UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

División de Estudios de Posgrado
Maestría en Docencia de las Matemáticas

"LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS REALES EN EL BACHILLERATO"

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
MAESTRO EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Presenta:
Ing. José Carlos Arredondo Velázquez

Querétaro.Qro., Diciembre de 2001

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

División de Estudios de Posgrado
Maestría en Docencia de las Matemáticas

"LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS REALES EN EL BACHILLERATO"

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
MAESTRO EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Presenta:
Ing. José Carlos Arredondo Velázquez

Dirigido por:
M. en C. Roberto Torres Hernández

SINODALES

M. en C. Roberto Torres Hernández
Presidente
Firma

Dr. Alejandro Diaz-Barriga Casales
Secretario
Firma

Dr. Carlos Hernández Garcíadiego
Vocal
Firma

Dra. Rebeca del Rocio Peniche Vera
Suplente
Firma

M. en C. José Enrique Crespo Baltar
Suplente
Firma

Ing. Jorge Martínez Carrillo
Director de la Facultad de Ingeniería

Dr. Sergio Quesada Aldana
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Noviembre de 2001
México

RESUMEN

Son los números racionales los que usualmente nos sirven para expresar medidas o cálculos con precisión. Dicho de otra manera, todos los usos prácticos de los números se hacen sólo con los números racionales. Cuando se busca extender este conjunto de números con el fin de evitar un oscuro e inexacto uso del lenguaje matemático y ganar una clara visión de la relación entre los números y la recta numérica, se presenta la dificultad de entender qué tipo de números integran el conjunto de los racionales y de que formas diferentes se nos pueden presentar. Poder entender lo anterior, permite darse cuenta de que existen números que no pertenecen a este conjunto a los cuales se les llama por tal motivo irracionales. Este salto en la extensión para la mayoría de los estudiantes de bachillerato les presenta una gran dificultad. Supongo que uno de los motivos es la carencia de un método diferente al de la denominada matemática moderna que tradicionalmente aborda esta extensión a partir de la teoría de conjuntos, además de la problemática que de por sí presenta el imaginar el infinito, el uso de imágenes que consideramos inexactas, así como las dificultades lógicas que se encuentran con los conjuntos y los procesos infinitos. Por tal motivo el propósito de este trabajo de tesis es presentar una propuesta de la enseñanza de los Números Reales en el bachillerato a partir de la geometría. Viendo a los reales positivos como longitudes de segmentos una vez que se ha acordado cual es el segmento unitario. Introducir al estudiante con ayuda de los números racionales, a los procesos infinitos, vía la expresión decimal y la noción de serie. Con los irracionales, la idea de inconmensurabilidad de segmentos también involucra procesos y argumentos con la idea del infinito.

(**Palabras clave:** Números Reales, enseñanza, geometría, infinito, bachillerato)

ABSTRACT

Rational numbers are the ones that we usually use to express measures or calculations accurately. In other words, all the practical uses with numbers, are done only with rational numbers. When we wish to expand this group of numbers in order to avoid an inaccurate and obscure use of the mathematical language, and to have a clear picture of the relationship between numbers and the numerical line, we encounter the difficulty of understanding what kinds of numbers make up the group of rational numbers, and in how many different ways they can be presented to us. Understanding this lets us know that there are numbers which do not belong to this group, so that is why they are named irrational numbers. This leap in expansion usually represents a great difficulty for most high school students. I guess that one of the reasons for this, is the lack of a different method from that of the so called modern mathematics, which traditionally deals with this expansions from groups theory, besides the difficulty to imagine infinity, the use of images that we consider to be inaccurate, as well as the natural difficulties found in studying infinite groups and processes. For this reason the purpose of this thesis is to give a proposal in the teaching of Real Numbers at the high school level through geometry by looking at positive Real Numbers as longitudes of segments, once it has been agreed upon which is the unit segment. With the help of rational numbers, we propose introducing the student to the infinite processes, through decimal expression and the notion of series. With irrational numbers, the idea of incommensurability of segments, also involves processes and statements with the idea of infinity.

(**Cue words:** Real Numbers, teaching, geometry, infinity, high school)

Dedico este trabajo:

A Dios todopoderoso, por ser el sentido de mi existencia.

A la Virgen María, por todo el cuidado que ha tenido conmigo y con todos los que quiero.

A mis padres, por su gran ejemplo de amor, entrega y trabajo, riqueza enorme que me ha permitido salir adelante siempre en la vida.

A mi esposa Delia, por que su amor y compañía fortalecen mi vida y la llenan de un sentido dulcemente espiritual.

A mis hijas Carla y Daniela, por ser mi tesoro y el gran motivo de todos mis esfuerzos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi Alma Mater la Universidad Autónoma de Querétaro, por la formación académica recibida desde que fui bachiller.

A mis Sinodales el Dr. Carlos Hernández Garcíadiego, a la Dra. Rocio Peniche Vera y al M. en C. Enrique Crespo Baltar por su gentileza y apoyo.

Mi más profundo agradecimiento al Dr. Alejandro Díaz-Barriga Casales por todas las oportunidades brindadas para superarme y por sus sabias enseñanzas durante estos últimos años.

Finalmente, quiero agradecer de manera especial, a mi maestro y amigo Roberto Torres Hernández, por todo su apoyo y comprensión, por el gran ejemplo de su pasión por el trabajo y por todas sus sabias enseñanzas, estas han significado para mí, un fuerte impulso que me permite seguir trabajando para buscar conocer un poco la verdadera belleza de las matemáticas.

Título de la Tesis

"LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS REALES EN EL BACHILLERATO"

Estructura de la tesis

I. INTRODUCCIÓN

Se pueden identificar dos elementos involucrados en la enseñanza de las matemáticas; éstos son, por un lado, el área que comprende la investigación en educación y, por el otro, la enseñanza en el aula junto con los aspectos que la rodean: pedagógicos, contextuales, administrativos, académicos y currículares, es decir, el proceso vivo de enseñanza-aprendizaje. Es en el sentido de este segundo elemento en que se desarrolla el presente trabajo de tesis que consiste en desarrollar una notas de clase sobre la enseñanza de los números reales en el bachillerato, esto con la finalidad de aportar algunas ideas en la enseñanza de algunas propiedades de los números Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales.

I.1 Antecedentes

Al inicio del primer semestre de 1996 la Academia de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro comenzó con la elaboración de una propuesta de modificación a los planes y programas del núcleo de matemáticas del plan de estudios de la Escuela de Bachilleres. Esta modificación ya fue aprobada y es la que actualmente se encuentra vigente.

En el nuevo plan de estudios se proponen cambios significativos, motivados no solamente por cuestiones académicas, sino también por situaciones de tipo filosófico, esto impulsó que se propusiera una nueva práctica docente y nuevos contenidos en los programas.

Dentro de los dos primeros semestres de matemáticas, se estudia Álgebra y en las primeras semanas del curso de matemáticas I, del primer semestre se propone estudiar a los números reales desde dos distintos enfoques:

1. A partir de la teoría de conjuntos en forma constructiva desde los naturales.

2. A partir de la geometría, viendo a los reales positivos como longitudes de segmentos una vez que se ha acordado cual es el segmento unitario.

Tradicionalmente el primer enfoque es el que acostumbran abordar los maestros de bachillerato, posiblemente esto es debido a la tendencia que durante muchos años prevaleció de estudiar matemáticas teniendo como punto de partida la lógica y los conjuntos.

I.2 Justificación

Para la elaboración de este trabajo se tomaron en consideración dos situaciones. La primera es que se tiene conocimiento que el estudio de los números reales bajo el segundo enfoque señalado en los programas antes mencionados nadie lo utiliza en los bachilleratos a donde va dirigido el nuevo programa (al menos no hay ningún antecedente conocido), esto es seguramente motivado por la inclinación a enseñar bajo la influencia de la "matemática moderna" como ya se había mencionado o bien por que no existe en la bibliografía "comercial" algún texto que hable de este enfoque. Por otra parte el sistema de los números reales se ha construido para remediar un defecto: el carácter incompleto del sistema de los números racionales. Los números racionales son los que regularmente nos sirven para expresar medidas o cálculos con precisión, normalmente los usos prácticos de los números se hacen sólo con los números racionales, de tal manera que cuando se busca extender este conjunto de números con el fin de evitar un oscuro e inexacto uso del lenguaje y ganar una clara visión de la relación entre los números y la recta numérica, se presenta la dificultad primeramente, de entender que tipo de números integran el conjunto de los racionales y de que formas diferentes se pueden presentar, esto para después poder entender que existen números que no pertenecen a este conjunto a los cuales se les llama por tal motivo irracionales, este salto en la extensión regularmente a un estudiante de bachillerato le presenta una gran dificultad.

I.3 Objetivo general

El objetivo general del presente trabajo es desarrollar y escribir unas notas sobre la enseñanza de los números reales en el bachillerato de nuestra Universidad, que sirvan como texto tanto al alumno como al maestro y que colaboren a entender el segundo enfoque que señala el programa de matemáticas I y que consiste en asimilar quienes son los números reales y sus propiedades principales a partir de la geometría, viendo a los reales positivos como longitudes de segmentos una vez que se ha acordado cual es el segmento unitario. Con lo que respecta a los números racionales, se pretende introducir al estudiante a los procesos infinitos, vía la expresión decimal y la noción de serie y con los irracionales hacerlo a partir de la idea de inconmensurabilidad.

II. REVISIÓN DE LITERATURA

Después de investigar cuáles han sido los trabajos que sobre esta línea se han realizado en nuestro país nos encontramos que el registro de este tipo de investigaciones nos remiten en la mayoría de los casos a estudios realizados en el nivel medio, al menos esto fue lo que pudimos constatar en el reporte que presenta el CINVESTAV, las memorias de los congresos tanto de la SMM (Sociedad Matemática Mexicana) como de la ANPM (Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas), las publicaciones de la revista EDUCACION MATEMATICA (Revista de difusión a nivel nacional), así como de la propia bibliografía referida en cada uno de los artículos encontrados en estas fuentes, necesariamente nos llevan a los estudios que sobre este tema han realizado los propios miembros del CINVESTAV: David Block, Alicia Avila, Martha Dávila y Eduardo Mancera (al menos este es el resultado del rastreo realizado), mientras que a nivel internacional nos encontramos infinidad de bibliografía (al menos la referida) , como la de Piaget, Kieren, Lerner, Pérez j., Streefland, Vergnaud, Behr, Borasi, Dienes, Nesher, Ohlsson, etc.

También es importante mencionar que la mayoría de estos trabajos por no decir todos se encuentran ubicados en Estudios sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas a nivel básico, particularmente en estudios sobre el alumno y en "Investigaciones cualitativas sobre habilidades, errores y conceptualizaciones de los alumnos" (al menos así lo señala el registro del CINVESTAV).

A continuación presentamos un resumen de la información encontrada, así como de la visión que presenta la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) que es el máximo organismo de profesores de Matemáticas que existe en los Estados Unidos.

II.1 Los reales y las fracciones en la escuela Mexicana

La mayoría de los estudiosos sobre esta linea concluyen que la raíz del problema de la enseñanza de los números reales es la forma en que se enseñan los sistemas númericos en los niveles más elementales y fundamentalmente atribuyen gran parte del problema a la forma en que se aborda el estudio de los fraccionarios (así llamados en los niveles referidos). Eduardo Mancera (1992) atribuye esta problemática en primer instancia a las dificultades potenciales relativas a los diversos significados asociados a este concepto, ya que en la matemática, en general, y en las fracciones en particular, se confunde frecuentemente a los *significados* (los cuales se refieren al plano conceptual) con los *significantes* (que se refieren al plano de las representaciones). Por ejemplo, el número cinco se puede escribir como $5, 1+4, 3+2, \frac{10}{2}, V$, etcétera. De esta manera se confunde al concepto con la representación escrita, la cuál no es única de éste.

Los lingüistas denominan a este fenómeno *sinonimia* (varios significantes están asociados a un mismo significado). Se puede presentar la situación inversa: varios significados están asociados a un mismo significante (*homonimia*), esto tiene mucha importancia en la problemática educativa asociada a fracciones.

Por otra parte Alicia Ávila (1986), analiza la enseñanza oficial de las matemáticas elementales en México desde 1940 a 1980 y en ella menciona que los números racionales (que son el primer antecedente de niveles elementales del conocimiento de números reales) han ocupado un lugar en el currículo de la escuela elemental por más de un siglo y dice que durante este tiempo ha predominado una enseñanza rígida basada en modelos esquemáticos, después menciona que con la reforma de 1972 (aún vigente en los tres últimos grados de primaria) se incorporaron algunas "explicaciones" con apoyos gráficos de la multiplicación, la división con base en el inverso multiplicativo, la resolución de problemas con estas dos operaciones y la representación en la recta numérica, sin embargo, estas innovaciones correspondían más a una preocupación matemática que a una propuesta psicopedagógica, posteriormente en 1980 se reformaron los planes y programas de los tres primeros grados de educación primaria, con esta reforma parcial aparece un tratamiento didáctico con más apoyo gráfico y presentado más cuidadosamente que en currículos anteriores.

A pesar de que en esta reforma se declara al niño como el centro de la preocupación y se incorporan apoyos gráficos y objetivos para que: "de acuerdo con su forma de conocer, construya su conocimiento", el tratamiento dado a las fracciones no rebasa las presentaciones anteriores. Sólo hubo cambios en la dosificación y expansión de la etapa de manipulación de objetos. Es decir, si bien se promueve la construcción de los conceptos con base en el manejo de material recortable que se proporciona al niño, la lógica que sustenta la propuesta didáctica no es distinta de la que se puede ver en los progrmas y en los textos de los setentas: *"Se trata de que el niño comprenda, en primer término que una fracción es una expresión de la forma* $\frac{a}{b}$ *en donde el denominador indica las partes en que está dividido un todo (constituido generalmente por una naranja, un pastel, un círculo, un rectángulo o un polígono regular) y el númerador las partes de ese todo".*

Posteriormente, se pretende que el estudiante establezca equivalencias con base en el mismo modelo de participación de la unidad para que, finalmente, resuleva problemas con adición y sustracción de fracciones.

Tales propuestas no se basan en el conocimiento de lo que el estudiante aprende realmente al respecto, en cómo aprende , en lo que no puede aprender y el por qué no puede hacerlo. Por lo cual, dichos esfuerzos han sido inútiles en relación a la mejoría del aprendizaje de las matemáticas. Esto ha sido similar en otros países, en parte por que la presentación de las fracciones en los libros de texto mexicanos coinciden mucho o fueron adoptados del extranjero. Esto en cuanto al trato que se le ha dado a los números racionales a nivel básico.

En el nivel medio de nuestro país (secundaria) durante mucho tiempo se sufrió un "duro golpe", ya que los esfuerzos dedicados a este nivel se encaminaron a introducir los elementos de la llamada "matemática moderna", en secundaria se dio mucho espacio a la lógica y los conjuntos y se sacrificaron temas importantes. Por otra parte el tratamiento que se le da a las fracciones resulta muy pobre y conduce a concepciones limitadas que se han arraigado mucho entre los estudiantes provocando en los profesores de bachillerato una fuerte dificultad para abordar temas que requieren el uso adecuado de los números reales.

Por otra parte en la secundaria se hace demasiado énfasis en los aspectos operativos, los planteamientos didácticos de los libros reflejan la concepción de que si se aprenden a realizar las operaciones con las fracciones se pueden resolver diversos problemas en los que los contextos dados implican el uso de diferentes procedimientos representados por una fracción. Es importante mencionar que no existe en este nivel un enfoque que se pueda decir que sea el unificador ya que las formas en que se representan los racionales responden solamente a las diferentes formas en que lo hagan los autores de los diferentes textos comerciales, además en la escuela secundaria la preocupación por aspectos disciplinarios en algunos casos es mayor que en la primaria y (Mancera 1992) se tiene un retroceso por el énfasis puesto en los aspectos operativos, en vez de hacer intentos en relación a lo conceptual.

II.2 La aportación de la NCTM

Una comisión especial del NCTM elaboró los estándares para el currículum y evaluación de matemáticas, para responder de esta manera a las inquietudes que existen en torno a la educación matemática, actualmente estos estándares son considerados como el "hilo conductor" en este terreno de la educación no sólo en Estados Unidos, sino también en otros países.

Un estándar específico es un criterio que se usa para juzgar la calidad del currículum en matemáticas o los métodos de evaluación. Por lo tanto, los estándares son afirmaciones acerca de lo que se valoriza.

Estos estándares se deben ver como una componente de la respuesta de la comunidad de matemática educativa en los Estados Unidos a la actual crisis en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática, esta propuesta a obtenido buena aceptación en la comunidad matemática y hay consenso de que la mayoría de los estudiantes necesitan aprender más y muchas veces diferentes enfoques de las matemáticas. No solamente los enfoques principales y los contenidos matemáticos tienen que cambiar, sino también la metodología de enseñanza. Esta debe incluir experimentación, investigación y comunicación de ideas matemáticas, así como razonamiento matemático.

Hay cinco metas principales que se proponen en el documento del NCTM y que se reflejan en las propuestas para los niveles de preprimaria hasta el último año de la enseñanza medio-superior. La propuesta es de que cada alumno debe:

- Ser capaz de resolver problemas matemáticos.
- Aprender a comunicarse matemáticamente.
- Aprender a razonar matemáticamente.
- Saber valorar las matemáticas.
- Tener confianza en su capacidad de hacer matemáticas.

Esto implica que los estudiantes deben tener numerosas y variadas experiencias relacionadas que les permitan:

- Resolver problemas complejos.
- Leer, escribir y discutir matemáticas.
- Formular conjeturas, probar y formar argumentos acerca de la validez de una conjetura.

- Valorar la empresa intelectual llamada matemática, los hábitos del pensamiento matemático y el papel de la matemática en el quehacer humano.
- Explorar, adivinar y cometer errores para ganar confianza en sus actividades matemáticas.

En la actualidad en los niveles denominados P-4 (nivel elemental), la NCTM propone que el currículo de matemáticas debe incluir fracciones y decimales ya que estos constituyen una proporción considerable del conocimiento que tienen los estudiantes de los números. Además señala que cuando un estudiante de este nivel posee un conocimiento sólido de los conceptos de fracción y decimal, es capaz de utilizarlo para describir fenómenos del mundo real y aplicarlo a problemas que impliquen medición, probabilidad y estadística, también indica que cuando un estudiante comprende las fracciones y los decimales, toman mayor conciencia de la utilidad y de la potencia de los números y se amplía su conocimiento del sistema numérico. Por tal motivo recomienda que la docencia en estos niveles ayude a que el estudiante utilice las fracciones y los decimales, explore sus relaciones y construya los conceptos iniciales de orden y equivalencia. También recomienda que como estas ideas el estudiante las construye muy lentamente, es muy importante que los profesores utilicen materiales físicos, diagramas y situaciones del mundo real a la vez que se esfuercen de manera continua para relacionar las experiencias de aprendizaje del estudiante con el lenguaje oral y los símbolos.

El uso de símbolos y lenguaje conciso para representar números constituye un importante desarrollo histórico y práctico. Durante el ciclo medio, los estudiantes llegan a reconocer que los números tienen múltiples representaciones, de forma que el desarrollo de los conceptos de fracción, razón, decimal y porcentaje y la idea de representaciones múltiples de estos números requieren una atención y un énfasis especial. La capacidad de generar, leer, usar y apreciar múltiples representaciones de la misma cantidad constituye un paso crítico cuando se aprende a entender y utilizar matemáticas.

Es en los niveles denominados 5-8 (nivel medio), en donde los estudiantes construyen el conocimiento de los números racionales, que tanta importancia tienen no sólo por sí mismo, sino también como base de las expresiones racionales en álgebra. Se recomienda por tal motivo en estos niveles que el aprendizaje se base en la experiencia relacionada con aspectos de la vida cotidiana o con materiales concretos diseñados para reflejar ideas matemáticas subyacentes. Los estudiantes deben trabajar con rectas numeradas, modelos de área y gráficas así como con las expresiones numéricas que aparecen en calculadoras y en computadoras.

En los niveles 9-12 (medio superior), la NCTM propone que el currículo de matemáticas incluya el estudio de estructuras matemáticas para que el estudiante sea capaz de comparar y contrastar el conjunto de los números reales y sus diversos subconjuntos respecto a sus características estructurales.

La estructura de la matemática se asemeja a la estructura de acero de una construcción moderna. Los estudiantes deben ser conscientes de esta estructura, de cómo ofrece una base sólida sobre la que se construyen diversas corrientes de contenidos, y de cómo mantiene unidas todas estas corrientes de forma simultánea. Por ejemplo, uno de los pilares de este edificio es la propiedad asociativa, sobre la que se apoyan objetos y operaciones de áreas matemáticas tan diversas como aritmética, álgebra, funciones, y transformaciones geométricas. El conocimiento de estos amplios principios estructurales permite que los estudiantes adopten un enfoque más constructivista ante temas matemáticos nuevos, y les ofrece una estructura conceptual que hace más facil la memorización a largo plazo.

En la parte de la docencia, se considera que las estructuras matemáticas en forma de listas de propiedades generales no constituyen un punto de partida adecuado. Por el contrario, los estudiantes comprenden el significado de la estructura de las matemáticas después de un periódo de tiempo considerable, por medio de una acumulación general de experiencias y de actividades con un centro de atención más preciso.

No resulta ni necesario ni adecuado que escuchen la palabra estructura constantemente aplicada a las actividades que realizan. También es muy importante reconocer que estructura matemática y formalismo no son sinónimos. En matemáticas, como en un edificio, todos los estudiantes pueden llegar a asimilar y apreciar la estructura subyacente conozcan o no el vocabulario y los simbolismos técnicos correspondientes. El grado de simbolismo debe estar en consonancia con el nivel de madurez matemática que tengan los estudiantes.

II.3 Otras aportaciones

Hart (1981) señala que en un amplio número de estudiantes de escuelas públicas se identificó que al internarse en el campo de las fracciones, lo hacen intentando extender las reglas de los números naturales y que estas ideas se refuerzan cuando son apoyadas con objetos gráficos.

Rasimba-Rajohn (1982) estudió la forma en que dos métodos de medidas racionales (conmensuración y fraccionamiento de la unidad) corresponden a dos tipos diferentes de conocimientos. Es decir, se diferencia el proceso de conmensuración, por el cual tratamos de verificar si una unidad dada, sin fraccionar, cabe un número exacto de veces en otro segmento dado; del proceso relativo a la medición de un segmento dado por medio de fraccionar la unidad hasta cubrir el segmento dado con partes enteras o fraccionarias de la unidad.

Para verificar esto se aplicó un cuestionario para observar la relación que se da entre los dos métodos y se encontró que éstos efectivamente corresponden a diferentes comportamientos.

Generalmente, poco se habla de la necesidad de considerar la conmensuración y todo se refiere a un proceso de medición y la comprensión de los algoritmos relativos a las fracciones. El trabajo de Rasimba-Rajohn es importante porque resalta las diferencias conceptuales entre estos procesos no sólo en el plano conceptual sino también en el algorítmico.

Behr, Lesh, Post y Silver (1983) plantean el problema de los diversos significados relativos al concepto de fracción, se hace un tratamiento utilizando también la noción de constructo, en este sentido se enfatizan las dimensiones que las personas usan para conceptualizar aspectos relativos a los números racionales, esto permitió realizar las siguientes categorías de subconstructos:

1. Medida fraccionaria.
2. Razón.
3. Tasa.
4. Cociente.
5. Coordenda lineal.
6. Decimal.
7. Operador.

Freudenthal (1983) plantea que el término fracción es más adecuado que números racionales positivos, en tanto es la fuente fenomenológica del número racional , esto adquiere sentido puesto que el origen de los números racionales se encuentra en la noción de quebrado o fracción.

