3.11) se encuentra el vector  $\mathbb{p}$  respecto al marco  $\mathcal{A}$ , como puede observarse en (4.16).

$$[\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 191.632 \\ 101.384 \\ 435.909 \end{bmatrix} \text{ mm} \quad (4.16)$$

Sustituyendo en (2.66) se obtienen las componentes del vector de desplazamiento del punto  $P$ .

$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} = [\mathbb{Q}^T]_{\mathcal{B}}([\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} - [\mathbb{b}]_{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 191.632 \\ 101.384 \\ 435.909 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 141.157 \\ 100.372 \\ 435.620 \end{bmatrix} \right)$$

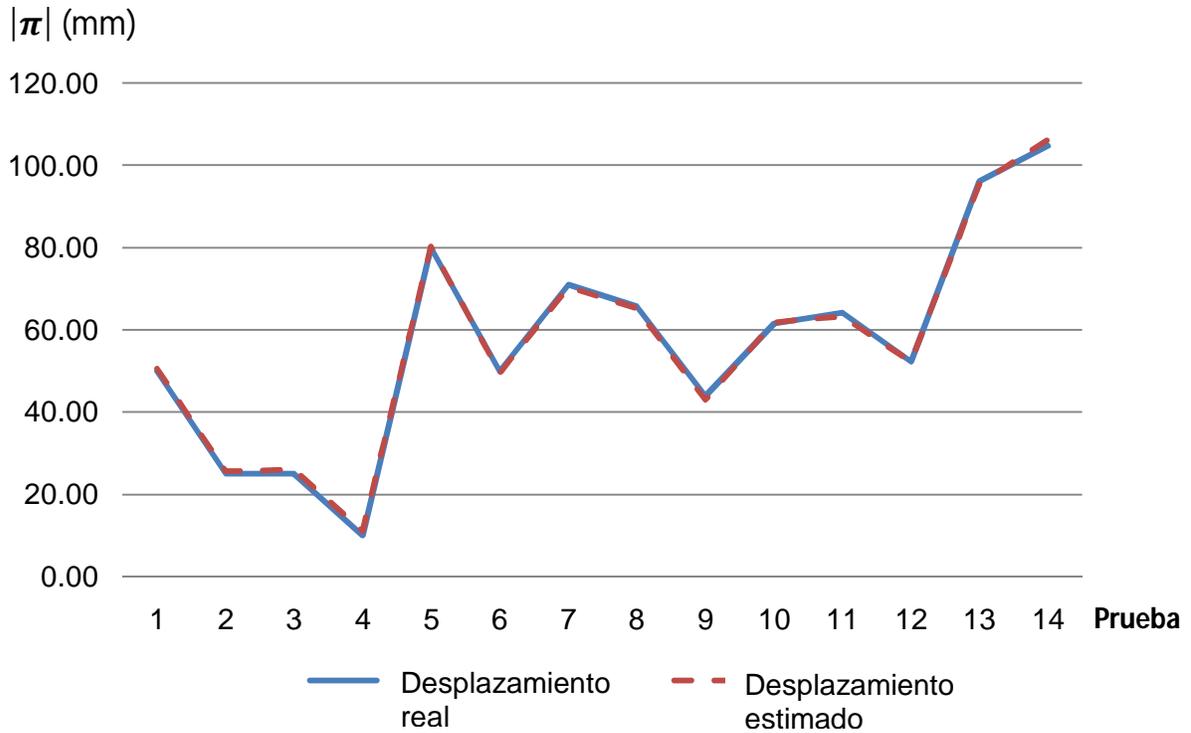
$$[\boldsymbol{\pi}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 50.475 \\ 1.012 \\ 0.289 \end{bmatrix} \text{ mm} \cong \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm} \quad (4.17)$$

El vector de desplazamiento calculado  $[\pi]_B$  es aproximadamente igual al desplazamiento programado en el centro de maquinado. Es posible observar entonces que el algoritmo implementado de manera física presenta un error de 0.475, 1.012, y 0.289 mm en los ejes eje  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. La Tabla 9 presenta el listado de las pruebas realizadas con una resolución en la imagen de entrada de 1936 x 1296 pixeles.

