



**Universidad Autónoma de Querétaro**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Licenciatura en Matemáticas Aplicadas**

**Sobre el género de las gráficas cúbicas  
bicirculantes simples**

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado  
de

**Licenciado en Matemáticas Aplicadas**

Presenta:

**Valentín Jiménez De Santiago**

Exp. 197660

Querétaro, Qro., mayo 2014



## ÍNDICE GENERAL

---

0	INTRODUCCIÓN	iii
i	TEORÍA BÁSICA	v
1	PRELIMINARES	1
1.1	Sobre la teoría de grupos	1
1.2	Sobre la teoría de gráficas	2
1.2.1	Definición de gráfica	3
1.2.2	Tipos de gráficas	3
1.2.3	Algunas gráficas especiales	6
2	TEORÍA DE GRÁFICAS TOPOLÓGICA	9
2.1	Mapeo gráfico	9
2.2	Isomorfismo	9
2.3	Cocientes regulares	11
2.4	Cubiertas regulares	12
3	GRÁFICAS DE VOLTAJE	13
3.1	Definición de gráfica de voltaje	13
3.2	Voltaje neto	14
3.3	Haciendo conexiones	17
3.4	Voltajes en pregráficas	19
ii	LAS GRÁFICAS CÚBICAS BICIRCULANTES	21
4	GRÁFICAS CÚBICAS BICIRCULANTES	23
4.1	Definición de gráfica cúbica bicirculante	23
4.2	Estructura de las clases de vértices	25
4.2.1	Clase $3R$	27
4.2.2	Clase $3S$	28
4.2.3	Clase $S+2R$	29
4.2.4	Clase $R+2S$	31
4.3	Algunas propiedades básicas de las gbc	31
5	SOBRE EL GÉNERO DE UNA GRÁFICA	37
5.1	Característica de una superficie	39
5.2	El género mínimo de una gráfica	41
5.3	El género máximo de una gráfica	42
5.4	Distribución de encajes de una gráfica	43
5.4.1	Algunos resultados sobre intervalos de distribución	44
5.5	Esquemas de rotación	44
5.6	Esquemas de rotación en gráficas de voltaje	46
6	ENCAJES DE LAS GRÁFICAS CÚBICAS BICIRCULANTES SIM- PLES	49
6.1	Encajes de prismas y escaleras de Möbius	49
6.1.1	Género mínimo de los prismas	49
6.1.2	Género mínimo de las escaleras de Möbius	50

6.1.3	Género máximo de los prismas	52
6.1.4	Género máximo de las escaleras de Möbius	53
6.2	Encajes de gráficas $T'(n, i, j)$	54
6.2.1	Género Mínimo	54
6.3	Encajes de gráficas $F'(n, i, j)$	55
6.3.1	Género Mínimo	55
6.3.2	Género Máximo	55
6.4	Encajes de gráficas $H'(n, i, j)$	56
6.4.1	Género Mínimo	56
6.4.2	Género Máximo	63
6.5	Encajes de gráficas $I'(n, i, j)$	73
6.5.1	Género Mínimo	73
6.5.2	Género Máximo	73
7	CONCLUSIONES	77
	BIBLIOGRAFÍA	79



## INTRODUCCIÓN

---

En teoría de gráficas topológica, un encaje de una gráfica  $G$  en una superficie  $S$  es un “dibujo” de la gráfica en la superficie donde puntos en la superficie representan vértices de la gráfica y las aristas se representan por curvas en la superficie de tal manera que estas curvas no se autointersecten. Cuando este encaje genera regiones, determinadas por los puntos y las curvas en la superficie, que son homeomorfas al disco estos encajes se llaman usualmente mapas o encajes 2-celulares.

El objetivo principal de esta tesis fue el estudio de los encajes de las gráficas conocidas como gráficas cúbicas bicirculantes y que fueron estudiadas por T. Pisanski, ya que estas gráficas bicirculantes tienen muchas propiedades simétricas interesantes, cuya descripción se realiza eficientemente a través de las llamadas gráficas de voltaje, que también son estudiadas en esta tesis.

El estudio de los encajes 2-celulares es amplio y existen técnicas para encontrar lo que se conoce como género mínimo y máximo de una gráfica, donde por género mínimo (máximo) orientable de una gráfica  $G$  se entiende como el mínimo (máximo) número de toros que se deben agregar a la esfera para encontrar una superficie donde  $G$  tenga un encaje 2-celular.

El problema de encontrar el género de una gráfica en el sentido de complejidad computacional resulta un problema np-duro; sin embargo, algunas de estas técnicas hacen uso de las gráficas de voltaje, esquemas o sistemas de rotación y la búsqueda de cierto tipo de árboles generadores en las gráficas en el caso del género máximo.

En esta tesis estudiamos las características de las gráficas cúbicas bicirculantes así como su representación por medio de gráficas de voltaje y estudiamos las técnicas más usuales en topología de gráficas con el objetivo de buscar los géneros máximos y mínimos de las gráficas cúbicas bicirculantes. En el transcurso de esta tesis logramos encontrar varios de estos géneros aunque para ciertas clases no pudimos lograrlo.

La tesis se divide en 6 capítulos que a su vez se dividen en 2 partes, la primera donde se estudia la teoría necesaria para poder estudiar los encajes y las gráficas cúbicas bicirculantes, en la segunda parte nos damos a la tarea de entender las gráficas bicirculantes cúbicas y sus posibles encajes.

En la primera parte que inicia en el capítulo 1 se mencionan los resultados principales de álgebra que se emplearán y se da una breve exposición de la teoría básica de gráficas.

En el capítulo 2 se da una breve introducción a la gráficas topológica: mapeos, isomorfismos, cocientes y cubiertas regulares, basada en [10].

En el capítulo 3 se da la teoría para manejar las gráficas de voltaje, que son una especie de código que permite describir de forma simple ciertas gráficas que son muy grandes pero que mantienen alto grado de regularidad.

En la segunda parte que inicia en el capítulo 4 se da la definición y propiedades de las gráficas cúbicas bicirculantes simples, dadas en [19], se estudia la primer parte de este artículo y se trata de dar una explicación más amplia de algunas de las demostraciones que en el artículo se presentan y que son de importancia para nuestro trabajo.

En el capítulo 5 se da una breve y más bien informal introducción a la topología de superficies y se trata el género de una gráfica, su relación con la topología y se describen los esquemas de rotación.

Finalmente en el Capítulo 6 se emplean las técnicas estudiadas para tratar de encontrar el género mínimo y máximo de las gráficas cúbicas bicirculantes simples, las cuales se dividirán en 4 familias de acuerdo al tipo de gráfica de voltaje de la que se derivan.

Parte I

TEORÍA BÁSICA





## PRELIMINARES

---

### 1.1 SOBRE LA TEORÍA DE GRUPOS

Para este trabajo se dan por hechos y conocidos los teoremas principales de la teoría de grupos, únicamente daremos algunas definiciones y demostraciones que resultan útiles tener en mente para los temas a tratar en esta tesis, quedando además de acuerdo en la notación que se empleará.

Un grupo se representará como la pareja  $(\Lambda, *)$ . Donde  $*$  es la operación del grupo. Aunque se hablará simplemente del grupo  $\Lambda$  si ya se sobreentiende la operación del grupo, la cual se denotará como  $a * b$  o simplemente  $ab$ .

Recordemos que un grupo  $(\Lambda, *)$  es *abeliano* si para cualesquiera  $a, b \in \Lambda$  se tiene que  $a * b = b * a$ .

En esta tesis se empleará principalmente el grupo de los enteros módulo  $n$  con la operación suma que se escribirá como  $(\mathbb{Z}_n, +)$ , es decir, consideraremos  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , donde si  $i, j \in \mathbb{Z}_n$  se define  $i * j = i + j \pmod{n}$ .

Para el presente trabajo cuando hagamos referencia al grupo  $\mathbb{Z}_n$  entenderemos que hablamos de  $(\mathbb{Z}_n, +)$ , donde el elemento neutro es el 0 y dado  $i \in \mathbb{Z}_n$  su inverso es  $-i$ ; sin embargo, para el caso general, dado un grupo  $\Lambda$ , el neutro se escribirá como  $\mathbf{1}$  y el inverso del elemento  $a \in \Lambda$  es  $a^{-1}$ .

Dado un elemento  $a$  de un grupo  $\Lambda$  definimos el orden de  $a$  como el entero positivo más pequeño para el que se cumple  $a^m = \mathbf{1}$ , y escribiremos  $\text{ord}(a) = m$ .

Un grupo  $\Lambda$  se dice generado por el elemento  $a$ , si

$$\Lambda = \{a^i \mid i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

En este caso al grupo  $\Lambda$  se le llama cíclico y se denota como  $\langle a \rangle$ .

De manera más general llamamos a  $S \subseteq \Lambda$  conjunto generador de un grupo  $\Lambda$  si todo elemento de  $\Lambda$  puede escribirse como un producto finito de elementos del conjunto  $S$  y de sus inversos, en este caso escribiremos

$$\Lambda = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

Para el siguiente teorema y de aquí en adelante  $\text{mcd}(a, b)$ , representa el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ .

**Teorema 1.1.1.** *Dado  $\langle a \rangle$  con  $n$  elementos, entonces  $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ .*

**Teorema 1.1.2.**  *$a$  es generador de  $\mathbb{Z}_n$  si y solo si  $\text{mcd}(n, a) = 1$ .*

**Teorema 1.1.3.** *Si  $j \in \mathbb{Z}_n$ , entonces  $\text{ord}(j) = n/\text{mcd}(n, j)$ .*

*Demostración.* Primero, en efecto  $j^{n/\text{mcd}(n, j)} = 0$ , pues

$$j^{n/\text{mcd}(n, j)} = (j^n)^{\frac{1}{\text{mcd}(n, j)}} = (0)^{\frac{1}{\text{mcd}(n, j)}} = 0.$$

Segundo, se debe tener que  $j^{\text{ord}(j)} = j(\text{ord}(j)) = kn$  para algún entero positivo  $k$  (sin considerar módulos). Así que tenemos

$$\begin{aligned} \text{ord}(j) &= kn/j \\ &= \frac{k[n/\text{mcd}(n, j)]\text{mcd}(n, j)}{[j/\text{mcd}(n, j)]\text{mcd}(n, j)} \\ &= \frac{k[n/\text{mcd}(n, j)]}{j/\text{mcd}(n, j)} \end{aligned}$$

Esto implica que debe ser  $k = j/\text{mcd}(n, j)$ , pues es el valor más pequeño de  $k$  tal que  $\text{ord}(j)$  es entero. Luego,

$$\text{ord}(j) = kn/j = \frac{[j/\text{mcd}(n, j)]n}{j} = n/\text{mcd}(n, j)$$

□

Recordar también que dados dos subgrupos,  $S, T$  del grupo  $\Lambda$ , decimos que  $T$  es conjugado de  $S$  si existe  $g \in \Lambda$  tal que  $T = gSg^{-1}$ .

Observar que si  $T$  es conjugado de  $S$  entonces  $T \cong S$ , es decir,  $T$  y  $S$  son isomorfos.

Finalmente recordar que el índice de un subgrupo  $H$  de un grupo  $\Lambda$  es el número de clases laterales izquierdas generadas por  $H$ .

## 1.2 SOBRE LA TEORÍA DE GRÁFICAS

En esta sección se exponen las definiciones y teoremas básicas de la Teoría de Gráficas.

### 1.2.1 Definición de gráfica

**Definición 1.2.1.** Una gráfica  $G = G(V(G), E(G))$  consiste de un conjunto  $V(G)$  cuyos elementos son llamados vértices, y un conjunto  $E(G)$  de pares (no ordenados) de vértices, a los elementos del conjunto  $E(G)$  se les llama aristas.

Para el presente trabajo el conjunto  $V(E)$  se considerará siempre finito.

El *tamaño* de una gráfica es la cantidad de aristas que tiene y se denota como  $|E(G)|$ .

El *orden* de una gráfica es la cantidad de vértices que tiene y se denota como  $|V(G)|$ .

Se dice que dos vértices,  $a, b \in V(G)$ , son *adyacentes* si  $\{a, b\} \in E(G)$ .

Una arista,  $e = \{a, b\} \in E(G)$  es incidente a un vértice  $v$ , si  $v \in \{a, b\}$ .

El *grado* de un vértice es la cantidad de aristas incidentes a él.

Dada una gráfica  $G$  le asignamos una representación visual (RV) siguiendo los siguientes pasos:

1. Cada vértice se representa con un punto (dos vértices distintos no tienen asignado el mismo punto).
2. Si  $\{a, b\} \in E(G)$  entonces trazamos una curva del punto que representa al vértice  $a$ , al punto que representa al vértice  $b$ .

### 1.2.2 Tipos de gráficas

Sea  $G(V(G), E(G))$  una gráfica y  $a, b \in V(G)$ .

Si  $e = \{a, a\} \in E(G)$ , a la arista  $e$  se le llama *lazo*. Una arista que no es un lazo se llama *arista propia*.

Si  $f = \{a, b\} \in E(G)$ , aparece más de una vez en  $E(G)$ , se dice que  $f$  es una *multiarista*.

Una *arista dirigida* es una arista a cuyos elementos se les asigna un orden teniendo como resultado un par ordenado de vértices. La RV de una arista dirigida,  $e$ , consiste de una flecha que va de la primera coordenada a la segunda, ésta será llamada la *dirección positiva* de la arista y se denotará  $e^+$  (la otra dirección es la *dirección negativa* de la arista, y se indica  $e^-$ ).

Si se le asigna un orden a la arista  $\{a, b\}$ , digamos a primera entrada y b segunda entrada, entonces se escribirá  $(a, b)$ . Luego el otro caso se escribe como  $(b, a)$ .

Si en la gráfica  $G$  todas las aristas son aristas dirigidas, a  $G$  se le llama *gráfica dirigida*.

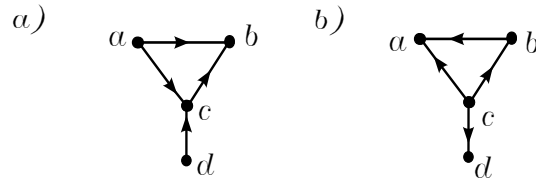


Figura 1: a) muestra la gráfica dirigida  $G$  donde  $E = \{(a, b), (c, b), (d, c), (a, c)\}$ ;  
 b) muestra la gráfica dirigida  $G$  donde  $E = \{(b, a), (c, b), (c, d), (c, a)\}$ .

Si las aristas dirigidas  $(a, b)$  y  $(b, a)$  son elementos de  $E(G)$ , la RV de ambas aristas se sustituye por una sola línea sin flechas y se dice que es una arista doblemente dirigida.

Definiremos una semiarista como una arista que comienza y termina en el mismo vértice sin ser un lazo, en la figura 2 se muestra su representación; esto implica que al dar direcciones a una pregráfica, una semiarista es automáticamente doblemente dirigida. Intuitivamente una semiarista es una arista doblada sobre sí misma.

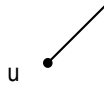


Figura 2: Semiarista

**Definición 1.2.2.** Sea  $G = G(V(G), E(G))$  una gráfica. Decimos que  $G$  es simple si  $E(G)$  no contiene lazos ni multiaristas. Si  $E(G)$  contiene semiaristas, a  $G$  se le llama pregráfica. Si  $G$  no es pregráfica, a  $G$  se le llama gráfica general. Una gráfica general que no es simple le llamamos multigráfica.

Cuando se hable de una gráfica  $G$  se entenderá que es una gráfica general simple no dirigida a menos que se especifique otra cosa.

Dada una gráfica  $G$  definimos:

*Camino* (entre el vértice  $a_0$  y  $a_n$ ): como una sucesión vértice arista

$$a_0, e_0, a_1, e_1, \dots, a_{n-1}, e_{n-1}, a_n, \text{ para } i = 0, 1, \dots, n,$$

donde  $a_i \in V(G)$  y donde  $e_i = \{a_i, a_{i+1}\} \in E(G)$ . Podemos entonces caracterizar un camino como la sucesión  $a_0, a_1, \dots, a_n$  o como la sucesión  $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ , que se denotará como  $W_n$ . Un camino es *cerrado* si el vértice inicial coincide con el vértice final. Un camino es *abierto* si no es cerrado.

Cuando la gráfica sea dirigida conviene a veces denotar un camino por  $e_0^{\alpha_0}, e_1^{\alpha_1}, \dots, e_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ , donde  $\alpha_i \in \{+, -\}$  dependiendo de la dirección de la arista  $e_i$ .

*Ciclo*: camino cerrado de 3 o más vértices, con todos los vértices distintos. Si el ciclo tiene  $n$  vértices se escribe  $C_n$ .

*Trayectoria:* Es un camino abierto donde todos los vértices son distintos (y por tanto todas las aristas son distintas). Si la trayectoria tiene  $n$  vértices entonces escribimos  $T_n$ .

**Definición 1.2.3.** Una gráfica  $G = G(V(G), E(G))$  es conexa si para cualesquiera  $a, b \in V(E)$  existe un camino que inicia en  $a$  y termina en  $b$ .

**Definición 1.2.4.** Una subgráfica de una gráfica  $G = G(V(G), E(G))$  es una gráfica  $H(V(H), E(H))$  donde  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Definición 1.2.5.** Si  $H(V(H), E(H))$  es una subgráfica de  $G(V(G), E(G))$  que cumple que, si  $v_1, v_2 \in V(H)$  entonces  $\{v_1, v_2\} \in E(H)$  si y solo si  $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ , entonces a  $H(V(H), E(H))$  se le llama subgráfica inducida.

**Definición 1.2.6.** Una subdivisión de una gráfica  $G = G(V(G), E(G))$  es una nueva gráfica obtenida después de haber hecho una secuencia de subdivisiones en las aristas; una subdivisión de una arista  $\{u, w\} \in E(G)$  se obtiene agregando un vértice  $v$  en  $V(G)$  tal que ahora  $\{u, w\} \notin E(G)$  pero  $\{u, v\} \in E(G)$  y  $\{v, w\} \in E(G)$ .

**Ejemplo 1.2.1.** En la siguiente figura, a) muestra un lazo, b) una subdivisión de dicho lazo, el cual es un ciclo.

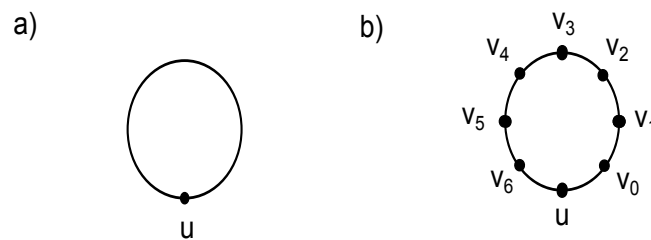


Figura 3: La gráfica en b) se obtiene subdividiendo la gráfica en a) 7 veces.

**Definición 1.2.7.** Dada una gráfica conexa  $G$ , un vértice de corte es un vértice  $v$  tal que  $G - v$  es disconexa. Un bloque es una subgráfica conexa maximal de  $G$  la cual no tiene vértices de corte.

**Ejemplo 1.2.2.** En la siguiente figura la gráfica en a) tiene 2 bloques los cuales se muestran en b), de aquí que  $v_1$  es un vértice de corte.

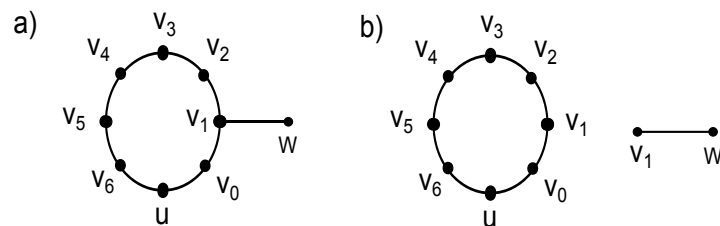


Figura 4: Bloque

## 1.2.3 Algunas gráficas especiales

## 1.2.3.1 Árboles

**Definición 1.2.8.** Un árbol es una gráfica conexa que no contiene ciclos.

**Definición 1.2.9.** Si  $T = T(V(T), E(T))$  es una subgráfica de la gráfica conexa  $G(V(G), E(G))$  y además  $T$  es un árbol con  $V(T) = V(G)$ , a  $T$  se le llama árbol generador.

## 1.2.3.2 Gráficas completas

**Definición 1.2.10.** La gráfica  $G$  es completa si todos sus vértices son adyacentes. La gráfica completa de  $n$  vértices se denota como  $K_n$ .

## 1.2.3.3 Gráficas bipartitas

**Definición 1.2.11.** Una gráfica es bipartita si sus vértices pueden dividirse en dos conjuntos  $A, B$ , tales que todos los elementos de  $A$  son no adyacente entre ellos y todos los elementos de  $B$  son no adyacentes entre ellos.  $A, B$  deben ser no vacíos.

Si todo elemento de  $A$  es adyacente con todo elemento de  $B$  y todo elemento de  $B$  es adyacente con todo elemento de  $A$  y  $|A| = m, |B| = n$ , se llama bipartita completa y se denota como  $K_{m,n}$ .

## 1.2.3.4 Flores

**Definición 1.2.12.** Una flor es una gráfica que consiste de un solo vértice y todas las aristas son lazos, si dicha gráfica tiene  $n$  lazos se escribe como  $B_n$ . A una gráfica formada por la unión de  $m$  flores le llamamos ramo, si cada flor tiene respectivamente  $a_1, a_2, \dots, a_m$  lazos al ramo lo denotaremos como  $R_{a_1, a_2, \dots, a_m}$ .

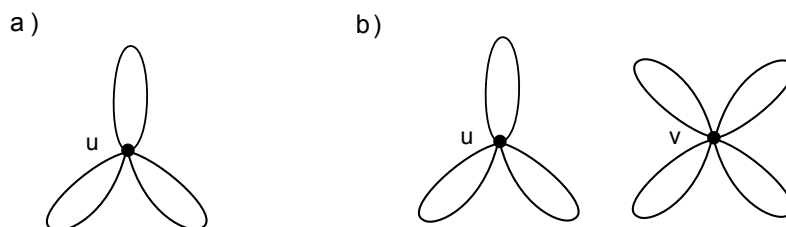


Figura 5: En a) se muestra la flor  $B_3$ , en b) se muestra el ramo  $R_{3,4}$

1.2.3.5 Escalera de Möbius

**Definición 1.2.13.** La gráfica llamada escalera de Möbius,  $M_n$ , se define de la siguiente manera:

$$V(M_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}\}$$

$$E(M_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\}, i = 0, 1, \dots, 2n - 1\} \cup \{\{v_i, v_{i+n}\}, i = 0, 1, \dots, n - 1\}$$

Las operaciones son módulo  $2n$ .

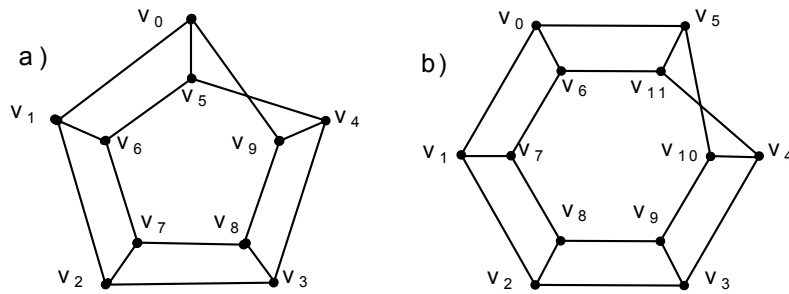


Figura 6: En a) se representa a  $M_5$ , en b) a  $M_6$ .

1.2.3.6 Gráficas de Petersen Generalizadas

**Definición 1.2.14.** Las gráficas de Petersen Generalizadas las cuales denotaremos como  $GP(n, r)$ , se definen de la siguiente manera:

$$V(GP(n, r)) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}.$$

$$E(GP(n, r)) = \{\{u_i, u_{i+1}\}, i = 0, 1, \dots, n - 1\} \cup \{\{v_i, v_{i+r}\}, i = 0, 1, \dots, n - 1\} \cup \{\{v_i, u_i\}, i = 0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Las operaciones son módulo  $2n$ .

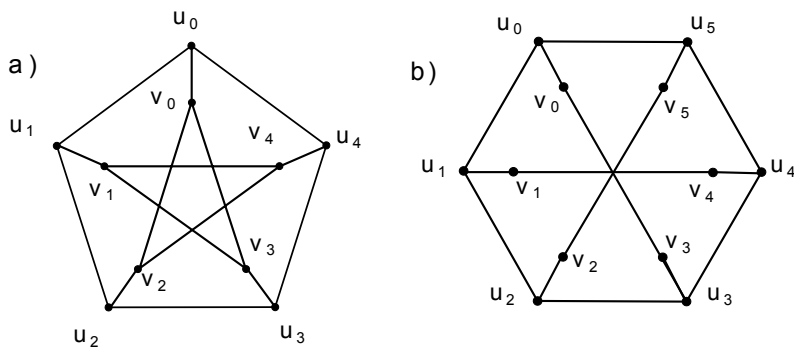


Figura 7: En a) se representa a  $GP(5, 2)$ , en b) a  $GP(6, 3)$ .

1.2.3.7  $n$ -Prismas

**Definición 1.2.15.** Los  $n$ -Prismas son el subconjunto de las gráficas generalizadas de Petersen cuando  $r = 1$ , es decir, son las gráficas  $GP(n, 1)$  que denotaremos como  $P_n$ . Ver figura 8.

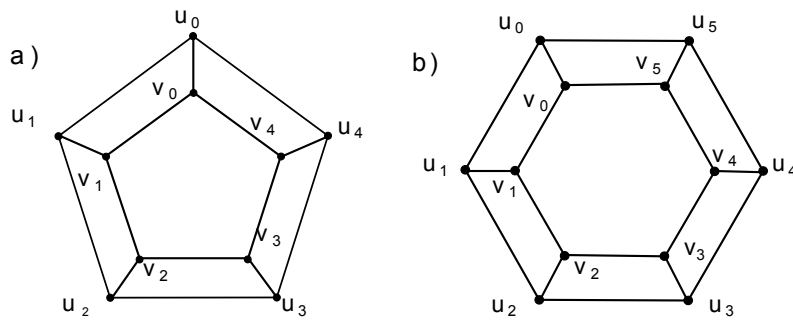


Figura 8: En a) se representa a  $GP(5, 1)$ , en b) a  $GP(6, 1)$ .