Señala la utilización de las fracciones en diversos aspectos del lenguaje usual y analiza algunos de los significados que se le da como comparador (...es la mitad de largo que...), descriptor de una cantidad (...la mitad de un pastel...), formador de multiplos (...tres cuartos de hora...), expresión de cantidad (...dos tercios de veces tan largo...), determinación de ciclos (...medio tiempo alrededor del reloj...), expresión de mezclas (...tres partes de sal y dos partes de pimienta...) y expresión de relaciones (...de cada cinco hombres uno es un chino...).

Borasi y Michaelsen (1985) discuten las operaciones con fracciones haciendo una comparación con los procedimientos correspondientes de razones. Se presentan algunas diferencias entre las operaciones con números racionales y las razones, las cuales implican la validación de procedimientos con los simbolos "$\frac{a}{b}$".

Post, Behr y Lesh (1986) explican que la noción cuantitativa de número racional incluye aspectos como: reconocimiento de que un número racional es un número; comprensión de que los números racionales pueden expresarse de diversas formas (decimales, razones, divisiones indicadas, puntos en una línea, medida y partes de un "todo"); los números racionales pueden ordenarse usando procedimientos gráficos y simbólicos , y que el criterio para establecer el orden no se basa en el conteo; el conjunto de números racionales es denso lo cual contrasta con la idea del conteo en los números naturales; la habilidad para determinar lo razonable de los resultados obtenidos por procesos de estimación; los número racionales tienen valor absoluto y relativo, y que pueden ser ordenados en cada uno de estos sentidos.

Ohlsson (1988) plantea que la comprensión del concepto de fracción se ubica en la manera que se pasa de la teoría matemática a las aplicaciones por medio de mapeos referenciales. Se plantea que el significado del concepto de fracción y términos relacionados constituyen un campo semántico diferente. Para evitar confusiones se les denomina términos cociente, los cuales no son téminos matemáticos sino referidos a las aplicaciones. De esta forma los significados de los términos cociente corresponderán a las interpretaciones de las fraccciones.

Ohlsson considera que la dificultad asociada a las fracciones es de naturaleza semántica, lo cual es debido a la naturaleza compuesta de las fracciones. ¿Cómo se combina "n" con "m" para generar "$\frac{n}{m}$"? y a la impresionante disposición de ideas relacionadas, no sólo superpuestas, en torno al concepto: fracciones, medidas, proporciones, cocientes, razones, "tasas", números racionales.

Francisco Tomás (1990) plantea que el número racional no es solamente una ampliación del concepto de número, como tampoco lo era la idea de número entero. Es eso, y también algo más que eso. Por que representa una nueva construcción dialéctica del pensamiento, con la aparición de nuevas contradicciones, con una nueva y más amplia funcionalidad productiva.

Se realizó además un rastreo de la bibliografía que regularmente utilizan los profesores en los cursos de bachillerato, así como los apuntes que normalmente manejan para observar cual es el tratamiento que se le da a la presentación de los números reales y en general siempre se observó la siguiente línea de presentación:

1. Se definen a los números racionales como el cociente de dos enteros.

2. Algunos otros profesores después de la definición dan algunos ejemplos de números racionales.

3. Después de haber definido número racional como el cociente de dos enteros, se presentan estos números en forma decimal.

4. Después se les enseña un algoritmo para que "aprendan" a presentar los números decimales "infinitos y periódicos" como el cociente de dos enteros.

5. A continuación se definen a los irracionales como los números que no son racionales y se dan algunos ejemplos de ellos.

6. Finalmente con la union de racionales e irracionales se construyen los números reales.

Después de observar la manera en que se presentan los reales en bachillerato podemos concluir que:

1. La manera de presentarlos todavía es muy "mecanisista", preocupada únicamente en la comprensión del concepto y en la adquisición sólo de algoritmos y de situaciones de aplicación en el mejor de los casos.

2. Obedece especialmente a la preocupación de presentar a los reales como un conjunto y describirlo solamente.

3. Existe poca preocupación de localizar estos números en la recta de reales por las dificultades que esto presenta y por el poco tiempo asignado en los programas de bachillerato este tipo de temas.

4. La generación en que se editaron la mayoría de los libros tradicionales fue la época en que se le dio mucho énfasis a la teoría de conjuntos, hoy ya debe cambiarse esta visión.

5. Debe existir una preocupación por no sólo hacer comprender el concepto, sino interiorizarlo, saberlo expresar y aplicar.

III. METODOLOGÍA

III.1 Identificación del problema

La primer parte del trabajo consistió en participar en las reuniones de discusión que se realizaron al interior de la Academia Universitaria de Matemáticas, esto con la intención de revisar los programas de bachillerato de la Universidad Autónoma de Querétaro. Posteriormente se realizó una discusión de los objetivos del proyecto, de sus alcances y de sus limitaciones y se determinó que el proyecto se desarrollaría con el programa de matemáticas I. Una de las ventajas que presenta este programa es la de haber sido revisado recientemente a la luz de los estándadares internacionales de la NCTM, de algunos programas externos como los del CCH, los de la Universidad de Guadalajara, entre otros. Después de la elección del trabajo a desarrollar, se realizaron una serie de entrevistas con profesores que imparten la materia, esto con la intención de conocer cuál es la bibliografía comercial que utilizan para preparar su curso y cuál es el enfoque que usualmente utilizan para la enseñanza de los números reales, así como del contenido y de la metodología en su enseñanza. Fué ahí en donde se identificó que no existía propuesta para enseñar los números reales a partir de la geometría, viendo a los reales positivos como longitudes de segmentos una vez que se ha acordado cual es el segmento unitario, esto por cierto, recomendado en el programa de matemáticas I.

III.2 Investigación bibliográfica

Posteriormente se investigó cuáles han sido los trabajos que sobre esta línea se han realizado en nuestro país encontrando registros en el CINVESTAV, las memorias de los congresos tanto de la SMM (Sociedad Matemática Mexicana) como de la ANPM (Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas), las publicaciones de la revista EDUCACION MATEMATICA (Revista de difusión a nivel internacional), así como de la propia bibliografía referida en cada uno de los artículos encontrados en estas fuentes. Mientras que a nivel internacional nos encontramos infinidad de bibliografía (al menos la referida) , como la de Piaget, Kieren, Lerner, Pérez j., Streefland, Vergnaud, Behr, Borasi, Dienes, Nesher, Ohlsson, etc.

III.3 Diseño del plan de trabajo

A raíz de todo esto se diseñó un plan de trabajo que incluyó primeramente la elaboración de unas notas que pudieran servir como texto tanto al alumno como al maestro en este tema. Posteriormente en un curso regular de matemáticas I en el bachillerato de la U.A.Q. se trabajaron las notas elaboradas, dando seguimiento a la forma en que los estudiantes iban construyendo por sí solos los conocimientos planteados en la propuesta. Finalmente, después de este curso se hacen los ajustes pertienentes a este documeto y se realiza la redacción final.

III.4 Contenido matemático

A continuación se describe brevemente el contenido matemático del material propuesto, esto con la intención de dar una noción de las principales ideas que se manejan en las notas:

III.4.1 Números naturales

En esta parte del material, se representan geométricamente a los números naturales en la recta, esto después de haber definido segmentos orientados y segmento unitario. Posteriormente se resalta la importancia del concepto de base en los sitemas de númeración. Lo anterior es de utilidad para poder entender el carácter posicional del sistema decimal. Se pone especial énfasis en la noción de base 2 a partir del problema llamado la "repartición de las monedas" el cual permite dar una idea de la forma en que se pueden cambiar representaciones de diferentes bases y su manejo como suma de potencias.

III.4.2 Números enteros

Se representa geométricamente a los números enteros a partir del segmento unitario. Se revisa el teorema fundamental de la aritmética y el algoritmo de la división para despúes con las mismas ideas que se utilizaron para números naturales, generalizar los cambios de base utilizando al sistema de base 10 como intermediario.

III.4.3 Números racionales

A partir de un segmento unitario, representar naturales y enteros no implica mayor dificultad, pero representar geométricamente racionales no siempre es tan fácil, para poder hacerlo, se define primeramente a los números racionales como cociente de dos enteros del tipo $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, posteriormente se identifica a un segmento unitario de la forma $\frac{1}{b}$, este puede medir a cualquier racional de la forma anterior. Se reconoce la equivalencia entre un número racional definido como cociente y su expresión decimal (por cierto periódica), a su vez se enseña un algoritmo que permite convertir racionales expresados en forma decimal a su forma de cociente. Se interpreta la expresión decimal de un número racional como una serie infinita para despúes hacer la conversión a su forma cociente. Este procedimiento permite resolver de una manera creativa la célebre paradoja de Zenón de Elea denominada "Aquiles y la tortuga". Estas ideas permiten introducir al estudiante de bachillerato a los procesos infinitos, vía la expresión decimal y la noción de serie. Esta aproximación es valiosa como recurso para después iniciar las ideas del Cálculo Infinitesimal.

III.4.4 Números irracionales

Después de ententer que tipo de números integran el conjunto de los racionales, de saber como pueden representarse geométricamente y conocer las formas diferentes como se pueden presentar, se manifiesta el hecho de que existen números que no pertenecen a este conjunto a los cuales se les llama por tal motivo irracionales. Esta extensión de los racionales permite dar una clara visión de la relación entre los números y la recta. Posteriormente se presenta la forma de construir geométricamente algunos irracionales y a su vez se mencionan algunos irracionales que no se pueden construir. Este tema permite dar una idea de la inconmensurabilidad de dos segmentos y a su vez esta noción permite también involucrar procesos y argumentos con la idea de infinito. Finalmente se destaca el hecho de que los números con expresión decimal no periódica son irracionales y se propone una forma de construir irracionales en expresión decimal.

III.4.5 Números reales

Se presenta a los números reales como la unión de los racionales e irracionales y se resalta la relación biunivoca entre los reales y la recta de números. Una de las partes centrales de este tema es el estudio de algunas leyes que gobiernan a los números reales como son: las propiedades de campo, de la igualdad, de orden y valor absoluto. Se destaca también la importancia de las demostraciones en el quehacer matemático y con la ayuda de las propiedades se ilustran algunos teoremas sencillos con el objeto de introducir la idea de demostración. También estas propiedades se aprovechan para presentar al estudiante una serie de ejemplos que permiten ilustrar la forma en que se puede resolver las ecuaciónes lineales con una variable.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El objetivo principal de este trabajo, es la elaboración de unas notas que sirvan como texto en el estudio de los números reales en el bachillerato, se ha buscado que las ideas planteadas sean innovadoras, desde el punto de vista de su contenido y de su propuesta pedagógica, la postura de la presentación es constructivista, ya que permite el desarrollo de habilidades y actitudes adicionales al aprendizaje. Podemos señalar entre algunas de ellas la actitud para resolver problemas, necesaria para que el estudiante pueda experimentar la potencia y la utilidad de las matemáticas en el mundo que nos rodea, también se distingue la importancia que se le dá a la matemática como instrumento de comunicación, se pone especial énfasis en el razonamiento a lo largo de todas las actividades que se desarrollan, esta actitud de razonar permite al estudiante evidenciar que las matemáticas pueden dar significado a lo que acontece en nuestro mundo, construyendo argumentos válidos en contexto de algún problema en particular. También se busca que existan conexiones matemáticas para que el estudiante amplíe sus perpectivas, considerando a las matemáticas como un todo integrado, en vez de un conjunto aislado de temas, esto es útil, ya que le permite reconocer su relevancia y utilidad tanto dentro como fuera de la escuela.

Presento a continuación la versión completa de las notas para "Los Números Reales en el Bachillerato".

Prólogo

En la Universidad Autónoma de Querétaro, se creyó que era necesaria una reforma currícular en las matemáticas que se enseñan en el bachillerato. Se consideró que dicha reforma debería incidir tanto en los contenidos como en el enfoque del proceso docente. Esto debido a que los contenidos deberían contribuir mejor a la conformación del perfil del egresado, esto para caracterizarlo como poseedor de una cultura más amplia que la proporcionada por la enseñanza secundaria básica fundamentalmente para aquellos que vayan a continuar con estudios profesionales, completa y útil por las herramientas que proporciona para la vida cotidiana. La nueva propuesta de contenidos y enfoque del proceso docente, pretende ofrecer una visión más amplia de lo que son las matemáticas, busca favorecer la intuición y razonamiento matemático, así como la confianza en la solución de problemas y el aprender a comunicarse matemáticamente.

Los nuevos programas fueron ya aprobados, los miembros de la Academía Universitaria de Matemáticas que participamos en las discusiones para los cambios en los contenidos, podemos considerarnos satisfechos, no sin antes pensar que éstos todavía pueden ser perfectibles. La nueva preocupación desde este nuevo enfoque deberá ser entonces el proceso docente, para ello se han organizado una serie de cursos y talleres que permiten difundir entre los profesores esta nueva visión, sin embargo considero que todavía hay mucho por hacer en este sentido. Otro de los problemas de carácter didáctico al que nos enfrentamos en la nueva propuesta surge del hecho de que no existen textos de estudio que se adapten a nuestros programas, por tal motivo deberá ser preocupación y tarea de cada uno de los miembros de nuestra comunidad, generar materiales que se adapten a este nuevo enfoque.

Las notas de "*La enseñanza de los números reales en el bachillerato*" pretenden ser una propuesta didáctica para el programa de matemáticas I que aborda este tema en sus primeras semanas. Considero que es una propuesta novedosa desde el punto de vista de que no existe antecedente alguno en este nivel, de enseñanzar los números reales apoyados en la geometría. Por otra parte tampoco existe antecedente de algún material que se haya escrito con el nuevo enfoque propuesto en los programas aprobados. Será por tanto de sumo interés la lectura de estas notas para todos los docentes de la Universidad Autónoma de Querétaro o de sus escuelas incorporadas que participen en la enseñanza en el bachillerato o bien para todos aquellos docentes que la propuesta les aporte algo en el tema.

J. Carlos Arredondo Velázquez
Universidad Autónoma de Querétaro
Querétaro, Qro. Noviembre de 2001

Capítulo 1

Los números naturales

Mucho antes de que se inventara la escritura, el hombre empezó a rayar las rocas y las paredes de las cuevas y a tallar muescas en varas (tarjas) para indicar "cuántos". Tales marcas fueron el inicio de los sistemas de numeración.

Aunque los hombres en una época muy temprana hacían ya marcas e incisiones para indicar "cuántos", y anteriormente habían desarrollado un lenguaje hablado para el número, no fue sino hasta muchos años después cuando los nombres hablados de los números y las tarjas (varas a las que aludimos antes) se fusionaron y se desarrollaron en un sistema de símbolos representativos de números.

Todos los sistemas de numeración que aparecieron inicialmente parecen ser el resultado del crecimiento natural de la acción de tarjar y es así como nace el sistema egipcio, el babilónico, los sistemas griegos, los números romanos, el sistema maya, el sistema chino y los números indoarábigos.

A partir de lo anterior, podemos afirmar que el primer tipo de números que construyó la cultura humana como resultado de la necesidad de saber "cuántos" fué el que hoy conocemos con el nombre de números naturales. De quienes fueron sus inventores no se tienen noticias, ya que los grupos humanos antes mencionados los utilizaron sin existir entre ellos conexión alguna, dandoles incluso formas muy diversas.

Estos números naturales fueron los que sirvieron a los hombres desde epocas muy remotas para contar y manejar representaciones numéricas de conjuntos concretos como: animales, árboles, semillas, flechas, etc.

En general diremos que los números naturales o enteros positivos son los que sirven al ser humano para contar y estos son:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

1.1 Representación geométrica en la recta

1.1.1 La Recta de números

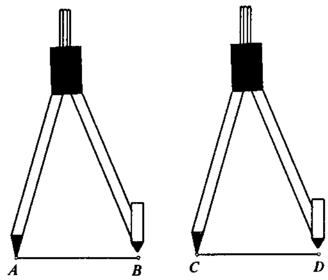
Llamaremos recta de números a una recta que por conveniencia trazaremos en forma horizontal, de tal manera que para cada uno de los números le corresponde exactamente un punto de la recta y a cada punto le corresponde exactamente un número, a esta relación uno a uno de ida y vuelta entre los números y los puntos de la recta se le conoce con el nombre de *relación biunivoca.*

De hecho, en este capítulo y en los siguientes, se tratará de hacer explícita esta correspondencia haciendo uso de los instrumentos geométricos tales como la regla y el compás.

Recta de Números

1.1.2 Segmentos orientados

Llamaremos segmento $\overline{AB}$ a un segmento de recta que tiene como extremos a los punto A y B (no importando donde empiece y donde termine), y segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, al segmento rectilineo de origen A y extremo B. Diremos entonces que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son *congruentes* si tienen la misma longitud. Una manera practica de visualizar esta congruencia es verificando que las puntas de un compás puedan ser colocadas sucesivamente en los extremos de ambos segmentos sin cambiar su abertura, podemos observar esta propiedad en la siguiente figura:



Segmentos congruentes

Si al mismo tiempo las orientaciones de los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son las mismas, entonces diremos que los segmentos son *iguales*, y escribiremos:

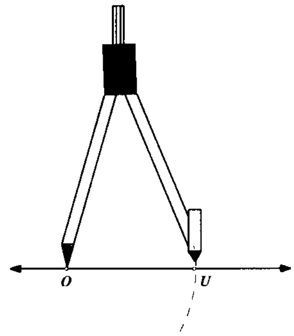
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

1.1.3 Segmento unitario

Consideremos ahora un segmento orientado $\overrightarrow{OU}$ sobre la recta de los números reales. Realicemos el convenio de llamar positivo al sentido en que se recorre la recta al pasar de O a U (como normalmente se acostumbra), también daremos a la longitud de este segmento orientado el valor adimensional de 1, es decir:

$$\overrightarrow{OU} = 1$$

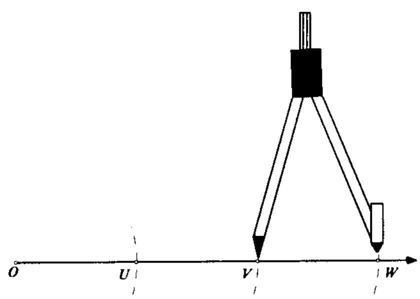
Para tomar la medida del segmento unitario con el compás, se hace una abertura cualquiera y con centro en O se traza un arco que corte a la recta de los números reales en el punto U, entonces la abertura del compás tomada será la medida del segmento unitario.



De esta forma, todo segmento que sea congruente, y que al mismo tiempo tenga la misma orientación que $\overrightarrow{OU}$, tendra una longitud positiva de 1.

1.1.4 Representación geometrica en la recta

Si con la medida del segmento unitario $\overrightarrow{OU}$ que se tiene en la abertura del compás copiamos segmentos consecutivos, es decir, si hacemos ahora centro en el punto U y con la misma abertura de compás trazamos un arco que cruce a la recta en el punto V, y a la vez hacemos lo mismo para encontrar el punto W, entonces los puntos localizados son:



esto nos garantiza que:

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{VW} = 1,$$

entonces

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{UV} = 1 + 1 = 2$$

$$\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW} = 1 + 1 + 1 = 3,$$

Si ahora sobre la recta colocamos en cada uno de los puntos marcados la longitud del segmento orientado que tiene como origen a O, entonces se obtiene

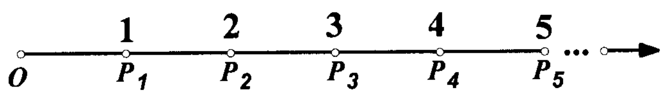
Si este mismo procedimiento lo hacemos para puntos

$$O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, ...,$$

siendo

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_4P_5} = ... = 1$$

entonces los puntos y las longitudes de los segmentos orientados desde el origen O serán:



Puede observarse que para cada uno de los puntos localizados en la recta de reales, le corresponde uno y solo un número que representa la longitud desde el origen hasta el punto y viceversa, esta es una de las partes de la relación biunívoca a la que nos referimos anteriormente, además debe notarse que los números encontrados son los números que llamamos naturales.

1.2 Representaciones posicionales

Se conoce que la notación que usamos para los numerales $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tiene origen hindú. Alrededor del siglo X los árabes tomaron estos conocimientos de los hindúes e introdujeron su uso en España, de donde pasaron a toda Europa, tuvieron que pasar largos siglos para que la forma que hoy conocemos y que se nos hace tan familiar pudiera darse. Procederemos ahora a identificar algunas propiedades posicionales en base 10 de nuestro sistema de numeración para los números naturales y buscaremos compararlo con algunos otros sitemas posicionales de diferente base.

1.2.1 Potencias de base 10

Sabemos ya desde cursos elementales, que el sistema posicional de base 10 no es otra cosa que una suma de productos de potencias de base 10. También es conocido que las potencias de base diez son expresiones de la forma:

$$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots$$

Donde convenimos que:

$$\begin{aligned}
10^0 &= 1 &&= 1 \\
10^1 &= 10 &&= 10 \\
10^2 &= 10 \times 10 &&= 100 \\
10^3 &= 10 \times 10 \times 10 &&= 1000 \\
10^4 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 &&= 10000
\end{aligned}$$

Debe notarse entonces que:

$$10^n = 10 \times 10 \times \ldots \times 10 \ (n \text{ veces}) = 1000...000(\text{con } n \text{ ceros})$$

1.2.2 Notación en base 10

Se presume que el sistema posicional en base 10 que usamos comenzó a uitilizarse en la india alrededor del año 500 de nuestra era. Una vez conocido este sistema, los únicos dígitos utilizados son del 1 al 9 y el 0. Esta notación no se popularizó sino hasta el siglo IX, después de que el matemático Al-Juarizmi de Bagdad (Mohamed ibn Musa) escribió un tratado de aritmética dirigido a los comerciantes donde recomendaba el uso de este sistema.

Para identificar algunas propiedades de este sistema posicional, consideremos un número natural, por ejemplo el 5379. Sabemos que en el sistema decimal el primer dígito a la derecha (en este caso, el 9) corresponde a las unidades, el siguiente a la izquierda (el 7) a las decenas, el siguiente a la izquierda (el 3) a las centenas y el último (el 5) a las unidades de millar. De esta forma podemos decir que el número 5379 es una abreviatura de las expresiones:

$$\begin{aligned} 5379 &= 5000 + 300 + 70 + 9 \\ &= 5 \times 1000 + 3 \times 100 + 7 \times 10 + 9 \\ & \quad 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0 \end{aligned}$$

Otro ejemplo podría ser el número 580907 el cual consideramos una forma abreviada de las expresiones:

$$\begin{aligned} 580907 &= 500000 + 80000 + 900 + 7 \\ &= 5 \times 100000 + 8 \times 10000 + 0 \times 1000 + 9 \times 100 + 0 \times 10 + 7 \\ &= 5 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \end{aligned}$$

También el número 304507 sera una forma abreviada de la expresión:

$$304507 = 3 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

En general cualquier número natural se puede representar en notación decimal como:

$$n = a_m a_{m-1} a_{m-2} ... a_1 a_0$$

en donde cada letra a_i es un dígito entre 0 y 9, de forma que la expresión de n en notación decimal es una breviatura de:

$$n = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + a_{m-2} \times 10^{m-2} + ... + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

1.2.3 Notación en base 2

Hemos aprendido que nuestra notación decimal es un sistema posicional que se presenta como la forma abreviada de una suma de potencias de base 10 en donde los factores de las potencias de base 10 son digitos entre 0 y 9.

Veamos ahora que ocurre con el sistema posicional de base 2 también conocido como el sistema binario.

Este sistema es muy importante en la actualidad ya que es el sistema que utilizan las computadoras electrónicas para su funcionamiento.

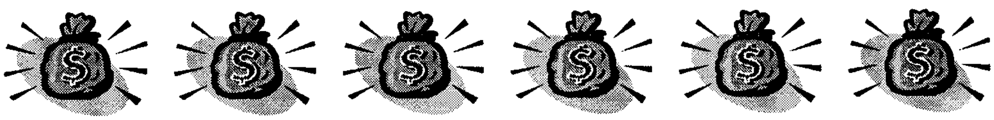
Para entender cual es la manera en que se usa este sistema veamos la solución del siguiente problema.