**Tabla 9. Pruebas con resolución de imagen de 1936 x 1296 pixeles.**

No. Prueba	Desplazamiento Estimado (mm)			Error Absoluto (mm)		
	x	y	z	x	y	z
I	50.475	1.012	0.289	0.475	1.012	0.289
II	-25.599	-0.868	0.723	0.599	0.868	0.723
III	-0.723	25.888	1.012	0.723	0.888	1.012
IV	-1.012	10.992	0.723	1.012	0.992	0.723
V	-0.579	0.868	80.269	0.579	0.868	0.269
VI	-0.289	-0.723	-49.463	0.289	0.723	0.537
VII	59.153	15.909	34.421	0.847	0.909	0.579
VIII	-54.091	19.091	31.095	0.909	0.909	1.095
IX	-9.835	-14.463	39.194	0.165	0.537	0.806
X	12.727	-4.917	60.310	0.273	0.083	0.310
XI	14.897	29.215	-54.091	0.897	0.785	0.909
XII	-30.950	15.764	-39.050	0.950	0.764	0.950
XIII	-49.174	-18.512	-79.690	0.826	0.512	0.310
XIV	43.967	-32.831	-90.971	0.967	0.831	0.971

En la Figura 4.3 se presenta una gráfica comparativa sobre los resultados obtenidos de las pruebas con dos diferentes resoluciones. Es graficada la magnitud ó norma del vector de desplazamiento  $[\pi]_B$  para cada prueba realizada.



**Figura 4.3. Gráfica de resultados.**

#### 4.2.2. Robot PUMA.

La Tabla 10 muestra las pruebas realizadas en el robot manipulador tipo PUMA, considerando que el error de orientación que presenta es cero, y con una resolución de imagen de 640 x 480.

**Tabla 10. Pruebas con resolución de imagen de 640 x 480 pixeles.**

No. Prueba	Desplazamiento Estimado $[\pi]_B$ (mm)	Error Absoluto (mm)
I	(193,123,212)	(3,3,2)
II	(198,117,214)	(2,3,2)

La Tabla 11 muestra las pruebas realizadas en el robot manipulador tipo PUMA, considerando que el error de orientación que presenta es cero, y con una resolución de imagen de 1280 x 960.

**Tabla 11. Pruebas con resolución de imagen de 1280 x 960 pixeles.**

No. Prueba	Desplazamiento Estimado $[\boldsymbol{\pi}]_B$ (mm)	Error Absoluto (mm)
I	(194,122,212)	(2,2,2)
II	(197,118,214)	(1,2,0)

A continuación se describe con detalle la metodología utilizada para realizar la prueba I.

Con la primera imagen obtenida de resolución igual a 640 x 480 es calculada la posición de home del manipulador. La posición inicial es (196,120,214), por lo tanto el vector  $\mathbb{b}$  de esta prueba queda definido como en (4.18).

$$[\mathbb{b}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 196 \\ 120 \\ 214 \end{bmatrix} mm \quad (4.18)$$

A continuación se realizaron ciclos de trabajo del manipulador PUMA con el fin de inducir un error en el punto de operación del OT. Después de estos ciclos de trabajo, se obtuvo otra imagen con el dispositivo de adquisición. Esta imagen permitió establecer el vector de posición  $\mathbb{p}$  como en (4.19).

$$[\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 193 \\ 123 \\ 212 \end{bmatrix} mm \quad (4.19)$$

Sustituyendo en (2.66) se obtiene el vector de desplazamiento.

$$[\boldsymbol{\pi}]_B = [\mathbf{Q}^T]_B([\mathbb{p}]_{\mathcal{A}} - [\mathbb{b}]_{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 193 \\ 123 \\ 212 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 196 \\ 120 \\ 214 \end{bmatrix} \right)$$

$$[\boldsymbol{\pi}]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} mm \quad (4.20)$$

La prueba II se realizó siguiendo la misma metodología descrita para la prueba numero I. Después se realizaron ambas pruebas para un tamaño de imagen de 1280 x 960 pixeles.

En la Figura 4.4 se muestra la disposición de los sistemas de proyección y de adquisición para la realización de las pruebas. En la Figura 4.5 se muestra la implementación física de las pruebas realizadas en el robot PUMA.