### 1.2.3.8 Gráficas de Cayley

En la literatura existen varias definiciones de gráficas de Cayley, pero en el presente trabajo solo utilizaremos la siguiente:

**Definición 1.2.16.** Sea  $\Lambda$  un grupo, y sea  $\Gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un conjunto generador de  $\Lambda$ , i.e.  $\Lambda = \langle \Gamma \rangle$ . Definimos la gráfica de Cayley,  $C(\Lambda, \Gamma)$ , de la siguiente manera:

$$V(G) = \{\Lambda\},$$

$$E(G) = \{(a, b)\} \text{ tal que } a \in \Lambda \text{ y } b = ax_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Notar que una gráfica de Cayley es una gráfica dirigida, además en ocasiones se toma  $\Gamma$  sin que sea un subconjunto generador de  $\Lambda$ .

Dada una gráfica de Cayley  $C(\Lambda, \Gamma)$ , si ignoramos la dirección dada a las aristas, que en la representación visual sería equivalente a dibujar aristas sin flechas, a la nueva gráfica se le denotará como  $C(\Lambda, \Gamma)^0$ .

### 1.2.3.9 Gráfica Circulante

Una gráfica circulante es una gráfica de Cayley sobre  $\mathbb{Z}_n$ ,  $C(\mathbb{Z}_n, \Gamma)$ ; donde  $\Gamma$  no tiene que ser un subconjunto generador de  $\mathbb{Z}_n$ .

### 1.2.3.10 Número Cromático de una Gráfica

Dada una gráfica  $G = G(V(G), E(G))$  y un conjunto de colores  $S = \{a, b, \dots\}$ , una coloración de  $G$  con colores de  $S$  consiste en asignar a cada elemento de  $V(G)$  un solo elemento de  $S$  de manera que los extremos de cada arista de  $G$  reciban colores distintos.

**Definición 1.2.17.** El número cromático,  $\chi(G)$ , de  $G$  es el mínimo número de colores necesarios para colorear  $G$ .



## TEORÍA DE GRÁFICAS TOPOLÓGICA

---

En este capítulo se introducen los conceptos que son fundamentales para el estudio de las gráficas de voltaje.

### 2.1 MAPEO GRÁFICO

**Definición 2.1.1.** Sean  $G = G(V(G), E(G))$  y  $G' = G'(V(G'), E(G'))$  gráficas, llamamos mapeo gráfico a la función  $\Phi : V(G) \rightarrow V(G')$  que preserva adyacencias, es decir, si  $\{u, v\} \in E(G) = E$  entonces  $\{\Phi(u), \Phi(v)\} \in E(G')$ .

**Ejemplo 2.1.1.** En la siguiente figura se muestra un mapeo gráfico con la siguiente función:

$$\Phi : V(G) \rightarrow V(G')$$

$$\Phi(a) = \Phi(b) = \Phi(c) = \Phi(d) = \Phi(e) = u.$$

$$\Phi(a') = \Phi(b') = \Phi(c') = \Phi(d') = \Phi(e') = v.$$

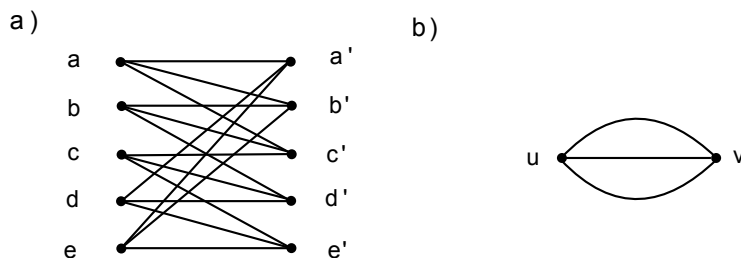


Figura 9: Mapeo Gráfico

donde dada una arista en la gráfica a), se le puede asignar cualquiera de las 3 aristas de la gráfica b), pudiendo usar solamente una de ellas para todas.

### 2.2 ISOMORFISMO

**Definición 2.2.1.** Sean  $G$  y  $G'$  gráficas, decimos que  $G$  y  $G'$  son isomorfas con isomorfismo  $\Phi$  si la función  $\Phi$  definida como en la sección anterior es biyectiva y además  $\Phi^{-1}$  también preserva aristas.

**Ejemplo 2.2.1.** En la figura se muestra un isomorfismo entre 2 gráficas, el isomorfismo es:

$\Phi : V \longrightarrow V'$   
 $\Phi(a) = 1, \Phi(a') = 1', \Phi(b) = 2, \Phi(b') = 2', \Phi(c) = 3, \Phi(c') = 3', \Phi(d) = 4, \Phi(d') = 4', \Phi(e) = 5, \Phi(e') = 5'$ .

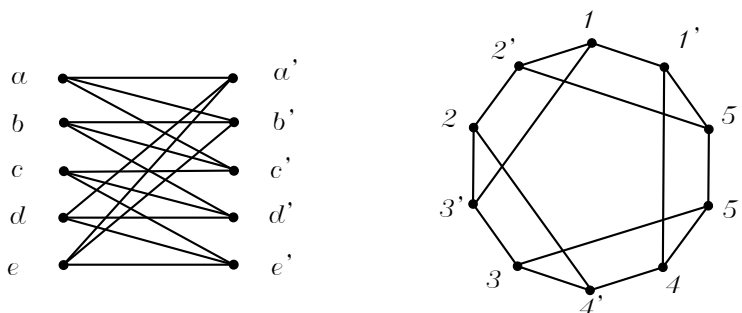


Figura 10: Isomorfismo

Podemos ahora definir lo que es un automorfismo.

**Definición 2.2.2.**  $\Phi$  es automorfismo si es un isomorfismo de  $G$  en  $G$ .

Sabemos que el conjunto de todos los automorfismos de una gráfica  $G$  forma un grupo, se le llama *Grupo de automorfismos* y se denota  $\text{Aut}(G)$ .

También podemos definir ahora lo siguiente:

**Definición 2.2.3.** Una gráfica es *vértice transitiva* si dados dos vértices,  $v_1, v_2$ , existe un automorfismo,  $\Phi$ , que envía uno de los vértices dados en el otro vértice dado, es decir,  $\Phi(v_1) = v_2$  para cualesquiera  $v_1, v_2 \in V(G)$ .

**Definición 2.2.4.** Una gráfica es *arista transitiva* si dadas dos aristas existe un automorfismo que envía una de las aristas dadas en la otra arista dada.

**Ejemplo 2.2.2.** En la figura 11 se muestra  $P_4$ , que es vértice transitiva pues se llega de un vértice a cualquier otro ya sea mediante rotación, o bien, se intercambia el ciclo interno con el ciclo externo y luego se hace una rotación; sin embargo, no es arista transitiva pues, por ejemplo, la arista  $\{u_0, v_0\}$  no puede enviarse a  $\{v_0, v_2\}$  mediante automorfismo.

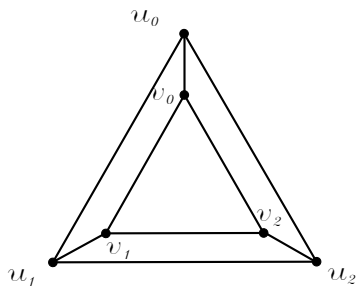


Figura 11: Gráfica vértice transitiva

2.3 COCIENTES REGULARES

Sea  $G = G(V(G), E(G))$  una gráfica y sea  $\Lambda$  un grupo tal que a cada  $a \in \Lambda$  se le puede asignar un automorfismo  $\Phi_a : G \rightarrow G$ , y se cumple que:

1. Para  $\mathbf{1} \in \Lambda$ , el neutro del grupo,  $\Phi_{\mathbf{1}} : G \rightarrow G$  es el automorfismo identidad.
2. Para  $a, b \in \Lambda$ ,  $\Phi_a \Phi_b = \Phi_{ab}$ .

Esto es lo que se llama *acción* del grupo  $\Lambda$  sobre la gráfica  $G(V, E)$ .

Si además se cumple

3. Para todo elemento  $c \neq \mathbf{1}$  en el grupo, se tiene que  $\Phi_c(v) \neq v$ , donde  $v \in V(G)$ ,

se dice que  $\Lambda$  actúa libremente sobre  $G$ .

**Ejemplo 2.3.1.** La gráfica en a) de la figura solo tiene 2 automorfismos que son la identidad y el automorfismo que envía el vértice  $v$  en el vértice  $w$  dejando fijo  $u$ , por lo que para esta gráfica no existe un grupo que actúe libremente sobre ella; pero, para la gráfica en b),  $\mathbb{Z}_2$  es un grupo que actúa libremente sobre ella.

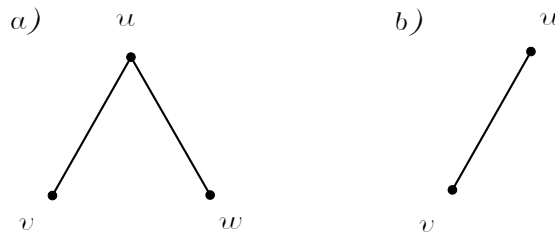


Figura 12: Automorfismo

Podemos entonces hablar de la *órbita* del vértice  $v \in V(G)$ , que definimos como  $[v] = \{\Phi_a(v), \text{ para toda } a \in \Lambda\}$ . El conjunto de las órbitas generadas por  $\Lambda$  sobre los vértices se denota como  $V/\Lambda$ .

Análogamente para cualquier arista  $e = \{u, v\} \in E(G)$ , la *órbita* de  $e$  bajo  $\Phi$  es  $[e] = \{\{\Phi_b(u), \Phi_b(v)\}, \text{ para todo } b \in \Lambda\}$ . El conjunto de las órbitas generadas por  $\Lambda$  sobre las aristas (ya que  $\Phi$  preserva aristas) se denota como  $E/\Lambda$ .

Es importante notar que tanto las órbitas de los vértices así como las órbitas de las aristas hacen una partición en los vértices y en las aristas respectivamente.

**Ejemplo 2.3.2.** El grupo de rotaciones con 5 elementos, que es isomorfo a  $\mathbb{Z}_5$ , actúa libremente sobre la gráfica de Petersen originando 2 órbitas de vértices y 3 órbitas de aristas como se aprecia en la figura, siendo la gráfica de la izquierda un cociente regular.

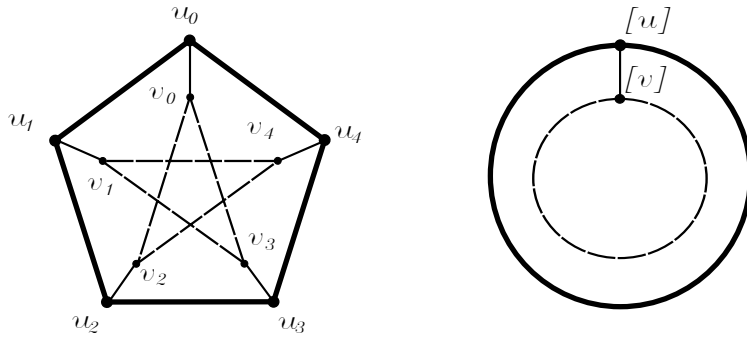


Figura 13: Cociente regular

**Definición 2.3.1.** Dada una gráfica  $G = G(V(G), E(G))$  y un grupo  $\Lambda$  que actúa libremente sobre  $G$ , definimos el cociente regular de  $G$ , como la gráfica

$$G/\Lambda = G/\Lambda(V(G/\Lambda), E(G/\Lambda)).$$

Adicionalmente es conveniente definir

**Definición 2.3.2.** Acción transitiva de un grupo  $\Lambda$  sobre una gráfica dada  $G = G(V(G), E(G))$ , es una acción que genera una sola órbita.

#### 2.4 CUBIERTAS REGULARES

Dada la gráfica cociente  $G/\Lambda$  de  $G$  como se definió en la sección anterior, podemos definir la función cociente,  $q_\Lambda$ , de la siguiente forma:

$$q_\Lambda : G \longrightarrow G/\Lambda$$

$$q_\Lambda(x) = [x]$$

donde  $x \in V(G)$ .

Sean  $\bar{G} = \bar{G}(V(\bar{G}), E(\bar{G}))$  y  $G = G(V(G), E(G))$  gráficas, sea  $\Lambda$  un grupo que actúa libremente sobre  $G$ , supongamos además que existe la función  $\Phi$  tal que es un isomorfismo  $\Phi : G/\Lambda \longrightarrow \bar{G}$ ; finalmente considérese  $q_\Lambda : G \longrightarrow G/\Lambda$ , definimos entonces:

$$p_0 : G \longrightarrow \bar{G}$$

tal que

$$p_0 = \Phi \circ q_\Lambda,$$

a la función  $p_0$  se le llama *proyección de la cubierta regular*, a  $G$  se le llama *cubierta regular* y a  $\bar{G}$  se le llama *espacio base*.

## GRÁFICAS DE VOLTAJE

Las gráficas de voltaje son una de las técnicas más útiles para dar una descripción sencilla de ciertas familias de gráficas y dado que jugarán un papel muy importante para el desarrollo del problema a resolver, en este capítulo se presenta la teoría básica de gráficas de voltaje.

## 3.1 DEFINICIÓN DE GRÁFICA DE VOLTAJE

**Definición 3.1.1.** Una Gráfica de Voltaje es la tripleta  $G(V, E, \psi)$ , donde  $G(V, E)$  o simplemente  $G$  es una gráfica dirigida, la cual puede ser multigráfica,  $\Lambda$  un grupo y  $\psi : E(G) \rightarrow \Lambda$ , es una función que asigna a cada arista de  $G$ , un elemento del grupo.

Al elemento  $\alpha$  del grupo  $\Lambda$  asignado a una arista  $e \in E(G)$ , por medio de  $\psi$ , se le llama *voltaje*.

A partir de una gráfica de voltaje se construye la llamada *gráfica derivada*.

Para la siguiente definición si  $(x, y) \in V \times \Lambda$  escribiremos  $x_y = (x, y)$ . También para la arista  $(e, z) \in E(G) \times \Lambda$  escribimos  $e_z = (e, z)$ .

**Definición 3.1.2.** Sea  $G = G(V, E, \psi)$  una gráfica de voltaje, definimos la gráfica derivada como  $G^\psi = G^\psi(V \times \Lambda, E_\psi)$  donde  $V \times \Lambda$  es el conjunto de vértices de  $G$  y las aristas son

$$E_\psi = \{(x_\alpha, y_{\alpha\psi(e)}) \mid \forall \alpha \in \Lambda, \forall e = (x, y) \in E(G)\}.$$

A cada arista en  $E_\psi$  le llamaremos *arista derivada*.

**Ejemplo 3.1.1.** En este ejemplo obtenemos la gráfica de Petersen,  $GP(10, 2)$ , como gráfica derivada de la gráfica de voltaje representada a la izquierda de la siguiente figura. Asumiremos que  $\Lambda = \mathbb{Z}_5$  y los voltajes son 0, 1, 2 como se muestra en la figura.

Sea  $G(V, E, \psi) = G$  una gráfica de voltaje y  $G^\psi(V \times \Lambda, E_\psi) = G^\psi$  la gráfica derivada correspondiente:

$G^\psi$  es también una gráfica dirigida, aunque en algunas ocasiones se considerará dicha gráfica sin atender a las direcciones de las aristas.

Dada una arista  $e = (x, y) \in G(V, E, \psi)$  existe una única arista derivada que tiene como vértice inicial  $x_\alpha$ , dado por  $e$ , y que corresponde a la arista  $(x_\alpha, y_{\alpha\psi(e)})$ .

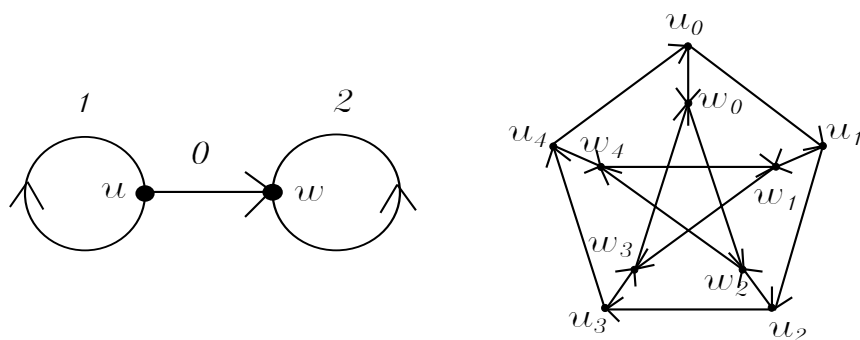


Figura 14: Gráfica de Petersen como gráfica derivada.

Sea  $e = (x, y) \in E(G)$ . Ya vimos en la sección 1.2.2 que, por ejemplo,  $e_a^+$  es la dirección positiva de la arista, es decir, corresponde a ir del vértice  $x_a$  al vértice  $y_{a\psi(e)}$ ; por otro lado  $e_a^-$  significa recorrer la arista  $e_a$  de  $y_{a\psi(e)}$  a  $x_a$ , esto nos lleva de manera natural a hablar de un voltaje para  $e^-$ , el cual será  $\psi(e)^{-1}$ .

Al conjunto  $\{v \times \Lambda\}$  para cada  $v \in V(G)$  se le llama *fibra* sobre  $v$ . Análogamente para cada  $e \in E(G)$  al conjunto  $\{e \times \Lambda\}$  se le llama *fibra* sobre  $e$ .

Si  $e = (x, y) \in E(G)$  es arista propia, la arista derivada del elemento  $e_a$  en la fibra sobre  $e$  tiene como vértice final  $y_{a\psi(e)}$ ; sabemos que si  $a, b \in \Lambda$  y  $a\psi(e) = b\psi(e)$  entonces  $a = b$ , esto implica que la fibra sobre  $e$  es isomorfa a  $|\Lambda|$  copias de  $K_2$ , donde  $|\Lambda|$  se refiere a la cardinalidad del grupo.

En general si  $e = (x, x)$  y  $\text{ord}(\psi(e)) = n$  entonces la fibra sobre  $e$  está formada por  $|\Lambda|/n$  ciclos de tamaño  $n$ .

**Ejemplo 3.1.2.** Del ejemplo 3.1.1, consideremos la fibra que corresponde a la arista  $\{u, w\}$  en la gráfica derivada, la cual es isomorfa a  $|\mathbb{Z}_5| = 5$  copias de  $K_2$ , y cada lazo de la gráfica de voltaje deriva en un ciclo de tamaño 5, ya que  $\text{ord}(1) = \text{ord}(2) = 5$ .

### 3.2 VOLTAJE NETO

Sea  $G(V, E, \psi)$  una gráfica de voltaje y sea  $G^\psi$  la gráfica derivada respectiva.

**Definición 3.2.1.** Sea  $W = e_0^{\alpha_0}, e_1^{\alpha_1}, \dots, e_n^{\alpha_n}$ , donde  $\alpha_i \in \{+, -\}$ , un camino en  $G$ . Definimos el voltaje neto de  $W$  como

$$\psi_N(W) = \psi(e_0^{\alpha_0})\psi(e_1^{\alpha_1}) \cdots \psi(e_n^{\alpha_n}), \text{ donde } \psi(e_i^{\alpha_i}) = \psi(e_i)^{\alpha_i}$$

Observar que si  $W = e_0^{\alpha_0}, e_1^{\alpha_1}, \dots, e_n^{\alpha_n}$ , donde  $\alpha_i = + o -$ , es un camino en  $G$  y si suponemos que el vértice inicial de  $e_0^{\alpha_0}$  es  $x$  y si elegimos un  $x_a$  en la fibra de  $x$ , entonces existe un único camino,  $W^\psi$ , en  $G^\psi$  el cual está completamente definido por los voltajes asociados a cada arista  $e_i^{\alpha_i}$ .

A cada camino,  $W^\psi$ , que comienza en un determinado  $x_a$  se le llama *levantamiento* de  $W$ ; ya que dicho camino sólo depende del vértice  $a$ , que es donde comienza, nos referiremos a un levantamiento como  $W_a$ .

También es fácil ver que si  $W$  es un camino del vértice  $x$  al vértice  $y$ , entonces  $W_a$  es un levantamiento que comienza en  $x_a$  y termina en  $y_{a\psi_N(W)}$ .

**Ejemplo 3.2.1.** En la gráfica de voltaje del ejemplo 3.1.1 podemos escoger el camino

$$W = \{u, u\}^{-1}, \{u, u\}^{-1}, \{u, u\}^{-1}, \{u, u\}^{-1}, \{u, u\}^{-1}$$

Este camino tiene como levantamiento en la gráfica de Petersen el ciclo externo recorrido en sentido inverso.

**Definición 3.2.2.** Llamamos *proyección natural* a la función  $p_1 : G^\psi \rightarrow G$  que manda la fibra sobre  $v \in V(G)$  al vértice  $v$  y la fibra sobre  $e \in E(G)$  a la arista  $e$ .

**Teorema 3.2.1.** Sea  $C$  un  $k$ -ciclo en una gráfica de voltaje  $G(V, E, \psi)$ ,  $\psi : E(G) \rightarrow \Lambda$ , tal que  $\text{ord}(\psi_N(C)) = m$ , entonces  $p_1^{-1}(C)$  es isomorfo a  $|\Lambda|/m$ ,  $km$ -ciclos.

*Demostración.* Sea  $x$  el vértice inicial de una arista de  $C$ , nos fijamos ahora en  $x_a$ , en la fibra de  $x$ , comenzamos a trazar en  $G^\psi$  el camino único,  $W_a = C_a$ , determinado por  $W = C$ , vemos que en  $W_a$  se encuentran los vértices  $x_a, x_{a\psi_N(W)}$ , unidos por un tramo del levantamiento  $W_a$  después de haber dado una vuelta completa en  $C$ ; vemos entonces que este proceso se repetirá hasta que  $a\psi_N(W)^n = a$ , esto es, cuando  $n = m$ , que será entonces un ciclo de tamaño  $km$ .

De lo anterior vemos que hemos usado  $m$  vértices de la fibra de  $x$  por tanto debe haber  $|\Lambda|/m$  ciclos de tamaño  $km$ .  $\square$

Veamos ahora otra noción topológica aplicada a gráficas. Esto será útil en capítulos posteriores.

Ya hemos definido el voltaje neto  $\psi_N(W)$  donde  $W$  es un camino en una gráfica de voltaje  $G(V, E, \psi)$ , definimos ahora el siguiente conjunto:

**Definición 3.2.3.** Sea  $W_v$  un camino cerrado, es decir, que comienza y termina en el vértice  $v$ , llamamos *grupo local* en el vértice  $v$  al conjunto  $\Lambda_v$  que consiste de todos los posibles caminos cerrados en  $v$ ,  $\Lambda_v = \{\psi_N(W_v)\}$ .

**Ejemplo 3.2.2.** La gráfica de voltaje de la figura está considerada sobre el grupo  $\mathbb{Z}_4$ ; el grupo local del vértice  $u$  es simplemente  $\{0, 2\}$ , algunos de los caminos posibles son

$$\begin{aligned} W_u &: 2, -2 \\ W_u &: 0, 0 \\ W_u &: 2, 0 \\ W_u &: 2, 0, 2, 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

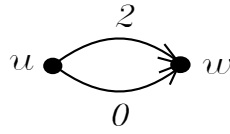


Figura 15: Grupo local

**Teorema 3.2.2.**  $\Lambda_v$  es subgrupo de  $\Lambda$ .

*Demostración.* Solo es necesario demostrar que el neutro y los inversos están en  $\Lambda_v$ . El neutro está: Sea  $W_v$  un camino cerrado cualquiera, a este camino le añadimos  $W_v$  recorrido en sentido inverso, tenemos entonces un nuevo camino cuyo voltaje neto es 1.

Si el camino cerrado  $W_v$  tiene voltaje neto  $\alpha$ , entonces el camino que se obtiene al recorrer  $W_v$  en sentido inverso tiene voltaje  $\alpha^{-1}$  y es un camino cerrado en  $v$ , por lo tanto los inversos están en  $\Lambda_v$ . □

**Teorema 3.2.3.** Si los vértices  $x, y \in G(V, E, \psi)$  están en la misma componente conexa entonces  $\Lambda_x$  y  $\Lambda_y$  son conjugados en  $\Lambda$ .

*Demostración.* Sea  $w_1$  un camino cerrado en  $x$ ,  $w_2$  un camino cerrado en  $y$ , así que  $\psi_N(w_1) \in \Lambda_x$ ,  $\psi_N(w_2) \in \Lambda_y$ . Formamos entonces el camino (cerrado en  $y$ )  $w_{12}^{-1}w_1w_{12}$ , donde  $w_{12}$  es un camino con dirección de  $x$  a  $y$ , así que

$$\psi_N(w_{12}^{-1}w_1w_{12}) = \psi_N(w_{12})^{-1}\psi_N(w_1)\psi_N(w_{12}) \in \Lambda_y.$$

Luego,

$$\psi_N(w_{12})\psi_N(w_{12}^{-1}w_1w_{12})\psi_N(w_{12})^{-1} = \psi_N(w_1) \in \psi_N(w_{12})\Lambda_y\psi_N(w_{12})^{-1}.$$

Por tanto,  $\Lambda_x \subset \psi_N(w_{12})\Lambda_y\psi_N(w_{12})^{-1}$

Por otro lado, sabemos que  $\psi_N(w_2) \in \Lambda_y$ , vemos que  $w_{12}w_2w_{12}^{-1}$  es un camino cerrado en  $x$  y que



$$\psi_N(w_{12}w_2w_{12}^{-1}) = \psi_N(w_{12})\psi_N(w_2)\psi_N(w_{12})^{-1} \in \Lambda_x,$$

así que  $\psi_N(w_{12})\Lambda_y\psi_N(w_{12})^{-1} \subset \Lambda_x$ .

Por tanto  $\psi_N(w_{12})\Lambda_y\psi_N(w_{12})^{-1} = \Lambda_x$ , donde  $\psi_N(w_{12}) \in \Lambda$ . □

**Teorema 3.2.4.** *Si  $G(V, E, \psi)$  es conexa, entonces el número de componentes en  $G^\psi$  es  $[\Lambda : \Lambda_v]$ , donde  $v \in V(G)$  es arbitrario.*

*Demostración.* Dado  $v \in V(G)$ , cada componente de  $G^\psi$  debe contener un  $v_a$  para algún  $a \in \Lambda$ , además algunas veces  $v_a$  y  $v_b$  pertenecen a la misma componente, así que sólo es necesario ver cuántos vértices de la fibra de  $v$  pertenecen a la misma componente en  $G^\psi$ .