1.2.4 El problema de la repartición de las monedas

Un coleccionista de antigüedades había guardado durante mucho tiempo 63 monedas de una gran valor. Decidió que el día en que su hija mayor cumpliera 15 años le regalaría la cantidad de monedas que ella le pidiera del total, decidió entonces repartir las 63 monedas en 6 pequeñas bolsas de tela fina para que no se maltrataran, las repartió de tal manera que para cualquier cantidad de monedas que su hija le pidiera entre 1 y 63, él no tendría la necesidad de abrir las bolsas y contar monedas, sino que sabiendo cuantas tenían cada una de ellas solo entregaría el número suficiente de bolsitas que tuvieran la cantidad pedida. Podrías decir ¿Cuál fué la forma en que el coleccionista repartió las 63 monedas en las 6 bolsitas?

Solución:

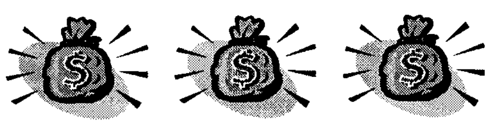
La manera en que distribuyo las 63 monedas en las 6 bolsitas fue la siguiente:



32 16 8 4 2 1

Esta distribución de las monedas en las bolsitas garantiza que cualquier número entre el 1 y 63 de monedas pedidas, podrá entregarse sin necesidad de abrir ninguna de las bolsitas.

Por ejemplo, si la hija del coleccionista pide 7 monedas, entonces las bolsitas que se deben entregar son:

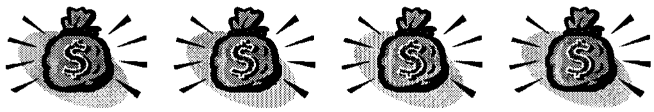


4 2 1

Ya que:

$$4 + 2 + 1 = 7$$

Ahora, si la hija del coleccionista pide 53 monedas, entonces las bolsitas que deberán entregarse son:



32 16 4 1

Ya que:

$$32 + 16 + 4 + 1 = 53$$

Veamos ahora, algunos aspectos interesantes de esta distribución, para ello notemos que las cantidades propuestas en la distribución se pueden expresar como potencias de base 2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^0 \\ 2 &= 2^1 \\ 4 &= 2^2 \\ 8 &= 2^3 \\ 16 &= 2^4 \\ 32 &= 2^5 \end{aligned}$$

Ahora realicemos los siguientes convenios:

1. Acordemos que el acomodo de las bolsitas siempre sera en orden creciente de derecha a izquierda (32, 16, 8, 4, 2, 1).

2. Pondremos debajo de cada una de las bolsitas el número 1 que indicará que la bolsita debe entregarse para una cantidad de monedas pedida y el número 0, en caso de no tener necesidad de ser entregada.

3. Si una o varias bolsitas no deben de entregarse y su posición consecutiva está en la parte final de la izquierda, entonces no deberán colocarse en el acomodo.

Por ejemplo, si la cantidad pedida es 18, señalaremos que debemos entregar $16+2 = 18$ monedas de la manera siguiente:

16	8	4	2	1
1	0	0	1	0

Podemos observar que la bolsita de 32 monedas no se colocó en el acomodo, ya que es una bolsita que no se entregará y que se encuentra localizada en la parte final de la izquierda.

La manera de representar simplificadamente la entrega de las bolsitas para este número es por consiguiente:

$$\begin{aligned} 18 &= 10010 \\ &= 16+0+0+2+0 \\ &= 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 \end{aligned}$$

Ahora veamos la manera en que se entregarían 58 monedas. Es fácil notar que las bolsitas que hay que entregar son todas excepto la que contiene 4 y una moneda, lo cual representamos de la forma:

$$\begin{aligned} 58 &= 111010 \\ &= 32+16+8+0+2+0 \\ &= 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 \end{aligned}$$

De manera inversa ahora pensemos que las bolsitas entregadas fueron 100111. ¿Qué cantidad de monedas fueron las que se pidieron?

$$\begin{aligned} 100111 &= 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 \\ &= 32+0+0+4+2+1 \\ &= 39 \end{aligned}$$

Podemos decir ahora que los números expresados con ceros y unos como el 100111 forman parte del sistema que se conoce con el nombre de binario.

Lo anterior nos permite entender que cualquier número natural se puede representar en notación binaria como:

$$n = b_m b_{m-1} b_{m-2} ... b_1 b_0$$

en donde cada letra b_i es el número 0 ó 1, de forma que la expresión de n en notación decimal es una breviatura de:

$$n = b_m \times 2^m + b_{m-1} \times 2^{m-1} + b_{m-2} \times 2^{m-2} + ... + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$$

De manera análoga podemos pensar en sistemas posicionales que sean representaciones abreviadas de sumas de potencias de base diferente a la de 10.

Por ejemplo si el número 4532 está en base 6, entonces podemos afirmar que esta representación posicional es la forma abreviada del número:

$$4 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 3 \times 6^1 + 2 \times 6^0$$

1.2.5 Representación generalizada

Todo esto se puede generalizar si tomamos un entero positivo cualquiera $b > 1$ como base. Cualquier número n puede escribirse como:

$$n = b_r \cdot b^r + b_{r-1} \cdot b^{r-1} + b_{r-2} \cdot b^{r-2} + ... + b_1 \cdot b^1 + b_0 \cdot b^0$$

con $b_r, b_{r-1}, ..., b_0$ números enteros entre $0, 1, 2, 3, ..., b-1$. La expresión obtenida de esta manera:

$$n = b_r b_{r-1} b_{r-2} ... b_0$$

se llama la *representación posicional de* n en base b.

De esta manera, todos los números naturales pueden representarse en cualquier base b, eligiendo $b > 1$, de hecho a lo largo de la historia varios sistemas posicionales de diferente base se han utilizado. Por ejemplo, los mayas usaban base 20, los babilonios usaban base 60. Para indicar la hora, nuestros relojes hoy en día usan todavía una combinación de base 12 y base 60, de hecho en las computadoras se usa la base 2. El por qué usamos nosostros la base 10 no es del todo conocida, pero seguramente la costumbre de usarla tiene que ver con el número de dedos de nuestras manos.

1.2.6 Cambio de representaciones posicionales de base b a base 10

Después de la discusión anterior, podemos notar que la manera en que se puede cambiar una representación posicional en base b a una de base 10 es la siguiente:

1. Se expresa la representación posicional de base b como una suma de potencias con base b.
2. Se realizan las sumas de las potencias en base b.
3. El resultado obtenido es el equivalente del número en base b pero ahora expresado en base 10.

Ejemplo: Si el número 11011 está en base 2 convertirlo a base 10.

Solución:

1. La representación del número como suma de potencias es:

$$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

2. La suma de las potencias es :

$$16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$$

3. Por lo tanto el número 11011 en base 2 es igual al número 27 en base 10.

Ejemplo: Si el número 3241 está en base 5 convertirlo a base 10.

Solución:

1. La representación del número como suma de potencias es:

$$3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$

2. La suma de las potencias es :

$$375 + 50 + 20 + 1 = 446$$

3. Por lo tanto el número 3241 en base 5 es igual al número 446 en base 10.

1.2.7 Cambio de representaciones posicionales de base 10 a base b

En los ejemplos anteriores observamos que el número 11011 en base 2 es igual al número 27 en base 10. Veamos ahora que sucede si el número 27 en base 10, lo dividimos por 2, el resultado será:

$$\begin{array}{r|cc} & 1 & 3 \\ \cline{2-3} 2 & 2 & 7 \\ & 0 & 7 \\ & & \mathbf{1} \end{array}$$

Si el cociente de la división, lo volvemos a dividir por 2 se obtiene:

$$\begin{array}{c|c}
 & 6 \\ \cline{2-2}
2 & 1\ \ 3 \\
 & \mathbf{1}
\end{array}$$

Si esta operación de dividir cocientes la seguimos realizando hasta obtener un cociente igual a cero, entonces los resultados son:

$$\begin{array}{c|c}
 & 3 \\ \cline{2-2}
2 & 6 \\
 & \mathbf{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
 & 1 \\ \cline{2-2}
2 & 3 \\
 & \mathbf{1}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
 & 0 \\ \cline{2-2}
2 & 1 \\
 & \mathbf{1}
\end{array}$$

Agrupemos ahora los residuos de todas estas divisiones de derecha a izquierda en forma posicional, el número que obtenemos es:

$$11011$$

Este número es la representacion en base 2 del número 27 en base 10.

El ejercicio anterior nos permite notar el hecho de que cambiar la representación de un número expresado en base 10 a su equivalente en base 2, puede realizarse haciendo divisiones consecutivas por 2 hasta obtener un cociente igual a cero. Esto nos podría hacer suponer que realizar el mismo procedimiento, pero ahora dividiendo por 5, nos puede permir cambiar la representación de un número en base 10 a un número en base 5. Veamos si esta afirmación es cierta para el siguiente ejercicio:

Se conoce que el número 3241 en base 5 es el número 446 en base 10. Veamos si el comportamiento de los residuos nos permite verificar esto.

Solución:

Dividimos al número 446 y a sus cocientes por 5 y obtenemos:

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & & 8 & 9 \\ \cline{2-4}
5 & 4 & 4 & 6 \\
 & & 4 & 6 \\
 & & & \mathbf{1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rr}
 & 1 & 7 \\ \cline{2-3}
5 & 8 & 9 \\
 & 3 & 9 \\
 & & \mathbf{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rr}
 & & 3 \\ \cline{2-3}
5 & 1 & 7 \\
 & & \mathbf{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r}
 & 0 \\ \cline{2-2}
5 & 3 \\
 & \mathbf{3}
\end{array}
$$

Por tanto la representación posicional en base 5 será:

$$3241$$

Que es la esperada.

De lo anteriormente expuesto podemos sugerir una estrategia que permita cambiar representaciones posicionales en base 10 a base b, esta estrategía se justificará ampliamente en el próximo capítulo, por el momento basta saber que puede utilizarse siguiendo el procedimiento que se describe a continuación:

1. Se divide la representación posicional en base 10 por el número b.
2. El cociente obtenido se vuelve a dividir por el número b.
3. Se vuelve a repetir el paso anterior hasta que el cociente que se obtenga sea cero.
4. Los residuos de estas divisiones se ordenan de derecha a izquierda, obteniendo así la representación posicional del número en base b.

Ejemplo: Si el número 143 está en base 10 convertirlo a base 7.

Solución: Los resultados de las divisiones ordenados de derecha a izquierda son:

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 7 & 1 \\ & \mathbf{1} \end{array} \;\Leftarrow\; \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 7 & 9 \\ & \mathbf{2} \end{array} \;\Leftarrow\; \begin{array}{c|cc} & & 9 \\ \hline 7 & 6 & 4 \\ & & \mathbf{1} \end{array} \;\Leftarrow\; \begin{array}{c|ccc} & & 6 & 4 \\ \hline 7 & 4 & 5 & 3 \\ & & 3 & 3 \\ & & & \mathbf{5} \end{array}$$

Por lo tanto, el número encontrado en base 7 es 1215.

Ejercicios:

1. Trace la recta de los números reales, localice el punto O y con el compás identifique en esta recta los primeros siete números naturales.

2. Carl Friedrich Gauss es llamado "El príncipe de las matemáticas" dominó el siglo XXI en matemáticas, en física y en astronomía. Desde niño demostró una prodigiosa habilidad con los números. A los diez años, su maestro de escuela, que quería paz en la clase, ordenó a los niños que sumaran todos los números del 1 al 100 $(1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100)$. El pequeño Gauss, casi inmediatamente, escribió el resultado en el pizarrón. ¿Cuál es el resultado inmediato que escribió Gauss?

3. A los chinos se les atribuye ser los inventores de los cuadrados mágicos. En su forma tradicional, el cuadrado está construido de tal modo que los números de cada hilera, cada columna y cada diagonal suman lo mismo, al valor sumado se le llama la constante mágica. Completa el siguiente cuadrado mágico con los primeros 9 números naturales sabiendo que su constante mágica es 15.

4. Transforma los siguientes números, dados en base 2, a base 10.

a) 10

b) 111111

c) 1000001

5. Transforma los siguientes números, dados en base 5, a base 10.

a) 21

b) 103

c) 412

6. ¿Podría el número 4132 ser una representación posicional en base 4? ¿Por qué?

7. Transforma los siguientes números, dados en base 10, a base 2.

a) 57

b) 422

c) 82

d) 111

e) 1

8. Los siguientes números están en base 10. Represéntarlos en base 3, 5 y 7.

a) 627

b) 88

c) 920

9. Observando que las tablas de sumar y multiplicar en base 2 son:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

a) Transforma a base 2 los números 17 y 51.

b) Multiplica estos números en base 2.

c) Transforma a base 2 el número 867. ¿Qué observas?

10. Para elevar al cuadrado un número que termine en 5 (por ejemplo el 25), se puede utilizar el siguente método:

- Se considera la cantidad de las decenas (para nuestro ejemplo 2) y se multiplica por el número natural siguiente (en este caso 3).
- Al resultado obtenido (para el ejemplo 6), se le añade a la derecha el cuadrado de 5, que es el 25, obteniendo así el resultado. Es decir que $25^2 = 625$.

Otro ejemplo, podría ser elevar al cuadrado 75. Si observamos que $7 \times 8 = 56$, entonces $75^2 = 5625$. Explica por qué siempre funciona este método. (*Sugerencia:* Un número n terminado en 5 es de la forma $n = 10a + 5$).

11. Escribe un número de 3 cifras de la forma abc, escribe ahora el número al revés en la forma cba, realiza la diferencia del mayor menos el menor, de tal forma que el resultado sea def. Al número def obtenido escribelo alrevés en la forma fed y realiza la suma de los números, es decir, $def + fed$. El número encontrado, siempre será 1089. Por ejemplo, si el número el número pensado es 953, tenemos que: $953 - 359 = 594$ y entonces $594 + 495 = 1089$. Experimenta con varios números y observa si se cumple siempre esta propiedad. Explica detalladamente por qué ocurre esto y cuáles son las condiciones para que suceda.

Capítulo 2

Los números enteros

Es en tiempos de los sumerios de cuando datan los primeros registros de operaciones aritméticas, y aparece entonces la necesidad de restar. Con ellos se toma conciencia de la necesidad de introducir el número cero y los números negativos, para así usarlos con todos los derechos que los números naturales tenían (esto es, se suma y multiplica también con números negativos). Por ejemplo la introducción del cero permite dar sentido a la expresión $a - a$, y la introducción de los números negativos permite la operación $6 - 10$, es así como nace el conjunto de los números enteros, formado por los números naturales (o enteros positivos), el cero y los números negativos.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

2.1 Representación geométrica en la recta

Consideremos el segmento unitario de orientación positiva

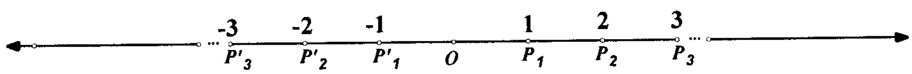
$$\overrightarrow{OU} = 1$$

Acordaremos entonces, que un segmento con una orientación en el sentido inverso, es decir $\overleftarrow{UO}$ será negativo o que tiene una orientación negativa, de tal manera que:

$$\overleftarrow{UO} = -1$$

Para identificar los números enteros en la recta de reales, tomemos una abertura de compás igual a la del segmento unitario $\overrightarrow{OU}$, con esta abertura de compás y haciendo centro en O copiamos segmentos consecutivos hacia la derecha para los puntos $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$, a la vez hacemos lo mismo para los puntos $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', \ldots$, pero ahora copiando hacia la izquierda, es decir con segmentos orientados en forma negativa.

Si sobre la recta colocamos en cada uno de los puntos marcados la longitud del segmento orientado que tiene como origen a O, entonces tendremos



Podemos notar tres tipos de números localizados en la recta:

1. Los números que representan las longitudes positivas de cada uno de los puntos desde el origen $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, estos son los números naturales ó enteros positivos.

2. Los números que representan longitudes negativas de cada uno de los puntos desde el origen $(\ldots, -3-2-1)$, estos son los enteros negativos.

3. El número que representa el punto origen desde donde se miden cada una de las longitudes de los segmentos orientados, este es el número entero 0.

Estos tres tipos de números, formarán el conjunto de los enteros.

2.2 Divisibilidad y números primos

Procederemos a continuación a estudiar algunas propiedades importantes de los números enteros, sobre todo aquellas que tienen que ver con los números enteros que son *primos*, estos números gozan de gran popularidad en las matemáticas desde el tiempo de los griegos clásicos y el estudio de su distribución y propiedades forman una de las partes más bellas y profundas de las matemáticas: la teoría de los números.

2.2.1 Definición de divisibilidad de enteros

Se dice que un entero a, distinto de cero, divide a otro entero b, si existe un entero, digamos c, tal que:

$$b = a \cdot c.$$

Expresamos el hecho de que a divide a b, por:

$$a \mid b.$$

En caso de que a no divida a b escribimos:

$$a \nmid b.$$

Ejemplo: Podemos afirmar que $4 \mid 8$, ya que existe el número entero 2, tal que $8 = 4 \cdot 2$.

Ejemplo: Podemos afirmar que $13 \nmid 15$, ya que no existe ningún número entero c, tal que $15 = 13 \cdot c$.

Ejemplo: Podemos afirmar que $-9 \mid 27$, ya que existe el número entero -3, tal que $27 = (-9)(-3)$.

Observaciones:

1. Otras formas de expresar que "a divide a b" son:

$$\text{“}b \text{ es divisible por } a\text{”},$$
$$\text{“}b \text{ es múltiplo de } a\text{”},$$
$$\text{“}a \text{ es divisor de } b\text{”},$$
$$\text{“}a \text{ es factor de } b\text{”}.$$

2. Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$ entonces $a \mid 0$.

3. Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $1 \mid a$.

4. Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$ entonces $a \mid a$.

Observación importante (Cero no divide a ningún número): Debe notarse que la definición de divisibilidad no permite que el divisor sea el número cero, será de suma importancia nunca olvidar esta restricción. Podría pensarse que hacer esta distinción en la definición no es relevante, ya que olvidarlo no llevaría a error alguno, por ejemplo podríamos afirmar que $0 \nmid 5$, diciendo que esto es debido a que no existe ningún número entero, tal que multiplicado por 0 de como resultado 5.

$$5 = 0 \cdot ?$$

Pero podríamos afirmar erróneamente con este mismo argumento que $0 \mid 0$, ya que existe el número entero 0, tal que multiplicado por cero da como resultado el mismo cero.

$$5 = 0 \cdot ?$$

En general, debemos acostumbrarnos a decir que $0 \nmid 5$ y $0 \nmid 0$, ya que la definición de divisibilidad no permite que el divisor sea cero, es decir que la división por cero no esta definida en matemáticas.

2.2.2 Los números primos

Para poder entender la definición de los números primos, demos respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles números enteros dividen al 12?

   Respuesta: El $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ y ± 12.

2. ¿Cuáles números enteros dividen al 7?

   Respuesta: El ± 1 y ± 7

Podemos observar que hay números que tienen más divisores que otros y algunos de ellos de hecho tienen muchos divisores.

2.2.3 Definición de número primo

Un numero entero $p > 1$ se llama *primo* si tiene exactamente cuatro y sólo cuatro divisores.

Si un número entero mayor que 1, no es primo, decimos que es *compuesto*.

2.2.4 La criba de Eratóstenes

Para determinar todos los números primos que existen hasta un entero positivo n no existe ninguna fórmula, pero se puede utilizar un método conocido como la criba de Eratóstenes, ideado por el sabio alejandrino Eratóstenes (284-192 a.J.C.). El método consiste en escribir todos los números enteros desde 1 hasta n. Se tacha el 1, se conserva el 2 y se tachan todos los múltiplos diferentes de 2 (el número 2 es el único par que es primo). Se conserva el 3 y se tachan todos los múltiplos diferentes de 3. Se hace lo mismo con el 5, con el 7, etc.Al término del proceso, los enteros no tachados son números primos.

Ejemplo: Usando la criba de Eratóstenes hallar los números primos menores que 50.

Realizando el procedimiento recomendado se tiene:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Entonces, los números primos menores que 50 son:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

2.3 El teorema fundamental de la aritmética

Se dice que los números primos pueden verse como los ladrillos constructores de los demás números enteros, esta afirmación la puede respaldar el teorema fundamental de la aritmética.

2.3.1 El teorema fundamental de la aritmética

Todo entero $n > 1$ se puede expresar como producto de primos siendo esta factorización única salvo posiblemente, por el orden.

De manera equivalente podemos afirmar que para cada número entero $n > 1$ existen números primos $p_1, p_2, ..., p_k$ (no necesariamente distintos) tales que $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Además esta descomposición es única salvo posiblemente, por el orden.

O bien decir simplemente que:

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot ... \cdot p_m^{r_m}$$

Donde cada r_i es un número positivo y los primos p_i son distintos.

Ejemplo: Obtener la descomposición en primos del número 72

Solución.

	Primos $\Downarrow$	
72	2	(se saca mitad)
36	2	(se saca mitad)
18	2	(se saca mitad)
9	3	(se saca "tercera")
3	3	(se saca "tercera")
1		

La descomposición en primos es:

$$72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

Esta descomposición es única para el número 72, salvo por el orden de los primos.

Ejemplo: Obtener la descomposición en primos del número 10000

Solución.

$$\begin{array}{r|cl} & \text{Primos} & \\ & \Downarrow & \\ 1\;0\;0\;0\;0 & 2 & \text{(se saca mitad)} \\ 5\;0\;0\;0 & 2 & \text{(se saca mitad)} \\ 2\;5\;0\;0 & 2 & \text{(se saca mitad)} \\ 1\;2\;5\;0 & 2 & \text{(se saca mitad)} \\ 6\;2\;5 & 5 & \text{(se saca ``quinta'')} \\ 1\;2\;5 & 5 & \text{(se saca ``quinta'')} \\ 2\;5 & 5 & \text{(se saca ``quinta'')} \\ 5 & 5 & \text{(se saca ``quinta'')} \\ 1 & & \end{array}$$

La descomposición en primos es:

$$10000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^4$$

Esta descomposición es única para el número 10000, salvo por el orden de los primos.

Ejercicio: Supongamos que $14 \cdot x = 308$. ¿Quién es x?

Solución.

Para dar solución a este ejercicio, descompongamos en primos al número 308 :

$$\begin{array}{r|cl} & \text{Primos} & \\ & \Downarrow & \\ 3\ 0\ 8 & 2 & \text{(se saca mitad)} \\ 1\ 5\ 4 & 2 & \text{(se saca mitad)} \\ 7\ 7 & 7 & \text{(se saca ``septima'')} \\ 1\ 1 & 11 & \text{(se saca ``onceava'')} \\ & 1 & \end{array}$$

La descomposición en primos es:

$$308 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$$

Descompongamos en primos ahora al número 14 :

$$\begin{array}{r|cl} & \text{Primos} & \\ & \Downarrow & \\ 1\ 4 & 2 & \text{(se saca mitad)} \\ 7 & 7 & \text{(se saca ``septima''} \\ 1 & & \end{array}$$

La descomposición en primos es:

$$14 = 2 \cdot 7$$

Ambas descomposiciones en primos nos permiten presentar a la igualdad

$$14 \cdot x = 308$$

en la forma

$$2 \cdot 7 \cdot x = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$$

entonces

$$x = 2 \cdot 11$$

luego

$$x = 22$$

Ejercicio: Encuentre el resultado final de las siguientes operaciones:

$$\frac{(8)(9)(25)}{(10)(12)(15)}$$

Solución.