**Figura 4.4. Pruebas de robot PUMA.**

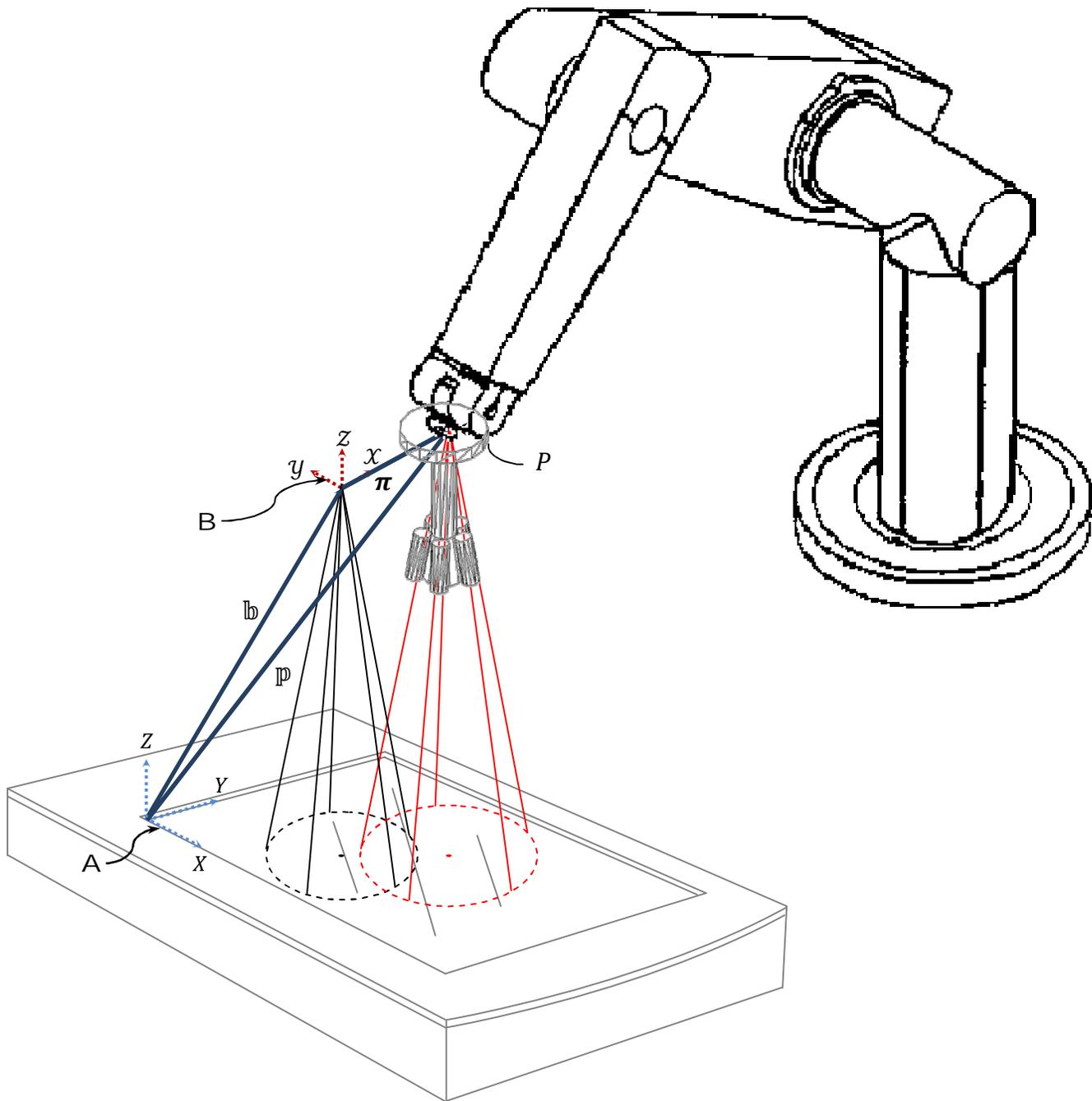


Figura 4.5. Implementación física.

## **V. CONCLUSIONES.**

Un nuevo método para obtener la posición en el espacio euclidiano tridimensional del punto de operación del órgano terminal de un robot serial tipo PUMA es presentado en este trabajo de investigación. Las pruebas y simulaciones realizadas muestran que el algoritmo de posicionamiento desarrollado en este trabajo es eficiente. El sistema es capaz de detectar errores de posicionamiento desde 1.5 mm hasta 0.7 mm.