Tenemos que  $v_a$  y  $v_b$  pertenecen a la misma componente si y sólo si  $a^{-1}b \in \Lambda_v$  (lo que se traduce como que debe existir un camino cerrado en  $v$  con voltaje neto  $a^{-1}b$ ) pero esto es cierto si y sólo si  $a\Lambda_v = b\Lambda_v$ , lo que significa que el número de componentes es el número de clases laterales izquierdas dadas por  $\Lambda_v$  en  $\Lambda$ . □

### 3.3 HACIENDO CONEXIONES

Sea  $G(V, E, \psi)$  una gráfica de voltaje en el grupo  $\Lambda$  y  $G^\psi$  la gráfica derivada correspondiente; para cada  $a \in \Lambda$  definimos el automorfismo

$$\Phi_a : G^\psi \longrightarrow G^\psi$$

$$\Phi_a(v_b) = v_{ab} \text{ si } v_b \in V(G^\psi)$$

Además, usando teoría básica de grupos podemos ver que:

1.  $\Phi_{\mathbf{1}} : G^\psi \longrightarrow G^\psi$  es el automorfismo identidad.
2.  $\Phi_a\Phi_b = \Phi_{ab}$
3. Si  $a \in \Lambda$ ,  $a \neq \mathbf{1}$ ,  $\Phi_a$  no fija ningún elementos ni en vértices ni en aristas.

Los tres puntos anteriores implican que  $\Lambda$  actúa libremente sobre  $G^\psi$ , a esta acción se le llama *acción natural*.

**Teorema 3.3.1.** *Las órbitas de los vértices de la acción natural de  $\Lambda$  sobre  $G^\psi$  se corresponden con las fibras sobre los vértices de  $G^\psi$ , también las órbitas de las aristas se corresponden con las fibras de las aristas.*

*Demostración.* La órbita de la acción natural de  $\Lambda$  sobre el vértice  $v_a \in G^\psi$  es el conjunto  $\{\Phi_b(v_a) \mid \text{para todo } b \in \Lambda\} = \{v_{ba} \mid \text{para todo } b \in \Lambda\}$ , pero este último conjunto es precisamente la fibra del vértice  $v \in V(G)$ . La demostración para las aristas es análoga. □

Para el siguiente corolario es necesario recordar la definición de la función  $p_0$  de la sección 2.4 y la definición 3.2.2 de  $p_1$ .

**Corolario 3.3.1.** *La proyección natural  $p_1 : G^\Psi \rightarrow G$  es una proyección de cubierta regular.*

*Demostración.* Tomamos  $q_\Lambda : G^\Psi \rightarrow G^\Psi/\Lambda$  compuesta con

$$i : G^\Psi/\Lambda \rightarrow G,$$

tal que  $i([v]) = v$  donde  $v$  es vértice de  $G$ , entonces podemos hacer

$$p_1 = i \circ q_\Lambda$$

que por definición es una cubierta regular.  $\square$

$G^\Psi$  es entonces la cubierta y  $G$  es el espacio base o base.

El siguiente diagrama ilustra el corolario anterior:

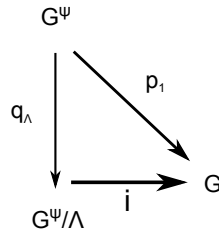


Figura 16: Proyecciones

El siguiente teorema juega un papel muy importante en la teoría de gráficas de voltaje, cuya demostración se encuentra en [10].

**Teorema 3.3.2.** [10] *Sea  $\Lambda$  un grupo que actúa libremente sobre la gráfica  $\bar{G}$  y sea  $G$  la gráfica cociente resultante. Entonces existe una función  $\psi : E(G) \rightarrow \Lambda$  y una asignación uno a uno del conjunto  $\{V(G) \times \Lambda\}$  a los vértices de  $\bar{G}$  tal que  $\bar{G} \cong G^\Psi$  y la acción del grupo  $\Lambda$  sobre  $\bar{G}$  es la acción natural de  $\Lambda$  sobre  $G^\Psi$ .*

Este teorema nos permite caracterizar a las gráficas cúbicas bicirculantes, las cuales son descritas en 4.1 .

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $\Lambda$  un grupo y  $\Gamma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un conjunto generador de  $\Lambda$ . Entonces la gráfica de Cayley  $C(\Lambda, \Gamma)$  es una cubierta regular de la flor  $B_n$ . También si  $G$  es una cubierta regular de  $B_n$  y  $\Lambda$  es el grupo que actúa libremente sobre  $G$ , entonces se pueden asignar voltajes a  $B_n$  tal que dichos voltajes generan  $\Lambda$  y tal que  $B_n^\Psi \cong G$ .*

*Demostración.* Para demostrar la ida del teorema, dada  $B_n$  asignamos los voltajes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a los lazos de  $B_n$ , luego  $B_n^\psi \cong C(\Lambda, \Gamma)$ , y sabemos que la gráfica derivada es una cubierta regular, en este caso de  $B_n$ . El regreso del teorema es una aplicación del teorema 3.3.2, pues estamos suponiendo que  $\Lambda$  actúa libremente sobre  $C(\Lambda, \Gamma)$ .  $\square$

### 3.4 VOLTAJES EN PREGRÁFICAS

Hemos visto la definición de gráfica de voltaje donde  $G(V, E)$  es una gráfica general dirigida; sin embargo, si  $G(V, E)$  es pregráfica simplemente asignamos direcciones a las aristas y semiaristas (ya dijimos que las semiaristas solo pueden tener una dirección), y también asignamos un elemento del grupo escogido,  $\Lambda$ , a cada una de las aristas y semiaristas de  $G$  a través de una función  $\psi : E(G) \rightarrow \Lambda$ .

Pero como a nosotros nos interesa obtener gráficas de derivadas de  $G(V, E)$  que sean simples, que no sean pregráficas y además no nos interesará la dirección de las aristas, debemos tener en cuenta las siguientes condiciones:

1. A las semiaristas sólo se les puede asignar elementos del grupo que sean su propio inverso y distintos del neutro, ¿por qué?, porque ya dijimos que el voltaje de una arista recorrida en cierta dirección debe ser el inverso del voltaje dado a la arista en la otra dirección. En nuestro trabajo el grupo es  $\mathbb{Z}_n$ , lo que significa que solo podemos asignar el elemento  $n/2$  a las semiaristas por lo que solo podemos emplear el grupo  $\mathbb{Z}_n$  con  $n$  par.
2. Del punto anterior vemos que dado un vértice  $v \in V(G)$  solo puede tener una semiarista incidente a él, pues en caso de que tuviera al menos 2, puesto que tendrían el mismo voltaje ( $n/2$ ), se formarían aristas múltiples en la gráfica derivada.
3. Si sobre los vértices  $x, y \in V(G)$  se definen aristas múltiples entonces se les debe asignar voltaje distinto y además cualesquiera 2 de ellas que tengan dirección contraria no deben tener voltajes tales que el voltaje de una de ellas sea el inverso del voltaje de la otra.
4. Un lazo no puede tener como voltaje al neutro.

Para construir la gráfica derivada,  $G^\psi$ , de la gráfica de voltaje  $G(V, E, \psi)$ , donde  $G$  es pregráfica con las condiciones mencionadas arriba, lo que hacemos es lo siguiente:

Las aristas que no son semiaristas se derivan como ya se ha señalado en las secciones anteriores.

Para considerar las semiaristas, sea  $E_s$  el conjunto de las semiaristas de  $G$ , realizamos los pasos que se indican a continuación.

- i. Si  $e = (x, \emptyset) \in E_s(G)$  y  $\psi(e) = a \in \Lambda$ , considerar a  $e$  como un lazo en el vértice  $x$  con su voltaje respectivo.
- ii. Hecho el paso i, construimos la gráfica derivada como se ha hecho en la sección 3.1.
- iii. Como dada una semiarista solo se le puede asignar un elemento que se su propio inverso, resulta de los pasos 1 y 2 que se tendrán aristas dobles, lo que hacemos en este paso es eliminar una de tales aristas tanto de  $E(G^\psi)$  como de la RV de  $G^\psi$ .
- iv. Como cuarto paso simplemente eliminamos las direcciones de las aristas, pues para nosotros no serán relevantes.

A continuación damos dos ejemplos, en uno de ellos se deriva una pregráfica no permitida y en el otro una permitida.

**Ejemplo 3.4.1.** En a) de la figura 17 la pregráfica  $G(V, E, \mathbb{Z}_4)$  resulta no permitida ya que en b), la gráfica derivada respectiva, se tienen lazos.

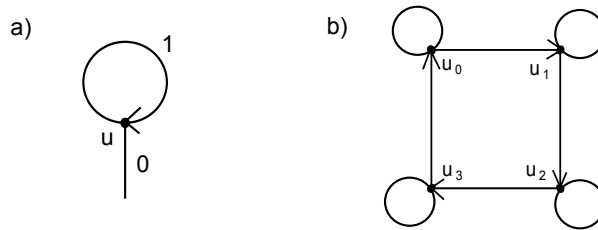


Figura 17: Pregráfica no permitida

**Ejemplo 3.4.2.** La pregráfica en a) de la figura 18 es  $G(V, E, \mathbb{Z}_4)$  y es una pregráfica permitida; en b) se muestra la gráfica derivada respectiva.

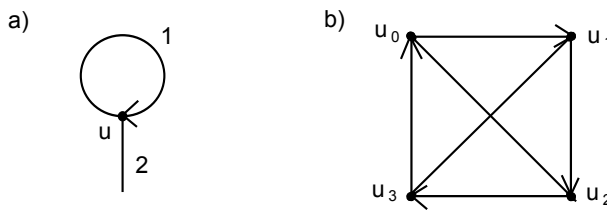


Figura 18: Pregráfica permitida

Parte II

LAS GRÁFICAS CÚBICAS BICIRCULANTES



## GRÁFICAS CÚBICAS BICIRCULANTES

---

Este capítulo está fuertemente basado en el artículo "A classification of cubic bicirculants" de Tomaz Pisanski [19], el cual se estudió con el fin de conocer las características principales de las gráficas bicirculantes cúbicas.

Acordamos también que al hablar de gráfica cúbica bicirculante (**gbc**) nos referimos, en el contexto expuesto en este trabajo, a una gráfica general cúbica bicirculante simple no dirigida.

### 4.1 DEFINICIÓN DE GRÁFICA CÚBICA BICIRCULANTE

Recuerde que en 1.2.3.9 vimos que una gráfica circulante es una gráfica de Cayley  $C(\mathbb{Z}_n, \Gamma)$ , ahora con los resultados vistos en el capítulo de gráficas de voltaje ahora podemos ver a estas gráficas como derivadas de ciertas gráficas  $B_n$ ; siguiendo este punto de vista definimos lo que son las gráficas bicirculantes:

**Definición 4.1.1.** *Una gráfica bicirculante es una gráfica  $G(V, E)$  para la que existe un grupo cíclico,  $\langle \alpha \rangle$ , que actúa libremente sobre  $G$  generando 2 órbitas.*

Observar que en la definición anterior, al tratarse de una acción libre, las 2 órbitas tienen la misma cardinalidad.

En el caso en el que todos los vértice de una gráfica bicirculante tengan orden 3, diremos que  $G(V, E)$  es una gráfica cúbica bicirculante.

Por el teorema 3.3.2 y dada la definición de **gbc**, sabemos que dichas gráficas deben derivarse de alguna gráfica de voltaje, nos preguntamos ahora cuáles pueden ser tales gráficas; primero un grupo cíclico  $\langle \alpha \rangle$  es isomorfo a un  $\mathbb{Z}_n$  por lo que a partir de ahora hablaremos de  $\mathbb{Z}_n$  como el grupo que actúa libremente sobre  $G(V, E)$  y que genera 2 órbitas.

Supongamos que  $G_{\mathbb{Z}_n}(V, E, \psi)$  es una gráfica de voltaje de donde se ha derivado  $G(V, E)$ , que es una gbc, como hay 2 órbitas  $G_{\mathbb{Z}_n}$  debe tener exactamente 2 vértices; luego, por la definición de gráfica derivada, por cada arista adyacente a uno de los dos vértices de  $G_{\mathbb{Z}_n}(V, E, \psi)$ , digamos  $u \in V(G_{\mathbb{Z}_n})$ , la gráfica derivada tendrá al menos una arista adyacente a  $u_\alpha$  donde  $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ , por lo que cada uno de los 2 vértice de  $G_{\mathbb{Z}_n}$  es adyacente a lo más a 3 aristas.

De la discusión anterior y considerando que una gráfica de voltaje puede ser una pregráfica, en la figura 19 mostramos cuáles podrían ser gráficas base de una gbc.

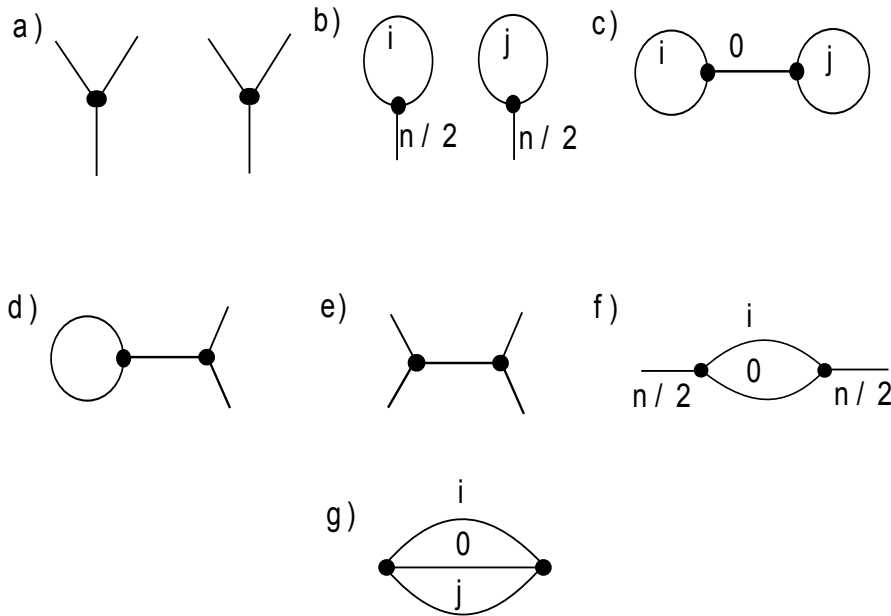


Figura 19: Posibles gráficas base para una gbc,  $i, j, 0 \in \mathbb{Z}_n$ .

Ahora tomando en cuenta lo dicho en los puntos 1-4 de la sección 3.4, por el punto 2 sabemos que un vértice solo puede tener una semiarista de modo que las pregráficas a), d) y e) de la figura anterior quedan eliminadas, por lo que de las gráficas de la figura solamente b), c), f) y g) (a las que denotaremos como  $T(n, i, j)$ ,  $I(n, i, j)$ ,  $F(n, i)$  y  $H(n, i, j)$  respectivamente) son gráficas base válidas de una gbc, más adelante veremos que además los voltajes,  $i, j$ , pueden o deben cumplir ciertas condiciones.

Como tenemos dos órbitas de vértices podemos hacer  $V(G) = V_1 \cup V_2$ ; por otro lado, a los elementos de  $E(G)$  se les dividirá en dos conjuntos, el conjunto  $R$  que estará formado por todas las aristas cuyos vértices de incidencia se encuentran en la misma órbita, ya sea ambos en  $V_1$  ó ambos en  $V_2$ ; en el segundo conjunto,  $S$ , estarán las aristas con un vértice en  $V_1$  y el otro vértice en  $V_2$ .

A una arista en  $R$  se le llamará *arista circulante* o *arista rin*. A una arista en  $S$  se le llamará *arista bicirculante* o *arista eje*.

Clasificamos los vértices de  $G$ , que sabemos son de orden 3, de acuerdo al tipo de aristas incidentes a ellos.

La clase  $3R$ , serán aquellos vértices cuyas aristas incidentes sean todas aristas circulantes.

La clase  $2R + S$ , aquellos vértices con 2 aristas circulantes y una arista bicirculante.



La clase  $R + 2S$ , aquellos vértices con una arista circulante y 2 aristas bicirculantes.

La clase  $3S$ , aquellos vértices cuyas aristas incidentes sean todas aristas bicirculantes.

Más adelante veremos cuáles gráficas pertenecen a qué clase. Mientras tanto probamos la siguiente proposición:

**Proposición 4.1.1.** *En una gráfica cúbica bicirculante,  $G(V, E)$ , todos los vértices pertenecen a la misma clase.*

*Demostración.* Si dos vértices,  $x_1, x_2 \in V(G)$ , pertenecen a la misma órbita entonces pertenecen a la misma clase pues existe un isomorfismo que manda  $x_1$  en  $x_2$ , esto porque  $\mathbb{Z}_n$  actúa libremente sobre  $G$ ; esto implica que la proposición es cierta si  $G$  no tiene aristas bicirculantes. También implica que podemos fijarnos en un solo vértice de cada órbita, pues los demás tienen las mismas propiedades.

Por otro lado, si  $G$  tiene una arista bicirculante,  $e$ , entonces existen un vértice  $x_1 \in V_1$  y un vértice  $y_i \in V_2$ , tal que  $e = \{x_1, y_i\}$ , al actuar libremente  $\mathbb{Z}_n$  sobre  $G$  si nos fijamos en particular sobre esta arista vemos que la órbita que se genera,  $E_1$ , de  $e$  es isomorfa a  $n$  gráficas  $K_2$ , donde recalamos que por ser una acción libre, los elementos de  $E_1$  no tienen vértices en común.

Si al menos uno de  $x_1$  y  $y_i$  tuviera otra arista bicirculante, digamos  $e_2 = \{x_1, y_j\}$  entonces repitiendo el razonamiento anterior, tenemos otra fibra  $E_2$  isomorfa a  $n$  gráficas  $K_2$ , y tal que  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , además como  $E_2$  agota los vértices de  $G$  se tiene que  $y_i$  debe pertenecer a alguna de las  $n$  aristas de  $E_2$  lo cual implica que  $y_i$  también tiene otra arista bicirculante.

Finalmente, si al menos uno de  $x_1$  y  $y_i$  tuviera una tercera arista bicirculante entonces con un razonamiento análogo al del párrafo anterior tenemos que ambos vértices tendrían 3 aristas bicirculantes.

Se ha demostrado que los vértices de ambas órbitas,  $V_1, V_2$ , tienen la misma cantidad de aristas bicirculantes, lo cual concluye la demostración de la proposición.

□

#### 4.2 ESTRUCTURA DE LAS CLASES DE VÉRTICES

Presentamos la estructura de las gráficas cúbicas bicirculantes, en la figura 20 se muestran las gráficas de voltaje que serán la guía en la clasificación.

De aquí en adelante cuando se hable de las gráficas  $T(n, i, j)$ ,  $I(n, i, j)$ ,  $F(n, i)$  y  $H(n, i, j)$ , nos referimos a las gráficas base de la figura anterior,

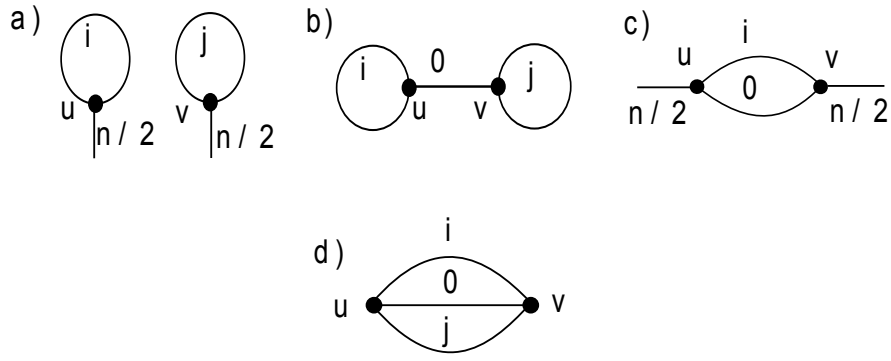


Figura 20: a)  $T(n, i, j)$ , b)  $I(n, i, j)$ , c)  $F(n, i)$  y d)  $H(n, i, j)$ .

mientras que  $T'(n, i, j)$ ,  $I'(n, i, j)$ ,  $F'(n, i)$  y  $H'(n, i, j)$  son las gráficas derivadas respectivas de las gráficas base.

Observe que las gráficas b), c) y d) tienen voltaje 0 en una de las aristas bicirculantes, esto debido a que una gráfica derivada de alguna de estas 3 gráficas pero sin tener asignado el voltaje 0 es isomorfa a la misma gráfica base con algún voltaje 0.

Siendo más precisos, para las gráficas que pertenecen a la clase b), considérese la figura 21. Sean  $G'_1$  y  $G'_2$  las gráficas derivadas de a) y b) respectivamente, el isomorfismo entre estas gráficas viene dado por:

$$\Phi : G'_1 \longrightarrow G'_2$$

$$\begin{aligned} \Phi(u'_a) &= u_a, \text{ para todo } a \in \mathbb{Z}_n. \\ \Phi(v'_b) &= v_{b-k'}, \text{ para todo } b \in \mathbb{Z}_n. \end{aligned}$$



Figura 21: Isomorfismo entre gráficas derivadas de gráficas base con y sin voltaje 0. El grupo considerado es  $\mathbb{Z}_n$

Para las gráficas que pertenecen a la clase c), considérese la figura 22. Sean  $G'_1$  y  $G'_2$  las gráficas derivadas de a) y b) respectivamente, el isomorfismo entre estas gráficas viene dado por:

$$\Phi : G'_1 \longrightarrow G'_2$$

$$\begin{aligned} \Phi(u'_a) &= u_a, \text{ para todo } a \in \mathbb{Z}_n. \\ \Phi(v'_b) &= v_{b-i'}, \text{ para todo } b \in \mathbb{Z}_n. \end{aligned}$$

Para las gráficas que pertenecen a la clase d), considérese la figura 23. Sean  $G'_1$  y  $G'_2$  las gráficas derivadas de a) y b) respectivamente, el isomorfismo entre estas gráficas viene dado por:

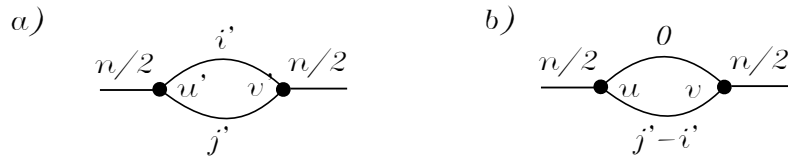


Figura 22: Isomorfismo entre gráficas derivadas de gráficas base con y sin voltaje 0. El grupo considerado es  $\mathbb{Z}_n$

$$\Phi : G'_1 \longrightarrow G'_2$$

$$\Phi(u'_a) = u_a, \text{ para todo } a \in \mathbb{Z}_n.$$

$$\Phi(v'_b) = v_{b-i'}, \text{ para todo } b \in \mathbb{Z}_n.$$

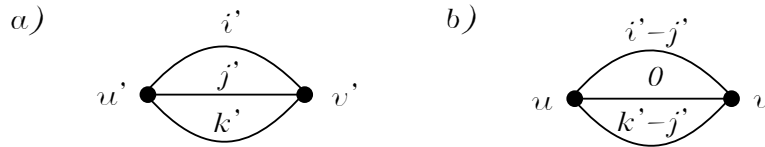


Figura 23: Isomorfismo entre gráficas derivadas de gráficas base con y sin voltaje 0. El grupo considerado es  $\mathbb{Z}_n$

#### 4.2.1 Clase $3R$

Ya sabemos que en particular esta clase de gráficas debe ser la gráfica derivada de una de las 4 gráficas  $T(n, i, j)$ ,  $I(n, i, j)$ ,  $F(n, i)$  ó  $H(n, i, j)$ , pero la única de estas gráficas que tiene la propiedad de que en su derivada los vértices de  $V_1$  son no adyacentes con los vértices de  $V_2$  es  $T = T(n, i, j)$ ; esto implica que para esta clase se debe tener que  $n$  es par. Además podemos asumir que  $0 < i \leq j \leq n - 1, i + j \leq n$ , también  $i, j \neq n/2$ , pues los otros casos o no están permitidos o son gráficas isomorfas a las permitidas.

Podemos considerar primero la gráfica derivada del vértice  $u \in V(T)$  y sus respectivas aristas, veremos que la gráfica derivada obtenida puede ser solamente copias isomorfas de  $n$ -prismas,  $\Pi_n$ , o bien, copias isomorfas de escaleras de möbius,  $M_n$ . Para ello consideremos lo siguiente:

1. Derivamos primero la semiarista de  $u$  con voltaje  $n/2$ , de aquí obtenemos una gráfica isomorfa a  $n/2$  gráficas  $K_2$ , con aristas  $\{u_k, u_{k+n/2}\}$ .
2. Derivamos el lazo en  $v$ , el cual tiene voltaje  $i$ . Ya sabemos que éste formará un ciclo de tamaño  $\circ(i) = n/\text{mcd}(n, i)$ , (teorema 1.1.3), este ciclo da lugar a dos posibilidades:

- (a) El ciclo derivado,  $C$ , es la parte superior de un prisma, esto se da si  $\circ(i)$  es impar, luego, hay  $n/(\circ(i))$  ciclos de este tamaño que, por teoría básica de grupos, cada dos de ellos forman un prisma y hay en total  $(n/(\circ(i)))/2$  prismas.

¿Por qué no se puede obtener  $C$  de tamaño par de forma que obtengamos un prisma? Supongamos que  $C$  tiene tamaño par y que se forma entonces un prisma, entonces el vértice  $0$  está unido al vértice  $n/2$  por el paso  $1$  de la derivación, además dado que  $C$  tiene tamaño par, al formar el ciclo que empieza y termina en  $n/2$ , justo a la mitad del camino, es decir en  $(n/2 + i(\circ(i))/2)$  (módulo  $n$ ), se debe llegar al vértice  $0$  pero este vértice no puede estar también en dicho ciclo, luego este  $C$  no existe. Por otro lado es claro que una banda  $C$  con tamaño impar no puede ser ciclo de una escalera de Möbius, pues no se pueden formar parejas disjuntas que formarían los peldaños de la escalera.

- (b) La otra opción es que el ciclo derivado sea parte de una escalera de Möbius; ya vimos que si esto se da, el tamaño de  $C$  es par. En este caso tendríamos  $n/\circ(i)$  ciclos de esta clase y por tanto esa misma cantidad de escaleras de Möbius.