Puede notarse que para obtener el resultado de una manera rápida en este caso, se puede descomponer cada uno de los números en factores primos, es decir:

$$\frac{(2)(2)(2)(3)(3)(5)(5)}{(2)(5)(2)(2)(3)(5)} = 3$$

2.4 Criterios de Divisibilidad.

Siempre es útil para una descomposición en primos saber que propiedades debe cumplir un número para que se pueda dividir entre $2, 3, 4, \ldots 12$. A continuación señalamos estas propiedades:

1. Un número es divisible por 2, si su última cifra es par. Por ejemplo los números $2346, 198568$ y 111111114 son divisibles por 2, ya que su última cifra es par.

2. Un número es divisible por 3, si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3. Por ejemplo el número 12372 es divisible por 3, ya que la suma de sus cifras es $1+2+3+7+2=15$ que es un múltiplo de 3 (15 es múltiplo de 3).

3. Un número es divisible por 4, si las dos últimas cifras son un múltiplo de 4. Por ejemplo los números 23720 y 7565944 son divisibles por 4, ya que sus dos últimas cifras (20 y 44) son múltiplos de 4.

4. Un número es divisible por 5, si la última cifra es 5 ó 0. Por ejemplo los números 6430 y 418685 son divisibles por 5, ya que su última cifra es 5 ó 0.

5. Un número es divisible por 6, si es divisible por 2 y 3. Por ejemplo el número 12372 es divisible por 6, ya que es divisible por 2 (dado que su última cifra es par) y divisible por 3 (dado que la suma de sus cifras es 15 y esta es múltiplo de 3).

6. Un número es divisible por 7, si después de repetir el siguiente algoritmo se obtiene 0 ó un múltiplo de 7:

   - Se considera la última cifra del número y se multiplica por 2.
   - Al resultado de la multiplicación se le resta al número original sin considerar la última cifra.
   - Del número obtenido en la resta, se considera la última cifra y se multiplica por 2.
   - A este resultado de la multiplicación se le resta al número sin considerar la última cifra.
   - Se continúa con el mismo procedimiento, hasta obtener un número pequeño del cual podamos saber, si es múltiplo de 7 ó no.

   Por ejemplo, veamos si el número 568727 es divisible por 7.

   - La última cifra del número es 7 si ésta se multiplica por 2, entonces se obtiene como resultado 14.

- Si del número original no se considera la última cifra 7 y se le resta el resultado de la multiplicación 14 se obtiene: $56872 - 14 = 56858$.
- Del número obtenido 56858, se considera la última cifra 8 y se multiplica por 2 para obtener un resultado de 16.
- Si del número no se considera la última cifra 8 y se le resta el resultado de la multuplicación 16 se obtiene: $5685 - 16 = 5669$.
- Del número obtenido 5669, se considera la última cifra 9 y se multiplica por 2 para obtener un resultado de 18.
- Si del número no se considera la última cifra 9 y se le resta el resultado de la multiplicación 18 se obtiene: $566 - 18 = 548$.
- Del número obtenido 548, se considera la última cifra 8 y se multiplica por 2 para obtener un resultado de 16.
- Si del número no se considera la última cifra 8 y se le resta el resultado de la multiplicación 16 se obtiene: $54 - 16 = 38$.
- Como 38, no es multiplo de 7, entonces 568727 no es divisible por 7.

7. Un número es divisible por 8, si las tres últimas cifras son 0 ó un múltiplo de 8. Por ejemplo los números 456000 y 23467888 son divisibles por 8, ya que sus tres últimas cifras de cada uno de ellos son 0 ó múltiplo de 8.

8. Un número es divisible por 9, si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9. Por ejemplo el número 63711252 es divisible por 9, ya que la suma de sus cifras es $6 + 3 + 7 + 1 + 1 + 2 + 5 + 2 = 27$ que es un múltiplo de 9 (27 es múltiplo de 9).

9. Un número es divisible por 10, si es divisible por 2 y por 5, es decir, si termina en 0. Por ejemplo los números 3540 y 85673000 son divisibles por 10, ya que terminan en 0.

10. Un número es divisible por 11, si al restar la suma de sus cifras que ocupan un lugar par con la suma de las cifras que ocupan un lugar impar se obtiene un 0 ó

un múltiplo de 11. Por ejemplo, veamos si el número 9795126 es divisible por 11: La suma de sus cifras que ocupan un lugar par es $(7+5+2) = 14$ y la suma de sus cifras que ocupan un lugar impar es $(9+9+1+6) = 25$. La resta de ambas será entonces: $(9+9+1+6)-(7+5+2) = 25-14 = 11$, como el resultado es multiplo de 11, por lo tanto, 9795126 es divisible por 11.

11. Un número es divisible por 12, si es divisible por 3 y por 4. Por ejemplo el número 1208316 es divisible por 12, ya que es divisible por 4 (dado que su dos última cifras son múltiplo de 4) y divisible por 3 (dado que la suma de sus cifras es 21 y esta es múltiplo de 3).

2.5 Algoritmo de la división

Si a y b son enteros con $a \neq 0$ y $b > 0$,entonces existen dos enteros q y r, únicos, tales que:

$$a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < b.$$

Ejemplo: Utilizando el algoritmo de la división, encontrar q y r tales que $45 = q \cdot 10 + r$.

Solución: Con la división usual (la que se nos enseño en primaria) podemos encontrar fácilmente los números buscados, estos son 4 y 5, ya que

$$\begin{array}{rl} & \ \ 4 \\ 10 & \overline{)\,4\ \ 5} \\ & \ \ 5 \end{array}$$

Ejemplo: Utilizando el algoritmo de la división, encontrar q y r tales que $93 = q \cdot 10 + r$.

Solución:

Como

$$\begin{array}{r|cc} \multicolumn{1}{r}{} & & 9 \\ \cline{2-3} 10 & 9 & 3 \\ \multicolumn{1}{r}{} & & 3 \end{array}$$

entonces los números buscados son 9 y 3.

Ejemplo: Dados los enteros $a = 4537$ y $b = 10$, realiza una aplicación repetida del algoritmo de la división, obteniendo una serie con las siguientes características:

$$\begin{aligned} a = q_1 \cdot b + r_1, \text{ donde} \quad & 0 < r_1 < b, \\ q_1 = q_2 \cdot b + r_2, \text{ donde} \quad & 0 < r_2 < b, \\ q_2 = q_3 \cdot b + r_3, \text{ donde} \quad & 0 < r_3 < b, \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \end{aligned}$$

Repite este procedimiento hasta que $q_n < b$.

¿Que observas que ocurre con los números $q_n, r_n, r_{n-1}, ..., r_2, r_1$?

Solución:

Aplicando el algoritmo de la división por primera vez se tiene que:

$$4537 = 453 \cdot 10 + 7;$$

de donde:

$$q_1 = 453 \qquad y \qquad 0 < r_1 = 7 < 10$$

Como $q_1 = 453 \geq 10$, entonces volvemos a aplicar el algoritmo de la división:

$$453 = 45 \cdot 10 + 3$$

ahora

$$q_2 = 45 \qquad y \qquad 0 < r_2 = 3 < 10$$

Con estos nuevos resultados, podemos expresar ahora el número a como:

$$\begin{aligned} 4537 &= 453 \cdot 10 + 7 \\ &= (45 \cdot 10 + 3) \cdot 10 + 7 \\ &= 45 \cdot 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 7 \\ &= 45 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \end{aligned}$$

Como $q_2 = 45 \geq 10$, entonces volvemos a aplicar el algoritmo de la división:

$$45 = 4 \cdot 10 + 5$$

se obtiene que

$$q_3 = 4 \qquad y \qquad 0 < r_3 = 5 < 10$$

Con los resultados obtenidos podemos expresar ahora el número como:

$$\begin{aligned} 4537 &= 45 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \\ &= (4 \cdot 10 + 5)10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \\ &= 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \end{aligned}$$

Como $q_3 = 4 < 10$, entonces hemos terminado.

Se puede observar que los números q_3, r_3, r_2 y r_1 ordenados en forma descendente, presentan al número 4537 en notación posicional de base 10. Esto es muy razonable, ya que son estos números los coeficientes de la suma de las potencias de base 10.

Este ejercicio puede dar una idea del procedimiento que se propuso en el capitulo anterior para cambiar la presentación de un número dado en base 10 a uno dado en base b.

Para dar una justificación más clara, veamos el siguiente procedimiento general:

Dado un número a, este puede expresarse como:

$$a = q_1 \cdot b + r_1,$$

Si

$$0 < r_1 < b,$$

entonces

$$q_1 = q_2 \cdot b + r_2,$$

Por lo que el número a puede expresarse como

$$\begin{aligned} a &= (q_2 \cdot b + r_2) \cdot b + r_1 \\ &= q_2 b^2 + r_2 b^1 + r_1 \end{aligned}$$

Si

$$0 < r_2 < b,$$

entonces

$$q_2 = q_3 \cdot b + r_3,$$

Por lo que el número a se puede expresarse ahora como

$$\begin{aligned} a &= (q_3 \cdot b + r_3) \cdot b^2 + r_2 b^1 + r_1 \\ &= q_3 b^3 + r_3 b^2 + r_2 b^1 + r_1 \end{aligned}$$

Si continuamos con el procedimiento, hasta que

$$q_n < b$$

entonces la última expresión del número será:

$$a = q_n b^n + r_n b^{n-1} + ... + r_3 b^2 + r_2 b^1 + r_1$$

Podemos observar que con este procedimiento lo único que hacemos, es expresar el número como una suma de potencias en base b, por lo que los coeficientes de esta suma serán la expresión abreviada de la cantidad, es importante también señalar que todos estos coeficientes necesariamente deben ser menores que b.

Ejemplo: Convierta el número 37 en base 10, a un número expresado en base 2.

Solución: Aplicando el algoritmo de la división, con divisor 2 por primera vez se tiene que:

$$37 = 18 \cdot 2 + 1;$$

de donde

$$q_1 = 18 \qquad y \qquad 0 < r_1 = 1 < 2$$

Como $q_1 = 18 \geq 2$, entonces volvemos a aplicar el algoritmo de la división:

$$18 = 9 \cdot 2 + 0$$

de donde

$$q_2 = 9 \qquad y \qquad 0 < r_2 = 0 < 2$$

Como $q_2 = 9 \geq 2$, entonces volvemos a aplicar el algoritmo de la división:

$$9 = 4 \cdot 2 + 1$$

ahora se tiene que

$$q_3 = 4 \qquad y \qquad 0 < r_3 = 1 < 2$$

Como $q_3 = 4 \geq 2$, entonces volvemos a aplicar el algoritmo de la división:

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

se tiene entoces que

$$q_4 = 2 \qquad y \qquad 0 < r_4 = 0 < 2$$

Como $q_4 = 2 \geq 2$, entonces volvemos a aplicar el algoritmo de la división:

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

de donde

$$q_5 = 1 \qquad y \qquad 0 < r_5 = 0 < 2$$

Como $q_5 = 1 < 2$,entonces hemos terminado.

Se puede notar que los números q_5, r_5, r_4, r_3, r_2 y r_1 ordenados en forma descendente forman el número 100101 en base 2, este número es efectivamente el equivalente del número 37 en base 10.

Ejercicios:

1. Contesta Falso o Verdadero a cada una de las siguientes afirmaciones y dá la razón

de tu respuesta.

a) $3 \mid 0$

b) $0 \mid 7$

c) $17 \mid 2223$

d) $32 \mid 1024$

e) $23 \mid 11231$

2. Realiza cada una de las siguientes demostraciones: (NO es suficiente dar ejemplos particulares)

a) Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid b+c$

b) Si $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces $a \mid c$

3. Expresar los siguientes números como producto de potencias de primos.

a) 360

b) 2048

c) 777

d) 317

e) 514

4. Utilizar la criba de Eratóstenes para encontrar todos los números primos menores que 200.

5. Para cada una de las siguientes igualdades, encontrar el valor de x utilizando el teorema fundamental de la aritmética.

a) $22 \cdot x = 2024$

b) $20 \cdot x = 1260$

c) $14 \cdot x = 1190$

6. Realiza cada una de las siguientes demostraciones: (NO es suficiente dar ejemplos particulares)

   a) Si n es par, entonces n^2 es par.

   b) Si n es impar, entonces n^2 es impar.

   c) Si n^2 es par, entonces n es par.

   d) Si n^2 es impar, entonces n es impar.

7. Demostrar que si n es un cuadrado perfecto (el cuadrado de un entero) y si $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ es su descomposición en primos, entonces cada α_i es par.

8. Un número es perfecto, si es la suma de todos sus divisores propios (divisores positivos diferentes del número). Por ejemplo, el número 6 es perfecto dado que es la suma de sus divisores propios $1, 2$ y 3. Un número es abundante, si la suma de todos sus divisores propios es mayor que él. Por ejemplo, el número 12 es abundante, ya que la suma de sus divisores propios $1, 2, 3, 4, 6$ resulta ser mayor que él. A partir de estas dos definiciones encuentra todos los números perfectos y todos los abundantes que sean menores que 50.

9. Encontrar el resultado de cada una de las siguientes operaciones (se recomienda descomponer en primos) sin el uso de la calculadora.

   a) $\frac{(14)(12)(25)}{(2)(3)(35)}$

   b) $\left(\frac{100}{27}\right)\left(\frac{18}{10}\right)\left(\frac{36}{20}\right)$

10. En la tumba de una pirámide egipcia está grabado el número 2520. Encuentra para qué números del 1 al 12 es divisible este número y explica el por qué de tu respuesta (Por ejemplo, el número 2520 es divisible por 2, ya que su última cifra es par).

11. Piensa en un número de 3 cifras de la forma abc. Escribe ahora el número $abcabc$ repitiendo las tres cifras pensadas. El número así presentado siempre es divisible por 1001 y por si fuera poco también es divisible siempre por $7, 11, 13, 77, 91$ y 143. Por ejemplo, supongamos que el número pensado es 652, entonces se tiene que:

$652652 = 1001 \times 652$, entonces el número es divisible por 1001.

$652652 = 7 \times 93236$, entonces el número es divisible por 7.

$652652 = 11 \times 59332$, entonces el número es divisible por 11.

$652652 = 13 \times 50204$, entonces el número es divisible por 13.

$652652 = 77 \times 8476$, entonces el número es divisible por 77.

$652652 = 91 \times 7172$, entonces el número es divisible por 91.

$652652 = 143 \times 4564$, entonces el número es divisible por 1001.

Explica detalladamente por qué siempre sucederá esto.

12. Dados los enteros a y b, realiza una aplicación repetida del algoritmo de la división, obteniendo una serie con las siguientes caracteristicas:

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 \cdot b + r_1, \text{ donde } & 0 < r_1 < b,\\
q_1 &= q_2 \cdot b + r_2, \text{ donde } & 0 < r_2 < b,\\
q_2 &= q_3 \cdot b + r_3, \text{ donde } & 0 < r_3 < b,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Repite este procedimiento hasta que $q_n < b$.

a) $a = 4235$, $b = 10$

b) $a = 77$, $b = 2$

c) $a = 137$, $b = 5$

Capítulo 3

Los números racionales

Pensando en cuestiones prácticas, la humanidad estaba destinada a no tener limitaciones en la división. Por ejemplo, pensemos que hubiera necesidad de dividir dos manzanas entre cuatro niños. Es inútil decir que esto no tiene solución, justificando que no hay número en la tabla de multiplicar que al multiplicarse por 4 dé 2. En la práctica lo que hacemos de una manera muy natural, es dividir cada manzana en dos partes iguales y dar a cada uno de los cuatro niños un pedazo de la misma.

Siguiendo este sistema, la humanidad rompió sus unidades generales de medición en partes más pequeñas, dándoles nombres también a éstas, de esta manera tan simple y natural podría decirse que es como nacieron los números racionales.

3.1 Definición de número racional

Los números racionales son aquellos que se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, donde a y b son números enteros. En notación de conjuntos, podemos escribir:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b, \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$$

Debemos notar que todos los números enteros son racionales, ya que éstos pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, esto es posible si a cada entero lo expresamos con denominador unitario, de tal manera que:

$$\mathbb{Z} = \{..., -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}...\}$$

Dado que todos los números enteros son racionales, podemos afirmar entonces, que el conjunto de los números enteros, es un subconjunto del conjunto de los números racionales. Esto lo denotamos de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Para los números naturales, enteros y racionales, también podemos decir que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Debemos también identificar que existen algunos números racionales que no son enteros. Algunos ejemplos de estos números son:

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{17}{100}, \frac{6}{5}, \text{etc.}$$

Procederemos ahora a dar una idea de como se pueden representar los números racionales en la recta de reales con ayuda de instrumentos geométricos, es decir, buscaremos entender cómo asociarle a cada fracción $\frac{a}{b}$ un punto de la recta de reales.

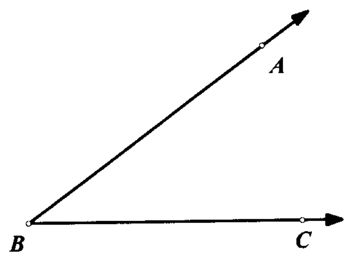
3.2 Representación geométrica en la recta

Para poder representar a los racionales en la recta de reales, hagamos antes las siguientes consideraciones que tiene el uso de la regla y compás para algunos trazos.

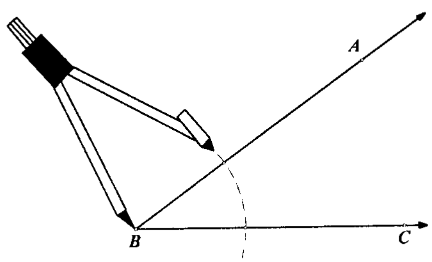
3.2.1 Copia de un ángulo

Si se desea copiar un ángulo con regla y compás, se recomienda realizar el siguiente procedimiento:

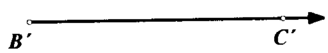
1. Consideremos que el ángulo que deseamos copiar es $\angle ABC$ y que su abertura es la que se muestra en la siguiente figura:



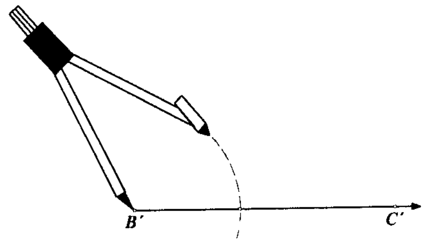
2. Para poder copiar este ángulo, se hace una abertura de compás cualquiera y haciendo centro en el vértice B, se traza un arco que cruce ambos rayos del ángulo dado.



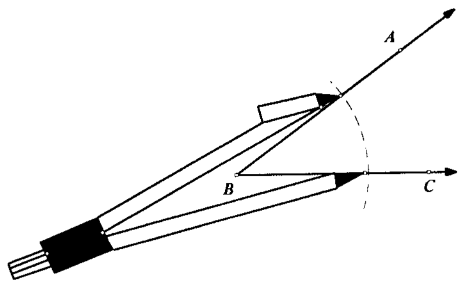
3. Se traza ahora un rayo $\overrightarrow{B'C'}$ que sirva como uno de los lados del ángulo copia.



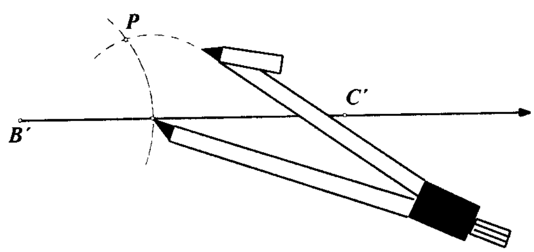
4. Con la misma abertura de compás y haciendo centro en B', se traza un arco que cruce en algún punto el rayo $\overrightarrow{B'C'}$.



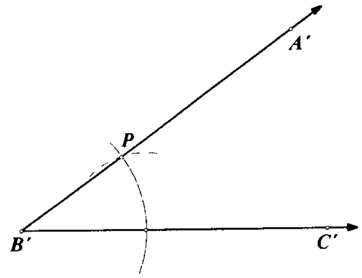
5. Acontinuación se abre el compás a la medida de la abertura del ángulo dado. (Debe notarse que con el compás se está midiendo el ángulo para ser copiado).



6. Con la misma abertura de compás del ángulo medido, se traza un arco haciendo centro en el punto de cruce del primer arco y del rayo, de tal forma que ambos arcos se crucen en un punto P.



7. Uniéndo el punto P y el extremo del rayo B', se traza el segundo lado del ángulo copia.



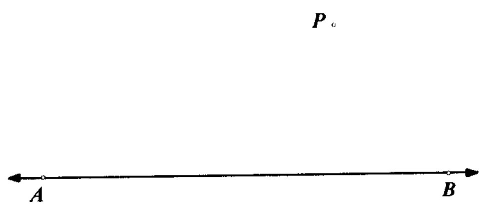
Finalmente tendremos que:

$$\angle ABC = \angle A\text{'}B\text{'}C\text{'}$$

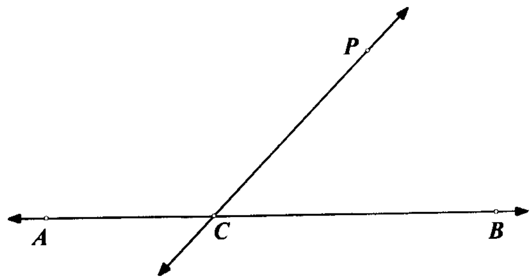
3.2.2 Trazo de una recta paralela por un punto exterior

Veamos ahora como se puede trazar dada una recta, otra que sea paralela y que pase por un punto exterior. Esta construcción la vamos a realizar con el apoyo de una secante, veamos el procedimiento.

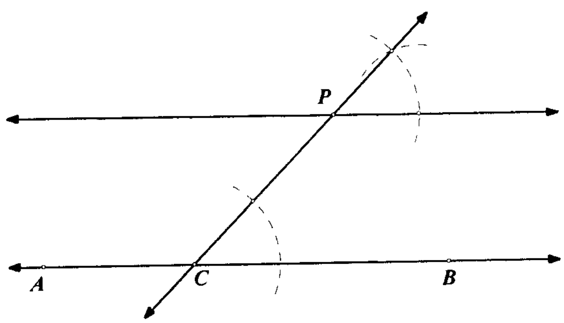
1. Consideremos que se desea trazar una recta paralela a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y deseamos que esta paralela pase por el punto exterior P.



2. Se debe trazar una secante con una inclinación cualquiera, de tal manera que pase por el punto P y que cruce a la recta en un punto al cual llamaremos C.



3. Se copia el ángulo $\angle PCB$, en el punto P de la secante. El segundo lado del ángulo en P será entonces la paralela a la recta inicial.



3.2.3 División de un segmento unitario en n partes iguales

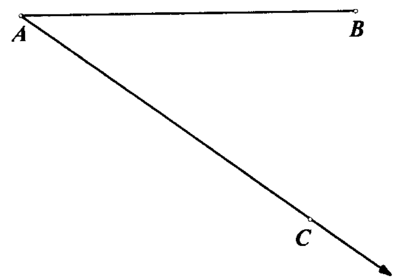
Supongamos que se desea dividir un segmento unitario $\overrightarrow{AB}$ en tres partes iguales, seguramente no es difícil imaginar que realizar esta división con una regla graduada o con algún otro instrumento de medición sería complicado e inexacto. Por ejemplo, pensemos que el valor unitario se diera en centímetros, entonces para dividir este segmento en tres partes iguales tendríamos que realizar la división de 1 entre 3, esto lo podríamos hacer de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} & 0.\ 3\ 3\ 3\ \ldots \\ \hline 3 & 1.\ 0 \\ & \quad\ 1\ \ldots \end{array}$$

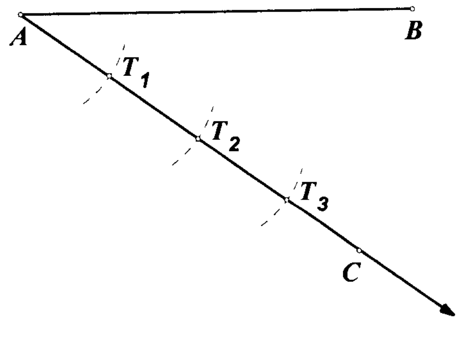
Se nota lo difícil e inexacto que puede resultar, tomar con cualquier instrumento de medición, por muy preciso que este sea, la cantidad de 0.333... centímetros. Será necesario entonces buscar un procedimiento que pueda darnos la certeza de que la inexactitud pueda ser mínima, este procedimiento que proponemos es a partir de una construcción con regla y compás el cual describimos a continuación.