La evaluación del error de posicionamiento del manipulador puede ser mejorada implementando dispositivos que permitan realizar una adquisición de imagen de entrada con niveles mayores de resolución. También es posible realizar estudios para llevar a cabo la optimización de los métodos de procesamiento de imágenes, y así obtener resultados de mayor precisión en la lectura del error de posición del OT.

Como trabajo futuro se realizará el análisis del error de orientación de los robots manipuladores seriales.

## REFERENCIAS

Angeles, Jorge. 2007. Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms. Springer, 3a. Edición.

Alban, T., H. Janocha. 2000. Dynamic Calibration of Industrial Robots with Internal Measurement Systems. University of Saarland, Saarbrücken. Germany.

Chaparro, Ricardo. 2002. Sistema de control de posicionamiento de alta precisión considerando fricción estática y juego mecánico. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Conrad, K. L., P. S. Shiakolas, y T. C. Yih. 2000. Robotic Calibration Issues: Accuracy, Repeatability and Calibration. The University of Texas at Arlington. USA.

Coxeter, H. S. M. 1989. Introduction to Geometry. Wiley, 2a. Edición.

Craig, John J. 2006. Robótica. Pearson Prentice-Hall, 3a. Edición.

Faust, Russell A. 2006. Robotics in surgery: history, current and future applications. Nova Science Publishers. New York, USA.

Gomis Martí, José María. 1996. Curvas y superficies en diseño de Ingeniería. Universidad Politécnica de Valencia, Edición ilustrada.

González, Edgar. 2003. El láser: principios básicos. Universidad Santo Tomás, 1a. Edición.

González, R. C., R. E. Woods. 2007. Digital Image Processing. Prentice Hall, 3a. Edición.

Ikits, M., J. M. Hollerbach. 2003. Kinematic Calibration Using a Plane Constraint. Dept. of Process Control, Technical University of Budapest. Budapest.

Khalil, W. y E. Dombre. 2004. Modeling, Identification & Control of Robots. Butterworth-Heinemann, Edición ilustrada.

Kim, Ch. S., W. H. Seo, S. H. Han, y Oussama Khatib. 2001. Fuzzy Logic Control of a Robot Manipulator based on a Visual Servoing. ISIE. Pusan, Korea.

Kurfess, Thomas R. 2005. Robotics and Automation Handbook. CRC Press.

Lahoz-Beltrá, Rafael. 2004. Bioinformática: simulación, vida artificial e inteligencia artificial. Ediciones Díaz de Santos.

López, Carlos Guillermo. 2002. Modelado y Validación del Modelo Cinemático y Pares Gravitacionales de un Robot Industrial. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Maas, Hans-Gerd. 1997. Dynamic Photogrammetric Calibration of Industrial Robots. Institute of Geodesy and Photogrammetry, Switzerland.

Martínez, Erika. 2001. Simulador de Manipuladores Robóticos Desacoplados 6R. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Martínez Ramírez, E., V. M. Hernández Guzmán, A. Zavala Río, C. G. López Guevara y C. S. López Cajún. 2001. Estudio de la cinemática de un robot industrial. Universidad Autónoma Querétaro, México.

Mejía, Alejandro. 2003. Simulador de Robots Seriales Redundantes 7R. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Motta, J. M. S. T. 2005. An Investigation of Singularities in Robot Kinematic Chains Aiming at Building Robot Calibration Models for Off-line Programming. Universidad de Brasilia, Brazil.

Ollero Baturone, Aníbal. 2001. Robótica Manipuladores y robots móviles. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores. Mexico D.F.: Alfaomega.

Shiakolas, P. S., K. L. Conrad, y T. C. Yih. 2002. On the Accuracy, Repeatability, and Degree of Influence of Kinematics Parameters for Industrial Robots. International Journal of Modelling and Simulation, Vol. 22, No. 3.

Spong, Mark W. y Vidyasagar, M. 1989. Robot Dynamics and Control. John Wiley & Sons, USA.

Tsai, Lung-Wen. 1999. Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators. Wiley-IEEE.

Uicker, J. J., G. R. Pennock, y J. E. Shigley. 2003. Theory of Machines and Mechanisms. Oxford University Press, Third Edition, USA.

Ye, S. H., Y. Wang, Y. J. Ren, y D. K. Li. 2006. Robot Calibration Using Iteration and Differential Kinematics. State Key Laboratory of Precision Measuring Technology and Instruments, Tianjin Univesrity, China.