Podemos hacer el mismo razonamiento con el otro vértice  $v$ , luego una gráfica  $T(n, i, j)$  estará formada ya sea por 2 conjuntos de gráficas cada uno de los cuales puede ser un conjunto de prismas isomorfos entre ellos o un conjunto de escaleras de Möbius isomorfas entre ellas.

Las aristas pueden ser de uno de los 3 tipos siguientes:

$$\begin{aligned} &\{u_k, u_{k+n/2}\}, \{v_k, v_{k+n/2}\} \quad k = 0, 1, \dots, n/2 - 1, \\ &\{u_k, u_{k+i}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ &\{v_k, v_{k+i}\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

**Nota:** en la discusión anterior se consideró como ciclo a un lazo, como recurso para facilitar la exposición.

#### 4.2.2 Clase $3S$

En esta clase todas las aristas tienen un vértice en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ , tales gráficas son las llamadas gráficas de Haar cíclicas cúbicas, que son estudiadas más ampliamente en [15].

En la figura 20 el dibujo d) es el correspondiente a la gráfica base de esta clase pues es el único cuyas aristas derivadas cumplen que son aristas eje. Notar que podemos asumir que  $0 < i < j \leq n-1$ ,  $i+j \leq n$ .

Los tipos de aristas en este caso son:

$$\begin{aligned} &\{u_k, v_k\}, k = 0, 1, \dots, n-1, \\ &\{u_k, v_{k+i}\}, k = 0, 1, \dots, n-1, \\ &\{u_k, v_{k+j}\}, k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

En la literatura se puede encontrar una descripción de las gráficas de Haar cíclicas cúbicas la cual relaciona cada gráfica de esta familia con un natural de acuerdo a su escritura en sistema binario; sin embargo, a nosotros nos será más útil hacer una descripción más visual de esta familia, para esto tomamos en cuenta lo siguiente:

Nos fijamos en el ciclo formado por las aristas de voltaje 0 y voltaje  $i$ , en la gráfica derivada tendremos  $\text{mcd}(n, i)$  ciclos de tamaño  $2 * \frac{n}{\text{mcd}(n, i)}$ ; lo que hace la arista de voltaje  $j$  es unir estos ciclos de manera que la gráfica derivada sea conexa permitiendo representar estas gráficas de forma peculiar. Un ejemplo pondrá claro lo anterior.

**Ejemplo 4.2.1.** *En este ejemplo se muestra la gráfica derivada  $H'(36, 33, 1)$  (ver figura 24), la cual para fines de visualización se ha dibujado de forma particular, hay que unir el ciclo interno con el externo (aristas más gruesas) para completar el dibujo lo que ocasionará una "torción" de las aristas correspondientes.*

Este ejemplo nos da la idea de cómo se pueden ver las gráficas de esta familia y que será muy importante a la hora de establecer algunos resultados en el capítulo 6. De hecho se puede demostrar que una gráfica pertenece a la familia  $H'(n, i, j)$  si y solo si su representación visual tiene una forma análoga a la del ejemplo anterior.

#### 4.2.3 Clase $S+2R$

Cada vértice de  $V_1$  es incidente con un sólo vértice de  $V_2$  lo cual hace que esta clase sea derivada de la gráfica de voltaje  $b)$  de la figura 20. Estas gráficas corresponden a las llamadas gráficas  $F$ . Notar que podemos asumir  $0 < i \leq j \leq n-1$ ,  $i+j \leq n$ ,  $i \neq n/2$ ,  $j \neq n/2$ . Tenemos como aristas:

$$\begin{aligned} &\{u_k, v_k\}, k = 0, 1, \dots, n-1, \\ &\{u_k, u_{k+i}\}, k = 0, 1, \dots, n-1, \\ &\{v_k, v_{k+j}\}, k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

A estas gráficas se les llama gráficas  $I$ . Sus propiedades son estudiadas en [17] y [14]. Aquí solo mencionamos un corolario que será muy importante para nosotros y que se demuestra en [14]:

**Corolario 4.2.1.** *Una gráfica  $I'(n, i, j)$  es gráfica de Petersen generalizada si y solo si  $\text{mcd}(n, i) = 1$  o  $\text{mcd}(n, j) = 1$ . Si  $\text{mcd}(n, i) = 1$  entonces  $I'(n, i, j) = \text{GP}(n, r)$  donde  $r$  es la solución de la ecuación  $j \equiv r * i \pmod{n}$ .*

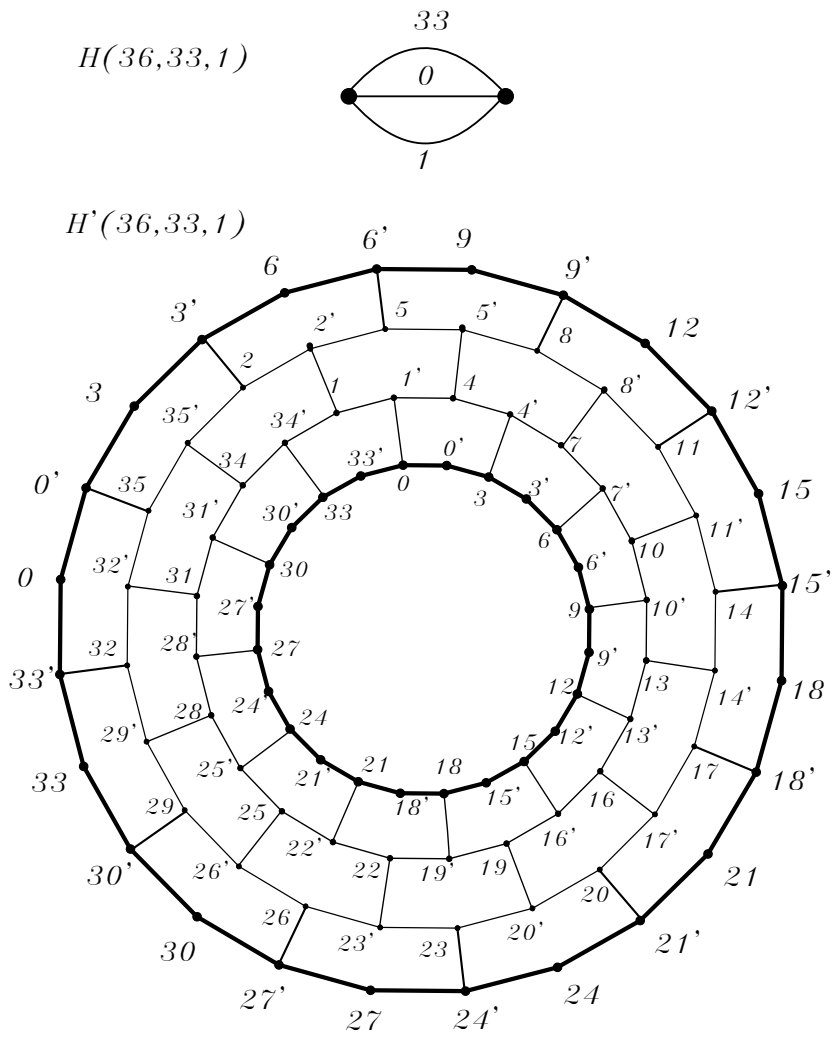


Figura 24:  $H'(36,33,1)$ .

4.2.4 Clase  $R+2S$ 

En esta clase cada vértice es incidente con dos aristas eje y una arista rin, le corresponde ser derivada de la gráfica c) de la figura 20. Asumimos que una de las aristas eje tiene voltaje 0, que  $0 < i \leq n/2$  y  $n$  debe ser par. Las aristas que se obtienen son:

$$\begin{aligned} &\{u_k, v_k\}, k = 0, 1, \dots, n-1, \\ &\{u_k, v_{k+i}\}, k = 0, 1, \dots, n-1, \\ &\{u_k, u_{k+n/2}\}, \{v_k, v_{k+n/2}\} k = 0, 1, \dots, n/2-1. \end{aligned}$$

Veremos que esta clase es corresponde, o bien, a gráficas isomorfas a  $r$ -prismas, o bien, a gráficas isomorfas a escaleras de Möbius. Para verlo, derivemos  $F(n, i, j)$  en el siguiente orden:

1. Derivamos las dos semiaristas. En este paso obtenemos una gráfica isomorfa a  $n/2$  gráficas  $K_2$ . Estas  $K_2$  serán los peldaños de escaleras de Möbius o aristas de las caras laterales de prismas, según corresponda.
2. Consideramos a las aristas eje como si fuera un ciclo y derivamos. Iniciemos en el vértice  $u_0$  de la órbita de  $u$ , avanzamos en  $i$  para llegar a  $v_i$  en la órbita de  $v$ , luego avanzamos a  $u_i$  llegando nuevamente a la órbita de  $u$ , con esto hemos construido dos aristas de la gráfica derivada, observemos que estos pasos se repetirán hasta regresar a  $u_0$ , para ello se habrá construido un ciclo de tamaño par, esto implica que solo puede haber  $r$ -prismas, con  $r$  par, o bandas de möbius ciclo mayor de tamaño par.

Ya hemos visto que por la teoría de gráficas de voltaje, dada una gráfica cúbica bicirculante podemos considerarla como la gráfica derivada de una de las cuatro gráficas de voltaje mencionadas, pues tenemos que  $\mathbb{Z}_n$  actúa libremente sobre la gráfica por definición; esto usando el teorema 3.3.2, más aún con toda la discusión anterior sabemos que todas ellas son obtenidas como gráficas derivadas de gráficas de voltaje, por lo tanto el siguiente teorema es cierto:

**Teorema 4.2.1.** *Cualquier gráfica cúbica bicirculante de  $2n$  vértices es isomorfa a una de las siguientes gráficas:  $T'(n, i, j)$ ,  $H'(n, i, j)$ ,  $I'(n, i, j)$ , ó  $F'(n, i)$*

## 4.3 ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS GBC

Para las siguientes proposiciones se usará la notación de la sección 4.2, para  $T(n, i, j)$ ,  $H(n, i, j)$ ,  $I(n, i, j)$ ,  $F(n, i)$  corresponde la notación de la clase  $3R$ ,  $3S$ ,  $2R + S$ ,  $2S + R$  respectivamente. También los voltajes asignados a las diferentes gráficas base son los indicados en la figura 20.

**Proposición 4.3.1.** *Una gráfica cúbica bicirculante  $G$  es conexa si y solo si:*

1.  $G = H(n, i, j)$  y  $\text{mcd}(n, i, j) = 1$ .
2.  $G = I(n, i, j)$  y  $\text{mcd}(n, i, j) = 1$ .
3.  $G = F(n, i)$  y  $\text{mcd}(n, i) = 1$  ó  $\text{mcd}(n, i) = 2$  y  $n/2$  es impar.

*Demostración.* Primero, es claro que las gráficas  $T(n, i, j)$  son no conexas ya que la gráfica de voltaje es no conexa.

Caso 1, usamos el teorema 3.2.4, para ello debemos calcular  $[\Lambda : \Lambda_v]$ , con  $\Lambda = \mathbb{Z}_n$ , es decir, la cantidad de clases laterales dadas por el grupo local de un vértice  $v$  de  $H(n, i, j)$ , donde el teorema 3.2.3 nos dice que no importa qué vértice usemos.

Tomemos entonces el vértice  $u$ , es claro que el grupo local en  $u$  es  $\Lambda_1 = \langle i, j \rangle$ , esto es, el generado por  $i, j$  con la operación suma heredada de  $\mathbb{Z}_n$ ; para que halla una sola componente en la gráfica derivada necesitamos que  $\Lambda_1$  genere a  $\mathbb{Z}_n$ . Recordando que un subgrupo de un grupo cíclico es cíclico, debe existir un elemento de la forma  $ai + bj$  tal que genera a  $\Lambda_1$ , el cual queremos que se igual a  $\mathbb{Z}_k$ , entonces necesitamos que:

$$\text{mcd}(ai + bj, n) = 1$$

Demostraremos entonces que  $\text{mcd}(ai + bj, n) = 1$  si y solo si  $\text{mcd}(n, i, j) = 1$

Supongamos que  $\text{mcd}(n, i, j) = 1$ , entonces

$$1 = \text{mcd}(n, i, j) = \text{mcd}(n, \text{mcd}(i, j)) = \text{mcd}(n, ai + bj) \text{ donde } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Supongamos ahora que  $\text{mcd}(ai + bj, n) = 1$  y supongamos que  $\text{mcd}(n, i, j) > 1$  entonces existe  $a > 1$  tal que divide a  $i, j, n$ , pero esto inmediatamente implica que  $\text{mcd}(ai + bj, n) > 1$ , luego se tiene la implicación deseada y esto concluye también el caso 1.

Caso 2, el razonamiento es análogo al caso anterior, ya que nuevamente es fácil ver que el grupo local sobre el vértice  $v$  de la gráfica  $I(n, i, j)$  es  $\langle i, j \rangle$ .

Caso 3, en este caso el grupo local en  $v$  es  $\langle i, n/2 \rangle$ , así que nuevamente  $G$  es conexa si y solo si  $\text{mcd}(n, i, n/2) = 1$ , como  $\text{mcd}(n, i, n/2) = \text{mcd}(\text{mcd}(n, n/2), i) = \text{mcd}(n/2, i)$ , podemos afirmar que  $\text{mcd}(n, i, n/2) = 1$  si y solo si  $\text{mcd}(n, i) = 1$  o  $\text{mcd}(n, i) = 2$  y  $n/2$  es impar. □

**Proposición 4.3.2.** *Una gráfica cúbica bicirculante  $G$  es bipartita si y solo si:*

1.  $G = T(n, i, j)$ ,  $n$  es par y  $n/\text{mcd}(n, i)$  y  $\text{mcd}(n, j)$  son impares.
2.  $G = H(n, i, j)$ .
3.  $G = I(n, i, j)$ ,  $n$  es par e  $i, j$  son impares.
4.  $G = F(n, i)$ .



*Demostración.* Caso 1, ya hemos dicho que, de hecho  $n$  debe ser par para poder asignar el voltaje  $n/2$ , también dijimos que  $G$  puede estar formada únicamente por escaleras de möbius de tamaño par o prismas de tamaño impar, pero un prisma de tamaño impar no es una gráfica bipartita, las escaleras de möbius de tamaño par son bipartitas, así que necesitamos asegurar que  $G$  está formada solo por esta clase de gráficas, lo cual es cierto si y solo si el tamaño del ciclo de una escalera de möbius es par, lo cual se da si y solo si en  $T(n, i, j)$  se da que  $n/\text{mcd}(n, i)$  y  $n/\text{mcd}(n, j)$  son pares.

Caso 2, es claro que cada fibra originada por cada uno de los dos vértices de  $H(n, i, j)$  es un conjunto independientes.

Caso 3, Con el fin de facilitar la escritura, las aristas derivadas del vértice  $u$  que tengan ambos vértices en la órbita de  $u$  serán llamadas aristas rin exteriores, las aristas derivadas del vértice  $v$  que tengan ambos vértices en la órbita de  $v$  serán llamadas aristas rin interiores, las aristas restantes seguirán siendo aristas eje; también  $\text{int}^a$  denotará una secuencia de  $a$  aristas rin interiores,  $s$  denotará una arista eje y  $\text{ext}^b$  denotará una secuencia de  $b$  aristas rin exteriores.

Podemos suponer que  $G$  es conexa, pues cuando no lo es, se da que las componentes son isomorfas, así que por la proposición 4.3.1, asumimos que  $\text{mcd}(n, i, j) = 1$ .

Sabemos que una gráfica es bipartita si y solo si no contiene ciclos impares. Dada  $G$  derivada de una gráfica  $I(n, i, j)$  puede haber tres clases de ciclos: 1) compuestos solo de aristas rin exteriores, 2) compuestos solo aristas rin interiores, 3) Compuestos tanto de aristas rin interiores como de aristas rin exteriores, que por tanto deben conter aristas eje. Los ciclos del primer y segundo tipo tienen  $n/\text{mcd}(n, i)$  y  $n/\text{mcd}(n, j)$  aristas respectivamente.

Supongamos que  $G$  es bipartita, luego  $n/\text{mcd}(n, i)$  es par, esto implica que  $n$  debe ser par, esto a su vez implica que  $i, j$  no pueden ser ambos pares pues entonces no se cumpliría que  $\text{mcd}(n, i, j) = 1$ . Supongamos entonces sin pérdida de generalidad que  $i$  es impar, por demostrar que  $j$  es también impar. Haciendo un argumento por contradicción supongamos que  $j$  es par. Afirmamos que el ciclo  $C = \text{sint}^{j'} \text{s ext}^{i'}$  tiene tamaño impar donde  $j' = \text{mcm}(j, i)/j$  y  $i' = \text{mcm}(j, i)/i$  ( $\text{mcm}(j, i)$  es el mínimo común múltiplo de  $i, j$ ), pues como  $i$  es impar y  $j$  es par,  $i'$  es impar y  $j'$  es par, luego el tamaño de  $C$  es  $2 + i' + j'$  que es impar, lo que contradice que  $G$  es bipartita.

Supongamos ahora que  $n$  es par y  $j, i$  son impares, esto implica que  $n/\text{mcd}(n, i)$  y  $n/\text{mcd}(n, j)$  son pares, o sea que los ciclos del tipo 1 y 2 son pares. Cualquier otro ciclo puede escribirse como

$$C = \text{int}^{j_1} s \text{ext}^{i_1} s \text{int}^{j_2} s \text{ext}^{i_2} s \dots \text{int}^{j_q} s \text{ext}^{i_p} s,$$

donde para que  $C$  sea un ciclo debe darse que  $i * i_1 + i * i_2 + \dots + i * i_p + j * j_1 + j * j_2 + \dots + j * j_q \equiv 0 \pmod{n}$ , esta expresión puede escribirse como  $i * i' + j * j' \equiv 0 \pmod{n}$ , como  $n$  es par,  $i, j$  impares debe darse que  $i', j'$  tienen la misma paridad lo que implica que  $C$  es un ciclo par.

Caso 4, tenemos ya que  $n$  debe ser par, por otro lado sabemos que  $G$  está formado solo por escaleras de möbius de tamaño par, o bien, solo por  $r$ -prismas con  $r$  par. Ninguna de estas gráficas contiene un ciclo de tamaño impar así que son bipartitas.

□

**Proposición 4.3.3.** *Una gráfica cúbica bicirculante  $G$  es vértice transitiva si y solo si:*

1.  $G = T(n, i, j)$  y  $\text{mcd}(n, i) = \text{mcd}(n, j)$ .
2.  $G = H(n, i, j)$ .
3.  $G = I(n, i, j)$  y  $\text{mcd}(n, i) = \text{mcd}(n, j) = 1$ ,  $G$  es isomorfa al dodecaedro  $G(10, 2)$  ó existe un entero  $r$  tal que  $r^2 = \pm 1 \pmod{n}$ .
4.  $G = F(n, i)$ .

*Demostración.* Caso 1, sabemos ya que una gráfica  $T(n, i, j)$  es disconexa y la gráfica derivada de cada componente es un conjunto de gráficas de möbius o prismas, así que para que  $T(n, i, j)$  sea vértice transitiva se necesita que ambas componentes deriven en el mismo tipo de gráfica y deben ser del mismo tamaño, esto es  $T(n, i, j)$  es vértice transitiva si y solo si  $\text{mcd}(n, i) = \text{mcd}(n, j)$ .

Caso 2, en [15] se demuestra que las gráficas cíclicas de Haar son de Cayley y por tanto vértice transitivas.

Caso 3, podemos suponer que  $G$  es conexa pues cuando no lo es tenemos que las componentes son isomorfas. Esta propiedad se estudia en [14].

Caso 4, sabemos ya que una gráfica  $F(n, i)$  es un conjunto de prismas isomorfos o de escaleras de möbius isomorfos, es claro que cada conjunto de gráficas es vértice transitivo.

□

**Proposición 4.3.4.** *Una gráfica cúbica bicirculante  $G$  es de Cayley si y solo si:*

1.  $G = T(n, i, j)$  y  $\text{mcd}(n, i) = \text{mcd}(n, j)$ .
2.  $G = H(n, i, j)$ .
3.  $G = I(n, i, j)$  y  $\text{mcd}(n, i) = \text{mcd}(n, j) = 1$ , y existe un entero  $r$  tal que  $j = r * i \pmod{n}$  y  $i = r * j \pmod{n}$ .
4.  $G = F(n, i)$ .

*Demostración.* Caso 1, una gráfica de Cayley debe ser vértice transitiva, necesitamos entonces que  $\text{mcd}(n, i) = \text{mcd}(n, j)$ , también tenemos que

esto es suficiente por lo siguiente: Si  $T(n, i, j)$  está formada por prismas, tenemos  $2n$  vértices con ciclos disjuntos de tamaño  $n/\text{mcd}(n, i)$  que forman en total  $\text{mcd}(n, i)$  prismas, pero esta gráfica es isomorfa a la gráfica derivada de una flor  $B_2$  con voltajes  $2n/2 = n$  y  $2i$  tomados en el grupo  $Z_{2n}$ , (recordar que una semiarista con voltaje  $n/2$  deriva en lo mismo que un lazo con voltaje  $n/2$ ).

Análogamente, si  $T(n, i, j)$  está formada por escaleras de möbius, tenemos  $2n$  vértices con ciclos disjuntos de tamaño  $n/\text{mcd}(n, i)$  que forman en total  $\text{mcd}(n, i)$  escaleras de möbius, pero esta gráfica es isomorfa a la gráfica derivada de una flor  $B_2$  con voltajes  $n, 2$  y  $2i$  tomados en  $Z_{2n}$ .

Caso 2, esta demostración puede verse en [15].

Caso 3, esta demostración puede verse en [18].

Caso 4, una gráfica  $F(n, i)$  corresponde a un conjunto de escaleras de möbius o prismas isomorfos disjuntos definido sobre  $2n$  vértices siendo entonces el análisis similar al expuesto en el caso 1.

□



## SOBRE EL GÉNERO DE UNA GRÁFICA

---

Para este capítulo se asumen algunos conocimientos básicos de Topología General y Algebraica, y se recuerdan algunas definiciones y teoremas importantes para el presente trabajo.

**Definición 5.0.1.** Una 2-variedad es un espacio topológico conexo tal que para cada punto existe un abierto homeomorfo al disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

**Definición 5.0.2.** Una superficie es una 2-variedad. Una superficie cerrada es una superficie compacta y sin frontera.

**Ejemplo 5.0.1.** En la figura se muestran algunas superficies cerradas: a) es una esfera, b) un toro y c) una botella de Klein.

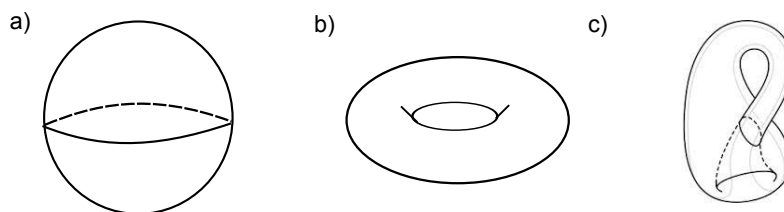


Figura 25: Superficies cerradas

Para este trabajo consideraremos únicamente las superficies cerradas.

**Definición 5.0.3.** Una superficie cerrada es orientable si para toda curva cerrada,  $C$ , el sentido de rotación en dirección de las manecillas del reloj se preserva al viajar alrededor de la superficie.

Si no es orientable entonces se dice que es una superficie no orientable.

Las superficies cerradas que serán más importantes para nuestro trabajo son la esfera, el toro y el plano proyectivo; a estas superficies se les asigna una representación poligonal como se muestra respectivamente en las figuras 26, 27 y 28.

Para una definición más rigurosa sobre región poligonal y su asociación a una superficie consultar [8] página 162.

Dadas 2 superficies,  $M_1$  y  $M_2$ , es posible definir una operación que “une” ambas superficies y el resultado sigue siendo una superficie, a esta opera-

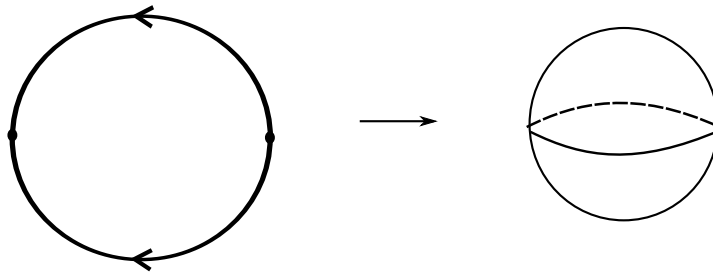


Figura 26: Región poligonal asociada a la esfera.

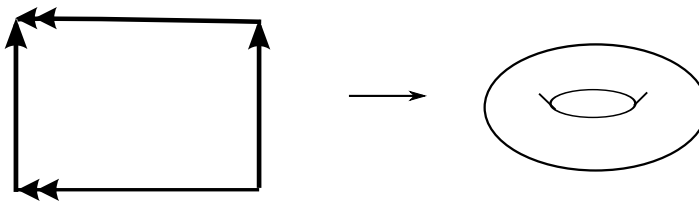


Figura 27: Región poligonal asociada al toro.

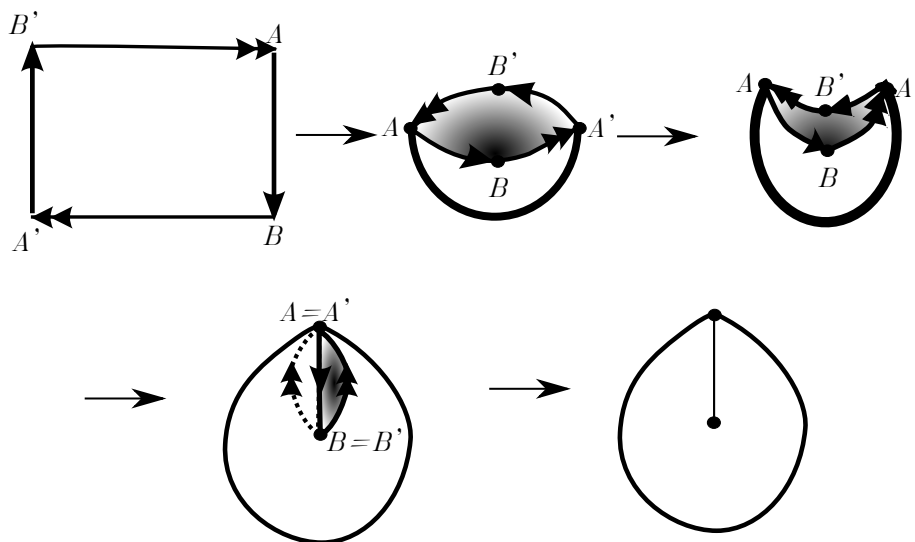


Figura 28: Región poligonal asociada al plano proyectivo.

ción se le llama *suma conexa*, se representa como  $M_1 \# M_2$  y consiste (intuitivamente) en lo siguiente: en cada superficie se selecciona un conjunto homeomorfo a un disco abierto, que denotaremos  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente, entonces tomamos los conjuntos  $M_1 - S_1$  y  $M_2 - S_2$  y los unimos de manera que la frontera  $\partial(M_1 - S_1)$  coincida con la frontera  $\partial(M_2 - S_2)$ , ver ejemplo 5.0.2. Notar que la suma conexa de una esfera con cualquier superficie  $M$  da como resultado la superficie  $M$ , es decir, la esfera actúa como un neutro de la operación.