1. Sea el segmento unitario $\overrightarrow{AB}$, el que se quiere dividir en 3 partes iguales.

2. A partir del extremo A del segmento, se traza una semirrecta AC con cualquier inclinación.

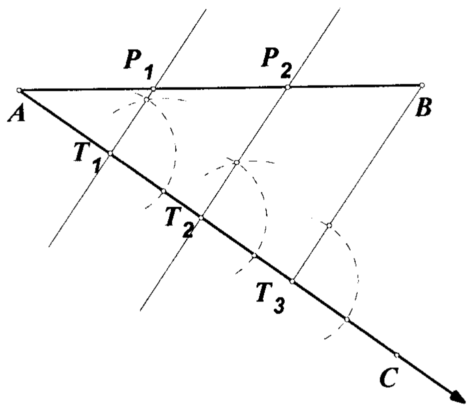


3. Con una abertura de compás cualquiera y con centro en A, se trazan 3 arcos consecutivos que crucen a la semirecta en los puntos T_1, T_2 y T_3. De esta forma, sobre la semirrecta se construyen tres segmentos congruentes.



$$\overline{AT_1} = \overline{T_1T_2} = \overline{T_2T_3}$$

4. El extremo T_3 del último segmento se une con el punto B. Después se trazan rectas paralelas a este segmento que pasen por los puntos T_2 y T_1. Las paralelas cortarán al segmento $\overline{AB}$ en los puntos P_1 y P_2. Estos puntos dividen al segmento en tres partes iguales.



Es importante notar que el procedimiento utilizado nos puede servir para dividir un segmento unitario en el número de partes que se quiera.

3.2.4 Representación geométrica en la recta

Pensemos ahora que se desea localizar a todos los números racionales de la forma $\frac{a}{3}$ en la recta de reales, es decir, se desean localizar los números:

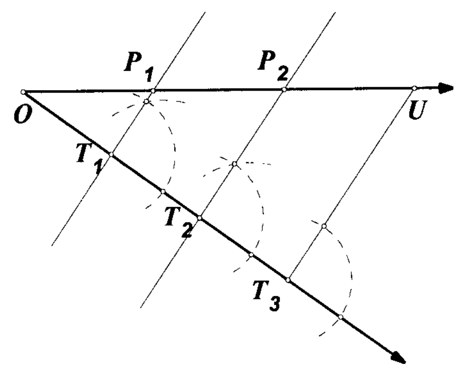
$$\ldots, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots$$

Para poder encontrar los puntos de la recta que corresponden a este tipo de racionales, se requiere una medida unitaria que mida tercios, esta medida puede ser un segmento como $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}$. Encontrar una unidad así, permitirá localizar a todos los reales de la forma $\frac{a}{3}$.

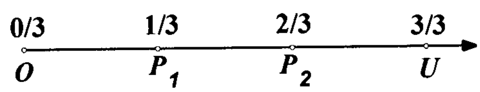
Para dar solución a este problema, consideremos al segmento

$$\overrightarrow{OU} = 1$$

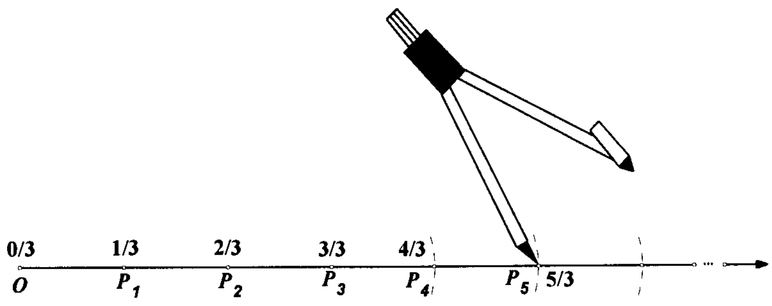
Sabemos que si localizamos el punto U en la recta de reales, este quedará en correspondencia con el número $1 = \frac{3}{3}$. Procederemos entonces a dividir este segmento en tres partes iguales con los puntos P_1 y P_2.



Podemos observar que el punto O está en correspondencia con el racional (y a su vez número real) $\frac{0}{3} = 0$, P_1 con $\frac{1}{3}$ (esta es la unidad buscada), P_2 con $\frac{2}{3}$ y U con $\frac{3}{3} = 1$.



Entonces con la unidad encontrada $\overrightarrow{T_1} = \frac{1}{3}$, podemos localizar a todos los números racionales (y reales a la vez) de la foma $\frac{n}{3}$.



En general, para localizar cualquier número de la forma $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ siendo a y b números enteros, podemos proceder de la siguiente manera:

1. Se traza el segmento unitario $\overrightarrow{OU}$, sabiendo que U se encuentra en correspondencia con el real 1.
2. Se divide el segmento $\overrightarrow{OU}$ en b partes iguales con los puntos $B_1, B_2, ..., B_{b-1}$.
3. El punto B_1 estará en correspondencia con el unitario $\frac{1}{b}$, es decir, $\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{b}$.
4. Copiando $\mid a \mid$ veces el segmento unitario $\overrightarrow{OB_1}$ o bien $\overleftarrow{B_1O}$ según sea necesario se obtendra la localización del racional $\frac{a}{b}$ en la recta de reales.

Ejercicio: Localiza el número racional $\frac{3}{4}$ en la recta de reales.

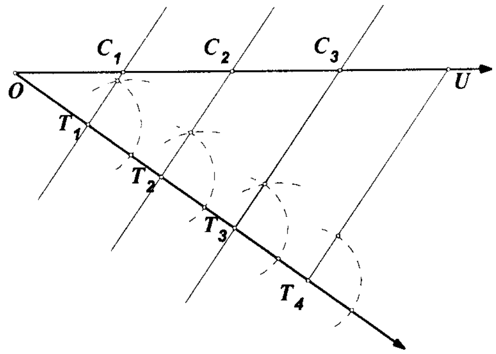
Solución:

Considermos el segmento unitario:

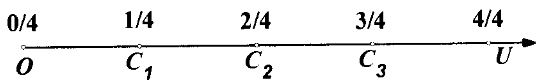
$$\overrightarrow{OU} = 1$$

Sabemos que el número real asociado al punto U en la recta de reales es 1.

Para encontar el número racional $\frac{3}{4}$ en la recta de reales, dividamos el segmento $\overrightarrow{OU}$ en cuatro partes iguales con los puntos C_1, C_2 y C_3.



Puede observarse que el punto O está en correspondencia con el racional (y a su vez número real) $\frac{0}{4} = 0$, C_1 con $\frac{1}{4}$, C_2 con $\frac{2}{4}$, C_3 con $\frac{3}{4}$ (que es el que buscabamos) y U con $\frac{4}{4} = 1$.

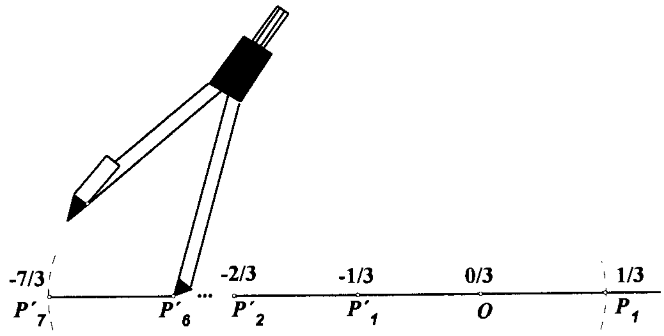


De hecho el segmento $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{4}$ puede servir de medida unitaria para localizar cualquier número de la forma $\frac{a}{4}$.

Ejercicio: Localiza el número racional $-\frac{7}{3}$ en la recta de reales.

Solución:

Para dar solución a este ejercicio, bastará con encontrar la unidad para tercios $\frac{1}{3}$, dividiendo al segmento unitario en tres partes iguales y después copiar esta unidad de tercios siete veces a la izquierda por ser un número negativo.



3.3 Notación decimal periódica

Otra forma común de presentar a los números, es a partir de su expresión decimal, nos proponemos a continuación explicar la manera en que pueden identificarse los números racionales cuando son expresados en forma decimal. A manera de introducción proponemos la segunda Paradoja de Zenón de Elea, la cual nos llego a través de la *Física* de Aristóteles.

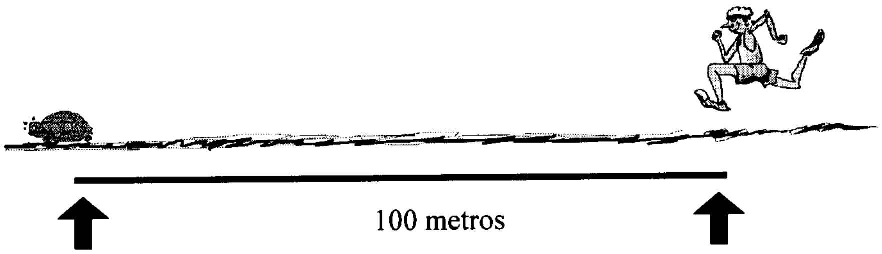
3.3.1 Paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, famoso guerrero griego, es considerado el más veloz de los mortales. Una intrépida tortuga reta a Aquiles a una carrera, aún sabiendo que Aquiles es 10 veces más rápido que ella. Por tal circunstancia Aquiles concede a la tortuga una ventaja de 1 km. (1000 mts.), con esta ventaja podrías decir:

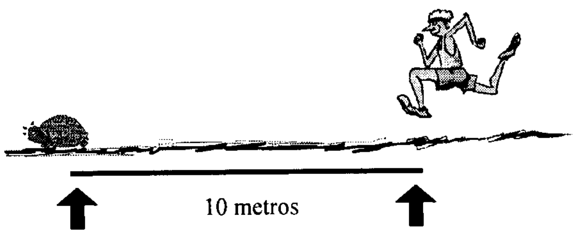
¿Cuándo Aquiles alcanzará a la tortuga?

Para dar respuesta a esta pregunta pensemos en lo siguiente:

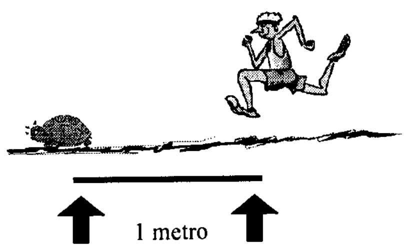
Si Aquiles recorre el kilómetro de ventaja, la tortuga habrá recorrido 100 metros más, en ese momento los 100 metros serán su nueva ventaja.



Mientras Aquiles recorre los 100 metros que los separan, la tortuga tomará una nueva ventaja de 10 metros.



Es claro entonces, que si Aquiles recorre los 10 metros de nueva ventaja, la tortuga tomará otra ventaja de 1 metro.



Puede entenderse en base al anterior razonamiento, que si la tortuga tiene cualquier ventaja, entonces el tiempo que tarda Aquiles en recorrer esta ventaja permitirá a la tortuga tomar una decima parte de la ventaja anterior como su nueva ventaja. En base al razonamiento anterior, la respuesta a la pregunta inicial es:

"Aquiles nunca alcanzará a la torutga"

¿Estás de acuerdo con este razonamiento?

Dejemos para el final de esta sección la discusión de este razonamiento, esto con la finalidad de que el conocimiento de los números racionales expresados en forma decimal colabore para que podamos entender en donde radica la confusión del razonamiento.

3.3.2 Números decimales periódicos

Llamaremos número decimal periódico, a todo número que al final de su representación decimal en la parte no entera, tenga algún grupo de dígitos repetido en forma infinita.

Por ejemplo, el número:

$$4.2141414...,$$

es un número decimal periódico, dado que 14 se repite al final del número en la parte no entera de forma infinita. La forma abreviada de representar este número es:

$$4.2\overline{14}$$

Otro ejemplo de un número decimal periódico, es aquel que al final de su parte no entera tienen el 0 (o "colas de ceros"), ejemplos de estos números son

$$5 = 5.000... = 5.\overline{0}$$

$$13.45000... = 13.45\overline{0}$$

Por ejemplo, en nuestra vida diaria, observamos precios como \$198.95, estos también se consideran periódicos en el sentido de que:

$$198.95 = 198.95000... = 198.95\overline{0}$$

3.3.3 Representación de números decimales periódicos como potencias de base 10

Procederemos ahora a representar los números decimales periódicos, como potencias de base 10. Esto con la intención de identificar algunas de las propiedades que tiene nuestro sistema númerico en base 10 y que nos servirán para el estudio de los números racionales.

3.3.4 Más sobre potencias de base 10.

En el capítulo número 1 ya comentamos lo que ocurre con las potencias de base 10, por ejemplo, notamos que:

$$\begin{aligned}
10^0 &= 1 &&= 1\\
10^1 &= 10 &&= 10\\
10^2 &= 10\times 10 &&= 100\\
10^3 &= 10\times 10\times 10 &&= 1000\\
10^4 &= 10\times 10\times 10\times 10 &&= 10000
\end{aligned}$$

Veamos ahora que

$$
\begin{aligned}
10^{-1} &= \tfrac{1}{10^1} = \tfrac{1}{10} &= .1\\
10^{-2} &= \tfrac{1}{10^2} = \tfrac{1}{100} &= .01\\
10^{-3} &= \tfrac{1}{10^3} = \tfrac{1}{1000} &= .001\\
10^{-4} &= \tfrac{1}{10^4} = \tfrac{1}{10000} &= .0001\\
10^{-5} &= \tfrac{1}{10^5} = \tfrac{1}{100000} &= .00001
\end{aligned}
$$

En general podemos decir que:

$$
\begin{aligned}
10^{-n} &= \tfrac{1}{10^n}\\
&= \tfrac{1}{10\times 10\times \ldots \times 10 \text{ (n veces)}}\\
&= \tfrac{1}{1000\ldots 000 \text{ (con } n \text{ ceros)}}\\
&= 0.000\ldots 0001 \text{ (con } n-1 \text{ ceros después del punto decimal)}
\end{aligned}
$$

3.3.5 Notación en base 10

Identifiquemos ahora como es posible representar la parte no entera de los números decimales como una suma de potencias de base 10.

Por ejemplo, el número:

$$.453$$

es posible expresarlo como la suma:

$$.4 + .05 + .003$$

o bien, como la suma de los productos:

$$4 \times .1 + 5 \times .01 + 3 \times .001$$

Finalmente puede expresarse como la suma de potencias de base 10 :

$$.453 = 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$$

Otro ejemplo podría ser el número .12954 que se expresa como:

$$\begin{aligned} .12954 &= .1 + .02 + .009 + .0005 + .00004 \\ &= 1 \times .1 + 2 \times .01 + 9 \times .001 + 5 \times .0001 + 4 \times .00001 \\ &= 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 4 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Con lo anterior, podemos pensar entonces en números que tengan parte entera y parte no entera.

Por ejemplo el número 872.651, se puede expresar como

$$\begin{aligned} 872.651 &= 800 + 70 + 2 + .6 + .05 + .001 \\ &= 8 \times 100 + 7 \times 10 + 2 + 6 \times .1 + 5 \times .01 + 1 \times .001 \\ &= 8 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

En general, cualquier número se puede representar en notación decimal como:

$$n = a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots b_{r-2} b_{r-1} b_r$$

en donde cada letra a_i y b_j es un dígito entre 0 y 9, de forma que la expresión de n en notación decimal es una breviatura de:

$$\begin{aligned} n \quad = \quad & a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + a_{m-2} \times 10^{m-2} + ... + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 \\ & + b_1 \times 10^{-1} + b_2 \times 10^{-2} + ... + b_{r-2} \times 10^{-r+2} + b_{r-1} \times 10^{-r+1} + b_r \times 10^{-r} \end{aligned}$$

3.4 Cambios de notación

Veamos ahora cual es la manera en que un decimal periódico, se puede representar en la forma $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, donde a y b son números enteros, es decir, evidenciaremos con este cambio de notación que todos los decimales periódicos, también son números racionales.

3.4.1 Números decimales periódicos con "colas de ceros".

El primer cambio de notación que realizaremos, será el de los números decimales periódicos con "colas de ceros" a su representación en forma de cociente.

Si el número decimal periódico es un entero, se entiende que su representación en forma de cociente es inmediata, ya que bastará representarlo con denominador unitario.

Por ejemplo, el número:

$$3 = 3.000... = 3.\overline{0} = \frac{3}{1}$$

Pensemos ahora en un número decimal periódico con "cola de ceros" que no sea entero, por ejemplo en el número:

$$0.45000... = 0.45\overline{0} = 0.45$$

De este número sabemos que su representación como sumas de potencias de base 10 es:

$$\begin{aligned}
.45 &= 4 \times .1 + 5 \times .01 \\
&= 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} \\
&= \tfrac{4}{10^1} + \tfrac{5}{10^2} = \tfrac{4}{10} + \tfrac{5}{100}
\end{aligned}$$

Si realizamos la suma de fraccionarios se obtendra que:

$$.45 = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} = \frac{45}{100}$$

Aquí podemos observar que $.45 = \frac{45}{100}$ representa 45 centésimos.

Pensemos ahora en el número:

$$53.0163000... = 53.0163\overline{0} = 53.0163$$

En suma de potencias de base diez tenemos:

$$\begin{aligned}
53.0163 &= 5 \times 10 + 3 + 0 \times .1 + 1 \times .01 + 6 \times .001 + 3 \times .0001 \\
&= 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-4} \\
&= \tfrac{50}{1} + \tfrac{3}{1} + \tfrac{1}{10^2} + \tfrac{6}{10^3} + \tfrac{3}{10^4} \\
&= \tfrac{50}{1} + \tfrac{3}{1} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{6}{1000} + \tfrac{3}{10000} \\
&= \tfrac{530163}{10000}
\end{aligned}$$

O bien también podemos expresarlo como 53 enteros mas 163 diezmilésimos.

Con los ejemplos anteriores no hemos dado cuenta de la facilidad con la que un número decimal periódico con "cola de ceros" se puede representar como un cociente. Los siguientes son ejemplos de este cambio inmediato.

$$
\begin{aligned}
0.15 &= \tfrac{15}{100} \\
0.089 &= \tfrac{89}{1000} \\
0.234986 &= \tfrac{234986}{1000000} \\
5.63 &= \tfrac{563}{100} \\
23.0086 &= \tfrac{230086}{10000}
\end{aligned}
$$

Después de este cambio, podemos afirmar que cualquier decimal periódico con "colas de ceros", es un número racional, ya que es posible expresarlo en la forma $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, donde a y b son números enteros.

3.4.2 Números decimales periódicos sin "colas de ceros".

Veamos ahora la forma en que un decimal periódico sin "cola de ceros" se puede expresar en forma de cociente.

Para realizar este cambio, un procedimiento ilustrado con un ejemplo concreto es el siguiente:

1. Llamemos N al número decimal periódico sin "cola de ceros", por ejemplo:

$$N = 0.1323232... = 0.1\overline{32}$$

2. Multipliquemos este número por una potencia de base 10, de tal forma que el resultado localice el punto decimal al final del primer periodo. En este caso debemos

darnos cuenta que requerimos recorrer el punto decimal tres cifras a la derecha, por tanto multiplicaremos por $1000 = 10^3$.

$$(N = 0.1\overline{32})(1000)$$

$$1000N = 132.\overline{32}$$

3. Multipliquemos ahora el número de tal forma que el resultado localice el punto decimal al inicio del primer periodo. En este caso será necesario multiplicar por 10.

$$(N = 0.1\overline{32})(10)$$

$$10N = 1.\overline{32}$$

4. Los números obtenidos en los pasos 2 y 3 se restan y el resultado que se obtiene permite mediante un sencillo despeje, encontrar el cociente buscado.

Restando

$$\begin{array}{rcl} 1000N & = & 132.323232... \\ \text{-}10N & = & \text{-}1.323232... \\ \hline 990N & = & 131.000000... \end{array}$$

Observemos que las "colas" de números después del punto decimal se cancelan. Ahora despejando:

$$N = \frac{131}{990}$$

Finalmente tenemos que el cambio nos permite afirmar que:

$$0.1\overline{32} = \frac{131}{990}$$

Por consiguiente podemos decir que $0.1\overline{32}$ es un número racional.

Ejercicio: Represente el número 5.2727... como cociente de dos enteros (ó racional).

Solución:

Sea

$$N = 5.\overline{27}$$

Multipliquemos por 10^2 de tal manera que el punto decimal se recorra al final del primer periodo:

$$100N = 527.\overline{27}$$

Como no es necesario multiplicar el número para que el punto se localice al inicio del primer periodo, procedemos inmediatamente a restar las cantidades:

$$\begin{array}{rcr} 100N & = & 527.272727... \\ -N & = & -5.272727... \\ \hline 99N & = & 522.000000... \end{array}$$

Despejando se obtiene que:

$$N = \frac{522}{99} = 5.\overline{27}$$

Podemos afirmar entonces que $5.\overline{27}$ es racional.

Los ejercicios anteriores, nos permiten suponer que los decimales periódicos sin "colas de ceros", tambien son racionales ya que es posible expresarlos en la forma $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, donde a y b son números enteros.

3.4.3 Números decimales con "colas de nueves"

Una apreciación importante con respecto a los decimales periódicos es el hecho de advertir que debe evitarse la escritura de este tipo de números con "colas de nueves", esto por resultar innecesaria. El por que se dice esto puede ilustrarse con el siguiente:

Ejercicio: Represente el número 2.999... como cociente de dos enteros (ó racional).

Solución:

Sea

$$N = 2.\overline{9}$$

Multipliquemos por 10 de tal manera que el punto decimal se recorra al final del primer periodo:

$$10N = 29.\overline{9}$$

Como no es necesario multiplicar el número para que el punto se localice al inicio del primer periodo, procedemos inmediatamente a restar las cantidades:

$$\begin{array}{rcl} 10N & = & 29.9999... \\ \text{-}N & = & \text{-}2.9999... \\ \hline 9N & = & 27.0000... \end{array}$$

Despejando se obtiene que:

$$N = \frac{27}{9} = 3$$

Podemos afirmar entonces que:

$$2.9999... = 3$$

Suele caerse en la equivocación de pensar que la expresión decimal es tan cercana al número entero, que resulta irrelevante considerarlos como dos cantidades iguales, pero debemos notar, en base al ejercicio anterior, que ambas cantidades son iguales, lo mismo que las siguientes igualdades:

$$56.9\overline{9} = 57$$

$$12.839\overline{9} = 12.84$$

En general, cuando tengamos que escribir una expresión decimal, debemos evitar que esta tenga "colas de nueves" o si lo llegamos a hacer, debemos siempre tener presentes las igualdades anteriores.

3.4.4 Los números racionales como expresiónes decimales

En base a la discusión anterior, podríamos suponer cierta la siguiente afirmación:

"Todo número racional tiene expresión decimal periódica",

o bien que el recíproco también es cierto:

"Todo número decimal periódico es racional".

Observemos entonces que la periodicidad caracteriza a los racionales.

Resumimos todo esto en el siguiente:

TEOREMA:

"Un número es racional si y sólo si su expresión decimal es periódica"

A continuación realizaremos la demostración de este teorema, esto con la finalidad de ampliar el estudio de este tema, sin embargo no recomendamos que en un curso de bachillerato se presente a los estudiantes.

DEMOSTRACIÓN:

$\Longrightarrow$ Primero demostraremos que dado un racional en la forma $\frac{a}{b}$, su expresión decimal es necesariamente periodica.