Para un tratamiento más formal de esta definición consultar [8] página 164.

**Ejemplo 5.0.2.** *En la siguiente figura se presenta la suma conexa de dos toros, que da como superficie resultante un doble toro.*

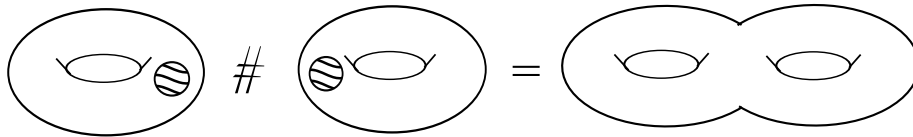


Figura 29: Suma conexa de dos toros es un doble toro.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en topología algebraica y lo que hace es decirnos cómo es cualquier superficie cerrada basándose en la esfera, el toro, el plano proyectivo y la suma conexa.

**Teorema 5.0.1** (Teorema de Clasificación). *Cualquier superficie cerrada es homeomorfa a uno de los siguientes espacios topológicos: una esfera,  $S_0$ , la suma conexa de una esfera con  $k$  toros,  $S_k$ , o bien, la suma conexa de una esfera con  $k$  planos proyectivos,  $N_k$ .*

Una demostración de este teorema se puede ver en [8].

La esfera y las superficies del tipo  $S_k$  son superficies orientables, mientras que las superficies del tipo  $N_k$  son no orientables

Dada una superficie cerrada ya sea  $S_k$  ó  $N_k$ , a  $k$  se le llama *género de la superficie*, es decir,  $k$  es la cantidad ya sea de toros o de planos proyectivos que se deben agregar a la esfera para obtener la superficie que se esté tratando.

## 5.1 CARACTERÍSTICA DE UNA SUPERFICIE

**Definición 5.1.1.** *Un encaje de una gráfica  $G$  en la superficie  $S$  es una función continua uno a uno  $i : G \rightarrow S$ .*

Dado un encaje, las componentes del complemento  $S - G$  se llaman *regiones* o *caras*. En general, dado un encaje si una región es homeomorfa al disco abierto  $D$  (ver def. 5.0.2), a la región se le llama *2-celular*. Si cada región es homeomorfa al disco abierto  $D$ , se dice que es un *encaje 2-celular*.

**Ejemplo 5.1.1.** En a) se muestra un encaje de  $B_2$  que no es 2-celular en el toro, lo cual se demuestra por el hecho de que hay al menos un lazo que es no contraíble; en b) un encaje 2-celular de la misma gráfica en el toro.

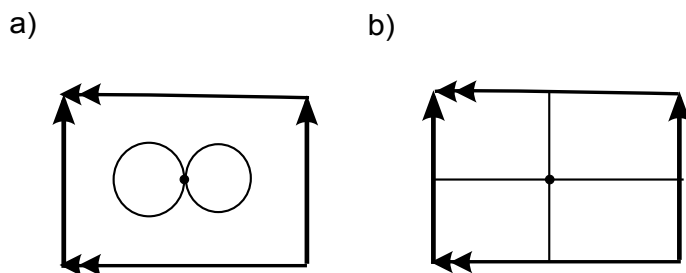


Figura 30: Encaje que no es 2-celular y encaje 2-celular

**Definición 5.1.2.** Una gráfica es plana si puede encajarse en  $S_0$ , que es equivalente a que se pueda encajar en el plano.

El teorema de Kuratowski caracteriza a las gráficas planas:

**Teorema 5.1.1.** [10, pág. 28] Una gráfica  $G$  es plana si y solo si no contiene alguna subgráfica que es una subdivisión de cualquiera  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

El siguiente teorema es uno de los teoremas más importantes o tal vez el más importante en teoría de gráficas topológica.

**Teorema 5.1.2.** [10, pág. 122] Sea  $G$  una gráfica (simple o compuesta) conexa con un encaje 2-celular ya sea en  $S_k$  ó en  $N_k$ , entonces se tiene la siguiente identidad, llamada identidad de euler:

$$p - q + r = 2 - 2k$$

donde  $p$  es la cantidad de vértices,  $q$  la cantidad de aristas y  $r$  la cantidad de regiones, ya hemos dicho que  $k$  es el género de la superficie.

**Definición 5.1.3.** Dada la identidad de Euler, al miembro derecho,  $2 - 2k$ , se le llama la característica de la superficie y se denota  $\bar{\chi}(S_k)$  ó  $\bar{\chi}(N_k)$ , si la superficie es orientable o no orientable respectivamente.



**Ejemplo 5.1.2.** En el ejemplo anterior vimos que  $B_2$  tiene un encaje 2 celular en el toro (figura b del ejemplo anterior), entonces para esta gráfica y esta superficie debe cumplirse la identidad de Euler, para lo cual tenemos:

$$p = 1, q = 2, r = 1 \text{ y } k = 1, \text{ luego}$$

$$p - q + r = 1 - 2 + 1 = 0 = 2 - 2 * 1 = 2 - 2k$$

## 5.2 EL GÉNERO MÍNIMO DE UNA GRÁFICA

**Definición 5.2.1.** El género mínimo,  $\gamma(G)$ , de una gráfica  $G$  (también llamado simplemente género), es el mínimo género de entre todas las superficies en las que  $G$  puede encajarse.

Además a un encaje de  $G$  en una superficie de género  $\gamma(G)$  se le llama encaje mínimo.

Es necesario recalcar que en la definición anterior estamos considerando encajes tanto en superficies orientables como en superficies no orientables; pero cuando se consideran solo encajes sobre superficies orientables podemos afirmar lo siguiente:

**Teorema 5.2.1.** [9] Si una gráfica conexa tiene un encaje mínimo en  $S_k$  entonces el encaje es 2-celular.

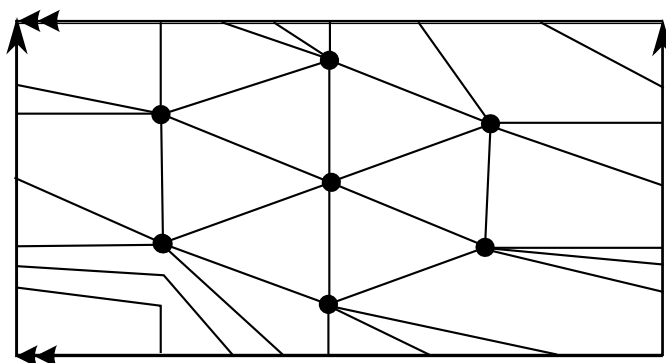
Cuando consideramos encajes en superficies no orientables el teorema anterior no es necesariamente cierto, para ver esto necesitamos la siguiente definición y el siguiente teorema:

**Definición 5.2.2 (Número cromático de una superficie).** Supongamos que  $G$  es una gráfica que puede encajarse en una superficie  $N_k$  y supongamos que el número cromático de la gráfica  $G$  es  $\chi(G) = r$ ; el  $\max \chi(G)$  de entre todas las posibles gráficas  $G$  que pueden encajarse en  $N_k$  define un invariante que se llama el número cromático de la superficie no orientable  $N_k$  que denotaremos por  $\chi(N_k)$ .

**Teorema 5.2.2.** [4]  $\chi(N_k) = \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24k}}{2} \rfloor$ , para  $k = 1$  y para  $k \geq 3$ ;  $\chi(N_2) = 6$ .

A continuación damos un ejemplo de una gráfica conexa con encaje mínimo en  $N_3$  el cual no es 2-celular.

Consideremos  $K_7$ , la gráfica completa de 7 vértices. Del teorema anterior tenemos que  $K_7$  no puede encajarse en  $N_2$  pues su número cromático es 7; pero sí podemos encajarla en un toro, como se muestra en la figura 31, y dado este encaje simplemente agregamos un plano proyectivo en el interior de una de las caras de dicho encaje, obteniendo así un encaje en  $N_3$  y no es 2-celular, lo cual implica que el teorema 5.2.1 no es cierto para superficies orientables.

Figura 31: Encaje de  $K_7$  en un toro.

Para el caso de una gráfica desconexa, está claro que no es posible encontrar un encaje mínimo y tener que es 2-celular pero se puede afirmar el siguiente teorema para el caso de encajes en superficies orientables.

**Teorema 5.2.3.** *El género de una gráfica es la suma del género de sus componentes.*

La demostración de este teorema se encuentra en [11], donde primero se demuestra que el género de una gráfica conexa es la suma de los géneros de sus bloques, luego si tenemos una gráfica desconexa, agregamos un vértice a la gráfica y luego agregamos una arista a cada componente que va de algún vértice de la componente al vértice agregado, considerando que cada arista agregada es un bloque de género 0 tenemos que el género de esta nueva gráfica y la original coinciden.

### 5.3 EL GÉNERO MÁXIMO DE UNA GRÁFICA

**Definición 5.3.1.** *El género máximo,  $\gamma_M(G)$ , de una gráfica conexa  $G$  es el género máximo de entre todas las superficies en las cuales  $G$  tiene un encaje 2-celular.*

**Ejemplo 5.3.1.** *En la figura 32, en a) se muestra un encaje 2-celular de  $B_2$ , así que  $\gamma(B_2) = 0$ , pero en b) se muestra otro encaje 2-celular de esta gráfica en el toro cuyo género es 1, entonces la pregunta es ¿Cuál es la superficie con el género máximo donde  $B_2$  tiene un encaje 2-celular?*

A continuación definiremos un parámetro similar al número de Euler.

**Definición 5.3.2.** *El número de Betti,  $\beta(G)$ , de una gráfica  $G$  con  $p$  vértices,  $q$  aristas y  $h$  componentes conexas de  $G$  es  $\beta(G) = q - p + h$ .*

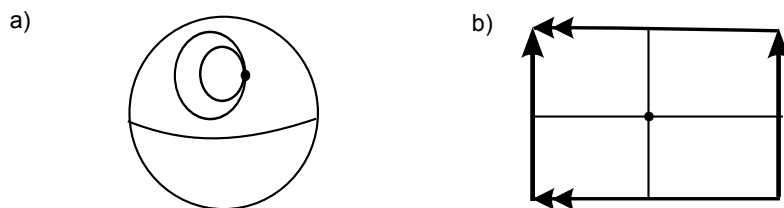


Figura 32: Género Máximo de una gráfica

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $G$  una gráfica conexa, entonces  $\gamma_M(G) \leq \lfloor \beta(G) \rfloor$ . La igualdad se da si y solo si  $r = 1$  ó  $2$ , donde  $r$  es el número de regiones en un encaje 2-celular de  $G$  en la superficie  $S_k$ .*

*Demostración.* Tenemos lo siguiente

$$\beta(G) = q - p + 1,$$

Por otro lado como el encaje es 2-celular también se tiene que

$$p - q + r = 2 - 2k$$

Entonces,

$$k = \frac{2-p-r+q}{2} = \frac{q-p}{2} + \frac{2-r}{2} \leq \lfloor \frac{q-p+1}{2} \rfloor = \lfloor \beta(G) \rfloor$$

ya que  $k \in \mathbb{N}$  y  $r \geq 1$ .

Es claro que si  $r = 1$  se tiene la igualdad. Cuando  $r = 2$  entonces

$$k = \frac{q-p}{2} \in \mathbb{N}, \text{ por lo que}$$

$$\lfloor \frac{q-p+1}{2} \rfloor = \frac{q-p}{2} + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = \frac{q-p}{2}.$$

Es fácil ver que para cualquier  $r > 2$  se tiene la desigualdad, pues en este caso se tiene  $\beta(G) - k \geq 1$ .

□

Cuando se tiene que  $\gamma_M(G) = \beta(G)$  se dice que  $G$  es *máximo encajable*.

#### 5.4 DISTRIBUCIÓN DE ENCAJES DE UNA GRÁFICA

Aunque se ha hablado del género máximo y mínimo de una gráfica  $G$  sobre una superficie cerrada cualquiera, se suele dividir el estudio de encajes 2-celulares de una gráfica sobre superficies orientables y superficies no orientables, es decir, se busca el género máximo,  $\gamma_M(G)$ , de entre todas las superficies orientables en las que  $G$  tiene un encaje 2-celular, se

busca también el género mínimo,  $\gamma(G)$ , únicamente considerando superficies orientables, formando entonces lo que llamaremos el *intervalo de distribución* o *rango del género* para encajes en superficies orientables, que denotaremos  $[\gamma, \gamma_M]$ .

Análogamente buscamos el género máximo sobre superficies no orientables,  $\overline{\gamma}_M(G)$ , y el género mínimo sobre superficies no orientables,  $\overline{\gamma}(G)$ , formando entonces lo que llamaremos el *intervalo de distribución* o *rango del género* para encajes en superficies no orientables, que denotaremos  $[\overline{\gamma}, \overline{\gamma}_M]$ .

El siguiente teorema justifica por qué hemos usado la notación de intervalo en las definiciones anteriores.

**Teorema 5.4.1.** *Si una gráfica  $G$  tiene un encaje dos celular en las superficies  $S_m$  y  $S_n$ ,  $m \leq n$ , entonces  $G$  tiene un encaje 2-celular en  $S_k$ , donde  $m \leq k \leq n$ .*

La demostración se puede consultar en [10, pág. 132-136].

#### 5.4.1 Algunos resultados sobre intervalos de distribución

**Teorema 5.4.2.** [10, pág. 135] *Sea  $G$  una gráfica conexa, entonces  $\overline{\gamma}_M(G) = \beta(G)$ .*

**Teorema 5.4.3.** [1, pág. 143] *Sea  $G$  una gráfica conexa, entonces  $\overline{\gamma}(G) \leq 2\gamma_o(G) + 1$ .*

**Definición 5.4.1.** *La deficiencia,  $\xi(G, T)$ , de un árbol generador de una gráfica  $G$  se define como el número de componentes de  $G - T$  de tamaño impar.*

*La deficiencia,  $\xi(G)$ , es el mínimo de  $\xi(G, T)$  sobre todos los árboles generadores  $T$  en  $G$ .*

**Teorema 5.4.4.** *Sea  $G$  una gráfica conexa, entonces*

$$\gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - \xi(G)).$$

La demostración de este teorema se puede ver en [16].

## 5.5 ESQUEMAS DE ROTACIÓN

Dado un conjunto  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , una permutación cíclica de  $V$  es una permutación del conjunto tal que solo se puede descomponer en un solo ciclo y es uno que contiene a todos los elementos del conjunto. Por ejemplo para  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  algunas permutaciones cíclicas son:

$$(1, 2, 3, 5, 4), (1, 3, 2, 5, 4), (1, 5, 2, 4, 3).$$

Dada una gráfica  $G$ , etiquetamos sus vértices como

$$V(G) = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Para cada  $i \in V(G)$  con grado  $n_i$ , sea  $V(i) = \{k \in V(G) \mid \{i, k\} \in E(G)\}$ . Sea  $p_i : V(i) \rightarrow V(i)$  una permutación cíclica sobre  $V(i)$ , de tamaño  $n_i = |V(i)|$ ; a  $p_i$  se le llama rotación de  $i$ . El conjunto  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de rotaciones se llama esquema de rotación o sistema de rotación.

**Ejemplo 5.5.1.** *A la gráfica de la figura mostrada se le puede asignar el sistema de rotación siguiente:*

$$\begin{aligned} p_1 &: (2, 4) & p_2 &: (1, 3) & p_3 &: (2, 4) \\ p_4 &: (1, 6, 3, 5) & p_5 &: (4, 6) & p_6 &: (4, 5) \end{aligned}$$

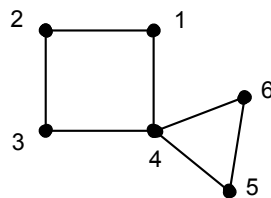


Figura 33: Sistema de rotación

El siguiente teorema hace uso de los sistemas de rotación y es útil cuando se buscan encajes de gráficas en superficies orientables.

**Teorema 5.5.1.** [1, pág. 62] *Cada sistema de rotación  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  determina un encaje 2-celular de  $G$  en una superficie  $S$ , tal que hay una orientación en  $S$  la cual induce un ordenamiento cíclico de las aristas  $\{i, k\}$  incidentes en  $i$  en la cual el sucesor inmediato de  $\{i, k\}$  es  $\{i, p_i(k)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

*Demostración.* Sea  $D = \{(a, b) \mid \{a, b\} \in E(G)\}$ , es decir,  $D$  es el conjunto de aristas de  $G$  pero se les ha asignado doble dirección, y definamos  $P^* : D \rightarrow D$  como  $P^*(a, b) = (b, p_b(a))$ . Entonces  $P^*$  es una permutación en el conjunto  $D$  y las órbitas de  $P^*$  determinan las regiones 2-celulares del correspondiente encaje. Las regiones obtenidas pueden entonces unirse de manera que  $(a, b)$  se une con  $(b, a)$  para formar una superficie  $S$  donde  $G$  tendrá un encaje 2-celular. (Dado que cada arista  $(a, b)$  en la frontera de cada región está asociada con otra arista  $(b, a)$  de otra o posiblemente la misma región, se tiene que  $S$  es cerrada. Dado que cada  $(a, b)$  está relacionada con  $(b, a)$   $S$  es orientable. Dado que  $p_i$  es una permutación cíclica,  $S$  es 2-celular.)  $\square$

**Ejemplo 5.5.2.** *En el ejemplo anterior el sistema asociado a la gráfica genera una sola región la cual se obtiene de la siguiente manera:*

*Se consideran las aristas doblemente dirigidas, escogemos una arista dirigida cualquiera, digamos  $(1, 2)$ , esta arista va del vértice 1 al vértice 2, así que nos*

fijamos en la permutación cíclica de 2 que es  $(1, 3)$ , la cual indica que hay que mandar el vértice 1 al vértice 3, así que ahora estamos en la arista dirigida  $(2, 3)$ , ahora repetimos el procedimiento, nos fijamos en la permutación cíclica de 3 que es  $(2, 4)$ , así que ahora estamos en la arista  $(3, 4)$ .

El proceso anterior se realiza hasta que se llega nuevamente a la arista inicial (observar que  $P^*(4, 1) = (1, p_1(4)) = (1, 2)$ ), lo obtenido será una región del encaje; en nuestro ejemplo la región obtenida fue:

$$(1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)(5, 6)(6, 4)(4, 3)(3, 2)(2, 1)(1, 4)(4, 6)(6, 5)(5, 4)(4, 1)$$

En general, se pueden tener varias regiones. Ahora, en qué región se da el encaje se responde usando la identidad de Euler  $p - q + r = 2 - 2k$ . Donde  $r$  está dado ahora por las regiones obtenidas al aplicar el esquema de rotación, en nuestro ejemplo  $r = 1$ , así que

$$6 - 7 + 1 = 0 = 2 - 2k \rightarrow k = 1$$

De aquí que el encaje es 2-celular, está sobre un toro y es como se muestra a continuación:

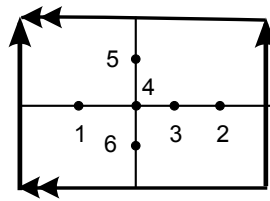


Figura 34: Encaje asociado a la gráfica del ejemplo 5.5.1

### 5.6 ESQUEMAS DE ROTACIÓN EN GRÁFICAS DE VOLTAJE

Dada una gráfica de voltaje se le puede asignar un esquema de rotación, tal esquema producirá un esquema de rotación sobre la gráfica derivada de la siguiente manera.

Sea  $G(V, E, \psi)$  una gráfica de voltaje encajada en la superficie  $S$  con esquema de rotación  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Definimos el levantamiento  $\tilde{P}$  de  $P$  en la gráfica derivada  $G^\psi$  de la siguiente manera:

si  $p_v(v, u) = (v, w)$  entonces

$$\tilde{p}_{(v,g)}((v, g), (u, g\psi(v, u))) = ((v, g), (w, g\psi(v, w))),$$

Para cada  $g \in \Lambda$ . Luego el esquema de rotación viene dado por

$$\tilde{P} = \{\tilde{p}_{(v,g)} \mid (v, g) \in V(G')\}$$

**Ejemplo 5.6.1.** La siguiente figura a) muestra una gráfica de voltaje  $G(V, E, \mathbb{Z}_5)$  a la cual le asignamos el siguiente esquema de rotación:

$$p_u : ((u, v)_0, (u, v)_1, (u, v)_2)$$

$$p_v : ((u, v)_0, (u, v)_2), (u, v)_1)$$

Así que la gráfica derivada en b) hereda el siguiente esquema de rotación

$$p_{u_0} : ((u_0, v_0), (u_0, v_1), (u_0, v_2)) \quad p_{v_0} : ((u_0, v_0), (u_0, v_2), (u_0, v_1))$$

$$p_{u_1} : ((u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3)) \quad p_{v_1} : ((u_1, v_1), (u_1, v_3), (u_1, v_2))$$

$$p_{u_2} : ((u_2, v_2), (u_2, v_3), (u_2, v_4)) \quad p_{v_2} : ((u_2, v_2), (u_2, v_4), (u_2, v_3))$$

$$p_{u_3} : ((u_3, v_3), (u_3, v_4), (u_3, v_5)) \quad p_{v_3} : ((u_3, v_3), (u_3, v_0), (u_3, v_4))$$

$$p_{u_4} : ((u_4, v_4), (u_4, v_5), (u_4, v_6)) \quad p_{v_4} : ((u_4, v_4), (u_4, v_1), (u_4, v_0))$$

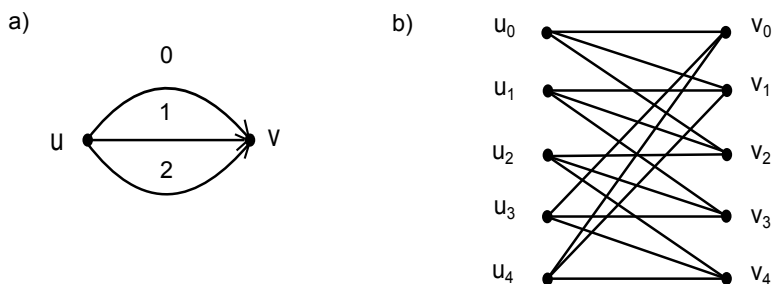


Figura 35: Gráficas de voltaje y esquemas de rotación

Podemos ahora enunciar el siguiente teorema

**Teorema 5.6.1.** *Sea  $G(V, E, \psi)$  una gráfica de voltaje con esquema de rotación  $P$  y  $\tilde{P}$  el levantamiento sobre  $G^\psi$ , con encajes en las superficies  $S$  y  $\tilde{S}$  respectivamente. Entonces podemos afirmar que Si  $R$  es una región del encaje de  $G$ , la cual es un  $k$ -ágono, entonces ésta deriva en una región 2-celular que es un  $k\psi_N(R)$ -ágono.*

*Demostración.* Consecuencia inmediata de la definición de los sistemas de rotación y del teorema 3.2.1. □

Observar que sería posible determinar el género mínimo orientable de una gráfica si elegimos correctamente el esquema de rotación, el cual será el que maximice  $k$ , el número de órbitas, es decir regiones, pues:

$$k = \frac{2-p+q-r}{2}$$

la dificultad de aplicar este método es que hay que elegir el esquema correcto de entre  $\prod_{i=1}^n (n_i - 1)!$  esquemas posibles, aunque varios esquemas pueden funcionar no sabemos cuántos y cuáles de ellos. Hay  $\prod_{i=1}^n (n_i - 1)!$  esquemas posibles porque el vértices  $i$  tiene orden  $n_i$ , así que para el primer elemento de la permutación cíclica podemos elegir  $n_i$  vértices,

para el segundo  $n_i - 1$ , así sucesivamente hasta 1, entonces hay  $n_i!$  formas, pero de entrada ya sabemos que una rotación de una permutación cíclica produce el mismo encaje, por ejemplo  $(1, 6, 3, 5)$  produce el mismo encaje que  $(5, 1, 6, 3)$  en el ejemplo anterior, por lo que en realidad podemos considerar  $\frac{n_i!}{n_i} = (n_i - 1)!$ , el producto es porque se hace el mismo razonamiento para los otros vértices.



## ENCAJES DE LAS GRÁFICAS CÚBICAS BICIRCULANTES SIMPLES

---

En este capítulo hablaremos acerca de los encajes de las gráficas cúbicas bicirculantes. El objetivo principal es encontrar el género mínimo de las familias  $T', F', H', I'$  de las cuales ya se ha hablado, para algunas de ellas la respuesta es bastante intuitiva, mientras que para otras es un problema muy complicado como veremos más adelante.

Para entender los géneros mínimos y máximos de las gráficas bicirculantes comenzaremos primero estudiando el género mínimo y máximo de los prismas y las escaleras de Möbius.

### 6.1 ENCAJES DE PRISMAS Y ESCALERAS DE MÖBIUS

#### 6.1.1 Género mínimo de los prismas

Para un prisma,  $\Pi_r$ , es claro que  $\gamma(\Pi_r) = 0$ , como se puede observar en la figura 36.

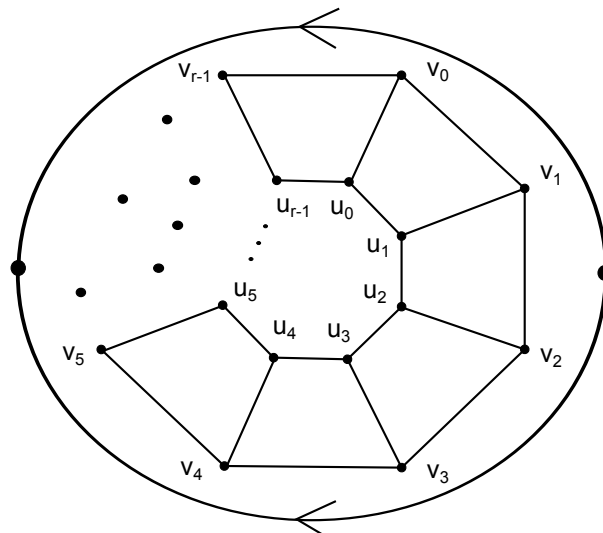


Figura 36: Encaje de  $\Pi_r$  en la esfera.

6.1.2 Género mínimo de las escaleras de Möbius

Obsérvese que una escalera de Möbius,  $M_r$ , tiene una subgráfica que es subdivisión de  $K_{3,3}$ , ver figura 37, así que por el teorema de Kuratowski sabemos que no es plana, así que  $\gamma(M_r) \geq 1$ ; sin embargo, podemos encontrar un encaje dos celular ya sea en  $S_1$  o en  $N_1$  como se observa en las figuras 38 y 39 respectivamente, de lo anterior tenemos que  $\gamma(M_r) = 1$ .

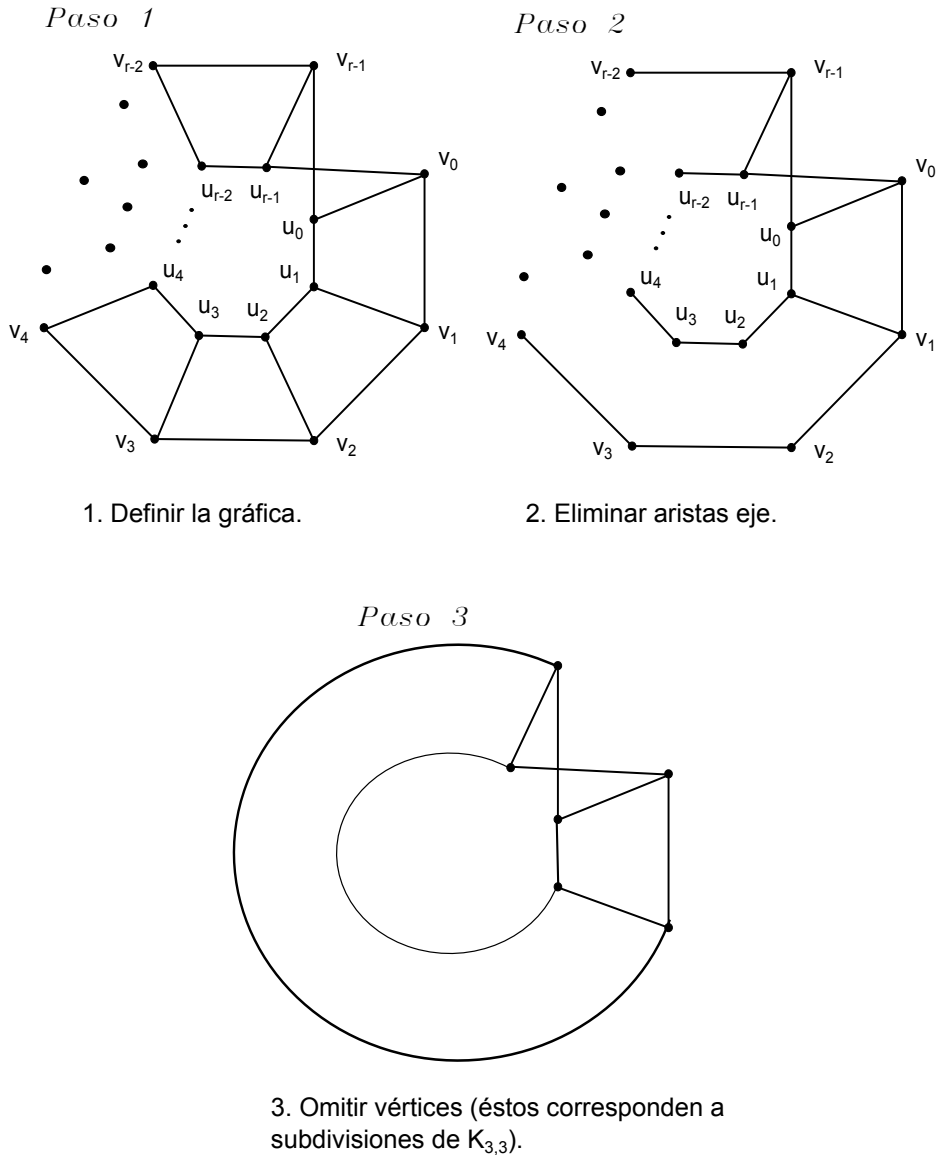


Figura 37: Como se observa, en el paso 3 se ha obtenido una subgráfica de  $T'(n, i, j)$  isomorfa a  $K_{3,3}$ .

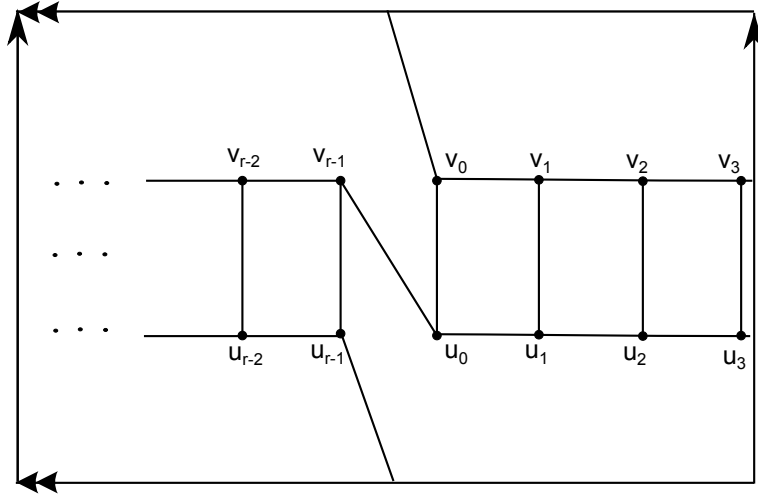


Figura 38: Encaje de  $M_n$  en el toro.

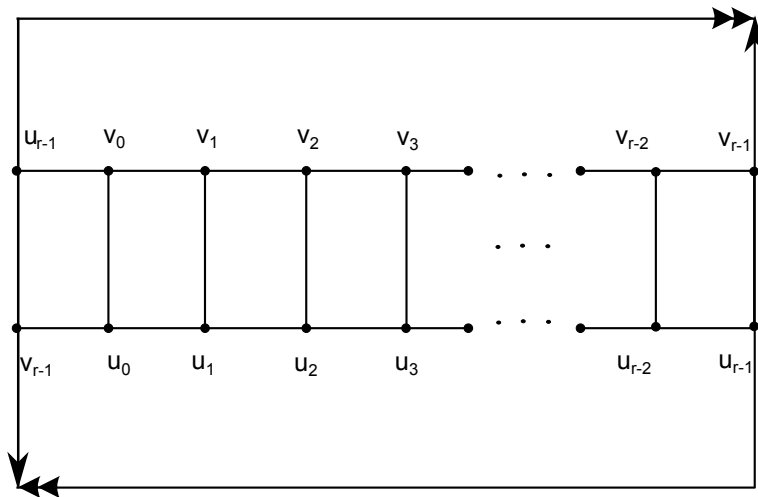


Figura 39: Encaje de  $M_n$  en plano proyectivo.

A continuación encontramos el género máximo de los prismas y escaleras de Möbius, en ambos casos se usará el teorema 5.4.4, para lo cual debemos encontrar el número de Betti,  $\beta(G)$ , dado por  $\beta(G) = q - p + h$  donde  $p$  es el número de vértices,  $q$  el número de aristas y  $h$  el número de componentes conexas de  $G$ , además debemos encontrar  $\xi(G)$  que es la deficiencia de  $G$ , es decir, el número mínimo de componentes de  $G - T$  de tamaño impar para todos los posibles árboles generadores.

6.1.3 Género máximo de los prismas

Dado un prisma  $G = \Pi_r$  con  $2r$  vértices tenemos que

$$\beta(G) = 3r - 2r + 1 = r + 1$$

Para elegir el árbol generador dividiremos en 2 casos, uno para  $r$  par y el otro para  $r$  impar.

**Caso 1:** Para el caso  $r$  par primero, todo árbol generador  $T$  que se encuentre en un prisma de  $2r$  vértices tiene  $2r - 1$  aristas entonces  $G - T$  tiene  $3r - (2r - 1) = r + 1$  aristas, es decir, un número impar de aristas por lo que  $G - T$  tiene al menos una componente de tamaño impar.

Por otro lado note que existe el árbol generador  $T$  con aristas dadas por:

$$E(T) = \{\{u_0, v_0\}, \{u_1, v_1\}, \dots, \{u_{r-1}, v_{r-1}\}\} \cup \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \dots, \{u_{r-1}, u_0\}\}$$

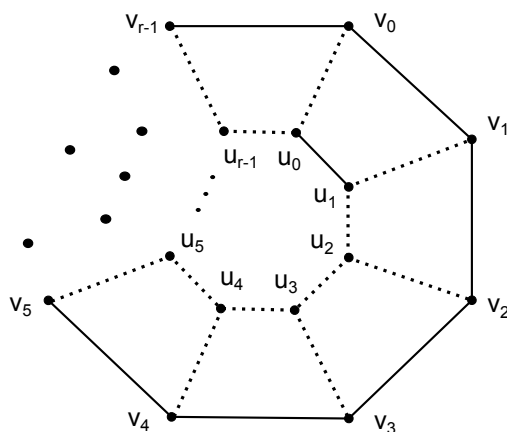


Figura 40: Las líneas punteadas son las aristas del árbol generador  $T$  que permite calcular  $\xi(G)$ .

Este árbol demuestra que  $\xi(G) \leq 1$  pero como  $T - G$  tiene al menos una componente de tamaño impar de hecho  $\xi(G) = 1$ , entonces por teorema 5.4.4 se tiene que:

$$\gamma_M(G) = \frac{r+1-1}{2} = r/2$$

**Caso 2:** En el caso de  $r$  impar note que existe el árbol generador  $T$  con aristas dadas por:

$$E(T) = \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \dots, \{u_{r-1}, v_{r-1}\}\} \cup \\ \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \dots, \{u_{r-1}, u_0\}\} \cup \\ \{v_0, v_1\}$$

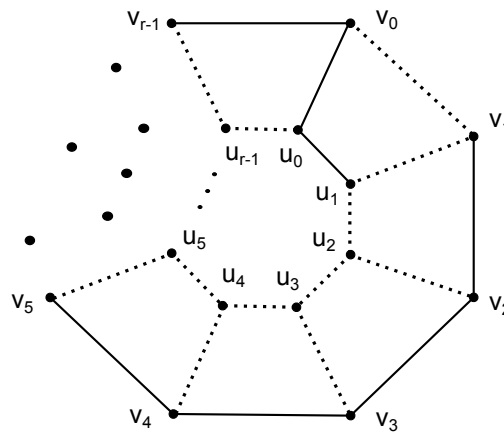


Figura 41: Las líneas punteadas son las aristas del árbol generador  $T$  que permite calcular  $\xi(G)$ .

Para este árbol  $G - T$  no tiene componentes de tamaño impar por lo que  $\xi(G) = 0$ .

Entonces por teorema 5.4.4 se tiene que:

$$\gamma_M(G) = \frac{r+1-0}{2} = \frac{r+1}{2}$$

#### 6.1.4 Género máximo de las escaleras de Möbius

Para una escalera de Möbius con  $2r$  vértices se tiene que

$$\beta(G) = 3r - 2r + 1 = r + 1$$

Para elegir el árbol generador también aquí dividiremos en 2 casos, uno para  $r$  par y el otro para  $r$  impar.

**Caso 1:** En el caso de  $r$  par observamos que por el mismo argumento del caso 1 de la sección 6.1.3  $G - T$  debe tener al menos una componente de tamaño impar, por lo que  $\xi(G) \geq 1$ .

Por otro lado podemos encontrar el árbol generador  $T$  con aristas dadas por:

$$E(T) = \{\{u_0, v_0\}, \{u_1, v_1\}, \dots, \{u_{r-1}, v_{r-1}\}\} \cup \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \dots, \{u_{r-1}, u_0\}\}$$

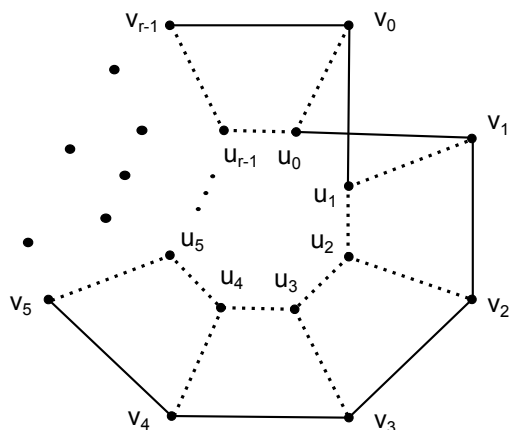


Figura 42: Las líneas punteadas son las aristas del árbol generador  $T$  que permite calcular  $\xi(G)$ .

Para este árbol el número de componentes de tamaño impar en  $G - T$  es 1, por lo que  $\xi(G) = 1$ .

Entonces por teorema 5.4.4 se tiene que:

$$\gamma_M(G) = \frac{r+1-1}{2} = r/2$$

**Caso 2:** Para el caso de  $r$  impar funciona elegir el árbol de forma análoga al caso de  $r$  par. La diferencia consiste en que la única componente en  $G - T$  es de tamaño par, así que por el teorema 5.4.4 se tiene que:

$$\gamma_M(G) = \frac{r+1-0}{2} = \frac{r+1}{2}$$

## 6.2 ENCAJES DE GRÁFICAS $T'(n, i, j)$

### 6.2.1 Género Mínimo

Como vimos en la sección 4.2 cualquier gráfica de este tipo es desconexa, por lo tanto cualquier encaje no será 2-celular, pero podemos usar el teorema 5.2.3, con el objeto de dar alguna información sobre encajes mínimos de esta clase. Recordemos que estas gráficas están formadas por dos conjuntos de subgráficas cada uno de los cuales puede ser a su vez

un conjunto de gráficas isomorfas a un prisma  $\Pi_r$  o a una escalera de Möbius  $M_r$ .

Una vez estudiado el género máximo y mínimo de los prismas y las escaleras de Möbius podemos concluir que si del vértice  $u$  de la gráfica de voltaje de donde se deriva  $T'(n, i, j)$  se obtienen prismas y lo mismo sucede para el vértice  $v$  entonces por el teorema 5.2.3 tenemos que  $\gamma(T'(n, i, j)) = 0$ .

Si de ambos vértices  $u, v$  se derivan escaleras de möbius isomorfas a  $M_{r_1}$  y  $M_{r_2}$  respectivamente, sabemos ya que habría  $n/\circ(i)$  y  $n/\circ(j)$  gráficas isormofas del primer y segundo tipo respectivamente, si consideramos el encaje en un toro de cada gráfica podemos usar nuevamente el teorema 5.2.3 para afirmar que  $\gamma(T'(n, i, j)) = n/\circ(i) + n/\circ(j)$ .

Supongamos ahora que, de uno de los vértices digamos  $u$  se derivan prismas, pero del vértice  $v$  se derivan escaleras de Möbius, entonces  $\gamma(T'(n, i, j)) = n/\circ(j)$ .

No olvidar que para todos los casos anteriores se usó el teorema 5.2.3, el cual solo considera las superficies orientables.

Como no se cuenta con un teorema similar al teorema 5.2.3 para el género máximo de gráficas no conexas, omitimos el análisis para el género máximo de las gráficas  $T'(n, i, j)$ .

## 6.3 ENCAJES DE GRÁFICAS $F'(n, i, j)$

### 6.3.1 Género Mínimo

En la sección 4.2 vimos que estas gráficas son un conjunto de prismas  $\Pi_r$ , con  $r$  par, isomorfos entre sí o bien un conjunto de escaleras de Möbius  $M_r$ , con ciclo mayor de tamaño par, isomorfas entre sí. De la discusión de la sección 6.1 sabemos que para estas gráficas  $\gamma(\Pi_r) = 0$  y que  $\gamma(M_r) = 1$  respectivamente. Podemos usar el teorema 5.2.3 para decir algo cuando esta familia es disconexa, pero a partir de ahora solo serán de nuestro interés las gráficas conexas.

### 6.3.2 Género Máximo

Como estamos considerando solamente las gráficas conexas, entonces solo nos importa el género máximo de un prisma  $\Pi_r$ , con  $r$  par o de una escalera de Möbius, con ciclo mayor de tamaño par, pero por las secciones 6.1.3 y 6.1.4 sabemos que  $\Gamma_M(\Pi_r) = r/2 = \Gamma_M(M_r)$ .

6.4 ENCAJES DE GRÁFICAS  $H'(n, i, j)$ 

## 6.4.1 Género Mínimo

Para encontrar el género mínimo orientable de las gráficas  $H'$  conexas haremos uso de los esquemas de rotación. Primero vemos que toda gráfica  $H'(n, i, j)$  tiene un encaje 2-celular en un toro si consideramos el siguiente esquema de rotación:

$$\begin{aligned} p_u &: (i, j, 0) \\ p_v &: (-i, -j, 0) \end{aligned}$$

Observemos que este sistema induce regiones de tamaño 6, tomamos la arista  $((u, v), i)$  y sigamos su órbita:

$$((u, v), i)((v, u), -j)((u, v), 0)((v, u), -i)((u, v), j)((v, u), 0)$$

que es un ciclo de tamaño 6 y además tiene voltaje neto 0, luego en el esquema de rotación inducido en la gráfica derivada las caras también son ciclos de tamaño 6, y solo hay caras de este tipo, más aún cada arista está en 2 caras y hay  $3n$  aristas de modo que el número de regiones que hay son  $\frac{3n*2}{6}$ , así que usando la fórmula de Euler en el encaje de la gráfica derivada tenemos

$$\begin{aligned} 2n - 3n + r &= 2 - 2g \\ -n + (6n/6) &= 2 - 2g \\ -n + n &= 2 - 2g \\ g &= 1 \end{aligned}$$

Lo anterior implica que  $H'$  tiene encaje 2-celular en un toro y que en dicho encaje todas las caras son hexágonoles, además cada vértice pertenece a 3 caras hexagonales.

A continuación presentamos 2 ejemplos que nos ayudarán a clarificar cómo se puede encajar cualquier gráfica  $H'$  que tengamos. En lo que sigue, los elementos de la fibra de  $u$  se caracterizan simplemente como  $i$ , los de la fibra de  $v$  como  $j'$ , con  $i, j' \in \mathbb{Z}_n$ .

**Ejemplo 6.4.1.** Consideremos  $H'(7, 1, 3)$

$$\begin{aligned} p_u &: (1, 3, 0) \\ p_v &: (-1, -3, 0) \end{aligned}$$



Las regiones son

1.  $(0, 1')(1', 5)(5, 5')(5', 4)(4, 0')(0', 0)$
2.  $(1', 0)(0, 3')(3', 3)(3, 4')(4', 1)(1, 1')$
3.  $(5', 5)(5, 6')(6', 3)(3, 3')(3', 2)(2, 5')$
4.  $(0', 4)(4, 4')(4', 3)(3, 6')(6', 6)(6, 0')$
5.  $(1, 4')(4', 4)(4, 5')(5', 2)(2, 2')(2', 1)$
6.  $(2, 3')(3', 0)(0, 0')(0', 6)(6, 2')(2', 2)$
7.  $(6, 6')(6', 5)(5, 1')(1', 1)(1, 2')(2', 6)$

Un mapa para representar este encaje es el de la figura 43.

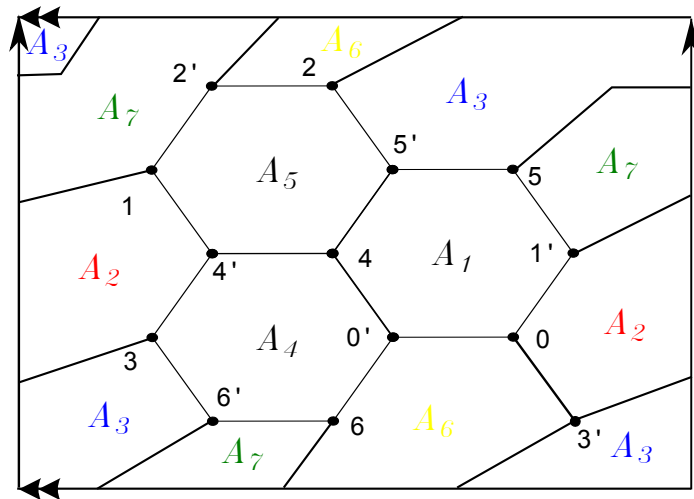


Figura 43: Encaje 2-celular de  $H'(7, 1, 3)$  en el toro. Las región etiquetada con  $A_i$  corresponde a la región  $i$  del esquema de rotación.

**Ejemplo 6.4.2.** Considerar  $H'(9, 1, 4)$

$$p_u : (1, 4, 0)$$

$$p_v : (-1, -4, 0)$$

Las regiones son

1.  $(0, 0')(0', 8)(8, 3')(3', 3)(3, 4')(4', 0)$
2.  $(0', 0)(0, 1')(1', 6)(6, 6')(6', 5)(5, 0')$
3.  $(3', 8)(8, 8')(8', 7)(7, 2')(2', 2)(2, 3')$
4.  $(3, 3')(3', 2)(2, 6')(6', 6)(6, 7')(7', 3)$
5.  $(4', 3)(3, 7')(7', 7)(7, 8')(8', 4)(4, 4')$
6.  $(6, 1')(1', 1)(1, 2')(2', 7)(7, 7')(7', 6)$
7.  $(0', 5)(5, 5')(5', 4)(4, 8')(8', 8)(8, 0')$
8.  $(2, 2')(2', 1)(1, 5')(5', 5)(5, 6')(6', 2)$
9.  $(5', 1)(1, 1')(1', 0)(0, 4')(4', 4)(4, 5')$

Un mapa para representar este encaje es el de la figura 44.

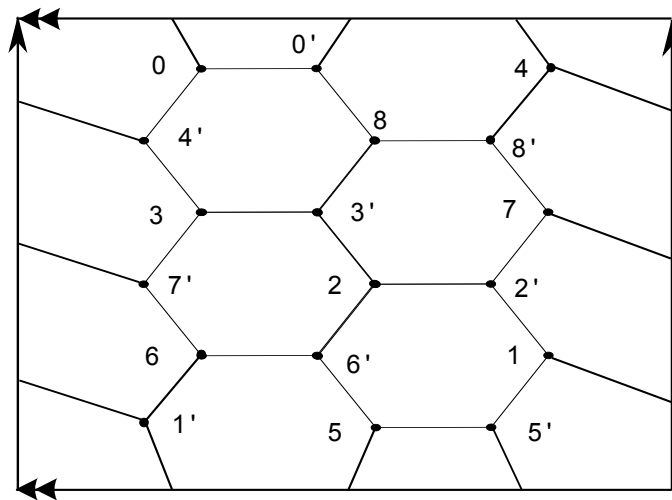


Figura 44: Encaje 2-celular de  $H'(9, 1, 4)$  en el toro.

Observe que en el ejemplo 6.4.2 existen 3 ciclos que no son caras a saber:

$$(0, 4', 3, 7', 6, 1'), (0', 8, 3', 2, 6', 5), (4, 8', 7, 2', 1, 5')$$

esto sucede porque  $\text{mcd}(n = 9, -i + j = 3) > 1$ ; sin embargo en el ejemplo 6.4.1 existe un solo ciclo hamiltoniano (que no es una cara) a saber:

$$(2', 1, 4', 3, 6', 5, 1', 0, 3', 2, 5', 4, 0', 6)$$

este ciclo es obtenido porque  $\text{mcd}(n = 7, -i + j = 2) = 1$ .

Estos patrones pueden generalizarse para cualquier gráfica  $H'(n, i, j)$  conexa en 2 casos generales:

**caso 1 ( a )**  $\text{mcd}(n, \pm i) > 1$  **o b)**  $\text{mcd}(n, \pm j) > 1$  **o c)**  $\text{mcd}(n, \pm i + \mp j) > 1$ .

**caso 2 ( a )**  $\text{mcd}(n, \pm i) = 1$  **y b)**  $\text{mcd}(n, \pm j) = 1$  **y c)**  $\text{mcd}(n, \pm i + \mp j) = 1$ .

**caso 1:** En este caso existen a) o b) o c) ciclos según sea el caso (notar que no son disyunciones exclusivas) ya que el orden de un elemento  $x$  en  $\mathbb{Z}_n$  es igual a  $\frac{n}{\text{mcd}(n, x)}$  (ver teorema 1.1.3) lo cual genera el tamaño del ciclo y el número de subgrupos (ciclos en este caso) de  $\mathbb{Z}_n$  que es  $n / \frac{n}{\text{mcd}(n, x)} = \text{mcd}(n, x)$ .

**caso 2:** Por el mismo argumento que en el **caso 1** como  $\text{mcd}(n, x) = 1$  hay un solo ciclo que resulta hamiltoniano.

Con lo anterior hemos demostrado que para toda gráfica conexa  $G = H'(n, i, j)$ ,  $\gamma_o \leq 1$ ; sin embargo, es posible que alguna gráfica de esta familia pueda encajarse en el plano, veremos si esto es posible y bajo qué condiciones, para esto procederemos por casos:

**Caso 1:** Si  $\text{mcd}(n, i) = 1$  o  $\text{mcd}(n, j) = 1$ , sin pérdida de generalidad supongamos lo primero, entonces existe un ciclo hamiltoniano en  $G$  que tomaremos como el mostrado a la izquierda de la figura 45 el cual es  $(0, i', i, 2i, 2i', \dots, 0')$  y podemos dibujarlo como se muestra a la derecha de esta figura, esto implica que  $j = ki$ , donde podemos asumir que  $k \in \mathbb{N}$  y  $k \leq n/2$  (pues en cualquier otro caso se obtiene una gráfica isomorfa a las ya consideradas), demostraremos que  $G$  contiene una subdivisión de  $K_{3,3}$  como subgráfica, lo cual demuestra que las gráficas de este caso tienen género mínimo mayor que 1. Las siguientes aristas son obtenidas como elementos de las aristas de  $G$  al derivar de la gráfica de voltaje:

$$\begin{aligned} &(0, (ki)') \\ &(i, (i + ki)') = (i, (k + 1)i') \\ &(2i, (2i + ki)') = (2i, (2 + k)i') \end{aligned}$$

A este conjunto de 3 aristas le llamaremos **conjunto 1**.