Para poder hacerlo, dividamos a entre b utilizando el algoritmo de la división y supongamos que el cociente que resulta es de la forma:

$$D.d_1d_2d_3...$$

Esto se puede expresar como:

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\multicolumn{1}{r}{} & D & .d_1 & d_2 & d_3 & \dots & \\ \cline{2-7}
b & a & & & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & r_1 & 0 & & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & r_2 & 0 & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & r_3 & 0 & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & r_4 & 0 & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & r_5 & \dots
\end{array}
$$

en donde:

$$
\begin{gathered}
0 \leq r_1 < b, \\
0 \leq r_2 < b, \\
0 \leq r_3 < b, \\
. \\
. \\
.
\end{gathered}
$$

con

$$b > 0$$

Podemos notar que el algoritmo de la división, nos permite afirmar que todos los residuos r_i son siempre menores que b, por tanto existe un número finito de enteros no negativos que pueden cumplir con esta propiedad, por lo que deberá suceder entonces que

- Uno de sus residuos sea cero, en este caso todas las cifras decimales que siguen son cero, resultando un decimal periódico con "cola de ceros".
- O bien que ocurra que en algún momento necesariamente algún residuo se repita (a lo más en b pasos), en este caso sucederá que todas las cifras decimales que se obtengan a partir de este momento se repiten en el mismo orden, así como los residuos, lo cual hace que el cociente se convierta en un decimal periódico sin "cola de ceros".

Lo cual demuestra la primer parte de este teorema.

$\Longleftarrow$Demostraremos ahora que dado un decimal periódico, este puede expresarse en la forma $\frac{a}{b}$.

Para poder hacerlo, supongamos que el decimal periódico es de la forma:

$$q = D.d_1 d_2 d_3 ... d_m \overline{d_{m+1} d_{m+2} ... d_n}.$$

Notemos que el periódo de este número es:

$$\overline{d_{m+1} d_{m+2} ... d_n}.$$

Si multiplicamos q por 10^m, entonces el punto decimal se recorre m dígitos hacia la derecha, esto nos permitirá localizarlo al inicio del periodo

$$q \cdot 10^m = \underbrace{Dd_1d_2d_3...d_m}_{\text{parte entera}} \quad \underbrace{.\overline{d_{m+1}d_{m+2}...d_n}}_{\text{parte no entera}}$$

Si multiplicamos ahora el número q por 10^n, el punto se recorrerá n dígitos hacia la derecha, quedando al final del periodo

$$q \cdot 10^n = \underbrace{Dd_1d_2d_3...d_md_{m+1}d_{m+2...}d_n}_{\text{parte entera}} \quad \underbrace{.\overline{d_{m+1}d_{m+2}...d_n}}_{\text{parte no entera}}$$

obtengamos la diferencia de ambos números

$$\begin{array}{rlcr}
 & q \cdot 10^n & = & Dd_1d_2d_3...d_md_{m+1}d_{m+2...}d_n \quad .\overline{d_{m+1}d_{m+2}...d_n} \\
- & & & \\
 & q \cdot 10^m & = & Dd_1d_2d_3...d_m \quad .\overline{d_{m+1}d_{m+2}...d_n} \\
\hline
 & q(10^n - 10^m) & & E \qquad\qquad .00000000000
\end{array}$$

En la resta se puede observar que la parte no entera por ser la misma en ambos números da como resultado cero, si llamamos E a la diferencia de las partes enteras de los decimales:

$$E = Dd_1d_2d_3...d_md_{m+1}d_{m+2...}d_n - Dd_1d_2d_3...d_m$$

entonces se tendrá que el valor de q es:

$$q = \frac{E}{(10^n - 10^m)}$$

como

$$E, (10^n - 10^m) \in \mathbb{Z} \text{ y } (10^n - 10^m) \neq 0$$

entonces

$$q \in \mathbb{Q}$$

Que era lo que se quería probar.

3.4.5 Sumas infinitas en potencia de base 10

Para el común de las personas pensar en la posibilidad de obtener el resultado de una suma infinita podría resultar mas que imposible, esto debido a que el término infinito se asimila como algo que no tiene fin (y esto es cierto).

A continuación explicaremos como es posible obtener el resultado de algunas sumas infinitas expresadas en potencias de base 10.

Para poder explicar esto recordemos primero que los números decimales periódicos pueden expresarse como sumas de potencias de base 10.

Por ejemplo, el número periódico con "cola de ceros"

$$23.079000... = 23.079\overline{0} = 23.079$$

puede expresarse como

$$2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3} + 0 \times 10^{-4} + 0 \times 10^{-5} ...$$

o también como

$$2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 7 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$$

Utilicemos ahora ésto de manera inversa, es decir, transformemos una suma con potencias de base 10, en forma de cociente(en la forma $\frac{a}{b}$).

Por ejemplo la suma

$$9 \times 10^3 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

puede ser expresada en cocientes también como

$$\begin{aligned} &= 9 \times 1000 + 1 \times 10 + 8 \times 1 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{5}{1000} \\ &= 9000 + 10 + 8 + .4 + .005 \\ &= 9018.405 \end{aligned}$$

y en forma de cociente es

$$\frac{9018405}{1000}$$

Si observamos detenidamente este ejemplo, podemos darnos cuenta que obtener una suma finita de potencias de base 10 no debe representar ninguna dificultad y el resultado puede darse manera inmediata.

Por ejemplo, si la suma es

$$4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-4}$$

esta dará como resultado

$$\begin{aligned} &= 482.5002 \\ &= \tfrac{4825002}{10000} \end{aligned}$$

De manera análoga podemos proceder cuando tengamos una suma de potencias de base 10 periódica pero sin cola de ceros.

Por ejemplo, la suma

$$7 \times 10^0 + 5 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-5} + ...$$

puede expresarse como

$$7 + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{2}{10^5} + ...$$

en notación decimal es

$$7.05252... = 7.0\overline{52}$$

entonces si cambiamos de notación decimal a la de cociente se tiene que

$$\begin{array}{rcl} 1000N & = & 7052.525252... \\ -10N & = & -70.525252... \\ \hline 990N & = & 6982.000000... \end{array}$$

despejando se obtiene

$$N = \frac{6982}{990}$$

este procedimiento nos permite decir que

$$\begin{aligned} 7 \times 10^0 + 5 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-5} + ... \\ &= 7.05252... \\ &= 7.0\overline{52} \\ &= \tfrac{6982}{990} \end{aligned}$$

Por lo anterior, podemos afirmar que para una suma infinita en potencias de base 10, es posible encontrar su resultado en forma decimal o cociente, cuando esta suma infinita es periódica.

3.4.6 La paradoja de Zenón, ejemplo de una mala medición

Nos propusimos al inicio de esta sección entender en donde radica la confusión del razonamiento de la paradoja de Aquiles y la tortuga. Para poderlo hacer, recordemos que Aquiles cedió 1 Km. de ventaja a la tortuga y que su velocidad era 10 veces mayor a la de su contrincante. Para la explicación de lo que ocurre en esta carrera, el sentido común nos permite pensar que en algún momento Aquiles deberá alcanzar a la tortuga y ganar la competencia, pero el razonamiento que se realizo al inicio de la sección nos hacia ver que esto nunca ocurriría.

La confusión en el razonamiento radica justamente en la solución de una suma infinita de potencias de base 10.

Para poder explicar esto comparemos las distancias que recorren ambos en los diferentes tiempos señalados:

En el mismo tiempo:

La tortuga recorre (en Km.): Aquiles recorre (en Km):

$\frac{1}{10}$	1
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$	$1+\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$
.	.
.	.
.	.
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...$

Entonces Aquiles alcanzará a la tortuga después de recorrer

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...\text{ Kms.}$$

pero esta suma infinita, en notación decimal es

$$1.111... = 1.\overline{1}$$

cambiando este decimal periódico a cociente se tiene que

$$1.\overline{1} = \frac{10}{9} = 1+\frac{1}{9}$$

De lo anterior conclumos que Aquiles debe recorrer $1+\frac{1}{9}$ de kilómetros para alcanzar a la tortuga (que en su caso habrá recorrido hasta el momento $\frac{1}{9}$ de kilómetro).

Finalmente podemos concluir que:

"Aquiles sí alcanza a la tortuga"

Ejercicios

1. De acuerdo con el método de la recta auxiliar, localiza en la recta los racionales siguientes:

   a) $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $-\frac{15}{3}$

   b) $\frac{5}{7}$, $-\frac{8}{7}$

   c) $\frac{21}{7}$, $\frac{4}{2}$, $-\frac{15}{3}$

2. ¿Todos los números enteros son racionales? ¿Por qué?

3. Expresa cada uno de los siguientes racionales como la suma de potencias de base 10.

   a) 2.07

   b) 0.283

c) 45.010096

d) 3950.00003105

e) 900102.0403001

4. Da la expresión decimal(identificando el periodo) o la forma $\frac{a}{b}$, según sea el caso, para los números racionales siguientes:

a) 7.385

b) $-\frac{43}{7}$

c) $\frac{15}{17}$

d) $3.\overline{257}$

e) $\frac{11}{12}$

f) 0.14731473

g) $-0.99\overline{9}$

5. De cada una de las siguientes sumas infinitas en potencias de base 10, da la expresión decimal periódica y después exprésala en la forma $\frac{a}{b}$.

a) $N = 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^0 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^6} \cdots$

b) $N = 7 \cdot 10^1 + \frac{3}{10^1} + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{2}{10^7} + \frac{1}{10^8} \cdots$

Capítulo 4

Los números irracionales

Se sabe muy poco de la vida de Pitágoras. Parece ser que nació en Grecia en la isla de Samos y vivió ahí alrededor del año 544 a.c., cuando reinaba el tirano Polícrates. En algún momento Pitágoras no soportó la tiranía y fué a vivir en Crotona en el sur de Italia. Allí fundó una escuela filosófica (los pitagóricos) que floreció hasta 510 a.c.

Las enseñanzas de los pitagóricos se trasmitián por vía oral y todas se atribuían al venerado fundador de la escuela.

Para los pitagóricos toda la naturaleza estaba determinada por números enteros o fracciones, en lenguaje moderno podemos decir que los pitagóricos pensaban que toda la naturaleza se podía entender por medio de los números racionales.

Por otra parte, tenían el teorema de Pitágoras. Imaginemos lo que ocurrió cuando al proponer un triángulo rectángulo con catetos de longitud igual 1 y usar este teorema encontraron la hipotenusa c :

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

entonces:

$$c = \sqrt{2}$$

gran sorpresa se llevaron al notar que este número contradice la doctrina básica de la escuela, ya que no se puede construir en forma de fracción a partir de los números enteros, por tanto habían descubierto un número que no era racional, es decir habían encontrado los números irracionales.

Se cuenta que los pitagóricos trataron de guardar el secreto de tan grave asunto y que Hipasus, uno de los miembros de la escuela, murió, al ser arrojado al mar, por divulgarlo.

4.1 Definición de número irracional

Los números irracionales, son los números que no son racionales.

La anterior definición nos permite afirmar que los números irracionales no se pueden expresar en la forma $\frac{a}{b}$, o bien, si se expresan en forma decimal no serán periódicos.

Dicho de otra manera, los irracionales son los números que le faltan a los racionales para completar el total de los números. Es por eso que se suele llamar a los irracionales como el complemento de los racionales y por tal motivo se denotan como $\mathbb{Q}$'.

Algunos ejemplos de números irracionales son:

$$\sqrt{2}, ^3\sqrt{5}, \text{ las raíces cuadradas de números primos}, \pi, e, \text{ etc.}$$

Un conjunto notable de los números irracionales son las raíces cuadradas de los números primos. Se presenta a continuación la demostración de este hecho con la finalidad de que el profesor en caso de considerar necesario se la presente a su vez a los estudiantes como una muestra del rigor que debe seguir la demostración de una afirmación general como la anterior.

TEOREMA:

"Si p es primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional"

DEMOSTRACION:

Realizaremos esta demostración por el método de *reducción al absurdo* esta consiste en suponer lo contrario de lo que queremos demostrar y luego por medio de la lógica buscaremos llegar a una afirmación absurda, lo que muestra que nuestra suposición es insostenible y por tanto que la afirmación original es correcta.

Supongamos que $\sqrt{p}$ no es irracional, es decir supongamos que es racional. Esto nos permite escribir el número como:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0,$$

si elevamos al cuadrado se tiene que:

$$p = \frac{a^2}{b^2} \qquad y \qquad b^2 p = a^2$$

esta igualdad nos permite afirmar que en la descomposición de primos del número a^2, deberá aparecer un factor p, por lo cual la descomposición será de la forma:

$$b^2 p = a^2 = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot q_3^{\alpha_3} \ldots \cdot q_n^{\alpha_n} \cdot p^{\alpha_r}$$

debe notarse que todos los exponentes de la descomposición en primos, incluso α_r son pares, esto por que a^2 es un cuadrado perfecto(debe recordarse que esto se demostró en el ejercicio 7 del capítulo de enteros), por tanto $\alpha_r \geq 2$.

Ahora, si la igualdad anterior la dividimos por p, entonces se tienen que:

$$b^2 = \frac{a^2}{p} = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot q_3^{\alpha_3} \ldots \cdot q_n^{\alpha_n} \cdot p^{\alpha_r - 1}$$

entonces $\alpha_r - 1 \geq 1$ y además es un número impar. Esto es una contradicción, puesto que $p^{\alpha_r - 1}$ es uno de los factores de la descomposición en primos de b^2 y por ser este número un cuadrado perfecto, no puede tener ningún factor con exponente impar. Dado este absurdo podemos afirmar que $\sqrt{p}$ es irracional.

A continuación nos proponemos explicar como se pueden representar algunos irracionales en forma geométrica en la recta de reales, previniendo que no todos son construibles geometricamente con las herramientas que hemos estudiado.

4.2 Representación geométrica en la recta.

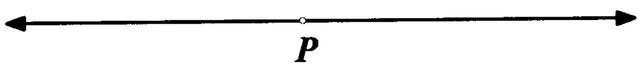
En el capítulo anterior nos dimos cuenta que dado cualquier número racional de la forma $\frac{a}{b}$, siempre es posible encontrar con regla y compás un valor unitario $\frac{1}{b}$, que copiado $\mid a \mid$ veces en la dirección correcta permita medir al número racional dado.Sin embargo no podemos decir lo mismo para los irracionales, en primer lugar por que no se pueden expresar en la forma $\frac{a}{b}$ y por que dado un irracional no puede decirse que se pueda encontrar una unidad que los mida.

4.2.1 Trazo de una recta perpendicular

Las construcciones que usaremos requieren el conocimiento del trazo con regla y compás de una recta que pase por un punto en forma perpendicular a una recta dada.

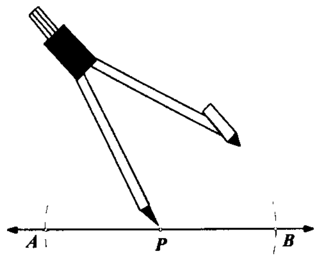
A continuación se sugiere una forma de hacerlo:

1. Sea P un punto cualquiera de una recta, por el cual se pretende pasar una perpendicular.

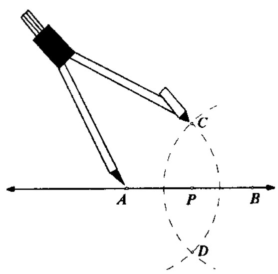


2. Haciendo centro en P y con una abertura de compás cualquiera, se trazan arcos a

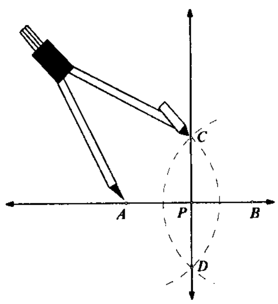
la derecha e izquierda de P, cruzando a la recta en los puntos A y B.



3. Haciendo centro en los puntos A y B respectivamente y con una abertura de compás mayor a la mitad del segmento AB, se trazan arcos por arriba y por debajo de la recta, de tal manera que los arcos se crucen en los puntos C y D.

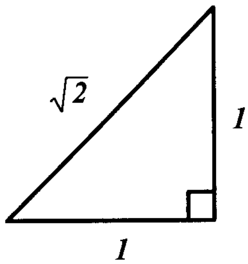


4. Uniendo los puntos en donde se cruzan los arcos, se tiene la perpendicular que pasa por P.



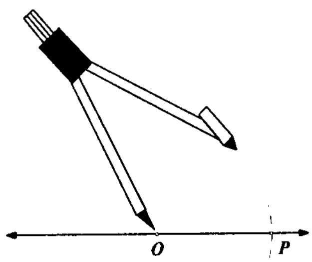
4.2.2 $\sqrt{2}$ y su representación geométrica

Uno de los números irracionales es $\sqrt{2}$ (dado que no se puede expresar como cociente), para representar este número en la recta de reales, recordemos que dado un triángulo rectángulo con catetos de longitud unitaria, por el teorema de Pitágoras se obtiene la longitud de la hipotenusa con un valor de $\sqrt{2}$.



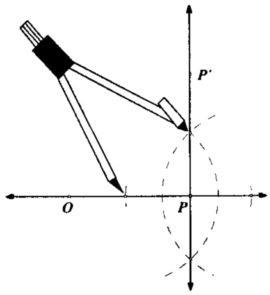
En relación al anterior triángulo proponemos para la construcción de $\sqrt{2}$ en la recta de reales el siguiente procedimiento:

1. Se traza una recta de reales, se localiza el punto O y con una abertura de compás cualquiera se identifica el punto P, para el cual suponemos que $\overrightarrow{OP} = 1$.

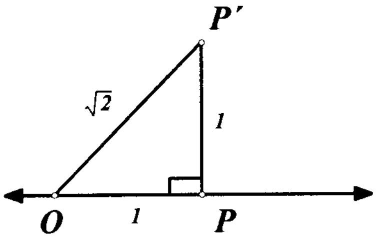


2. Se traza ahora una perpendicular en P y se localiza en esta el punto P', de tal

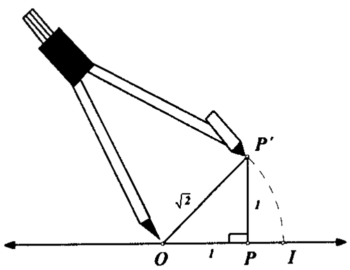
manera que $\overline{PP'}= 1$.



3. Se traza el segmento $\overline{OP'}$, el cual por el teorema de Pitágoras tendrá una longitud de $\sqrt{2}$.



4. Con el compás se copia el segmento $\overline{OP'} = \sqrt{2}$ en la recta de reales, esto se logra haciendo centro en O y cruzando a la recta de reales en un punto al cual llamaremo I.



Se puede notar que el punto I, asocia en la recta de reales al irracional $\sqrt{2}$.

A partir de esta medida en la recta de reales se podrán localizar por copia consecutiva a los puntos que asocian a los números irracionales que son múltiplos enteros de $\sqrt{2}$.

$$\{..., -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}...\}$$

4.2.3 Números irracionales construibles

Los números irracionales que son geométricamente construibles son aquellos que se obtienen de algún procedimiento con regla y compás, ejemplo de estos números son las raíces cuadradas de números racionales positivos y las raíces cuadradas de estos.

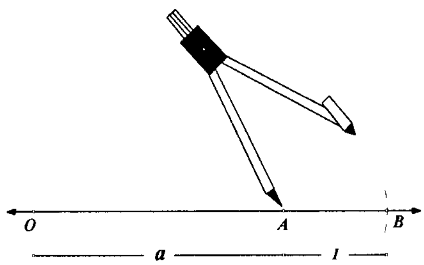
Ejemplos de números irracionales construibles son

$$\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{5}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}, \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{2.0\overline{35}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\tfrac{9}{5}}}}}} - \sqrt{\sqrt{12.\overline{36}}}, etc$$

Para poder trazar la raíz cuadrada de un número racional positivo que permita contruir geométricamente a este tipo de irracionales se sugiere el siguiente procedimiento:

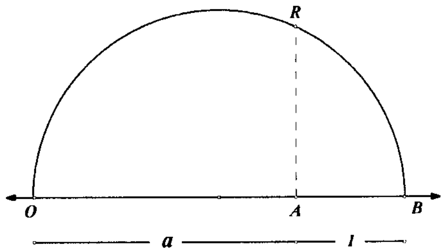
1. Sea a un número racional positivo; localicemos en la recta de reales con el compás un segmento $\overline{OA} = a$.

2. Con una abertura de compás igual a la longitud de 1 y haciendo centro en A, se traza el segmento $\overline{AB} = 1$.



3. Se traza una círcunferencia cuyo diámetro sea OB y se levanta una perpendicular al diámetro en el punto A, de tal manera que la recta perpendicular y la circunferencia

se crucen en el punto R.



4. Se tiene entonces que $\overline{AR} = \sqrt{a}$. Podemos entonces copiar este segmento en la recta de reales haciendo centro en O para localizar el punto de la recta que asocia el número $\sqrt{a}$.

Se puede percibir que repetir el mismo procedimiento para $\sqrt{a}$, permite localizar en la recta de reales a $\sqrt{\sqrt{a}}$, así sucesivamente para cualquier número de la forma $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{a}}}}$.

4.2.4 Números irracionales no construibles

Existen tres problemas clásicos de construcciones geométricas sin solución de la antigua matemática griega, estos son:

1. La cuadratura del círculo,

2. La duplicación del cubo,

3. La trisección del ángulo.

Estos problemas trataron de resolverse durante más de 2000 años y fué hasta el siglo XIX cuando se logró probar definitivamente la imposibilidad de resolverlos con las herramientas geométricas(regla y compás).

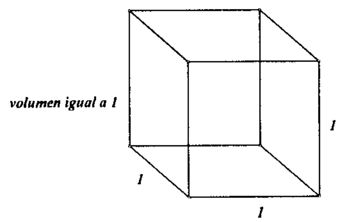
La imposibilidad de estas construcciones geométricas, nos permitirán mostrar que no es posible construir tampoco algunos números iracionales.

4.2.5 La imposibilidad de construir con regla y compás la raíz cubica de 2

Se dice que Pericles murió a causa de una terrible peste que azotó a Grecia y que mermó la población en grandes proporciones. Debido a esta calamidad se envió a una comisión de personas a la ciudad de Delfos a consultar con el oráculo de Apolo sobre como terminar con la peste, a lo que el oráculo contestó que el altar de Apolo, que era de forma cúbica, debería ser duplicado. La solución que dieron los atenienses, fué simplemente duplicar la longuitud de las aristas, por lo que octuplicaron el cubo. Como no duplicaron el cubo de la manera en que el oráculo se los pidió, la peste continuó haciendo estragos en la población. Esta leyenda fué la que dió origen a este famoso problema que no es posible resolver con una construcción geométrica.

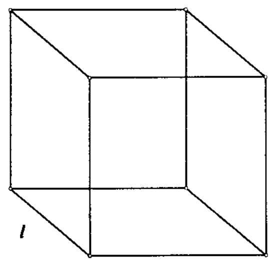
Del problema anterior veamos un caso particular que nos permita ilustrar la imposibilidad de trazar con regla y compás, una longitud de segmento igual a la raíz cúbica de dos.

Supongamos que el cubo dado, tienen lados de longitud 1 y, por tanto, un volumen de 1.



Si se desea duplicar el volumen (lo cual no es posible hacer con regla y compás), entonces el cubo buscado debe tener un volumen de 2.

Pensemos ahora que el valor de cada lado de este nuevo cubo es l.



Dado que el volumen es 2 y el lado l , entonces se tiene que:

$$l \times l \times l = 2$$

por tanto

$$l^3 = 2$$

finalmente

$$l = \sqrt[3]{2}$$

La imposibilidad de duplicar el cubo de este ejemplo, radica justamente, en que no es posible construir geométricamente cada uno de sus lados, es decir, no es posible construir la raíz cúbica de 2.