Además como los vértices de  $G$  están unidos por al menos una trayectoria dada por el ciclo hamiltoniano descrito arriba podemos suponer que las aristas

$$(0, i), (i, 2i), (0, (2 + k)i'), (2i, ki'), (ki', (k + 1)i'), ((k + 1)i', (2 + k)i')$$

están en  $G$  pero como subdivisiones, a este conjunto de aristas le llamaremos **conjunto 2**. Como se puede ver en la figura 46 esta gráfica resulta ser un  $K_{3,3}$

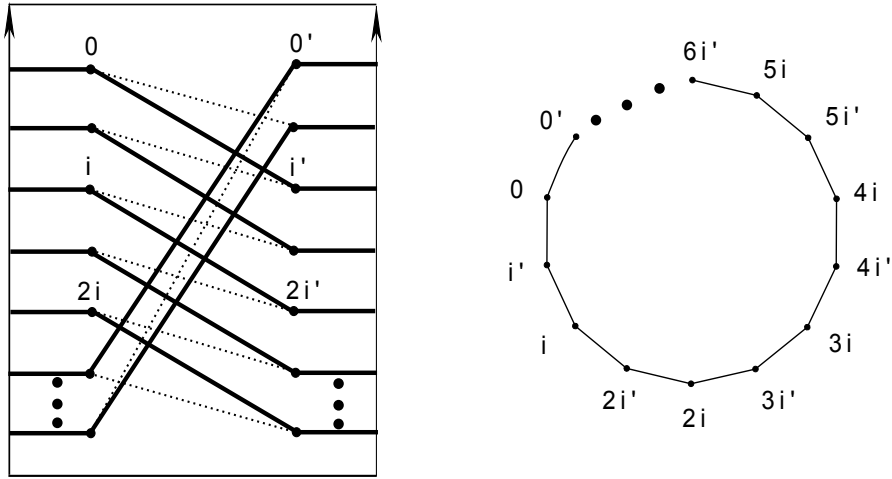


Figura 45: A la izquierda está  $H'(n, i, j)$  dibujada sobre un cilindro para facilitar la visualización.

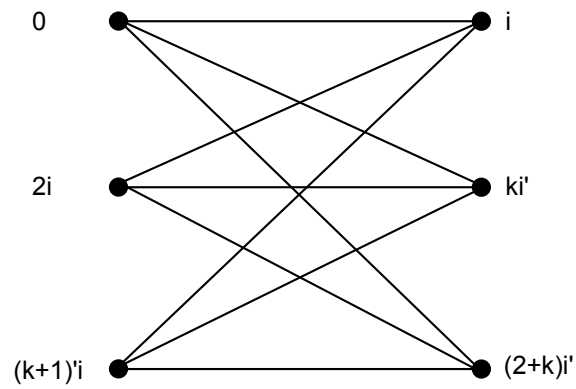


Figura 46:  $G$  contiene una subdivisión de  $K_{3,3}$ .

En este argumento hay una sutileza a considerar, el problema está en el **conjunto 2** de aristas, para ver el problema considere la gráfica  $H'(4, 1, 2)$  (ver figura 47). En b) en la figura 47 se muestra la gráfica  $K_{3,3}$  que correspondería según nuestra elección de aristas indicada en los párrafos anteriores, pero resulta que como puede verse en a), esta gráfica es plana.

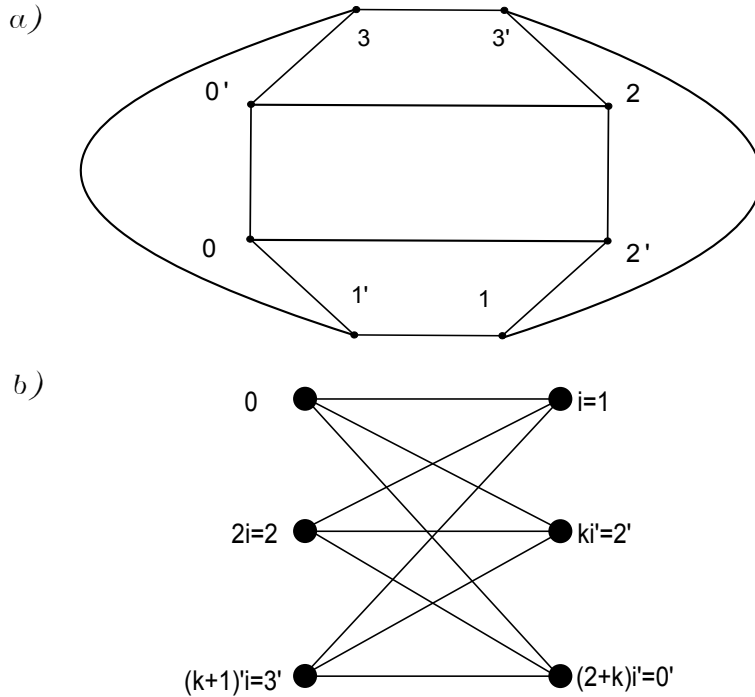


Figura 47:  $H'(4, 1, 2)$ , es de género 0.

El problema está en que se toman las subdivisiones de la aristas  $(0, 1)$ , de  $(1, 2)$  y  $(2, 2')$ , pero esto implica que el vértice  $2'$  debe quedar como vértice agregado a  $K_{3,3}$  en la subdivisión al mismo tiempo que debe ser parte de  $K_{3,3}$  lo que significa que en realidad es una subdivisión mal hecha. Entonces la pregunta es ¿Cuándo el conjunto 1 y el conjunto 2 de aristas generan una “mala subdivisión”?

Para resolver esto primero veamos que los vértices  $0, i, 2i$  no generan problema alguno al elegirlos como parte de  $K_{3,3}$ , pero ya no pueden ser parte de  $K_{3,3}$  los vértices  $i', 2i'$ , pues ya quedan como vértices agregados al momento de subdividir. Por otro lado  $j = ki$  donde  $1 < k \leq n/2$ , pero por lo dicho anteriormente entonces  $2 < k \leq n/2$ , así que con estas condiciones sobre  $k$  vemos que los vértices  $0, i, 2i, ki', (k + 1)', (k + 2)i'$  aparecen en ese orden en el ciclo hamiltoniano de la figura 45, con ellos se han encontrado 6 aristas que sin generar problemas, por último observar que las aristas faltantes, es decir  $(0, ki'), (i, (k + 1)i'), (2i, (k + 2)i')$ , son diferentes entre ellas y no están sobre el ciclo hamiltoniano por lo que estas condiciones sobre  $k$  son suficientes para que el conjunto 1 y el conjunto 2 de aristas generen una verdadera subdivisión de  $K_{3,3}$ .

Así que la única forma de generar una “mala subdivisión” de  $K_{3,3}$  es cuando  $k = 2$ , esto es cuando  $j = 2i$ , para este caso se obtiene una gráfica como la de la figura 48 y como puede observarse toda la familia de gráficas  $H(n, i, 2i)$  conexas con  $\text{mcd}(n, i) = 1$  del caso 1 es plana, por lo que el género mínimo para esta familia es 0 y el resto de las gráficas de este caso 1 tienen género mínimo igual a 1.

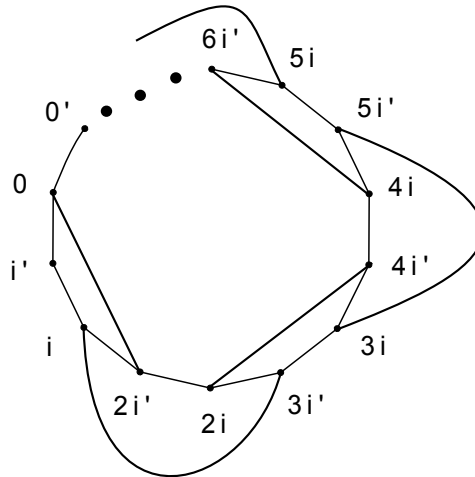


Figura 48:  $G$  contiene una subdivisión de  $K_{3,3}$ .

**Caso 2:** Si  $\text{mcd}(n, i) > 1$  y  $\text{mcd}(n, j) > 1$ , dividiremos nuevamente en 2 casos. Como  $H'$  es conexa, por la proposición 4.3.1 se debe tener  $\text{mcd}(n, i, j) = 1$ , así que  $\text{mcd}(n, i) \neq \text{mcd}(n, j)$ , luego sin pérdida de generalidad consideremos  $\text{mcd}(n, i) \geq 3$ , de aquí que hay al menos 3 ciclos disjuntos e isomorfos en la gráfica pero aquí hay que tener cuidado por lo que se divide nuevamente en 2 casos:

**Subcaso 1:**  $\text{mcd}(n, i) = n/2$ , entonces  $n/\text{mcd}(n, i) = 2$  por lo que se tienen ciclos de tamaño 2, pero como estamos en  $\mathbb{Z}_n$  de hecho  $i = n/2$ ; además la condición de este subcaso implica que  $\text{mcd}(n, j) = 2$ , por lo que se generan 2 ciclos disjuntos que al unirlos con las aristas que derivan de la arista con voltaje  $i = n/2$  se tiene un prisma, los cuales son claramente encajables en el plano.

**Subcaso 2:** Si  $\text{mcd}(n, i) \neq n/2 \neq \text{mcd}(n, j)$ , entonces no hay ciclos de tamaño 2 y cada ciclo tiene 2 o más copias isomorfas y uno de ellos tiene al menos 3; recordando la forma que tienen las gráficas de Haar cíclicas cúbicas como se vio en el ejemplo de la sección 4.2.2, de hecho es claro que, si no consideramos las aristas que unen el ciclo interno con el externo, no hay otra forma (salvo homeomorfismos) de encajar las gráficas resultantes en el plano, pero al unir el ciclo interno con el externo se cruzan las aristas por lo que no se pueden encajar en el plano.

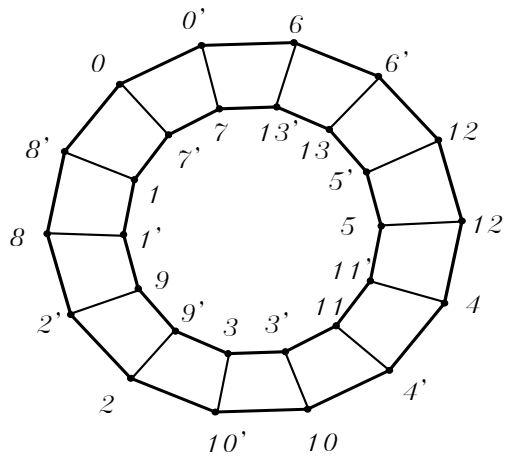


Figura 49:  $H'(14, 8, 7)$  es un prisma.

Otra forma de demostrar que las gráficas de esta familia no son planas es encontrando una subdivisión de  $K_{3,3}$  como subgráfica. En la figura 50 se muestra una subdivisión de  $K_{3,3}$  como subgráfica, aunque es un caso particular muestra cómo se puede generalizar, los vértices  $3', 1, 2', 2$  se tomarán en el ciclo externo el  $1'$  se toma en el penúltimo ciclo y el  $3$  se debe tomar en el ciclo interno, es fácil ver que siempre hay forma de llegar desde el  $1'$  hasta el  $3$  pasando por los ciclos intermedios por lo que una construcción análoga para cualquier gráfica de este subcaso funciona.

Por tanto todas las gráficas de esta familia tienen género mínimo 1.

#### 6.4.2 Género Máximo

Para el género máximo de estas gráficas trabajaremos con ejemplos particulares que dan sugerencia de cómo debe ser el caso general y dejaremos para trabajos futuros la generalización de estos ejemplos.

Para esta parte haremos uso del teorema 5.4.4, primero el número de Betti está dado:

$$\beta(G) = q - p + h = 3n - 2n + 1 = n + 1$$

El siguiente paso es encontrar  $\xi(G)$ , para lo cual debemos encontrar un árbol generador  $T$  tal que el número de componentes de tamaño impar de  $G - T$  sea mínimo, también en esta parte dividiremos en los mismos casos que se tomaron en la sección anterior del Género Mínimo, así que usaremos algunas propiedades ya mencionadas en dicha sección:

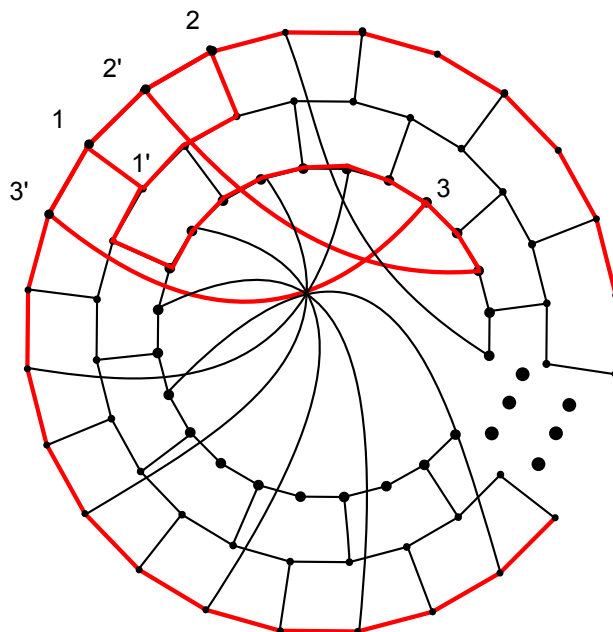


Figura 50: Los números corresponden a los vértices de  $K_{3,3}$  y las aristas en rojo son las subdivisiones.

**Caso 1:**  $\text{mcd}(n, i) = 1$  o  $\text{mcd}(n, j) = 1$ , un ejemplo da la pauta de cómo hay que proceder en estos casos:

**Ejemplo 6.4.3.** En la figura 51 se muestra a  $G = H'(7, 3, 6)$  y se dan los pasos de cómo llegar al árbol generador que permite encontrar  $\xi(G)$ .

En el paso 1 se da un árbol generador  $T$  (aristas punteadas), pero todas las componentes en  $G - T$  son impares, en el paso 2 vemos cómo se irá modificando la construcción para tener el menor número posible de componentes impares. Finalmente el paso 4 nos muestra un árbol donde  $G - T$  tiene 0 componentes impares.

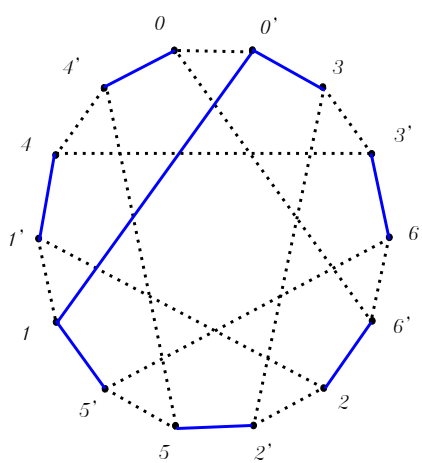
Este patrón es el que debe seguirse para  $n$  impar, dada cualquier gráfica de este caso y donde  $n$  es impar, puede seguirse el mismo patrón para conseguir el árbol  $T$ . Así que se conjetura que para esta familia de gráficas, es decir, caso 1 con  $n$  impar:

$$\gamma_M(G) = \frac{n+1-0}{2} = \frac{n+1}{2}$$

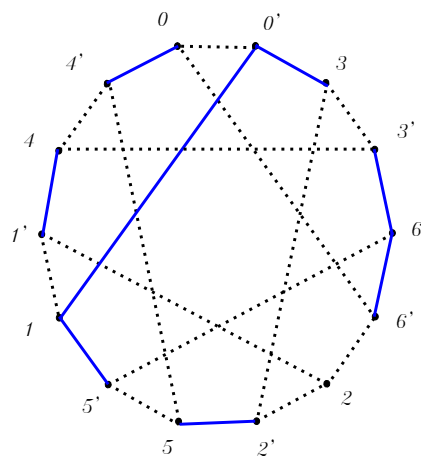
Ahora veamos qué pasa en este mismo caso cuando  $n$  es par.



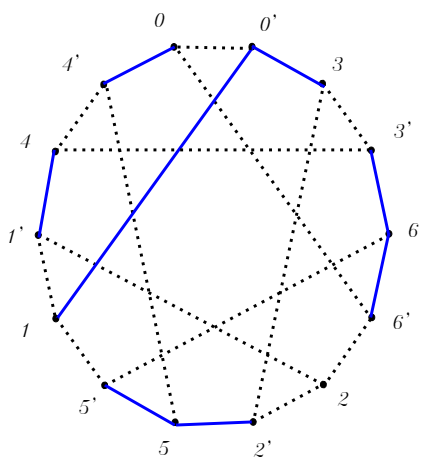
PASO 1



PASO 2



PASO 3



PASO 4

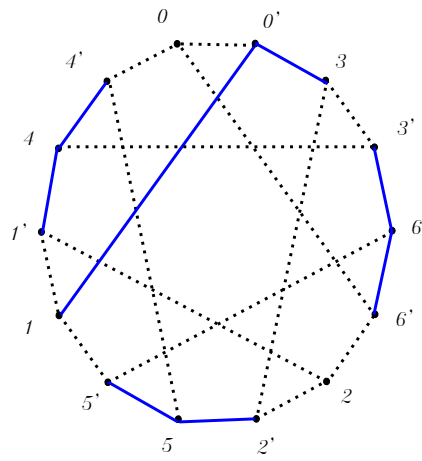


Figura 51:  $H'(7, 3, 6)$

**Ejemplo 6.4.4.** En la figura 52 se muestra a  $G = H'(6, 1, 2)$ , los pasos a seguir para llegar al árbol generador que es útil son análogos a los del ejemplo anterior.

Observar que aunque en el paso inicial se tienen ciclos disjuntos al final se tiene un árbol, donde se tiene 1 sola componente impar en  $G - T$  y que de hecho no puede haber menos porque entonces en la fórmula para  $\gamma_M$  se tendría:

$$\gamma_M(G) = \frac{6+1-0}{2} = \frac{7}{2}$$

por lo que  $\gamma_M(G)$  no sería un entero lo cual no puede ser. Afirmamos también que para el caso general es posible realizar una construcción de  $T$  análoga a la de este ejemplo, así que conjeturamos que en este caso 1 y donde  $n$  es par

$$\gamma_M(G) = \frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2}$$

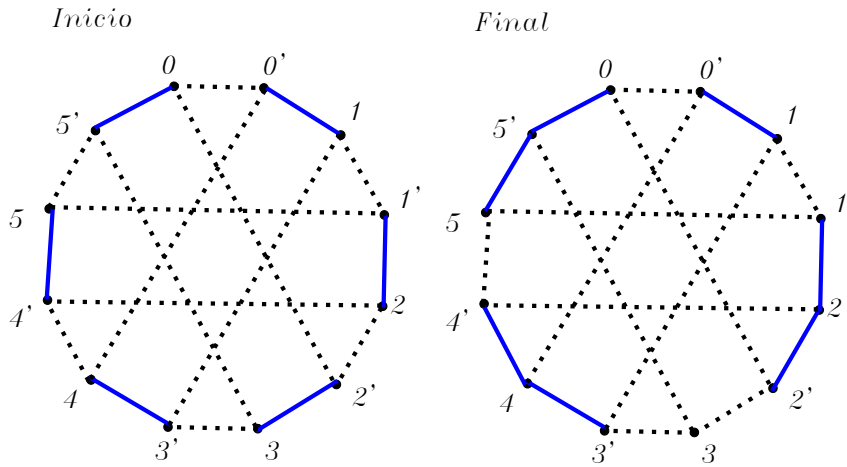


Figura 52:  $H'(6, 1, 2)$

**Caso 2:** Si  $\text{mcd}(n, i) > 1$  y  $\text{mcd}(n, j) > 1$ , como en la sección anterior tenemos los mismos 2 subcasos:

**Subcaso 1:**  $\text{mcd}(n, i) = n/2$ , vimos que aquí solo entran prismas y ya hemos dicho en la sección 6.2 cuál es su género máximo.

**Subcaso 2:**  $\text{mcd}(n, i) \neq n/2 \neq \text{mcd}(n, j)$ , ahora ya sabemos qué forma tiene estas gráficas y aunque la forma de construir el árbol generador  $T$  es análogo para todas estas gráficas, se deben hacer pequeños cambios, por lo que dividiremos nuevamente en casos, los dibujos se trazan con la misma idea que se usó en la subsección 4.2.2, es decir, hay que unir el ciclo externo con el ciclo interno (pues represente el mismo ciclo) de forma apropiada lo cual depende de los voltajes  $i$  y  $j$ :

**Subsubcaso 1:**  $\frac{n}{\text{mcd}(n, i)} = 2s$  o  $\frac{n}{\text{mcd}(n, j)} = 2s$ , supongamos lo primero, esto implica que hay ciclos de tamaño par, en este caso podemos tomar un árbol como se muestra en los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 6.4.5.** En este ejemplo además de cumplir la condición del subsubcaso 1, también cumple con que los ciclos que van del interno al externo son un número par (ver figura 53); observamos que entonces para las gráficas con esta forma:

$$\gamma_M(G) = \frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2}$$

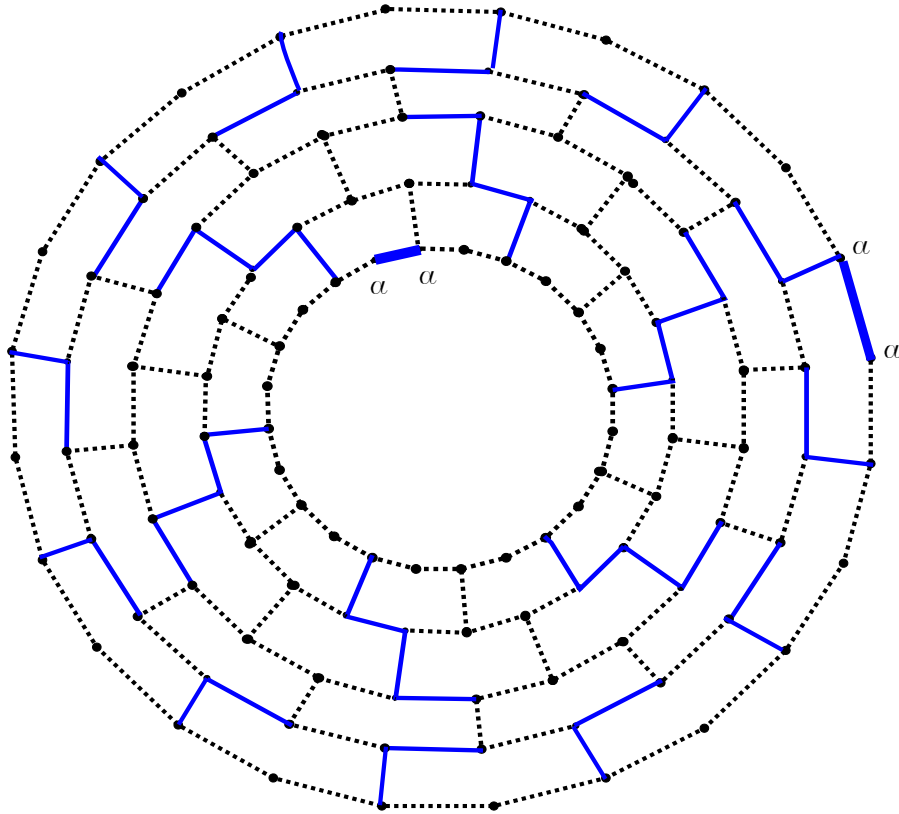


Figura 53: Unir el ciclo interno con el externo a través de la arista  $(a, a)$  (notar que hay 2 posibles formas de hacer esto).

**Ejemplo 6.4.6.** Misma idea que el ejemplo anterior pero aquí se cumple que los ciclos que van del interno al externo son un número impar (ver fig. 54); también para este caso se tiene que

$$\gamma_M(G) = \frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2}$$

**Subsubcaso 2:**  $\frac{n}{\text{mcd}(n,i)} = 2s + 1$  y  $\frac{n}{\text{mcd}(n,j)} = 2s + 1$ , hay ciclos de tamaño impar, ponemos 2 ejemplos que aclararán cómo hay que escoger los árboles en estos casos.

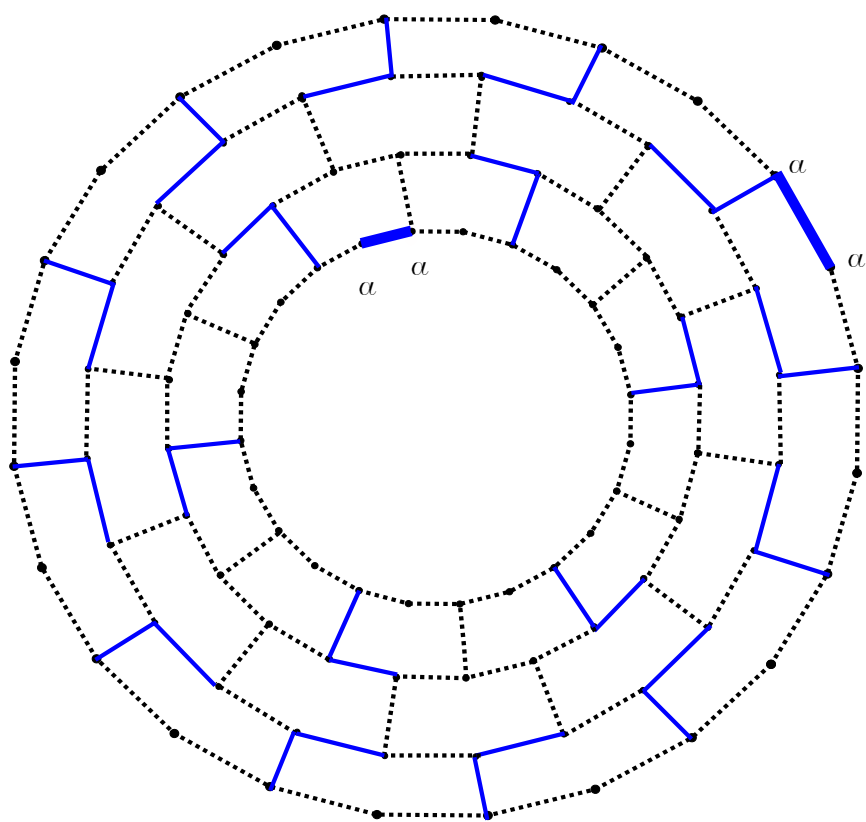


Figura 54: Unir el ciclo interno con el externo por las aristas de mayor grosor.

**Ejemplo 6.4.7.** En círculo se muestra la parte que cambia en la forma de escoger el árbol con respecto a cómo se escogió en el subcaso 1, en este ejemplo hay un número par de ciclos del interno al externo por lo que  $n$  es par (recordar que el ciclo interno y el externo son iguales y hay que unirlos para completar la gráfica, ver fig. 55).

$$\gamma_M(G) = \frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2}$$

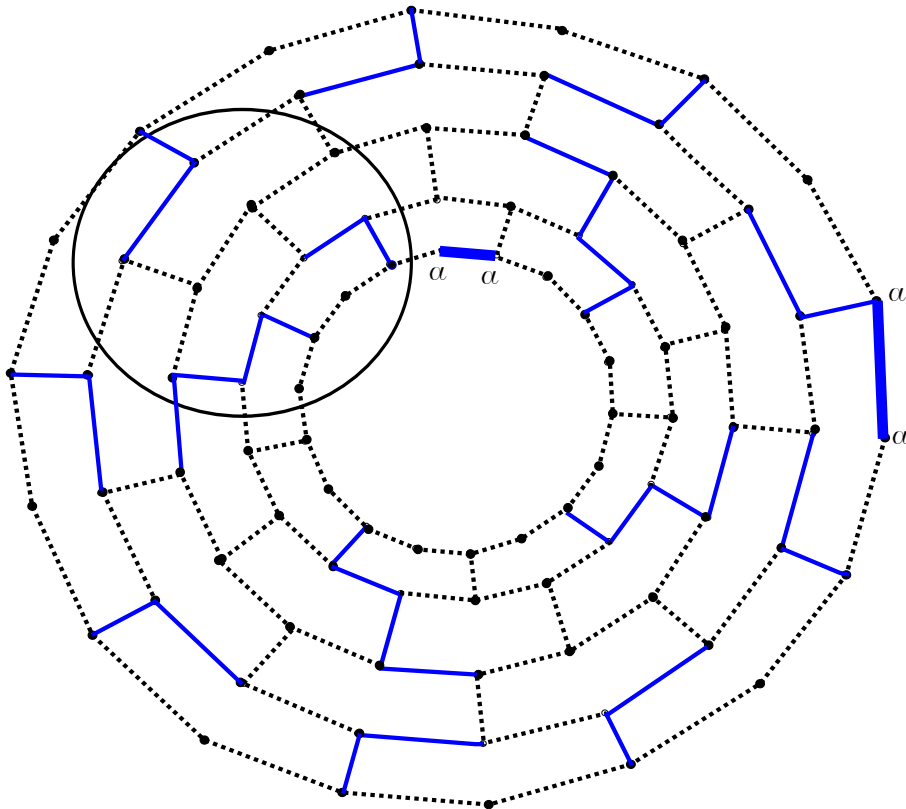


Figura 55: El círculo indica el cambio en la forma de escoger el árbol generador.

En este caso no es muy claro cómo debe procederse en general por lo que añadimos la gráfica con 6 ciclos (del interno al externo) donde se muestre cómo se debe proceder (ver figura 56).

**Ejemplo 6.4.8.** En este ejemplo hay un número impar de ciclos de tamaño impar del interno al externo por lo que  $n$  es impar, así que el número de componentes impares en  $G - T$  es 0 como se muestra en la figura 57, nuevamente hay que poner atención a la parte que se encuentra dentro del círculo que es donde se realizan los cambios; con este árbol se tiene que el número de componentes impares de  $G - T = 0$  así que:

$$\gamma_M(G) = \frac{n+1-0}{2} = \frac{n+1}{2}$$

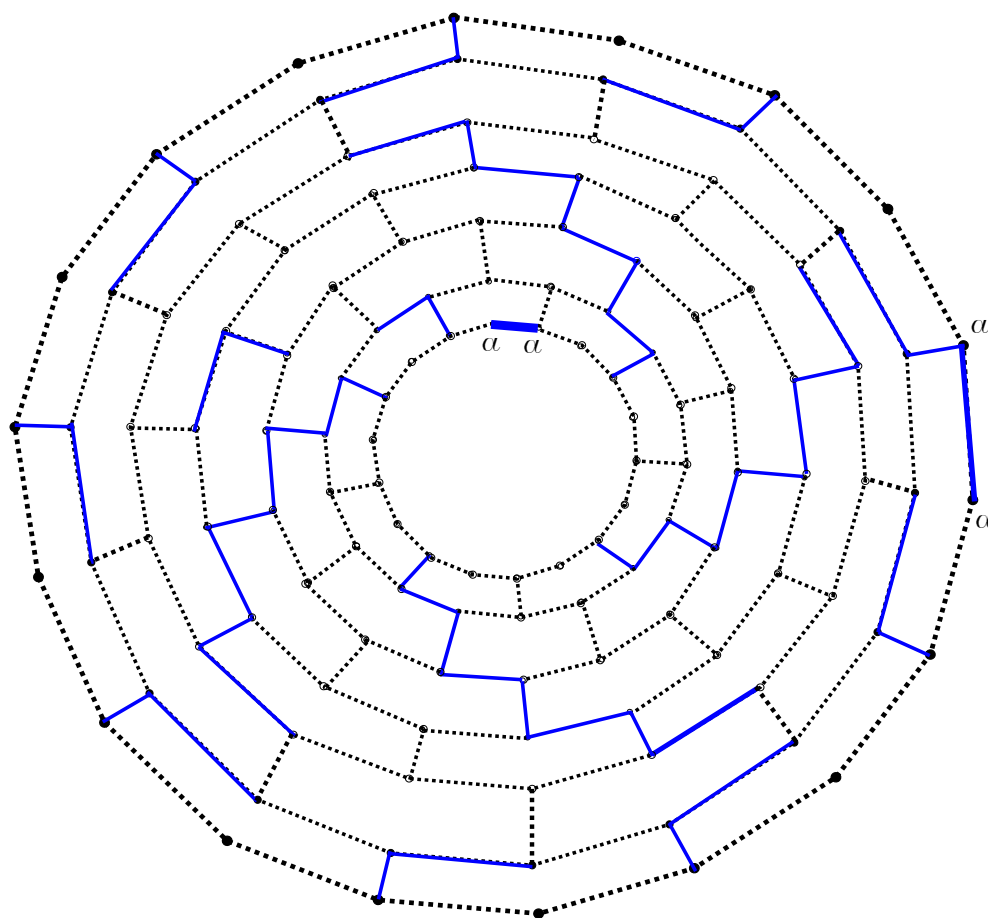


Figura 56: Gráfica con 6 ciclos del interno al externo. Recordar que el ciclo interno y externo cuentan como uno pues son el mismo.

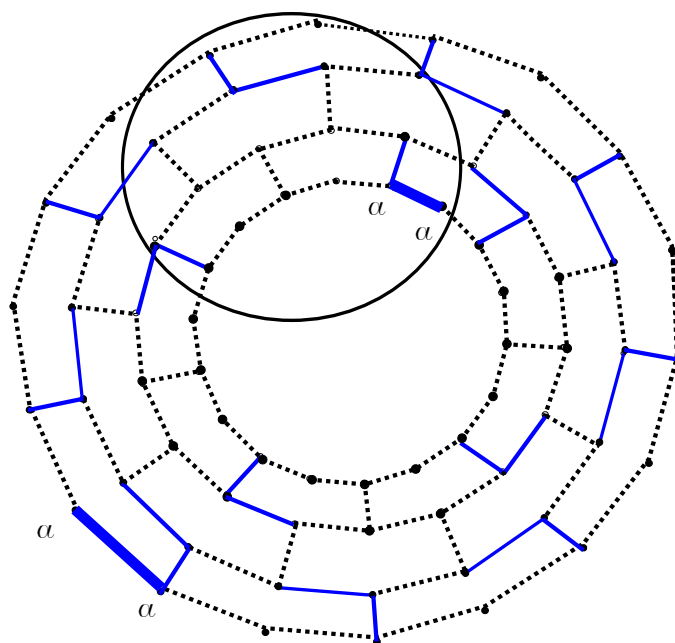


Figura 57: El círculo indica el cambio en la forma de escoger el árbol generador.

Para este caso también presentamos una gráfica más donde se aclara como se debe continuar aplicando el patrón en las gráficas pertenecientes a esta clase (ver figura 58).

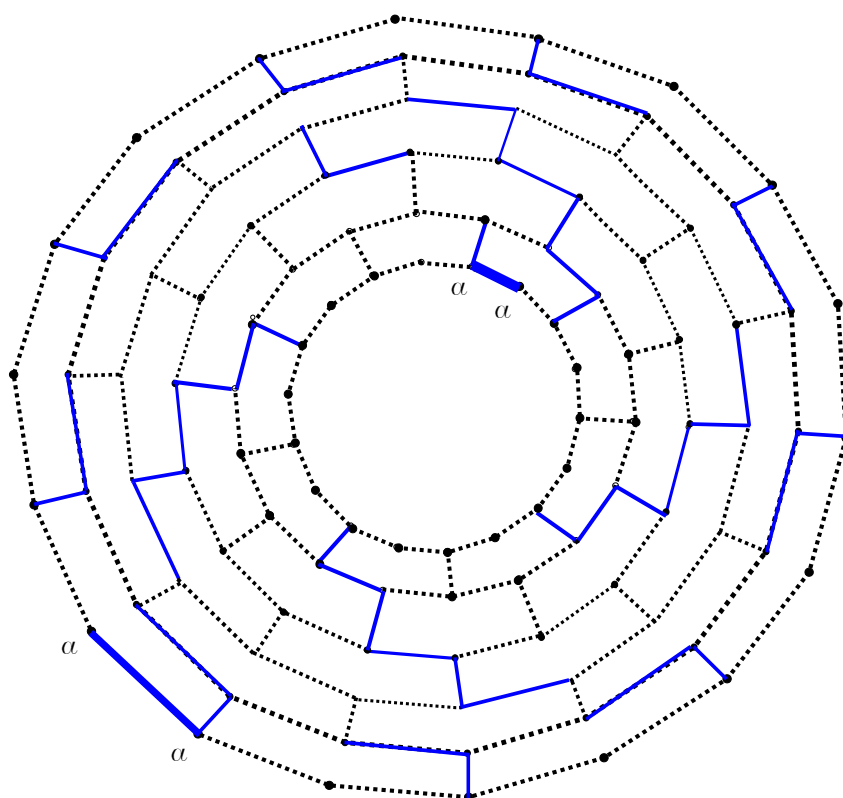


Figura 58: Gráfica con 5 ciclos del interno al externo. Recordar que el ciclo interno y externo cuentan como uno pues son el mismo.



6.5 ENCAJES DE GRÁFICAS  $I'(n, i, j)$ 

## 6.5.1 Género Mínimo

En general determinar el género mínimo de una familia de gráficas es muy difícil, los estudiados en las secciones anteriores han resultado relativamente sencillos; sin embargo, encontrar el género mínimo de las familias  $I'(n, i, j)$  resulta tan complejo que de hecho nos interesa únicamente el género mínimo de  $I'(n, 1, j) = GP(n, j)$ , es decir, de las gráficas de Petersen Generalizadas y aún este problema es bastante complicado, así que para esta sección solo indicaremos cuáles son algunos resultados que se han encontrado respecto a este problema para los casos que no resultan simples como los prismas y  $GP(2k, k)$  cuyo género mínimo es evidentemente 0 en ambos casos.

En [6] se prueba que el género mínimo de  $GP(2m + 1, m)$  es 1 con  $m \geq 2$  y el género mínimo de  $GP(2m + 2, m)$  es 2 con  $m \geq 5$ .

Vale la pena mencionar algunas cotas para el género mínimo de estas gráficas, una de ellas es el llamado *número de cruce* de una gráfica  $G$ , que se denota como  $cr(G)$ , el cual se define como el mínimo número de cruces de aristas al tratar de encajar en el plano la gráfica  $G$ , es claro que

$$\gamma(G) \leq cr(G)$$

pues por cada arista que se cruza se puede agregar un toro para evitar el cruce, respecto a  $cr(GP(n, i))$  se han encontrado los siguientes resultados:

En [3] se prueba que  $cr(GP(2m + 1, 2)) = 3$ , para  $m \geq 3$ .

En [13] se encuentra el número de cruce para toda  $GP(n, j)$  con  $n \leq 16$ .

En [5] se demuestra el siguiente lema:

*Si  $n$  es un número natural suficientemente grande, entonces la gráfica de Petersen Generalizada  $GP(n, 4)$  no puede encajarse en  $S_1$ .*

Siendo este último resultado una cota inferior.

## 6.5.2 Género Máximo

Por las razones ya comentadas anteriormente también en para el género máximo nos enfocaremos en el conjunto  $I'(n, 1, j)$  que corresponde a las gráficas de Petersen Generalizadas, lo que encontraremos será el género máximo orientable,  $\gamma_M$ , de estas gráficas usando el teorema 5.4.4.

Para usar este teorema debemos encontrar el número de Betti,  $\beta(G)$ , y la deficiencia  $\xi(G)$ .

Primero, dada una gráfica  $I'(n, 1, j)$ , se tiene que

$$\beta(G) = q - p + h = 3n - 2n + 1 = n + 1$$

Para encontrar  $\xi(G)$  debemos encontrar un árbol,  $T$ , como subgráfica de  $G$  tal que obtengamos el mínimo número de componentes de tamaño impar en  $G - T$ .

Para esto, consideramos dos casos, cuando  $\text{ord}(j)$  es par y cuando es impar.

**Caso 1 (Cuando  $\text{ord}(j)$  es par):** El árbol generador de  $I'(8, 1, 2)$  marcado en la figura 59, que llamaremos  $T$ , nos permite deducir que  $G - T$  consta de ciclos de tamaño par y una arista disjunta por lo que de hecho  $\xi(G) = 1$ , ya que por el mismo argumento del caso 1 de la sección 6.1.3  $G - T$  debe tener al menos una componente de tamaño impar, por lo que  $\xi(G) \geq 1$ , tal argumento es aplicable pues el que  $\text{ord}(j)$  sea par implica que  $n$  es par.

$$\gamma_M = \frac{8+1-1}{2} = 4$$

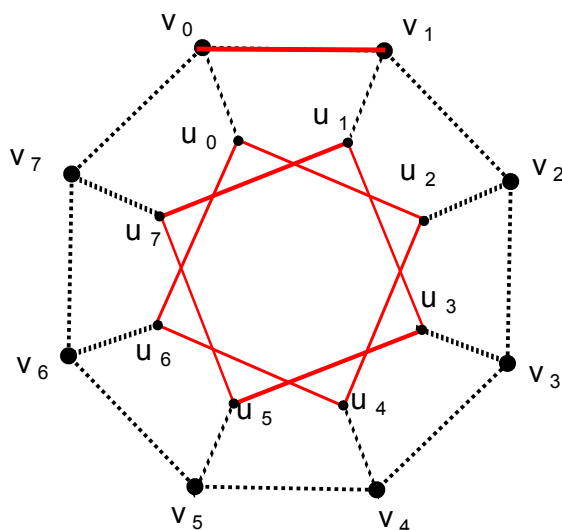


Figura 59: El árbol generador  $T$  de  $I(8, 1, 2)$  es la subgráfica con aristas punteadas, los ciclos interiores son de tamaño par.

De este ejemplo observamos que cuando  $\text{ord}(j)$  es par, podemos encontrar un árbol generador con este mismo patrón, pues los ciclos internos son de tamaño impar; para ser más precisos, si tenemos la gráfica  $G = I'(n, 1, j)$ , con  $\text{ord}(j)$  par entonces tomamos como árbol expansivo  $T$  las aristas

$$T = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\} \cup \{\{u_0, v_0\}, \{u_1, v_1\}, \dots, \{u_{n-1}, v_{n-1}\}\}$$

De aquí que

$$\gamma_M = \frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2}$$

**Caso 2 (Cuando  $\text{ord}(j)$  es impar):** Si tomámos un árbol  $T$  similar a los tomados para el caso par tendríamos que  $\xi(G, T) = \frac{n}{\text{ord}(j)}$ , lo cual no necesariamente es la deficiencia mínima; sin embargo usaremos este árbol para construir el árbol generador que usaremos en esta parte.

Tomemos un ejemplo para mostrar la construcción, del cual será evidente cómo debe hacerse la generalización. Sea  $G = I'(9, 1, 3)$  y sigamos la construcción de la figura 60.

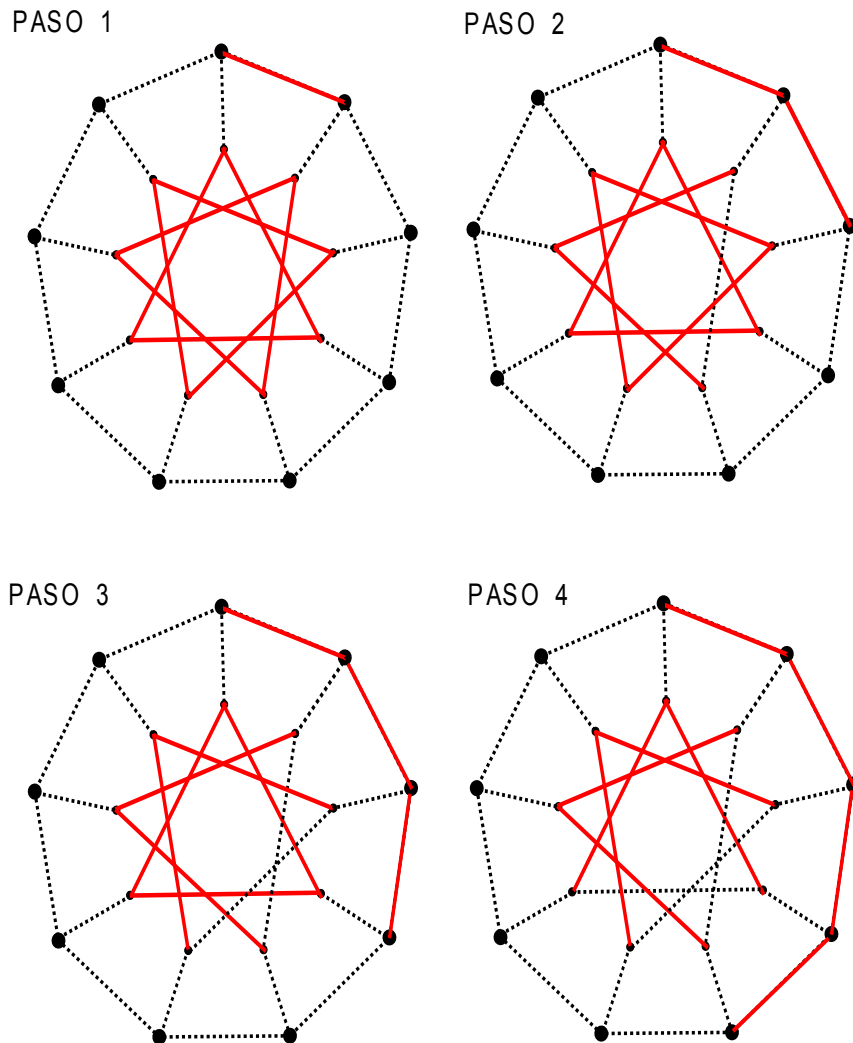


Figura 60: El árbol generador  $T$  de  $I(9, 1, 3)$  es la subgráfica con aristas punteadas del paso 4.

Luego, en general si tenemos la gráfica  $G = I'(n, 1, j)$ , con  $\text{ord}(j)$  impar entonces tomamos como árbol expansivo  $T$  las aristas

$$T = \{\{v_m, v_{m+1}\}, \{v_{m+1}, v_{m+2}\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\} \cup \\ \{\{u_0, v_0\}, \{u_1, v_1\}, \dots, \{u_{n-1}, v_{n-1}\}\} \cup \{\{v_1, v_{1+j}\}, \{v_2, v_{2+j}\}, \dots, \{v_m, v_{m+j}\}\}$$

donde  $m = \frac{n}{\text{ord}(j)}$ .

Ahora si  $m$  es impar, entonces  $1 + \text{ord}(j)$  es par, que corresponde al tamaño de la componente del ciclo externo de  $G$ , por otro lado, en los ciclos interiores, las componentes que se mantienen en  $G - T$  son de tamaño par, luego  $\xi(G) = 0$ , entonces

$$\gamma_M = \frac{n+1-0}{2} = \frac{n+1}{2}$$

.

que es un entero pues  $n = m * \text{ord}(j)$  es impar.

Si  $m$  es par entonces  $\xi(G) = 1$

$$\gamma_M = \frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{2}$$

.

Nuevamente  $\xi(G)$  no puede ser 0 por el mismo argumento del caso 1 de la sección 6.1.3.

## CONCLUSIONES

---

Después de estudiar las técnicas básicas conocidas para encontrar el género mínimo y máximo de una gráfica y aplicarlas a las gráficas cúbicas bicirculantes, podemos concluir brevemente que

Para las gráficas  $T'(n, i, j)$  cuyas componentes son, o bien, escaleras de Möbius, o bien, prismas, se hallaron los respectivos géneros mínimo y máximo; sin embargo, como  $T'(n, i, j)$  es desconexa se usó el teorema 5.2.3 que dice que el género de una gráfica es la suma del género de sus componentes, aunque para el género máximo no se cuenta con una herramienta similar.

Para la siguiente familia, las gráficas  $F'(n, i, j)$  conexas, se demostró que son prismas o escaleras de Möbius, por lo que también se responde cuál es su género mínimo y máximo.

Más adelante se tratan las gráficas  $H'(n, i, j)$ , para las cuales se haya el género mínimo, además se encontró una nueva forma de representar visualmente esta familia, con esta representación y haciendo uso del teorema 5.4.4 tratamos de encontrar el género máximo de ella y mediante el análisis de algunos ejemplos intentamos dar una idea bastante clara de cómo encontrar un árbol generador que permita calcular la deficiencia de cualquier gráfica  $H'(n, i, j)$ , estamos concientes que esto no es una demostración, pero el género máximo encontrado para estos ejemplos nos motiva a hacer conjeturas para el caso general.

En la sección dedicada a las gráficas  $I'(n, i, j)$  se restringe el problema a las gráficas de Petersen Generalizadas, por razones de complejidad, para darse una idea de la dificultad de este problema puede se puede consultar [2], en este trabajo se presenta el único resultado que se conoce (hasta donde sabemos) para intentar responder esta pregunta, así como algunos artículos que exploran el número de cruce de estas gráficas, el cual funciona como cota del género mínimo.

Tratando de decir algo acerca de encajes de la familia completa  $I'(n, i, j)$  tenemos que si se encontrara el género mínimo de las gráficas de Petersen Generalizadas, encajes de las gráficas  $I'(n, i, j)$  podrían obtenerse a través de realizar la operación de amalgama de dos gráficas de Petersen Generalizadas; sin embargo, la búsqueda de encajes de amalgamas de gráficas también es un tema muy nuevo y apenas se están dando los primeros resultados.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Arthur T. White. *Graphs of Groups on Surfaces*. Mathematics Studies 188. Editor Saul Lubkin. USA, 2001.
- [2] Bojan Mohar y Carstten Thomassen. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, julio 2001.
- [3] Geoffrey Exoo, Frank Harary y Jerald Kabell. *The Crossing Numbers of Some Generalized Petersen Graphs*. Math. Scand. 48(1998), 184-188.
- [4] Gerhard Ringel. *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*. Deutscher Verlag, Berlin, 1959.
- [5] Han Ren, Dengju Ma y Junjie Lu. *Odd Components of Co-Trees and Graph Embeddings*. Departamento de matemáticas, East China Normal University, Shangai 200062, P.C. China.
- [6] Han Ren, Dengju Ma y Junjie Lu. *The Euler Genera of Two Classes of Generalized Petersen Graphs*. Acta Mathematica Scientia, 2009, 29A:25-31.
- [7] Jean Frechet y K. Fan. *Initiation to Combinatorial Topology*. Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1967.
- [8] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. Segunda edición.
- [9] John William T. Youngs. *Minimal imbeddings and the genus of a graph*. J. Math. Mech. 12 (1963), 303-315.
- [10] Jonathan L. Gross y Thomas W. Tucker. *Topological Graph Theory*. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. USA, 1987.
- [11] Joseph Battle, Frank Harary, Yukihiro Kodama y J. W. T. Youngs. *Additivity of the genus of a graph*. Research Announcements. June 26, 1962.
- [12] Liangxia Wan y Yanpei Liu. *Orientable embedding genus distribution for certain types of graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 98(2008) 19-32.
- [13] Lin Xiaohui, Yang Yuansheng, Zheng Wenping, Shi Lei y Lu Weiming. *Discrete applied mathematics* 157 (2009) 1016-1023.
- [14] Marko Boben, Tomaz Pisanski y Arjana Zitnik. *I-graphs and the corresponding configurations*. Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana. Junio 18, 2004.

- [15] Milan Hladnik, Dragan Marusic y Tomas Pisanski. *Cyclic Haar Graphs*. Discrete Mathematics 244 (2002) 137-152.
- [16] Nguyen Huy Xuong. *How to Determine the Maximum Genus of a Graph*. Journal of Combinatorial Theory, Series B26, 217-225, 1979.
- [17] Robert Frucht. *The group of generalized Petersen graphs*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 70. Septiembre 1971.
- [18] Roma Nedela, Martin Skoviera. *Which generalized petersen graphs are Cayley graphs*. Journal of Graph Theory. Vol. 19, Enero 1995.
- [19] Tomaz Pisanski. *A classification of cubic bicirculants*. Discrete Mathematics 307 (2007) 567-578. University of Ljubljana y Universidad de Primorska, Slovenia.
- [20] Y. P. Liu, *Advances in Combinatorial Maps*. Northern Jiaotong University Press, Beijing, 2003.



## COLOFÓN

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both  $\text{\LaTeX}$  and  $\text{\LyX}$ :

<http://code.google.com/p/classicthesis/>

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

<http://postcards.miede.de/>

*Final Version* as of 12 de mayo de 2014 (`classicthesis` version 1).