Este es sólo un ejemplo de un número irracional que no se puede construir, otros pueden ser los números:

$$\pi, \sqrt{\pi}, e, \sqrt[3]{7}, \text{ etc.}$$

4.3 Construyendo irracionales

Una de las formas de caracterizar a los números racionales se basa en la periodicidad de su expresión decimal. Por el contrario, y de acuerdo a nuestra definición, los números irracionales deberán distinguirse por su no periodicidad, es decir, por la extravagancia en la serie de números de su expresión decimal. Pero, ¿cómo distinguir en la expresión decimal de un número la existencia (o ausencia) de un periodo de números?

Al identificar números decimales no periódicos debemos tener cuidado de no cometer errores de apreciación, ya que existen números que tienen periodos tan grandes que observar los primeros dígitos no garantiza siempre identificarlos como periódicos.

Por ejemplo, si en la presentación decimal de $\frac{1}{7}$ nos fijamos sólo en los primeros 6 dígitos después del punto decimal, es decir

$$0.142857...$$

al no identificar periodo, podríamos reconocerlo erróneamente como no periódico, sin embargo si consideramos 6 dígitos más notaremos que si es periódico, ya que:

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857... = 0.\overline{142857}$$

Por lo anterior, no podríamos estar seguros de que un número como

$$0.342657239062768...$$

sea no periódico, ya que podría ser un número que posiblemente pudiera tener un periodo de los 15 dígitos señalados o incluso más.

Una manera de asegurarnos que una expresión decimal es no periódica, podría ser la de diseñar a la serie de números en la parte decimal que la componen, precisamente con este fin.

Por ejemplo, consideremos el número

$$N = 0.07007000700007000007...$$

Aquí, los puntos suspensivos indican que el patrón con que hemos iniciado continua indefinidamente (otra vez un proceso infinito manejado de manera parcial y finita).

Lo que se quiere decir es que, en los puntos suspensivos, siguen seis ceros, después un siete, luego siete ceros, después un siete, etc.

Pensando un poco en este número, se nota que no tiene periodo alguno.

Con este procedimiento en mente, podemos modificar un poco la definición y conseguir cuantos números irracionales queramos, por ejemplo (con los mismos dígitos):

$$A = 0.07000700000700000007...$$

$$B = 0.07000070000000700000000007...$$

$$C = 0.07000007000000000700000000000007...$$

En el número A observemos los ceros. Primero un cero, un siete, tres ceros, un siete, cinco ceros, un siete, etc. Es decir, los ceros van aumentando de dos en dos. Para el número B, se tiene que el aumento de ceros es de tres en tres y en C es de cuatro en cuatro.

De igual forma, si aumentamos ceros de cinco en cinco, de seis en seis, de siete en siete, etc. construimos una infinidad de números irracionales y solo empleamos dos dígitos. Por supuesto, al variar estos dígitos se obtienen más irracionales.

Podemos inclusive sustituir el siete (digamos en N) por un bloque de números, por ejemplo 333:

$$D = 0.03330033300033300003330000333...$$

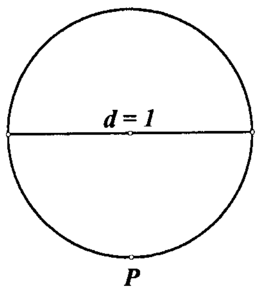
4.3.1 El número pi

El número π, es la razón de la longitud de una circunferencia a la longitud de su diámetro.

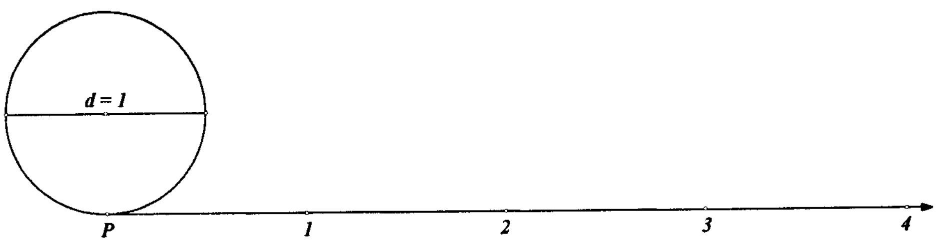
Es decir

$$\pi = \frac{p}{d}$$

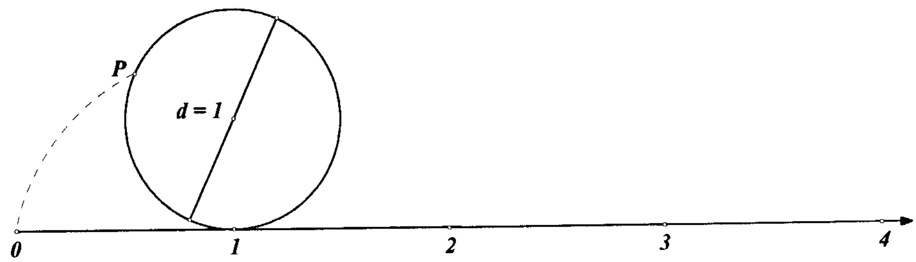
Para poder entender un poco más de quién es pi, imaginémos una circunferencia cuyo diámetro tenga una longitud de 1 y localicemos en ella un punto P cualquiera.



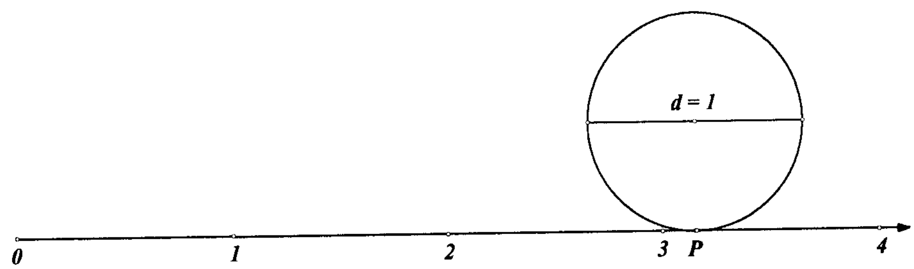
A continuación tracemos una recta de reales e instalemos la circunferencia en ella, de tal manera que P coincida en el origen. Acontinuación con la longitud unitaria localicemos los puntos que asocian a los enteros $0, 1, 2, 3$ y 4.



Pensemos ahora que podemos hacer girar la circunferencia (esto no es posible con regla y compás) sobre la recta de reales:



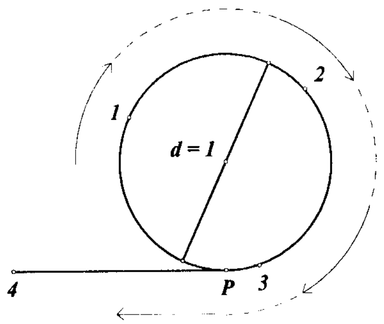
Cuando el punto P se instala nuevamente en la recta de reales, quedara localizado entre los puntos que asocian a los números 3 y 4.



El punto P estará localizado en la recta de reales a una longitud de π del origen.

Dicho de otra manera, el punto P tuvo que recorrer π veces el diámetro (3 veces y un poco más) sobre la recta de reales para volver a quedar instalado sobre la recta.

Otra forma de ver esto también podría ser "enrollar" la recta de reales en la circunferencia, de tal manera que se observe que la medida del diámetro que es unitario completara 3 unidades completas y un poco más (la medida del diámetro puede ser instalado π veces en la circunferencia).



Debe señalarse que esta razón así definida (π) es una constante universal y que es la misma para todas las circunferencias, independientemente de su tamaño.

Es en el año de 1761, cuando el matemático alemán Lambert demostró, por primera vez que π es un número irracional, aunque debemos decir que durante muchos años calcular su valor con mayor presición fué uno de los pasatiempos favoritos de los matemáticos.

A continuación damos una aproximación del valor de π :

$\pi = 3.$ 14159 26535 89793 23846 26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825
34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559
64462 29489 54930 38196 44288 10975
66593 34461 28475 64823 37867 83165
27120 19091 45648 56692 34603 48610
45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920
96282 92540 91715 36436 78925 90360
01133 05305 48820 46652 13841 46951
94151 16094 33057 27036 57595 91953
09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724
89122 79381 83011 94912 98336 73362
44065 66430 86021 39501 60924 48077
23094 36285 53096 62027 55693 97986
95022 24749 96206 07497 03041 23668
86199 51100 89202 38377 02131 41594
11902 98858 25446 81639 79990 46597
00081 70029 63123 77381 34208 41307
91451 18398 15709 85...

4.4 Los irracionales y los segmentos inconmensurables

Ahora, relacionaremos el aspecto algebraico de los números irracionales visto en las secciones pasadas con la idea geométrica de la inconmensurabilidad.

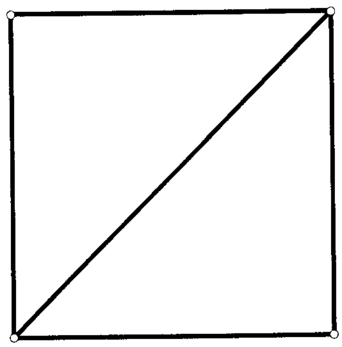
4.4.1 Segmentos conmensurables

Dos segmentos de recta son conmensurables si existe una unidad (tercer segmento) que quepa un número entero n de veces en el primer segmento y un número entero m de veces en el segundo.

Dados los dos segmento en la parte izquierda de la figura anterior, podemos ver que el segmento mas pequeño en la parte derecha cabe tres veces en el primero y cinco veces en el segundo. De esta forma decimos que dichos segmentos son conmensurables.

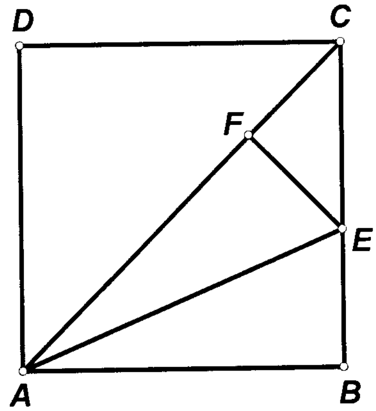
Notemos en este momento que para afirmar que dos segmentos no son conmensurables (y que a partir de aqui les llamaremos inconmensurables) debemos estar seguros que ninguna unidad mide un número entero de veces a dichos segmentos.

Un ejemplo de la situación anterior se dá al considerar el lado de un cuadrado y la diagonal:



El argumento para observar que es imposible la existencia de un segmento unidad que pueda caber un número entero de veces en el lado y la diagonal involucra un proceso que se repite indefinidamente.

Supongamos que existe una unidad que cabe un número entero de veces en el lado del cuadrado y otro número entero de veces en la diagonal. A partir de aqui, diremos simplemente que la unidad *mide* al lado y *mide* a la diagonal. De ser así, consideremos el siguiente esquema:



Dado el lado AB y la diagonal AC, construyase el punto F sobre AC tal que

$$AF = AB$$

Sea E el punto en CB tal que EF es perpendicular a AC. Observemos ahora que los triángulos EFA y EBA son congruentes, por ser ambos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa (AE) y un cateto igual ($AF = AB$).

Esto nos permite decir que:

$$EF = EB.$$

Claramente, $\measuredangle ECF = 45°$ por ser AC la diagonal de un cuadrado y como el ángulo en F es recto y la suma de los ángulos interiores del triángulo CFE debe de ser $180°$, se tiene que $\measuredangle FEC = 45°$. Todo esto dice que el triángulo CFE es isósceles y por lo tanto:

$$CF = EF$$

En conclusión:

$$CF = EB.$$

Ahora, como la unidad (que está fiija) mide a AC y a $AF = AB$, debe de suceder que mide tambien a la resta de estos segmentos, es decir, mide a $AC - AF = CF$.

Análogamente, como la unidad mide a BC (lado del cuadrado) y a $CF = EB$, mide tambien a la resta $BC - EB = EC$.

Resumiendo, tenemos que la unidad mide a CF y a EC.

Pero si observamos nuestra situación, tenemos que EC es la diagonal del cuadrado con lados EF y CF, que es un cuadrado más pequeño que el original y al que también mide la unidad con la que empezamos.

Repitiendo todo el argumento anterior sobre este nuevo cuadrado llegaremos a un tercer cuadrado (mucho más chico) y al que nuestra unidad deberá medir su lado y su diagonal.

Finalmente notemos que si se repite este argumento indefinidamente, encontramos segmentos (lados y diagonales de cuadrado) cada vez mas chicos y a los que nuestra unidad deberá medir, lo cúal no es posible por que eventualmente dichos segmentos serán mas pequeños que la misma unidad.

De esta manera, nuestra suposición inicial acerca de la existencia de una unidad con las características descritas no puede sostenerse, demostrándose así la inconmensurabilidad de el lado de un cuadrado y su diagonal.

Pero, ¿qué tiene que ver esto con los irracionales?

Para responder a esta pregunta, primero notemos que por el Teorema de Pitágoras, si llamamos a a la longitud del lado l del cuadrado, la longitud de la diagonal d será $\sqrt[2]{2}a$. El hecho de que estos dos segmentos sean inconmensurables nos dice que no existe una unidad u ni enteros n y m tales que

$$l = nu$$

$$d = mu$$

Esto en longitudes, se escribe

$$a = n$$

$$\sqrt[2]{2}a = m$$

Al dividir la segunda ecuación entre la primera se tiene

$$\frac{\sqrt[2]{2}a}{a} = \sqrt[2]{2} = \frac{m}{n}$$

lo que afirma que $\sqrt[2]{2}$ es irracional.

Ejercicios

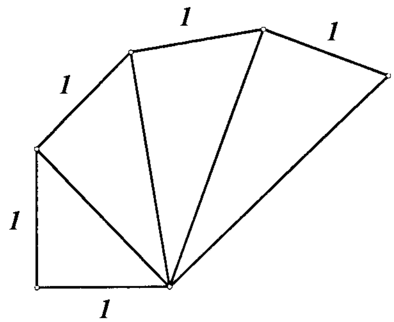
1. A partir del metodo de construcción de los irracionales de la forma $\sqrt{a}$, construye:

   a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\sqrt{2}}$

2. Hay una interesante manera de colocar triángulos rectángulos, uno a continuación de otro. Si consideramos el triángulo con catetos de longitud 1, entonces la hipotenusa tiene la longitud de $\sqrt{2}$. Ahora podemos considerar un triángulo rectángulo con un cateto de longitud 1 y el otro de longitud $\sqrt{2}$ y colocar este último cateto sobre la hipotenusa del primer triángulo. La hipotenusa de este segundo triángulo rectángulo medirá $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1} = \sqrt{3}$. A continuación construimos un triángulo con catetos de longitudes 1 y $\sqrt{3}$ e hipotenusa $\sqrt{4}$ y se coloca junto al segundo triángulo. Si continuamos con el mismo proceso se obtendra una espiral como la siguiente



Construye con regla y compás esta espiral pitagórica hasta llegar a $\sqrt{6}$

3. Para cada par de racionales, menciona un irracional que se encuentre en medio de ambos.

a) $\frac{1}{3} = 0.33\overline{3}$ y $\frac{3}{10} = 0.300\overline{0}$

b) $\frac{1}{5} = 0.2$ y $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

c) $\frac{2}{47} = 0.\overline{0425531914}$ y $\frac{1}{25} = 0.04$

e) $0.0003395\overline{95}$ y $0.0003394\overline{94}$

f) $31.310049025\overline{25}$ y $31.310049026\overline{26}$

4. Responde verdadero o falso según corresponda a cada una de las siguientes afirmaciones.

   Todos los decimales periódicos son racionales.

   Todos los irracionales son reales

   El cero es entero, racional y real

   El -5 es entero, natural y real

   Todos los racionales junto con los irracionales forman los reales

   Todos los reales son construibles geométricamente.

Capítulo 5

Los números reales

El conjunto de los números reales forma un sistema numérico que constituye uno de los grandes logros del pensamiento humano y por consiguiente uno de los patrimonios más importantes, esto debido a los grandes siglos de evaluación conceptual que llevaron a él y que ahora que se encuentra maduro, nos permite recoger los frutos de este esfuerzo en cada una de sus aplicaciones.

Nos proponemos ahora en este último capítulo distinguir quienes son los números reales y algunas de las propiedades que los identifican.

5.1 Los reales como la unión de racionales e irracionales

El conjunto de los números reales es la unión de los números racionales y de los irracionales.

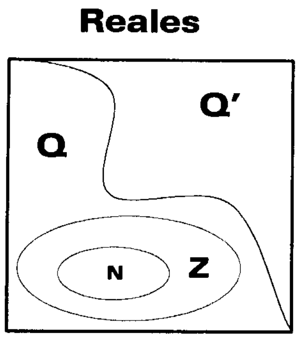
En lenguaje de conjuntos se dice que:

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

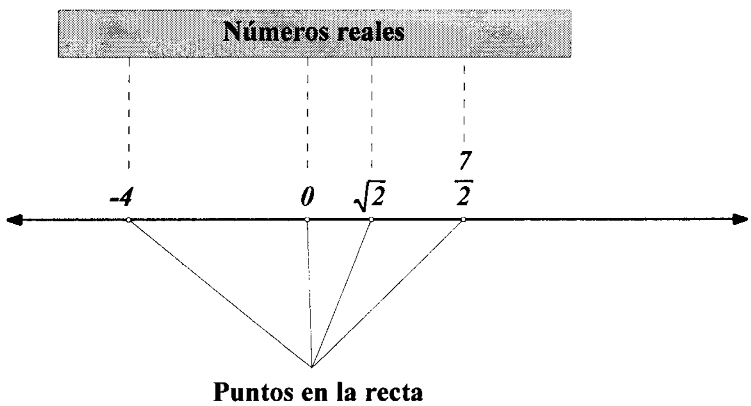
Lo anterior nos permite afirmar que:

$$\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R} \qquad \text{y que} \qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Una manera sencilla de representar las anteriores relaciones puede ser a partir del siguiente diagrama:



Sin embargo, las relaciones anteriores, que son importantes, no deben confundir una de las ideas fundamentales del presente trabajo que consiste en destacar que cada punto de la recta de reales asocia un único número real y que para cada uno de estos puntos le corresponde uno y sólo un número real. Esto lo podemos ilustrar con el siguiente diagrama:



"Para cada punto en la recta le corresponde uno y sólo un número real"

5.2 Los números reales como decimales

En términos de su expresión decimal , llamaremos número real a toda aquella expresión decimal, tanto periódica (racional), como no periódica (irracional) que no términa en cola de nueves.

Esta definición no considera como números reales a expresiones decimales de la forma:

$$35.999999...$$

$$2.9999999...$$

ya que tienen "colas" de nueves.

Sin embargo, es necesario recordar que una igualdad como la siguiente es verdadera:

$$35.999999... = 36$$

Esto en base a la discusión que se realizó en el estudio de los números racionales.

5.3 Propiedades de los números reales

En el desarrollo de un sistema matemático, una de las bases que siempre se establece, es el conjunto de propiedades que el sistema cumple. Estas propiedades son algo así como el reglamento de funcionamiento del sistema, en donde se establece de una manera clara que es lo que se puede hacer y los que no está permitido realizar. Nos proponemos a continuación estudiar las principales propiedades que tienen los números reales, esto con la finalidad de iniciar formalmente su uso de una manera eficiente.

5.3.1 Las propiedades de campo

Se dice que el conjunto de los números reales forma un "campo", esto es debido a que la operación suma y producto cumple con las siguientes propiedades:

Propiedades de la adición

1. **Cerradura:** Si a y b son elementos de $\mathbb{R}$, entonces la suma también es elemento de $\mathbb{R}$, y a los números a y b les llamamos sumandos.

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{R}$$

2. **Asociatividad:** Si a, b y c son números reales, es igual que a la suma de a y b se le sume el valor c, a que el valor a se le sume a la suma de b y c.

$$a, b \text{ y } c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$$

3. **Elemento identidad:** La suma de cualquier elemento de $\mathbb{R}$ y el cero es el mismo elemento, por lo que al número cero le llamamos el elemento **identidad para la suma**.

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a+0 = 0+a = a$$

4. **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe otro elemento de $\mathbb{R}$, denotado por $(-a)$, llamado el inverso para la suma, de modo que la suma de los dos es 0.

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a+(-a) = (-a)+a = 0$$

5. **Conmutatividad:** Si a y b son números reales, el orden en que se sumen no afecta el resultado.

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b = b + a$$

Propiedades de la multiplicación

1. **Cerradura:** Si a y b son elementos de $\mathbb{R}$, entonces el producto también es elemento de $\mathbb{R}$, y a los números a y b les llamamos factores, el símbolo que emplearemos para la multiplicación será un punto a media altura, con objeto de que no se confunda con la letra x.

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \cdot b) \in \mathbb{R}$$

2. **Asociatividad:** Si a, b y c son números reales, es igual que el producto de a con b se multiplique por c, a que el valor de a se multiplique por el producto de b con c.

$$a, b \text{ y } c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. **Elemento identidad:** El producto de cualquier elemento de $\mathbb{R}$ y el uno es el mismo elemento, entonces el número uno es el elemento **identidad** para la multiplicación.

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

4. **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe otro elemento de $\mathbb{R}$, denotado por $(\frac{1}{a})$, llamado el inverso de la multiplicación de modo que el producto de los dos es 1.

$$a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \Rightarrow a \cdot (\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}) \cdot a = 1$$

5. **Conmutatividad:** Si a y b son números reales, el orden en que se multipliquen no afecta el producto.

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$$

Propiedad distributiva (del producto respecto a la suma)

1. **A la izquierda:**

$$\text{Sean } a, b \text{ y } c \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

2. **A la derecha:**

$$\text{Sean } a, b \text{ y } c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Para las siguientes expresiones a, b y $c \in \mathbb{R}$. Estas expresiones ilustran las propiedades de campo enunciadas.

Expresión	**Propiedad que ilustra**
$(-9) \cdot 1 = -9$	Elemento identidad para la multiplicación
$(2+5) \in \mathbb{R}$	Cerradura para la suma
$2 \cdot (a+b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b$	Distributiva a la izquierda
$-(m+8) + (m+8)$	Elemento inverso para la suma
$3 \cdot (2 \cdot r) = (3 \cdot 2) \cdot r$	Asociatividad para la multiplicación
$7b + (a+3b) = (a+3b) + 7b$	Conmutatividad para la suma
$(\frac{1}{\pi}) \cdot \pi = 1$	Elemento inverso para la multiplicación
$(r+6) \cdot 5 = r \cdot 5 + 6 \cdot 5$	Distributiva a la derecha
$(p+2q) + 3q = p + (2q+3q)$	Asociatividad para la suma
$(13 \cdot t) \in \mathbb{R}$	Cerradura para la multiplicación
$2\pi + 0 = 2\pi$	Elemento identidad para la suma
$a \cdot (2 \cdot a) = (2 \cdot a) \cdot a$	Conmutatividad para la multiplicación

5.3.2 Proposiciones que se demuestran

En matemáticas, a una proposición cuya verdad necesita ser demostrada se le llama teorema. Demostrar consiste en encadenar de manera lógica conocimientos que se suponen verdaderos, de manera tal que se haga evidente la verdad enunciada en el teorema. La redacción de demostraciones constituye uno de los trabajos fundamentales en el quehacer matemático, es por eso conveniente familiarizar lo más pronto posible a los estudiantes en esta tarea que no es nada fácil. Nos proponemos por tanto, con ayuda de las propiedades de los números reales ilustrar algunos teoremas sencillos con el objeto de introducir la idea de demostración y aprovecharlo a la vez para reforzar cada una de las propiedades de campo señaladas, todo esto será útil para prepararnos a abordar los conocimientos algebraicos que vendrán después.

Ejemplos:

Teorema:

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R}, \text{ entonces } (2a) \cdot (3b) = 6ab$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(2a) \cdot (3b) &= 2 \cdot (a \cdot 3) \cdot b && \text{Asociativa para la multiplicación} \\
&= 2 \cdot (3 \cdot a) \cdot b && \text{Conmutativa para la multiplicación} \\
&= (2 \cdot 3) \cdot (a \cdot b) && \text{Asociativa para la multiplicación} \\
&= 6ab
\end{aligned}$$

Teorema:

$$\text{Si } a, b, m \text{ y } n \in \mathbb{R}, \text{ entonces } (m+n)+(a+b)=(a+m)+(n+b)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(m+n)+(a+b) &= [(m+n)+a]+b && \text{Asociativa para la suma}\\
&= [a+(m+n)]+b && \text{Conmutativa para la suma}\\
&= [(a+m)+n]+b && \text{Asociativa para la suma}\\
&= (a+m)+(n+b) && \text{Asociativa para la suma}
\end{aligned}$$

Teorema:

$$\text{Si } a, b, c \text{ y } d \in \mathbb{R}, \text{ entonces } d[(a+b)+c]=d\cdot a+(d\cdot b+d\cdot c)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
d[(a+b)+c] &= d\cdot(a+b)+d\cdot c && \text{Distributiva por la izquierda}\\
&= (d\cdot a+d\cdot b)+d\cdot c && \text{Distributiva por la izquierda}\\
&= d\cdot a+(d\cdot b+d\cdot c) && \text{Asociativa para la suma}
\end{aligned}$$

5.3.3 Propiedades de la igualdad

En matemáticas cuando utilizamos el simbolo = (igual que), quemos significar que lo que se encuentra en ambos lados del simbolo representa lo mismo (que ambos son iguales). Las siguientes propiedades establecen las relaciones de igualdad entre los números reales, estas pueden parecer triviales, pero son importantes en el desarrollo lógico de este sistema.

1. **Reflexiva:**Todo número es igual a sí mismo

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a = a$$

2. **Simétrica:** Si un número es igual a otro, entonces éste es igual al primero

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a = b \Rightarrow\; b = a$$

3. **Transitiva:** Si un primer número es igual a un segundo, y éste igual a un tercero, entonces el primero, es igual al tercero.

$$\text{Si } a, b, c \in \mathbb{R},\ a = b \text{ y } b = c \Rightarrow a = c$$

4. **Sustitución:** Si un número es igual a otro, en cualquier expresión en que aparezca el primero puede reemplazarse por el segundo sin alterar el valor de la expresión

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a = b \Rightarrow$ a puede ser sustituido por b o viceversa.

5. **Aditiva:**

Si a, b, c y d son cuatro números reales y $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$

6. **Multiplicativa:**

Si a, b, c y d son cuatro números reales y $a = b$ y $c = d$, entonces $a \cdot c = b \cdot d$

Para las siguientes expresiones a, b y $c \in \mathbb{R}$. Presentamos estas expresiones nuevamente para ilustrar las propiedades de la igualdad enunciadas

Expresión	**Propiedad que ilustra**
Si $a = 5$ y $b = c$, entonces $a + b = 5 + c$	Aditiva
Si $a + b = c$ y $c = 6$, entonces $a + b = 6$	Sustitución
Si $a = 8$ y $8 = c$, entonces $a = c$	Transitiva
Si $2a + b + 3 = c$, entonces $c = 2a + b + 3$	Simétrica
Si $a = b$ y $3b + 1 = c$, entonces $a \cdot (3b + 1) = b \cdot c$	Multiplicativa
$0 = 0$	Reflexiva

Demostraciones:

Teorema: (Ley de cancelación para la suma)

Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x + z = y + z$ entonces $x = y$

Demostración:

$x + z + (-z) = y + z + (-z)$ Aditiva de la igualdad

$x + [z + (-z)] = y + [z + (-z)]$ Asociativa para la suma

$x + 0 = y + 0$ Sustitución

$x = y$ Existencia de idéntico para la suma

Teorema: (Ley de cancelación para el producto)

Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x \cdot z = y \cdot z$ entonces $x = y$

Demostración:

$x \cdot z \cdot (\frac{1}{z}) = y \cdot z \cdot (\frac{1}{z})$ Multiplicativa de la igualdad

$x \cdot [z \cdot (\frac{1}{z})] = y \cdot [z \cdot (\frac{1}{z})]$ Asociativa para la multiplicación

$x \cdot 1 = y \cdot 1$ Sustitución

$x = y$ Existencia de idéntico para el producto

Teorema:

$$\text{Si } x, y \in \mathbb{R} \text{ y } x = y \text{ entonces } -x = -y$$

Demostración:

$x + (-x)$	$=$	$y + (-x)$	Aditiva de la igualdad
0	$=$	$y + (-x)$	Sustitución
$(-y) + 0$	$=$	$(-y) + y + (-x)$	Aditiva de la igualdad
$(-y) + 0$	$=$	$[(-y) + y] + (-x)$	Asociativa para la suma
$(-y) + 0$	$=$	$0 + (-x)$	Sustitución
$-y$	$=$	$-x$	Existencia de idéntico para la suma
$-x$	$=$	$-y$	Simétrica de la igualdad

Teorema:

$$\text{Si } x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ y \neq 0 \text{ y } x = y \text{ entonces } \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$

Demostración:

$$\begin{array}{rcll}
x \cdot (\frac{1}{x}) & = & y \cdot (\frac{1}{x}) & \text{Multiplicativa de la igualdad} \\
1 & = & y \cdot (\frac{1}{x}) & \text{Sustitución} \\
(\frac{1}{y}) \cdot 1 & = & (\frac{1}{y}) \cdot [y \cdot (\frac{1}{x})] & \text{Mutiplicativa de la igualdad} \\
(\frac{1}{y}) \cdot 1 & = & [(\frac{1}{y}) \cdot y] \cdot (\frac{1}{x}) & \text{Asociativa para la multiplicación} \\
(\frac{1}{y}) + 1 & = & 1 \cdot (\frac{1}{x}) & \text{Sustitución} \\
\frac{1}{y} & = & \frac{1}{x} & \text{Existencia de idéntico para la multiplicación} \\
\frac{1}{x} & = & \frac{1}{y} & \text{Simétrica de la igualdad}
\end{array}$$

5.3.4 Solución de ecuaciones

Iniciando nuestro estudio de álgebra apoyado en las propiedades de los números reales estudiadas, diremos que una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Resolver una ecuación es encontrar los valores numéricos que al sustituirlos en el lugar de las variables hacen cierta la igualdad. Para poder realizar esto se requiere dejar la variable sola de un lado de la ecuación, es decir, despejar la variable. Suele ocurrir que un estudiante tenga dificultades en el procedimiento de despejar una variable, muchas de las veces los errores ocurren por el uso inadecuado de las propiedades de los números reales. Presentamos a continuación una serie de ejemplos que ilustran la forma en que se puede ir acostumbrando a un estudiante a usar adecuadamente estas propiedades en la solución de ecuaciones lineales con una variable.

Ejemplos:

Dada la igualdad $x + 7 = 9$, encontrar el valor de x, justificando cada uno de los pasos del procedimiento.

$x + 7 + (-7)$	$=$	$9 + (-7)$	Aditiva de la igualdad
$x + 7 + (-7)$	$=$	$(2 + 7) + (-7)$	Sustitución de la igualdad
$x + [7 + (-7)]$	$=$	$2 + [7 + (-7)]$	Asociativa para la suma
$x + 0$	$=$	$2 + 0$	Sustitución
x	$=$	2	Existencia de neutro para la suma

Dada la igualdad $4x = 16$, encontrar el valor de x, justificando cada uno de los pasos del procedimiento.

$(\frac{1}{4}) \cdot 4x$	$=$	$(\frac{1}{4}) \cdot 16$	Multiplicativa de la igualdad
$(\frac{1}{4}) \cdot (4x)$	$=$	$(\frac{1}{4}) \cdot (4 \cdot 4)$	Sustitución de la igualdad
$[(\frac{1}{4}) \cdot 4] \cdot x$	$=$	$[(\frac{1}{4}) \cdot 4] \cdot 4$	Asociativa para la multiplicación
$1 \cdot x$	$=$	$1 \cdot 4$	Sustitución
x	$=$	4	Existencia de neutro para la multiplicación

Dada la igualdad $3x + 5 = 23$, encontrar el valor de x, justificando cada uno de los pasos del procedimiento.

$(3x+5)+(-5)$	$=$	$23+(-5)$	Aditiva de la igualdad
$(3x+5)+(-5)$	$=$	$(18+5)+(-5)$	Sustitución de la igualdad
$3x+[5+(-5)]$	$=$	$18+[5+(-5)]$	Asociativa para la suma
$3x+0$	$=$	$18+0$	Sustitución de la igualdad
$3x$	$=$	18	Existencia de neutro para la suma
$(\frac{1}{3})\cdot 3x$	$=$	$(\frac{1}{3})\cdot 18$	Multiplicativa de la igualdad
$(\frac{1}{3})\cdot(3x)$	$=$	$(\frac{1}{3})\cdot(3\cdot 6)$	Sustitución de la igualdad
$[(\frac{1}{3})\cdot 3]\cdot x$	$=$	$[(\frac{1}{3})\cdot 3]\cdot 6$	Asociativa para la multiplicación
$1\cdot x$	$=$	$1\cdot 6$	Sustitución de la igualdad
x	$=$	6	Existencia de neutro para la multiplicación

Dada la igualdad $2x + 6x = 15$, encontrar el valor de x, justificando cada uno de los pasos del procedimiento.

$(2+6)\cdot x$	$=$	15	Distributiva por la derecha
$8 \cdot x$	$=$	15	Sustitución de la igualdad
$(\frac{1}{8}) \cdot 8 \cdot x$	$=$	$(\frac{1}{8}) \cdot 15$	Multiplicativa de la igualdad
$[(\frac{1}{8}) \cdot 8] \cdot x$	$=$	$(\frac{1}{8}) \cdot 15$	Asociativa para la multiplicación
$1 \cdot x$	$=$	$\frac{15}{8}$	Sustitución de la igualdad
x	$=$	$\frac{15}{8}$	Existencia de neutro para la multiplicación

5.3.5 Propiedades de orden

En matemáticas es común encontrar situaciones donde existe la necesidad de comparar dos cantidades para saber cual de ellas es mayor, es por tanto necesario distinguir que los números reales es un campo ordenado. Esto significa que dados dos elementos diferentes uno de ellos necesariamente es mayor que el otro.

5.3.6 Orden de los reales

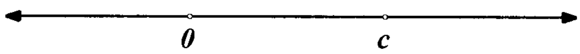
Si a y b son números reales, decimos que $a < b$ (a es menor que b), si b se encuentra a la derecha de a en la recta de reales.

$a < b$

Dado que b se encuentra a la derecha de a

Por ejemplo cuando decimos que $c > 0$, estamos afirmando que c es un real que se encuentra a la derecha del cero, por tal motivo podemos concluir que c es positivo.

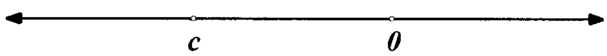
$c > 0$



Dado que c se encuentra a la derecha de 0, entonces c es positivo.

De manera similar podemos afirmar que todos los números $c < 0$, se encuentran a la izquierda de cero y por tal motivo son negativos.

$c < 0$



Dado que c se encuentra a la izquierda de 0, entonces c es negativo.

Debemos notar entonces que el cero no es positivo ni negativo.

Procedemos ahora a mencionar las propiedades de orden que distinguen a los números reales.

1. **Tricotomía:** Si a y b son números reales, sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$a < b, \qquad a = b \qquad \text{o} \qquad a > b$$

2. **Transitiva:** Si a, b y c son números reales, $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

3. **Aditiva:** Si a, b y c son números reales y $a < b$, entonces $a + c < b + c$

4. **Multiplicativa:** Si a, b son números reales y $a < b$, entonces

   - $a \cdot c < b \cdot c$, sólo si $c > 0$.
   - $a \cdot c > b \cdot c$, sólo si $c < 0$.

Ejemplos:

Teorema:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0 \text{ entonces } a^2 > 0$$

Demostración:

Como $a \neq 0$, entonces tenemos dos casos a considerar, Cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$. Hagamos la demostración para ambos casos.

- Primer caso: cuando $a > 0$.

$$a \cdot a > 0 \cdot a \qquad \text{Multiplicativa de orden}$$

$$a^2 > 0 \qquad \text{Por sustitución}$$

- Segundo caso: cuando $a < 0$.

$$a \cdot a > 0 \cdot a \qquad \text{Multiplicativa de orden}$$

$$a^2 > 0 \qquad \text{Por sustitución}$$

Dada la desigualdad $5x + 1 > 11$, encontrar los valores de x, justificando cada uno de los pasos del procedimiento.

$(5x+1)+(-1)$	$>$	$11+(-1)$	Aditiva de orden
$(5x+1)+(-1)$	$>$	$(10+1)+(-1)$	Sustitución de la igualdad
$5x+[1+(-1)]$	$>$	$10+[1+(-1)]$	Asociativa para la suma
$5x+0$	$>$	$10+0$	Sustitución de la igualdad
$5x$	$>$	10	Existencia de neutro para la suma
$(\frac{1}{5}) \cdot (5x)$	$>$	$(\frac{1}{5}) \cdot 10$	Multiplicativa de orden
$(\frac{1}{5}) \cdot (5x)$	$>$	$(\frac{1}{5}) \cdot (5 \cdot 2)$	Sustitución de la igualdad
$[(\frac{1}{5}) \cdot 5] \cdot x$	$>$	$[(\frac{1}{5}) \cdot 5] \cdot 2$	Asociativa para la multiplicación
$1 \cdot x$	$>$	$1 \cdot 2$	Sustitución de la igualdad
x	$>$	2	Existencia de neutro para la multiplicación

Dada la desigualdad $7 - 4x < 27$, encontrar los valores de x, justificando cada uno de los pasos del procedimiento.

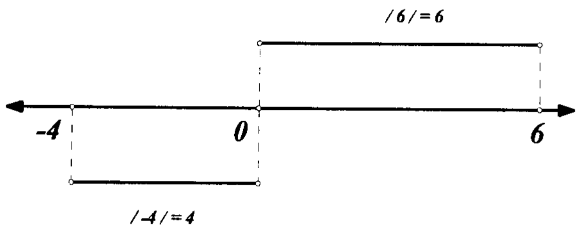
$(-7)+7-4x$	$<$	$(-7)+27$	Aditiva de orden
$(-7)+7-4x$	$<$	$(-7)+7+20$	Sustitución de la igualdad
$[(-7)+7]-4x$	$<$	$[(-7)+7]+20$	Asociativa para la suma
$0-4x$	$>$	$0+20$	Sustitución de la igualdad
$-4x$	$>$	20	Existencia de neutro para la suma
$(-\frac{1}{4})\cdot(-4x)$	$>$	$(-\frac{1}{4})\cdot 20$	Multiplicativa de orden
$(-\frac{1}{4})\cdot(-4x)$	$>$	$(-\frac{1}{4})\cdot 20$	Sustitución de la igualdad
$[(-\frac{1}{4})\cdot(-4)]\cdot x$	$>$	$(-\frac{1}{4})\cdot 20$	Asociativa para la multiplicación
$1\cdot x$	$>$	-5	Sustitución de la igualdad
x	$>$	-5	Existencia de neutro para la multiplicación

5.3.7 Valor absoluto

El valor absoluto de un número real a, denotado por $|a|$ es la distancia del punto que asocia en la recta al origen.

Por ejemplo si se desea encontrar el valor absoluto de $6, 0$ y -4 respectivamente, hacerlo se traduce en encontrar la distancia del origen a cada uno de los puntos de la recta de reales, por tal motivo podemos decir que

$$|6| = 6 \qquad |-4| = 4 \qquad |0| = 0$$



Debemos observar que si un número es positivo o cero, su distancia al origen es él mismo, en cambio si un número es negativo, su distancia al origen es su inverso aditivo. A partir de lo anterior podemos establecer la siguiente

Definición: El valor absoluto de un número real x (que se denota por $|x|$) es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Ejemplo:

¿Cuál es el valor absoluto de -5 ?

Respuesta:

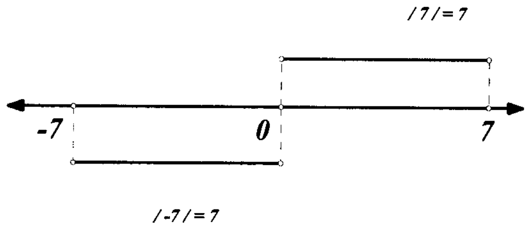
Encontrar el valor absoluto de -5, es lo mismo que encontrar la distancia desde el origen hasta el punto -5, por tanto $|-5| = 5$.

- Ejemplo:

¿Cuáles son los valores de x, tales que $|x| = 7$?

Respuesta:

Pensar en los valores de x que cumplen con esta igualdad, se traduce en encontrar los puntos de la recta de reales que se encuentran a 7 unidades de distancia del origen. Estos puntos son 7 y -7.



propiedades del valor absoluto

1. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $|a| \geq 0$.

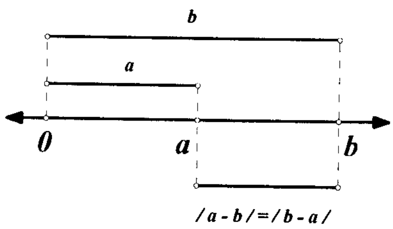
2. $|a| = 0$, solo si $a = 0$

3. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|a - b| = |b - a|$.

4. Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$ (Desigualdad del triángulo).

Observacion:

Debemos distinguir que el valor absoluto de una resta de dos reales, es la distancia entre ellos, por tal motivo la propiedad número tres es cierta.

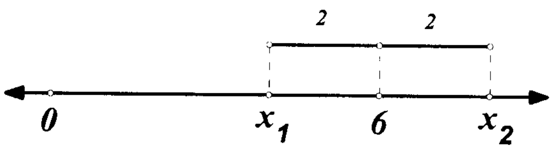


Ejemplo:

Encontrar los valores de x, tales que $|x-6|=2$

Solución:

El problema, en términos geométricos se reduce a encontrar los valores para x que se encuentran a una distancia de 2 unidades en la recta de reales del punto 6.



Es claro que los valores de x que responden la pregunta son 4 y 8, sin embargo propongamos la solución de este problema, en términos de las propiedades vistas. Se pueden distinguir en la solución los siguientes dos casos:

- Cuando $x>6$, es decir cuando el punto x se encuentra a la derecha del número 6 en la recta de reales, esto tiene por consecuencia que $x-6>0$, por tal motivo podemos decir que

$$|x-6|=x-6=2$$

luego la primer solución es

$$x = 8$$

- Por el contrario si $x < 6$, entonces x se encuentra a la izquierda del número 6 en la recta de reales, esto tiene por consecuencia que $x - 6 < 0$, por tal motivo se dice que

$$|x - 6| = -(x - 6) = 2$$

luego la segunda solución es

$$x = 4$$

Ejercicios:

1. Justifica cada una de las siguientes expresiones con alguna propiedad de los números reales.

   - a) $\pi \cdot (8 + a) = \pi \cdot 8 + \pi \cdot a$
   - b) $7 \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) = (7 \cdot 3) \cdot \sqrt{2}$
   - c) Si $\frac{1}{3} = x$ entonces $x = \frac{1}{3}$
   - d) $(-a) + 0 = -a$
   - e) $(-1) \cdot 1 = -1$
   - f) $\pi + (-\pi) = 0$
   - g) $x \cdot 1 + y \cdot 1 = x + y$
   - h) $(\sqrt{5} + 7) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}+7} = 1$
   - i) Si $x + y = z$ entonces $(x + y) + 3 = z + 3$

2. Escribe las propiedades usadas en la demostración del siguiente:

Teorema: Si x es cualquier número real, entonces

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
0+0 &= 0 \\
x &= x \\
x \cdot (0+0) &= x \cdot 0 \\
x \cdot 0 + x \cdot 0 &= x \cdot 0 \\
-(x \cdot 0) &= -(x \cdot 0) \\
-(x \cdot 0) + [x \cdot 0 + x \cdot 0] &= -(x \cdot 0) + x \cdot 0 \\
[-(x \cdot 0) + x \cdot 0] + x \cdot 0 &= -(x \cdot 0) + x \cdot 0 \\
0 + x \cdot 0 &= 0 \\
x \cdot 0 &= 0 \\
0 \cdot x &= 0
\end{aligned}$$

3. Demuestra los siguientes teroemas, usando las propiedades y resultados vistos.

   a) Teorema: Si x es cualquier número real, entonces

   $$-(-x) = x$$

   b) Teorema: Si x es cualquier número real distinto de cero, entonces:

   $$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

4. Para las siguientes igualdades, encuentra el valor de x, escribiendo en cada paso la propiedad que se este usando.

   a) $3x + 1 = 4$

   b) $-x = 6$

   c) $7x + \sqrt{2} = 14 + \sqrt{2}$

   d) $\frac{1}{x} = 2$

   e) $\pi x - \pi = 0$

   f) $3x + 2 = 2x - 2$

5. Encuentra el valor de x para:

   a) $|x - 3| = 2$

   b) $|x + 5| = 0$

   c) $|x - 7| = -3$

Bibliografía

Arizmendi Hugo. 1987. "Cálculo. Primer curso, nivel superior". Addison-Wesley Iberoamericana.

Asimov Isaac. 1980. "El reino de los números". Editorial Diana. México.

Ávila A. 1986. "La enseñanza Oficial de las matemáticas elementales en México, su psicopedagogía y transformación". Facultad de filosofía y Letras de la UNAM. México.

Cardenas-Lluis-Raggi-Tomás. 1973. "Álgebra Superior" . Editorial Trillas. México. Collette Jean-Paul. 1986. "Historia de la matemáticas I". Siglo Veintiuno Editores.

De la Peña J. Antonio. 1999. "Álgebra en todas partes". Fondo de Cultura Económica. Serie "Ciencia para todos". México.

Fraleigh John. 1987. "Álgebra abstracta". Addison-Wesley Iberoamericana.

Fregoso Arturo. 1980. "Los elementos del lenguaje de la matemática. Sistemas numéricos bien ordenados". Editorial Trillas. México.

Fregoso Arturo. 1980. "Los elementos del lenguaje de la matemática. Números reales". Editorial Trillas. México.

García Bacca J. David. 1992. "Euclides elementos de geometría". Universidad Nacional Autónoma de México.

Hasser y Sullivan. 1998. "Análisis real" . Editorial Trillas. México.

Hasser y Sullivan. 1995. "Introducción al análisis, volumen I" . Editorial Trillas. México.

Howard Eves. 1975. "An introduction to the history of mathematics". Holt rinehart and winston.

Howard Eves. "Estudio de las geometrías" I. UTEHA.

Jiménez Joaquín. 1990. "Propuesta Metodológica sobre la enseñanza de las fracciones en la educación básica". Educación Matemática (abril 1990). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Lara Aparicio Miguel. 1990. "Lecturas universitarias". Antología de Matemáticas 7. Universidad Nacional Autónoma de México.

Lara Aparicio Miguel. 1991. "Los matemáticos griegos" .Universidad Autónoma de Querétaro. México.

National Council of Teachers of Mathematics. 1998. "Sistemas de numeración para los números racionales". Editorial Trillas. México.

National Council of Teachers of Mathematics. 1991. "Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática". Traducción realizada por Alvarez y Casado. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES".España.

National Council of Teachers of Mathematics. 1995. "Sistemas de numeración para los números reales". Editorial Trillas. México.

National Council of Teachers of Mathematics. 1999. "Números y sus factores". Editorial Trillas. México.

Ohlsson S. 1988. Resumen presentado por E. Mancera en "Significados y Significante-s". Educación matemática (Agosto 1992). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Oropeza Medrano Jaime. 1998. "Platicando con los números". Instituto Politécnico Nacional.

Perero Mariano. 1994. "Historia e historias de matemáticas". Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Tomás Francisco. 1973. "Los números reales". Asociación de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior. México.

Tomás Francisco. 1993. "Los números racionales". Editorial Trillas. México.